

**ЕЛЕКТРОДИНАМІКА  
ТА  
ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ**

**Ч.1. Основи електродинаміки**

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

Ю.В. Крушевський, Ю.І. Кравцов, В.М. Мізерний

## ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

Ч.1. Основи електродинаміки

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки 0907 – „Радіоелектроніка” та 0910 – „Електронні апарати” всіх спеціальностей. Протокол №8 від 1 квітня 2004 р.

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 538.3

К 84

*Рецензенти:*

**В.Я. Данилов**, доктор технічних наук, професор

**Р.Н. Кветний**, доктор технічних наук, професор

**В.М. Кичак**, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Крушевський Ю.В., Кравцов Ю.І., Мізерний В.М.**

К 84 **Електродинаміка та поширення радіохвиль. Ч. 1. Основи електродинаміки.** Навчальний посібник. –Вінниця: ВНТУ, 2004. -128с.

У навчальному посібнику розглянуті властивості електромагнітних хвиль та електричні параметри середовищ, в яких вони поширюються. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмою до дисципліни „Електродинаміка та поширення хвиль”.

УДК 538.3

<b>Вступ</b> .....	6
<b>1. Математичні основи електродинаміки</b> .....	8
1.1. Ортогональні системи координат .....	8
1.2. Поняття про градієнт скалярного поля.....	10
1.3. Поняття про дивергенцію та ротор векторного поля .....	11
1.4. Найважливіші векторні тотожності.....	15
1.5. Вирази для результатів дії оператора Лапласа на скалярну функцію $U$ у конкретних системах координат.....	16
1.6. Теорема Остроградського – Гаусса та Стокса.....	16
1.7. Приклади розв’язання задач.....	17
<b>2. Основні вектори електромагнітного поля та матеріальні рівняння</b> .....	19
2.1. Попередні зауваження.....	19
2.2. Вектори електричного поля. Перше матеріальне рівняння.....	19
2.3. Вектори магнітного поля. Друге матеріальне рівняння.....	22
2.4. Третє матеріальне рівняння.....	23
2.5. Класифікація середовищ.....	24
<b>3. Рівняння Максвелла. Рівняння неперервності</b> .....	26
3.1. Перше рівняння Максвелла.....	26
3.2. Друге рівняння Максвелла.....	30
3.3. Третє рівняння Максвелла.....	32
3.4. Четверте рівняння Максвелла.....	34
3.5. Рівняння неперервності .....	35
3.6. Сторонні струми і заряди.....	36
3.7. Класифікація електромагнітних процесів.....	39
<b>4. Рівняння Максвелла для монохроматичних коливань</b> .....	41
4.1. Рівняння Максвелла для комплексних амплітуд.....	42
4.2. Комплексна діелектрична проникність. Відносність поділу середовищ на діелектрики і провідники .....	43
<b>5. Однорідні хвильові рівняння для плоских хвиль</b> .....	46
5.1. Однорідні хвильові рівняння Даламбера.....	46
5.2. Однорідні скалярні хвильові рівняння Гельмгольца.....	47
5.3. Однорідні рівняння Гельмгольца для плоских хвиль.....	48
5.4. Загальний розв’язок однорідних скалярних рівнянь Гельмгольца для плоских хвиль.....	50

