В.М. Дубовой

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ
КОНТРОЛЮ ТА КЕРУВАННЯ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.М.ДУБОВОЙ

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ КОНТРОЛЮ ТА КЕРУВАННЯ

Затверджено на засіданні Вченої ради Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напряму підготовки 0914 "Комп'ютеризовані системи, автоматика і управління" всіх спеціальностей. Протокол № 5 від 30 грудня 2004 року

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 62.529
Д 79

Рецензенти:
Р.Н.Квєтний, доктор технічних наук, професор
П.Д.Лежнюк, доктор технічних наук, професор
В.С.Мельник, доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Дубовой В.М.
Д 79 **Моделювання систем контролю та керування**. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. - с.

Дана загальна характеристика математичного моделювання. В основу розгляду покладене поняття системи моделей. Розглянуті основні типи математичних моделей та способи їх ідентифікації. Приділено увагу питанням моделювання систем контролю та керування в умовах невизначеності. Розглянуті основні напрямки застосування математичного моделювання.

УДК 62.529

ЗМІСТ

ВСТУП

Моделювання є одним з найважливіших напрямків підготовки сучасного інженера та наукового співробітника. Воно пронизує всі аспекти його діяльності, адже на відміну від робітника, інженер працює не безпосередньо з об'єктом, а з його описом. Це може бути або проект певної технічної системи, або програма розрахунків, або вказівки, які інженер-керівник дає підлеглим. Все це є моделі об'єктів або процесів, адже будь-який їх опис є моделлю. Та й сам процес навчання є фактично процесом моделювання, в якому студент з допомогою викладача створює модель предметної області, в якій він спеціалізується, і закріплює її у своєму конспекті.

В останні роки постійно зростає роль математичного моделювання, яке починає переважати всі інші види моделювання. Це зумовлено тотальним проникненням комп'ютерної техніки у всі аспекти техніки та життя. Адже кожна прикладна програма у комп'ютері є моделлю, а сам комп'ютер з системним програмним забезпеченням – засобом моделювання.

В таких умовах дуже важливим є систематичний і чіткий погляд на загальні принципи математичного моделювання, які допоможуть інженерам та науковим працівникам легко адаптуватися до будь-якої області діяльності. Адже, „знання деяких принципів легко компенсує незнання деяких фактів" (Клод Адріан Гельвецій).

Даний посібник написаний на основі досвіду викладання математичного моделювання на кафедрі Комп'ютерних систем керування та багаторічних досліджень у цьому напрямку. Автор висловлює подяку колективу кафедри, а також своїм учням О.В. Глонь, Ю.М. Паночишину, Д.Ю. Семенцю та іншим, чиї матеріали досліджень використані при написанні посібника.

Посібник призначений для бакалаврської та магістерської підготовки студентів за напрямом підготовки 0914 та іншими спорідненими напрямами.

Посібник задумано і виконано у друкованому та комп'ютерному варіантах. Комп'ютерний варіант посібника дає змогу отримати додаткову інформацію за допомогою Internet, оскільки більшість ключових слів та прізвищ авторів літературних джерел є гіперпосиланнями на цікаві Internet-сайти. При використанні друкованого варіанта посібника ключові слова теж можуть стати у пригоді для пошуку інформації за допомогою пошукових систем (автор рекомендує сервер http://www.google.com.ua/).

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

Поняття „*моделі*" та „*моделювання*" є одними з базових в усіх галузях наукової та інженерної діяльності. Напевно, саме через різноманітність напрямків в окремих теоретичних дисциплінах під моделюванням розуміють суттєво різні теорії, методи та засоби. Розглянемо ці поняття так, як це розуміють в інженерній практиці фахівці з *систем контролю та управління.*

1.1. Постановка задачі моделювання

Моделювання – це опис певного *об'єкта.* В галузі систем контролю та управління об'єктами є відповідно ці системи, а також їх складові частини.

Моделювання можна розглядати як *відображення* об'єкта на множину його описів. При цьому, якщо об'єкту O і моделі M властиві певні набори характеристик $O\{\overline{X}\}$ і $M\{\overline{Z}\}$, то повинна існувати відповідність характеристик моделі і об'єкта $x_i \leftrightarrow z_j \quad i \in [1 \cdots n], \quad j \in [1 \cdots m]$. Найчастіше модель свідомо будують як спрощений опис об'єкта для полегшення його дослідження. Це й не дивно, оскільки природні об'єкти характеризуються безліччю показників, більшість з яких є несуттєвою з точки зору *мети моделювання.* Так наприклад, при моделюванні системи керування токарним верстатом несуттєвими характеристиками є його колір, рівень шуму тощо. В результаті між моделлю та об'єктом немає повної відповідності.

Отже, задачу моделювання можна сформулювати таким чином:

- необхідно для заданого об'єкта підібрати такий опис, який у повній мірі відображав би оригінал з точки зору заданої мети моделювання.

Якщо об'єктом моделювання є система керування, головним призначенням якої є приведення об'єкта керування у заданий стан, то модель повинна відображати залежність стану об'єкта від завдання з врахуванням характеристик системи. У вужчому розумінні математичного моделювання ця залежність може бути подана певним функціоналом

$$\Theta_Y = F[\Theta_X] \qquad (1.1)$$

де Θ_Y – набір характеристик стану системи – модель стану, $Y = \{y_1, \dots y_m\}$;

Θ_X – набір характеристик вхідних впливів – модель впливів, $X = \{x_1, \dots x_n\}$;

F *- функціонал перетворення* – модель функціонування системи.

Математичне моделювання є динамічною галуззю науки, яка тісно пов'язана з розвитком цивілізації. В процесі досліджень вчені вдаються до математичної формалізації все більш складних явищ. Умовна *ієрархія моделей* наведена на рис.1.1. Створені моделі стають основою для нового кроку розвитку. Поступово те, що нещодавно зустрічалося лише у фантастичних романах, отримує математичне обґрунтування і стає реальністю. Сьогодні ряд вчених вже працюють над створенням математичних моделей того, що на рис.1.1 позначено “?”.

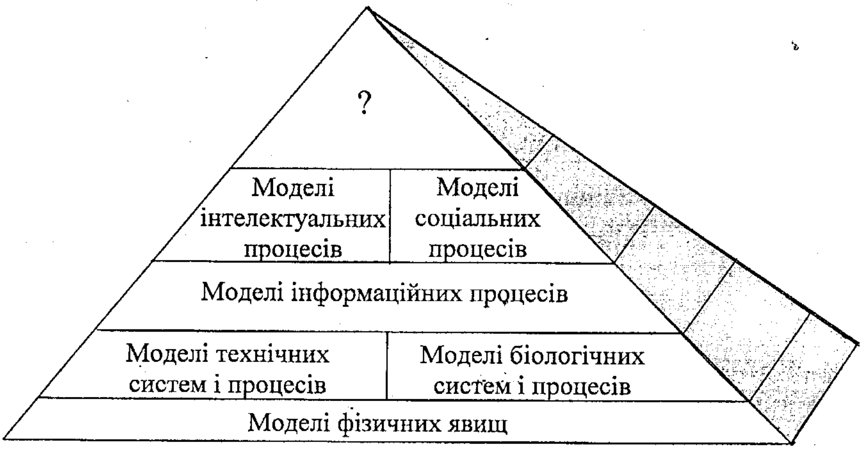


Рис.1.1. Історична ієрархія моделей

Контрольні питання

1. Що таке модель?
2. В чому суть процесу моделювання?
3. Що таке функціонал?
4. При моделюванні об’єкт відображується у моделі. А чи існує зворотне відображення?

Ключові слова

Модель, моделювання (1 2), система контролю та управління, об’єкт, відображення, мета моделювання, функціонал перетворення, ієрархія моделей.

Література

1. Энциклопедия кибернетики./В 2-х томах. – К.: УСЭ, 1975.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш.шк., 1985.
3. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К.: Вища школа, 1988.
4. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия,

1972. – 376 с.
5. Скурихин В.И. и др. Математическое моделирование. – К.: Техніка, 1983. – 270 с.
6. Каравайкин А.В. Активный метод исследования неэлектромагнитного информационного обмена в природе. – Тоннель-XXI / Сборник научных трудов. – М., 2003.
7. Дабагян А.В. Человек, его сознание и культура в паутине электронно-цифровых сетей. – Харьков: Торсинг, 2003. – 336с.
8. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. – М.: "НТ-Центр", 1993. – 362с.

1.2. Види моделей

В залежності від задач, для розв'язання яких призначені моделі, використовуються дуже різноманітні моделі.

В залежності від способу опису об'єкта-оригінала моделі розділяються на

- вербальні
- формальні
- алгоритмічні
- фізичні

Вербальні моделі використовують словесний опис об'єкта. Такі моделі часто використовують в нетехнічних галузях, а також на початковому етапі моделювання в техніці.

Формальні моделі використовують опис об'єкта моделювання у вигляді формул і подаються системою математичних співвідношень.

Алгоритмічні моделі подають об'єкт у вигляді послідовності дій, які дозволяють отримати його необхідну характеристику.

Фізична модель представляє об'єкт-оригінал іншим об'єктом такої ж (масштабні моделі) або іншої (аналогові моделі) фізичної природи. Основою фізичного моделювання є теорія подібності. При фізичному моделюванні зберігаються особливості проведення експерименту в натурі. Фізичне моделювання застосовують при дослідженні систем, для яких вихідні дані відомі з обмеженою точністю чи неможливо дати точний математичний опис їх функціонування, а отримання експериментальних характеристик пов'язано з надмірними труднощами та затратами.

В *аналогових моделях* фізична природа моделі і об'єкта різні, а їх математичні описи подібні і, крім того, подібні рівняння, які описують їх окремі елементи. В моделі-аналозі реакції на збурення подібні реакціям на аналогічні збурення об'єкта. Моделі-аналоги складаються з окремих блоків, які моделюють фізичні елементи, а не з блоків, які виконують окремі математичні операції. Кожному фізичному параметру в об'єкті однозначно відповідає деякий елемент в моделі-аналозі. Найчастіше використовують електронні моделі при дослідженні поведінки систем, конструювання та безпосереднє вивчення яких пов'язано з надмірними труднощами та витратами.

Масштабна модель – це аналогова модель, в якій між параметрами об'єкта і моделі однакової фізичної природи існує однозначна відповідність, а також відповідність між функцією збудження та реакцією. В масштабній моделі кожний елемент їх в масштабі повторює відповідний елемент об'єкта.

В залежності від типу простору, в якому розглядається об'єкт виділяють моделі:

- геометричні
- структурні
- функціональні
- інформаційні

Геометричні моделі відображають форму та розташування об'єкта моделювання та його складових частин. Геометричними моделями є різноманітні креслення механізмів, будівель тощо.

Структурна модель подає об'єкт моделювання з точки зору його складу та взаємозв'язку частин між собою та з зовнішнім середовищем. Структурні моделі найчастіше існують у формі різноманітних структурних та принципових схем.

Функціональні моделі описують процеси, що відбуваються в об'єкті моделювання.

Інформаційна модель – система даних про об'єкт та опис потоків даних в процесі його функціонування.

В залежності від наявності відображення змін стану об'єкта у часі моделі поділяються на:

- моделі статики
- моделі динаміки

Моделі статики відображують стан та функціонування об'єкта без врахування їх змін у часі. Як правило, вони подаються у вигляді функціональних залежностей, рівнянь та систем рівнянь.

Моделі динаміки відображають поведінку об'єкта у часі. Моделі динаміки багатші за моделі статики, оскільки останні можуть розглядатися як частковий випадок для певного фіксованого моменту часу. Відповідно і форм представлення моделей динаміки значно більше (диференціальні рівняння, операторні рівняння, спектральні представлення тощо).

За степенем та характером невизначеності моделі поділяються на:

- детерміновані

- стохастичні
- нечіткі
- узагальнені

Детерміновані моделі не враховують можливі відхилення характеристик об'єкта від номінальних значень.

Стохастичні моделі розглядають поведінку системи в умовах дії випадкових впливів та випадкової зміни параметрів системи. Інколи розглядають також випадкові зміни структури системи, зумовлені ненадійністю зв'язків між підсистемами та іншими причинами, моделюючи їх ймовірнісними графами.

Нечіткі моделі використовують у випадках, коли окремі параметри системи задані експертом з кінцевим ступенем впевненості.

Узагальнені моделі використовуються при моделюванні систем, в яких частина параметрів задані достовірно, частина отримана в результаті статистичної обробки певних випадкових процесів, а частина задана експертним методом.

В залежності від способу представлення складного об'єкта (системи) розрізняють моделі:

- агрегатні
- комплексні

Агрегатна модель складної системи складається з моделей окремих підсистем та опису їх взаємодії. Якщо розглядати для прикладу деяку систему керування, то моделі підсистем представляються окремими рівняннями, що зв'язують вихідні сигнали з вхідними і параметрами підсистеми, а агрегатна модель буде представлятися системою цих рівнянь. Взаємодія підсистем тут враховується тим, що вихідні сигнали однієї підсистеми є вхідними для іншої і в агрегатній моделі мають однакове позначення.

Комплексна модель представляє систему в цілому, не розділяючи її на підсистеми і окремі внутрішні процеси. Комплексна модель може бути отримана з агрегатної шляхом зведення системи рівнянь до одного рівняння, що зв'язує вхідні і вихідні сигнали системи, методом підстановки.

В залежності від способу отримання результатів моделювання розрізняють математичні моделі:

- аналітичні;
- імітаційні.

Аналітичне моделювання – знаходження характеристик об'єкта на основі формальної або алгоритмічної моделі шляхом виконання певних математичних перетворень: розв'язання рівнянь та систем рівнянь тощо.

Імітаційне моделювання – проведення на ЕОМ чисельних експериментів з математичною моделлю, що описує поводження складної системи на протязі певного періоду часу. Застосовується, як правило, в тих випадках, коли аналітичні способи дослідження моделі відсутні, а їх пошук потребує дуже великих витрат. Алгоритми імітаційного моделювання можуть враховувати як детермінованість, так і стохастичність, зв'язки і залежності, що характеризують об'єкт моделювання. Найбільше розповсюдження отримали стохастичні методи імітаційного моделювання, оскільки для більшості складних систем відомі лише усереднені значення параметрів. Оскільки імітаційне моделювання представляє собою експеримент, важливе значення має застосування методів планування експерименту. Основні проблеми, які доводиться розв'язувати в зв'язку з цим:

1) Забезпечення стохастичної збіжності;

2) Намагання зменшити кількість різних комбінацій факторів, що впливають на об'єкт, без зменшення кількості отриманої інформації;

3) Вибір плану експерименту, який залежить від глибини розуміння експериментатором суті процесів, що відбуваються в системі.

Контрольні питання

Поясніть терміни:

- вербальна модель,
- формальна модель,
- алгоритмічна модель,
- фізична модель,
- аналогова модель,
- масштабна модель,
- геометрична модель,
- структурна модель,
- функціональна модель,
- інформаційна модель,
- модель статики,
- модель динаміки,
- детермінована модель,
- стохастична модель,
- нечітка модель,
- узагальнена модель,
- комплексна модель,
- аналітична модель,
- імітаційна модель

Ключові слова

Вербальні моделі, формальні моделі, алгоритмічні моделі, фізичні моделі (1 2), аналогові моделі, масштабні моделі, геометричні моделі, структурні моделі, функціональні моделі, інформаційні моделі, моделі статики, моделі динаміки, детерміновані моделі, стохастичні моделі, нечіткі моделі, узагальнені моделі, комплексні моделі, аналітичні моделі, імітаційні моделі

Література

1. Энциклопедия кибернетики./В 2-х томах. – К.: УСЭ, 1975.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш.шк.,

1985.
3. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К.: Вища школа, 1988.
4. Скурихин В.И. и др. Математическое моделирование. – К.: Техніка, 1983. – 270 с.
5. Справочник по аналоговой вычислительной технике. /Под ред. Г.Е.Пухова. – К.: Техніка, 1975.

1.3. Характеристики моделей

Необхідна умова для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт дослідження - вимога адекватності моделі і об'єкта [1].

Адекватність - це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження .

При моделюванні складної системи звичайно використовується сукупність декількох адекватних моделей з числа всіх різновидів. Будь-яка система чи підсистема може бути представлена різноманітними способами, які значно відрізняються один від одного за складністю і деталізацією. В більшості випадків в результаті дослідження з'являється декілька різних моделей одної і тої ж системи. При цьому в залежності від глибини аналізу прості моделі послідовно заміняються все більш складними.

Оскільки всяка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, при якій модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу. Відповідно, оцінювання ступеня подібності може опиратися тільки на оцінювання точності або відмінності від оригіналу. Оцінювання відмінності натикається природним чином на великі труднощі, оскільки звичайно неможливо використовувати для порівняння об'єкт у всій його дійсній цілісності [2].

Точність математичної моделі – її властивість, яка відбиває ступінь збігу передбачених з її допомогою значень характеристик об'єкта з дійсним значенням цих характеристик. За дійсне значення характеристик об'єкта звичайно приймають експериментально отримані значення.

Точність характеризується похибкою і є величиною, оберненою до неї. Похибка – це відхилення модельного значення від дійсного. У залежності від призначення моделі розглядають похибки абсолютні, відносні і зведені; максимальні, середні, середні квадратичні [3].

– абсолютна похибка $\Delta_y = y - y^*$, де y – модельне значення, y^* - дійсне значення;

– відносна похибка $\varepsilon_y = \dfrac{\Delta_y}{y}$;

– зведена похибка $\delta_y = \dfrac{\Delta_y}{y^*_{\max} - y^*_{\min}}$, де $y^*_{\max} - y^*_{\min}$ - діапазон значень результату моделювання;

– максимальна похибка $\Delta_y = \max\limits_{x_i \in X}(y_i - y_i^*)$,

– середня похибка $\Delta_y = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{n} \dots \sum\limits_{k=1}^{m}[y(x_i,\dots,x_k) - y^*(x_i,\dots,x_k)]$,

– середня квадратична похибка

$$\Delta_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n} \dots \sum_{k=1}^{m}[y(x_i,\dots,x_k) - y^*(x_i,\dots,x_k)]^2}.$$

Похибки моделювання також класифікують за джерелами походження: методичні, обчислювальні, похибки від невизначеності початкових даних та ін.

Методичні похибки можуть бути викликані нехтуванням певними впливовими факторами, помилками у виборі виду функціональної залежності, невідповідністю способу отримання результату моделювання особливостям моделі, неправильним вибором типу моделі тощо.

Обчислювальні похибки викликані особливостями алгоритму отримання результату. При великій кількості послідовних обчислень похибка накопичується і може досягати значної величини. Такі ситуації виникають при розв'язанні диференціальних рівнянь, особливо у частинних похідних, та інших задачах.

Похибки від невизначеності початкових даних відіграють значну роль при використанні алгоритмів, які мають низьку стійкість. Так наприклад, при обчисленні похідної різницевим методом похибка результату може значно перевищувати похибки початкових даних.

Якщо визначені окремі похибки, то за умови їх незалежності загальна середня квадратична похибка підраховується за формулою

$$\Delta_\Sigma = \sqrt{\sum_i \Delta_{yi}^2}$$

Крім точності моделі характеризуються додатковими показниками [4].

Економічність математичної моделі визначається перш за все затратами машинного часу. Показником економічності математичної моделі може слугувати також кількість внутрішніх параметрів, які використовуються в ній. Чим більше таких параметрів, тим більші витрати машинної пам'яті і тим більше зусиль вимагається для отримання даних про їх чисельні значення.

Ступінь універсальності математичної моделі визначається її застосуванням до аналізу численої групи однотипних об'єктів, до їх аналізу в одному чи багатьох режимах функціонування. В протилежному випадку використання машинних методів стане недоцільним.

Контрольні питання

1. Як визначається адекватність моделі, чим вона характеризується?
2. Дайте означення основних характеристик точності моделі?
3. Що є джерелами похибок моделювання?
4. Якими якісними показниками характеризується модель?

Ключові слова

Адекватність моделі, точність моделі, похибка моделі, абсолютна похибка, відносна похибка, зведена похибка, максимальна похибка, середня похибка, середня квадратична похибка, методична похибка, обчислювальна похибка (1 2), похибки від невизначеності початкових даних, економічність моделі, ступінь універсальності моделі.

Література

1. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К.: Вища школа, 1988.
2. Скурихин В.И. и др. Математическое моделирование. – К.: Техніка, 1983. – 270 с.
3. Володарський Є.Т., Кухарчук В.В., Поджаренко В.О., Сердюк Г.Б. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю. – Вінниця: Велес, 2001. – 219с.
4. Норенков И.П. Введение в автоматизированное проектирование технологических устройств и систем. –М.: Высш. Школа, 1980. –311 с.
5. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш.шк., 1985.

1.4. Ізоморфні та гомеоморфні моделі

Поняття адекватності – вельми широке, основане на строгих в математичному відношенні поняттях ізоморфізму і гомеоморфізму [1]. Дві системи (в даному випадку об'єкт дослідження і його модель) називаються *ізоморфними,* якщо між ними існує взаємно однозначний зв'язок. В загальному випадку забезпечення ізоморфізму моделі і об'єкта дослідження може бути не тільки важко виконаним, а й зайвим, оскільки трудність моделі при цьому може виявитись настільки значною, що не буде можливим ніяке спрощення вирішуваної задачі. Гомеоморфізм, як і ізоморфізм, передбачає збереження в моделі всіх визначених на об'єктах дослідження властивостей і відношень. Однак тут вимога взаємно-однозначної відповідності замінюється вимогою однозначної відповідності моделі об'єкту, тоді як відповідність об'єкта моделі неоднозначне.

Ізоморфна модель включає всі ознаки, які теоретично належать об'єкту-оригіналу. При прагненні побудувати ізоморфну модель головна складність – відшукування перетворення, що встановлює необхідну взаємно-однозначну відповідність.

Гомеоморфізм визначає таку форму зв'язку між двома подібними об'єктами, при якій однозначне лише в одну сторону перетворення дозволяє звести вихідну систему до більш простої системи, гомеоморфної вихідної. Її називають гомеоморфним образом вихідній системи.

На рис.1.2 зображена графічна інтерпретація понять ізоморфізму і гомеоморфізму.

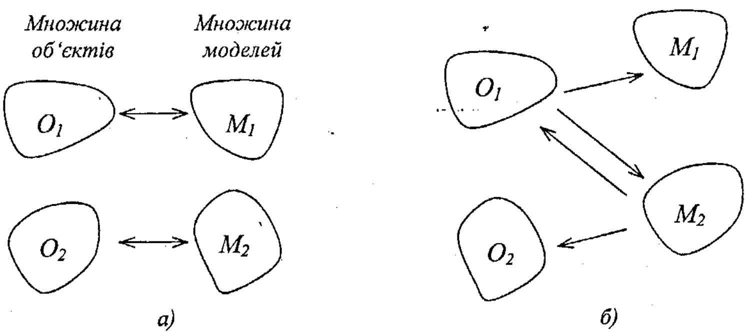


Рис. 1.2. Відповідність моделей і об'єктів: а) ізоморфізм; б) гомеоморфізм

Приклади відповідності:

- ізоморфні моделі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- гомеоморфні моделі

$y = e^x$ і $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ - розклад функції e^x у ряд Тейлора з обмеженою кількістю членів.

Задача встановлення ступеня ідентичності моделі і об'єкта може бути поставлена так: є об'єкт; будуємо його математичну модель таким чином, щоб при подачі однакових вхідних впливів на об'єкт і його модель вихідні сигнали повинні мінімально відрізнятись один від одного.

Ступінь близькості моделі до об'єкта може оцінюватися дисперсійною мірою точності. Але існує клас об'єктів, для яких дисперсійна міра не дає достовірної відповіді на питання про адекватність моделі і об'єкта.

Використання дисперсії $D[M(y/x)]$ умовного математичного сподівання припускає однаковість її розмірності з розмірностями дисперсій входів. Тому оцінювання ступеня ідентичності моделі і неоднорідного нелінійного об'єкта, на який діють змінні з різною розмірністю, з допомогою дисперсійної міри не завжди можливо. В таких випадках доцільно підійти до оцінювання ідентичності з точки зору інформаційної теорії систем [2]. Цей підхід придатний для будь-яких систем.

Контрольні питання

1. Дайте означення гомеоморфізму і ізоморфізму.
2. Який вид моделей є ізоморфним оригіналу?
3. Людина латиною – „Homo sapience". А клонування людини – це гомеоморфне чи ізоморфне моделювання?
4. Як пов'язані поняття гомеоморфізму і методичних похибок моделі?

Ключові слова

Ізоморфізм, гомеоморфізм, відповідність, взаємно однозначна відповідність

Література

1. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К.: Вища школа, 1988.
2. Шилейко А.В., Кочнев В.Ф., Химушкин Ф.Ф. Введение в информационную теорию систем. / Под. ред. А.В. Шилейко . –М.:Радио и связь, 1985. - 280с.
3. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – К.: Вища школа, 1974. – 452с.

1.5. Теорія подібності

Теорія подібності – вчення про дослідження різноманітних явищ, основаних на понятті про подібність.

Два явища подібні, якщо за чисельними значеннями характеристик одного явища можна отримати числові значення характеристик іншого явища простим перерахунком, який аналогічний переходу від однієї системи одиниць вимірювання до іншої. Для будь–якої сукупності подібних явищ всі відповідні безрозмірні характеристики (безрозмірні комбінації розмірних величин) мають однакове числове значення. Обернене твердження також вірне, тобто якщо всі відповідні безрозмірні характеристики для двох явищ однакові, то ці явища фізично подібні.

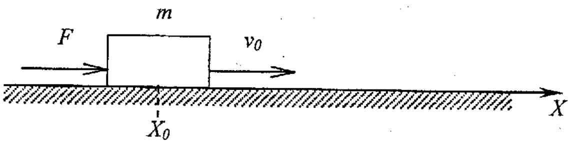
Аналіз розмірності і теорія подібності тісно пов'язані між собою і покладені в основу експериментів з моделями. В таких експериментах здійснюються заміни вивчення деякого об'єкта в натурі вивченням аналогічного явища на моделі іншої фізичної природи (зазвичай в спеціальних лабораторних умовах).

Після встановлення системи параметрів, що визначають виділений клас явищ, встановлюються *умови подібності* двох явищ. Нехай явище визначається n незалежними параметрами, деякі з яких можуть бути безрозмірними. Нехай, далі, розмірність визначається змінними і фізичними постійних виразів через розмірність k з цих параметрів з незалежними розмірностями ($k \leq n$). Тоді з n величин можна скласти лише n-k незалежних комбінацій. Всі шукані безрозмірні характеристики явищ можна розглядати як функцію від цих n-k незалежних безрозмірних комбінацій, складених з певних параметрів. Серед цих безрозмірних величин, складених з певних характеристик явищ, завжди можна вказати деяку базу, тобто систему безрозмірних величин, які визначають собою всі інші.

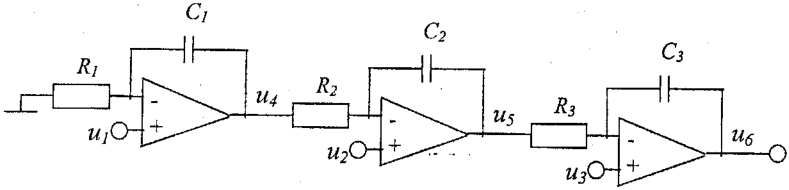
Визначений відповідною постановкою задачі клас явищ містить явища, зовсім не схожі між собою. Виділення з нього підкласу подібних явищ здійснюється за допомогою такої умови.

Для подібності двох явищ необхідно і достатньо, щоб числові значення безрозмірних комбінацій, складених з повного переліку параметрів, які утворюють базу, в цих обох явищах були однакові. Умова про постійність *бази абстрактних параметрів*, складених із заданих величин, які визначають явище, називаються *критерієм подібності*. В гідродинаміці найважливішим критерієм є число Рейнольда, яке характеризує співвідношення між інерційними силами і силами в'язкості, число Маха враховує стиснення газу, число Фруда характеризує співвідношення між інерційними силами і силами тяжіння.

На рис. 1.3 наведений приклад двох подібних моделей різної фізичної природи.



а)



б)

Рис. 1.3. Подібні моделі: а) механічна, б) електрична

Механічна модель описується системою

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \dfrac{F}{m} \cdot \dfrac{t^2}{2} \\ v = \dfrac{dx}{dt} = v_0 + \dfrac{F}{m} t \\ a = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{m} \end{cases}$$

Електрична модель описується системою інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} u_4 = \dfrac{1}{R_1 C_1} \int\limits_0^t u_1 dt \\ u_5 = \dfrac{1}{R_2 C_2} \int\limits_0^t (u_2 - u_4) dt \\ u_6 = u_3 - u_5 \end{cases}$$

Між параметрами двох моделей існує відповідність

$-u_1 \longleftrightarrow a$

$u_2 \longleftrightarrow v_0$

$u_3 \longleftrightarrow x_0$

$$u_4 \longleftrightarrow \frac{F}{m}t$$

$$u_2 - u_4 \longleftrightarrow v_0 + \frac{F}{m}t$$

$$-u_5 \longleftrightarrow v_0 t + \frac{F}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$$

$$u_6 \longleftrightarrow x_0 + v_0 t + \frac{F}{m}\cdot\frac{t^2}{2}$$

Критерії подібності дозволяють встановити аналогію між різними явищами. Можливість моделювання визначається залежністю:

$$\nu = \alpha - R$$

де ν - кількість ступенів свободи;

α - кількість параметрів об'єкта;

R – кількість критеріїв подібності, які повинні виконуватися у моделі.

Якщо число степенів свободи менше 0, то застосовувати моделювання неможливо, оскільки немає свободи вибору параметрів моделі.

Якщо умови подібності виконуються, то для фактичного розрахунку всіх характеристик в натурі за даними про розмірні характеристики на моделі необхідно знати перехідні масштаби для всіх відповідних величин. Якщо явище визначається *n* параметрами, з яких *k* мають незалежну розмірність, то для величини з незалежними розмірностями перехідні масштаби можуть бути довільні і їх потрібно задати з врахуванням умови задачі, а при експериментах і з врахуванням умов досліду. Перехідні масштаби для всіх інших розмірних величин отримують з формул, які виражають розмірність кожної розмірної величини через розмірність *k* величин з незалежними розмірностями, для яких масштаби підказані умовами досліду і постановкою задачі.

Контрольні питання

1. Як визначити, чи є подібними об'єкт і модель?
2. Чому критерій подібності має бути безрозмірним?
3. Чи можна говорити про подібність, якщо модель відображує нечислові характеристики об'єкта (наприклад, структурна модель)?
4. Якщо виконуються умови подібності, то чи можна казати про ізоморфізм моделей?

Ключові слова

Теорія подібності, аналіз розмірності, умови подібності, база абстрактних параметрів, критерій подібності.

Література

1. Математическая энциклопедия. В 6 томах. /Под ред. И.М.Винаградова. - М.: Советская энциклопедия, 1984.
2. Лежнюк П.Д., Кулик В.В. Оптимальне керування потоками потужності і напругою в неоднорідних електричних мережах. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 188с.
3. Лежнюк П.Д. Аналіз чутливості оптимальних рішень в складних системах критеріальним методом. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 131с.
4. Лежнюк П.Д., Бевз С.В. Методи оптимізації в електроенергетиці. Критеріальний метод: Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 1999. – 177с.

1.6. Систематичний підхід до моделювання

Наведена характеристика моделювання дозволяє узагальнити підхід до створення різноманітних моделей систем контролю та керування. Цей підхід ґрунтується на усвідомленні того, що всі моделі СКК відображають одну й ту ж об'єктивну реальність різними методами і у різних формах.

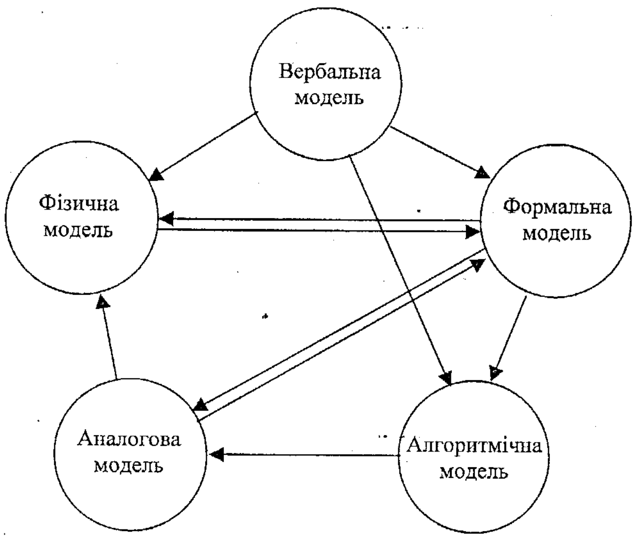


Рис.1.4. Система моделей

Отже між ними повинен бути тісний зв'язок. Схематично цей зв'язок зображений на рис.1.4.

Моделі рис.1.4 переважно гомеоморфні, а у певних випадках навіть ізоморфні. Це означає, що вони можуть перетворюватися одна в одну. Кожна з моделей має свої переваги і недоліки, але найчастіше обрання за основу тої чи іншої моделі зумовлене смаками дослідника та характером спеціальності, в рамках якої виконується дослідження. Так наприклад, в рамках спеціальності „Математичне моделювання та чисельні методи” головна увага приділяється формальним та алгоритмічним моделям. В рамках спеціальності „Елементи та пристрої автоматики та обчислювальної техніки” головна увага приділяється аналоговим і алгоритмічним моделям.

Слід відзначити, що модель М, яка створюється, з точки зору системного підходу [1] також є системою, тобто S'=S'(M), і може розглядатися по відношенню до зовнішнього середовища Е. Найбільш прості за представленням моделі, в яких немає прямої аналогії, а зберігаються лише закони і загальні закономірності поведінки елементів системи S. Правильне розуміння взаємозв'язків як всередині самої моделі М, так і взаємодії її із зовнішнім середовищем Е в значній мірі визначається тим, на якому рівні знаходиться спостерігач.

Простий підхід до вивчення взаємозв'язків між окремими частинами моделі передбачає розгляд їх як відображення зв'язків між окремими підсистемами об'єкта. Такий класичний підхід може бути використаний при створенні доволі простих моделей. Реальний об'єкт, що підлягає моделюванню, розбивається на окремі підсистеми, тобто вибираються вихідні дані Д для моделювання і ставляться цілі Ц, які відображають окремі сторони процесу моделювання. На основі окремої сукупності вихідних даних Д ставиться мета моделювання окремої сторони функціонування системи і на базі цієї мети формується деяка компонента К майбутньої моделі. Сукупність компонентів об'єднується в модель М.

Таким чином, розробка моделі М на базі класичного підходу означає *синтез* окремих компонент в єдину модель, причому кожна з компонент вирішує свої власні задачі та ізольована від інших частин моделі. Тому класичний підхід може бути використаний для реалізації порівняно простих моделей, в яких можливо розділення і взаємно незалежне розглядання окремих сторін функціонування реального об'єкта. Для моделі складного об'єкта така роздрібненість задач, які розв'язуються, неприпустима, оскільки приводить до значних витрат ресурсів при реалізації моделі на базі конкретних програмно-технічних засобів. Можна виділити дві відмінні сторони класичного підходу: спостерігається рух від часткового до загального, модель (система), яка створюється, утворюється шляхом додавання окремих її компонент і не враховується виникнення нового системного ефекту.

З ускладненням об'єктів моделювання виникла необхідність спостереження їх з більш високого рівня. В основі системного підходу лежить розгляд системи як інтегрованого цілого, причому цей розгляд при розробці починається з головного: формулювання мети функціонування. Моделі окремих підсистем, якщо така деталізація необхідна, отримуються шляхом *аналізу* моделі системи.

При моделюванні необхідно забезпечити максимальний ефект моделі системи. Ефективність зазвичай визначається як деяка різниця між якимись показниками цінності результатів, отриманих в результаті експлуатації моделі, і тими витратами, які були закладені в її розробку і створення.

На базі системного підходу може бути запропонована і деяка послідовність розробки моделей, коли виділяють дві основні стадії проектування: *макропроектування* і *мікропроектування*[1, 4].

На стадії макропроектування на основі даних про реальну систему S і зовнішнє середовище E будується модель зовнішнього середовища, виявляються ресурси і обмеження для побудови моделі системи, вибирається модель системи і критерії, які дозволяють оцінити адекватність моделі M реальної системи S.

На стадії мікропроектування визначаються деталі внутрішньої структури і параметри моделі, створюються засоби її реалізації. На цій стадії можна встановити основні характеристики створеної моделі, оцінити час роботи з нею і затрати ресурсів для отримання заданої якості відповідності моделі процесу функціонування системи S.

Фундаментальною основою математичного моделювання є *теорія моделей*. Виникла на початку 30-х років XX ст. на основі семантичних досліджень в математичній логіці і розвитку *теорії універсальних алгебр*. Основи теорії моделей розроблені в роботах Д.Гільберта, А.Тарского, А.І.Майцева, К.Геделя, Е.Лося та інших. В теорії моделей досліджуються загальні властивості *алгебраїчних систем*, аксіоматизації класів алгебраїчних систем та ін.

Відповідно до загального підходу модель можна розглядати як певну алгебраїчну систему, яка складається з множини об'єктів, що описуються даною моделлю, набору операцій, які можуть з ними виконуватися, та властивостей, які вони задовольняють.

У практиці моделювання загальна теорія моделей знайшла втілення у технології об'єктно-орієнтованого програмування. Ця технологія ґрунтується на поняттях об'єкта та класу. Фактично *клас* – це програмна реалізація алгебраїчної системи, яка містить визначення множини об'єктів – "типу даних", та операцій, які можуть до них застосовуватися – "методів". Програмна модель, написана за технологією об'єктно-орієнтованого програмування, є системою об'єктів, що взаємодіють один з одним.

Ще одним аспектом загальної теорії моделей є використання поняття *топологічного простору*.

Якщо не вдаватися до чітких математичних означень теорії множин, то топологічний простір – це множина об'єктів, для яких визначене поняття гомеоморфізму моделей. Якщо розглядати систему як множину взаємопов'язаних підсистем, то наявність безпосередніх зв'язків можна інтерпретувати як найближче оточення. Таким чином, структурна модель системи ще може розглядатись як *топологічний простір*.

З іншого боку, кожну множину гомеоморфних моделей можна вважати "найближчим оточенням" деякого елементу, в ідеальному випадку – абсолютно адекватної моделі. Якщо у такому топологічному просторі задана *метрика*, то адекватність може бути охарактеризована кількісно величиною відхилення моделі, тобто точністю.

Контрольні питання

1. Що спільного є між поняттями „аналіз і синтез моделі" і технологіями розробки програм „знизу догори" та „згори до низу"?
2. Які типи моделей є основними, а які допоміжними, у схемотехніці, програмуванні, фізиці, архітектурі?
3. Чим відрізняється метричний простір від топологічного?
4. У якому просторі – топологічному чи метричному, розглядаються структурні моделі? А функціональні моделі?

Ключові слова

Синтез, аналіз, макропроектування, мікропроектування, теорія моделей, універсальна алгебра, алгебраїчна система, клас, топологічний простір, топологія, метрика.

Література

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш.шк., 1985.
2. Математическая энциклопедия. В 6 томах. /Под ред. И.М.Винаградова. - М.: Советская энциклопедия, 1984.
3. Основи дискретної математики. Підручник. /Ю.В.Капітонова та ін. – К.: Наукова думка, 2002. – 580с.
4. Основы построения АСУ. /Под ред. В.И.Костюка. – М.: Наука, 1977.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 832с.
6. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – К.: Вища школа, 1974. – 452с.

2. СТРУКТУРНІ МОДЕЛІ

Структурні моделі дуже поширені в практиці проектування та дослідження систем контролю і управління. Різноманітні функціональні, структурні і принципові схеми (деякі приклади яких представлені на рис.2.1.) подаються графічними зображеннями, які показують склад та взаємозв'язки блоків системи, тобто є структурними моделями. Найбільшого поширення структурні моделі набули в електроніці в період переходу від дискретних елементів до інтегральної схемотехніки. Наразі з поступовим переходом до реалізації більшості функцій системи у цифровому вигляді за допомогою програмованого процесора роль структурних моделей дещо знизилася, поступаючись алгоритмічним моделям.

Узагальнена модель (1.1) за метою відображення структурних характеристик об'єкта може бути представлена у вигляді

$$\Theta_Y = F(S,Z)[\Theta_X]$$

де S – структурні характеристики об'єкта;

Z – параметри об'єкта.

До структурних характеристик об'єкта відносять опис кількості, складу та зв'язків елементів (блоків, підсистем, вузлів) об'єкта; порядок та вид диференціального рівняння, що описує динаміку об'єкта; характер нелінійності функції (степінь полінома), що описує статику та інше.

При всій різноманітності представлень структурних моделей найпоширенішою і найуніверсальнішою формою є граф.

2.1. Графи та їх види

Граф – це наочне графічне зображення взаємозв'язку елементів деякої множини об'єктів. Таке дуже загальне визначення наштовхує на думку, що методи і алгоритми теорії графів можуть використовуватись для розв'язування дуже великої кількості задач. Адже поняття множини – це фундамент сучасної математики, а це означає, що практично будь-яка математична модель може бути подана у термінах графів. Теорія графів дуже багата на алгоритми вирішення найрізноманітніших задач. Питання полягає лише в доцільності такого представлення – може існує більш простий і ефективний шлях вирішення конкретної задачі?

Формально графова модель G{V, P} складається з двох множин – множини V об'єктів (*вершин*, *вузлів*) і множини P зв'язків (*ребер*).

При створенні графової моделі слід в першу чергу визначитися, у якому просторі вона створюється. В залежності від природи елементів множини графи можуть розглядатися у різних просторах:

- в *метричному просторі* – наприклад, карта автомобільних доріг, план розташування комп'ютерів у мережі;
- в *просторі станів* та *перетворень* (у часі) – наприклад,

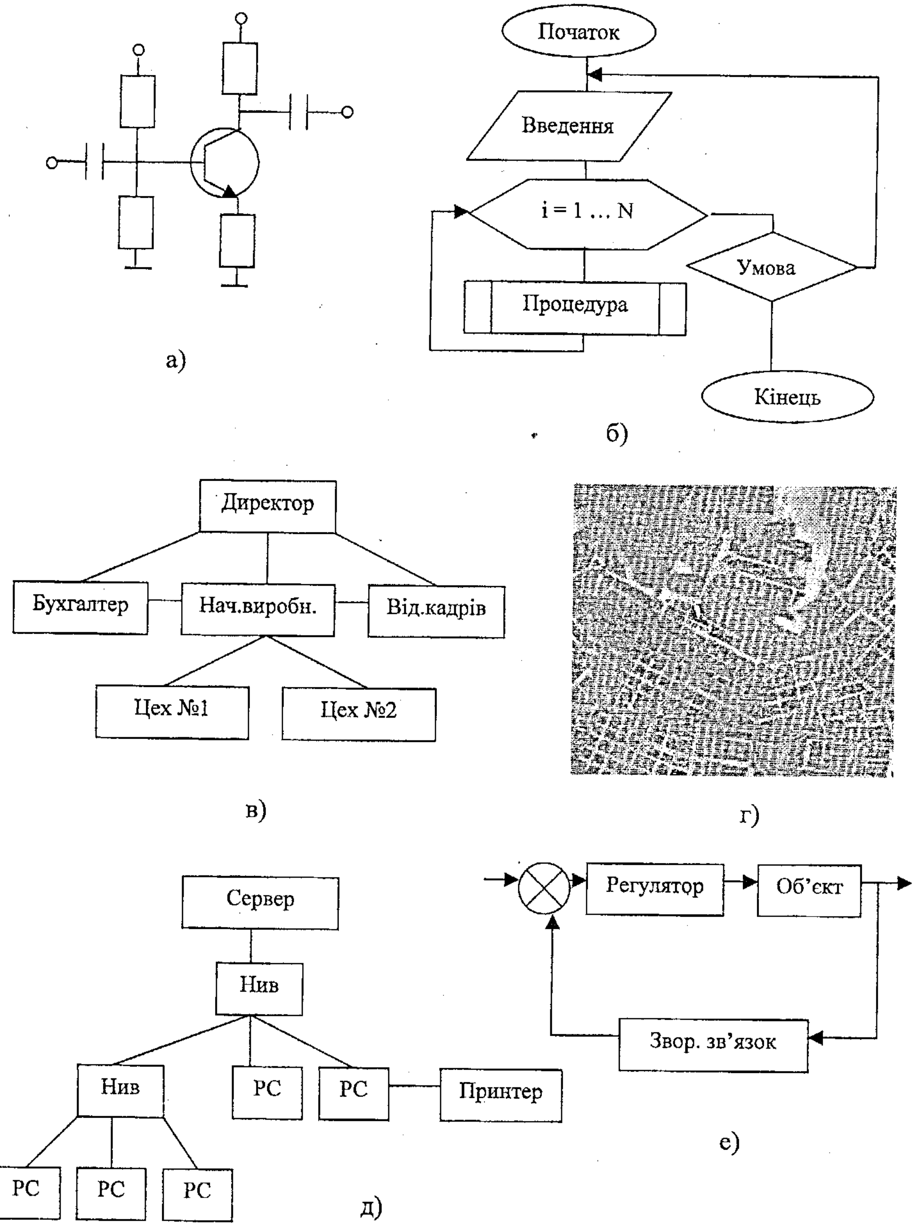


Рис.2.1. Приклади схем, що подають структурні моделі

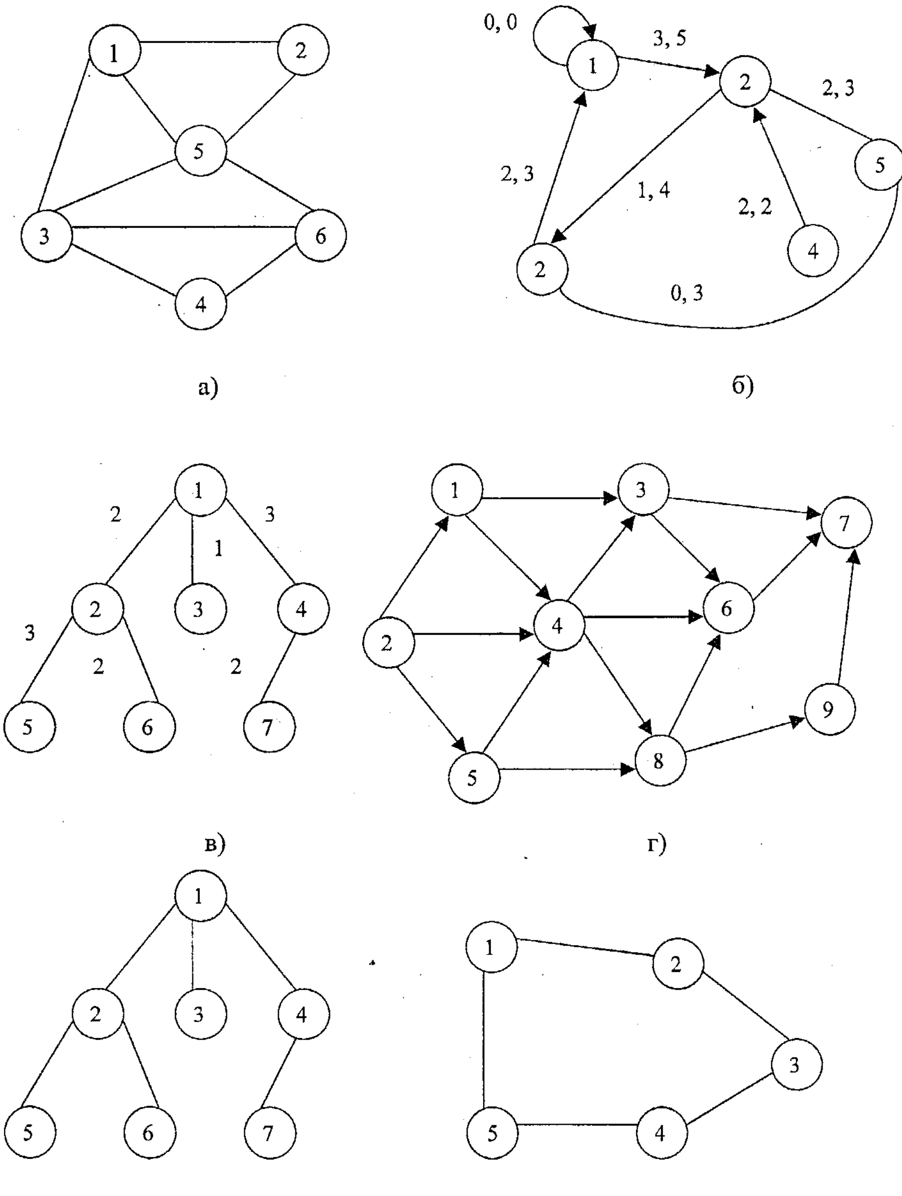


Рис.2.2. Приклади графів різних видів

алгоритм (відображує зміну та зв'язок станів комп'ютера), мережний графік (відображує зміну та зв'язок станів технологічного процесу);

- в *просторі відношень* – наприклад, комп'ютерна мережа (відображує інформаційний зв'язок комп'ютерів), схема взаємодії підрозділів підприємства, семантична мережа, мережа логічного висновку.

В залежності від симетричності зв'язків між вершинами графи поділяються на *напрямлені* (рис.2.2,б) і *ненапрямлені* (рис 2.2,а). Односторонні зв'язки зображуються напрямленими ребрами, які називають *дугами*. Граф з дугами називають *орієнтованим*, або орграфом. Якщо хоча б одне ребро графа має орієнтацію, то граф називається орієнтованим.

В залежності від того, як характеризується кожне ребро графа, графи поділяються на *зважені*(рис.2.2,в), *незважені*(рис.2.2,а), *мережні* (рис.2.2,б).

В незважених графах ребра не характеризуються ніякими числовими параметрами і вичерпною характеристикою ребра є сам факт його існування. У зважених графах ребру приписується певний числовий параметр – вага, який може бути відстанню між вершинами у метричному просторі, ймовірністю переходів у просторі станів тощо. У мережних графах кожне ребро характеризується двома параметрами: величиною *потоку* і *пропускною спроможністю*.

Якщо в графі існує шлях між кожною парою вершин, то граф називається *зв'язним*, у протилежному випадку – *незв'язним*.

Крім того, виділяють спеціальні види графів: *дерева* (рис.2.2, д), *циклічні графи* (рис.2.2, е), *планарні суграфи* (рис.2.2, г).

Контрольні питання

1. Наведіть приклади задач, в яких застосовується графове подання моделі.

2. Розгляньте класичну модель відносин типу „любовний трикутник". Чи є відповідний граф орієнтованим? Зваженим? Мережним? Зв'язним?

3. Зобразіть принципову схему рис.2.1,а у вигляді графа{вершини – елементи, ребра – провідники} і у вигляді графа{вершини – сигнали, ребра - перетворення}. Чи є ці моделі ізоморфними? А гомеоморфними?

Ключові слова

Граф, вершина, вузол, ребро, метричний простір, простір станів, простір перетворень, простір відношень, напрямлений граф, ненапрямлений граф, дуга, орієнтований граф, зважений граф, незважений граф, мережний граф, потік, пропускна спроможність,. зв'язний граф, незв'язний граф, дерева, циклічні графи, планарні суграфи. (1)

Література

1. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1975.
2. Романовский И.В. Дискретный анализ. – СПб.: Невский диалект, 2000. – 240с.
3. Основи дискретної математики. Підручник. /Ю.В.Капітонова та ін. – К.: Наукова думка, 2002. – 580с.
4. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – К.: Вища школа, 1974. – 452с.
5. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С. Алгоритмы на графах: Пер. с англ. – СПб.: ДиаСофтЮП, 2003. – 480с.
6. Акимов О.Е. Дискретная математика: Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376с.
7. Свами М.Н., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 454с.

2.2. Способи опису графів

Графічне зображення графа є зручним і наочним для людини, але графові моделі переважно використовуються в комп'ютерних алгоритмах. Оскільки комп'ютер оперує з числами, то для комп'ютерної обробки зручнішим є не графічне, а умовне числове подання графа.

Для опису графів використовуються різноманітні матриці та списки.

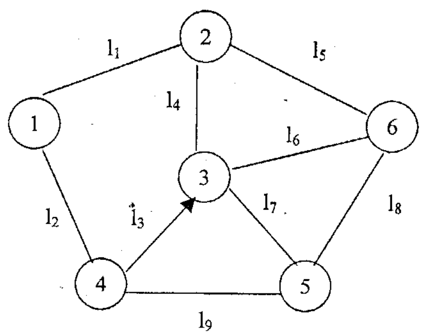


Рис. 2.3. Приклад графа

Найпоширеніші:
- матриця суміжності;
- матриця інциденції;
- списки пар вершин.

Матриця суміжності для графа, який має n вершин буде мати розмірність ($n \times n$). Елемент матриці $A[i,j]=1$, якщо є ребро або дуга з вершини i в вершину j , $A[i,j]=0$, якщо немає такого ребра.

Якщо $A[i,j]= A[j,\mathrm{i}]=1$, то між вершинами i та j знаходиться ребро. Якщо $A[i,j]\neq A[j,\mathrm{i}]$, то між вершинами i та j є дуга.

Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична відносно головної діагоналі. Якщо граф орієнтований (коли хоча б одне ребро графа є дугою), то матриця суміжності буде несиметричною.

Матриця суміжності для даного графа:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця інциденції показує зв'язок між вершинами і ребрами. Якщо граф має n вершин і m ребер, то матриця інциденції $I(n \times m)$. Якщо ребро графа ненаправлене, відповідний елемент матриці дорівнює 1. Якщо ребро (дуга) виходить з вершини, відповідний елемент матриці дорівнює 1.

Якщо ребро (дуга) входить в вершину, відповідний елемент матриці дорівнює -1.

Якщо немає ребра, яке пов'язує дві вершини, відповідний елемент матриці дорівнює 0.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	-1	1	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1
6	0	0	0	0	1	1	0	1	0

Список пар вершин – для кожного ребра записується пара вершин: 1 – та, з якої ребро виходить, 2 – та, в яку ребро входить.

l_1 : 1-2; l_2 : 1-4; l_3 : 4-3; l_4 : 2-3; l_5 : 2-6; l_6 : 3-6; l_7 : 3-5; l_8 : 5-6; l_9 : 4-5

Для опису зважених графів використовуються *матриці вагів*. Особливістю застосування матриці вагів є неоднозначний запис ваги відсутніх ребер. Якщо, наприклад, матриця вагів використовується для пошуку найкоротшого шляху в графі, то відсутнім ребрам приписується нескінченна вага, а якщо найдовшого – то нульова.

Контрольні питання

1. Зобразіть фрагмент карти рис.2.1,а у вигляді неорієнтованого графа. Опишіть його матрицями суміжності і инциденції.

2. Припустимо, що деякі з вулиць на рис.2.1,а мають односторонній рух. Опишіть такий граф матрицями суміжності та інциденції. Порівняйте отримані матриці з матрицями попереднього завдання.

3. Складіть графову модель для розв'язання задачі пошуку найкоротшого шляху по карті рис.2.1,а при наявності вулиць з одностороннім рухом.

Ключові слова

Матриця суміжності, матриця інциденції, список пар вершин, матриця вагів.

Література

1. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1975.
2. Основи дискретної математики. Підручник. /Ю.В.Капітонова та ін. – К.: Наукова думка, 2002. – 580с.
3. Р.Седжвик. Фундаментальные алгоритмы на С. Алгоритмы на графах: Пер. с англ. – СПб.: ДиаСофтЮП, 2003. – 480с.
4. Акимов О.Е. Дискретная математика: Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376с.

2.3. Операції над графами

Зі структурними моделями, які зображуються графами, можуть виконуватися алгебраїчні перетворення. Спосіб виконання цих перетворень визначається тим, що граф за означенням є сукупністю множин вершин і ребер. Відповідно, до графів можуть застосовуватися всі операції над множинами.

1. *Доповнення графа.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і повний граф $G(V, P)$, то доповнення графа $\overline{G_1} = G \setminus G_1 = \overline{G_1}(V \setminus V_1, P \setminus P_1)$.

2. *Об'єднання графів.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і граф $G_2(V_2, P_2)$, то об'єднаний граф $G = G_1 \cup G_2 = G(V_1 \cup V_2, P_1 \cup P_2)$.

3. *З'єднання графів.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і граф $G_2(V_2, P_2)$, то з'єднаний граф

$$G = G_1 \overline{\cup} G_2 = G(V_1 \cup V_2, P_1 \cup P_2 \cup \{P(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}).$$

Операція з'єднання графів неоднозначна, якщо $|P(v_1, v_2)| < |V_1| \cdot |V_2|$.

4. *Перетин графів.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і граф $G_2(V_2, P_2)$, то перетин графів $G = G_1 \cap G_2 = G(V_1 \cap V_2, P_1 \cap P_2)$.

Крім того використовуються додаткові пари протилежних операцій:

5. *Додавання вершини* v_0 до графа $G_1(V_1, P_1)$ зводиться до з'єднання графів $G(V,P) = G_1(V_1, P_1) \mathbin{\overline{\cup}} G_0(\{v_0\}, \phi)$;

Видалення вершини v_0 з графа $G(V,P)$ зводиться до знаходження доповнення графа $G_1(V_1, P_1) = G(V,P) \setminus G_0\left(\{v_0\}, \left\{\forall_i [p_{i0}, p_{0i}]\right\}\right)$.

6. *Видалення ребра* $G(V, P \setminus \{p_0\})$;

Додавання ребра $G(V, P \cup \{p_0\})$.

7. *Стягування підграфа у вершину* та *розмноження вершини.*

Операції над графами змінюють розмір матриць, що подають графи, тому вони є нелінійними з точки зору перетворень матриць. Використовують також ізоморфні перетворення графів, які змінюють тільки нумерацію вершин.

Формалізовані в аналітичному вигляді операції над графами використовуються переважно для теоретичних досліджень структурних моделей та доведення правильності результатів алгоритмів, що призначені для розв'язання задач на графах.

Формальні операції над графами дають можливість визначити поняття *різниці структурних моделей.* Якщо є дві моделі, задані графами G_1 і G_2, то різниця моделей

$$\Delta G = (G_1 \setminus G_2) \cup (G_2 \setminus G_1)$$

або

$$\Delta G = (G_1 \cup G_2) \setminus (G_1 \cap G_2)$$

Якщо у топологічному просторі структурних моделей визначити метрику, то це дозволить розглядати різницю моделей як похибку моделювання. Одним з можливих способів оцінювання невизначеності структури моделей може бути використання поняття *топологічної ентропії*, яке визначене у теорії топологічних просторів.

Контрольні питання

1. Дайте означення основним операціям з графами.
2. Які з наведених операцій є однозначними, а які ні?
3. Які операції над графами приводять до гомеоморфних моделей, а які до ізоморфних?
4. Оцініть топологічну ентропію двох графових моделей, які відрізняються на одну вершину і відповідні ребра.

Ключові слова

Доповнення графа, об'єднання графів, з'єднання графів, перетин графів, додавання вершини, видалення вершини, видалення ребра, додавання ребра, стягування підграфа у вершину, розмноження вершини, різниця структурних моделей, топологічна ентропія. (1)

Література

1. Основи дискретної математики. Підручник. /Ю.В.Капітонова та ін. – К.: Наукова думка, 2002. – 580с.
2. Математическая энциклопедия. В 6 томах. /Под ред. И.М.Винаградова. - М.: Советская энциклопедия, 1984.
3. Акимов О.Е. Дискретная математика: Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376с.

3. ФУНКЦІОНАЛЬНІ МОДЕЛІ

Функціональні моделі описують процеси, які відбуваються в об'єкті моделювання. Якщо об'єктом моделювання є система керування, то функціональна модель відображає залежність стану системи від зовнішніх впливів.

У загальному випадку модель системи (1.1) можна розглядати як *операторне перетворення*

$$\Theta_Y = F(S, Z, \overline{\xi}, t)[\Theta_X]$$

де Θ_X – множина характеристик вхідних впливів;

Θ_Y – множина характеристик вихідних величин;

F – оператор перетворення;

Z – параметри системи;

S – структура системи;

$\overline{\xi}$ – зовнішні збурення;

t – час.

Таким чином, функціональна модель системи складається з моделей вхідних та вихідних величин і оператора перетворення.

Якщо набір характеристик Θ включає значення вхідних та вихідних величин та їх похідних, то операторне перетворення може бути подане *диференціальним рівнянням*. Для прикладу розглянемо систему (рис. 3.1), яку можна описати диференціальним рівнянням другого порядку

$$F[y, \quad \dot{y}, \quad \ddot{y}, \quad x, \quad \dot{x}] + \overline{\xi} = 0, \tag{3.1}$$

де y-вихідна величина, x і $\overline{\xi}$ – вхідні величини, $\dot{y}$ і $\dot{x}$ - перші похідні у часі, $\ddot{y}$ - друга похідна у часі.

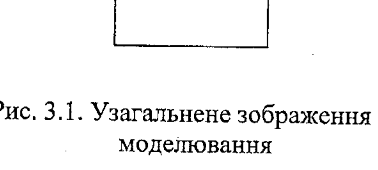


Рис. 3.1. Узагальнене зображення об'єкта моделювання

Рівняння (3.1), яке описує процеси в системі при довільних вхідних взаємодіях, називається *рівняння динаміки*.. Нехай при постійних вхідних величинах ($x = x^0$ і $\overline{\xi} = \overline{\xi}^0$) процес в ланці протягом часу встановиться –

вихідна величина прийме постійне значення $y = y_0$. Тоді (3.1) матиме вигляд:

$$F[y^0, 0, 0, x^0, 0] + \overline{\xi}^0 = 0. \qquad (3.2)$$

Це рівняння описує встановлений чи *статичний режим*, його називають *рівнянням статики.*

3.1. Моделі статики

Модель статики *системи автоматичного управління* (САУ) – це залежність між вхідною і вихідною величинами у встановленому стані [1]. Графік, який виражає цю залежність, називається *статичною характеристикою* САУ. Рівняння статики можна отримати з диференціального рівняння динаміки системи шляхом прирівнювання до нуля похідних в цьому рівнянні, в результаті чого рівняння перетворюється в алгебраїчне.

Модель статики може подаватися одним рівнянням, або системою рівнянь

$$\begin{cases} N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{f}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{f}) = 0 \end{cases} \qquad (3.3)$$

У певних досить простих випадках система рівнянь може бути зведена до одного рівняння (*композиція моделі*) і навпаки (*декомпозиція моделі*).

Якщо система має декілька входів, то описується за допомогою *сімейства* чи сімейств статичних характеристик. Наприклад, систему, яка характеризується в статичному режимі рівнянням (3.2), можна описати графічно за допомогою сімейства статичних характеристик, які представляють собою криві залежності вихідної величини y при різних фіксованих значеннях іншої – ξ.

Звичайно автоматичні системи описують нелінійними рівняннями. Але в багатьох випадках можна замінити вихідні нелінійні рівняння лінійними, які наближено описують процеси в системі. Процес перетворення нелінійних рівнянь в лінійні називається *лінеаризацією.*

В автоматичних системах повинен підтримуватись деякий заданий режим. Але через різні збурюючі фактори фактично режим відрізняється від потрібного (заданого), тому поточні значення вхідних і вихідних величин не відповідають значенням заданого режиму. В нормально діючій системі відхилення вихідних величин від потрібних значень малі. І це дозволяє провести лінеаризацію, розкладаючи нелінійні функції, які входять у рівняння, в ряд Тейлора

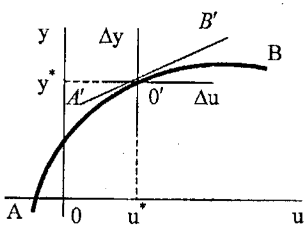
$$y = N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \tag{3.4}$$

Відповідно, лінеаризована характеристика

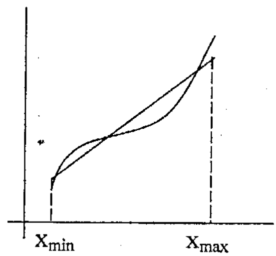
$$y \approx N(x) = a_0 + a_1x\,. \tag{3.5}$$

Лінеаризацію можна провести по ланках. Ланки і системи, які описуються лінійними рівняннями, називаються *лінійними.*

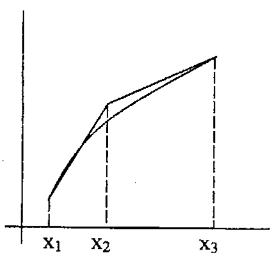
Часто нелінійну залежність між окремими змінними, які входять в рівняння ланки, задають у вигляді кривої. В цих випадках лінеаризацію можна виконати графічно, як показано на рис.3.2.



а)



б)



в)

Рис.3.2. Лінеаризація статичної характеристики: а) – у точці, б) – на відрізку, в) - кускова

Геометрично лінеаризація нелінійної залежності між двома змінними означає заміну вихідної кривої AB відрізком її дотичної AB' в точці O', відповідній заданому режиму і паралельному переносу початку координат в цю точку.

Лінеаризована модель характеризується *похибкою лінеаризації,* яка дорівнює залишковому члену ряду Тейлора

$$\Delta_л = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i \tag{3.6}$$

Лінеаризація може також виконуватися шляхом лінійної апроксимації (рис.3.2.б). Найчастіше таку апроксимацію виконують за критерієм мінімізації суми квадратів відхилень, тобто пошуку таких *a*, в рівняння прямої

$$y = ax + b$$

які забезпечують

$$\min\{\sigma^2 = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{X_{MIN}}^{X_{MAX}} [N(x) - (ax+b)]^2 dx\} \tag{3.7}$$

Відповідно, похибка лінеаризації методом апроксимації

$$\Delta_л = \sigma$$

Якщо похибка лінеаризації перевищує допустиму, то може здійснюватися *кускова лінеаризація* (рис 3.2.в). Це дозволяє зменшити інтервал лінеаризації за допомогою розбиття його на частини.

Окремим випадком функціональної моделі статики є *моделі логіки.*

Моделі логіки оперують з двозначними сигналами "істина" та "хибність", які для зручності позначаються символами відповідно "1" та "0". *Унарні та бінарні операції* над логічними даними визначаються за комбінаторним принципом. Унарні операції подані таблицями рис.3.3. Деякі бінарні операції подані на рис. 3.4.

X	Y
0	0
1	1

а) $y = x$

X	Y
0	1
1	0

б) $y = \bar{x}$

Рис.3.3

Унарні операції: а) *повторення*, б) *інверсія*

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

а) $y = x_1 \cap x_2$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

б) $y = x_1 \cup x_2$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

в) $y = x_1 \oplus x_2$

Рис. 3.4

Бінарні операції: а) *кон'юнкція*, б) *диз'юнкція*, в) *імплікація*

Доведено, що серед усіх унарних та бінарних операцій можна виділити *функціонально повні групи*, тобто такі, за допомогою яких можна представити всі інші операції.

Контрольні питання

1. При яких умовах режим роботи системи можна вважати статичним?
2. Наведіть приклади систем з різними статичними характеристиками.
3. Чи можна вважати статичною характеристику релейної системи з гістерезисом?
4. Які методи лінеаризації ви знаєте?
5. До якого типу статичних характеристик належать характеристики АЦП, ЦАП?

Ключові слова

Статичний режим, рівняння статики, статична характеристика, композиція моделі, декомпозиція моделі, сімейство статичних характеристик, лінеаризація, лінійні системи, похибка лінеаризації, лінійна апроксимація, кускова лінеаризація, моделі логіки, унарні операції, бінарні операції, операції повторення, інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація (1), функціонально повні групи.

Література

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1970. – 204с.
2. Математическая энциклопедия. В 6 томах. /Под ред. И.М.Винаградова. - М.: Советская энциклопедия, 1984.
3. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ : Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 584с.
4. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. В.Н.Вапника. – М.: Наука, 1984. – 815с.

3.2. Моделі динаміки

Моделі динаміки значно складніші і різноманітніші за моделі статики. Якщо моделі статики описують перетворення вхідної величини на вихідну незалежно від часу, то моделі динаміки описують перетворення вхідної функції часу на вихідну

$$x(t)\rightarrow y(t)$$

Модель динаміки складається з *моделі сигналів* і *моделі їх перетворення*. Модель динаміки лінійної системи може бути подана рівнянням

$$Y=WX,$$

де X – модель вхідного сигналу,

Y – модель вихідного сигналу,

W – оператор перетворення.

Модель динаміки системи може представлятися у різних ізоморфних та гомеоморфних формах:

- диференціальні рівняння;
- операторні рівняння;
- інтегральні рівняння;
- спектральні рівняння;
- передаточні функції;
- комплексні частотні передаточні функції;
- амплітудно-фазові частотні характеристики;
- перехідні функції і характеристики.

Диференціальні рівняння є базовою і найпоширенішою формою моделей динаміки.

В залежності від того, входить чи ні час в рівняння в явному вигляді, системи поділяються на стаціонарні і нестаціонарні. Автоматичні системи управління (ланки) називають *стаціонарними*, якщо вони при постійних зовнішніх взаємодій описуються рівняннями, які явно не залежать від часу. Це означає, що динамічні властивості системи з часом не змінюються.

Рівняння, в якому час не входить явно називаються *автономними.* Тому стаціонарні системи можна визначити як системи, які при постійних зовнішніх впливах описуються автономними рівняннями.

Автоматичні системи (ланки) називають *нестаціонарними,* якщо при постійних зовнішніх впливах вони описуються рівняннями, в які час входить явно. Такі рівняння називаються *неавтономними.* Тому нестаціонарні системи можна визначити як такі системи, які при постійних зовнішніх впливах описуються неавтономними рівняннями. За означенням динамічні властивості нестаціонарних систем з часом змінюються.

Стаціонарними лінійними системи (ланками) називають системи, які описуються лінійними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Нестаціонарними лінійними системами (ланками) або системи зі змінними параметрами називаються системи, які описуються лінійними рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

Для лінійних систем справедливий *принцип суперпозиції,* який можна сформулювати таким чином: реакція системи на декілька одночасно діючих вхідних взаємодій дорівнює сумі реакцій на кожну взаємодію окремо. Це дозволяє обмежити вивчення системами тільки з одним входом.

Звичайно лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами записуються в стандартній формі. Так, для рівняння другого порядку

$$a_2\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=b_1\dot{x}+b_0x+c_0f \qquad (3.8)$$

стандартна форма матиме вигляд

$$T_0\ddot{y} + T_1\dot{y} + y = k_1(T_2\dot{x} + x) + k_2 f \tag{3.9}$$

де $T_0=a_2/a_0$, $T_1=a_1/a_0$, $k_1=b_1/a_2$, $T_2=b_0/b_1$, $k_2=c_0/a_0$.

В рівнянні (3.9) постійні T_0 T_1 і T_2 мають розмірність часу і їх називають постійними часу, а коефіцієнти k_1 k_2– передаточними коефіцієнтами.

Розглянемо операторну форму моделі динаміки на прикладі (3.8). Для операції диференціювання використовується поняття оператора p, тобто

$$d/dt \equiv p, \quad d^i/dt^i \equiv p^i.$$

Використовуючи його, рівняння (3.8) можна записати у вигляді

$$a_2 p^2 y + a_1 p y + a_0 y = b_1 p x + b_0 x + c_0 f. \tag{3.10}$$

При записі і перетворенні диференціальних рівнянь оператор p можна розглядати як алгебраїчний множник, а вираз py як добуток, який не має властивостей комутативності. Враховуючи це зауваження, перепишемо (3.10), виносячи y і x за дужки:

$$y(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) = x(b_1 p + b_0) + c_0 f. \tag{3.11}$$

Введемо позначення $Q(p)=a_2p^2+a_1p+a_0$, $R_1(p)=b_1 p + b_0$, $R_2(\mathrm{p})=c_0$.. За допомогою цих позначень рівняння (3.11) можна записати в більш компактній формі

$$Q(p)y= R_1(p)x+R_2(p)f. \tag{3.12}$$

В рівнянні (3.12) $Q(p)$ (диференціальний оператор при вихідній величині) називається *власним оператором*, а $R_1(p)$ і $R_2(p)$ (диференціальні оператори при вхідних величинах) – *операторами взаємодії.*

Відношення оператора взаємодії до власного оператора називається *передаточною функцією* в операторній формі.

Систему, яку описує рівняння (3.12) можна характеризувати двома передаточними функціями: передаточною функцією $W_1(p)$ за вхідною величиною x тобто

$$W_1(p) = R_1(p)/Q(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

і передаточною функцією $W_2(p)$ за вхідною величиною f, тобто

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)} = \frac{c_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Використовуючи передаточні функції, рівняння (3.11) запишеться у вигляді

$$y = W_1(p)x + W_2(p)f$$

Разом з передаточною функцією в операторній формі широко використовують передаточну функцію в формі зображення Лапласа.

Перетворенням Лапласа називають співвідношення

$$X(s)=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \qquad (3.13)$$

яке ставить у відповідність функції *x(t)* дійсної змінної функцію *X(s)* комплексної змінної *s* $(s=\sigma+j\varpi)$. При цьому *x(t)* називають оригіналом, а *X(s)* – зображенням за Лапласом.

Співвідношення

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\varpi} X(s)e^{st}ds, \qquad (3.14)$$

яке визначає за відомим зображенням його оригінал (в точках неперервності останнього), називають *зворотним перетворенням* Лапласа.

Передаточною функцією в формі зображення Лапласа називають відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини при нульових початкових умовах. Якщо система має декілька входів, то при визначенні передаточної функції відносно будь-якої однієї вхідної величини інші вхідні величини припускають рівними нулю.

Передаточну функцію в формі зображення Лапласа можна отримати з передаточної функції в операторній формі, якщо в останній зробити підстановку *p=s*. В загальному випадку це слідує з того, що диференціюванню оригіналу – символічному множенню оригіналу на *p* – при нульових початкових умовах відповідає множення зображення на комплексне число s.

Подібність між передаточними функціями у формі зображення Лапласа і в операторній формі має місце тільки у випадках стаціонарних систем.

Використовуючи передаточні функції в зображенні Лапласа можна записати

$$Y(s)=W_1(s)X(s)+W_2(s)F(s). \qquad (3.15)$$

Важливу роль при моделюванні лінійних стаціонарних систем відіграють частотні характеристики.

В загальному передаточна функція *W(p)* за означенням дорівнює

$$W=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+....+b_m}{a_0p^n+ap^{n-1}...+a_n}$$

Функцію $W(j\omega)$, яку отримують з передаточної функції при підстановці в неї $p=j\omega$

$$W(j\omega)=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+...+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+...+a_n} \qquad (3.16)$$

називають *частотною передаточною функцією*. Частотна передаточна функція є комплексною функцією від дійсної змінної ω, яка називається частотою.

Функцію $W(j\omega)$ можна представити у вигляді

$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)\,e^{j\phi(\omega)} \tag{3.17}$$

де

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=arctg\,\frac{V(\omega)}{U(\omega)}+k\pi,\ \mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{3.18}$$

На комплексній площині (рис.3.5) частотну передаточну функцію *W(jω)* позначають вектором $\overrightarrow{OC}$, довжина (модуль) якого дорівнює *A(ω)*, а аргумент (кут утворений цим вектором з дійсно позитивною піввіссю) – *φ(ω)*. Криву, яку описує кінець цього вектора при змінні частоти від нуля до нескінченності, називають *амплітудно-фазовою частотною характеристикою* (АФЧХ).

Частотну передаточну функцію будемо називати також *амплітудно–*

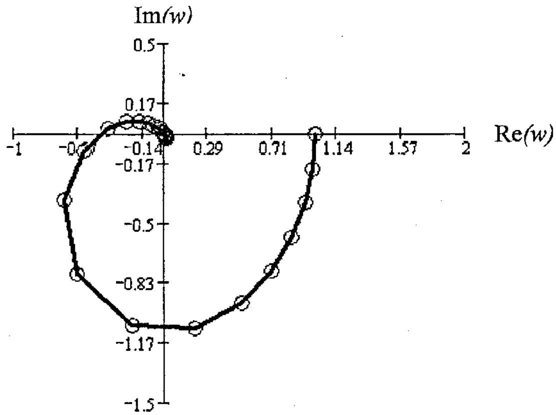


Рис 3.5. Амплітудно-фазова частотна характеристика

фазовою частотною функцією. Її дійсну частину *U(ω)=ReW(jω) і* уявну частину *V(ω)=ImW(jω)* будемо називати відповідно *дійсною* і *уявною частотною функцією*. Графік дійсної частотної функції *U(w)* називають *дійсною частотною характеристикою*, а графік уявної частотної функції *V(ω) – уявною частотною характеристикою.*

Модуль *A(ω)* = |*W(jω)*| називають *амплітудною частотною функцією*, її графік – *амплітудною частотною характеристикою.*

Аргумент *φ(ω)=argW(jω)* називають *фазовою частотною функцією*, її графік – *фазовою частотною характеристикою.*

Амплітудно-фазова частотна характеристика часто зображується *годографом*, приклад якого представлений на рис.3.5. Перевага годографа в тому, що він одночасно у декартовій системі координат представляє залежність $V(U)$, а в полярній системі $A(\varphi)$ для всього діапазону частот.

Частотна форма моделі динаміки системи має вигляд

$$S_y(j\omega) = W(j\omega) \cdot S_x(j\omega), \qquad (3.19)$$

де $S_x(j\omega)$ - спектр вхідного сигналу,

$S_y(j\omega)$ - спектр вихідного сигналу

Найчастіше розглядаються лише модулі спектрів та АФЧХ. Тоді

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)| \cdot S_x(\omega). \qquad (3.20)$$

Крім перерахованих частотних характеристик, використовуються також логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ), *логарифмічні амплітудні частотні характеристики* (ЛАЧХ) і *логарифмічні фазові частотні характеристики* (ЛФЧХ) . Назвемо функцію

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg|W(j\omega)|$$

логарифмічною амплітудно-частотною функцією. Графік залежності логарифмічної амплітудно-частотної функції L від логарифма частоти *($\lg\omega$)* називають логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою (ЛАЧХ). Логарифмічною фазовою характеристикою (ЛФЧХ) називають графік залежності фазової частотної функції φ від логарифма частоти $\lg\omega$.

Логарифмічне подання частотних характеристик має додаткові переваги, оскільки дозволяє отримати результат моделювання у простому графічному вигляді. Дійсно, логарифмуючи модель (3.20), отримуємо

$$\log S_y(\omega) = \log|W(\omega)| + \log S_x(\omega),$$

або

$$\log S_y(\omega) = L(\omega) + \log S_x(\omega). \qquad (3.21)$$

Додавання характеристик у графічному вигляді показане на прикладі рис.3.6.

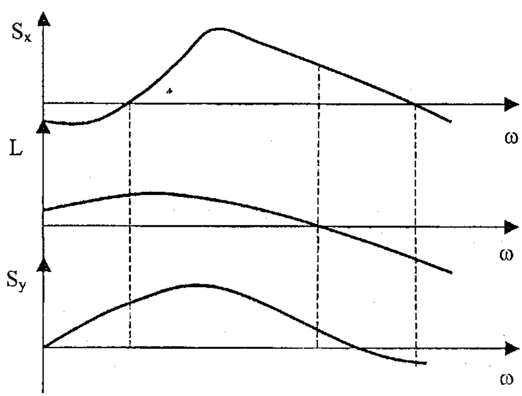


Рис. 3.6. Зв'язок між спектрами і ЛАЧХ

Моделі динаміки цифрових систем є розвитком моделей статики логічних систем. Такі моделі використовуються у теорії *цифрових автоматів*.

Як правило, *моделі динаміки синхронних цифрових автоматів* записуються у рекурсивному вигляді:

$$\begin{cases} S_n = L_S(S_{n-1}, X_n) \\ Y_n = L_y(S_n) \end{cases} \tag{3.22}$$

де X – вектор вхідних сигналів;

Y – вектор вихідних сигналів;

S – вектор станів: S_n – у момент t_n, S_{n-1} – у попередній момент t_{n-1}.

L_S, L_y – відповідні логічні оператори перетворення.

Якщо додати до системи (3.22) ще рівняння для попереднього моменту

$$Y_{n-1} = L_S(S_{n-1}),$$

то з системи можна виключити стани автомата

$$Y_{n-1} = L_y\{L_S[L^{-1}_y(Y_{n-1}), X_0]\}.$$

Модель цифрового автомата довільного порядку може бути отримана з відповідного диференціального рівняння. Дискретним аналогом похідних є відповідні різниці:

$$\dot{y}(t_0) = \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta t}$$

$$\ddot{y}(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0) - \dot{y}(t_{-1})}{\Delta t} = \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{\Delta t^2}$$

$$\dddot{y}(t_0) = \frac{\ddot{y}(t_0) - \ddot{y}(t_{-1})}{\Delta t} = \frac{y_0 - 3y_{-1} + 3y_{-2} - y_{-3}}{\Delta t^3}$$

тощо. У загальному випадку:

$$y^{(k)}(t_0) = \frac{1}{\Delta t^k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{-i} \tag{3.23}$$

де t_0 – момент надходження останнього даного, поточний момент часу;

Δt – інтервал дискретизації.

Підставляючи (3.23) в диференціальне рівняння аналогічне (3.8), отримаємо дискретний вираз рівняння автомата довільного порядку

$$\sum_{j=0}^{m} \left[\frac{b_i}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_j^i y_{-i} \right] = \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{a_i}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_j^i x_{-i} \right] \tag{3.24}$$

Виділимо з лівої частини рівняння (3.24) значення вихідної величини у поточний момент часу.

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{b_i}{\Delta t^j} \left[y_0 + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i C_j^i y_{-i} \right] = \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{a_i}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_j^i x_{-i} \right]$$

або

$$y_0 = \frac{\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{a_i}{\Delta t^j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x_{-i}\right] - \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{b_i}{\Delta t^j}\sum_{i=1}^{j}(-1)^i C_j^i y_{-i}\right]}{\sum_{j=0}^{m}\frac{b_i}{\Delta t^j}}$$

Змінюючи порядок підрахунку сум у чисельнику, отримуємо

$$y_0 = \frac{\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i \frac{a_i}{\Delta t^j}\right]x_{-i} - \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{j}(-1)^i C_j^i \frac{b_i}{\Delta t^j}\right]y_{-i}}{\sum_{j=0}^{m}\frac{b_i}{\Delta t^j}}$$

або

$$y_0 = \sum_{i=0}^{n} K_{x_i} x_{-i} + \sum_{i=1}^{m} K_{y_i} y_{-i} \tag{3.25}$$

де
$$K_{x_i} = \frac{(-1)^i \sum_{j=i}^{n} C_j^i \frac{a_j}{\Delta t^j}}{\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Delta t^j}} \qquad K_{y_i} = \frac{(-1)^{i+1} \sum_{j=i}^{m} C_j^i \frac{b_j}{\Delta t^j}}{\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Delta t^j}} \tag{3.26}$$

Вираз (3.25) є моделлю цифрового автомата. Модель рекурсивна, оскільки поточне значення вихідної величини Y обчислюється з використанням попередніх значень.

Модель (3.25) може також розглядатися як дискретна модель довільної стаціонарної лінійної системи, яка описується передаточною функцією (3.16). У цьому випадку початкові значення змінних рекурсивного виразу:

$$\forall x_i = 0, i = 0,-1,...,-n; \quad \forall y_i = 0, i = 0,-1,...,-m;$$

І навпаки, маючи модель автомата у вигляді (3.25) і розв'язавши систему рівнянь (3.26) відносно коефіцієнтів a_j, b_j, отримуємо модель цифрового автомата у вигляді лінійного диференціального рівняння.

Контрольні питання

1. Які моделі динаміки сигналів Ви знаєте?
2. Дайте означення основних моделей динаміки лінійних систем.
3. Яка різниця між моделями у вигляді функцій і у вигляді характеристик?
4. Як реалізується на комп'ютері модель динаміки лінійної стаціонарної системи?
5. Чим відрізняються моделі статики і динаміки цифрових систем?

Ключові слова

Модель сигналу, модель перетворення сигналу, диференціальне рівняння (2), стаціонарна система, нестаціонарна система, неавтономне рівняння, стаціонарна лінійна система, нестаціонарна лінійна система, принцип суперпозиції, власний оператор, оператор взаємодії, передаточна функція, перетворення Лапласа, зворотне перетворення Лапласа, передаточна функція в формі зображення Лапласа, частотна передаточна функція, амплітудно-фазова частотна характеристика, амплітудно–фазова частотна функція, дійсна частотна функція, уявна частотна функція, дійсна частотна характеристика, уявна частотна характеристика, амплітудно-частотна функція, амплітудно-частотна характеристика, фазо-частотна функція, фазо-частотна характеристика, годограф, логарифмічна амплітудно-частотна функція, логарифмічна амплітудно-частотна характеристика, логарифмічна фазо-частотна характеристика (1,2), цифровий автомат, модель динаміки синхронного цифрового автомата.

Література

1. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления. – М.: Высш. школа, 1997. - 303с
2. Основи дискретної математики. Підручник. /Ю.В.Капітонова та ін. – К.: Наукова думка, 2002. – 580с.
3. Лисогор В.М., Селезньова Р.В. Моделі керування технологічними процесами в аварійних ситуаціях. - Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1997. – 95с.
4. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632с.
5. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. /Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.
6. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768с.
7. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
8. Мокін Б.І., Юхимчук С.В. Математичні моделі робастної стійкості та чутливості нелінійних систем: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999. – 122с.
9. Боровська Т.М., Северілов В.А., Васюра А.С. Теорія автоматичного управління: Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 96с.

3.3. Моделі обслуговування

Існує широкий клас дискретних динамічних систем, які отримали загальну назву “*системи масового обслуговування*”. Для такої системи характерно те, що при надходженні на її вхід сигналу (*запиту, вимоги*) система виконує певну стандартну операцію – *обслуговує* вимогу. Вимоги, що надходять на вхід системи, утворюють *вхідний потік вимог*. Вимоги, що пройшли обслуговування, створюють *вихідний потік вимог*. Оскільки вимоги можуть надходити нерівномірно, а обслуговування вимагає певного часу, то на вході СМО можливе утворення *черги*.

Моделі СМО поділяють на:

1. Описові, коли СМО описується певним чином, наприклад за допомогою символіки Кендалла, коли система подається за допомогою 5 характеристик:
   - потік вимог, що описується за допомогою закону розподілу. Найчастіше зустрічаються пуассонівський (M), експоненціальний (N), регулярний (D), ерлангівський (E) та довільний (G) закони розподілу;
   - закон часу обслуговування, що використовує закони розподілу, вказані для потоку;
   - особливості структури(одноканальна або багатоканальна);
   - дисципліна обслуговування.
2. Графічні, коли СМО подається, наприклад, за допомогою графа станів;
3. Аналітичні, коли СМО подається за допомогою певних законів та рівнянь.

Усі показники якості обслуговування систем можна умовно розділити на три види:

1. Ймовірнісні характеристики:
   - p_n - ймовірність того, що в системі знаходиться n вимог;
   - ймовірність того, що вимога, яка надходить, буде втрачена та ін.
2. Моментні характеристики:
   - середнє число вимог у системі $\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$;
   - середнє число вимог у черзі: $\overline{\upsilon} = \sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)p_n$, де s – число обслуговуючих приладів;
   - середнє число вимог, що обслуговуються, у системі $\overline{j} = \sum_{n=0}^{s} np_n$;
   - середнє число вільних приладів $\overline{r} = \sum_{n=0}^{s}(n-s)p_n$;
   - середній *час очікування* у черзі $\overline{\omega} = \int_0^{\infty}\omega dF(\omega)$, де $F(\omega)$ - функція розподілу часу очікування у черзі;

- середня тривалість перебування вимоги у системі $\overline{u} = \int_0^\infty u dG(u)$,

де $G(u)$ - ймовірність того, що тривалість перебування в системі менша або дорівнює u.

3. Економічні характеристики якості обслуговування найчастіше подаються у вигляді узагальненого критерію, який враховує збитки, до яких призвели простої приладів та очікування вимог.

Моделі і характеристики залежать від типу СМО.

За *кількістю каналів* СМО поділяють на:

- одноканальні;
- багатоканальні, коли система містить декілька каналів, призначених для одночасного обслуговування вимог, що надходять.

В залежності від обмежень, що накладаються на *довжину черги*, розрізняють:

- СМО з обмеженою довжиною черги. При цьому вимоги, що надходять на вхід системи, коли черга заповнена, вважаються втраченими (СМО з втратами). Окремим випадком в даному випадку є СМО, для яких черга неприпустима.
- СМО з необмеженою довжиною черги. При цьому вимоги знаходять в стані очікування до тих пір, поки не звільниться якийсь з каналів.

В залежності від усталеного порядку (*дисципліни*) обслуговування, розрізняють:

- СМО з пріоритетним обслуговуванням: $O_i(i = 1,2,...)$, чим більше i, тим менший пріоритет;
- СМО з дисципліною «першим надійшов – першим обслуговується» (справедлива дисципліна).

В залежності від загального *числа джерел* $u_i(i = \overline{1,k})$, кількості вимог, що направляються від них, та повернення вимог, які були обслужені, до джерела, розрізняють:

- замкнені СМО (системи з обмеженим вхідним потоком) – призначені для обслуговування обмеженого числа джерел вимог, загальна кількість вимог, що циркулює в системі є обмеженою;
- розімкнені СМО – число джерел вимог нескінченно велике або коли одне джерело надсилає необмежену кількість вимог.