<b>6. Поширення радіохвиль у необмеженому ізотропному середовищі</b> .....	<b>53</b>
6.1. Фазова і групова швидкості.....	53
6.2. Коефіцієнт фази та коефіцієнт згасання плоскої хвилі.....	55
6.3. Поширення плоских хвиль у середовищі без втрат.....	56
6.4. Поширення плоских хвиль у середовищі з втратами.....	56
6.5. Поширення плоскої хвилі у металах.....	57
6.6. Поверхневий ефект.....	58
<b>7. Граничні умови</b> .....	<b>60</b>
7.1. Загальні зауваження.....	61
7.2. Граничні умови для векторів електричного поля.....	61
7.2.1. Граничні умови для нормальних складових векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ .....	62
7.2.2. Граничні умови для тангенціальних складових векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ .....	63
7.3. Фізична сутність граничних умов для векторів електричного поля.....	65
7.4. Граничні умови для векторів магнітного поля.....	66
7.4.1. Граничні умови для нормальних складових векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$ .....	66
7.4.2. Граничні умови для тангенціальних складових векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$ .....	67
7.5 Фізична сутність граничних умов для векторів магнітного поля.....	69
7.6. Повна система граничних умов.....	70
7.7 Граничні умови на поверхні ідеального провідника.....	71
<b>8. Основні теореми електродинаміки</b> .....	<b>72</b>
8.1. Теорема Пойнтінга для векторів електромагнітного поля.....	72
8.2. Теорема Пойнтінга для комплексних амплітуд векторів поля.....	75
8.3. Теорема єдиності розв'язку рівнянь Максвелла.....	79
8.3.1 Теорема єдиності розв'язку рівнянь Максвелла для обмеженого об'єму.....	79
8.3.2 Теорема єдиності розв'язку рівнянь Максвелла для необмеженого простору.....	81
8.4. Лема Лоренця.....	83
8.5. Теорема взаємності.....	84
<b>9. Падіння плоскої хвилі на плоску межу розділення двох середовищ</b> .....	<b>87</b>
9.1. Попередні зауваження.....	87
9.2. Виведення виразів для коефіцієнтів відбиття та заломлення.....	88
9.3. Явище повного заломлення.....	93
9.4. Явище повного внутрішнього відбиття.....	95
9.5. Падіння плоскої хвилі на плоску межу розділення з провідником.....	99
9.6. Наближенні граничні умови Леонтовича – Шукіна.....	101

<b>10. Випромінювання електромагнітних хвиль.....</b>	<b>103</b>
10.1. Постановка задачі.....	103
10.2. Електродинамічні потенціали.....	104
10.3. Розв'язок неоднорідних рівнянь Гельмгольца.....	107
10.4. Елементарний електричний випромінювач. Векторний електричний потенціал.....	109
10.5. Виведення виразів для складових поля елементарного електричного випромінювача.....	110
10.6. Аналіз складових поля елементарного електричного випромінювача.....	112
10.7. Напрявленість елементарного електричного випромінювача.....	114
10.8. Потужність та опір випромінювання елементарного електричного випромінювача.....	115
10.9. Фізична модель елементарного електричного випромінювача.....	117
10.10. Елементарний магнітний випромінювач.....	118
10.11. Визначення складових поля елементарного магнітного випромінювача.....	119
10.12. Потужність та опір випромінювання.....	121
10.13. Фізичні моделі елементарного магнітного вібратора.....	121
10.14. Елемент Гюйгенса.....	123
<b>Література.....</b>	<b>127</b>

## Вступ

Прояв електромагнітних сил у природі люди спостерігали з давніх часів. Результати простих спостережень та наукові експериментальні дослідження, накопичені за багато років, дали можливість ученим сформулювати закони електрики і магнетизму. Так, наприклад, у 1784 – 1789 роках були опубліковані роботи Шарля Кулона. Закон Кулона сьогодні відомий і учням школи. Відкритий потім закон Анрі Ампера про взаємодію електричних струмів, закон електромагнітної індукції Майкла Фарадея і багато інших утворили ту наукову основу, на якій базується теорія електромагнітного поля після того, як Джеймс Клерк Максвелл у кінці XIX століття сформулював знамениті рівняння, які іносять його ім'я. Максвеллу належить теоретичний висновок про існування електромагнітних хвиль та гіпотеза про електромагнітну природу світла. Експериментально підтвердив існування електромагнітних хвиль Генріх Герц у самому кінці позаминого століття. Історична ж заслуга у винаході радіо, як засобу практичного використання відкритих Герцом електромагнітних хвиль у без-провідному зв'язку, належить О.С. Попову – Петербурзькому професору мінної школи. Так з'явилася радіотехніка, а за нею і такі поняття, як радіохвиля та радіодіапазон.