З точки зору характеристик СМО та їх математичних моделей, розрізняють дві великі групи СМО:

- марківські СМО;
- немарківські СМО.

Марківські моделі СМО

Для цих систем характерна відсутність післядії, що спрощує отримання розрахункових залежностей, необхідних у інженерній практиці.

1. Одноканальна система. Основні характеристики:

- один обслуговуючий канал, на який поступає найпростіший потік вимог (такий потік характеризується стаціонарністю, відсутністю наслідків та ординарністю) з параметром λ (інтенсивність, яка визначається як математичне сподівання числа вимог, що надходять за одиницю часу);

- час обслуговування вимог розподілений за показниковим законом з параметром μ ($F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $\mu = 1/\bar{t}_{об}$, де $\bar{t}_{об}$ - математичне сподівання часу обслуговування);

- вимоги обслуговуються в порядку надходження в систему («першим прийшов – першим обслуговується»);

- довжина черги не обмежується.

Математична модель таких систем, записана у диференціальній формі, має вигляд:

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t), n > 0, \tag{3.27}$$

$$\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Ймовірнісні та моментні характеристики розглядуваних СМО в усталеному режимі:

Середнє число вимог у системі

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\psi)\psi^n = \frac{\psi}{1-\psi},$$

де $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - завантаження системи.

Середнє число вимог у черзі

$$\bar{\upsilon} = \sum_{n=s+1}^{\infty}(n-1)p_n = \frac{\psi^2}{1-\psi}$$

Середній час перебування вимог у системі

$$\bar{u} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{\bar{n}}{(1-p_0)\mu} = \frac{1}{\mu(1-\psi)}$$

Середній час очікування у черзі

$$\bar{\varpi} = \frac{\bar{\upsilon}}{(1-p_0)\mu} = \frac{\psi}{\mu(1-\psi)}$$

2. Багатоканальна система

Це багатоканальна система на вхід якої надходить найпростіший потік вимог з параметром λ, а час обслуговування кожним каналом системи розподілений експоненціально з параметром μ. Як правило, розглядається усталений режим.

2.1. Багатоканальна система з однаковими приладами

Середнє число зайнятих каналів $\bar{j} = \psi s$

Середнє число вільних каналів $\bar{r} = (1-\psi)s$

Середнє число вимог у черзі $\bar{\upsilon} = \dfrac{s^s \psi^{s+1}}{s!(1-\psi)^2} p_0$

Середнє число вимог у системі $\bar{n} = \dfrac{s^s \psi^{s+1}}{s!(1-\psi)^2} p_0 + s\psi$

Середній час очікування у черзі $\bar{\varpi} = \dfrac{s^s \psi^s}{s!(1-\psi)^2} \dfrac{p_0}{\mu}$

Середній час перебування вимог у системі $\bar{u} = \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{s^s \psi^s}{s!(1-\psi)^2} p_0 + s\right]$

2.2. Багатоканальна система з різними приладами

Середнє число вимог у системі ($s = 2$) $\bar{n} = \dfrac{1-p_0}{1-\psi}$,

де $1 - p_0 = \psi(1+\alpha)\dfrac{1+(1+\alpha)\psi-(1-\alpha)\varphi}{\alpha(1+2\psi)+\psi(1+(1+\alpha^2)\psi-(1-\alpha^2)\varphi)}$,

$\alpha = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$,

φ - ймовірність того, що вимога, яка надійшла в момент відсутності черги, надійде на перший канал.

3. Замкнена СМО

Середнє число вимог у черзі та в системі визначається виразами

$\bar{\upsilon} = \dfrac{s^s p_n}{s!} \sum\limits_{n=s+1}^{m} \dfrac{(n-s)n!}{s^n} C_m^n \psi^n$, де m – кількість джерел вимог.

Середнє число очікування вимогами початку обслуговування $\bar{\varpi} = \dfrac{\bar{\upsilon}}{\mu(s-\bar{r})}$.

4. Багатофазна СМО

Характеристики наводяться для двофазної СМО, на вхід якої надходить пуассонівський потік з параметром λ, час обслуговування вимог розподілений за експоненціальним законом з параметром μ_1 для першої фази, та μ_2 - для другої фази. В кожній фазі наявний один обслуговуючий пристрій, перед яким може утворюватись черга необмеженої довжини.

Середнє число вимог $\overline{n} = \overline{n_1} + \overline{n_2} = \dfrac{\psi_1}{1-\psi_1} + \dfrac{\psi_2}{1-\psi_2}$,

де $\overline{n_1}$ та $\overline{n_2}$ - середнє число вимог, що надходять на першу та другу фази, відповідно.

Середнє число вимог у черзі $\overline{\upsilon} = \dfrac{\psi_1^{\,2}}{1-\psi_1} + \dfrac{\psi_2^{\,2}}{1-\psi_2}$,

де завантаження системи: $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu_i}, i = 1,2,...$

Немарківські моделі СМО

До немарківських (непуассонівських) СМО відносять ті системи, для яких або час обслуговування вимог розподілений не за експоненціальним законом, або вхідний потік є непуассонівським, або і те і інше разом.

1. Система з вхідним потоком Ерланга

Середній час очікування у черзі $\overline{\omega} = \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{\sigma_t^{\,2} + \bar{t}^{\,2}_{об}}{1-\psi}$

Дисперсія тривалості очікування у черзі

$$\mu^2\sigma_\omega^2 = \frac{\psi}{1-\psi}\frac{k+1}{k}\left(\frac{\psi}{1-\psi}\frac{k+1}{4k} + \frac{k+2}{3k}\right)$$

2. Система з регулярним вхідним потоком

Середній час очікування у черзі $\overline{\omega} = \dfrac{\psi}{2\mu(1-\psi)}$

Контрольні питання

1. Наведіть приклади систем масового обслуговування.
2. Що таке "марківський процес"?
3. Яку умову в реальній СМО повинно задовольняти співвідношення інтенсивностей вхідного потоку λ і інтенсивності обслуговування μ ?
4. Для системи з обмеженою чергою зобразіть модель СМО у вигляді зваженого графа станів системи.

Ключові слова

Системи масового обслуговування, запит, вимога, вхідний потік вимог, вихідний потік вимог, черга, час очікування у черзі, канали СМО, дисципліна обслуговування, число джерел, марківські моделі СМО, немарківські моделі СМО. (1 2 3 4 5)

Література

1. Основы моделирования сложных систем. /Под ред. И.В.Кузьмина. – К.: Вища школа, 1981. – 369 с.

2. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк и др. – М.: Наука, 1985. – 640с.

3.4. Агрегатні та комплексні моделі

Моделі складних систем можуть утворюватися за комплексним або за агрегатним принципом.

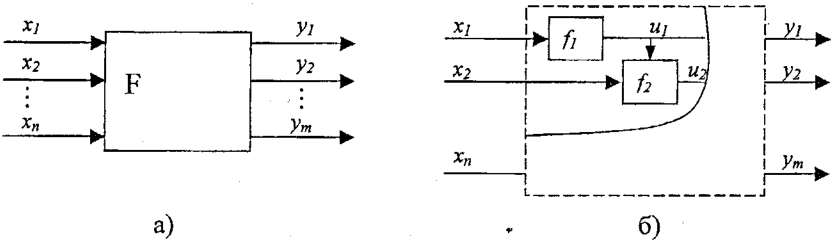


Рис 3.7. Декомпозиція комплексної моделі (а) на агрегати (б)

Комплексні моделі розглядають систему як ціле (рис 3.7,а). Відповідно модель подається переважно одним скалярним або векторним рівнянням

$$Y = F[X]$$

Агрегатні моделі розглядають систему як сукупність підсистем-агрегатів (рис.3.7,б), а відповідна модель подається системою рівнянь, які описують кожну підсистему та їх взаємодію.

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots) \\ u_1 = f_2(u_1, x_1, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1 = f_k(u_1, u_2, \ldots) \end{cases} \tag{3.28}$$

Перехід від агрегатної моделі до комплексної називається *композицією*, а від комплексної до агрегатної – *декомпозицією моделі.*

Перевага агрегатної моделі у більшій простоті її отримання, оскільки моделі окремих підсистем простіші за модель системи в цілому. Перевага комплексної моделі у тому, що для її отримання немає необхідності досліджувати внутрішню структуру системи. Очевидно, вибір типу моделі залежить від способу її отримання: при теоретичному моделюванні зручніше користуватися агрегатним принципом, а при експериментальному моделюванні (ідентифікації) – комплексним.

Агрегатні моделі широко використовуються при побудові моделей динаміки лінійних систем. Модель системи подається у вигляді передаточної функції, яка отримується шляхом композиції передаточних функцій підсистем. Композиція здійснюється з використанням правил перетворення структурних схем лінійних систем:

1. *Послідовне з'єднання* блоків. При послідовному з'єднанні вихідна величина кожного попереднього блоку є вхідним сигналом наступного блоку (рис.3.8). При перетворенні структурних схем ланцюг з послідовно

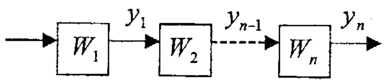


Рис. 3.8. Послідовна структура

з'єднаних блоків можна замінити одним блоком з передаточною функцією W(s), що дорівнює добутку передаточних функцій окремих блоків

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} W_i(s). \qquad (3.29)$$

2. При *паралельному з'єднанні* (рис.3.9) на вхід всіх блоків подається один і той самий сигнал, а вихідні величини додаються.

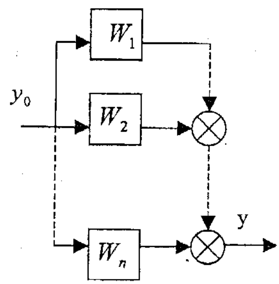


Рис. 3.9. Паралельна структура

Ланцюг з паралельно з'єднаних блоків можна замінити одним блоком з передаточною функцією W(s), яка дорівнює сумі передаточних функцій вхідних в неї ланок:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s). \qquad (3.30)$$

3. Ланка, охоплена *зворотним зв'язком* (рис. 3.10). Передаточна функція W_3 замкненого ланцюга з від'ємним зворотним зв'язком дорівнює передаточній функції прямого ланцюга, поділеній на одиницю плюс передаточна функція розімкненого ланцюга

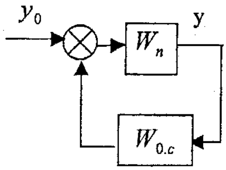


Рис. 3.10. Структура зі зворотним зв'язком

$$W_з = W_n / (1 + W). \qquad (3.31)$$

де
$$W = W_П W_{ЗЗ}.$$

Якщо зворотний зв'язок позитивний, то
$$W_з = y / y_0 = W_n / (1 - W).$$

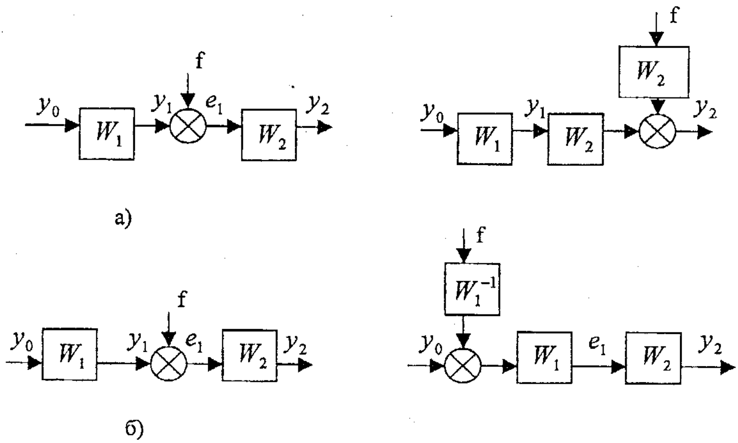


Рис. 3.11. Перенесення суматора

4. *Перенесення суматора* (Рис.3.11). При перенесенні суматора за ходом сигналу необхідно додати блок з передаточною функцією, яка дорівнює передаточній функції ланки, через яку переноситься суматор (рис.3.11,а). Якщо суматор переноситься проти ходу сигналу, то необхідно додати блок з передаточною функцією, яка дорівнює зворотній передаточній функції ланки, через яку переноситься суматор (рис.3.11,б).

5. При *перенесенні вузла* (рис.3.12,а) також необхідно додати блок. Якщо вузол переноситься по ходу сигналу, то додається блок з передаточною функцією, яка дорівнює зворотній передаточній функції

блоку, через який переноситься вузол (рис.3.12,б). Якщо вузол переноситься проти ходу сигналу, то додається блок з передаточною функцією, яка дорівнює передаточній функції блоку, через який переноситься вузол (рис.3.12,в).

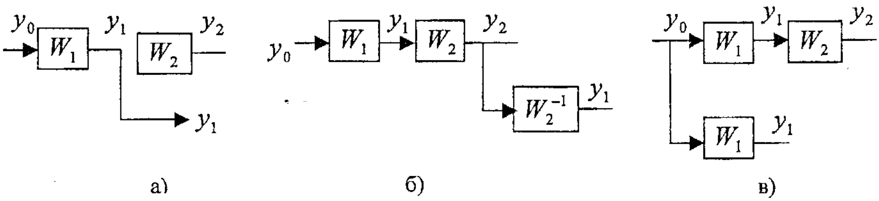


Рис. 3.12. Перенесення вузла

Контрольні питання

1. Обґрунтуйте зв'язок основних властивостей операторів з можливістю (або неможливістю) виконання композиції або декомпозиції.
2. Композиція і декомпозиція є прямою і оберненою задачами. Яка з них є коректною (однозначною), а яка ні?
3. Сформулюйте правила композиції/декомпозиції в термінах операцій над графами.

Ключові слова

Комплексні моделі, агрегатні моделі, композиція моделі, декомпозиція моделі, послідовне з'єднання, паралельне з'єднання, зворотний зв'язок, перенесення суматора, перенесення вузла.

Література

1. Основы моделирования сложных систем. /Под ред. И.В.Кузьмина. – К.: Вища школа, 1981. – 369 с.
2. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления. – М.: Высш. школа, 1997. - 303с.
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
4. Лазарев И.А. Композиционное проектирование сложных агрегативных систем. – М.: Радио и связь, 1986. – 312с.
5. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк и др. – М.: Наука, 1985. – 640с.

3.5. Моделі розподілених систем

Розподілені системи поділяються на системи з розподіленими і з зосередженими параметрами. *Систему з розподіленими параметрами* можна розділити на агрегати, які характеризуються тими ж параметрами, що і система в цілому; кожен агрегат можна знов розділити на ще менші агрегати і т.д. *Система з зосередженими параметрами* складається з агрегатів, які або є неподільними, або характеризуються іншими параметрами і функціонують інакше, ніж система в цілому. Зустрічаються також комбіновані системи, в яких частина агрегатів може розглядатися як підсистеми з розподіленими параметрами, а частина як з зосередженими.

Перехід при моделюванні систем з розподіленими параметрами до границі їх подрібнення на найменші агрегати приводить до моделей у вигляді диференціальних рівнянь. Моделі розподілених систем також повинні враховувати *затримки при передаванні впливів* від одного агрегата до іншого. В системах з розподіленими параметрами це забезпечується використанням *диференціальних рівнянь у часткових похідних.* Найвідомішими моделями такого типу є система рівнянь Максвелла, хвильове рівняння тощо.

Моделі розподілених систем широко використовуються у різних галузях математичної фізики. Найвідомішими прикладами таких моделей є модель статики механічної системи при просторово розподіленому навантаженні, модель розповсюдження тепла у просторі, модель дифузії, моделі геофізичних процесів тощо.

В системах із зосередженими параметрами затримки описуються передаточними функціями

$$W_з(p) = e^{-p\tau}, \tag{3.32}$$

де τ - часова затримка.

В дискретних системах одним з найсуттєвіших є питання синхронізації процесів в агрегатах, що взаємодіють. В синхронних системах для цього в моделі відображують кількість тактів, що витрачається на функціонування агрегатів. Найчастіше такі моделі зображуються часовими діаграмами.

Однією з найважливіших при побудові моделей розподілених систем є проблема *спостережності*. Визначення стану системи в процесі моделювання здійснюється за допомогою системи сенсорів, як показано на рис.3.13.

При дослідженні спостережності визначається мінімальна кількість та розташування точок контролю, які забезпечують можливість визначення стану системи з необхідною точністю. Нажаль, не завжди існує такий набір, для якого система контролю може бути технічно реалізована. У такому випадку модель розподіленої системи будується з використанням певних припущень і матиме відповідну невизначеність.

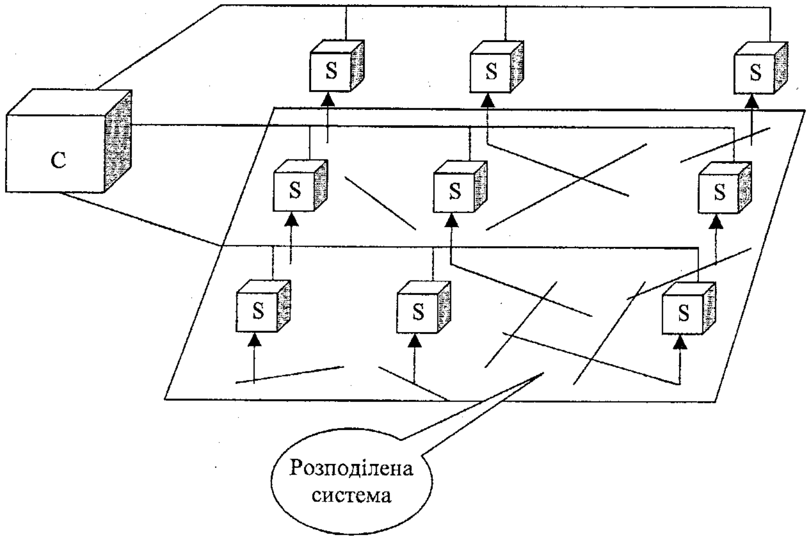


Рис.3.13.Схема дослідження розподіленої системи: S – сенсори, C – контролер.

Контрольні питання

1. Наведіть приклади розподілених систем з розподіленими параметрами.
2. Наведіть приклади розподілених систем із зосередженими параметрами.
3. Сформулюйте умову спостережності в термінах розв'язності рівнянь моделі системи.

Ключові слова

Розподілена система (2), система з розподіленими параметрами, система із зосередженими параметрами, затримки при передаванні впливів, диференціальні рівняння у часткових похідних, спостережність.

Література

1. Ажогин В.В, Згуровский М.З. Машинное проектирование оптимальных систем управления пространственно-распределенными динамическими объектами. – К.: Вища шк., 1985. – 170с.

2. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1985. – 304с.
3. Бойченко Е.В. Методы схемотехнического проектирования распределенных информационно-вычислительных микропроцессорных систем. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 128с.
4. Мокін В.Б., Мокін Б.І. Математичні моделі та програми для оцінювання якості річкових вод. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2000. – 152с.
5. Квєтний Р.Н., Коцюбинський В.Ю. Математичні моделі розповсюдження хвиль у волоконних світловодах: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 140с.

4. МОДЕЛІ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Робота систем керування ґрунтується на певній *інформації* про стан системи, параметри та мету керування. Але ця інформація ніколи не буває абсолютно повною, точною і достовірною. В результаті системи керування завжди працюють в *умовах* певної *невизначеності*.

Врахування невизначеності приводить до суттєвого ускладнення математичного моделювання систем керування. Оскільки моделі СК використовуються на всіх етапах життєвого циклу, то на протязі всієї історії розвитку теорії керування, особливо у період відсутності великих обчислювальних потужностей, перед дослідниками стояла задача всілякого спрощення математичних моделей. Тому в першу чергу розроблялися методи моделювання детермінованих систем, в яких невизначеність нехтувалася.

Але у багатьох випадках нехтування невизначеністю приводить не просто до певних похибок, а до втрати адекватності моделі взагалі. Найкраще це було доведено у теорії інформації, яка стала базовою концептуальною моделлю систем зв'язку [1].

Невизначеність у СК може мати переважно *стохастичну* чи *нечітку* природу.

У загальному випадку модель системи керування може бути подана у вигляді перетворення (4.1) та рис 4.1

$$B_Y = \Phi[B_X] \qquad (4.1)$$

де B_X - множина характеристик вхідних сигналів (впливів);

B_Y - множина характеристик вихідних сигналів (станів системи);

Φ - оператор перетворення.

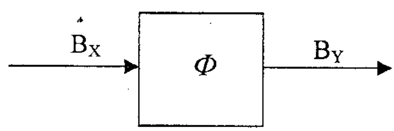


Рис.4.1. Узагальнена модель системи в умовах невизначеності

Відповідно модель системи складається з моделі сигналів і моделі перетворення. В умовах невизначеності модель сигналу характеризує можливі зміни значень сигналу, а модель перетворення характеризує можливі зміни параметрів або структури зв'язків підсистем.

4.1. Стохастична невизначеність

Випадковою називають *величину*, яка приймає в результаті випробування те чи інше (але при цьому лише одне) можливе значення, заздалегідь невідоме, яке змінюється від випробування до випробування та залежить від випадкових обставин. Випадкові величини можуть бути неперервні та дискретні.

Розподілом (*законом розподілу*) випадкової величини називається усяке співвідношення між можливими значеннями випадкової величина та відповідними їм *імовірностями* [2-6].

Функція розподілу (інтегральна функція розподілу, інтегральний закон розподілу) визначає імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше фіксованого дійсного числа x,

$$F(x) = P(X < x). \qquad (4.2)$$

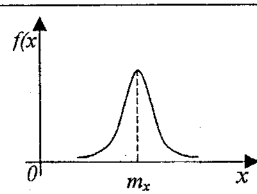
Диференціальною функцією розподілу (*функцією щільності ймовірності*) *f(x)* називається перша похідна від інтегральної функції розподілу.

Основні найпоширеніші закони розподілу наведені у таблиці 4.1 [2, 6, 7].

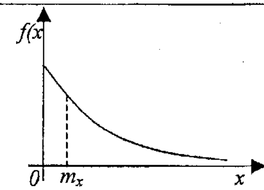
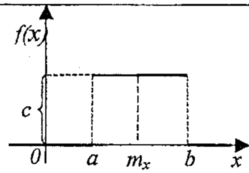
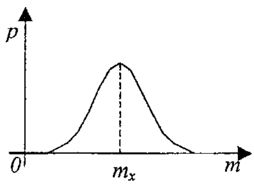
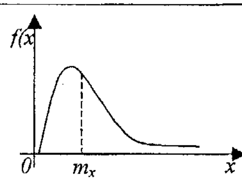
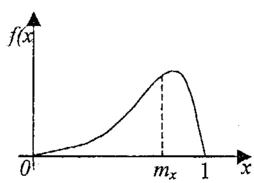
Випадковий процес (*стохастичний процес*) представляє зміни в часі стану системи, які заздалегідь непередбачувані. Кількісно випадковий процес описується випадковою функцією часу *X(t)*, яка в будь-який момент часу *t* може приймати різні значення з певним розподілом імовірностей. Таким чином, для будь-якого $t = t_i$ значення $X_i = X(t_i)$ є випадковою величиною. Випадковий процес (випадкова функція часу) визначається сукупністю функцій часу та законами, що характеризують властивості сукупності. Кожна з функцій цієї сукупності називається *реалізацією випадкової функції* [2-4, 6, 8].

Таблиця 4.1

Типові розподіли ймовірностей

Закон розподілу	**Аналітичний вигляд щільності розподілу**	**Графік щільності розподілу**	**Особливості розрахунку моментів**
1	2	3	4
Нормальний	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{a}}$		$m_x = b$ $D_x = a/2$

Продовження табл.4.1

1	2	3	4
Експоненційний (показниковий)	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & при\ \ x\ge 0, \lambda>0,\\ 0 & при\ \ x<0, \lambda>0\end{cases}$		$m_x=\sigma=1/\lambda$ $D_x=1/\lambda^2$
Рівномірний	$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<a;\\ \dfrac{1}{b-a} & при\ \ a\le x\le b\\ 0 & при\ \ x>b.\end{cases}$		$m_x=(a+b)/2$ $\sigma_x=(b-a)/2\sqrt{3}$
Біноміальний	$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ m\le 0;\\ \sum\limits_{m_i<m} P_{m,n} & при\ \ 0\le m\le n\\ 1 & при\ \ m>n.\end{cases}$ $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ $(m=0,1,\ldots,n)$, $q=1-p$.		$m_x=np$ $\sigma_x=\sqrt{npq}$
Гама-розподіл	$f(x;\alpha)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & при\\ (\alpha>0, \beta>0)\end{cases}$		$m_x=\dfrac{\alpha}{\beta}$ $D_x=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$
Бета-розподіл	$f(x;\alpha)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0, x\ge\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x & \\ при 0<x<1 (\alpha>0, \beta> & \end{cases}$		$m_x=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $D_x=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

В залежності від множин значень часу та реалізації $X(t)$ розрізняють чотири типи випадкових процесів [2, 3]:

1) випадковий процес загального типу: t і $X(t)$ можуть приймати будь-які значення на відрізку (чи на всій) дійсної осі;

2) дискретний випадковий процес: t неперервне, а величини $X(t)$ дискретні;
3) випадкова послідовність загального типу: t дискретно, а $X(t)$ може приймати будь-які значення на відрізку (чи на всій) дійсної осі;
4) дискретна випадкова послідовність: t і $X(t)$ обидва дискретні.

В загальному випадку початкові моменти розподілу визначаються:

$$M_X^{(k_1 \cdots k_n)}(t_1,\ldots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}f_n(x_1,\cdots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dx_1\ldots dx_n, \quad (4.3)$$

а центральні:

$$D_X^{(k_1 \cdots k_n)}(t_1,\ldots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mathrm{m}_1)^{k_1}\cdots(x_\mathrm{n}-\mathrm{m}_\mathrm{n})^{k_\mathrm{n}}f_n(x_1,\cdots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dx_1\ldots dx_n. \quad (4.4)$$

Випадкові процеси можна характеризувати *моментними функціями,* які розділяються на початкові і центральні. В загальному випадку *початкові моменти розподілу* визначаються:

$$M_X^{(k_1 \cdots k_n)}(t_1,\ldots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}f_n(x_1,\cdots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dx_1\ldots dx_n, \quad (4.5)$$

а *центральні моменти розподілу*:

$$D_X^{(k_1 \cdots k_n)}(t_1,\ldots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mathrm{m}_1)^{k_1}\cdots(x_\mathrm{n}-\mathrm{m}_\mathrm{n})^{k_\mathrm{n}}f_n(x_1,\cdots,x_n,t_1,\ldots,t_n)dx_1\ldots dx_n. \quad (4.6)$$

Найчастіше використовуються:

– *середнє* випадкового процесу (або перший центральний момент)

$$\mathrm{M}_\mathrm{X}^{(1)}\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{f}_1(x,t)dx=\mathrm{m}_x(t), \quad (4.7)$$

– *дисперсія* випадкового процесу (або другий центральний момент)

$$\mathrm{M}_\mathrm{X}^{(2)}\{[X(t)-a_x(t)]^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}[x-a_x(t)]^2\,\mathrm{f}_1(x,t)dx=\sigma_x^2(t), \quad (4.8)$$

– *коваріаційна функція* випадкового процесу (або змішаний другий початковий момент)

$$\mathrm{M}_\mathrm{X}^{(2)}\{X(t_1)X(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2\mathrm{f}_2(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2=B_x(t_1,t_2). \quad (4.9)$$

Випадкові процеси можуть бути стаціонарними, нестаціонарними, ергодичними.

Випадковий процес $x(t)$ називається *стаціонарним* (строго), якщо його функція розподілу $f_n(x_1,\cdots,x_n,t_1,\ldots,t_n)$ довільного порядку n не змінюється при будь-якому зсуві всієї групи точок $t_1,t_2,\ldots,t_n$ вздовж осі часу, тобто коли вираз функції розподілу довільного порядку не залежить від положення початку відліку часу

$$f(X,t) = f(X,t+\tau) = f(X). \qquad (4.10)$$

Для стаціонарних процесів $m_x(t) = m_x = const$, $D_x(t) = D_x = const$, $R_x(t,t') = R_x(t'-t) = R_x(\Delta t)$.

Ергодичним називається випадковий процес, якщо будь-яка його імовірнісна характеристика, яка одержана усередненням за множиною можливих реалізацій, з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, дорівнює часовому середньому, яке одержане усередненням за достатньо великий проміжок часу з однієї єдиної реалізації випадкового процесу.

Якщо стаціонарний випадковий процес *x(t)*, який заданий на відрізку [0,*T*], ергодичний, то

$$m_x \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt; \qquad (4.11)$$

$$D_x \approx \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m_x]^2 dt; \qquad (4.12)$$

$$R_{xx}(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]dt. \qquad (4.13)$$

Кореляційна функція (4.13) характеризує статистичний зв'язок між значеннями випадкового процесу у моменти t і ($t+\tau$) і називається автокореляційною. Аналогічно можна охарактеризувати зв'язок двох процесів за допомогою взаємної кореляційної функції

$$R_{xy}(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[x(t)-m_x][y(t+\tau)-m_y]dt. \qquad (4.14)$$

Часто для моделювання динаміки систем в умовах невизначеності використовують спектральну щільність потужності – зображення по Фурьє кореляційної функції [2]:

$$S_{xx}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \qquad (4.15)$$

і

$$S_{xy}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (4.16)$$

Моделі випадкових процесів можуть використовуватися для опису в умовах невизначеності як сигналів у системі, так і характеристик їх перетворення (параметрів системи, структурних характеристик тощо).

Контрольні питання

1. Чим відрізняються випадкова величина і випадковий процес?
2. Що може стати джерелом стохастичної невизначеності в системі керування?

3. Що спільного і чим відрізняються спектр і спектральна щільність потужності сигналу?

4. Як отримати кореляційну функцію, якщо відома спектральна щільність потужності?

5. Чим відрізняється математичне сподівання від середнього значення?

6. Як Ви думаєте, чому S_{xx} назвали „спектральною щільністю потужності"?

Ключові слова

Інформація, умови невизначеності, стохастична невизначеність, випадкова величина, закон розподілу випадкової величини, ймовірність, функція розподілу, диференціальна функція розподілу, функція щільності ймовірності, випадковий процес, стохастичний процес (1), реалізація випадкової функції, моментна функція, початкові моменти розподілу, центральні моменти розподілу, середнє випадкового процесу, дисперсія, кореляційна функція (1 2 3), стаціонарний процес, ергодичний процес (1).

Література

1. Стратонович Р.Л. Теория информации. - М.: Сов.радио, 1975.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. Изд.2-е, перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – 552с.
3. Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А., Решетникова И.О. Математическая статистика. 2-е изд., перераб. и доп.– М.:Высш. школа, 1981. – 371с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. – 384с.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964.-576с.
6. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 832с.
8. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.
9. Маликов В.Т., Дубовой В.М., Кветный Р.Н., Исматуллаев П.Р. Анализ измерительных информационных систем. – Ташкент: ФАН, 1984.
10. Бухарев Р.Г. Основы теории вероятностных автоматов. – М.: Наука, 1985. – 288с.
11. Романовский И.В. Дискретный анализ. – СПб.: Невский диалект, 2000. – 240с.
12. Колмогоров А.Н. Основне понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120с.
13. Глонь О.В., Дубовой В.М. Моделювання систем керування в умовах невизначеності. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 169с.

14. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – К.: Вища школа, 1974. – 452с.
15. Трауб Дж.Ф. и др. Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 183с.

4.2. Нечітка невизначеність

У складі систем керування часто використовуються підсистеми, що працюють з *експертною інформацією.* Вона використовується на етапах прогнозування, діагностики, проектування, планування, керування тощо для підтримки *прийняття рішення.*

Експерт – людина, яка за роки навчання та практики навчилась ефективно розв'язувати задачі, що відносяться до певної предметної області [1, 2, 3].

Одною з теорій, яка в останній час широко використовується при побудові ЕС, є *нечітка логіка.* Основні поняття та визначення були вперше розроблені Л.Заде як узагальнення відповідних властивостей і операцій класичної теорії множин [4, 5].

Основним поняттям нечіткої логіки є поняття *нечіткої множини.*

Нечітка множина $\tilde{A}$ на *універсальній множині* X – сукупність пар $(\mu_{\tilde{A}}(x),x)$, де $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – *ступінь належності* елемента $x \in X$ до нечіткої множини $\tilde{A}$. Ступінь належності знаходиться в діапазоні *[0, 1].* Чим вище ступінь належності, тим в більшій мірі елемент універсальної множини відповідає властивостям нечіткої множини [4-8]. Нечітка множина характеризується функцією належності.

Функцією належності називається така функція, яка дозволяє обчислити ступінь належності довільного елементу універсальної множини до нечіткої множини. Функція належності $\mu^T(x)$ характеризує суб'єктивну міру (в діапазоні *[0,1]*) впевненості експерта в тому, що чітке значення x відповідає нечіткому терму T [4-8].

Якщо універсальна множина складається з кінцевого числа елементів $X = \{x_1,x_2, \ldots,x_n\}$, тоді нечітка множина $\tilde{A}$ записується у вигляді

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i. \tag{4.17}$$

У випадку неперервної множини X використовують таке позначення:

$$\tilde{A} = \int_U \mu_{\tilde{A}}(x)/x \tag{4.18}$$

Знаки $\sum$ та $\int$ в цих формулах означають „сукупність пар" $\{\mu(x), x\}$.

Лінгвістичною змінною називається така змінна, значеннями якої є слова та словосполучення деякої природної чи штучної мови [5,7]. Множину цих значень називають *терм-множиною.*

Термом називається елемент терм-множини. В теорії нечітких множин терм задається функцією належності.

Нечітким відношенням R на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times Y$, яка характеризується функцією належності μ^R: $X \times Y \to [0,1]$ [4].

Фаззифікація – зіставлення множини значень x з її функцією належності $\mu(x)$, тобто переведення значень x у нечіткий формат [7,8].

Дефаззифікація – процес, обернений фаззифікації [7,8].

α-рівнем нечіткої множини $A \subseteq X$, називається множина $A_\alpha \subseteq X$ така, що

$$A_\alpha = \left\{ x \in X : \mu^A(x) \geq \alpha \right\},\ \forall \alpha \in [0,1]. \tag{4.19}$$

Якщо $R \subseteq X \times Y$ та $S \subseteq Y \times Z$, то *max-min композицією* називається нечітка множина $R \circ S$, визначена на $X \times Z$, функція належності якої має вигляд [4,7,8]:

$$\mu^{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in Y}\left[\inf(\mu^R(x,y), \mu^S(y,z))\right]. \tag{4.20}$$

Max-min композиція дозволяє визначити яку нечітку множину в Y потрібно поставити у відповідність нечіткій множині $A' \subseteq X$, якщо відомо, що нечітка множина $B \subseteq Y$ відповідає нечіткій множині $A \subseteq X$.

Операція знаходження такої відповідності називається *нечітким логічним висновком* і виконується за формулою [7,8]:

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \times B), \tag{4.21}$$

де R - нечітке відношення:

$$R = A \times B = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \inf\left(\mu^A(x_i), \mu^B(y_j)\right) \right\} / (x_i, y_j),$$

$\circ$ - max-min композиція, у відповідності з якою:

$$B' = \sum_{j=1}^{m} \sup_{\mathrm{i}=\overline{1,1}}\left[\inf\left(\left\{\mu^{A'}(x_i), \mu^R(x_i, y_j)\right\} / y_j\right)\right],$$

де $A, A' \subseteq X$, $B, B' \subseteq Y$.

Носій нечіткої множини A – сукупність елементів $x \in X$, для яких $\mu_A(x) > 0$, він позначається $suppA$.

Останнім часом поняття теорії нечітких множин та нечіткої логіки розповсюджені на операції з числами в умовах невизначеності. В результаті створений і активно розвивається новий фундаментальний напрямок математичного моделювання – *нечітка математика* [4].

Нечітке число – це нечітка множина A, що визначена на множині дійсних чисел R, якщо його функція належності нормальна, неперервна і опукла [4,7,8], тобто

$$\sup_{x \in R} \mu^A(x) = 1, \tag{4.22}$$

$$x \le y \le z \Rightarrow \mu^A(y) \ge inf\left(\mu^A(x),\ \mu^A(z)\right). \qquad (4.23)$$

Трикутні нечіткі числа (рис.4.2,а) мають функцію належності вигляду

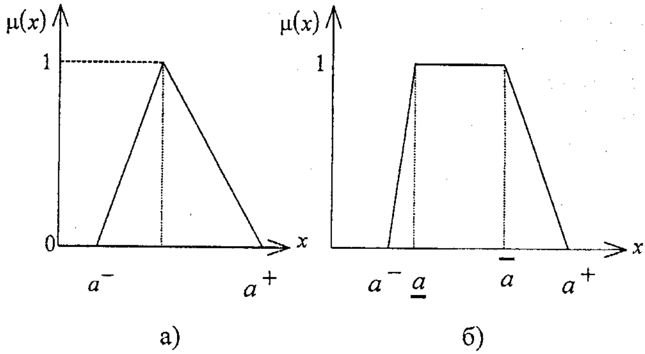


Рис.4.2. Трикутна і трапецієподібна форма функцій належності

$$\mu^A(x)=\begin{cases}(x-a^-)/(a-a^-), & a^- \le x \le a\\ (a^+-x)/(a^+-a), & a \le x \le a^+\end{cases}, \qquad (4.24)$$

Крім того, функція належності може мати трапецієподібну форму (рис.4.2,б):

$$\mu^A(x)=\begin{cases}(x-a^-)/(\underline{a}-a^-), & a^- \le x \le \underline{a}\\ 1 & , \underline{a} \le x \le \overline{a}\\ (a^+-x)/(a^+-\overline{a}), & \overline{a} \le x \le a^+\end{cases}. \qquad (4.25)$$

Існує більш зручна *LR-форма нечіткого числа*, яка описується функцією належності (4.26) [4,7,8]

$$\mu^A(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{q_- - x}{\rho}\right) & якщо \quad q_- - \rho \le x \le q_-\\ 1 & якщо \quad x \in [q_-, q_+]\\ R\left(\dfrac{x-q_+}{\beta}\right) & якщо \quad q_+ \le x \le q_+ + \beta\\ 0 & інакше\end{cases}, \qquad (4.26)$$

де $[q_-, q_+]$ – вершина A;

q_- і q_+ – нижнє і верхнє модальні значення;

ρ – відхилення зліва;

β – відхилення справа.

Якщо $\rho = \beta = 0$, то нечітке число A переходить в чітке число q.

Таким чином, LR-форму нечіткого числа A можна представити у вигляді трійки $A = (\ q_A, \rho_A, \beta_A\ )$.

L,R: *[0,1]→[0,1]*, з *L(0) = R(0) = 1* і *L(1) = R(1) = 0*, монотонно спадні функції.

Тоді α –рівень множини A [7,8]

$$[A]^{\alpha} = [q_{-} - \rho L^{-1}(\alpha), q_{+} + \beta R^{-1}(\alpha)],\quad \alpha \in [0,1]. \qquad (4.27)$$

Останнім часом розповсюдилися системи управління, які взаємодіють з експертними системами на базі *нечітких контролерів*. Такі системи функціонують за принципом: результати вимірювання фаззифікуються, обробляються, дефаззифікуються й у вигляді звичайних сигналів подаються на виконавчі пристрої.

Контрольні питання

1. Що спільного і чим відрізняються випадкові і нечіткі величини?
2. Що є джерелом нечіткості?
3. Перевірте, чи можна представити операції звичайної логіки (п.3.1) як max-min композицію?
4. Наведіть приклади застосування нечітких чисел і нечітких лінгвістичних даних?
5. Чи утворює терм-множина метричний або топологічний простір?

Ключові слова

Експертна інформація, прийняття рішення, експерт, нечітка логіка, нечітка множина, універсальна множина, ступінь належності, функція належності, лінгвістична змінна, терм-множина, терм, нечітке відношення, фаззифікація, дефаззифікація, α-рівень, max-min композиція, нечіткий логічний висновок, носій нечіткої множини, нечітка математика, нечітке число (1 2 3), LR-форма нечіткого числа, нечіткий контролер.

Література

1. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам: Пер.с англ. – М.: Мир, 1989. – 388 с.
2. Искусственный интеллект: В 3-х кн. Кн1. Системы общения и экспертные системы: Справочник / Под ред. В.Н.Захарова, В.Ф.Хорошевского. – М.: Радио и связь, 1990. – 368с.
3. Рот М. Интеллектуальный автомат: компьютер в качестве эксперта. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 76с.
4. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Поспелова Д.А. – М.: Наука, 1986. –312с.

5. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.-167с.
6. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ./ Под ред. Р. Р. Ягера. – М.: Радио и связь,1986. – 408с.
7. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии в идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: Континент-ПРИМ ,1999.- 300с.
8. Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Нечеткая надежность алгоритмических процессов. – Винница: Континент-ПРИМ, 1997г. – 142с.

4.3. Моделі перетворення характеристик сигналів з різною формою невизначеності

Як і для моделей інших типів, моделювання в умовах невизначеності передбачає моделювання як сигналів, так і їх перетворень у системі.

4.3.1. Моделювання перетворення стохастичних даних

Задача *перетворення стохастичних даних* може бути сформульована таким чином.

Нехай задане перетворення $y = F(x_1 \ldots x_n)$, де x_i – випадкові величини (процеси), які задані певною підмножиною C_x генеральної сукупності C_{0X} своїх характеристик. Необхідно знайти відповідні характеристики C_y результату перетворення.

В залежності від вигляду перетворення F розрізняють нелінійні статичні, лінійні динамічні і нелінійні динамічні перетворення. *Нелінійне статичне перетворення* – це таке, що може бути подане у вигляді функціональної залежності. *Лінійне динамічне перетворення* – це таке, що може бути подане лінійним диференціальним рівнянням. При нелінійних статичних перетвореннях відносно просто визначити функції розподілу ймовірностей результату та їх характеристики і важко визначити кореляційні і спектральні характеристики, а при лінійних динамічних перетвореннях навпаки. Крім того, точні розв'язки цих задач існують далеко не для всіх випадків. Найбільші проблеми складає моделювання *нелінійних динамічних перетворень*. Найчастіше такі перетворення подаються сукупністю нелінійних статичних і лінійних динамічних перетворень.

Лінійне статичне перетворення характеристик сигналів показане в табл.4.2.

Таблиця 4.2.

Перетворення характеристик випадкових сигналів

Характеристика	Рівняння перетворення сигналу	Рівняння перетворення характеристики
Математичне сподівання m	$y = ax + b$	$m_y = am_x + b$
	$y = ax_1 + bx_2$	$m_{x_2/x_1} = m_{x_2} + r_{x_1x_2}\sqrt{\frac{D_{x_1}}{D_{x_1}}}(x - m_{x_1})$ $m_y = am_{x_1} + bm_{x_2/x_1}$
Дисперсія D	$y = ax + b$	$D_y = a^2 D_x$
	$y = ax_1 + bx_2$	$D_y = a^2 D_{x_1} + b^2 D_{x_2} - 2abr_{x_1x_2}\sqrt{D_{x_1}D_{x_2}}$
Кореляційна функція $R_{x_1x_2}$	$y = ax_1 + b$	$R_{y\ x_2} = aR_{x_1x_2}$
Спектральна щільність потужності $S_{x_1x_2}$	$y = ax_1 + b$	$S_{y\ x_1} = aS_{x_1x_2}$
Щільність розподілу ймовірностей f_x	$y = ax + b$	$f_y = \frac{1}{a} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Для моделювання перетворення стохастичних даних в динамічних процесах існує багато методів. Найпоширенішими серед них є рівняння Колмогорова, прямий метод визначення кореляційної функції, метод контурних інтегралів, метод похідних, метод твірних функцій.

Кореляційна функція результату лінійного динамічного перетворення знаходиться за допомогою рівняння Вінера-Хопфа, яке аналогічне *інтегралу Дюамеля* [1]

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty R_{xx}(\tau_1) g(\tau - \tau_1) d\tau_1 . \qquad (4.27)$$

Відповідна енергетична характеристика – *спектральна щільність потужності*, знаходиться через *частотну передаточну функцію*, яка є Фур'є-зображенням імпульсної перехідної характеристики

$$W(j\omega) = \int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

звідки

$$S_{xy}(j\omega) = S_{xx}(j\omega) \cdot W(j\omega) . \qquad (4.28)$$

Функція розподілу результату нелінійного статичного перетворення [2,3,4] для монотонної функції $y = N(x)$

$$f_y(y) = \dot{N}^{(-1)}(y) f_x[N^{(-1)}(y)], \tag{4.29}$$

де $N^{(-1)}$ – зворотна функція,

$\dot{N}^{(-1)}$ – її похідна.