Радіодіапазон у відповідності до Регламенту зв'язку, прийнятому Міжнародним Консультативним Комітетом по Радіо (МККР), охоплює такі смуги частот (піддіапазони хвиль):

№ смуги	Частота	Назва смуги частот	Довжина хвилі у вакуумі	Метрична назва хвиль
1.	Від 3 кГц до 30 кГц	Дуже низькі частоти (ДНЧ)	Від 100000 м до 10000 м	Міріаметрові
2.	Від 30 кГц до 300 кГц	Низькі частоти (НЧ)	Від 10000 м до 1000 м	Кілометрові
3.	Від 300 кГц до 3 мГц	Середні частоти (СЧ)	Від 1000 м до 100 м	Гектометрові
4.	Від 3 мГц до 30 мГц	Високі частоти (ВЧ)	Від 100 м до 10 м	Декаметрові
5.	Від 30 мГц до 300 мГц	Дуже високі частоти (ДВЧ)	Від 10 м до 1 м	Метрові
6.	Від 300 мГц до 3 ГГц	Ультрависокі частоти (УВЧ)	Від 1 м до 10 см	Дециметрові
7.	Від 3 ГГц до 30 ГГц	Надвисокі частоти (НВЧ)	Від 10 см до 1 см	Сантиметрові

8.	Від 30 ГГц до 300 ГГц	Крайньо високі частоти (КВЧ)	Від 1 см до 1 мм	Міліметри ві
9.	Від 300 ГГц до 3000 ГГц	Гіпервисокі частоти (ГВЧ)	Від 1 мм до 0,1 мм	Дециміліметри

Слід зауважити, що на сьогодні широко використовуються вищі частоти, які називаються світловими. Зокрема дуже ефективними є лінії радіозв'язку, у яких використовуються волоконно-оптичні лінії зв'язку (ВОЛЗ).

Цей посібник спрямовано на інженерну підготовку радіоспеціалістів у галузі теорії електромагнітного поля Максвелла та на практичне їх використання у радіотехніці. Посібник складається з трьох частин. Перша частина – “Основи електродинаміки” має познайомити студентів з властивостями електромагнітних хвиль та електричними параметрами середовищ, в яких ці хвилі поширюються. Друга частина – “Хвилеводи та об'ємні резонатори” ознайомить зі структурами та характеристиками електромагнітних хвиль (коливань), які існують у хвилеводах (об'ємних резонаторах) без урахування втрат в останніх. Третя частина – “Поширення радіохвиль” присвячена ознайомленню з поширенням радіохвиль у реальних хвилеводах та у природному середовищі.

Автори будуть вдячні читачам за зауваження щодо змісту посібника та врахують їх при подальшій роботі над його вдосконаленням.



# 1. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

## 1.1. Ортогональні системи координат

При розв'язуванні електродинамічних задач доводиться використовувати різні координатні системи. При виведенні загальних співвідношень доцільно записувати їх у такій математичній формі, яка була б придатною для будь-якої конкретної системи координат. В залежності від поставленої задачі при розв'язанні задач електродинаміки використовуються декартова (а), циліндрична (б) або сферична системи координат, представлені на рис. 1.1.

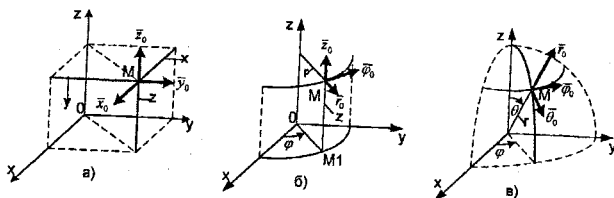


Рис. 1.1

У випадку декартових координат, записаних у послідовності  $x, y, z$ , є справедливими співвідношення

$$[\bar{x}_0 \bar{y}_0] = \bar{z}_0.$$

Векторний добуток одиничного вектора (орта), орієнтованого вздовж осі  $X$  і одиничного вектора, орієнтованого вздовж осі  $Y$ , повинні дати одиничний вектор, орієнтований вздовж осі  $Z$ . Іншими словами, правоходовий гвинт, який повертається по найкоротшому напрямку від осі  $X$  до осі  $Y$ , повинен утвинчуватись у напрямку  $Z$ .