Методи знаходження кореляційної функції, та енергетичного спектру процесу на виході нелінійного елементу переважно призначені для нормальних розподілів імовірностей вхідних процесів [5, 6].

Рівняння Колмогорова застосовується для знаходження розподілу імовірності переходу дифузійного марківського процесу. Оскільки нормальний випадковий процес з експоненціальною кореляційною функцією є дифузійним марківським процесом, то рівняння Колмогорова для нього теж виконуються [5, 7]. *Перше рівняння Колмогорова* має вигляд:

$$\frac{\partial f_{X1X2}(t,t_1)}{\partial t} + m^{(1)}_{dx(t+dt)/x_1(t)} \frac{\partial f_{X1X2}(t,t_1)}{\partial x_1} + \frac{1}{2} m^{(2)}_{dx(t+dt)/x_1(t)} \frac{\partial^2 f_{X1X2}(t,t_1)}{\partial x_1^2} = 0 \tag{4.30}$$

де $m^{(k)}_{dx(t+dt)/x_1(t)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_1)^k f_{X1X2}(t, t_2) dx_3$,

$m^{(1)}_{dx(t+dt)/x_2(t)}$ і $m^{(2)}_{dx(t+dt)/x_2(t)}$ скінченні ($m^{(2)}_{dx(t+dt)/x_2(t)}$ відмінно від нуля)

та $m^{(k)}_{dx(t+dt)/x_2(t)} \equiv 0$ при $k \geq 3$,

$f_{X1X2}(t,t_1)$ – двовимірна функція розподілу.

Друге рівняння Колмогорова відоме також як *рівняння Фоккера–Планка* має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{X1X2}(t,t_1)}{\partial t_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[m^{(1)}_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)} f_{X1X2}(t,t_1)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[m^{(2)}_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)} f_{X1X2}(t,t_1)\right] \end{aligned} \tag{4.31}$$

де $m^{(1)}_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_2) f_{X1X2}(t_1, t_2) dx_3$ є коефіцієнт зносу,

$m^{(2)}_{dx(t_1+dt)/x_2(t_1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_3 - x_2)^2 f_{X1X2}(t_1, t_2) dx_3$ - коефіцієнт дифузії.

Обидва рівняння (4.30) і (4.31) належать до класу параболічних диференціальних рівнянь у часткових похідних.

Для нормального випадкового процесу умовна функція розподілу з нульовим середнім, дисперсією σ^2 і коефіцієнтом кореляції r, має вигляд [7]:

$$f_{X1X2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp\left[-\frac{(rx_1 - x_2)^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right], \tag{4.32}$$

$$f_{X1X2}(0,t_1)=\delta(x_2-x_1). \tag{4.33}$$

Головним недоліком рівнянь Колмогорова є те, що вони призначенні лише для нормальних розподілів з експоненціальною кореляційною функцією.

Прямий метод визначення кореляційної функції при нелінійному перетворенні базується на розкладенні у ряд та двовимірній щільності імовірності процесу на вході нелінійного перетворення. Кореляційна функція розраховується за формулою [5, 6]:

$$R_{X1,X2}(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1) c_n(x_2) a_n(x_1, x_2), \tag{4.34}$$

де $c_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} N(x) Q_n(x) f_{X1}(x_1) dx,$

$$a_n(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X1X2}(x_1, x_2) Q_n(x_1) Q_n(x_2) dx_1 dx_2\ ,$$

$N(x)$ – функція характеристики нелінійного елементу;

$f_X(x)$ – одновимірна функція розподілу імовірностей;

$f_{X1X2}(x_1,x_2,)$ – двовимірна функція розподілу;

$Q_n(x_1)$ і $Q_n(x_2)$ – системи ортогональних поліномів.

Якщо випадковий процес є сумою детермінованого процесу $S(t)$ і стаціонарного нормального $x(t)$ з нульовим середнім, то його кореляційна функція розраховується за формулою

$$R_{X1X2}(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_2) c_n(x_2 + x_1) \frac{{r_{x1}}^n}{n!}. \tag{4.35}$$

Якщо детермінована частина нормального процесу відсутня ($s\equiv 0$), то кореляційна функція має вигляд

$$R_{X1X2}(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \frac{{r_{x1}}^n}{n!}, \tag{4.36}$$

де $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} N(\sigma x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx\ ,$

$H_n(x)$ – поліном Ерміта n-го порядку.

Функція $N(x)$, яка є аналітичним поданням характеристики нелінійного перетворення, апроксимується степеневими рядами або параболою.

Інший метод – *метод контурних інтегралів.* Він полягає у використанні того, що характеристики деяких нелінійних елементів можна подати через контурний інтеграл вигляду [8]

$$N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_e g(iu) e^{ixu} du, \tag{4.37}$$

де $g(iu) = \int_{-\infty}^{\infty} N(x) e^{-ixu} dx$.

Тоді кореляційна функція має вигляд

$$R_{X1X2}(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x_1) d_n(x_2) b_n(x_1, x_2), \tag{4.38}$$

де $d_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_e g(iu) M_n(u, x) \theta_1(u, x) dx$,

$b_n(x_1,x_2)$ – функції, які як і $a_n(x_1,x_2)$ залежать лише від кореляційних характеристик процесу на вході і не залежать від нелінійності;

$\theta_1(u, x)$ – одновимірна характеристична функція процесу на вході нелінійного елементу;

$M_n(u, x)$ – поліном n-го степеня.

Для знаходження кореляційної функції нормального випадкового процесу зручно застосовувати *метод похідних.* Він полягає у знаходженні похідних кореляційної функції за коефіцієнтом кореляції вхідного нормального процесу, після чого шукана кореляційна функція знаходиться елементарним інтегруванням [8].

Таким чином, обчислення кореляційної функції після нелінійного статичного перетворення нормального випадкового процесу зводиться до розв'язання звичайного диференціального рівняння k-го порядку вигляду

$$\frac{d^k R_X(P)}{dP^k} = H(P), \tag{4.39}$$

де $H(P)$ – права частина рівняння.

Отже,

$$\left. \frac{d^r R_X(P)}{dP^r} \right|_{R_X=0} = \sigma^r m_{r1} m_{r2}, \ r = 0, 1, \ldots, k\text{-}1, \tag{4.40}$$

де $m_{ri} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} N^{(r)}(x) e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2\sigma^2}} dx$, $i = 1, 2$.

Операторний метод моделювання перетворень стохастичних даних [9-13] дозволяє наближено оцінити закон розподілу вихідного сигналу $f_y(y)$, якщо відомі закони розподілу вхідних сигналів $fx_1(x_1)$, $fx_2(x_2)$ та їх перший і другий моменти, включаючи взаємну кореляційну функцію $R_{X1X2}(x_1,x_2)$.

Нехай вхідні дані X_1 и X_2 розподілені за законами $f_{x1}(\chi_1)$, $f_{x2}(\chi_2)$ *та* їх взаємна кореляційна функція – $Rx_1x_2(\tau)$. Диференціальний закон розподілу вихідного даного $f_y(y)$ може бути знайдений як *інтегральний оператор* вигляду:

$$f_Y(y) = \Phi_{XY}(f_X(\overline{\chi}), A, W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{n}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\overline{x}) \varphi(x,y,A,W) d\overline{x} \quad (4.41)$$

де Φ_{XY} – інтегральний оператор, n – кількість вхідних величин, A та W - параметри алгебраїчного й інтегро-диференціального перетворень.

Вираз *ядра оператора* $\varphi^{(1)}(x,y)$ для нелінійної алгебраїчної операції ґрунтується на відомій в теорії випадкових процесів формулі нелінійного перетворення випадкового процесу і рівнянні регресії. Вираз ядра для інтегро-диференціального перетворення ґрунтується на поданні такого перетворення інтегральною сумою (інтегралом Дюамеля). Опис операторів для основних типів операцій наведений у таблиці 4.3.

4.3.2. Методи моделювання перетворень нечітких даних

Нечіткі дані можна поділити на лінгвістичні і числові. Над лінгвістичними даними виконуються переважно множинні операції [14-17].

Операції над нечіткими множинами:

а) *Доповненням* нечіткої множини A називається нечітка множина $\neg A$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{\neg A}(x) = 1 - \mu^{A}(x), \ \forall x \in X. \quad (4.42)$$

б) *Перетином* двох нечітких множин A і $B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \cap B$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{A \cap B}(x) = \min\left[\mu^{A}(x), \mu^{B}(x)\right], \ \forall x \in X, \quad (4.43)$$

в) *Об'єднанням* двох нечітких множин A і $B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \cup B$, функція належності якої дорівнює:

$$\mu^{A \cup B}(x) = \max\left[\mu^{A}(x), \mu^{B}(x)\right], \ \forall x \in X, \quad (4.44)$$

Кардинальне число (потужність) нечіткої множини

$$A = \mu^{A}(x_1)/x_1 + \mu^{A}(x_2)/x_2 + ... + \mu^{A}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu^{A}(x_i)/x_i \quad (4.45)$$

знаходиться таким чином: $\operatorname{card} A = |A| = \sum_{i=1}^{n} \mu^{A}(x_i)$.

Таблиця 4.3.

Інтегральні оператори перетворення щільності розподілу

Операція	Оператор	Параметри
$y = N(x)$	$f_y = \int\limits_{\Omega_x} f_x(x)\delta[y - N(x)]dx$	Ω_x - область визначення f_x δ - дельта-функція Дірака
$y = N(x_1, x_2)$	$f_y = \int\limits_{\Omega_{X1}} \int\limits_{\Omega_{X2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2)\delta[y -$ $- N(x_1, x_2)]\delta[x_2 + ax_1 +$ $+ b\xi + c]d\xi dx_1 dx_2$	$a = -r_{x_1x_2}\sqrt{\frac{D_{x_2}}{D_{z_1}}}$ $b = -\sqrt{1 - r^2{}_{x_1x_2}}$ $c = r_{x_1x_2} m_{x_1}\sqrt{\frac{D_{x_2}}{D_{z_1}}} +$ $+(\sqrt{1 - r^2{}_{x_1x_2}} - 1)m_{x_2}$
$y = \int\limits_0^t x(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$f_y = \int \cdots \int\limits_{\Omega_X} \prod\limits_{i=1}^{n} f_x(x_i - m_x)\delta[y -$ $-(1-a)m_y - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{n-1}(t - i\tau)\cdot$ $\cdot g_0(i\tau)]dx_1 \ldots dx_n$	$\tau = \frac{S_{xx\max}}{D_x}$ $T_{np} = \frac{\pi W_{\max}}{\int\limits_0^\infty W(\omega)d\omega}$ $g_0(i\tau) = \int\limits_{i\tau}^{(i+1)\tau} g(\tau)d\tau$ $n = ent\left[\frac{T_{np}}{\tau}\right]$ $a = \sqrt{\frac{D_y}{\tau D_x \sum\limits_{i=1}^{n} g_0(i\tau)}}$

Принципи узагальнення математичних операцій на нечіткі дані були розроблені для того, щоб для нечітких чисел можна було застосовувати арифметичні та алгебраїчні операції, які використовуються для звичайних чітких даних.

Базовий принцип узагальнення – це *принцип узагальнення Заде*, який полягає в наступному.

Якщо задана функція від k змінних $y=g(x_1,x_2,..x_k)$ і аргументи x_i - нечіткі числа $\widetilde{x}_i$ з носіями $supp\widetilde{x}_i=[\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $i=\overline{1,k}$ то нечітке число $\widetilde{y}=g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_k)$ визначається в такий спосіб :

$$\mu_{\widetilde{y}}\left(y^*\right)=\sup_{\substack{g\left(x_1^*,x_2^*,...,x_k^*\right)=y^* \\ x_i^*\in\operatorname{supp}\widetilde{x}_i,\quad i=\overline{1,k}}}\inf\left(\mu_{\widetilde{x}_1}\left(x_1^*\right),...,\mu_{\widetilde{x}_n}\left(x_k^*\right)\right) \tag{4.46}$$

Алгоритм принципу узагальнення Заде [14-16].

1. Фіксується значення $y=y^*$.
2. Знаходяться всі k-ті $\left\{x_{1j}^*,x_{2j}^*,...,x_{kj}^*\right\}$, що задовольняють умови:

$$y^*=g\left(x_{1j}^*,x_{2j}^*,...,x_{kj}^*\right),\ x_{ij}^*\in\left[\underline{x}_i,\overline{x}_i\right],\ i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,m}. \tag{4.47}$$

3. Визначається ступінь належності елемента y^* нечіткому числу $\widetilde{y}$ за формулою:

$$\mu_{\widetilde{y}}\left(y^*\right)=\sup_{j=\overline{1,m}}\inf\left(\mu_{\widetilde{x}_1}\left(x_{1j}^*\right),\ \mu_{\widetilde{x}_2}\left(x_{2j}^*\right),...,\mu_{\widetilde{x}_n}\left(x_{kj}^*\right)\right). \tag{4.48}$$

4. Перевіряється умова чи взяті всі елементи y^*. Якщо "так", то переходять до кроку 5, інакше фіксують нове значення y^* і переходять до кроку 2.
5. Кінець.

Основні арифметичні операції над нечіткими числами у відповідності до принципу узагальнення мають вигляд:

- додавання $\mu^{A+B}(z)=\max\limits_{z=x+y}\min\left[\mu^A(x),\mu^B(y)\right],\ \forall x,y,z\in\Re$
- віднімання $\mu^{A-B}(z)=\max\limits_{z=x-y}\min\left[\mu^A(x),\mu^B(y)\right],\ \forall x,y,z\in\Re$
- множення $\mu^{A*B}(z)=\max\limits_{z=x*y}\min\left[\mu^A(x),\mu^B(y)\right],\ \forall x,y,z\in\Re$
- ділення $\mu^{A/B}(z)=\max\limits_{z=x/y,y\neq 0}\min\left[\mu^A(x),\mu^B(y)\right],\ \forall x,y,z\in\Re$

Якщо $y=g(x_1,x_2,..x_k)$ - функція від k нечітких аргументів $\widetilde{x}_i$, кожний із яких задається функцією належності в n точках універсальної множини

$$\widetilde{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\mu_{\widetilde{x}_i}\left(x_{ij}\right)/x_{ij}\ ,\ i=\overline{1,k}, \tag{4.49}$$

то для визначення нечіткого числа $\widetilde{y}$ за принципом узагальнення Заде необхідно перебрати $N=n^k$ варіантів.

Для вдосконалення принципу узагальнення Заде ввели *принцип* α-*рівневого узагальнення* [14-16].

Якщо задана функція від нечітких аргументів $y=g(x_1,x_2,..x_k)$, у якої нечіткі числа подані у вигляді розкладання на α-рівневі множини:

$$\tilde{y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha\right), \tag{4.50}$$

$$\tilde{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(\underline{x}_{i\alpha}, \overline{x}_{i\alpha}\right),\ i = \overline{1,k}. \tag{4.51}$$

то для будь-якого α-рівня значення функції обчислюється за формулами:

$$\underline{y}_\alpha = \inf\left(f\left(x^*_{1_\alpha}, x^*_{2_\alpha}, ..., x^*_{k_\alpha}\right)\right); \tag{4.52}$$

$$\overline{y}_\alpha = \sup\left(f\left(x^*_{1_\alpha}, x^*_{2_\alpha}, ..., x^*_{k_\alpha}\right)\right), \tag{4.53}$$

де $x^*_{i_\alpha} \in \left[\underline{x}_{i_\alpha}, \overline{x}_{i_\alpha}\right]$, $i = \overline{1,k}$.

У LR формі α – рівень множини A згідно з [14-16]

$$[A]^\alpha = [q_- - \rho L^{-1}(\alpha), q_+ + \beta R^{-1}(\alpha)],\ \ \alpha \in [0,1]. \tag{4.54}$$

При застосуванні α-рівневого принципу узагальнення необхідно розв'язувати оптимізаційну задачу: дана функція від k змінних $y=g(x_1,x_2,..x_k)$, у якій аргументи $x_i \in \left[\underline{x}_i, \overline{x}_i\right]$, $i = \overline{1,k}$ і потрібно знайти такі значення аргументів $x^*_1, x^*_2, ..., x^*_k$, що забезпечують максимальне $(\overline{y})$ і мінімальне $(\underline{y})$ значення функції $y=g(x_1,x_2,..x_k)$ на області визначення $x_i \in \left[\underline{x}_i, \overline{x}_i\right]$, $i = \overline{1,k}$. При цьому для спрощення розв'язування задачі вводять ряд обмежень, властивих реальним моделям, що дозволяє одержати простий алгоритм.

Припустимо, що функція $y=g(x_1,x_2,..x_k)$ відповідає таким обмеженням:

- Область зміни будь-якого аргументу неперервна.
- На області визначення функція диференційована.
- Множину аргументів $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ можна подати об'єднанням не більше, ніж трьох підмножин $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, причому:

$$X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X_3 = X_2 \cap X_3 = \varnothing; \tag{4.55}$$

$$X_1 = \left\{x_r : \frac{\partial y}{\partial x_r} \ge 0\right\}\ \left(r = \overline{1, p_1}\right); \tag{4.56}$$

$$X_2 = \left\{x_s : \frac{\partial y}{\partial x_s} \le 0\right\}\ \left(s = \overline{1, p_2}\right); \tag{4.57}$$

$$X_3 = \left\{x_l : \operatorname{sign}\left(\frac{\partial y}{\partial x_l}\right) = h_l\left(x_r, x_s\right)\right\}; \tag{4.58}$$

$$\left(l=\overline{1,p_3}\ ;\ p_1+p_2+p_3=n\right). \tag{4.59}$$

$\frac{\partial y}{\partial x_l}=g_l(x_r,x_s)$ - знакозмінна функція і для усіх $x_l \in X_3$, знак похідної $\frac{\partial y}{\partial x_l}$ не залежить від x_l тобто :

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial y}{\partial x_l}\right)\neq h(x_l)\ . \tag{4.60}$$

Більш досконалим є *модифікований принцип узагальнення* [16], за яким нечітким узагальненням $\widetilde{y}=g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_k)$ називається число

$$\widetilde{y}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\left\{f\left(\underline{x}_{r_\alpha},\overline{x}_{s_\alpha},x^I_{l_\alpha}\right),f\left(\overline{x}_{r_\alpha},\underline{x}_{s_\alpha},x^{II}_{l_\alpha}\right)\right\}, \tag{4.61}$$

де $x^I_{l_\alpha}=\begin{cases}\underline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\underline{x}_r,\overline{x}_s\right)\geq 0\\ \overline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\underline{x}_r,\overline{x}_s\right)<0\ ;\end{cases}$

$$x^{II}_{l_\alpha}=\begin{cases}\overline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\overline{x}_r,\underline{x}_s\right)\geq 0\\ \underline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\overline{x}_r,\underline{x}_s\right)<0\ .\end{cases}$$

Методику нечіткого узагальнення аналітичних моделей можна подати у такому алгоритмі [15,16]:

1. Подати вихідну математичну модель у вигляді функції

$$y=f(x_1,x_2,...,x_n)\ . \tag{4.62}$$

2. Визначити границі зміни аргументів: $x_i\in\left[\underline{x}_i,\overline{x}_i\right]$, $i=\overline{1,n}$.

3. Знайти часткові похідні $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

4. Позначити:

x_r - аргументи, для яких $\frac{\partial y}{\partial x}\geq 0$ на всій області визначення;

x_s - аргументи, для яких $\frac{\partial y}{\partial x_s}\leq 0$ на всій області визначення;

x_l - аргументи, для яких $\frac{\partial y}{\partial x_l}$ є знакозмінною функцією і її знак залежить тільки від значень x_r аргументів x_s і , тобто

$$\frac{\partial y}{\partial x_l}=g_l(\ x_r,x_s). \tag{4.63}$$

5. Записати нечітку математичну модель $\widetilde{y}=g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_k)$, у вигляді:

$$\widetilde{y}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\left\{f\left(\underline{x}_{r_\alpha},\overline{x}_{s_\alpha},x^I_{l_\alpha}\right),f\left(\overline{x}_{r_\alpha},\underline{x}_{s_\alpha},x^{II}_{l_\alpha}\right)\right\}, \tag{4.64}$$

де $x_{l_\alpha}^{I} = \begin{cases} \underline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\underline{x}_r, \overline{x}_s\right) \geq 0 \\ \overline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\underline{x}_r, \overline{x}_s\right) < 0 \end{cases}$;

$$x_{l_\alpha}^{II} = \begin{cases} \overline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\overline{x}_r, \underline{x}_s\right) \geq 0 \\ \underline{x}_{l_\alpha}, & g_l\left(\overline{x}_r, \underline{x}_s\right) < 0 \end{cases} .$$

Контрольні питання

1. Для яких статистичних характеристик вихідних сигналів перетворювачів існують методи оцінювання?
2. Чому функція розподіл ймовірності сигналу на виході лінійного динамічного перетворювача завжди наближається до нормального?
3. Як визначити спектральну щільність потужності, якщо відома двовимірна функція розподілу ймовірностей?
4. Знайдіть добуток нечітких чисел x_1 і x_2, якщо кожне з них має трикутну функцію належності у діапазоні ($x_{max} \pm 2$), причому x_{1max}=3, x_{2max}=4. Порівняйте результати трьох методів узагальнення.

Ключові слова

Перетворення стохастичних даних, нелінійне статичне перетворення, лінійне динамічне перетворення, нелінійне динамічне перетворення, інтеграл Дюамеля, спектральна щільність потужності (1), частотна передаточна функція, рівняння Колмогорова, рівняння Фоккера–Планка, прямий метод, метод контурних інтегралів, метод похідних, операторний метод, інтегральний оператор, ядро оператора (1 2 3), доповнення нечіткої множини, перетин, об'єднання, кардинальне число, принципи узагальнення, принцип узагальнення Заде, принцип α-рівневого узагальнення, модифікований принцип узагальнення.

Література

1. Воронов А.А. Теория автоматического управления. В 2-х томах. – М.: Энергия, 1986. – 503 с.
2. Маликов В.Т., Дубовой В.М., Кветный Р.Н., Исматуллаев П.Р. Анализ измерительных информационных систем. – Ташкент: ФАН, 1984. – 176с.
3. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974. -361с.
5. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. Изд.2-е, перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – 552с.
6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.

7. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – Москва: Наука, 1974.-120с.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.:Наука, 1964.-576с.
9. Маликов В.Т., Дубовой В.М., Кветный Р.Н. Исследование и оптимизация информационных характеристик устройств контроля. / Серия "Наука, техника, передовой опыт".-К.: Знание, 1983.
10. Дубовий В.М. Програмування систем моделювання інформаційних процесів. - К.: ІСДО України, 1994.
11. Дубовий В.М. Дослідження і оптимізація мереж ІВС методом моделювання динаміки інформаційних потоків./ Вісник Вінницького політехнічного інституту, 1994, N1(2), С.22-26.
12. Кветный Р.Н., Маликов В.Т. Информационная теория измерений: от модели к изделию./ Новое в жизни, науке и технике. Сер. «Математика, кибернетика»; №7 – М.: Знание, 1988. – 32 с.
13. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Поспелова Д.А. – М.: Наука, 1986. –312с
14. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии в идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: Континент-ПРИМ ,1999.- 300с.
15. Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Нечеткая надежность алгоритмических процессов. – Винница: Континент-ПРИМ, 1997г. – 142с.
16. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. – М.:Мир, 1976.-167с.
17. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. – 384с.
18. Глонь О.В., Дубовой В.М. Моделювання систем керування в умовах невизначеності. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 169с.

4.4. Узагальнена невизначеність

Всі вищеописані принципи узагальнення дозволяють оперувати лише з одним видом невизначених даних і не передбачають використання аналітичних залежностей, в яких виконується спільна обробка нечітких та стохастичних величин, тому їх галузь використання обмежена. Разом з тим, в системах контролю та керування одночасно можуть існувати причини виникнення різних типів невизначеності, основні з яких наведені у табл.4.4.

Для систем керування з *комбінованою невизначеністю* розроблено *метод узагальнюючих функцій* (УФ) [1-3].

Таблиця 4.4

Характеристики невизначеності основних підсистем

Підсистема	**Тип невизначеності**	**Характерні причини невизначеності**		**Характер невизначеності**
Об'єкт управління	параметрична	Вплив зовнішніх факторів	Передбачених	стохастична
	алгоритмічна		Непередбачених	нечітка
Виконавча підсистема	параметрична	Адитивна похибка		стохастична
		Мультиплікативна похибка		стохастична
		Динамічна похибка		нечітка або стох.
Підсистема контролю	параметрична	Адитивна похибка		стохастична
		Мультиплікативна похибка		стохастична
		Методична похибка		нечітка
Підсистема формуван- ня закону керування	параметрична	Обчислювальна похибка		стохастична
	алгоритмічна	Припущення про рівень складності системи		нечітка
	параметрична	Залежність часу розрахунків від стану системи		стохастична
Інтерфейс та передавання даних	параметрична	затримка сигналу		стохастична
	алгоритмічна	Невідповідність дисципліни обслуговування реальному стану процесу		нечітка
Людина-оператор	параметрична	Залежність швидкості реакції від психофізичного стану		стохастична
	алгоритмічна	Залежність помилкових дій від психофізичного стану		нечітка або стохастична

Для стохастичного даного УФ збігається за властивостями з щільністю розподілу ймовірностей $\beta(x)=f_X(x)$, рис.4.3.

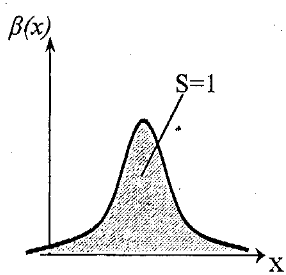


Рис.4.3. Узагальнююча функція стохастичної величини

Для достовірного даного УФ (рис.4.4) визначається як

$$\beta(x)=\delta(x), \tag{4.65}$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

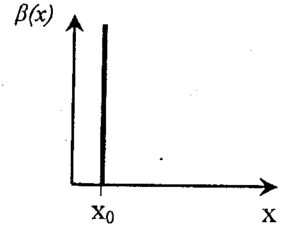


Рис.4.4. Узагальнююча функція достовірного даного

Для нечіткого даного УФ визначається нормованою за площею функцією належності рис.4.5.

$$\beta(x)=\mu_н(x), \qquad (4.66)$$

де $\mu_н(x)$ – нормована функція належності $\mu_н(x)=\dfrac{\mu(x)}{\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\mu(x)dx}$,

$\mu(x)$ – функція належності нечіткого числа з операцією диз'юнкції

$$\mu\left[\left(x\in\left\{\underline{x}_1,\overline{x}_1\right\}\right)\cup\left(x\in\left\{\underline{x}_2,\overline{x}_2\right\}\right)\right]=\mu\left(x\in\left\{\underline{x}_1,\overline{x}_1\right\}\right)+\mu\left(x\in\left\{\underline{x}_2,\overline{x}_2\right\}\right) \qquad (4.67)$$

і операцією кон'юнкції

$$\mu\left[\left(x_1\in\left\{\underline{x}_1,\overline{x}_1\right\}\right)\cap\left(x_2\in\left\{\underline{x}_2,\overline{x}_2\right\}\right)\right]=\mu\left[x_1\in\left\{\underline{x}_1,\overline{x}_1\right\}\right]*\mu\left[x_2\in\left\{\underline{x}_2,\overline{x}_2\right\},\mu^R\right], \qquad (4.68)$$

де μ^R – характеристика взаємозв'язку нечітких змінних x_1 і x_2.

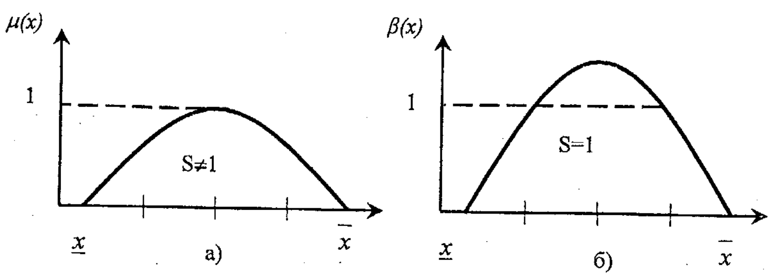


Рис. 4.4. Функції нечіткого даного: а – функція належності, б – узагальнююча функція.

Визначені операції з узагальнюючою функцією - унарна, бінарна операції, операції порівняння невизначених даних та загострення.

Означення 1. Результатом *унарної операції* $\underset{\sim}{o}$ над невизначеним даним $x_1 \in B_1$ є таке невизначене дане, для якого

$$\int\limits_{B_2} \beta(x_2)dx_2 = \int\limits_{B_1} \beta(x_1)dx_1, \tag{4.69}$$

причому $B_1 \subset B, \quad B_2 \subset B, \; B_1 : \forall x_1 \rightarrow x_2 = o(x_1)$.

Означення 2. Результатом *бінарної операції* $\underset{\sim}{o}$ над невизначеними даними $x_1 \in B_1$ і $x_2 \in B_2$ є таке невизначене дане $x_3 \in B_3$, для якого

$$\int\limits_{B_3} \beta(x_3)dx_3 = \int\limits_{B_1} \int\limits_{B_2} \beta(x_1, x_2)dx_1dx_2 \tag{4.70}$$

причому $B_1 \subset B, \quad B_2 \subset B, \quad B_3 \subset B, \; B_3 : \forall x_1, x_1 \rightarrow x_3 = x_1 \circ x_2$.

Означення 3. Відношення рівності: невизначені дані *x, y* вважаються рівними $X \underset{\sim}{=} Y$ якщо $\beta_X = \beta_Y$.

Означення 4. Відношення нерівності: для невизначених даних $X \underset{\sim}{\geq} Y$ якщо $Z = X - Y$ і

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \beta_Z dz > \int\limits_{-\infty}^{0} \beta_Z dz \tag{4.71}$$

Означення 5. Невизначене дане x' є *загостренням* невизначеного даного *x* якщо:

1. $X_x = X_{x'}$, де X – невизначеності даного (область визначення УФ);
2. $M_x = M_{x'}$, де M – мода УФ;
3. $\exists$ [a,b]: $M_{X'} \in [a,b]$; $\quad \forall x \in (a,b) \rightarrow \beta_{X'}(x)\beta_X(x)$; $(x=a) \vee (x=b) \rightarrow \beta_{X'}(x) = \beta_X(x)$.

Визначені також правила виконання операцій з УФ. За основу визначення цих операцій прийнятий *операторний метод* перетворення законів розподілу ймовірностей.

Нелінійна операція

$$\beta_y(y) = \Phi^{(1)}[\beta_x(x), N(x,y)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta_x(x)\varphi(x,y)dx, \tag{4.72}$$

де *ядро* $\varphi(x,y) = \delta[y - N(x)]$ – дельта-функкія Дірака.

Бінарна операція

$$\beta_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta_X(\overline{x_1})\beta_X(\overline{x_2})\varphi^{(2)}(x_1, x_2, y)d\,x_1 d\,x_2, \tag{4.73}$$

де $\varphi^{(2)}(x_1,x_2,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta[y-N(x_1,\zeta)]\delta\left[\xi-r_{X1,X2}\sqrt{\frac{D_{X2}^{(2)}}{D_{X1}^{(2)}}}\left(x_1-m_{X1}^{(1)}\right)-\sqrt{1-r_{X1,X2}^2}\left(x_2-m_{X2}^{(1)}\right)-m_{X2}^{(1)}\right]d\zeta\cdot$

m_{x1} – перший початковий момент X_1;
m_{x2} – перший початковий момент X_2;
D_{x1} – другий центральний момент X_1;
D_{x2} – другий центральний момент X_2;
$r_{X1,X2}$ – другий змішаний нормований центральний момент X_1 та X_2.

Інтегро-диференціальна операція

$$\beta_Y(y) = \Phi^{(n)}\beta_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\beta_X(x_n - m_X^{(1)}(t))\varphi^{(n)}(x_n,y,\omega)dx_n, \quad (4.74)$$

де

$$\varphi^{(n)}(x,y,\omega) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\beta_X\left(x_1 - m_X^{(1)}\right)\times$$

$$\times\delta\left[y-(1-a)m_Y^{(1)}-a\sum_{i=1}^{n-1}x_{n-1}(t-i\tau)g(i\tau)\right]dx_1\cdots dx_{n-1};$$

$a = \sqrt{\dfrac{D_Y^{(2)}}{\tau D_X^{(2)}\sum\limits_{i=1}^{n-1}g_0^2(i\tau)}}$; $g(t)$ – імпульсна перехідна характеристика;

$g_0(i\Delta\tau) = \dfrac{1}{\Delta\tau}\int\limits_{i\Delta\tau}^{(i+1)\Delta\tau}g(\tau)d\tau$; $\Delta\tau$ - інтервал дискретизації; $n=ent[t/\Delta\tau]$.

Більш складні перетворення визначаються шляхом *декомпозиції* на розглянуті три типи перетворень.

Властивості алгебри узагальнюючих функцій.

1. Невизначене дане x_0, якому відповідає узагальнююча функція $\delta[x-x_0]$, еквівалентне достовірному даному відносно операцій системи *G*.
2. Операціям над невизначеними даними властива асоціативність
$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3 = \Phi_1[\Phi_2\Phi_3]. \quad (4.75)$$
3. Операції над невизначеними даними некомутативні
$$\Phi_1\Phi_2 \neq \Phi_2\Phi_1. \quad (4.76)$$
4. Послідовність унарних операцій подається добутком операторів.
5. Бінарна операція над двома функціями невизначеної змінної представляється добутком оператора другого порядку на добуток операторів гілок.
6. Існує одиничний оператор **1**, що задовольняє правилу множення

$$\Phi_1 1 = \Phi_1. \tag{4.77}$$

7. Існує обернений оператор Φ^{-1}

$$\Phi \cdot \Phi^{-1} = 1. \tag{4.78}$$

Узагальнена модель СК в умовах невизначеності враховує алгоритмічну, параметричну і структурну невизначеності, які присутні в системі керування.

Взаємозв'язок моделей системи управління зображений на рис.4.5.

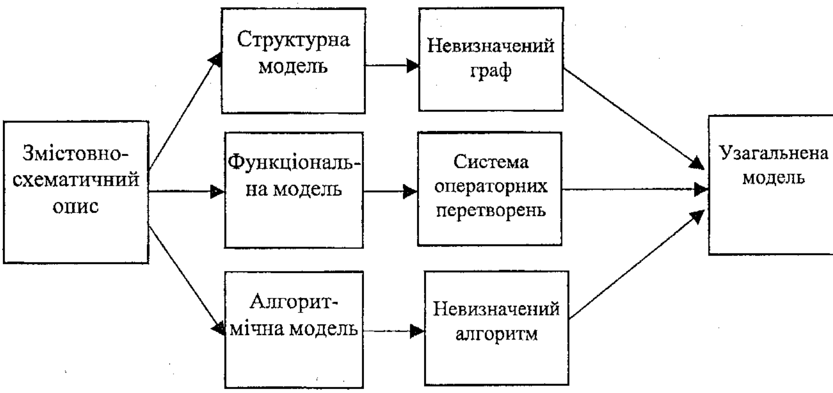


Рис. 4.5. Структура моделі системи в умовах невизначеності

Алгоритмічна невизначеність включає:

- невизначеність вхідних даних алгоритму;
- невизначеність деяких параметрів алгоритму;
- невизначеність результату операції вибору послідовності дій.

Модель параметричної невизначеності окремого блоку системи у загальному випадку може бути подана у вигляді

$$\beta_Y = \Phi(\beta_Z, Z_2)[\beta_X],$$

де $Z = Z_1 \cup Z_2$ - множина параметрів;

Z_1 - підмножина невизначених параметрів;

Z_2 - підмножина визначених параметрів;

β_X - узагальнююча функція вектору вхідних сигналів блоку;

β_Y - узагальнююча функція вектору вихідних сигналів блоку;

Φ - оператор перетворення.

Структурна невизначеність характеризується невизначеністю елементів матриці суміжності, які характеризують зв'язки між підсистемами, приклад узагальнюючої функції якої наведено на рис.4.6.

Відповідно вважаючи всі зв'язки однаково надійними

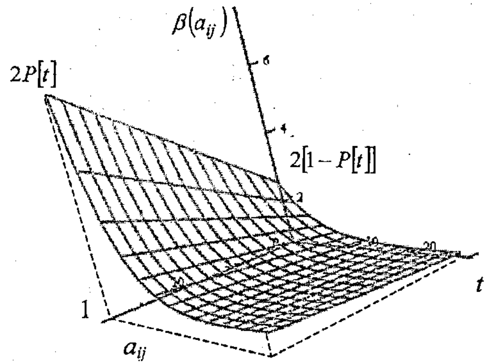


Рис. 4.6. Функція структурної невизначеності

$$\beta(A)=\begin{Bmatrix} \delta(0) & \beta_P & \delta(0) & \frac{2a+2}{3} & \delta(0) \\ \delta(0) & \delta(0) & \beta_P & \delta(0) & \delta(0) \\ \delta(0) & \delta(0) & \delta(0) & \beta_P & \delta(0) \\ \beta_P & \delta(0) & \delta(0) & \delta(0) & \beta_P \\ \delta(0) & \beta_P & \delta(0) & \delta(0) & \delta(0) \end{Bmatrix}, \quad (4.79)$$

де $\beta_P = 2[2P(t)-1]a + 2[1-P(t)]$,

$P(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи зв'язку,

a – надійність зв'язку.

Контрольні питання

1. Наведіть приклади систем контролю та керування з комбінованою невизначеністю.

2. На чому ґрунтується параметричний опис структурної невизначеності?

3. Як, на Вашу думку, можна описати зв'язок невизначених даних, які задані узагальнюючими функціями?

Ключові слова

Комбінована невизначеність, метод узагальнюючих функцій, унарна операція, бінарна операція, відношення рівності, відношення нерівності, загострення, операторний метод, інтегро-диференціальна операція, декомпозиція, властивості узагальнюючих функцій, алгоритмічна невизначеність, параметрична невизначеність, структурна невизначеність.

Література

1. Дубовой В.М. Глонь О.В. Использование обобщенной вычислительной модели в интеллектуальных системах управления Вісник Технологічного університету Поділля – 2002.- №3 Т.1(41), С.122-125
2. Дубовой В.М., Глонь О.В. Властивості моделей інформаційних систем в умовах невизначеності Матеріали III міжнародної конференції "Інтернет–Освіта–Наука" (ІОН-2002). Том 2,– Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002. - С.410-412
3. Dubovoy V., Glon O. Generalization of Analytical Dependencies on a Case of Simultaneous Use of the Statistical and Fuzzy Data. Proceedings of International Conference on Modeling and Simulation MS'2001 – Lviv. 176-177p.
4. Глонь О.В., Дубовой В.М. Моделювання систем керування в умовах невизначеності. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 169с.

5. ІНФОРМАЦІЙНІ МОДЕЛІ

Діяльність людей пов'язана з переробкою і використанням матеріалів, енергії й інформації. Відповідно розвивалися технічні дисципліни, що відбивають питання технології, енергетики й інформатики. Інформаційна техніка є порівняно новою галуззю, що отримала найбільший розвиток на етапі розробки і застосування електронних обчислювальних машин (ЕОМ) і автоматизованих систем керування (АСУ).

Моделі, що описують процеси у інформаційній техніці та інших споріднених областях називають інформаційними.

Області застосування інформаційних моделей [1]:

1. Науково-технічна область: кібернетика, системотехніка, дослідження операцій, біоінформатика, автоматика, телемеханіка, зв'язок, вимірювальна техніка, обчислювальна техніка.
2. Інші області: математика, філософія, економіка, соціологія, управління, фізика, хімія, біологія, психологія, медицина, педагогіка, криміналістика, діагностика, лінгвістика, бібліографія, мистецтво.

Інформаційна модель, узагальнюючи характеристики і залежності, отримані в рамках інших моделей, дозволяє сформулювати й обґрунтувати фундаментальні результати в дослідженні систем.

Є безліч означень поняття інформації від найбільш загального філософського (інформація є відображення реального світу) до найбільш вузького – практичного (інформацією є всі відомості, які є об'єктом збереження, передачі і перетворення) [1].

Під *інформацією* слід розуміти не самі предмети і процеси, а їх представницькі характеристики, відбиття чи відображення у вигляді чисел, формул, описів, креслень, символів, образів і інших абстрактних характеристик.

Інформацію можна розрізняти за структурно-метричними властивостями.

До *параметричної інформації* відносяться набори чисельних оцінок значень яких-небудь параметрів (вимірюваних величин), результати кількісних визначень при дослідженні, аналізі, контролі й обліку.

До *топологічної інформації* - геометричні образи, карти місцевості, різні плоскі зображення й об'ємні об'єкти.

Вигляди інформації можна розділити за розмірністю множини даних. Назвемо інформацією нульового порядку (нуль-вимірною інформацією) таку, яка відповідає потужності крапки, першого порядку (одновимірна інформація) – лінії, другого порядку (двовимірна інформація) – поверхні, третього порядку (тривимірна інформація) – об'єму, n-го порядку (n-вимірна інформація) – n-вимірного простору.

Параметричною інформацією найчастіше користуються в науці і техніці для вираження результатів вимірювань.

Топологічною інформацією зручно виражати образи, ситуації і структуру.

Абстрактну інформацію застосовують у дослідженнях на високому теоретичному рівні, коли потрібні узагальнення і символізація.

Подія. Первинним і неподільним елементом інформації є елементарна двійкова подія А - вибір з твердження чи заперечення, істини чи неправди, згоди чи незгоди, наявності чи відсутності якого-небудь явища. Двійковість події дозволяє представляти її умовно в геометричній символіці крапкою і пропуском, в арифметичній символіці – одиницею і нулем, у сигнальній символіці – імпульсом і паузою. Подія є категорією нульової міри, тобто не має геометричних вимірів. Тому вона і може бути зображена крапкою.

Інші категорії інформації можуть бути подані як сукупності різних подій.

Величина. Величина Х є впорядкована в одному вимірі (за шкалою значень) множина подій, причому кожна з них відповідає прийняттю величиною одного певного значення. Величина може бути або дискретною, або неперервною; у першому випадку множина подій зліченна, у другому – незліченна. Геометрично величину можна представити лінією.

Функція. Функція $X(T)$, $X(N)$ чи $X_2(X_1)$ є співвідношення між двома величинами: величиною і часом, простором чи іншою величиною. У цьому розумінні функцію можна трактувати як двовимірне поле подій.

Комплекс. Повний комплекс інформації $X(T, N)$ є відповідність між величиною, з одного боку, і часом з іншого. Таким чином, повний комплекс інформації є тривимірне поле подій.

5.1. Невизначеність і інформація

Системи контролю та керування відносять до більш загального класу – *інформаційних систем*, оскільки головним об'єктом перетворення в них є інформація. Тому природно характеризувати такі системи та їх ефективність за допомогою інформаційних характеристик.

Як *інформаційні критерії ефективності* системи можуть використовуватися:

1. Кількість інформації;
2. Середня кількість інформації;
3. Продуктивність джерела інформації;
4. Інформаційна пропускна здатність каналу;
5. Надлишковість джерела інформації;
6. Ентропійна похибка;
7. Ентропія похибки контролю.

Найважливішим питанням теорії інформації є встановлення *міри кількості інформації*. Інформаційні міри відповідають трьом основним напрямкам у теорії інформації: структурному, статистичному і семантичному.

Структурна теорія розглядає дискретну будову масивів інформації і їх вимірювання простим підрахунком інформаційних елементів (квантів) комбінаторним методом, що припускає найпростіше кодування масивів інформації.

Статистична теорія оперує поняттям ентропії як міри невизначеності, що враховує імовірність появи, а отже, і інформативність тих чи інших повідомлень.

Семантична теорія враховує доцільність, цінність, корисність чи істотність інформації.

Структурна теорія застосовується для оцінювання можливостей апаратури інформаційних систем (каналів зв'язку, запам'ятовувальних і реєструвальних пристроїв) поза залежністю від умов їх застосування. Статистична теорія оцінює інформаційні системи у конкретних застосуваннях, наприклад, при передаванні по системі зв'язку інформації з певними статистичними характеристиками. Нарешті, семантична теорія застосовується для оцінювання ефективності логічного висновку.

Найпоширенішими є статистичні міри кількості інформації.

Кількість інформації, що міститься у вихідній величині інформаційної системи при відомій вхідній, визначається виразом [2-7]

$$I_{Y,X} = H_X - H_{X/Y} = H_Y - H_{Y/X}, \qquad (5.1)$$

де H_X, H_Y – *апріорні ентропії* відповідно вхідних та вихідних величин;

$H_{X/Y}$, $H_{Y/X}$ – *апостеріорні ентропії* відповідно вхідної величини при заданій вихідній і навпаки.

У випадку дискретної величини *середня кількість інформації* дорівнює

$$I_{Y,X} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ij} \log_2 \frac{P_{ij}}{P_j P_i}, \qquad (5.2)$$

де n – кількість значень величини;

P_i – імовірність того, що вихідна величина прийняла і-те значення;

P_j – імовірність того, що одержано j-те значення вихідної величини;

P_{ij} – сумісна імовірність настання двох подій, яка полягає в тому, що одержали j-те значення вихідної величини, а в дійсності має місце і-те значення.

У випадку неперервної величини

$$I_{Y,X} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \log_2 \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x) f_Y(y)} dxdy, \qquad (5.3)$$

де $f_X(x)$ – функція розподілу вхідної величини;

$f_Y(y)$ – функція розподілу вихідної величини, яка визначається композицією законів розподілу вхідної величини X та похибки Δx (оскільки $y=x+\Delta x$);

$f_{X,Y}(x,y)$ – функція спільного розподілу значень вихідної величини Y та вхідної величини X.

Загальна інформація, яка отримана на відрізку часу T при n значеннях величини X у момент часу t_i, для яких значення X не корельовані, а процес стаціонарний, дорівнює

$$I_{Y,X}(T) = \sum_{i=1}^{n} I_{Y,X}(t_i) = nI_{Y,X} \,. \tag{5.4}$$

Похідна

$$B = \frac{dI_{Y,X}(t)}{dt} = \frac{I_{Y,X}(T)}{T},$$

яка характеризує швидкість отримання інформації, називається *продуктивністю джерела інформації* [2- 8].

Інформаційною пропускною здатністю каналу називається максимально можлива продуктивність джерела інформації

$$C_n = \frac{[I_{Y,X}(T)]_{\max}}{T}. \tag{5.5}$$

Надлишковість джерела інформації виникає через відхилення закону розподілу від закону, який визначає найбільшу апріорну ентропію (таким законом при необмеженому значенні середнього квадратичного відхилення величини (σ_X) є нормальний, а при обмеженому - рівномірний), та через наявність кореляції між значеннями в окремі моменти [2-4]. Надлишковість визначається за формулою [3, 8]

$$\gamma = \frac{[I_{Y,X}(T)]_{\max} - I_{Y,X}(T)}{[I_{Y,X}(T)]_{\max}} = 1 - \frac{B}{C_n}. \tag{5.6}$$

Ентропійна похибка (Δ_{eX}) використовується для оцінювання ефективності вимірювальних каналів і відповідає значенню похибки з рівномірним законом розподілу, який вносить таку ж дезінформаційну дію, що й похибка з даним законом розподілу [9,10].

$$\Delta_{eX} = \pm\frac{1}{2} e^{H_{X/Y}} = K_e \sigma_{\Delta_X}, \tag{5.7}$$

де $H_{X/Y}$ – диференціальна ентропія похибки з даним законом розподілу;

K_e – ентропійний коефіцієнт;

σ_{Δ_X} – середньоквадратична похибка з даним законом розподілу.

Ентропія помилки контролю визначається співвідношенням [9,10]

$$H_{X/Y} = -[P_{зп} \log P_{зп} + (1-P_{зп})\log(1-P_{зп})], \tag{5.8}$$

де $P_{зп}$ – загальна безумовна ймовірність помилкового судження про стан контрольованого параметра:

$$P_{зп} = P_\alpha P_1 + P_\beta P_2, \tag{5.9}$$

де P_1, P_2 – апріорні ймовірності знаходження контрольованого параметра відповідно в зоні допуску та зовні ($P_1 + P_2 = 1$);

P_α, P_β – помилки відповідно першого та другого роду, які визначаються таким чином:

$$P_\alpha = \int_{-\infty}^{x_{\min}} f_X(x) \int_{-x+x_{\min}}^{x_{\max}-x} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X dx + \int_{x_{\max}}^{+\infty} f_X(x) \int_{-x+x_{\min}}^{x_{\max}-x} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X dx, \tag{5.10}$$

$$P_\beta = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_X(x) \left[\int_{-\infty}^{x-x_{\min}} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X + \int_{x_{\max}-x}^{+\infty} f_{\Delta_X}(\Delta_X) d\Delta_X \right] dx, \tag{5.11}$$

де x_{min} і x_{max} – границі допуску на контрольований параметр;

$f_X(x)$ і $f_{\Delta_X}(\Delta_X)$ – закони розподілу імовірностей контрольованого параметра X та похибки контролю Δ_X.

Контрольні питання

1. Яка інформаційна модель застосовується у комп'ютерних системах?
2. Якщо файл містить 1000 байт у статистичній мірі, то скільки інформації буде містити його копія на диску?
3. Розрахуйте ентропійні коефіцієнти нормального і трикутного диференціальних законів розподілу ймовірностей?
4. Наведіть приклади систем, які доцільно характеризувати ймовірністю помилки.

Ключові слова

Інформаційна модель, інформація, параметрична інформація, топологічна_інформація, абстрактна інформація, інформаційна система, інформаційний критерій ефективності, міра кількості інформації, структурна теорія інформації, статистична теорія інформації, семантична теорія інформації, кількість інформації, апріорна ентропія, апостеріорна ентропія (1 2), середня кількість інформації, продуктивність джерела інформації, інформаційна пропускна здатність каналу, надлишковість джерела інформації, ентропійна похибка, ентропія помилки контролю.

Література

1. Теоретические основы информационной техники: Учеб. пособие для вузов/ Ф.Е. Темников, В.А. Афонин, В.И. Дмитриев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1979. – 512с., ил.
2. Стратонович Р.Л. Теория информации. - М.: Сов.радио, 1975.
3. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. - М.: Мир, 1965.
4. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике. - М.:

Иностр. лит., 1963.
5. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. - М., 1959.
6. Колмогоров А.Н. К логическим основам теории информации. - Проблемы передачи информации. - 1969, т.5. - N3.
7. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия „количество информации”. - Проблемы передачи информации. - 1965, т.1. - N1.
8. Хартли Р.В.Л. Передача информации. /В кн.: Теория информации и ее приложения. - М., 1959.
9. Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств. - Л.: Энергия, 1968.
10. Кавалеров Г.И., Мандельштам С.М. Введение в информационную теорию измерений. - М.: Энергия, 1974.
11. Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования. – К.: Вища шк., 1986. – 238с.
12. Трауб Дж.Ф. и др. Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 183с.

5.2. Інформація і сигнал

Сама по собі *інформація* може бути віднесена до області абстрактних категорій, подібних, наприклад, до математичних формул. Однак проявляється вона завжди в матеріально-енергетичній формі у вигляді сигналів.

Сигнал – це фізичний процес, характеристики якого несуть інформацію про стан системи керування та впливові величини. Характеристики сигналу, які несуть відповідну інформацію, називають *інформативними параметрами*. Вибір інформативного параметра залежить від типу сигналу. Використовують сигнали:

- електричні, оптичні, магнітні, механічні, теплові;
- аналогові (неперервні), дискретні, квантовані, цифрові, як показано на рис.5.1;
- з використанням синусоїдального, імпульсного або іншого базису.

Процес надання інформативному параметру значення, яке повинен містити сигнал, називають *модуляцією*. Відповідно використовують *амплітудну*, *частотну* і *фазову* модуляцію синусоїдальних сигналів, амплітудну, частотну і різні види широтної *модуляції імпульсних сигналів* тощо.

Якщо інформативний сигнал є носієм інформації про процес $x(t)$, то моделі сигналу при модуляції синусоїдального носія $A_0 sin(\omega_0 t)$ матимуть вигляд:

– амплітудна модуляція $y(t)=[A_0+x(t)]\, sin(\omega_0 t)$ (5.12)

– частотна модуляція $y(t)=A_0\, sin\{[\omega_0+x(t)]\, t\}$ (5.13)

– фазова модуляція $y(t)=A_0 sin[\omega_0 t+x(t)]$ (5.14)

Теорія сигналів [1] є однією з найфундаментальніших теорій сучасної прикладної науки. Вона зародилася у відповідності до потреб техніки зв‘язку і стала джерелом створення сучасної теорії інформації, теорії випадкових процесів, теорії прийняття рішень та інших фундаментальних і прикладних напрямків науки.

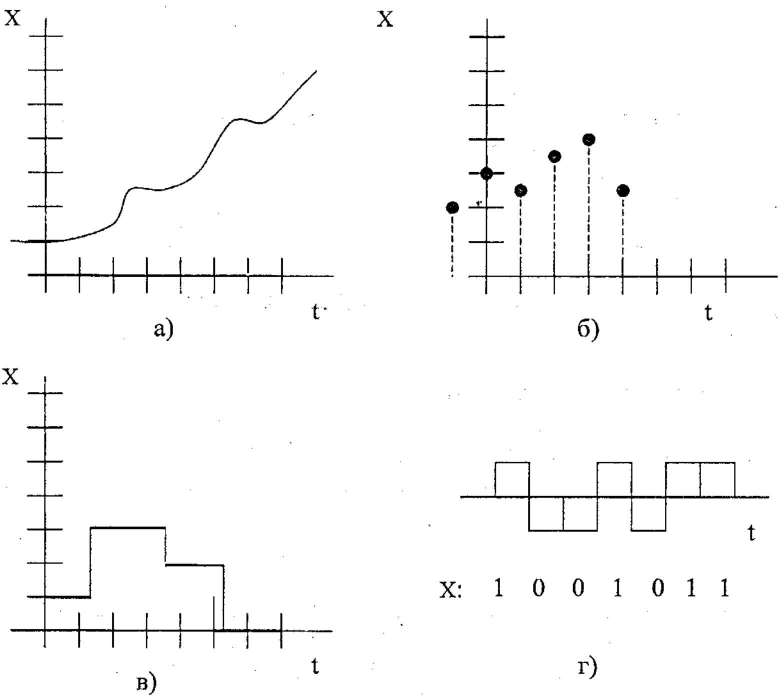


Рис.5.1. Види сигналів: а – неперервний, б – дискретний, в – квантований, г – цифровий

Основи теорії сигналів складають моделі перетворення сигналів у процесі модуляції, передавання, обробки та *демодуляції*. Найчастіше в теорії сигналів використовується *спектральне подання сигналів.*

Основою для інформаційної теорії сигналів є ряд фундаментальних теорем:

1. *Теорема Котельникова-Шеннона* про інтервал дискретизації детермінованих сигналів, необхідний для їх точного відновлення

$T = \dfrac{1}{2f_0}$, де f_0 – верхня гранична частота спектру сигнала;

2. *Теорема Желєзнова* про інтервал дискретизації випадкових сигналів, необхідний для їх відновлення з необхідною точністю - $T=\tau$, де τ - інтервал кореляції процеса;
3. *Теорема Шеннона* про швидкість передавання інформації в умовах завад
$c = f_0 \log\left(1+\dfrac{P_c}{P_з}\right)$, де P_c – потужність сигналу, $P_з$ – потужність завади.

Співвідношення, доведені у цих теоремах, повинні задовольняти інформаційні моделі будь-яких систем.

Контрольні питання

1. Порівняйте ширину спектру сигналів з амплітудною, частотною і фазовою модуляцією.

2. Відомо, що завадостійкість частотно модульованого сигналу більша за завадостійкість амплітудно модульованого. Поясніть це на основі теореми Шеннона.

3. Згідно з теоремою Котельникова, телефонним каналом, який працює у тональному частотному діапазоні (300-3000 Гц) можна передавати інформацію з максимальною швидкістю 2*3000=6000[біт/с]. Чи не протирічить існування модемів з швидкістю передавання 9600 – 52000 біт/с теоремі Котельникова?

Ключові слова

Інформація, сигнал, інформативні параметри, модуляція, модуляція імпульсних сигналів, амплітудна модуляція, частотна модуляція, фазова модуляція (1), теорія сигналів, демодуляція, спектральне подання сигналів (1), теорема Котельникова (1), теорема Желєзнова, теорема Шеннона, передавання інформації.

Література

1. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. /Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.
2. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: Иностр. лит., 1963.
3. Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования. – К.: Вища шк., 1986. – 238с.

5.3. Бази даних і знань як інформаційні моделі

Для *автоматизованих систем керування* виробництвом, установами, адміністративними територіями тощо характерні задачі *прийняття рішень* на основі великої кількості даних, накопичених за довгий проміжок часу. Найчастіше ці дані зберігаються у вигляді *баз даних* (БД), операції з якими виконуються за допомогою *систем управління базою даних* (СУБД). Узагальнена структура системи прийняття керівних рішень з використанням СУБД зображена на рис.5.2.

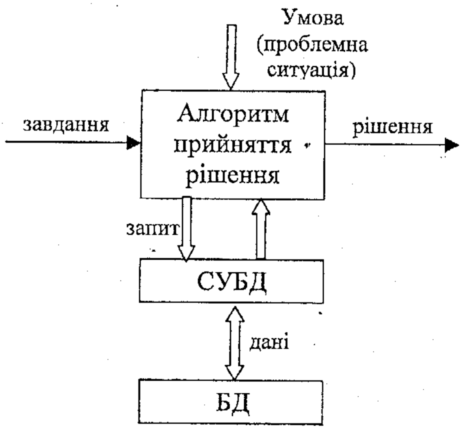


Рис.5.2. Система прийняття рішень

Алгоритм прийняття рішення можна розглядати як перетворення F завдання X на рішення Y з параметрами, які отримуються на основі бази даних B і опису ситуації I

$$Y = F(I, B)[X]$$

Таким чином, набори даних I і B є інформаційною моделлю системи прийняття рішення.

Алгоритм прийняття рішень у такій системі залежить від призначення системи і особливостей її застосування, отже для різних систем алгоритми відрізняються. Дещо іншу структуру має інформаційна модель системи прийняття рішень на основі *бази знань*.

База знань складається з набору відомих *фактів* (бази даних) і набору відомих залежностей між ними (*правил*). Алгоритм прийняття рішень на основі фактів і правил практично не залежить від призначення системи управління. Конкретні особливості системи впливають лише на структуру бази даних і вид правил.

Головне питання, яке розглядається при побудові бази даних як інформаційної моделі – вибір адекватного і одночасно зручного опису типу зв'язку між елементами даних.

У документографічних системах [2 - 7] під інформацією розуміються *відомості, що містяться в різноманітних документах фіксованої форми.* Відповідно одиницею вимірювання інформації є документ, показник і реквізит [6]. Інформація підрозділяється на первинну (вхідну), проміжну і результуючу (вихідну).

Сучасні СУБД ґрунтуються на використанні *моделей даних* (МД), які дозволяють описувати об'єкти предметних областей і взаємозв'язки між ними. Існують три основні МД і їх комбінації, на яких ґрунтуються СУБД: реляційна (РМД), мережна (ММД), ієрархічна (ІМД).

Основна відмінність між цими моделями даних полягає у способах опису взаємодії між об'єктами й атрибутами. Взаємозв'язок виражає відношення між множинами даних. Використовують взаємозв'язки "один до одного", "один до багатьох" і "багато до багатьох". "Один до одного" - це взаємно однозначна відповідність, яка встановлюється між одним об'єктом і одним атрибутом. "Багато до багатьох" – це відповідність між багатьма об'єктами й багатьма атрибутами. Взаємозв'язки між об'єктами й атрибутами зручно зображувати у вигляді графів.

На персональних комп'ютерах в основному використовують СУБД, які підтримують *реляційну модель даних.* У відповідності до реляційної моделі база даних подається у вигляді сукупності таблиць, над якими можуть виконуватися операції, що формулюються у термінах реляційної алгебри і реляційного числення. В реляційній моделі операції над об'єктами бази даних мають теоретико-множинний характер.

Основними елементами реляційної БД є *атрибути, кортежі, відношення.* Відношенням називається деяка сукупність об'єктів, яка характеризується однаковим набором атрибутів. Зручно представляти відношення як таблицю, де кожний рядок є кортеж і кожний стовпець є атрибут. Стовпці таблиці - це елементи даних, а рядки - записи.

Відношення може бути подане у вигляді файла. Записи файла складаються з полів, які відповідають атрибутам відношення.

Звя'зок між відношеннями здійснюється через *ключі.* Відношення не повинно мати двох кортежів, в яких збігаються всі атрибути ключа.

Основними операціями, за допомогою яких модифікується база даних, є вставка, вилучення і модифікація.

Основна перевага реляційного підходу - його простота й доступність, незалежність даних, гнучкість, теоретичне обґрунтування на основі реляційної алгебри.

В *мережній моделі даних* елементарні дані і відношення між ними представляються у вигляді орієнтованого графа (вершини - дані, дуги -

відношення). Основні елементи мережної бази даних - тип запису і тип набору.

Запис - сукупність логічно пов'язаних полів, яка характеризується іменем і полями, що входять до нього. *Полем* називається єдина неподільна одиниця інформації, яка характеризується ідентифікатором, типом і довжиною.

Запис може існувати в БД не тільки самостійно, але й бути одночасно детальним або головним записом деяких наборів в залежності від того, чи описаний його тип як тип головного запису або детального запису набору. В записах можуть міститися довільні елементи даних, значення яких залежать від значень інших елементів даних того запису, в який входить даний запис.

Основні переваги мережної моделі даних - простота реалізації відношень "багато до багатьох". Основний недолік - її складність. При реорганізації БД можлива втрата незалежних даних.

Ієрархічна модель даних основана на понятті *дерев*, які складаються з вершин і ребер. Вершина дерева ставиться у відповідність сукупності атрибутів даних, що характеризують деякий об'єкт. Вершини і ребра дерева утворюють ієрархічну структуру, яка складається з n рівнів.

Першу вершину називають кореневою вершиною. Вона задовольняє умови:

1. Ієрархія починається з кореневої вершини.
2. Кожна вершина відповідає одному або декільком атрибутам.
3. На рівнях з більшим номером знаходяться залежні вершини. Вершина попереднього рівня є початковою для нових залежних вершин.
4. Кожна вершина, яка знаходиться на рівні i, з'єднана з однією вершиною рівня i-1, за винятком кореневої вершини.
5. Коренева вершина може бути пов'язана з однією або кількома залежними вершинами.
6. Доступ до кожної вершини здійснюється через кореневу єдиним шляхом.
7. Існує довільна кількість вершин кожного рівня.

Основні переваги ієрархічної моделі даних: простота побудови і використання, забезпечення певного рівня незалежності даних, простота оцінювання характеристик. Основні недоліки: відношення "багато до багатьох" реалізується дуже складно, дає громіздку структуру і вимагає зберігання надлишкових даних, ієрархічна впорядкованість ускладнює операції вилучення і занесення, доступ до будь-якої вершини можливий лише через кореневу, що збільшує час доступу.

Контрольні питання

1. Наведіть приклади поширених СУБД. Яка модель даних у них

використовується?

2. Охарактеризуйте нормальні форми реляційної бази даних. Для чого застосовується нормалізація?

3. У багатьох випадках природною моделлю даних є ієрархічна, а найпростішою – реляційна. Як за допомогою реляційної СУБД змоделювати ієрархічну структуру?

Ключові слова

Автоматизована система керування, прийняття рішень, база даних, система управління базою даних, база знань, факти, правила, модель даних, реляційна модель даних, атрибут, кортеж, відношення, ключ, мережна модель даних, запис, поле, ієрархічна модель даних, дерево.

Література

1. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам : Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 388с.
2. Антонюк Б.Д. Информационные системы в управлении. М.: Радио и связь, 1986.
3. Балашов Е.П., Пузанков Д.В. Проектирование информационно-управляющих систем. - М.: Радио и связь, 1987.
4. Дятлов В.А. Методы проектирования информационной базы АСУ. - Л.: Изд-во ЛИЭИ, 1984.
5. Костюк В.И. и др. Проектирование информационных моделей в гибких системах. - К.: Вища школа, 1987.
6. Морозов В.К., Долганов А.В. Основы теории информационных сетей. - М.: Высшая школа, 1987.
7. Ханенко В.Н. Информационные системы. - Л.: Машиностроение, 1988.
8. Искусственный интеллект. – В 3-х кн. Кн. 2. Модели и методы: Справочник/ Под ред. Д.А.Поспелова. – М.: Радио и связь, 1990. – 304с.
9. Мейер Д. Теория реляционных баз данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 608с.
10. Четвериков В.Н. и др. Базы и банки данных. – М.: Высш. шк., 1987. – 248с.
11. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н. Основи застосування ЕОМ в інженерній діяльності. – К.: ІСД МО України, 1994. – 285с.
12. Тиори Т., Фрай Дж. Проектирование структур баз данных: В 2-х кн. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.

5.4. Інформаційні потоки

Під *інформаційним потоком* розуміють кількість інформації, яка передається від однієї підсистеми до іншої за одиницю часу [1].

Якщо кожному ребру $L_{ij} \in L$ інформаційної системи S поставлено у відповідність невід'ємне число v_{ij} - його пропускна здатність, то інформаційним потоком від вузла S_i до вузла S_j будемо називати функцію $i_{ij}(t)$, що задовольняє умови:

$$\int_{t}^{t+\tau} i_{ij}(t)dt = I_{ij}(\tau) \; ; \tag{5.15}$$

$$0 \le i_{ij}(t) \le v_{ij} , \tag{5.16}$$

де τ - час транзакції передачі інформації від вузла S_i до вузла S_j ;

$I_{ij}(\tau)$ - кількість переданої інформації за час транзакції.

Якщо інформація передається в аналоговому вигляді, то інформаційний потік

$$i(t) = \frac{dI(t,P)}{dt}, \tag{5.17}$$

де I - кількість інформації;

t - час її одержання;

P - ймовірність працездатності системи.

Якщо інформація передається в дискретному вигляді неподільними блоками (розмір блоку визначається протоколом передачі: біт, байт, слово, пакет, повідомлення), то інформаційний потік обчислюється в середньому за період *транзакції*

$$i(t) = \frac{I_0(t,P)}{\Delta t}, \tag{5.18}$$

де t - час між початками (закінченнями) двох послідовних транзакцій.

Для моделювання інформаційних потоків у *документографічних системах* [2] використовуються методи функціонально-операційного аналізу, аналізу норм вироблення рішення, модуль-метод, семіотичний аналіз, метод схем інформаційних зв'язків, матричний метод і ряд інших. Найбільше поширення одержала матрична модель.

Матрична модель будується у вигляді таблиці, що відбиває види документів, якими обмінюються підсистеми, перелік показників вхідних документів, що беруть участь у формуванні показників вихідних документів, частоту формування кожного документа, трудомісткість формування і значимість кожного показника і ряд інших допоміжних даних. Матрична модель перетворюється в орієнтований граф, у вершинах якого розташовані абоненти (процеси) інформаційної системи, а дуги відповідають переданим документам.

Аналіз інформаційних потоків зводиться до аналізу інтенсивності взаємодії виконуваних інформаційних процесів і сегментів інформації (документів). При цьому будують матрицю

$$Q_k^i = \begin{cases} 1, при \ \ B = ісстин \ , \\ 0, при \ \ B = хибність \ , \end{cases} \tag{5.19}$$

де *B=істина* якщо *k*-й сегмент використовується для реалізації *i*-го процесу.

На підставі матриці (5.19) будується матриця інтенсивностей використання інформаційних потоків

$$q_{ki} = n_k \, Q_k^i \, . \tag{5.20}$$

В результаті побудови таких матриць і їх зіставлення з аналогічними матрицями вихідних інформаційних потоків мінімізують надлишковість інформаційних потоків.

Вимірювальні канали різноманітних автоматичних і автоматизованих систем призначені для одержання вимірювальної інформації. Поняття *вимірювальної інформації* було введене К.Б.Карандєєвим. Згодом зусиллями багатьох учених були створені основи інформаційної теорії вимірювань [3, 4, 5, 6, 8]. Залучення в цю теорію негентропійного принципу Л.Бріллюена [7] привело до створення *інформаційно-енергетичної теорії* [8].

В інформаційно-енергетичній теорії вимірювань інформація розуміється в класичному статистичному розумінні як міра зменшення невизначеності апріорних знань про значення вимірюваної величини при одержанні результату вимірювання. В енергетичному аспекті розглядаються витрати енергії на одержання вимірювальної інформації.

Продуктивність джерела вимірювальної інформації (інформаційний потік)

$$i_{X,Y} = \frac{dI_{X,Y}(t)}{dt} \ . \tag{5.21}$$

Інформаційна модель *систем зв'язку* вперше була розроблена К.Шенноном [9] і заклала основу теорії передавання інформації. Згодом теорія інформації була розвинута з метою поширення поняття інформації на інші області техніки. Відповідно до цієї теорії інформація передається у вигляді повідомлень від джерела до приймача каналом зв'язку за допомогою *інформативних сигналів.*

Фундаментальні співвідношення для оцінювання інформаційних характеристик *каналів зв'язку* послужили основою для створення інформаційних моделей інших видів інформаційних систем.

У теорії зв'язку розглядаються інформаційні аспекти передавання повідомлень дискретними каналами без перешкод і з перешкодами [10 - 15].

У *каналі з перешкодами* після прийому повідомлення залишається апостеріорна невизначеність стану джерела інформації. Тому

$$I_{X,Y} = H_X - H_{X/Y} = -\sum_{i=1}^{n} p(z_i)\log_a p(z_i) + P_0 \log_a P_0 + (1-P_0)\log_a(1-P_0), \quad (5.22)$$

де P_0 – ймовірність правильного прийому повідомлення;

n – число можливих станів X джерела повідомлень;

$p(x_i)$ – ймовірність стану x_i;

a – основа логарифму. При a=2 ентропія й інформація вимірюються в бітах.

Інформаційний потік у дискретному каналі зв'язку

$$i = F_0 \, I_{X,Y}, \quad (5.22)$$

де F_0 – гранична частота передавання елементарних повідомлень, залежна від фізичних характеристик каналу.

Канал зв'язку характеризується *пропускною здатністю*:

$$C = F_0 \max[I_{X,Y}]. \quad (5.23)$$

Ймовірність правильного прийому P_0^* залежить від характеристик перешкод у каналі зв'язку і способу кодування інформації. Існує безліч моделей каналів: гаусівські канали, канали з групуванням перешкод, канали із завмираннями тощо, що відрізняються статистичними характеристиками перешкод. Для кожного виду каналів використовуються методи кодування, що забезпечують максимум P_0.

Пропускна здатність гаусівського каналу з перешкодами у вигляді білого шуму відповідає *теоремі К.Шеннона*

$$C = F_0 \log_a (1 + P_С / P_П), \quad (5.24)$$

де $P_С$ - потужність інформативного сигналу;

$P_П$ - потужність перешкоди.

У моделях *систем телекомунікацій* [15] інформаційні потоки задають на графі, вузли якого зіставляються з вузлами системи, а дуги з каналами зв'язку. При цьому припускають виконання співвідношень:

1) вимога до *пропускної здатності* каналу між вузлами k і l

$$i_{kl} \le C_{kl}; \quad (5.25)$$

2) вимога адитивності і передачі, що не спотворює

$$\sum_{i=1}^{n} i_{lk} = \sum_{r=n+1}^{n+m} i_{kr}, \quad (5.26)$$

де n - число потоків i_{lk}, що входять у вузол k;

m - число потоків i_{kr}, що виходять з вузла k.

Наведені вимоги передбачають вимірювання інформаційних потоків у структурних одиницях - *словах, повідомленнях* або *пакетах* повідомлень рівної довжини, а також відсутність обробки інформації у вузлах системи. При використанні статистичної міри інформації вимога адитивності виконується тільки для незалежних повідомлень, що в реальних умовах експлуатації систем виконується не завжди.

Основні задачі, розв'язувані в теорії телекомунікаційних систем - це задачі *телетрафіку* [16-18]. У цих задачах оцінюється інформаційне навантаження системи. Основи теорії телетрафіку закладені А.К.Ерлангом. Відповідно до цієї теорії телекомунікаційна система розглядається як система масового обслуговування. В результаті розв'язання задач телетрафіку визначають оптимальні пропускні здатності каналів зв'язку, мінімальні маршрути при передаванні повідомлень між несуміжними вузлами, оцінюються характеристики ефективності обслуговування заявок (час проходження повідомлення в системі, ймовірність втрати повідомлення тощо).

Останнім часом питання інформаційних потоків глибоко розглядаються в рамках проектування і аналізу *протоколів передавання даних*.

Інформаційні моделі *обчислювальних мереж* залежать від архітектурних особливостей їх побудови і протоколів зв'язку й обробки інформації. Архітектура обчислювальних систем і мереж перетерпіла значні зміни за період розвитку обчислювальної техніки. Найбільше поширення одержали локальні мережі з спільним каналом, або моноканалом, через який абоненти мережі з'єднуються один з одним за принципом „кожен з кожним" [19-21]. Абоненти обмінюються даними, розділеними на кадри. Формат кадру передбачає ряд полів. Усі поля містять кількість інформації, кратну 1 байтові. Байт - це найрозповсюдженіша в обчислювальній техніці одиниця кількості інформації в адитивній *структурній мірі* Хартлі [22, 23]. У відповідності зі структурною теорією інформації основну роль у її вимірюванні відіграє запис інформації за допомогою комбінацій кодових символів - кодування. Найважливіші характеристики кодування - алфавіт, глибина і довжина коду. В обчислювальній техніці використовуються коди з глибиною 2 і алфавітом (0,1), або двійкові коди. Довжина коду визначається конструктивними особливостями елементної бази ЕОМ. В даний час при обміні даними між ЕОМ використовуються 8-розрядні коди. Це визначено стандартами на інтерфейси і протоколи обміну даними з метою забезпечення сумісності потоків даних з технічними засобами ЕОМ будь-яких типів. За допомогою 1 кодової комбінації з 8 розрядів можна закодувати N=2 даних. Відповідно кількість інформації в одній кодовій комбінації в структурній мірі

$$Q = \log_2 N = 8 \text{ біт} = 1 \text{ байт}.$$

Структурна міра Q збігається зі *статистичною* I за умови рівної ймовірності кодових комбінацій і відсутності надлишковості інформації.

Поняття інформаційного потоку в обчислювальних системах використовується в основному при розробці й аналізі алгоритмів обслуговування зовнішніх пристроїв комунікаційними каналами процесора

[24]. При цьому використовуються різні моделі обслуговування, однак змістовні аспекти інформації враховуються лише з погляду наявності у потоків даних пріоритетів на обслуговування.

Інформаційні моделі *систем керування і прийняття рішень* одержали поширення відносно недавно. Проблема оцінювання кількості інформації, створюваної автоматичною системою в результаті обробки емпіричних даних, набула особливої актуальності з розвитком автоматизованих систем керування [25-28]. Існуючі структурні і статистичні оцінки не дозволяють врахувати інтелектуальні витрати на одержання рішення задачі керування і значимість одержуваного результату. У зв'язку з цим А.Н.Колмогоровим запропоновано вимірювати кількість інформації, що отримується в результаті обробки даних, складністю алгоритму отримання результату. За А.Н.Колмогоровим [29, 30] *алгоритмічна інформація* визначається як різниця *алгоритмічних ентропій*

$$A(y:x) = K(x) - K(x/y), \tag{5.26}$$

а алгоритмічна ентропія визначається складністю відтворення об'єкта x:

$$K(x) = \min l(p_1), G(p_1)=x ; \tag{5.27}$$
$$K(x/y) = \min l(p_2), G(p_2, y)=x,$$

де p_1 - алгоритм одержання результату при відсутності вихідних даних;

p_2 - алгоритм одержання результату обробки інформації при вихідних даних y;

l - довжина алгоритму;

G - деяка обчислювана функція.

Чисельне значення кількості інформації залежить від вибору функції G. Фактично G є сукупність засобів операційної системи ЕОМ, що виконує алгоритм p. У теоретичних роботах для досягнення єдності одержуваних результатів використовуються кілька мір складності алгоритмів, що виражаються довжиною нормального алгоритму в заданому алфавіті, числом станів машини Тьюринга й інші. Відомо, що між різними мірами складності існує функціональна залежність.

Модель А.Н.Колмогорова зручна при дослідженні одиничних інформаційних процесів обробки даних, але погано погоджується з моделями масових процесів сприйняття і передавання інформації.

Контрольні питання

1. Порівняйте визначення інформаційного потоку на основі трьох мір кількості інформації. Яке з цих визначень дає найбільше чисельне значення потоку, а яке найменше?

2. Процес створення тексту можна зобразити ймовірнісним графом, в якому кожна вершина відповідає певному складу української мови, а вага ребра відповідає ймовірності наступного складу. Як на основі такого графу визначити інформаційний потік при читанні тексту?

3. Комп'ютерні архіватори файлів працюють на принципі усунення збитковості інформації. Як змінюється інформаційний потік при передаванні заархівованої інформації при її вимірюванні в статистичних і структурних одиницях?

Ключові слова

Інформаційний потік, транзакція, документографічна система, вимірювальний канал, вимірювальна інформація, інформаційно-енергетична теорія, продуктивність джерела вимірювальної інформації, система зв'язку, інформативний сигнал, канал зв'язку, канал з перешкодами, пропускна здатність, теорема Шеннона, система телекомунікацій, слово, повідомлення, пакет повідомлень, телетрафік, протокол передавання даних, обчислювальна мережа, структурна міра інформації, статистична міра інформації, системи керування і прийняття рішень, алгоритмічна інформація, алгоритмічна ентропія.

Література

1. Дубовий В.М. Дослідження і оптимізація мереж ІВС методом моделювання динаміки інформаційних потоків. – Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 1994. – №1. – С.22–26.
2. Ханенко В.Н. Информационные системы. - Л.: Машиностроение, 1988.
3. Анализ измерительных информационных систем. / МаликовВ.Т. Дубовой В.М., Кветный Р.Н., Исматуллаев П.Р. – Ташкент: ФАН, 1984. – 176с.
4. Кавалеров Г.И., Мандельштам С.М. Введение в информационную теорию измерений. - М.: Энергия, 1974.
5. Кветный Р.Н., Маликов В.Т. Информационная теория измерений: от модели к изделию. - М.: Знание, 1988.
6. Рабинович В.И., Цапенко М.П. Информационные характеристики средств измерения и контроля. - М.: Энергия, 1968.
7. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. - М.: Физматгиз, 1960.
8. Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств. - Л.: Энергия, 1968.
9. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: Иностр. лит., 1963.
10. Советов Б.Я. Теория информации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
11. Теория передачи сигналов. / Зюко А.Г. и др. М.: Связь, 1980.
12. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. - М.: Мир, 1965.
13. Хартли Р.В.Л. Передача информации. /В кн.: Теория информации и ее приложения. - М., 1959.
14. Морозов В.К., Долганов А.В. Основы теории информационных сетей. - М.: Высшая школа, 1987.

15.Модели теории телетрафика в системах связи и вычислительной технике / Под ред. А.Д.Харкевича, В.А.Гармаша. - М.: Наука, 1985.
16.Бесслер Р., Дойч А. Проектирование сетей связи. М.: Радио и связь, 1988.
17.Теория сетей связи. / Рогинский В.Н. и др. - М., 1981.
18.Блэк Ю. Сети ЭВМ: протоколы, стандарты, интерфейсы. - М.: Мир, 1990.
19.Растригин Л.А. Вычислительные машины, системы, сети. - М.: Наука, 1982.
20.Самойленко С.И. Сети ЭВМ. – М.: Наука, 1986.
21.Темников Ф.Е. и др. Теоретические основы информационной техники. - М.: Энергия, 1979.
22.Хартли Р.В.Л. Передача информации. /В кн.: Теория информации и ее приложения. - М., 1959.
23.Основы теории вычислительных систем / Под ред. В.И.Салыги. - Харьков: Вища школа, 1984.
24.Кузьмин И.В. Оценка эффективности и оптимизация АСКУ. - М.: Советское радио, 1971.
25.Николаев В.И. Информационная теория контроля и управления. - Л.: Судостроение, 1973.
26.Петров В.В., Усков А.С. Информационная теория синтеза оптимальных систем контроля и управления (Непрерывные системы). - М.: Энергия, 1975.
27.Солодов А.В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля.- М.: Наука, 1967.
28.Колмогоров А.Н. К логическим основам теории информации. - Проблемы передачи информации. – 1969, т.5. - N3.
29.Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия “количество информации». - Проблемы передачи информации. – 1965, т.1. - N1.

6. ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ

На початку процесу побудови моделі необхідно відповісти на декілька питань, які визначають подальший процес моделювання:

1. Що є об'єктом моделювання?
2. Для чого буде використовуватись модель?
3. Які властивості об'єкта повинна відображати модель?
4. За допомогою яких засобів буде здійснюватися отримання результатів з моделі?
5. Які вимоги пред'являються до основних характеристик моделі?

Побудова моделі складається з двох етапів: визначення узагальненої моделі всіх об'єктів заданого класу та визначення її характеристики для конкретного об'єкта на основі різноманітної інформації. Останній етап називається *ідентифікацією*, тобто встановленням взаємно-однозначної відповідності між об'єктом і його моделлю.

Задача ідентифікації формулюється таким чином:

- за результатами спостережень за вхідними і вихідними змінними системи побудувати оптимальну в деякому сенсі її модель. При цьому система знаходиться в нормальному режимі функціонування (тобто, в середовищі випадкових впливів і завад).

Іншими словами, якщо об'єкт описується деяким оператором F_t, апріорі невідомим, то маючи виміряні значення входу і виходу, необхідно побудувати оцінку F_t оператора об'єкта, оптимальну в сенсі деякого критерію.

Таким чином, ідентифікація - це синтез оптимального модельного оператора досліджуваного об'єкта з використанням результатів спостереження за його вхідними і вихідними змінними.

Отже задачі ідентифікації і використання моделі є взаємно оберненими:

- задача використання моделі – визначити характеристики реакції об'єкта в залежності від характеристик вхідних впливів
$$\Theta_Y = F[\Theta_X];$$
- задача ідентифікації – визначити вид та характеристики оператора перетворення на основі відомих Θ_Y, Θ_X
$$F = A(\Theta_X, \Theta_Y)$$

де A – алгоритм ідентифікації.

Може виникнути питання – навіщо здійснювати дві обернених операції, якщо X і $У$ відомі? Але при ідентифікації відома реакція $У$ лише на деякі впливи X, а отримана в результаті модель дає можливість визначити реакцію $У$ майже на будь-які впливи X (якщо модель адекватна!). Прикладом є побудова лінійної статичної характеристики. Для цього достатньо мати дві пари (x_1, y_1), (x_2, y_2) і побудувати пряму за двома точками. Отримана характеристика дасть можливість визначити y для будь-якого $x \in (x_1, x_2)$.

В загальному випадку метод розробки моделей передбачає п'ять етапів:

1) вибір певного типу моделі на основі наявних документів;

2) проведення експериментів на об'єкті для реєстрації даних;

3) групування експериментальних даних таким чином, щоб всі попередні дані, необхідні для обчислення змінної стану за допомогою математичної моделі, були зібрані разом;

4) пошук таких значень коефіцієнтів рівнянь, при яких нев'язка (наприклад, сума квадратів різниці між обчисленим за моделлю і виміряними в процесі експериментів значеннями змінної стану) є мінімальною;

5) випробовування інших типів рівнянь і повторення етапів 1 – 4 для вибору його конкретного виду, що дає меншу нев'язку.

Існують два підходи до задачі визначення виду моделі. Перший підхід - аналітичний, складається з аналізу фізичних принципів, на яких основана робота досліджуваного об'єкта. В цьому випадку характеристики моделі отримують розрахунком. Другий підхід полягає в проведенні над досліджуваними об'єктами ряду експериментів з наступною математичною обробкою отриманої інформації. Обидва ці підходи не виключають, а взаємно доповнюють один одного. Тільки застосовуючи їх одночасно, вдається отримати прості, але достатньо адекватні математичні моделі.

6.1. Структурна, алгоритмічна і параметрична ідентифікація

Успіх ідентифікації об'єкта суттєво залежить від співвідношення двох факторів: об'єму апріорної інформації про структуру об'єкта і об'єму вимірювальної інформації. Обидва види інформації необхідні при синтезі моделі, однак вони відіграють різні ролі. Апріорні свідчення допомагають визначити структуру моделі, тобто її вигляд (число входів і виходів, характер зв'язку між ними). Цю процедуру називають ідентифікацію в широкому розумінні, чи *структурною ідентифікацією.*

Задачу визначення параметрів моделі на основі спостережень роботи об'єкта при заданій структурі моделі називають ідентифікацією у вузькому розумінні чи *параметричною ідентифікацією*. Наприклад, є деякий об'єкт і відома система рівнянь, яка описує його. Необхідно визначити тільки коефіцієнти рівнянь.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вхідних параметрів об'єкта і його математичної моделі (рис.6.1) може бути розбитий на три підмножини

$$X^{(1)} = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \quad X^{(2)} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+n}),$$
$$X^{(3)} = (x_{k+n+1}, x_{k+n+2}, \ldots, x_{k+n+p})$$

де $X = X^{(1)} \bigcup X^{(2)} \bigcup X^{(3)}$ і $X^{(1)} \bigcap X^{(2)} = \varnothing$, $X^{(1)} \bigcap X^{(3)} = \varnothing$, $X^{(2)} \bigcap X^{(3)} = \varnothing$

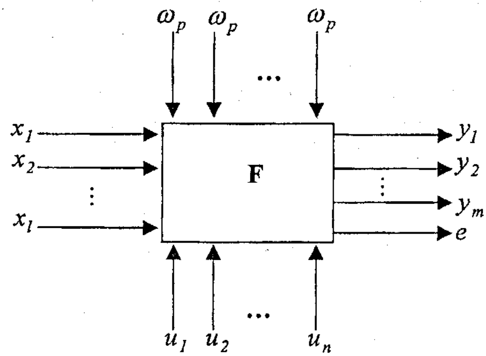


Рис. 6.1. Узагальнена модель об'єкта

Підмножина $X^{(1)}$ створює сукупність нерегульованих, але виміряних параметрів об'єкта, а $X^{(2)}$ - сукупність параметрів, які не тільки вимірюються, але й можуть бути змінені певним чином. За допомогою елементів підмножини , ... здійснюється налагодження об'єкта на той чи інший режим, тому $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$ називають керуючими параметрами об'єкта.

Позначимо ці параметри $u_1 = x_{l+1}, u_2 = x_{l+2}, \ldots, u_n = x_n$, вектор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_u)$ назвемо вектором керування. Підмножина параметрів $X^{(1)} = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$ є вхідним вектором технологічного об'єкта.

На будь-який реальний об'єкт діє група неконтрольованих і некерованих випадкових параметрів, поява яких зумовлена сукупністю випадкових змін в оточуючому середовищі (температура навколишнього середовища, неконтрольований знос апаратури тощо). Цю групу параметрів позначимо через $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$ і назвемо її вектором збурення. В загальному випадку ω залежить від часу, так що $\omega = f(t)$.

Під ідентифікацією моделі мається на увазі процес визначення її параметрів $C = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ у режимі нормальної експлуатації об'єкта чи спеціальних експериментів з ним. Структура моделі при цьому відома (визначена на стадії структурного синтезу – аналітичного чи експериментального): $Y = A(X, U, C)$, оператор A припускається заданим.

Це означає, що заданий алгоритм, за допомогою якого можна визначити стан Y моделі, якщо задані стани X та U її входів, а також параметри C. Саме ці параметри визначаються на етапі ідентифікації.

Зв'язок між параметричною і структурною ідентифікацією для деяких типів моделей показаний у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1.

Тип моделі	**Структурні характеристики**	**Параметричні характеристики**
Нелінійна модель статики	Вид залежності, кількість аргументів степінь полінома, область визначення	Коефіцієнти функціональної залежності
Модель логіки	Логічне рівняння	-
Зважений граф	Кількість вершин і ребер, матриця суміжності	Ваги ребер
Передаточна функція	Степінь чисельника і знаменника	Коефіцієнти при степенях p

Контрольні питання

1. Які характеристики системи відносять до структурних?
2. Як за допомогою зміни значень параметрів описати структурні характеристики?
3. Як оцінити степінь адекватності структурної ідентифікації?
4. Чи завжди задача структурної ідентифікації має однозначний розв'язок?

Ключові слова

Ідентифікація (2 3 4), задача ідентифікації, структурна ідентифікація, параметрична ідентифікація (1).

Література

1. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. - К.: Вища школа, 1988.-359 с.
2. Основы моделирования сложных систем. /Под ред. И.В.Кузьмина. – К.: Вища школа, 1981. – 369 с.
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
4. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 288с.
5. Мокін Б.І., Мокін В.Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів: Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999.

6.2. Активна і пасивна ідентифікація

Для складних реальних об'єктів в більшості випадків повністю чи частково відсутня *апріорна інформація* про структуру об'єкта, і її потрібно отримати за тими самими реалізаціями вхідних і вихідних змінних, за якими визначаються параметри моделі об'єкта [1].

В деяких випадках неможливо безпосередньо виміряти найбільш інформативні вхідні змінні по відношенню до заданих вихідних змінних. Тоді необхідно вибрати такі вимірювані опосередковані вхідні змінні, які б давали можливість в процесі нормальної експлуатації об'єкта з необхідною точністю визначати його задані вихідні змінні. Вибір оптимальних в будь-якому розумінні опосередкованих змінних повинен передувати оцінюванню коефіцієнтів рівняння зв'язку вихідної змінної [2, 3].