Аналогічно, 
$$[\bar{y}_0 \bar{z}_0] = \bar{x}_0, \quad [\bar{z}_0 \bar{x}_0] = \bar{y}_0.$$

У випадку циліндричних координат, записаних у послідовності  $r, \varphi, z$ , повинні виконуватись співвідношення

$$[\bar{r}_0 \bar{\varphi}_0] = \bar{z}_0, \quad [\bar{\varphi}_0 \bar{z}_0] = \bar{r}_0, \quad [\bar{z}_0 \bar{r}_0] = \bar{\varphi}_0.$$

У випадку сферичних координат, записаних у послідовності  $r, \theta, \varphi$ , мають бути справедливими співвідношення

$$[\bar{r}_0 \bar{\theta}_0] = \bar{\varphi}_0, \quad [\bar{\theta}_0 \bar{\varphi}_0] = \bar{r}_0, \quad [\bar{\varphi}_0 \bar{r}_0] = \bar{\theta}_0.$$

Якщо у декартовій системі координат будуть прирости координат  $dx, dy, dz$ , то точка  $M$ , задана у цих координатах, відповідно пройде шлях

$$dl_x = 1 \cdot dx, \quad dl_y = 1 \cdot dy, \quad dl_z = 1 \cdot dz,$$

де  $L_x = 1, L_y = 1, L_z = 1$  – коефіцієнти Ляме, які зв'язують прирости координат та відповідні їм переміщення точки вздовж відповідних координатних ліній  $x, y, z$ .

Якщо у циліндричній системі координат будуть задані прирости координатам  $dr, d\varphi, dz$ , то точка  $M$ , задана у цих координатах, переміститься відповідно на відстані

$$dl_r = 1 \cdot dr, \quad dl_\varphi = r \cdot d\varphi, \quad dl_z = 1 \cdot dz,$$

де  $L_r = 1, L_\varphi = r, L_z = 1$  – коефіцієнти Ляме, які також зв'язують прирости координат та відповідні їм переміщення точки вздовж відповідних координатних ліній  $r, \varphi, z$ .

Якщо у сферичній системі координат будуть задані прирости координатам  $dr, d\theta, d\varphi$ , то точка  $M$ , задана у цих координатах, переміститься відповідно на відстані

$$dl_r = 1 \cdot dr, \quad dl_\theta = r \cdot d\theta, \quad dl_\varphi = r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi,$$

де  $L_r = 1, L_\theta = r, L_\varphi = r \sin\theta$  – коефіцієнти Ляме, які також зв'язують прирости координат та відповідні їм переміщення точки вздовж відповідних координатних ліній  $r, \theta, \varphi$ .

Відомо що, наприклад, елементарний об'єм запишеться:

– у декартовій системі координат  $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ ;

– у циліндричній системі координат  $dv = r dr \cdot d\varphi \cdot dz$ ;

– у сферичній системі координат  $dv = r^2 \cdot \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$ .

## 1.2. Поняття про градієнт скалярного поля

Поле скалярної функції характеризується векторно-диференціальною характеристикою, яка називається **градієнтом**.

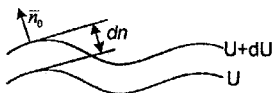


Рис. 1.2

Градієнт представляє собою вектор, спрямований по нормалі до поверхні однакового рівня скалярної функції у бік зростання функції і чисельно є рівним швидкості зміни функції у даному напрямку. На рис. 1.2 показані поверхні рівнів  $U$  та  $U+dU$  у полі скалярної функції  $U$ , а також одиничний нормальний вектор  $\bar{n}_0$ , зорієнтований у бік зростання функції  $U$ . Швидкість зміни функції у напрямку  $\bar{n}_0$  характеризується похідною  $dU/dn$ , де  $dn$  – нескінченно малий приріст шляху у напрямку  $\bar{n}_0$ . Градієнт функції позначають  $grad U$  і записують у вигляді загального математичного співвідношення

$$grad U = \frac{dU}{dn} \cdot \bar{n}_0. \quad (1.1)$$

Таким чином, градієнт є векторно-диференціальною операцією, яка виконується над скалярною функцією, у результаті якої утворюється векторна функція.