Джерелом інформації про об'єкт в будь-якому випадку є дослід. Розрізняють два види дослідів: пасивний і активний.

Пасивним називається той експеримент, вихід якого отримується в результаті самостійного ходу процесу без активної участі людини-оператора [1]. Схема пасивного експерименту наведена на рис.6.2,а. Перевагою пасивного методу отримання дослідних випадкових величин є відсутність порушень природного режиму функціонування об'єкта, недоліком - неможливість створення *тестових сигналів* бажаного вигляду, більша тривалість експерименту і (іноді) збільшення об'єму обчислень при визначенні параметрів.

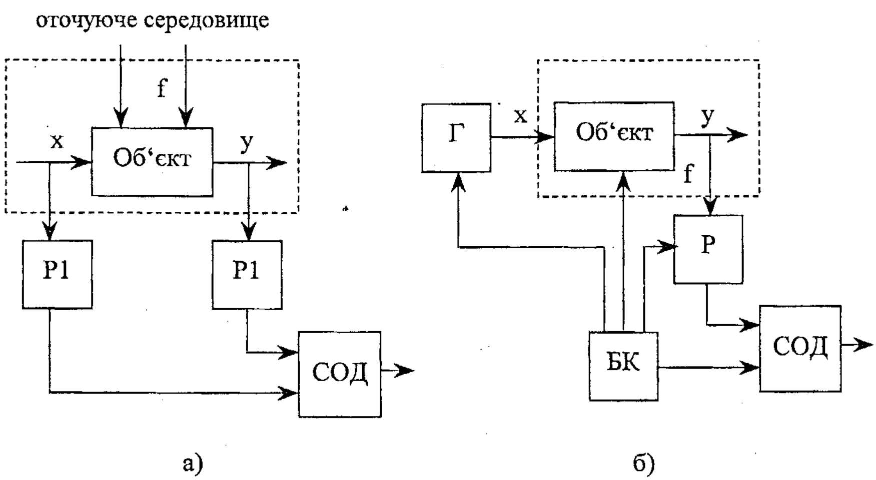


Рис. 6.2. Схеми експериментів: а) пасивний експеримент, б) активний експеримент

Для створення математичних моделей статики об'єктів при пасивному експерименті використовуються методи кореляційного і регресійного аналізу, методи оцінювання параметрів моделі на основі критерію максимуму правдоподібності, мінімуму середнього ризику тощо. Для визначення моделей динаміки об'єкта на основі пасивного експерименту широко застосовуються методи теорії випадкових функцій, метод динамічного регресійного аналізу тощо.

Часто як дані пасивного експерименту використовують записи в експлуатаційних журналах технологічного обладнання. Однак до такої інформації потрібно відноситися критично через можливі помилки в записі, допущені експлуатаційниками, а також похибки за рахунок неодночасної реєстрації даних вимірювань, особливо при великій кількості даних.

Активний експеримент передбачає *генерування* діючих на об'єкт *тестових сигналів* потрібної форми, що скорочує його тривалість і спрощує наступне визначення параметрів моделі [1]. Ці сигнали поділяються на регулярні і випадкові. Схема активного експерименту наведена на рис.6.2,б.

До *регулярних сигналів u* відносяться *аперіодичні* (ступінчата функція рис.6.3,а, прямокутний імпульс рис.6.3,б та інші) та *періодичної* дії (рис.6.3,в). Перші використовуються для знаходження коефіцієнтів диференціальних рівнянь, другі – для визначення амплітудно–фазових характеристик об'єктів.

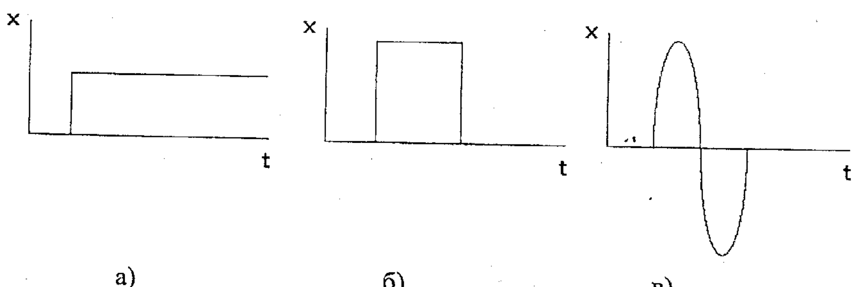


Рис. 6.3. Регулярні сигнали

Випадкові сигнали $u(t)$ створюються спеціальними *генераторами* і за своїми характеристиками близькі до так званого *білого шуму*. Використання таких сигналів спрощує наступні визначення динамічних характеристик.

Для успішного проведення активного експерименту необхідно дотримуватись таких умов:

- точність, з якою задаються незалежні вхідні змінні x, які не є випадковими величинами, повинна бути високою. До точності вимірювань вхідної випадкової величини висуваються менш жорсткі вимоги;

- кожна з незалежних змінних не повинна бути лінійною комбінацією решти незалежних змінних;
- інтервал між значеннями факторів в сусідніх точках не повинен бути меншим або дорівнювати похибці, з якою задають цей інтервал;
- результати спостережень над вихідною змінною $\{y_1, y_2, \dots y_n\}$ представляють собою незалежні нормально розподілені величини.

Активний експеримент забезпечує високу достовірність інформації, однак експерименти, пов'язані з дослідженням реакції, наприклад, на ступінчасті або синусоїдальні коливання, важко проводити на типових гідравлічних, енергетичних і теплових процесах, оскільки подібні експерименти можуть порушити процес або вивести його із звичайного режиму в аварійний. Крім того, при проведені активних експериментів важко в реальних виробничих умовах стабілізувати параметри процесу на заданому рівні на протязі певного відрізка часу.

Часто для отримання даних про процес використовують *активно-пасивний реєстраційний експеримент*. Він полягає в тому, що коливання вносять лише по деяких каналах; при цьому не ставиться задача строгої стабілізації інших параметрів. Наявність елементів активного експерименту дозволяє розширити діапазон зміни параметрів процесу, що забезпечує більшу достовірність отриманих даних.

Контрольні питання

1. Як можна організувати активний експеримент для структурної ідентифікації логічного об'єкта?
2. Що можна використати як тестові сигнали для структурної ідентифікації графової моделі?
3. Який тип експерименту – активний чи пасивний, використовується при дослідженні стану здоров'я людини?
4. Назвіть декілька галузей науки, де активні експерименти принципово неможливі (принаймні, при сучасному рівні розвитку науки і техніки).

Ключові слова

Апріорна інформація, пасивний експеримент, активний експеримент, тестовий сигнал, генерування тестових сигналів, регулярний сигнал, аперіодичний сигнал, періодичний сигнал, випадковий сигнал, білий шум, активно-пасивний реєстраційний експеримент.

Література

1. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К: Вища школа, 1988. – 359 с.
2. Применение математических методов и ЭВМ для анализа и управление доменным процессом \ И.Г.Товаровский, Е.И.Райх, К.К.Шкодин, В.А.Улахович. – М.:Металургия, 1978. – 264 с.
3. Райбман Н.С., Чадеев В.М. – Построение моделей производства. М.: Энергия, 1975. – 375 с.
4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
5. Мокін Б.І., Мокін В.Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів: Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999.

6.3. Статистична ідентифікація

Розглянемо *статистичну постановку задачі ідентифікації*, вважаючи, що вплив (вхідна змінна) $X(t)$ і реакція (вихідна змінна) $Y(t)$ представляють собою випадкові функції або випадкові величини.

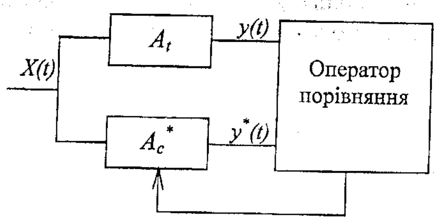


Рис. 6.4. Схема процесу ідентифікації

Нехай для одновимірного об'єкта, характеристикою якого є оператор A_t (рис.6.4), можуть бути виміряні випадкові функції входу $X(t)$ і виходу $Y(t)$. Тоді задача ідентифікації зводиться до визначення оператора A_t за результатами вимірювання цих функцій, причому через стохастичний характер функції визначається не сам оператор A_t, а його оцінка A_t^* [1]. Оскільки оцінка оператора A_t^* використовується як характеристика невідомого оператора A_t, необхідно наблизити оцінку оператора A_t^* до істинного значення оператора A_t в розумінні деякого критерію, тобто повинна бути виконана умова близькості випадкової функції - виходу моделей $Y^*(t)=A_t^*X(t)$ до випадкової функції $Y(t)$, яка є вихідною змінною об'єкта.

6.3.1. Кореляційний аналіз

Кореляційний аналіз призначений для виявлення статистичних залежностей між параметрами системи (кореляція на множині параметрів) і для ідентифікації моделі динаміки системи (кореляція у часі).

Між x та y існує *функціональна залежність*, якщо кожному можливому значенню x відповідає однозначно визначене значення y.

Статистичний зв'язок полягає в тому, що одна випадкова змінна реагує на зміну значення іншої змінної відповідною зміною свого закону розподілу ймовірності. Найчастіше розглядається зміна не всього закону, а окремих його моментів, наприклад

$$M(Y/X=x)=\varphi_Y(x) \tag{6.1}$$

Для характеристики статистичної залежності використовуються коваріаційна або кореляційна функції:

- *коваріаційна функція*

$$K_{xy}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int[x(t_1)-m_x]\cdot[y(t_2)-m_y]\cdot f(x,y)dxdy \tag{6.2}$$

- *кореляційна функція*

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t_1)y(t_2)f(x,y)dxdy \tag{6.3}$$

Для стаціонарних випадкових процесів коваріаційна та кореляційна функції не залежать від моментів часу t_1 та t_2, а лише від їх різниці:

$$K_{xy}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int[x(t)-m_x]\cdot[y(t+\tau)-m_y]\cdot f(x,y)dxdy \tag{6.4}$$

$$R_{xy}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t+\tau)f(x,y)dxdy \tag{6.5}$$

Для *ергодичних процесів* усереднення можна виконувати не за множиною реалізацій, а у часі, тоді:

$$K_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T[x(t)-m_x]\cdot[y(t+\tau)-m_y]dt \tag{6.6}$$

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)y(t+\tau)dt \tag{6.7}$$

Якщо розглядати кореляцію однієї випадкової величини (двох її значень), то

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t-\tau)x(t)dt \tag{6.8}$$

Нехай x, y – випадкові величини, які мають спільний нормальний розподіл. Зв'язок між x та y можна описати за допомогою *коефіцієнта кореляції*:

$$\rho = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = M\left\{\frac{X - M(x)}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - M(y)}{\sigma_y}\right\} \tag{6.9}$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{(n-1)\sigma_x \sigma_y} \tag{6.10}$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Коефіцієнт кореляції приймає значення на проміжку (-1;1).
2. Коефіцієнт кореляції не залежить від одиниць вимірювання величин та від числа спостережень.
3. Якщо коефіцієнт кореляції $r>0$, то залежність між змінними прямо пропорційна.
4. Якщо коефіцієнт кореляції $r<0$, то залежність між змінними обернено пропорційна.
5. Якщо величини незалежні, то $r=0$.
6. Якщо $r=0$, то випадкові величини є некорельовані, але це не означає, що вони незалежні, між ними може існувати нелінійна залежність, яка при розкладанні її у степеневий ряд не має лінійного члена.

Процес є некорельованим, або два процеси не залежать один від одного, якщо

$$f(x,y) = f(x)*f(y),$$

або

$$f(y/x) = f(y).$$

Інколи для опису зв'язку між випадковими змінними також використовуються:

- *коефіцієнт детермінації*. Він характеризує статистичну залежність навіть у тих випадках, коли лінійна частина цієї залежності відсутня. Але його визначення є складною задачею;
- коефіцієнт, який оцінює міру *чутливості* однієї змінної до іншої $\beta_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2}$. За його допомогою будується і перевіряється модель зв'язку одної залежної змінної (ендогенної) і більш незалежних (екзогенних) змінних;
- теоретичне *множинне кореляційне відношення* $\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - y_{x1x2})^2}{nD_y^2}}$;

- *множинний індекс кореляції* $\eta = \sqrt{\frac{D^2_{r12...m}}{D^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{D^2_{y(12...m)}}{D^2_y}}$

- *факторна дисперсія* $D^2_{r_{12...m}}$;

- *залишкова дисперсія* D^2_y.

Для ідентифікації моделі динаміки системи використовують авто- та взаємнокореляційні функції. Використовуючи перетворення Фур'є, отримують *спектральні щільності потужності* відповідних сигналів:

$$S_{xx}(j\omega) = \int_0^\infty R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \tag{6.11}$$

$$S_{xy}(j\omega) = \int_0^\infty R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{6.12}$$

В результаті може бути знайдена *частотна передаточна функція* (комплексна амплітудно-фазова частотна характеристика)

$$W(j\omega) = \frac{S_{xy}(j\omega)}{S_{xx}(j\omega)} \tag{6.13}$$

6.3.2. Факторний аналіз

При побудові моделі будь-якої системи завжди постає питання, які впливи на систему (*фактори*) є суттєвими і повинні бути враховані в моделі, а якими можна знехтувати без втрати адекватності та значного зменшення точності. Задача може бути розв'язана повним перебором всіх можливих комбінацій значень факторів. Але трудомісткість такого підходу експоненціально зростає з кількістю факторів, що перешкоджає його практичному застосуванню. Отже, методи *факторного аналізу* дозволяють розв'язати цю проблему з меншою трудомісткістю.

Для проведення факторного аналізу [2] інформація повинна бути подана у вигляді двовимірної таблиці чисел (матриця вхідних даних). Рядки цієї матриці повинні відповідати об'єктам спостереження ($i=1, 2, ..., n$), стовпці – ознакам ($j=1, 2, ... m$).

Основна модель факторного аналізу має вигляд

$$Z_j = a_{j1}V_1 + a_{j2}V_2 + ... + a_{ip}V_p + d_jU_j \tag{6.14}$$

де z_j-j-а ознака (величина випадкова); V_1, V_2,... V_p – *загальні фактори* (величини випадкові, які мають нормальний закон розподілу); U_j – *характерний фактор*; a_{j1}, a_{j2}, ... a_{jp} – факторні навантаження, які б характеризувало сутність впливу кожного фактора (параметри моделі, які підлягають визначенню); d_3 – навантаження характерного фактора.

Модель передбачає, що кожна з j ознак, яка входить в досліджений набір, може бути подана у вигляді лінійної комбінації невеликого числа загальних факторів $V_1, V_2..., V_p (p<m)$ і характерного фактора U_j.

Термін “загальний фактор” підкреслює, що кожен такий фактор має суттєве значення для аналізу всіх ознак $z_j (j=1, 2,..., m)$, тобто, V_k – фактор загальний для всіх z_j.

Термін „характерний фактор” показує, що він відноситься тільки до даної *j-ої* ознаки. Це спеціальна ознака, яка не може бути виражена через фактори V_k.

Факторні навантаження $a_{j1}, a_{j2} \ldots a_{ip}$ характеризують величину впливу того чи іншого загального фактора у варіації даної ознаки. Основна задача факторного аналізу – визначення факторних навантажень. Факторна модель відноситься до класу апроксимуючих. Параметри моделі повинні бути такими, щоб найкращими чином з точки зору певного критерію апроксимувати кореляції між спостереженими ознаками.

Дисперсію ознаки σ_j^2 можна розкласти на складові: частину, зумовлену дією загальних факторів h_j^2, і частину, зумовлену діями j-го характерного фактора d_j^2. Дисперсія ознаки може бути виражена через фактори і в кінцевому рахунку через факторні навантаження.

Якщо загальний і характерний фактори не корелюють між собою, то дисперсію j-ої ознаки можна подати у вигляді

$$\sigma_j^2 = 1 = \underbrace{a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \ldots + a_{jk}^2 + \ldots + a_{jp}^2}_{h_l^2} + d_j^2,$$

де a_{jp}^2-частина дисперсії ознаки z_j, яка призначена на k-й фактор.

Повний внесок k-го фактора у сумарну дисперсію ознак

$$D_k = \sum_{j=11}^{m} a_{jk}^2 \quad (k = 1,2,..., p). \tag{6.15}$$

Внесок загальних факторів в сумарну дисперсію $D = \sum_{k=1}^{p} D_k$.

Використовуючи модель (6.14), запишемо вираз для кожного з параметрів:

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + \ldots + a_{1p}V_p + d_1U_1, \\ z_2 = a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + \ldots + a_{2p}V_p + d_2U_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m = a_{m1}V_1 + a_{m2}V_2 + \ldots + a_{mp}V_p + d_mU_m. \end{cases} \tag{6.16}$$

Коефіцієнти системи (6.16) – факторні навантаження – можна подати у вигляді матриці, кожний рядок якої відповідає параметру, а стовпчик – фактору. Факторний аналіз дозволяє отримати не тільки матрицю відображень, але і коефіцієнти кореляції між параметрами і факторами, що є важливою характеристикою якості факторної моделі. Таблиця таких коефіцієнтів кореляції називається факторною структурою або просто структурою.

Коефіцієнти відображення можна виразити через вибіркові парні коефіцієнти кореляції.

Розглянемо зв'язок між елементами структури і коефіцієнтами відображення. Для цього, враховуючи вираз (6.14) і визначення вибіркового коефіцієнта кореляції, помножимо рівняння системи (6.16) на відповідні фактори, проведемо підсумовування по всіх n спостереженнях і, розділивши на n, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} r_{z_jV_1} = a_{j1} + a_{j2} r_{V_1V_2} + \ldots + a_{jp} r_{V_1V_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{z_jV_k} = a_{j1} r_{V_kV_1} + a_{j2} r_{V_kV_2} + \ldots + a_{jp} r_{V_kV_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{z_jV_p} = a_{j1} r_{V_pV_1} + a_{j2} r_{V_pV_2} + \ldots + a_{jp} \\ r_{z_zU} = d_j \end{cases} \quad (6.17)$$

де $r_{Z_jV_k}$ - вибірковий коефіцієнт кореляції між j-им параметром і k-м фактором; $r_{V_kV_p}$ - коефіцієнт кореляції між k-им і p-им факторами.

Якщо припустити, що загальні фактори між собою некорельовані, то рівняння (6.17) можна записати у вигляді $r_{z_jF_k} = a_{jk}$ $(j=1,2, \ldots, m;\ k=1,2,\ldots,p)$, тобто коефіцієнти відображення дорівнюють елементам структури.

Вихідною інформацією для побудови факторної моделі (6.14) є *матриця вибіркових парних коефіцієнтів кореляції.* Використовуючи побудовану факторну модель, можна знову обчислити коефіцієнти кореляції між ознаками і порівняти їх з вихідними коефіцієнтами кореляції. Різниця між ними і є залишковим коефіцієнтом кореляції.

У випадку незалежності факторів для обчислення коефіцієнтів кореляції між параметрами достатньо взяти суму добутків коефіцієнтів відображення, які відповідають спостереженим ознакам:

$$r'_{jk}=a_{j1}\,a_{k1}+a_{j2}\,a_{k2}+\ldots+a_{jp}\,a_{kp} \quad (j\neq k, j,k=1,2,\ldots p),$$

де r'_{jk} - обчислений за відображенням коефіцієнт кореляції між j-ю і k-ю ознаками. *Залишковий коефіцієнт кореляції*

$$\bar{r}_{jr} = r_{jr} - r'_{jr} \quad (6.18)$$

Матриця залишкових коефіцієнтів кореляції називається залишковою матрицею чи матрицею залишків

$$\overline{R} = R - R', \quad (6.19)$$

де $\overline{R}$ - матриця залишків; R – матриця вибіркових парних коефіцієнтів кореляції чи повна матриця; R' - матриця обчислених за відображенням коефіцієнтів кореляції.

Має місце співвідношення

$$\sum_{k=1}^{p} D_k = \sum_{j=1}^{m} h_j^2 = \sum_{ir} a_{ik}^2 = D.$$

Матрицю факторних навантажень можна отримати різними способами. Найбільше розповсюдження отримав метод головних факторів. Цей метод оснований на принципі послідовних наближень і дозволяє досягти будь-якої точності.

Редукованою матрицею називається матриця вибіркових коефіцієнтів кореляції $\widetilde{R}$, у якої по головній діагоналі стоять значення загальностей $h_k^2\ (1,2,\ldots,p)$:

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} h_1^2\ r_{21}\ r_{31} \ldots r_{m1} \\ r_{12}\ h_2^2\ r_{32} \ldots r_{m1} \\ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ r_{1m}\ r_{2m} \ldots h_m^2 \end{bmatrix}$$

Редукована і повна матриця пов'язані співвідношенням

$$\widetilde{R} = R - \{D\} \tag{6.20}$$

де $\{D\}$ – матриця дисперсій, зумовлених характерними факторами.

Процедура знаходження факторних навантажень, тобто матриці A, складається з декількох кроків: на першому кроці шукають коефіцієнти факторних навантажень при першому факторі так, щоб сума внесків даного фактора в сумарну загальну частину була максимальною:

$$D_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{p1}^2.$$

Максимум D_1 повинен бути знайдений при умові

$$r_{j\xi} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} a_{\xi k} \qquad (j, \xi = 1,2,\ldots,m), \tag{6.21}$$

де $r_{j\xi} = r_{\xi j}$; r_{jj} – загальність h^2_j параметра z_j.

Потім розраховують матрицю коефіцієнтів кореляції з врахуванням тільки першого фактора $R'_2 = a_1 a_1'$. Маючи таку матрицю, отримаємо першу матрицю залишків: $R_1 = \widetilde{R} - R_1'$.

На другому кроці визначають коефіцієнти навантаження на другому факторі так, щоб сума вкладів другого фактора у залишкову загальну частину (тобто повну загальну частину без врахування тої частини, яка припадає на частину першого фактора) була максимальною. Сума квадратів навантажень при другому факторі

$$D_2 = a^2_{12} + a^2_{22} + \ldots + a^2_{p2}.$$

Максимум D_2 знаходять при умові

$$\bar{r}^1_{j\xi} = \sum a^1_{jk} a^1_{\xi k} \quad (j, \xi = 1,2,\dots,m), \tag{6.22}$$

де $\bar{r}^1_{j\xi}$ - коефіцієнт кореляції з першої матриці залишків; $a^1_{jk}, a^1_{\xi k}$ - факторні навантаження з врахуванням другого фактора. Потім розраховують матрицю коефіцієнтів кореляції з врахуванням другого фактора і обчислюють другу матрицю залишків: $\overline{R}_2 = \overline{R}_1 - R_2'$.

Адекватність факторної моделі оцінюється за матрицею залишків (якщо величини її коефіцієнтів малі, то модель вважається адекватною).

6.3.3. Регресійний аналіз

Регресійний аналіз призначений для побудови моделі шляхом статистичної обробки результатів пасивного експерименту.

Модель регресії має вигляд:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon,$$

де $y(t)$ – реальне значення випадкового процесу;

$\bar{y}(t)$ – значення випадкового процесу, отримане за допомогою функції регресії;

ε – випадкова величина, що характеризує вплив неврахованих факторів.

Функція регресії випадкової змінної y відносно x – це умовне математичне сподівання $M(Y/x)$ випадкової змінної y. Крива регресії $y(x)$ – це умовне середнє значення випадкової змінної y, параметри якої знаходять методом найменших квадратів за спостереженими значеннями двовимірної випадкової величини (x,y), тобто

$$\bar{y}(x) = \varphi(x, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

Крива регресії – емпіричне рівняння регресії, вона є відповідною оцінкою функції регресії.

Функція лінійної регресії має вигляд:

$$M_{Y/x} = M_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left[x - M_x\right]$$

де $\beta = r_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ - *коефіцієнт регресії.*

Залишкова дисперсія $D_{y/x} = D_y\left(1 - r_{xv}^2\right)$

Таким чином, модель лінійної залежності y від x

$$y = a + \beta x + \varepsilon,$$

де a – константа, яка відображає значення y при x=0;

β - коефіцієнт регресії;

ε – похибка.

Практичний спосіб визначення коефіцієнтів рівняння регресії ґрунтується на припущеннях:

1) лінійна залежність між змінними;
2) значення помилки, нормально розподілене з середньою і постійною дисперсією D;
3) всі процеси є стаціонарними.

Тоді коефіцієнти регресії для двох змінних

$$\beta = \frac{K}{D_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2},$$

$$a = \bar{y} - \beta\bar{x},$$

$$\varepsilon = y_i - \hat{y},$$

де $\hat{y}$ - розрахункове значення.

При побудові багатовимірних залежностей використовується *коефіцієнт множинної регресії*:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}$$

Важливим етапом побудови регресійної моделі є *аналіз залишків* (похибок) у вигляді різниць y_i-y_i^*. Можна виділити найхарактерніші результати аналізу залишків:

1. Виявлення *викидів*, тобто різних екстремальних значень відхилення y_i від запропонованого значення y_i^*. В цьому випадку необхідно повторити експеримент в точці викиду, попередньо перевіривши правильність його умов. Якщо викид стійкий, то його потрібно чи відкинути і перерахувати коефіцієнти моделі без нього, чи зайнятись дослідженням фізичної природи його існування.

2. Виявлення деякого *тренду* в залишках, тобто тенденції в їх зміні з плином часу. Наприклад, в залишках спостерігається тенденція до лінійного зростання. Для покращення моделі підраховують поправку у вигляді різниці $\frac{y_i - y_i^*}{y_i^*} - a_i$, де $a_i = k \cdot N$, $k = tg\,\alpha$, α - кут нахилу усередненої "лінії залишків" до осі абсцис, N – номер експерименту.

3. Виявлення різкого зсуву рівня процесу. В цьому випадку можна з'ясувати причину різкого стрибка похибки, а потім розбити вибірку на дві і для кожного рівня побудувати модель.

4. Виявлення змін в дисперсії помилки. Аналіз, який приводить до побудови регресійних моделей, дозволяє знайти деяке середнє значення дисперсії помилки (наприклад, дисперсію відтворювання). Якщо дисперсії помилки неоднорідні, то знайдена середня дисперсія може невірно описувати частину експериментальних даних.

5. Дослідження залишків для перевірки того, чи описуються вони нормальним законом розподілу. В цьому випадку можна перевірити випадковість значень.

Контрольні питання

1. Оцініть кількість статистичних даних, яка необхідна для визначення коефіцієнта кореляції r_{xy} з похибкою 1%.
2. Оцініть кількість даних, яка необхідна для побудови факторної моделі з трьома факторами.
3. Якщо x – вхідний сигнал системи, а y – вихідний, то кореляційну функцію слід розраховувати за формулою $\int\limits_0^\infty x(t-\tau)y(t)dt$, а не $\int\limits_0^\infty x(t)y(t-\tau)dt$. Чому?

Ключові слова

Статистична задача ідентифікації, кореляційний аналіз (1), функціональна залежність, статистичний зв'язок, коваріаційна функція, кореляційна функція, коефіцієнт кореляції (1), ергодичний процес, коефіцієнт детермінації, чутливість, множинне кореляційне відношення, множинний індекс кореляції, факторна дисперсія, залишкова дисперсія, спектральна щільність потужності, частотна передаточна функція, фактор, факторний аналіз, загальні фактори, характерний фактор, факторні навантаження, матриця вибіркових парних коефіцієнтів кореляції, залишковий коефіцієнт кореляції, адекватність факторної моделі, регресійний аналіз, функція регресії, крива регресії, коефіцієнт регресії, залишкова дисперсія, коефіцієнт множинної регресії, аналіз залишків, викид, тренд.

Література

1. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. - К.: Вища школа, 1988. - 359 с.
2. Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А., Решетникова И.О. Математическая статистика. 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Высш. школа, 1981. – 371с.
3. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных

условий. – М.: Наука, 1976. – 280с.
4. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. – 384с.

6.4. Інтелектуальні засоби моделювання

Інтелектуальний підхід до моделювання передбачає в першу чергу використання таких способів та особливостей побудови моделі, які підсвідомо використовує людина при створенні своєї уяви про навколишній світ. Серед них слід відзначити:

- поступове покращення моделі (навчання);
- використання відносно простих математичних операцій;
- образне уявлення про навколишній світ.

На сьогоднішньому етапі повністю відтворити людську свідомість неможлива, але деякі засоби мають з нею певну схожість. До таких засобів можна віднести нейронні мережі [1, 2], нечіткі моделі, моделі на основі продукційних правил тощо.

Нейронною мережею називають структуру, що складається зі зв'язаних між собою нейронів.

Нейрон (рис.6.5) – це складова частина нейронної мережі. Він складається з елементів трьох типів. Елементи нейрона - множники (синапси), суматор і нелінійний перетворювач. *Синапси* здійснюють зв'язок між нейронами, множать вхідний сигнал на число, що характеризує силу зв'язку, - вагу синапсу. *Суматор* виконує додавання сигналів, що надходять по синоптичних зв'язках від інших нейронів, і зовнішніх вхідних сигналів. *Нелінійний перетворювач* реалізує нелінійну функцію одного аргументу - виходу суматора. Ця функція називається *"функція активації"* (рис.6.6).

Нейрон у цілому реалізує скалярну функцію векторного аргументу. Математична модель нейрона:

$$S = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i + b$$

$$y = f(S)$$

де w_i - вага синапсу, ($i=1,2...N$);
b - значення зсуву;
S - результат підсумовування;
x_i - компонента вхідного вектора (вхідний сигнал), ($i=1,2,...N$);
y - вихідний сигнал нейрона;
N - число входів нейрона;

f - нелінійне перетворення (функція активації).

У загальному випадку вхідний сигнал, вагові коефіцієнти і значення зсуву можуть приймати дійсні значення. Вихід (y) визначається видом функції активації і може бути як дійсним, так і цілим. У багатьох практичних задачах входи, ваги і зсуви можуть приймати лише деякі фіксовані значення.

Синаптичні зв'язки з додатними вагами називають *збудливими,* з від'ємними вагами - *гальмівними.*

Описаний обчислювальний елемент можна вважати спрощеною математичною моделлю біологічних нейронів - клітин, з яких складається нервова система людини і тварин.

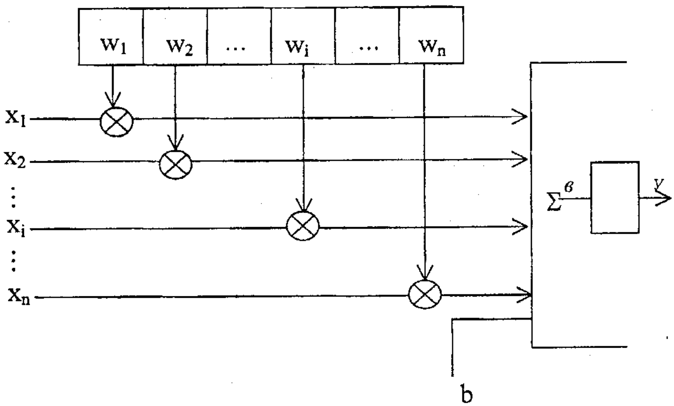


Рис. 6.5. Схема нейрона

На вхідний сигнал (s) нелінійний перетворювач відповідає вихідним сигналом $y=f(s,p)$. Тут p - параметр чи набір параметрів, від яких залежить функціонування перетворювача. Приклад характеристики нейрона зображений на рис. 6.6.

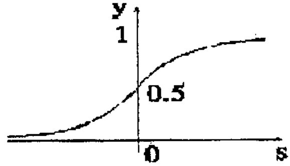


Рис. 6.6. Сигмоїдна функція активації

Нейронні мережі можуть мати різні архітектури. Можна виділити три основних типи нейтронних мереж:

- повнозв'язні мережі (рис.6.7,а),

- багатошарові мережі (рис.6.7,б),
- слабкозв'язні мережі (мережі з локальними зв'язками, рис.6.7,в).

У *слабкозв'язних* мережах нейрони розташовуються у вузлах прямокутних ґрат. Кожен нейрон зв'язаний з чотирма чи вісьма своїми найближчими сусідами.

У *повнозв'язній* мережі кожен нейрон зв'язаний із всіма іншими (на входи кожного нейрона подаються вихідні сигнали інших нейронів).

У *багатошарових* мережах нейрони об'єднуються в шари. *Шар* - це сукупність нейронів с єдиним вхідним сигналом. Зовнішні вхідні сигнали подаються на входи нейронів першого шару, а виходами мережі є вихідні сигнали останнього шару. Крім вхідного і вихідного шарів у багатошарової нейронної мережі є один чи декілька проміжних (схованих) шарів. Вхід нейронної мережі можна розглядати як вихід "нульового шару" вироджених нейронів. Зв'язки від виходів нейронів деякого шару m до входів нейронів наступного шару $(m+1)$ називаються *послідовними.*

Якщо нейрони кожного шару мережі мають єдину функцію активації, то таку нейронну мережу будемо називати *однорідною.*

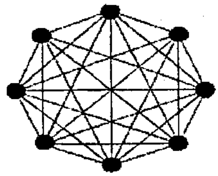
Нейронні мережі з локальними зв'язками. Нейрони в таких мережах розташовуються у вузлах прямокутних ґрат. Кожен нейрон зв'язаний з невеликим числом (4 чи 8) своїх топологічних сусідів.

Неструктуровані нейронні мережі. До цієї групи відносяться всі моделі нейронних мереж, які не можна віднести ні до однієї з попередніх груп.

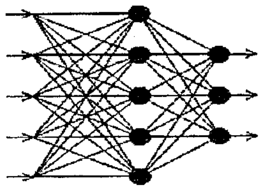
Кожна група моделей нейронних мереж може бути використана для розв'язання лише деякого обмеженого класу практичних задач. Так багатошарові і повнозв'язні нейронні мережі з сигмоїдними функціями використовуються для розпізнавання образів і адаптивного керування; нейронні мережі з локальними зв'язками - для обробки зображень і деяких інших задач. Для розв'язання задач лінійної алгебри використовуються багатошарові мережі.

Лише для невеликого числа моделей нейронних мереж існує строге математичне обґрунтування можливості їх застосування для розв'язання конкретних практичних задач. Найбільшою мірою теоретично пророблені двошарові нейронні мережі з сигмоїдними функціями. На основі теореми Колмогорова-Арнольда доведено, що такі мережі можуть реалізовувати будь-які відображення вхідного сигналу у вихідний.

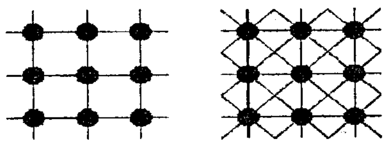
Апаратна реалізація нейронної мережі може бути виконана на нейрочіпах (мікросхемах, що містить фрагменти нейронних мереж), на НВІС-пластинах чи оптоелектронним способом.



а)



б)



в)

Рис. 6.7. Архітектури нейронних мереж: а) повнозв'язна мережа, б) багатошарова мережа з послідовними зв'язками, в) слабкозв'язні мережі

Нейронна мережа може бути реалізована не тільки апаратно, але й програмно, у вигляді відповідного алгоритму.

Для побудови нейронної мережі, орієнтованої на розв'язання конкретної задачі, використовуються процедури формування нейронних мереж. Ці процедури забезпечують введення характеристик моделей нейронів і структур нейронних мереж. Як правило, у кожній окремій програмі реалізована лише частина з описаних моделей нейронів і нейронних мереж.

Для того, щоб нейрона мережа набула здатності розв'язувати конкретну задачу, необхідно провести настроювання параметрів мережі – *навчання нейронної мережі.* Настроювання здійснюється за навчальною вибіркою, що складається з пар (<вхід>, <бажаний вихід>) - навчальних прикладів.

Наразі відсутня універсальна методика побудови навчальних вибірок. Набір навчальних прикладів формується на розсуд користувача програми моделювання нейронних мереж індивідуально для кожної конкретної розв'язуваної задачі.

Якщо в ненавчену нейронну мережу ввести вхідний сигнал одного з прикладів навчальної вибірки, то вихідний сигнал мережі буде істотно відрізнятися від бажаного вихідного сигналу, визначеного в навчальній вибірці. Функція помилки чисельно визначає подібність всіх поточних вихідних сигналів мережі і відповідних бажаних вихідних сигналів навчальної вибірки. Найбільш розповсюдженою функцією помилки є середньоквадратичне відхилення.

Мета навчання - мінімізувати функцію помилки, тобто знайти такі значення параметрів мережі, при яких поточні вихідні сигнали мережі мінімально відрізняються від відповідних бажаних вихідних сигналів, заданих навчальною вибіркою. Отже, задача навчання є задачею оптимізації.

Навчання - це ітераційна процедура, яка при реалізації на звичайних комп'ютерах, вимагає значного часу. Алгоритми навчання істотно розрізняються за швидкістю збіжності. Однією з найважливіших характеристик програм для моделювання нейронних мереж є швидкість збіжності алгоритмів навчання, що реалізовані в програмі.

Для перевірки навичок, придбаних мережею в процесі навчання, використовується *імітація функціонування мережі.* У мережу вводиться деякий сигнал, що, як правило, не збігається із жодним з вхідних сигналів навчальної вибірки. Далі аналізується отриманий вихідний сигнал мережі. Тестування навченої мережі може проводитися на поодиноких вхідних сигналах, або на контрольній вибірці, що має структуру, аналогічну навчальній вибірці, і також складається з пар (<вхід>, <бажаний вихід>). Контрольна вибірка будується користувачем індивідуально для кожної розв'язуваної задачі.

Ще одним інтелектуальним засобом моделювання є *нечітка ідентифікація* математичної моделі.

Побудова нечіткої функціональної залежності від нечітких змінних у вигляді системи рівнянь для обчислення значень функції належності здійснюється на основі *бази знань.*

Для цього з *бази нечітких даних* вибираються рядки з однаковими значеннями функції і з них утворюється *диз'юнктивна нормальна форма*

$$\forall y_j \in Y : \mu_y\left(y = y_j\right) = \bigcup_{j:y=y_j} \bigcap_{i=1}^{5} \mu_{x_{ij}}$$

Операція $\bigcap$ виконується шляхом пошуку мінімуму, а операція $\bigcup$ - шляхом пошуку максимуму.

Нехай, наприклад, дані про незалежні нечіткі аргументи оцінені *експертами* і занесені до таблиці 6.2. Якісні фактори можуть бути оцінені термами {"відсутній", "малий", "нижче середнього", "середній", "вище середнього", "великий"}, яким для зручності ставиться у відповідність шкала з діапазону (1- 6).

Таблиця 6.2

Номер правила	**Вхідні дані**					**Результат**
j	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**y**
1	5	4	4	5	5	4
2	2	3	1	5	4	2
3	3	3	2	4	5	3
4	5	5	5	5	4	4
5	2	3	1	5	3	1
6	2	3	2	4	3	2
7	4	4	4	6	2	6
8	4	3	4	5	3	3
9	4	4	3	3	2	5
10	3	3	5	3	4	3

Припустимо, що всі експерти, які надавали наведені дані, мають однаковий *ступінь впевненості* в кожному з них, який можна подати у вигляді трикутної функцій належності

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \dfrac{D/2 - x_i + x}{D/2}, & \max\left(1, x_i - D/2\right) \le x \le x_i \\ \dfrac{D/2 + x_i + x}{D/2}, & x_i \le x \le \min\left(D, x_i + D/2\right) \end{cases},$$

де D – діапазон *шкали* (у нашому випадку D=6).

Нехай тепер задана інша *експертна оцінка* аргументів

Таблиця 6.3

x_{10}	**x_{20}**	**x_{30}**	**X_{40}**	**x_{50}**	**y**
3	4	2	2	5	

Визначимо для цього набору аргументів *функцію належності* результату.

Користуючись даними таблиці 6.2, знаходимо $\mu_y(y=1...6)$.

$$\mu_y(y=1) = \max_{j:y_j=1}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right] = \max_{j=5}[\min(\mu_{x_{15}=2}(x_{10}=3), \mu_{x_{25}=3}(x_{20}=4),$$

$$\mu_{x_{35}=1}(x_{30}=2), \mu_{x_{45}=5}(x_{40}=2), \mu_{x_{55}=3}(x_{50}=5))] = \max_{j=5}\left[\min(0.7, 0.7, 0.7, 0,1)\right] =$$

$$= \max[0] = 0;$$

$$\mu_y(y=2)=\max_{j:y_j=2}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=\max_{j=2,6}\{\min[\mu_{x_{12}=2}(x_{10}=3),\mu_{x_{22}=3}(x_{20}=4),$$

$$\mu_{x_{32}=1}(x_{30}=2),\mu_{x_{42}=5}(x_{40}=2),\mu_{x_{52}=4}(x_{50}=5)],\min[\mu_{x_{16}=2}(x_{10}=3),\mu_{x_{26}=3}(x_{20}=4),$$

$$\mu_{x_{36}=2}(x_{30}=2),\mu_{x_{46}=4}(x_{40}=2),\mu_{x_{56}=3}(x_{50}=5)]\}=$$

$$=\max_{j=2,6}\left[\min_{j=2}(0.7,0.7,0.7,0,0.7),\min_{j=6}(0.7,0.7,1,0.3,0.3)\right]=\max[0,0.3]=0.3.$$

Аналогічно

$$\mu_y(y=3)=\max_{j:y_j=3}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=\max_{j=3,8,10}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=$$

$$=\max\left[\min_{j=3}(0.3,0.7,1,0.3,1),\min_{j=8}(0.7,0.7,0.3,0,0.3),\min_{j=10}(1,0.7,0,0.7,0.7)\right]=$$

$$=\max[0.3,0,0]=0.3;$$

$$\mu_y(y=4)=\max_{j:y_j=4}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=\max_{j=1,4}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=$$

$$=\max\left[\min_{j=1}(0.3,1,0.3,0,1),\min_{j=4}(0.3,0.7,0,0,0.7)\right]=\max[0,0]=0;$$

$$\mu_y(y=5)=\max_{j:y_j=5}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=\max_{j=9}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=$$

$$=\max\left[\min(0.7,1,0.7,0.7,0)\right]=\max[0]=0;$$

$$\mu_y(y=6)=\max_{j:y_j=6}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=\max_{j=7}\left[\min_{i=1}^{5}\mu_{x_{ij}}(x_{i0})\right]=$$

$$=\max\left[\min(0.7,1,0.3,0,0)\right]=\max[0]=0.$$

Таким чином, функція належності має вигляд рис.6.8.

З графіка видно, що найможливіший рівень значення функції для даного прикладу є 2,5, тобто між "малим" і "нижче середнього". Конкретний результат моделювання отримується за допомогою операції *дефаззифікації*. Ця операція може здійснюватися різними способами і давати відповідно різні результати. Так наприклад, за результат можна прийняти значення, якому відповідає максимум функції належності, або середнє значення, яке отримується аналогічно математичному сподіванню.

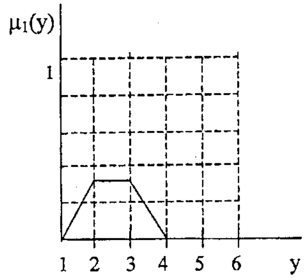


Рис 6.8. Функція належності результату моделювання

Отже, база знань у поєднанні з методикою логічного висновку є нечіткою моделлю системи. Але така її форма може ускладнити подальше застосування моделі, наприклад, для розв'язання задач екстраполяції, оптимізації тощо. Бажано подати нечітку модель, отриману у вигляді бази даних, у аналітичному вигляді.

У найпростішому випадку можна скористатися *лінеаризованою формою* моделі в околі точки з номінальними значеннями параметрів

$$y = \sum_i c_i x_i$$

Для отримання *коефіцієнта лінеаризації* функції від i-го фактора необхідно:

- керовані показники зафіксувати у базових значеннях x_{i0};
- обчислити функцію належності результату y;
- знайти точку максимуму y_0;
- фактор x_i змінити на один крок - надати значення сусіднього терму x_{i0}*;
- обчислити функцію належності результату y_0*;
- знайти точка максимуму y_0*;
- знайти коефіцієнт лінеаризації за формулою

$$c_i = \frac{y_0^* - y_0}{x_{i0}^* - x_{i0}}.$$

Якщо терми фактора x_i задані лінгвістично, то $x_{i0}^* - x_{i0} = 1$.

Ідентифікація моделі в умовах комбінованої стохастичної і нечіткої невизначеності вимагає поєднання статистичних і нечітких методів.

Як відзначено у розділі 6.2, основна модель факторного аналізу має вигляд лінійної комбінації загальних факторів V_i і характерних факторів U_k

$$Z_j = \sum_i a_{ji} V_i + \sum_k d_{jk} U_k \qquad (6.23)$$

де Z_j - j-а ознака. В нашому випадку таких ознак дві: Z_1 – конкурентоспроможність, Z_2 – прибуток;

a_{ji}, d_{jk} – факторні навантаження, які б характеризували сутність впливу кожного фактора (параметри моделі, які підлягають визначенню);

Оскільки термін "загальний фактор" підкреслює, що кожен такий фактор має суттєве значення для аналізу всіх ознак на всіх підприємствах і, відповідно, щодо впливу цих факторів може бути зібрана певна статистика. Відповідно щодо впливу „характерного фактора" статистика не може бути зібрана і необхідно користуватися експертними даними.

Лінійність форми (6.23) дещо обмежує адекватність моделі. У той же час існує можливість підвищення адекватності за рахунок евристичних даних про залежність між ознаками і факторами. Для врахування таких даних будемо розглядати кожен фактор V_i та U_k як формальний, який є евристичною функцією від одного чи декількох реальних факторів Φ_r.

$$V_i = f_i\{\Phi_r\};$$
$$U_k = f_k\{\Phi_r\};$$

Таким чином, можна сформулювати методику побудови моделі в умовах комбінованої невизначеності:

1. Виділення повної множини реальних факторів впливу $\{\Phi_r\}$;
2. Аналіз евристичних залежностей між реальними і формальними факторами;
3. Розділення факторів на дві підмножини: підмножину загальних факторів, за якими може бути отримана статистика, і підмножину характерних факторів, для яких необхідно використовувати експертні дані;
4. Отримання факторних навантажень a_{ji} загальних факторів методами факторного аналізу;
5. Отримання факторних навантажень d_{jk} характерних факторів методами нечіткої математики;
6. Перевірка *адекватності* факторної моделі.

Деякі моделі можуть бути отримані еволюційними методами. Такі методи використовуються при моделюванні складних систем, для яких відомі закони розвитку і початковий стан. Еволюційне моделювання близьке за змістом до прогнозування, але відрізняється дуже великою розмірністю задачі. Такий спосіб моделювання незамінний при синтезі і ідентифікації моделей замкнених екосистем, космічних об'єктів, розповсюдження епідемій тощо. Однією з найбільших проблем еволюційного моделювання є великий обсяг розрахунків. Для його реалізації використовуються найпотужніші комп'ютери, а у відповідальних випадках – суперкомп'ютери.

Контрольні питання

1. Складіть загальний аналітичний вираз перетворення, яке виконує двохшарова нейронна мережа.
2. Побудуйте нейронну мережу для моделювання розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Який вигляд повинна мати їх функція активації?
3. Як впливає довіра до експерта на вигляд функції належності експертної оцінки?
4. Сформулюйте задачу ідентифікації моделі в умовах комбінованої невизначеності в операторному вигляді з використанням узагальнюючих функцій.

Ключові слова

Нейронна мережа, нейрон, синапс, суматор, функція активації, навчання нейронної мережі (1 2), імітація функціонування мережі, нечітка ідентифікація, база знань, база нечітких даних, диз'юнктивна нормальна форма, експерт, ступінь упевненості, шкала, експертна оцінка, функція належності (1 2), лінеаризована форма, коефіцієнт лінеаризації, комбінована стохастична і нечітка невизначеність, адекватність моделі.

Література

1. Открытые системы, 1997, №04 / www.osp.ru
2. Інтернет-сайт www.besegroup.ru
3. Мітюшкін Ю.І., Мокін Б.І., Ротштейн О.П. Soft Computing: ідентифікація закономірностей нечіткими базами знань. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002. – 145 с.
4. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999. – 320 с.
5. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам : Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 388с.
6. Паралельно-ієрархічне перетворення як системна модель оптико-електронних засобів штучного інтелекту. /Кол. авт. під заг. ред. В.П.Кожем'яко. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 324с.
7. Кику А.Г., Костюк В.И. и др. Адаптивные системы идентификации. – К.: Техніка, 1975. – 288с.

7. ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ МОДЕЛЮВАННЯ

Процес математичного моделювання переважно виконується на комп'ютерах або вбудованих контролерах. Для цього використовуються різноманітні інструментальні програмні засоби та середовища (Eureka, Mercury, MatLAB, Mathematica 2 і 3, Maple й інші), що суттєво спрощують моделювання.

7.1. Імітаційне моделювання

Імітаційне моделювання – це експеримент зі складною математичною моделлю, яка описує поведінку системи, що реалізується на ЕОМ [4]. Найширше розповсюдженим способом побудови імітаційної моделі є *статистичне моделювання.*

Статистичне моделювання полягає в проведенні *чисельного експерименту* з функціональною моделлю. Методика статистичного моделювання включає в себе ряд послідовних етапів [4-6]:

- моделювання на ЕОМ випадкових сигналів у вигляді числових послідовностей із заданою кореляцією і законом розподілення ймовірностей, які імітують вхідні сигнали і збурювальні впливи;
- моделювання перетворення сигналів;
- статистична обробка результатів моделювання.

Питання моделювання перетворення сигналів та статистичної обробки результатів моделювання розглянуті вище. Розглянемо детальніше найскладніший з етапів – моделювання на ЕОМ *випадкових числових послідовностей* із заданими законами розподілу ймовірностей та кореляційними функціями [1].

Відомий метод отримання числових послідовностей з допомогою *сортування* вихідних послідовностей. Метод ґрунтується на тому, що коефіцієнт кореляції випадкових чисел залежить більше від порядку їх розташування, ніж від величини. Саме тому дві випадкових послідовності, що відповідають двом різним розподіленням, у випадку, якщо вони впорядковані приблизно однаково, будуть мати приблизно рівні коефіцієнти кореляції.

У відповідності до методу сортування генерується випадкова послідовність $X(k)$ із заданою *кореляційною функцією*, але довільним розподілом. У відповідність до неї ставиться послідовність цілих чисел $I(k)=k$. Потім обидві послідовності попарно сортуються. При цьому величини $X(k)$ розташовуються за зростанням, а масив $I(k)$ «запам'ятовує» їх попереднє положення (місце в несортованому масиві $X(k)$). Таким чином, масив цілих чисел $I(k)$ відображає кореляцію між елементами масиву $X(k)$. Після впорядкування масив $X(k)$ цікавості не представляє, оскільки вся інформація про кореляційну функцію тепер знаходиться в масиві *I(k)*.

Потім генерується випадкова послідовність *Y(k)* із заданим *законом розподілу ймовірностей* і нульовою кореляцією і записується на місце масиву *X(k)*. Після цього вона сортується у зростаючому порядку. Далі масиви *I(k)* і *Y(k)* попарно сортуються, причому масив *I(k)* розташовується у зростаючому порядку. Схема алгоритму наведена на рис.7.1.

Рис.7.1. Алгоритм генерування випадкової числової послідовності із заданими статистичними характеристиками методом сортування

Алгоритм сортування доцільно використовувати в тих випадках, коли для моделювання достатньо невеликої кількості статистичних даних, що не потребує оперування числовими масивами великої розмірності. При великій розмірності цих масивів суттєво збільшується час моделювання.

Відомий алгоритм *фільтрації*, що потребує менших витрат машинного часу для отримання випадкового процесу із заданою кореляцією і законом розподілу ймовірностей [4, 7], який базується на використанні нормального стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ як початкового. Завжди існує таке нелінійне безінерційне перетворення $Y=W_N(X)$, яке перетворює нормальну функцію щільності $f_X(x)$ процесу $X(t)$ на задану $f_Y(y)$. Якщо вихідний процес $X(t)$ має кореляційну функцію $R_{xx}(\tau)$, то перетворений процес $Y(t)$ буде мати кореляційну функцію $R_{YY}(\tau)$, що відрізняється від функції $R_{XX}(\tau)$ і пов'язана з нею деякою залежністю $R_{YY}=J(R_{XX})$. Вигляд цієї залежності визначає перетворення $Y=W_N(X)$. Для того щоб кореляційна функція перетвореного процесу була заданою, необхідно вибрати кореляційну функцію вихідного процесу:

$$R_{XX}(\tau)=J^{1}[R_{YY}(\tau)]. \tag{7.1}$$

При використанні цього методу підготовча робота складається з таких етапів:

1. Знаходження функції перетворення $Y=W_N(X)$ за заданою функцією щільності $f_y(y)$.

2. Отримання за знайденою функцією $Y=W_N(X)$ залежності $R_{YY}=J(R_{XX})$.

3. Розв'язання рівняння $R_{YY}=J(R_{XX})$ відносно R_{XX}, тобто визначення кореляційної функції $R_{XX}(\tau)$ нормального вихідного процесу $X(t)$.

Після закінчення підготовчої роботи моделювання випадкового процесу із заданими характеристиками зводиться до формуванню дискретних реалізацій $X[n]$ нормального випадкового процесу $X(t)$ і перетворенню цих реалізацій за формулою

$$Y[n]=W_N\{X[n]\}. \tag{7.2}$$

Схема описаного алгоритму наведена на рис.7.2.

Описаний алгоритм потребує менших витрат машинного часу, ніж алгоритм сортування, не потребує накопичення і зберігання у пам'яті числових масивів великої розмірності. Недоліком методу є його складність для програмування і великий об'єм підготовчої роботи.

При використанні обох описаних алгоритмів виникає задача генерування на ЕОМ випадкових числових послідовностей із заданими законами розподілення і нульовою кореляцією та випадкових числових послідовностей із заданою кореляційною функцією та довільним розподіленням.

Задачу генерування випадкових чисел із заданим законом розподілення розв'язують в декілька етапів. Спочатку отримують послідовність рівномірно розподілених на інтервалі [0,1] випадкових чисел, а з неї послідовність випадкових чисел із заданим законом розподілення.

Виділяють три основних методи формування таких послідовностей:

1. Пряме перетворення числа x_i, яке є реалізацією випадкової величини X, що рівномірно розподілена на інтервалі [0,1] за допомогою деякої функції W_N у число y_i, яке може бути розглянуте як реалізація випадкової величини Y, що має заданий закон розподілення.

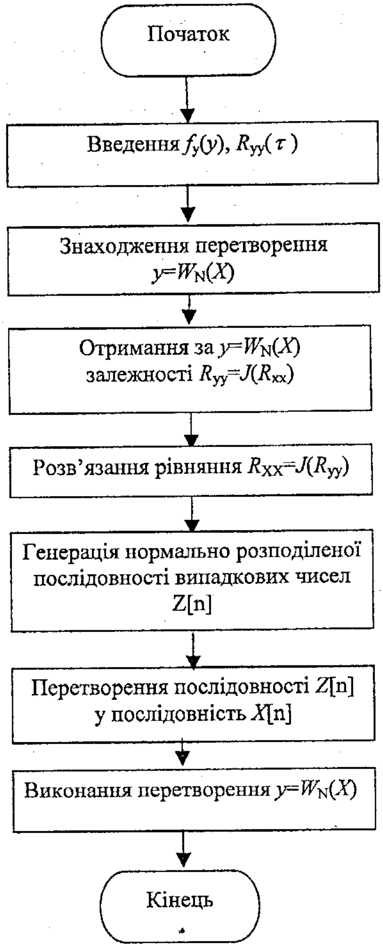


Рис.7.2. Алгоритм генерації псевдовипадкової числової послідовності із заданими статистичними характеристиками методом фільтрації

2. Відсіювання чисел із початкової послідовності рівномірно розподілених на інтервалі [0,1] випадкових чисел таким чином, щоб числа, які залишились, були розподілені за заданим законом.

3. Моделювання умов відповідних граничних теорем теорії ймовірності.

На практиці доцільно використовувати всі три методи формування.

Вибір оптимального методу визначається, виходячи з мети та задач моделювання та їх особливостей.

Контрольні питання

1. Які статистичні характеристики має випадкова числова послідовність, яка генерується стандартною програмною функцією *random*?
2. Як програмним шляхом на основі центральної граничної теореми отримати числову послідовність з нормальним розподілом ймовірностей?
3. Запропонуйте спосіб генерування двох взаємно корельованих послідовностей (Рекомендація: скористайтесь рівнянням регресії).
4. Оцініть обсяг чисельного експерименту, необхідний для отримання щільності розподілу результату моделювання у 20 точках зі зведеною похибкою не більше 2%.

Ключові слова

Імітаційне моделювання, статистичне моделювання, чисельний експеримент (1), випадкова числова послідовність, кореляційна функція, закон розподілу ймовірностей, сортування, фільтрація.

Література

1. Анализ измерительных информационных систем. / МаликовВ.Т. Дубовой В.М., Кветный Р.Н., Исматуллаев П.Р. – Ташкент: ФАН, 1984. – 176с.
2. Основы моделирования сложных систем. /Под ред. И.В.Кузьмина. – К.: Вища школа, 1981. – 369 с.
3. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Советское радио, 1971.
4. Основы кибернетики. / Под ред. К.А.Пупкова. – М.: Высшая школа, 1976.
5. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – наука и искусство. – М.: Мир, 1980.
6. Лившиц Н.А., Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. – М.: Советское радио, 1963.
7. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ : Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 584с.
8. Киндлер Е. Языки моделирования: Пер. с чеш. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 288с.

7.2. Моделювання в середовищах математичних пакетів

Одним з напрямків застосування програмного забезпечення є автоматизація дослідження й проектування систем. Це й не дивно, адже розробляючи такі системи фахівці з комп'ютерних наук намагалися в першу чергу розв'язати свої проблеми, полегшити свою працю. В результаті з'явилися дуже потужні математичні пакети, які постійно вдосконалюються і розвиваються.

7.2.1. Середовище MathCAD

Системи MathCAD можуть називатися найсучаснішими, універсальними і масовими математичними системами. Вони дозволяють виконувати як обчислення, так і *аналітичні (символьні) перетворення*, мають надзвичайно зручний математико-орієнтований інтерфейс і прекрасні засоби графіки.

З моменту своєї появи системи класу MathCAD мали зручний *інтерфейс користувача* – сукупність засобів спілкування з користувачем у вигляді вікон, які масштабуються і переміщуються, клавіш і інших елементів. У цієї системи є й ефективні засоби типової *наукової графіки*, вони прості в застосуванні й інтуїтивно зрозумілі. Системи MathCAD орієнтовані на масового користувача.

До засобів нових версій MathCAD відносяться настроювання під будь-який відомий тип друкуючого пристрою, багатий набір шрифтів, можливість використання всіх інструментів Windows, графіка і сучасний *багатовіконний інтерфейс*, включені ефективні засоби кольорового оформлення документів, створення анімаційних (рухливих) графіків і звукового супроводу. Текстовий, формульний і графічний редактори об'єднані з обчислювальними можливостями. Передбачено і можливість об'єднання з іншими математичними і графічними системами для розв'язання особливо складних задач. Звідси і назва таких систем - інтегровані системи.

Передбачено імпорт будь-яких графічних зображень - від простих і спеціальних графіків функцій до багатоколірних репродукцій художніх творів. Уведено засоби анімації малюнків і програвання відеофайлів зі звуковим стереофонічним супроводом. Це значно поліпшує візуалізацію складних розрахунків.

Усі версії MathCAD під Windows дозволяють працювати як з латинськими літерами, так і з кирилицею, грецьким алфавітом і взагалі з будь-якими символами, доступними Windows. Останні версії системи MathCAD дають нові засоби для підготовки складних документів. У них передбачене барвисте виділення окремих формул, різноманітний виклик одних документів з інших, можливість закриття окремих частин документів, *гіпертекстові* і гіпермедіа-переходи, об'єктно-орієнтоване програмування складних задач, при якому програма складається автоматично за завданням користувача, а саме завдання формулюється на природній математичній мові спілкування із системою.

Інтерфейс користувача системи створений так, що користувач, який має елементарні навички роботи з Windows-застосуваннями, може відразу почати роботу з MathCAD. Інтерфейс системи зовні дуже нагадує інтерфейс широко відомих текстових процесорів Word for Windows.

Основну частину екрана займає вікно редагування (рис.7.3). Вгорі вікна розташовані рядки з типовими елементами інтерфейсу. Верхній рядок – титульний. Другий рядок вікна системи - головне меню. Робота з документами MathCAD звичайно не вимагає обов'язкового використання можливостей головного меню, тому що основні з них дублюються кнопками швидкого керування. Панелі з ними знаходяться під рядком головного меню. Їх можна виводити на екран чи забирати з нього за допомогою відповідних опцій позиції View (Вигляд) головного меню Windows.

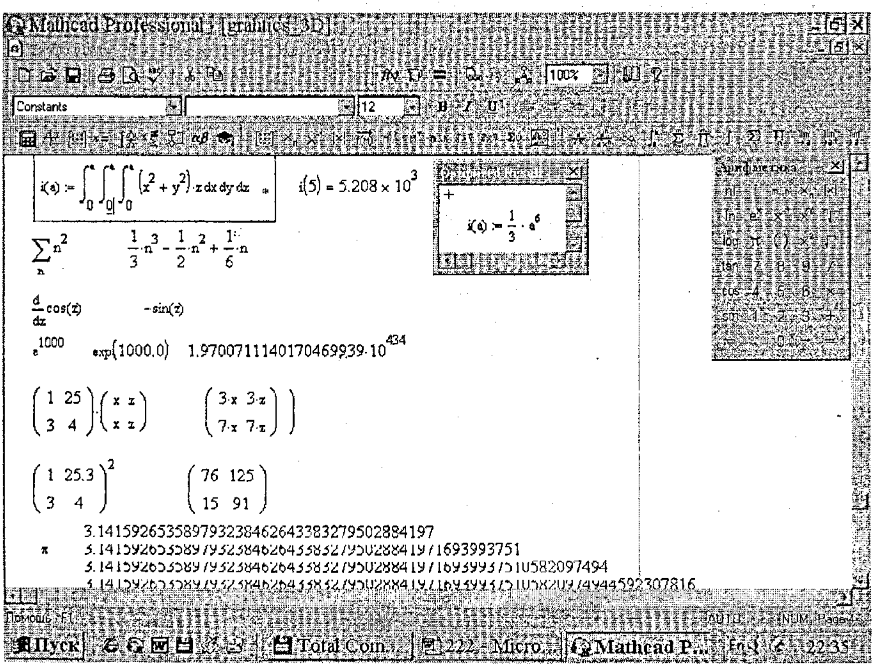


Рис. 7.3. Робочий екран системи MathCAD

Звичайно є також дві панелі: панель інструментів (яка дублює ряд найбільш розповсюджених команд і операцій) і панель форматування для вибору типу і розміру шрифтів і способу вирівнювання текстових коментарів (ці панелі видно на рис.7.4).

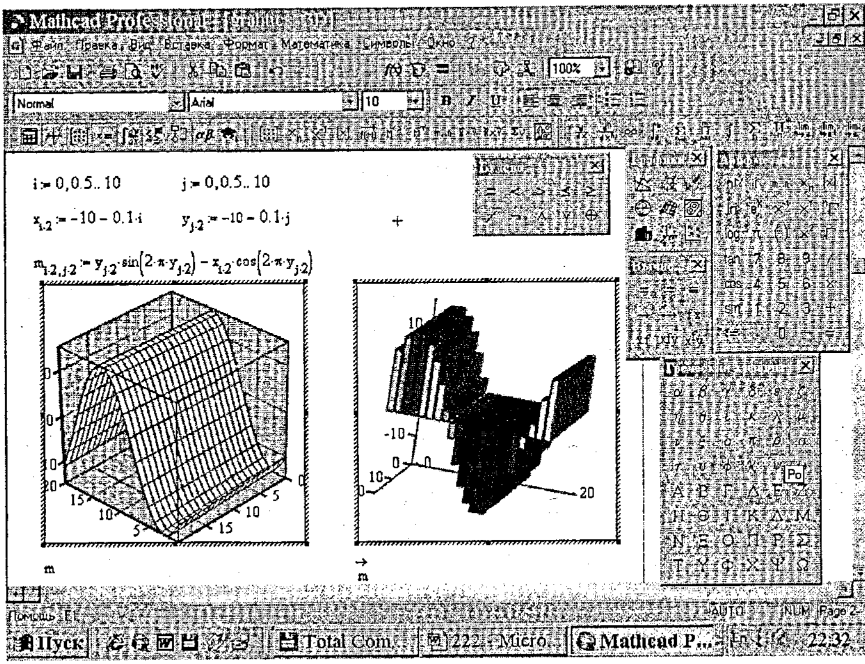


Рис.7.4. Графічні засоби MathCAD

У нових версіях використовуються більш зручні переміщувані *складальні панелі* (в оригіналі Palletes - палітри) з такими елементами, що показані на рис.7.4. За їх допомогою можна вводити в документи практично усі відомі математичні символи й оператори. Застосування панелей для вибору шаблонів математичних знаків дуже зручно, оскільки не треба запам'ятовувати різноманітні сполучення клавіш, що використовуються для введення спеціальних математичних символів.

У найпростішому випадку робота з системою MathCAD зводиться до підготовки у вікні редагування завдання на обчислення і встановлення форматів для їх результатів. Для цього використовуються різні прийоми підготовки блоків.

Система MathCAD надає великі можливості для моделювання систем керування. Так наприклад, вона дозволяє здійснювати пряме та обернене *перетворення Лапласа* у символьному вигляді. Це відкриває великі можливості моделювання *перехідних процесів* у системах. Послідовність моделювання перехідного процесу така (рис.7.5):

- з передаточної функції отримати його перехідну характеристику;
- в передаточній функції виділяємо змінну і в меню Symbolics->Transform обираємо обернене перетворення за Лапласом;
- отриманий вираз інтегруємо і отримуємо перехідну функцію.
- за допомогою панелі інструментів будуємо перехідну характеристику на основі перехідної функції.

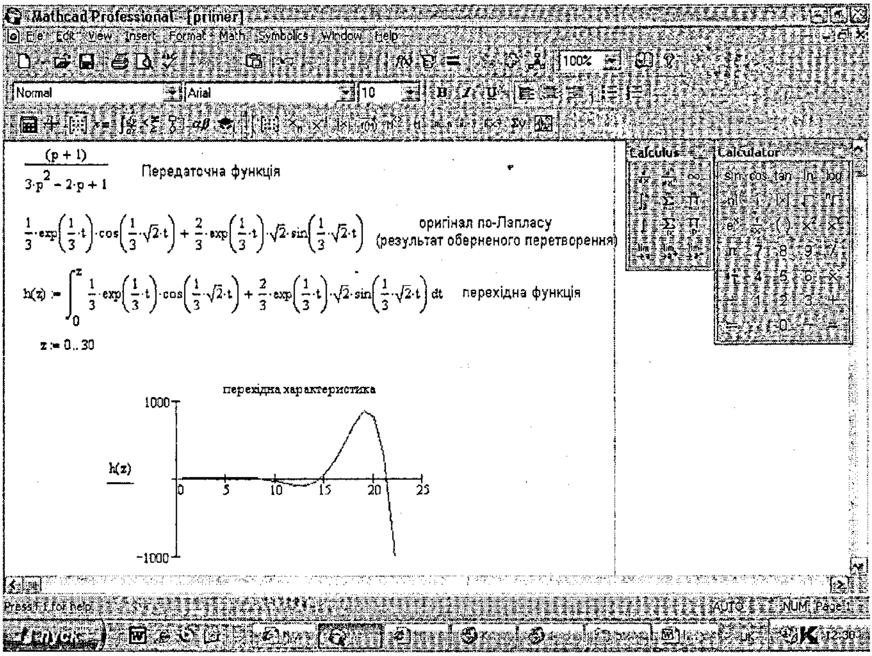


Рис.7.5. Приклад розрахунку перехідної характеристики

7.2.2. Середовище MATLAB

MATLAB - це високопродуктивний пакет для технічних розрахунків. Він містить у собі обчислення, візуалізацію і програмування в зручному середовищі, де задачі і розв'язки виражаються у формі, близькій до математичної. Типові використання MATLAB:

- математичні обчислення;
- створення алгоритмів;
- моделювання;
- аналіз даних, дослідження і візуалізація;
- наукова й інженерна графіка;

- розробка застосувань, включаючи створення графічного інтерфейсу;

MATLAB - інтерактивна система, в якій основним елементом даних є масив. Це дозволяє розв'язувати різні задачі, пов'язані з технічними обчисленнями, особливо ті, в яких використовуються матриці і вектори, у кілька разів швидше, ніж при написанні програм з використанням "скалярних" мов програмування, таких як Сі.

У MATLAB важлива роль приділяється спеціалізованим групам програм, які називаються toolboxes. Вони дозволяють застосовувати спеціалізовані методи. Toolboxes - це колекція функцій MATLAB (М-файлів), що дозволяють розв'язувати окремі класи задач. Toolboxes застосовуються для обробки сигналів, моделювання систем контролю, нейронних мереж, нечіткої логіки тощо.

Система MATLAB складається з п'яти основних частин:

1. *Мова MATLAB*. Це мова матриць і масивів високого рівня з керуванням потоками, функціями, структурами даних, введенням-виведенням.

2. *Середовище MATLAB* . Це набір інструментів і пристосувань, з якими працює користувач чи програміст MATLAB. Воно містить у собі засоби для керування змінними в робочому просторі MATLAB, введення і виведення даних, а також створення, контролю і налагодження М-файлів і застосувань MATLAB.

3. *Керована графіка*. Це графічна система MATLAB, що містить у собі команди високого рівня для візуалізації дво- і тривимірних даних, обробки зображень, анімації й ілюстративної графіки. Вона також містить у собі команди низького рівня, що дозволяють редагувати зовнішній вигляд графіки.

4. *Бібліотека математичних функцій*. Це велика колекція обчислювальних алгоритмів від елементарних функцій, таких як сума, синус, косинус, комплексна арифметика, до більш складних, таких як обернення матриць, знаходження власних значень, функції Бесселя, швидке перетворення Фур'є.

5. *Програмний інтерфейс*. Це бібліотека, що дозволяє писати програми на Сі, які взаємодіють з MATLAB. Вона включає засоби для виклику програм з MATLAB (динамічний зв'язок), викликаючи MATLAB як обчислювальний інструмент, і для читання-запису Мат-файлів.

Simulink, програма, що супроводжує MATLAB, - це інтерактивна система для моделювання нелінійних динамічних систем. Вона являє собою середовище, кероване мишею, що дозволяє моделювати процес шляхом перетаскування блоків діаграм на екрані і маніпуляції ними. Simulink працює з лінійними, нелінійними, безперервними, дискретними, багатовимірними системами.

Blocksets - це доповнення до Simulink, що забезпечують бібліотеки блоків для спеціалізованих застосувань, таких як зв'язок, обробка сигналів, енергетичні системи.

Real-Time Workshop - це програма, що дозволяє генерувати Сі-код з блоків діаграм і запускати їх на виконання на різних системах реального часу.

Операційне середовище системи MATLAB - це інтерфейс, що підтримує зв'язок цієї системи із зовнішнім світом – діалог з користувачем через командний рядок чи графічний інтерфейс, перегляд робочої області і шляхів доступу, редактор і відлагоджувальник М-файлів, робота з файлами й оболонкою DOS, експорт і імпорт даних, інтерактивний доступ до довідкової інформації, динамічна взаємодія із зовнішніми системами Microsoft Word, Excel Microsoft Word, Excel тощо. Реалізуються інтерфейси через командне вікно, інструментальну панель, системи перегляду робочої області і шляхів доступу, редактор М-файлів, спеціальні меню і т.д.

Командне вікно системи MATLAB показане на рис.7.6. Тут же показане низхідне меню File.

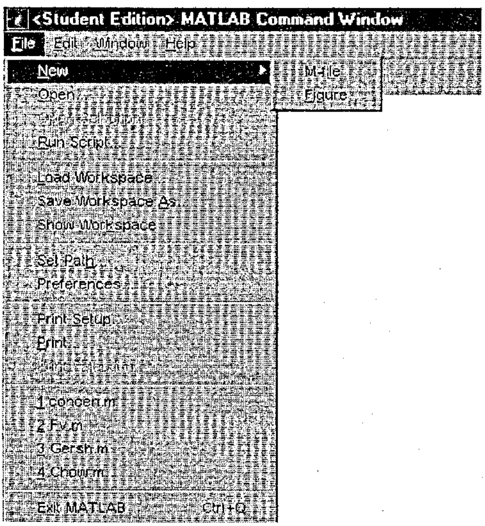


Рис.7.6. Вікно команд MATLAB

Інструментальна панель командного вікна системи MATLAB дозволяє забезпечити простий доступ до операцій над М-файлами (рис.7.7)

Редактор М-файлів M-file Editor/Debugger може бути викликаний з командного рядка командою "edit" чи "edit <ім'я М-файла>".

Інструментальна панель командного вікна цього редактора показана на рис.7.8

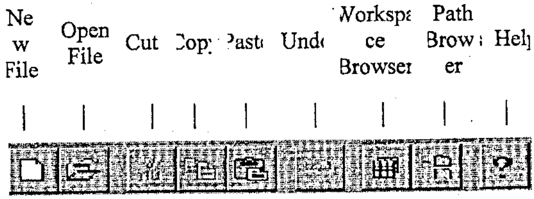


Рис.7.7. Інструментальна панель

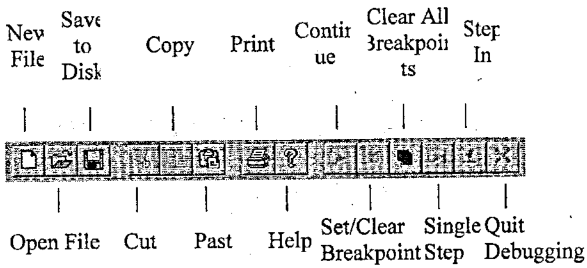


Рис.7.8. Панель редактора

Робоча область системи MATLAB – це область пам'яті, в якій розміщені змінні системи. Вміст цієї області можна переглянути з командного рядка за допомогою команд “who” і “whos”. Команда “who” виводить тільки імена змінних, а команда “whos” – інформацію про розміри масивів і тип змінної.

Розглянемо як приклад 5 масивів різного типу:

- A - тривимірний масив чисел подвоєної точності;
- B - масив розрідженої структури;
- З - масив осередків;
- S - масив символів;
- patient - масив записів.

Спеціальний засіб перегляду Workspace Browser забезпечує зображення команди “whos” у вигляді графічного інтерфейсу. Для того щоб відкрити Workspace Browser треба або вибрати опцію Show Workspace з меню File menu, або скористатися кнопкою Workspace Browser інструментальної панелі. У результаті цих операцій на екран буде виведене наступне вікно (рис.7.9)

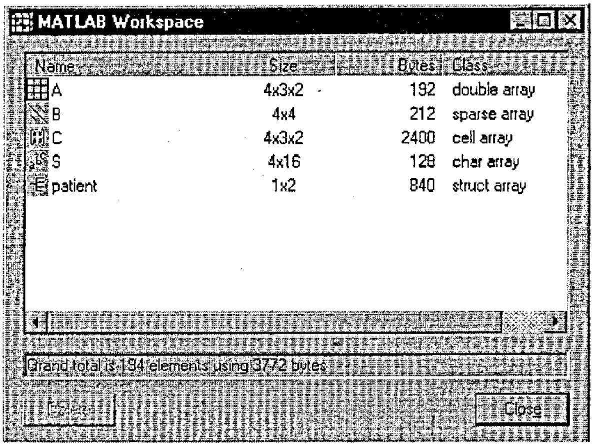


Рис.7.9. Вікно перегляду структур даних

Існують такі способи одержання інформації про функції системи MATLAB у процесі роботи:

- команда help;
- команда lookfor;
- меню Help;
- перегляд і виведення на друк сторінок документації;
- звертання до Web-сервера фірми The MathWorks

Меню Help командного вікна системи MATLAB показане на рис.7.10:

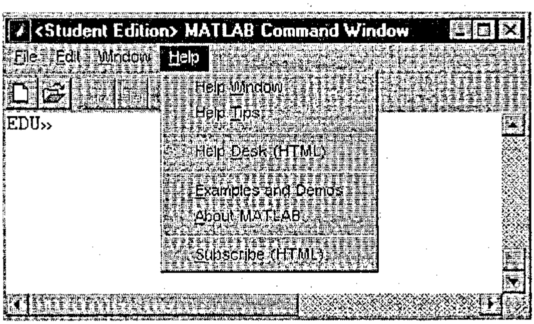


Рис.7.10. Довідкова система

Контрольні питання

1. Дана САУ другого порядку. Побудуйте її перехідну характеристику двома способами: шляхом розв'язання диференціального рівняння чисельними методами і за допомогою символьних перетворень. Порівняйте результати.

Ключові слова

Інтерфейс користувача, багатовіконний інтерфейс, гіпертекст, наукова графіка, складальні панелі, аналітичні (символьні) перетворення, перетворення Лапласа, перехідний процес, мова MATLAB, середовище MATLAB, бібліотека математичних функцій.

Література

1. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н. Основи застосування ЕОМ в інженерній діяльності. – К.: ІСД МО України, 1994. – 285с.
2. Дьяконов В. MATLAB 6: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 592с.

7.3.Можливості моделювання у системі Microsoft Office

Розуміючи важливість моделювання при розв'язанні найпоширеніших задач, розробники найпопулярнішого пакета Microsoft Office передбачили таку можливість у цій системі. Головним чином, вона ґрунтується на використанні *табличного процесора* Excel та мови Visual Basic for Application, призначеної для програмування застосувань Microsoft Office.

Процесор Excel містить *інтерпретатор формул*, який дозволяє виконувати розрахунки практично необмеженої складності. Вікно для вибору функцій, що можуть бути використані у формулах, наведене на рис.7.11. Використання мови Visual Basic дозволяє ще розширити можливості Excel, створюючи складні логічні та циклічні алгоритми обчислень.

Різноманітні вбудовані засоби побудови *графіків* і *діаграм*, наведені на рис.7.12, дозволяють здійснити просту і наочну візуалізацію результатів моделювання.

Контрольні питання

1. Дана САУ другого порядку. Побудуйте її перехідну характеристику за допомогою табличного процесораExcel.

Ключові слова

Табличний процесор (1), інтерпретатор формул, графік, діаграма.

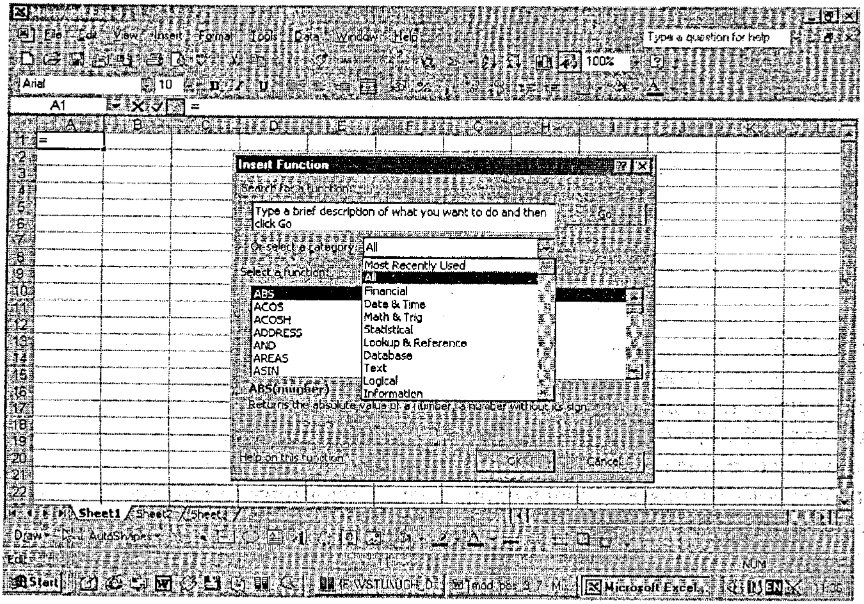


Рис.7.11. Математичні функції Excel

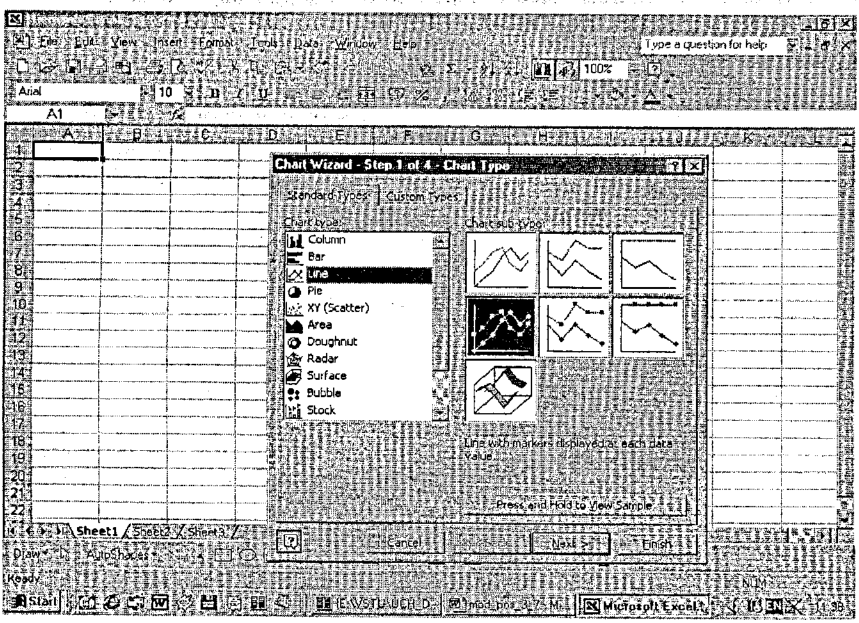


Рис.7.12. Графічні засоби Excel

Література

1. Новиков Ф.А., Яценко А.Д. Microsoft Office в целом. – СПб.: BHV, 1995. – 336с.
2. Гетц К., Джилберт М. Программирование в Microsoft Office. Для пользователя: Пер. с англ. – К.: BHV, 2000. – 384с.

7.4. Спеціалізовані засоби моделювання

Математичні моделі, що реалізуються за допомогою математичних пакетів MathCAD, MATLAB, Simulink та інших зручні, їх можна легко модифікувати, для виконання математичних перетворень та обчислень в цих пакетах існують готові стандартні засоби. Але розмаїття задач, які виникають при дослідженні і застосуванні моделей, значно ширше за можливості будь-якого пакета. Так наприклад, застосуванню стандартних пакетів у системах автоматичного керування реального часу перешкоджає, як правило, занизька швидкодія, а у вбудованих системах на базі контролерів ці пакети взагалі не працюють, оскільки для їх застосування необхідна відповідна операційна система.

У таких випадках для моделювання розробляють спеціалізовані програми, для написання яких використовують *універсальні мови програмування*. Останнім часом переважно використовують мову C++, інколи Pascal. При створенні моделей для персонального комп'ютера використовують відповідні *системи автоматизації програмування* Visual C++ та Delphi.

Суттєвою перевагою застосування сучасних мов програмування для створення моделей систем є використана при їх побудові концепція *об'єктно-орієнтованого програмування*. Така концепція ідеально відповідає агрегатному підходу до організації моделі з одного боку і ідеї про модель як певну алгебраїчну систему з іншого. Використання такого підходу спонукає дослідника до чітких визначень, зменшує ймовірність помилок і сприяє забезпеченню адекватності моделі.

Середовища візуального програмування містять спеціальні засоби для контролю та зручного відображення *структури проекту програмної моделі*. Приклад вікна для перегляду структури проекту показані на рис.7.13.

Бібліотеки мов візуального програмування містять також багато зручних компонентів, що забезпечують візуалізацію результатів моделювання у вигляді таблиць і графіків, їх збереження у файлах тощо.

Контрольні питання

1. Які універсальні мови програмування Ви знаєте?

2. Порівняйте модель у вигляді об'єктно-орієнтованої програми з агрегатною моделлю. Виділіть спільні і відмінні аспекти.

Ключові слова

Універсальна мова програмування (1), система автоматизації програмування, структура проекту програмної моделі, об'єктно-орієнтоване програмування.

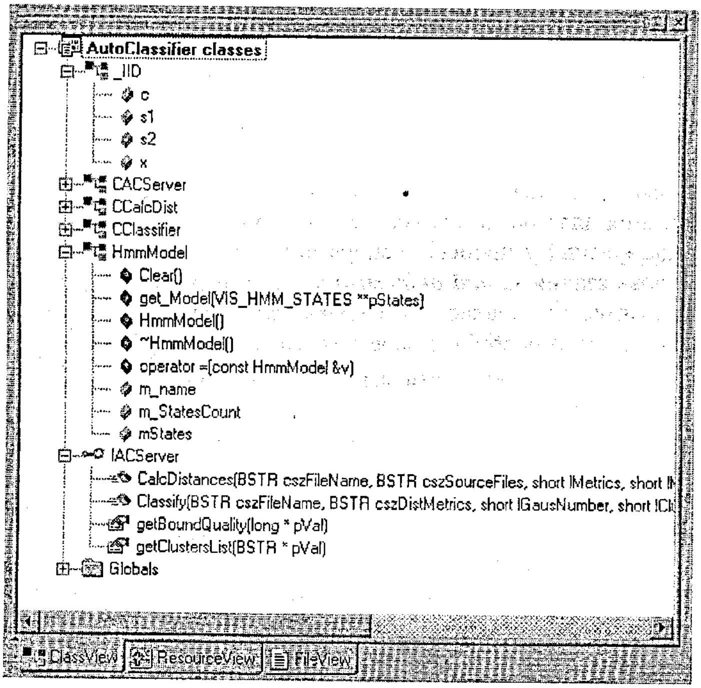


Рис.7.13. Перегляд структури проекту

Література

1. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н. Основи застосування ЕОМ в інженерній діяльності. – К.: ІСД МО України, 1994. – 285с.
2. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н. Програмування комп'ютеризованих систем управління та автоматики. – Вінниця: ВДТУ, 1997. – 208с.
3. Федоров А., Рогаткин Д. Borland Pascal в среде Windows. – К.: Диалектика, 1993. – 656с.
4. Киндлер Е. Языки моделирования: Пер. с чеш. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 288с.

8. ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ

Застосування є головним етапом життєвого циклу моделі. Саме на етапі практичного застосування остаточно з'ясовується її придатність для розв'язання тих задач, для яких вона створена. Можна виділити три головних напрямки застосування моделей:

- для розв'язання задач проектування;
- для оптимізації роботи системи в процесі експлуатації;
- для прогнозування процесів з метою розробки законів керування ними.

8.1.Модель як складова задачі оптимізації

Одним з найважливіших застосувань математичних моделей є використання для *проектування* складних об'єктів та систем, покращення їх функціонування у процесі експлуатації. Основу досягнення такої мети складає розв'язання *задачі оптимізації* параметрів та структури системи. Задача оптимізації складається з *критерію оптимальності К*, максимум або мінімум якого необхідно забезпечити, *моделі* $F[\Theta_X]$, яка встановлює залежність між характеристиками системи, та *обмежень* $L(\Theta)$, які повинний задовольняти оптимальний розв'язок.

Критерій оптимальності найчастіше є композицією багатьох характеристик системи. Якби ці характеристики були незалежними, задача пошуку оптимального розв'язку була б тривіальною. Але характеристики реальної системи розв'язані між собою моделлю *М*. В залежності від форми подання модель може розглядатися або як доповнення критерію оптимальності, яке дозволяє скоротити кількість змінних, або як додаткове обмеження.

Вибір методу оптимізації суттєво залежить від форми критерію оптимальності і обмежень, а отже і від моделі. Існують десятки видів і сотні модифікацій різноманітних методів оптимізації. І кожен з них має певну область найефективнішого застосування, тобто типу моделі оптимізованої системи. Виділимо лише деякі характерні групи задач.

1) *Одновимірні задачі, в яких критерії залежать від однієї характеристики системи.* Можливі варіанти цієї задачі наведені на рис.8.1.

Крім наведених варіантів можуть існувати ще їх комбінації. Відповідно навіть для такої найпростішої групи задач використовується дуже багато методів пошуку екстремуму. Так наприклад, для випадку зображеного на рис.8.1,а (*лінійна залежність*) необхідна проста перевірка, який з кінців інтервалу відповідає максимуму, а який мінімуму.