На рис.1.3а показаний приклад градієнта скалярного поля температур з лінійним зростанням температури від холодного лівого кінця металевого стрижня ( $t_1$ ) до гарячого правого кінця цього стрижня ( $t_2$ ).

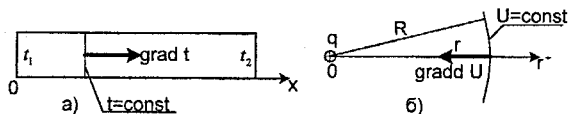


Рис. 1.3

Градiєнт поля температур у зазначеному на рисунку поперечному перетині стрижня дорiвнює

$$\text{grad}t = \bar{x}_0 \frac{dt}{dx}$$

На рис. 1.36 показаний приклад градiєнта скалярного поля електричних потенцiалiв, створеного точковим позитивним електричним зарядом  $q$ .

Градiєнт поля потенцiалiв у точцi, вiддаленiй вiд заряду на вiдстанi  $r$ , має вигляд

$$\text{grad}U = -\bar{r}_0 \cdot \frac{dU}{dr}$$

У цих формулах  $\bar{x}_0$ - орт напрямку OX,  $\bar{r}_0$ - орт напрямку радіуса-вектора  $\bar{r}$ . На рис.1.3 показані поверхні рівнів скалярних полів

а – поля температур  $t=\text{const}$ ,

б – поля потенцiалiв  $U=\text{const}$ .

Вирази для градiєнта у конкретних системах координат:

– декартова система координат

$$\text{grad}U = \bar{x}_0 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial U}{\partial z}; \quad (1.2)$$

– цилiндрична система координат

$$\text{grad}U = \bar{r}_0 \frac{\partial U}{\partial r} + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \bar{z}_0 \frac{\partial U}{\partial z}; \quad (1.3)$$

– сферична система координат

$$\text{grad}U = \bar{r}_0 \frac{\partial U}{\partial r} + \bar{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (1.4)$$

### 1.3. Поняття про дивергенцію та ротор векторного поля

При розгляді задач векторного аналізу використовують поняття про джерело (витік), яке створює поле, і про споживача (стік), який його поглинає. Прикладом витіку поля в електродинаміці є передавальна антена, а прикладом стоку – приймальна антена. Інтенсивність джерела чи стоку прийнято характеризувати векторно-диференціальною характеристикою, яка називається дивергенцією. Формально дивергенцію поля вектора  $\vec{A}$  позначають  $\text{div}\vec{A}$  і визначають виразом

$$\text{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{S}}{\Delta V}. \quad (1.5)$$

Тут  $\oint_{\Delta S}$  – інтеграл по замкнутій малій поверхні  $\Delta S$ , яка оточує точку, у якій визначається дивергенція;

$\vec{A}$  – вектор, який характеризує поле;

$d\vec{S} = \vec{n}_0 \cdot dS$  – нескінченно малий елемент поверхні  $\Delta S$ , помножений на одиничний нормальний вектор  $\vec{n}_0$ , спрямований зсередини замкнутої поверхні назовні;

$\Delta v$  – малий об'єм, який обмежується замкнутою поверхнею  $\Delta S$ .

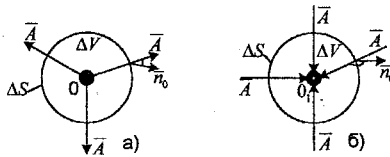


Рис. 1.4

У чисельнику дробу у виразі (1.5) маємо значення потоку вектора  $\vec{A}$  через малу (але скінченну) замкнуту поверхню  $\Delta S$ . Дріб під знаком  $\lim$  можна трактувати як середнє значення об'ємної густини цього потоку, тобто середнє значення інтенсивності поля в об'ємі  $\Delta v$ . Шляхом граничного переходу об'єм  $\Delta v$  і замкнута поверхня  $\Delta S$  стягуються у точку. Таким чином, дивергенція характеризує інтенсивність джерела у точці 0 (рис. 1.4а) або стоку у точці  $0_1$  (рис. 1.4б).

Якщо у цій точці знаходиться джерело поля (рис. 1.4а), то вектор  $\vec{A}$  утворює з нормаллю  $\vec{n}_0$  гострий кут, а скалярний добуток

$$\vec{A} \cdot d\vec{S} = A \cdot dS \cdot \cos(\vec{A}, \vec{n}_0)$$

буде додатним. Векторне поле буде виходити з точки 0, у якій визначається дивергенція, і точка 0 є джерелом поля. Дивергенція у такому випадку буде додатною скалярною величиною.

Якщо у цій точці знаходиться стік поля (рис. 1.4б), то вектор  $\vec{A}$  утворює з нормаллю  $\vec{n}_0$  тупий кут, а скалярний добуток

$$\vec{A} \cdot d\vec{S} = AdS \cos(\vec{A}, \vec{n}_0)$$

буде від'ємним. Векторне поле буде входити у точку  $0_1$ , у якій визначається дивергенція і точка ця є стоком поля. Дивергенція при цьому буде від'ємною скалярною величиною.

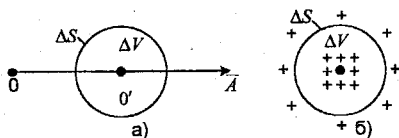


Рис. 1.5

На рис. 1.5 показані випадки, коли дивергенція дорівнює нулю. Перший приклад (рис. 1.5а) – це коли точка  $O'$  не містить ні витоку (джерела), ні стоку (споживача) поля вектора  $\vec{A}$ . Другий приклад (рис. 1.5б) – це коли, скажімо, буде однаковою кількість зарядів, які містяться в об'ємі  $\Delta V$  і кількість зарядів, які знаходяться з зовнішнього боку поверхні  $\Delta S$ .

Крім дивергенції у векторному аналізі для характеристики векторного поля використовують векторно-диференціальну характеристику, яка називається ротором або вихором. Ротор поля вектора  $\vec{A}$  позначають  $\text{rot } \vec{A}$  і визначають за формулою

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \bar{n}_0 \frac{\oint_{\Delta L} \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S}, \quad (1.6)$$

де  $\oint_{\Delta L} \vec{A} d\vec{l}$  – циркуляція вектора  $\vec{A}$  вздовж малого замкнутого контуру  $\Delta L$ ;  
 $\oint_{\Delta L} \vec{A} d\vec{l} / \Delta S$  – середнє значення поверхневої густини циркуляції;

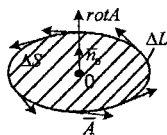


Рис. 1.6

$\bar{n}_0$  – одиничний вектор, нормальний до поверхні  $\Delta S$  у точці  $O$ ;

$\Delta L$  – замкнутий контур, який охоплює малу поверхню  $\Delta S$ .

Шляхом граничного переходу поверхня  $\Delta S$  і контур  $\Delta L$  стягуються у точку. Таким чином, ротор вектора  $\vec{A}$  є циркуляція вектора  $\vec{A}$ , визначена у точці  $O$ , яка належить поверхні  $\Delta S$ .

Зауважимо, що поверхня  $\Delta S$  може бути не тільки плоскою як зображено на рис. 1.6. Вона може бути випуклою або увігнутою, але має обов'язково спиратися на контур  $\Delta L$ .