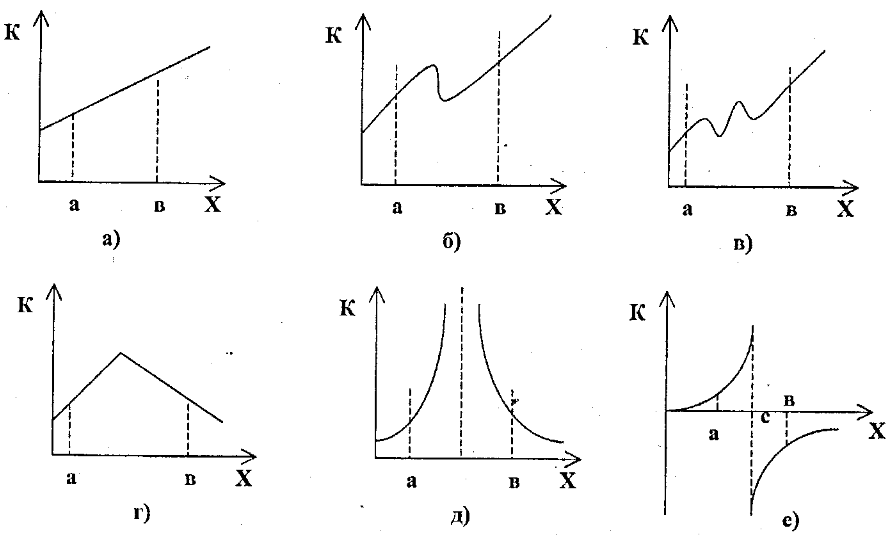


Рис.8.1. Одновимірна оптимізація

У випадку рис.8.1,б (*нелінійна диференційована залежність*) пошук екстремуму здійснюється шляхом диференціювання:

$$\frac{dK}{dx} = 0 \qquad \text{- необхідна умова екстремуму,} \tag{8.1}$$

$$\frac{d^2K}{dx^2} > 0 \qquad \text{- достатня умова мінімуму,} \tag{8.2}$$

$$\frac{d^2K}{dx^2} < 0 \qquad \text{- достатня умова максимуму,} \tag{8.3}$$

після чого, як і в усіх інших випадках, ще необхідно порівняти отримане значення $K(x_{опт})$ з кінцями інтервалу $K(a)$ і $K(в)$. У випадку рис.8.1,в. (*багатоекстремальна функція*) необхідна додаткова перевірка, який з наведених екстремумів є глобальним оптимальним рішенням.

Випадки рис.8.1.г-е відповідають *недиференційованим залежностям* $K(x)$. Для таких задач використовуються різноманітні пошукові (покрокові) методи, в яких однією з головних проблем є визначення початкової точки пошуку та критерію зупинки. Найскладнішим з цієї точки зору є випадок рис.8.1.е. Тут при пошукові мінімуму і виборі початкової точки на інтервалі $[a,c)$ буде здійснюватись рух в напрямку точки a, що не є правильним рішенням. А при виборі точки на інтервалі $(c,в]$ постає проблема нестійкості алгоритму визначення точки зупинки в околі точки c.

2) *Багатовимірні задачі малої розмірності* (до 5 факторів). Можливі варіанти таких задач аналогічні першій групі з тією різницею, що критерій $K(x)$ зображується поверхнею відповідної розмірності, але перехід від одновимірного до багатовимірного випадку значно ускладнює і відповідно урізноманітнює методи оптимізації.

Так, при лінійній залежності $K(x)$ використовується вже ціла група методів лінійного програмування. При унімодальній диференційованій залежності $K(x)$ використовуються різноманітні градієнтні методі. У більш складних випадках використовуються методи направленого (детермінованого) пошуку з тими ж проблемами, що й для першої групи, але ускладненими багатовимірностями.

3) *Багатовимірні задачі середньої розмірності* (від 6 до 10 факторів). Для цієї групи задач переваги набувають методи направленого пошуку. Методи прямих обчислень оптимального значення вже важко застосувати через велику рівномірність систем рівнянь, до яких вони приводять. Але трудомісткість направленого пошуку зростає пропорційно $n!$ (де n – кількість факторів) і при $n>10$ навіть для сучасних комп'ютерів стає надто високою.

4) *Багатовимірні задачі великої розмірності* (>10 факторів). Для таких задач незаперечної переваги набувають методи випадкового пошуку. Останнім часом ці методи набули великої популярності і бурхливого розвитку. З'явилося безліч модифікацій методу Монте-Карло, генетичні та мурашині алгоритми та інші.

5) *Задачі, в яких аргументами критерію оптимальності є функція.* Методи розв'язування таких задач суттєво залежать від характеру обмежень, що є складовою задачі оптимізації. Найпоширенішим методом є класичний варіаційний метод на основі невизначених множників Лагранжа, метод на основі "принципу максимуму" Понтрягіна, динамічне програмування на основі принципу Беллмана та ін.

6) *Задачі дискретної оптимізації, що ґрунтується на графових моделях.* Методи розв'язання цих задач мають переважно комбінаторний характер з різноманітними модифікаціями, направленими на зменшення кількості варіантів.

Роль моделі при розв'язанні задачі оптимізації особливо наочна при використанні методу невизначених множників Лагранжа [9]. Відповідно до цього методу задачу пошуку екстремуму функції $K(x)$ при обмеженнях $g_i(x)=0, \quad i=1...n$, які подають модель системи, заміняють на задачу пошуку екстремуму функції Лагранжа більшої розмірності, але без обмежень. Функція Лагранжа поєднує критерій оптимізації з моделлю

$$H(x,\lambda)=K(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x),$$

де λ_i – невизначені множники Лагранжа, які є додатковими параметрами оптимізації.

Контрольні питання

1. Чим визначається розмірність задачі: кількістю параметрів моделі або кількістю параметрів критерію оптимізації?

2. Чим відрізняється градієнтний метод від методу знаходження екстремуму з системи рівнянь $\forall_i \partial K / \partial x_i = 0$?

3. Оцініть кількість кроків випадкового пошуку при розв'язанні задачі оптимізації з 10 параметрами.

Ключові слова

Проектування, задача оптимізації, критерій оптимальності, обмеження, одновимірна задача, лінійна залежність, нелінійна диференційована залежність, необхідна умова екстремуму, достатня умова мінімуму, достатня умова максимуму, багатоекстремальна функція, глобальний екстремум, недиференційована залежність, багатовимірні задачі, лінійне програмування, направлений пошук, випадковий пошук, метод Монте-Карло, генетичний алгоритм, мурашиний алгоритм, варіаційний метод, "принципу максимуму" Понтрягіна (1), динамічне програмування, задача дискретної оптимізації.

Література

1. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632с.
2. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. – М.: Радио и связь, 1984.
3. Бондарев В.М. и др. Основы программирования. – Харьков: Фолио, 1997. – 368с.
4. Р.Седжвик. Фундаментальные алгоритмы на С. Алгоритмы на графах: Пер. с англ. – СПб.: ДиаСофтЮП, 2003. – 480с.
5. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
6. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н. Програмування персональних комп'ютерів систем управління. – Вінниця: ВДТУ, 1999. – 110с.
7. Евдокимов А.Г. Минимизация функций. – Харьков: Вища школа, 1977. – 159 с.
8. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430с.
9. Краскевич В.Е. и др. Численные методы в инженерных исследованиях. – К.: Вища школа, 1986. – 263 с.

8.2.Використання моделі для прогнозування

Прогнозування стану об'єкта керування є одним з найважливіших застосувань моделі в системах керувань. Адже *інерційність процесів* керування приводить до того, що реакція об'єкта на керуючий вплив відбувається через певний час після здійснення впливу (рис.8.2). Таким чином для здійснення правильного впливу необхідно передбачити стан об'єкта та всіх незалежно зовнішніх впливів.

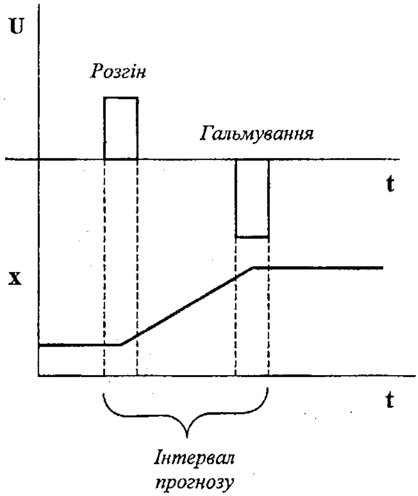


Рис.8.2. Приклад застосування прогнозування при керуванні

Прогнозування може здійснюватись як на основі детермінованої, так і на основі стохастичної моделі.

Детерміноване прогнозування використовується при незначних випадкових впливах і невеликій кількості даних про попередній хід процесу.

При *стохастичному прогнозуванні* хід прогнозованого процесу у часі за попередній період необхідно подати функцією $X(t)$, що отримується за допомогою *методів апроксимації.*

З математичної точки зору прогнозування є *екстраполяцією* математичної моделі керованого процесу.

Задача екстраполяції полягає у визначенні значення функції $y(x)$ в точці, що не належить відрізку $[x_0, x_n]$, на якому визначені вузли екстраполяції. Для екстраполяції використовуються ті ж вирази, що і при інтерполяції, але з більшою похибкою. Так, для гладких функцій екстраполяція доцільна при x, що виходять за зазначені межі не більш ніж на $h/2$, де h - крок розташування вузлів.

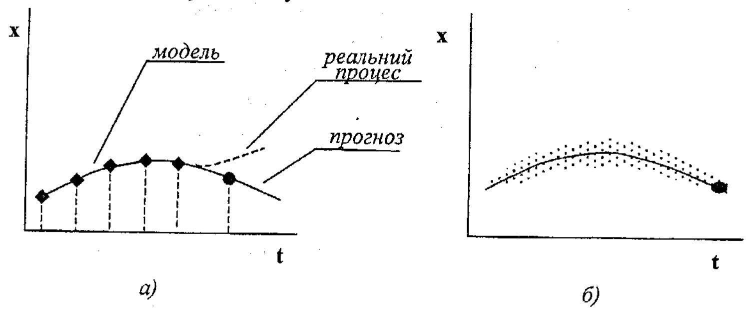


Рис. 8.3. Прогнозування процесу:
а) – на основі детермінованої моделі (◆ – експериментальні дані, ● – прогнозована точка;)
б) – на основі стохастичної моделі (• – експериментальні дані, ●– прогнозована точка)

Алгоритм екстраполяції залежить від вибору екстраполюючої функції. Але у будь-якому випадку для екстраполяції *n*-го порядку необхідно зберігати *n* даних у буфері зі структурою черги.

Контрольні питання

1. Чим відрізняється інтерполяція і апроксимація?
2. Чим відрізняється інтерполяція і екстраполяція?
3. Прогнозування – це екстраполяція процесу у часі. Наведіть приклади екстраполяції моделі в іншій системі координат.

Ключові слова

Прогнозування стану, інерційність процесу, детерміноване прогнозування, стохастичне прогнозування (1), методи апроксимації (1 2) , екстраполяція , алгоритм екстраполяції.

Література

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
2. Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. - М.: Статистика, 1977.-282 с.
3. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей. - М.: Финансы и статистика, 1986. - 3 18 с.
4. Рабочая книга по прогнозированию / Редкол.: И.В.Бестужев-Лада (отв. ред.).-М.: Мысль, 1982.-430с.

5. Рябушкин Б.Г. Применение статистических методов в экономическом анализе и прогнозировании. - М.: Финансы и статистика, 1990. - 345с.
6. Саркисян С.А. Теория прогнозирования и принятия решений. - М.: Высшая школа, 1977.— 351 с.
7. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. - 2-е изд. перераб.- и доп.-М.:Статиспоэд,,1997.-200с.
8. Ефимов А.Н. Предсказание случайных процессов. – М.: Знание, 1976. – 64с.

8.3. Модель як складова задачі оцінювання

Математичні моделі об'єктів, процесів, систем використовуються в так званих задачах оцінювання. Задачі оцінювання дозволяють використовувати інформацію про взаємозв'язки між параметрами моделі для зменшення похибок вимірювань і підвищення точності отриманої вимірювальної інформації. На основі співвідношень математичної моделі можна:

а) розрахувати невиміряні параметри;

б) виявити та усунути "грубі" помилки і знизити "нормальні" помилки вимірювань;

в) визначити якість функціонування каналів збору даних.

Розглянемо *постановку задачі оцінювання.*

Нехай математична модель системи (об'єкта, процесу) описується системою n рівнянь вигляду:

$$N(\mathbf{Z}) = 0, \tag{8.4}$$

де $\mathbf{Z}$ – повний вектор параметрів системи розмірності $r > n$.

Нехай деякі параметри системи *вимірюються*, позначимо їх через $\tilde{\mathbf{V}}$. В загальному випадку взаємозв'язок між параметрами моделі $\mathbf{Z}$ і вектором виміряних даних $\tilde{\mathbf{V}}$ подають у вигляді:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) + \xi_{\tilde{V}}, \tag{8.5}$$

де $\tilde{\mathbf{V}}$ – вектор виміряних параметрів розмірності l;

$\mathbf{Z}$ – вектор *дійсних значень* параметрів розмірності r;

$\xi_{\tilde{V}}$ – вектор *похибок вимірювань* розмірності l.

Досить часто вектор параметрів моделі $\mathbf{Z}$ вдається розбити на вектор *незалежних параметрів* X і вектор *залежних параметрів* Y таких, що вектор Y виражається в явному вигляді через X:

$$Y = F(X). \tag{8.6}$$

З урахуванням (8.6) вектор виміряних даних $\tilde{\mathbf{V}}$ можна подати як функцію лише незалежних параметрів:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}(X) + \xi_{\tilde{V}}. \tag{8.7}$$

Задача оцінювання полягає у пошуку таких значень параметрів вектора X, які задовольняють рівняння математичної моделі (8.4) і є найбільш близькими в розумінні деякого критерію до виміряних значень $\widetilde{\mathbf{V}}$. Як критерій близькості найчастіше беруть квадратичний критерій, а задачу оцінювання зводять до *мінімізації функції* вигляду

$$\varphi = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left[\widetilde{V}_i - \mathbf{V}(X)\right]^2}{\sigma_{\widetilde{V}_i}^2} \tag{8.8}$$

або в матричному вигляді

$$\Phi(X) = \left[\widetilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(X)\right]^T \mathbf{R}_{\widetilde{V}}^{-1} \left[\widetilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(X)\right], \tag{8.9}$$

де $\mathbf{R}_{\widetilde{V}}$ – задана коваріаційна матриця, елементами головної діагоналі якої є дисперсії похибок вимірювань $\sigma_{\widetilde{V}_i}^2$.

Якщо вектор параметрів $\mathbf{Z}$ моделі (8.4) не вдається розбити на вектори $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ такі, що $Y = F(X)$, то задачу оцінювання подають у вигляді такої *оптимізаційної задачі*:

знайти мінімум функції

$$\Phi(\mathbf{Z}) = \left[\widetilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(\mathbf{Z})\right]^T \mathbf{R}_{\widetilde{V}}^{-1} \left[\widetilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}(\mathbf{Z})\right]$$

при обмеженнях

$$\mathbf{U}(\mathbf{Z}) = 0.$$

Для пошуку мінімуму функції можна використати будь-які методи безумовної оптимізації, однак найчастіше використовують ітераційну формулу методу Ньютона, яка для функції (8.9) запишеться у вигляді

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \left\{\left(\frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right)^T \mathbf{R}_{\widetilde{V}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right\}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right)^T \mathbf{R}_{\widetilde{V}}^{-1} \left(\widetilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}\left(X^{(k)}\right)\right). \tag{8.10}$$

де k – індекс ітерації;

$X^{(k)}$ – поточна оцінка рішення;

$X^{(k+1)}$ – наступна оцінка рішення.

Після отримання оцінок вектора незалежних параметрів X оцінки вектора залежних параметрів Y можна отримати з рівнянь (8.6).

Крім оцінок параметрів, визначають також матриці:

$$\mathbf{R}_Y = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right)^T \mathbf{R}_{\widetilde{V}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}(X)}{\partial X}\right]^{-1}, \tag{8.11}$$

$$\mathbf{R}_X = \frac{\partial Y(X)}{\partial X} \mathbf{R}_Y^{-1} \left(\frac{\partial Y(X)}{\partial X}\right)^T. \tag{8.12}$$

де похідні беруться на останній ітерації (8.10). Елементами головної діагоналі матриць $\mathbf{R}_Y$ і $\mathbf{R}_X$ є оцінки дисперсій σ_Y^2 і σ_X^2, які характеризують *точність отриманих оцінок*.

Контрольні питання

1. При опосередкованих вимірюваннях необхідно, щоб кількість рівнянь моделі дорівнювала кількості невідомих величин. А як співвідносяться ці кількості при знаходженні невідомих величин шляхом оцінювання?

2. Назвіть декілька методів оптимізації, які могли б застосовуватися для розв'язання задачі оцінювання. Які з цих методів дозволяють визначити також і похибку оцінки?

Ключові слова

Постановка задачі оцінювання, вимірювання параметрів, дійсне значення, похибка вимірювань, незалежні параметри, залежні параметри, мінімізація функції, оптимізаційна задача, точність оцінок.

Література

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
2. Бард И. Нелинейное оценивание параметров. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.
3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления: оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
4. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо, нефте- и газоснабжения / А.П.Меренков, Е.В.Сеннова, С.В.Сумароков и др. – Новосибирск: ВО "Наука", 1992. – 407 с.
5. Наблюдаемость электроэнергетических систем / А.З. Гамм, И.И. Голуб. – М.: Наука, 1990. – 200 с.

8.4. Особливості моделювання у менеджменті

Останнім часом термін "*менеджмент*" набув великої популярності. Якщо не вдаватися до термінологічних ускладнень, то під менеджментом розуміють процес керування діяльністю колективів працівників. При цьому величина колективу та зміст і складність задач можуть бути найрізноманітнішими. Тому у спеціальній літературі з менеджменту виділяють стратегічний менеджмент, кадровий менеджмент, фінансовий менеджмент, самоменеджмент, менеджмент виробництва тощо [1]. Але у будь-якому випадку метою менеджменту є *прийняття правильного (оптимального) керівного рішення* і забезпечення його виконання.

Існують два підходи до прийняття рішень у менеджменті: прийняття рішень як мистецтво (на основі інтуїції та досвіду) і як наука (на основі математичних методів). На практиці найкращі результати дає поєднання обох методів, але в рамках даного посібника нас цікавить другий підхід.

Можна виділити основні задачі менеджменту, в яких використовуються математичні методи [1]:

- розподіл обмежених ресурсів;
- транспортна задача;
- управління запасами;
- управління інвестиціями;
- планування виконання робіт;
- розподіл робіт між виконавцями;
- прогнозування ринку;
- прогнозування соціальних явищ;
- розробка конкурентної стратегії;
- прийняття рішень на основі експертних оцінок.

Для розв'язання зазначених задач переважно використовуються такі математичні методи:

- лінійне програмування;
- мережне програмування;
- динамічне програмування;
- методи нелінійної оптимізації;
- багатокритеріальна оптимізація;
- нечітка логіка.

Кожен з цих методів ґрунтується на певній математичній моделі. Так, для розв'язання транспортної задачі використовується лінійне програмування, яке ґрунтується на лінійних функціональних моделях у вигляді систем рівнянь і нерівностей. Мережне програмування ґрунтується на структурних моделях у вигляді графів та лінійних функціональних потокових моделях.

Для підвищення ефективності менеджменту застосовують *автоматизовані системи керування* (АСУ) – людино-машинні системи, які комплексно використовують економіко–математичні методи і технічні засоби обробки інформації для розв'язання задач керування виробничо-господарською діяльністю.

Основною передумовою створення АСУ є можливість автоматизації інформаційних процесів. АСУ характеризується застосуванням розвинутого комплексу технічних засобів, призначених для виконання основних процесів збору й обробки інформації в ході рішення задач керування відповідно до технології планово–економічних робіт.

Найпоширенішими є *автоматизовані системи керування підприємством* (АСУП) і *автоматизовані системи керування технологічними процесами* (АСУТП).

Більшість автоматизованих систем керування будуються як ієрархічні системи. Функції верхніх рівнів ієрархії АСУ часто виконує людина. Роль людини зводиться до вибору різних критеріїв оцінювання якості протікання керованого процесу, а досягнення оптимізованих значень цих критеріїв ставиться метою систем керування нижчих рівнів ієрархії.

Контрольні питання

1. Які моделі використовуються для оцінювання ефективності капітальних вкладень?
2. Які моделі використовуються для прогнозування процесів на фінансовому ринку?
3. Які моделі використовуються для прогнозування процесів на фондовому ринку?
4. Сформулюйте модель балансу „попит-пропозиція".
5. Розгляньте АСУ технологічним процесом випікання хлібу. Як на Ваш погляд слід розділити функції між людиною і технічними засобами керування? На основі яких моделей функціонуватимуть технічні засоби?

Ключові слова

Менеджмент, прийняття рішення, оптимальне рішення, автоматизовані системи керування, АСУ, автоматизовані системи керування підприємством, автоматизовані системи керування технологічними процесами, АСУТП.

Література

1. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. – М.: Изд-во РДЛ, 2002. – 256с.
2. Мороз О.В., Матвійчук А.В. Оптимальне управління економічними системами в умовах невизначеності та ризику. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 177с.
3. Юхимчук С.В., Азарова А.О. Математичні моделі ризику для систем підтримки прийняття рішень. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 188с.
4. Автоматизация типовых технологических процессов и установок. / А.М.Корытин и др. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 432с.
5. Антонюк Б.Д. Информационные системы в управлении. М.: Радио и связь, 1986.
6. Автоматизированные системы управления технологическими процессами (справочник) / Под ред. Б.Б.Тимофеева. – К.: Техніка, 1983. – 351с.

7. Машина Н.І. Математичні методи в економіці. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 148с.
8. Кігель В.Р. Математичні методи ринкової економіки. – К.: Кондор, 2003. – 158с.
9. Моисеев Н.Н. Математические методы системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487с.
10. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. –М.: Наука, 1988. – 206с.
11. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. -М.: Наука, 1987.
12. Евланов Л.Г. Теория и практика принятия решений. Академия народного хозяйства при СМ СССР. – М.: Экономика, 1984.
13. Розен В.В. Цель, оптимальность, решение. Математические модели принятия оптимальных решений. – М.: Радио и связь. 1982.
14. Макаров Ч.М. и др. Теория выбора и принятия решений. Учебное пособие. – М.: Наука. 1982.
15. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высш школа., 1986.
16. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. – М.: Радио и связь, 1984.
17. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. Пер. с нем. – М.: Мир, 1990.
18. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечетких исходных данных. – М.: Наука, 1981.
19. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.
20. Борисов А.Н. и др. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. – Рига: Зинатне, 1990.
21. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Сов. Радио, 1993.
22. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2-х томах. – М.: Мир, 1985.
23. Андреев В.Н., Герасимов Ю.Ю. Принятие оптимальных решений: Теория и применение в лесном деле. - Йоэнсуу: Из-во ун-та Йоэнсуу, 1999. – 200с.

8.5. Моделі інтелектуальних процесів

Інтелектуальні технології останнім часом набули дуже активного розвитку. Цьому сприяли як розвиток комп'ютерної техніки, яка за своєю потужністю вже стала здатною реалізувати деякі "інтелектуальні" процеси, так і усвідомлення того, що в деяких випадках інтелектуальні можливості людини значно перевищують можливості сучасної техніки і завжди будуть тим орієнтиром, якого прагнутимуть досягти конструктори.

Основою розвитку інтелектуальних технологій є моделювання інтелектуальних процесів у мозку. Воно включає: моделювання сприйняття, пам'яті, психічних функцій, емоцій, прийняття рішення, підсвідомої і свідомої переробки інформації і інше.

Моделювання сприйняття пов'язано з вивченням роботи рецепторного відділу аналізаторних систем і побудова моделей блоків первинної переробки інформації при моделюванні сенсорних систем. Найбільш розвинуто моделювання фізичних рецепторних відділів аналізаторних систем, які представляють собою перетворювачі різних фізично-хімічних параметрів в стандартний для нервової системи частотно-модульований код.

Моделювання психічних функцій, пов'язаних з вичленовуванням з цілісного уявлення про особистість окремих її складових, моделей динаміки окремих психічних функцій, відображає роботу підкоркових структур мозку на рівні безумовних рефлексів, інстинктів, інших дій. Цей напрямок особливо розвинутий в галузі *розпізнавання образів*: розпізнавання природної мови, текстів, облич тощо.

Моделювання пам'яті пов'язане з дослідженням способів введення моделі зовнішнього образу в пам'ять, зберігання його і вилучення з пам'яті. Моделі пам'яті стали основою *асоціативних запам'ятовувальних пристроїв* і побудованих на їх основі процесорів.

Побудова *моделей свідомості* пов'язана з відображенням складної діяльності коркових структур мозку на рівні умовних рефлексів, взаємодії аналізаторів, прийняття рішень і таке інше. Останнім часом цей напрямок дуже активно розвиваються і реалізується у вигляді *експертних систем.*

Контрольні питання

1. У чому переваги інтелектуальних технологій?
2. До якого напрямку моделювання інтелектуальних процесів слід віднести нейронні мережі?
3. До якого напрямку моделювання інтелектуальних процесів слід віднести нечітку логіку?

Ключові слова

<u>Інтелектуальні технології</u>, <u>моделювання сприйняття, моделювання психічних функцій, моделювання пам'яті, асоціативний запам'ятовувальний пристрій, моделі свідомості</u> (<u>1</u> <u>2</u>) <u>розпізнавання образів</u> (<u>1</u> <u>2</u>), <u>експертна система</u> (<u>1</u>).

Література

1. Энциклопедия кибернетики. В 2-х томах. – К.: УСЭ, 1975.
2. Искусственный интеллект. – В 3-х кн. Кн. 2. Модели и методы:

Справочник/ Под ред. Д.А.Поспелова. – М.: Радио и связь, 1990. – 304с.

3. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам : Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 388с.
4. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии в идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: Континент-ПРИМ, 1999. – 300 с.
5. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. – М.: Наука, 1983. – 341с.
6. Логика и компьютер (моделирование рассуждений и проверка правильности программ). – М.: Наука, 1990.
7. Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта. – М.: Мир, 1991.
8. Маслов С.Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. – М.: Советское радио, 1986.
9. Серебрянников О.Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. – М.: Наука, 1970.
10. Матурана У. Биология познания /Язык и интеллект. – М.: Прогресс, 1995.
11. Ивахненко А.Г. Самообучающиеся системы с положительными обратными связями. – К.: АН УССР, 1963. – 328с.
12. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта: Математические средства. – Харьков: Вища школа, 1984. – 143с.

ПІСЛЯМОВА

Підсумовуючи наведені в цьому посібнику відомості, слід зазначити, що математичне моделювання є складним багатоетапним процесом, який передбачає створення моделі, виконання розрахунків у відповідності до моделі та використання отриманих результатів. І на кожному етапі крім формальних математичних методів необхідний ще й досвід інженера, дослідника. Одне з головних питань, які стоять перед ними – досягнення компромісу між точністю і складністю моделі. При цьому слід брати до уваги вплив точності і складності не тільки на перший етап, а – що є найголовнішим, – на остаточний результат застосування моделі. Адже дуже часто висока точність моделі зводиться нанівець похибками розрахунків при застосуванні моделі в задачах оптимізації, оцінювання тощо через велику складність. І тільки значний досвід дослідника дозволяє вже з самого початку моделювання досягти цього компромісу.

Нажаль, у більшості випадків такого досвіду не вистачає. Тоді процес моделювання набуває ітераційного характеру – з будь-якого етапу, проаналізувавши джерела похибок, дослідник повертається на початок і зменшує або збільшує складність моделі.

Автор сподівається, що цей посібник допоможе досліднику-початківцю скоротити і покращити складний процес математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Автоматизация типовых технологических процессов и установок. /А.М.Корытин и др. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 432с.
2. Автоматизированные системы управления технологическими процессами (справочник) / Под ред. Б.Б.Тимофеева. – К.: Техніка, 1983. 351с.
3. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976. – 280с.
4. Акимов О.Е. Дискретная математика: Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376с.
5. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. В.Н.Вапника. – М.: Наука, 1984. – 815с.
6. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 430с.
7. Андреев В.Н., Герасимов Ю.Ю. Принятие оптимальных решений: Теория и применение в лесном деле. – Йоэнсуу: Из-во ун-та Йоэнсуу, 1999. – 200 с.
8. Антонюк Б.Д. Информационные системы в управлении. – М.: Радио и связь, 1986.
9. Балашов Е.П., Пузанков Д.В. Проектирование информационно-управляющих систем. – М.: Радио и связь, 1987.
10. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. – М.: Радио и связь, 1984.
11. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768с.
12. Бесслер Р., Дойч А. Проектирование сетей связи. – М.: Радио и связь, 1988.
13. Блэк Ю. Сети ЭВМ: протоколы, стандарты, интерфейсы. – М.: Мир, 1990.
14. Бойченко Е.В. Методы схемотехнического проектирования распределенных информационно-вычислительных микропроцессорных систем. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 128с.
15. Бондарев В.М. и др. Основы программирования. – Харьков: Фолио, 1997. – 368с.
16. Борисов А.Н. и др. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. – Рига: Зинатне, 1990.
17. Боровська Т.М., Северілов В.А., Васюра А.С. Теорія автоматичного управління: Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 96с.
18. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. – М.: Физматгиз, 1960.
19. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968.
20. Бухарев Р.Г. Основы теории вероятностных автоматов. – М.: Наука, 1985. – 288с.

21. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Советское радио, 1971.
22. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 206с.
23. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576с.
24. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. – 384с.
25. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. – М.: Наука, 1983. – 341с.
26. Володарський Є.Т., Кухарчук В.В., Поджаренко В.О., Сердюк Г.Б. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю. – Вінниця: Велес, 2001. – 219с.
27. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1970. – 204с.
28. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления. – М.: Высш. школа, 1997. – 303с.
29. Гетц К., Джилберт М. Программирование в Microsoft Office. Для пользователя: Пер. с англ. – К.: BHV, 2000. – 384с.
30. Глонь О.В., Дубовой В.М. Моделювання систем керування в умовах невизначеності. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 170 с.
31. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 288с.
32. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высш. школа, 1986.
33. Дубовий В.М. Дослідження і оптимізація мереж ІВС методом моделювання динаміки інформаційних потоків./ Вісник Вінницького політехнічного інституту – 1994 – N1(2) – С.22-26.
34. Дубовой В.М. Програмування систем моделювання інформаційних процесів /Серія "Нове в науці та техніці". – К.: ІСДО, 1994.
35. Дубовой В.М., Глонь О.В. Властивості моделей інформаційних систем в умовах невизначеності: / Матеріали III міжнародної конференції "Інтернет – Освіта – Наука" (ІОН-2002). Том 2, – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002. - С.410-412.
36. Дубовой В.М., Глонь О.В. Использование обобщенной вычислительной модели в интеллектуальных системах управления. - Вісник Технологічного університету Поділля – №3, том 1.
37. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н. Основи застосування ЕОМ в інженерній діяльності. – К.: ІСД МО України, 1994. – 285с.
38. Дубовой В.М., Квєтний Р.Н. Програмування комп'ютеризованих систем управління та автоматики. – Вінниця: ВДТУ, 1997. – 208с.
39. Дьяконов В. MATLAB 6: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 592с.
40. Дятлов В.А. Методы проектирования информационной базы АСУ. – Л.: Изд-во ЛИЭИ, 1984.

41. Евдокимов А.Г. Минимизация функций. – Харьков: Вища школа, 1977. – 159 с.
42. Евланов Л.Г. Теория и практика принятия решений. / Академия народного хозяйства при СМ СССР. -М.: Экономика, 1984.
43. Ефимов А.Н. Предсказание случайных процессов. – М.: Знание, 1976. – 64с.
44. Железнов И.Г. Сложные технические системы (оценка характеристик). – М.: Высш.шк., 1984.
45. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 167с.
46. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ : Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 584с.
47. Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А., Решетникова И.О. Математическая статистика. – М.: Высш. школа, 1981. – 371с.
48. Ивахненко А.Г. Самообучающиеся системы с положительными обратными связями. – К.: АН УССР, 1963. – 328с.
49. Искусственный интеллект. В 3-х кн. / Кн. 2. Модели и методы: Справочник/ Под ред. Д.А.Поспелова. – М.: Радио и связь, 1990. – 304с.
50. Искусственный интеллект: В 3-х кн. Кн1. Системы общения и экспертные системы: Справочник / Под ред. В.Н. Захарова, В.Ф.Хорошевского. – М.: Радио и связь, 1990. – 368с.
51. Інтернет-сайт www.besegroup.ru
52. Кавалеров Г.И., Мандельштам С.М. Введение в информационную теорию измерений. – М.: Энергия, 1974.
53. Каравайкин А.В. Активный метод исследования неэлектромагнитного информационного обмена в природе. – Тоннель-XXI / Сборник научных трудов, 2003.
54. Кветный Р.Н., Маликов В.Т. Информационная теория измерений: от модели к изделию. / Новое в жизни, науке и технике. Сер. «Математика, кибернетика»; №7 – М.: Знание, 1988. – 32 с.
55. Квєтний Р.Н., Коцюбинський В.Ю. Математичні моделі розповсюдження хвиль у волоконних світловодах: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 140с.
56. Кику А.Г., Костюк В.И. и др. Адаптивные системы идентификации. – К.: Техніка, 1975. – 288с.
57. Киндлер Е. Языки моделирования: Пер. с чеш. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 288с.
58. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.
59. Кігель В.Р. Математичні методи ринкової економіки. – К.: Кондор, 2003. – 158с.

60. Колмогоров А.Н. К логическим основам теории информации. - Проблемы передачи информации – 1969, т.5. – N3.
61. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120с.
62. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия „количество информации". – Проблемы передачи информации, 1965. – т.1. – N1.
63. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 832с.
64. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1972. – 376 с.
65. Костюк В.И. и др. Проектирование информационных моделей в гибких системах. – К.: Вища школа, 1987.
66. Краскевич В.Е. и др. Численные методы в инженерных исследованиях. – К.: Вища школа, 1986. – 263 с.
67. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. – М.: Радио и связь,1984.
68. Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования. – К.: Вища шк., 1986. – 238с.
69. Лазарев И.А. Композиционное проектирование сложных агрегативных систем. – М.: Радио и связь, 1986. – 312с.
70. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – К.: Вища школа, 1974. – 452с.
71. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. – М.: Наука, 1987.
72. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга 1. – М.: Сов. радио, 1974. – 552с.
73. Лежнюк П.Д. Аналіз чутливості оптимальних рішень в складних системах критеріальним методом. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 131с.
74. Лежнюк П.Д., Бевз С.В. Методи оптимізації в електроенергетиці. Критеріальний метод: Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 1999. – 177с.
75. Лежнюк П.Д., Кулик В.В. Оптимальне керування потоками потужності і напругою в неоднорідних електричних мережах. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 188с.
76. Лившиц Н.А., Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. – М.: Советское радио, 1963.
77. Лисогор В.М., Селезньова Р.В. Моделі керування технологічними процесами в аварійних ситуаціях. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1997. – 95с.
78. Логика и компьютер (моделирование рассуждений и проверка правильности программ). – М.: Наука, 1990.
79. Лорье Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта. – М.: Мир, 1991.

80. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей. – М.: Финансы и статистика, 1986. - 3 18 с.
81. Макаров Ч.М. и др. Теория выбора и принятия решений. Учебное пособие.- М.: Наука. 1982.
82. Маликов В.Т., Дубовой В.М., Кветный Р.Н. Исследование и оптимизация информационных характеристик устройств контроля. / Серия "Наука, техника, передовой опыт". – К.: Знание, 1983.
83. Маликов В.Т., Дубовой В.М., Кветный Р.Н., Исматуллаев П.Р. Анализ измерительных информационных систем. – Ташкент: ФАН, 1984.
84. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1985. – 304с.
85. Маслов С.Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. – М.: Советское радио, 1986.
86. Матурана У. Биология познания /Язык и интеллект. – М.: Прогресс, 1995.
87. Машина Н.І. Математичні методи в економіці. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 148с.
88. Мейер Д. Теория реляционных баз данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 608с.
89. Мітюшкін Ю.І., Мокін Б.І., Ротштейн О.П. Soft Computing: ідентифікація закономірностей нечіткими базами знань. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002. – 145 с.
90. Модели теории телетрафика в системах связи и вычислительной технике / Под ред. А.Д.Харкевича, В.А.Гармаша. – М.: Наука, 1985.
91. Моисеев Н.Н. Математические методы системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487с.
92. Мокін Б.І., Мокін В.Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів: Навчальний посібник. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999.
93. Мокін Б.І., Юхимчук С.В. Математичні моделі робастної стійкості та чутливості нелінійних систем: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999. – 122с.
94. Мокін В.Б., Мокін Б.І. Математичні моделі та програми для оцінювання якості річкових вод. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2000. – 152с.
95. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К.: Вища школа, 1988.
96. Мороз О.В., Матвійчук А.В. Оптимальне управління економічними системами в умовах невизначеності та ризику. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 177с.
97. Морозов В.К., Долганов А.В. Основы теории информационных сетей. – М.: Высшая школа, 1987.

98. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. С нем. – М.: Мир, 1990.
99. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632с.
100. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта //Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б./ Под ред. Поспелова Д.А. – М.: Наука, 1986. – 312с.
101. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ./ Под ред. Р. Р. Ягера. – М.: Радио и связь,1986. – 408с.
102. Николаев В.И. Информационная теория контроля и управления. – Л.: Судостроение, 1973.
103. Новиков Ф.А., Яценко А.Д. Microsoft Office в целом. – СПб.: BHV, 1995. – 336с.
104. Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств. – Л.: Энергия, 1968.
105. Норенков И.П. Введение в автоматизированное проектирование технологических устройств и систем. – М.: Высш. школа, 1980. – 311с.
106. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечетких исходных данных. – М.: Наука, 1981.
107. Основи дискретної математики. Підручник. /Ю.В.Капітонова та ін. – К.: Наукова думка, 2002. – 580с.
108. Основы кибернетики. / Под ред. К.А.Пупкова. – М.: Высшая школа, 1976.
109. Основы моделирования сложных систем. /Под ред. И.В.Кузьмина. – К.: Вища школа, 1981. – 369 с.
110. Основы построения АСУ. /Под ред. В.И.Костюка. – М.: Наука, 1977.
111. Основы теории вычислительных систем / Под ред. В.И.Салыги. – Харьков: Вища школа, 1984.
112. Кузьмин И.В. Оценка эффективности и оптимизация АСКУ. – М.: Советское радио, 1971.
113. Паралельно-ієрархічне перетворення як системна модель оптико-електронних засобів штучного інтелекту. / Кол. авт. під заг. ред. В.П.Кожем'яко. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 324с.
114. Петров В.В., Усков А.С. Информационная теория синтеза оптимальных систем контроля и управления (Непрерывные системы). – М.: Энергия, 1975.
115. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Сов.радио, 1971. – 400 с.
116. Применение математических методов и ЭВМ для анализа и управление доменным процессом \ И.Г.Товаровский, Е.И.Райх, К.К.Шкодин, В.А.Улахович. – М.: Металлургия, 1978. – 264с.
117. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.

118. Рабинович В.И., Цапенко М.П. Информационные характеристики средств измерения и контроля. – М.: Энергия, 1968.
119. Рабочая книга по прогнозированию / Редкол.: И.В.Бестужев-Лада (отв. ред.). – М.: Мысль, 1982.-430с.
120. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей производства. – М. Энергия, 1975. – 375с.
121. Растригин Л.А. Вычислительные машины, системы, сети. – М.: Наука, 1982.
122. Розен В.В. Цель, оптимальность, решение. Математические модели принятия оптимальных решений. – М. Радио и связь, 1982.
123. Романовский И.В. Дискретный анализ. – СПб.: Невский диалект, 2000. – 240с.
124. Рот М. Интеллектуальный автомат: компьютер в качестве эксперта. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 76с.
125. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии в идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: Континент-ПРИМ, 1999. – 300с.
126. Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Нечеткая надежность алгоритмических процессов. – Винница: Континент-ПРИМ, 1997. – 142с.
127. Рябушкин Б.Г. Применение статистических методов в экономическом анализе и прогнозировании. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 345с.
128. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Сов. Радио, 1993.
129. Самойленко С.И. Сети ЭВМ. – М.: Наука, 1986.
130. Саркисян С.А. Теория прогнозирования и принятия решений. – М.: Высшая школа, 1977. – 351с.
131. Свами М.Н., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 454с.
132. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С. Алгоритмы на графах: Пер. с англ. – СПб.: ДиаСофтЮП, 2003. – 480с.
133. Серебрянников О.Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. – М.: Наука, 1970.
134. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. /Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.
135. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1975.
136. Скурихин В.И. и др. Математическое моделирование. – К.: Техніка, 1983. – 270 с.
137. Советов Б.Я. Теория информации. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
138. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш.шк., 1985.

139. Солодов А.В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. – М.: Наука, 1967.
140. Справочник по аналоговой вычислительной технике. /Под ред. Г.Е.Пухова. – К.: Техніка, 1975.
141. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712с.
142. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк и др. – М.: Наука, 1985. – 640с.
143. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М.: Сов.радио, 1975.
144. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2-х томах. – М.: Мир, 1985.
145. Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. – М.: Статистика, 1977. – 282 с.
146. Теоретические основы информационной техники: Учеб. пособие для вузов / Ф.Е. Темников, В.А. Афонин, В.И. Дмитриев. – М.: Энергия, 1979. – 512с.
147. Теория автоматического управления / Под ред. А.А.Воронова. – Т.1. – М.: Высш.шк., 1977
148. Теория передачи сигналов. / Зюко А.Г. и др. – М.: Связь, 1980.
149. Теория сетей связи. / Рогинский В.Н. и др. – М.: Связь, 1981.
150. Тиори Т., Фрай Дж. Проектирование структур баз данных: В 2-х кн. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.
151. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.
152. Трауб Дж.Ф. и др. Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 183с.
153. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. – М.: Изд-во РДЛ, 2002. – 256с.
154. Уотермен Д. Руководство по экспертным системам : Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 388с.
155. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. – М.: Мир, 1965.
156. Федоров А., Рогаткин Д. Borland Pascal в среде Windows. – К.: Диалектика, 1993. – 656с.
157. Ханенко В.Н. Информационные системы. – Л.: Машиностроение, 1988.
158. Хартли Р.В.Л. Передача информации. /В кн.: Теория информации и ее приложения. – М.: Наука, 1959.
159. Четвериков В.Н. и др. Базы и банки данных. – М.: Высш. шк., 1987. – 248с.
160. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1997. – 200 с.

161. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта: Математические средства. – Харьков: Вища школа, 1984. – 143с.
162. Шеннон К.Э. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: Иностр. лит., 1963.
163. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – наука и искусство. – М.: Мир, 1980.
164. Шилейко А.В., Кочнев В.Ф., Химушкин Ф.Ф. Введение в информационную теорию систем / Под. ред. А.В. Шилейко. – М.: Радио и связь, 1985. – 280с.
165. Энциклопедия кибернетики. В 2-х томах. – К.: УСЭ, 1975.
166. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. – М.: Иностр.лит., 1959.
167. Юхимчук С.В., Азарова А.О. Математичні моделі ризику для систем підтримки прийняття рішень. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – 188с.
168. Dubovoy V., Glon O. Generalization of Analytical Dependencies on a Case of Simultaneous Use of the Statistical and Fuzzy Data. Proceedings of International Conference on Modeling and Simulation MS'2001 – Lviv. 176-177p.

Додаток

Властивості перетворення Лапласа

1. *Властивість лінійності.* Для будь –яких постійних α і β

$$L\{\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\}= \alpha L\{ x_1(t)\}+ \beta L\{ x_2(t)\}.$$

2. *Диференціювання оригіналу.* Якщо похідна $x(t)$ є функцією-оригіналом, то

$$L\{x'(t)\}=sX(s)-x(0),$$

де $X(s)= L\{x(t)\}$, $x(0)=\lim\limits_{t\to 0} x(t)$

І взагалі, якщо n-на похідна $x^{(n)}(t)$ є функцією–оригіналом, то

$$L\{ x^{(n)}(t) \}=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x(0)-\dots$$

Якщо початкові умови нульові, тобто $x(0)=x'(0)=....=x^{(n)}(0)=0$, то остання формула матиме вигляд $L\{x^{(n)}(t)\}=s^nX(s)$. Таким чином, при нульових початкових умов диференціювання оригіналу відповідає множенню зображення на s.

3. *Інтегрування оригіналу.* Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на s:

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\}=\frac{X(s)}{s}.$$

4. *Теорема запізнення.* Для будь –якого позитивного числа τ

$$L=\{x(t-\tau)\}=e^{-s\tau}L\{x(t)\}=e^{-s\tau}X(s).$$

5. *Теорема про згортку* (теорема множення зображень). Якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ - оригінали, а $X_1(s)$ і $X_2(s)$ – їх зображення, то

$$X_1(s)\cdot X_2(s)=L\left\{\int_0^\infty x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau\right\}=L\left\{\int_0^\infty x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\}.$$

Інтеграл правої частини рівності називається *згорткою функції* $x_1(t)$ і $x_2(t)$ і позначають $x_1(t) * x_2(t)$.

6. *Теорема про граничні значення.* Якщо $x(t)$ – оригінал, а $X(s)$ – його зображення, то $x(0)=\lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$ і при існуванні $x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ також $x(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sX(s)$.

Навчальне видання

Володимир Михайлович Дубовой

Моделювання систем контролю та керування

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор В.О.Дружиніна
Коректор З.В.Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 25.06.05р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7x42 1/4 Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 9.81
Тираж 75 прим.
Зам. № 2005-100

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