Знак ротора, так само як і циркуляції, залежить від напрямку обходу контуру  $\Delta L$  вектором  $\vec{A}$ . Нагадаємо, що додатним напрямком обходу контуру є напрямок, коли поверхня  $\Delta S$  буде знаходитися ліворуч від спостерігача, що рухається вздовж контуру. Диференціально малий елемент контуру  $\vec{dl} = \vec{r}_0 dl$ , де  $\vec{r}_0$  – одиничний вектор, дотичний до контуру додатному у кожній його точці, який обходить контур у додатному напрямку. Таким чином, у випадку, зображеному на рис 1.6, маємо додатну циркуляцію вектора  $\vec{A}$ , і, відповідно, має додатне значення і ротор вектора  $\vec{A}$ , що підтверджується знаком скалярного добутку

$$\vec{A} \cdot \vec{dl} = A \cdot dl \cos 0 = Adl > 0.$$

Якщо ж вектор  $\vec{A}$  обходитиме контур у протилежному напрямку, то скалярний добуток

$$\vec{A} \cdot \vec{dl} = A \cdot dl \cdot \cos 180^\circ = -Adl < 0,$$

циркуляція і ротор вектора будуть від'ємними.

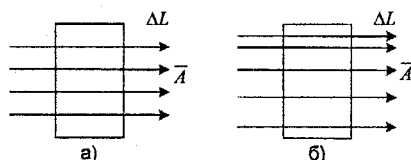


Рис. 1.7

Ротор вектора  $\vec{A}$  у випадку однорідного поля (рис. 1.7а) дорівнює нулю. Якщо поле цього вектора буде неоднорідним (рис. 7б), ротор стає не рівним нулю. Таким чином, можемо сказати, що по суті своїй ротор є характеристикою ступеня неоднорідності векторного поля.

### Вирази для дивергенції у конкретних системах координат:

- декартова система координат

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (1.7)$$

- циліндрична система координат

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot A_z) \right]; \quad (1.8)$$

- сферична система координат

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \cdot A_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cdot A_\theta) \right]. \quad (1.9)$$

### Вирази для ротора у конкретних системах координат:

– декартова система координат

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \bar{x}_0 \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \bar{y}_0 \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \bar{z}_0 \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right); \quad (1.10)$$

– циліндрична система координат

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \bar{r}_0 \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot A_\varphi) \right] + \bar{\varphi}_0 \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \bar{z}_0 \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]; \quad (1.11)$$

– сферична система координат

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\bar{A} = & \bar{r}_0 \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\theta) \right] + \bar{\theta}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) \right] + \\ & + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r) \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

### 1.4. Найважливіші векторні тотожності

Використовуючи наведені вирази для градієнта, дивергенції і ротора, можна довести такі векторно-диференціальні тотожності, які є справедливими для всіх ортогональних координатних систем, а саме:

$$\operatorname{rotgrad}U \equiv 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{divrot}\bar{A} \equiv 0, \quad (1.14)$$

$$\operatorname{divgrad}U \equiv \nabla^2 U, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{div}[\bar{A}\bar{B}] \equiv \bar{B}\operatorname{rot}\bar{A} - \bar{A}\operatorname{rot}\bar{B}, \quad (1.16)$$

$$\operatorname{div}(\psi\operatorname{grad}U) \equiv \operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}U + \psi\nabla^2 U, \quad (1.17)$$

$$\operatorname{rot}(\psi\bar{A}) \equiv [\operatorname{grad}\psi\bar{A}] + \psi\operatorname{rot}\bar{A}, \quad (1.18)$$

де  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;

$$\operatorname{rotrot}\bar{A} \equiv \operatorname{graddiv}\bar{A} - \nabla^2 \bar{A}, \quad (1.19)$$

де  $\psi$  та  $U$  – скалярні функції.



## 1.5. Вирази для результатів дії оператора Лапласа на скалярну функцію $U$ у конкретних системах координат

У декартовій системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad (1.20)$$

у циліндричній системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]; \quad (1.21)$$

у сферичній системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right]. \quad (1.22)$$

## 1.6. Теорема Остроградського-Гаусса та Стокса

Формально теорема Остроградського-Гаусса визначається виразом

$$\oint_{\Delta S} \overline{A} d\overline{S} = \int_{\Delta v} \text{div} \overline{A} dv. \quad (1.23)$$

Ліва частина цього виразу є потік вектора  $\overline{A}$  через замкнуту поверхню  $\Delta S$ , яка охоплює об'єм  $\Delta v$ . Підінтегральна функція  $\text{div} \overline{A}$  у правій частині виразу, як відомо з підрозділу 1.3, представляє собою потік вектора  $\overline{A}$  (інтенсивність поля цього вектора) у довільній точці об'єму  $\Delta v$ . Очевидно, інтегрування по всьому об'єму  $\Delta v$  дасть суму потоків у всіх точках цього об'єму, яка буде дорівнювати потоку вектора  $\overline{A}$  через поверхню  $\Delta S$ , що обмежує об'єм  $\Delta v$ .

Теорема Стокса формально визначається виразом

$$\oint_{\Delta L} \overline{A} d\overline{l} = \int_{\Delta S} \text{rot} \overline{A} d\overline{S}. \quad (1.24)$$

Ліва частина цього виразу є циркуляція вектора  $\overline{A}$  вздовж замкнутого контуру  $\Delta L$ , який стягує (охоплює) поверхню  $\Delta S$ . Підінтегральна функція  $\text{rot} \overline{A}$  у правій частині виразу, як відомо з підрозділу 1.3, представляє собою циркуляцію вектора  $\overline{A}$  у довільній точці поверхні  $\Delta S$ . Таким чином, інтегрування по всій поверхні  $\Delta S$  дасть суму циркуляцій в усіх точках цієї поверхні, яка буде дорівнювати циркуляції вектора  $\overline{A}$  по всьому контуру  $\Delta L$ , що обмежує (стягує) поверхню  $\Delta S$ .

## 1.7. Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Знайти значення градієнта електричного потенціалу  $U$ , заданого функцією  $U=C/r$ , у точці  $x=1, y=2, z=3$ , де  $r$  – радіус-вектор.

Розв'язуємо задачу у декартовій системі координат. Довжина радіуса-вектора  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Скористаємось виразом (1.2)

$$\begin{aligned} \text{grad}U &= \bar{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \bar{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \bar{x}_0 C \frac{2x}{-(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \bar{y}_0 C \frac{2y}{-(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \\ &+ \bar{z}_0 C \frac{2z}{-(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -C \frac{\bar{x}_0 \cdot x + \bar{y}_0 \cdot y + \bar{z}_0 \cdot z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}. \end{aligned}$$

Підставивши значення координати точки  $(1, 2, 3)$ , отримаємо

$$\text{grad}U = -\frac{C}{\sqrt{14}}(\bar{x}_0 + 2\bar{y}_0 + 3\bar{z}_0) \text{ В/м.}$$

Розв'яжемо цю саму задачу у сферичній системі координат для точок, які лежать на сфері радіусом  $r=5\text{м}$ , вважаючи, що точкове джерело електричного поля розміщене у центрі цієї сфери. Для цього скористаємось виразом (1.4)

$$\text{grad}U = \bar{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{C}{r} \right) + \bar{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{C}{r} \right) + \bar{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{C}{r} \right) = \bar{r}_0 \left( -\frac{C}{r^2} \right) \Big|_{r=5} = -\frac{C}{25} \bar{r}_0 \text{ В/м.}$$

**Задача 2.** Визначити значення дивергенції поля вектора  $\bar{A}_0 = \bar{x}_0 \cdot x^3 y^2 + \bar{y}_0 z^2 y x + \bar{z}_0 x^2 y z^3$  у точці з координатами  $(2, 1, 3)$ .

Скористаємось виразом (1.7)

$$\text{div} \bar{A} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (z^2 y x) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y z^3) = (2x^2 y^2 + xz^2 + x^2 y \cdot 2z^2) \times$$

$$\times \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} = 8 + 18 + 72 = 98.$$

**Задача 3.** Визначити дивергенцію поля вектора  $\vec{A} = \bar{r}_0 r^2 \sin \varphi + \bar{\varphi}_0 z \cos \varphi + \bar{z}_0 r \sin \varphi \cdot z^2$ , заданого у циліндричній системі координат, у точці  $(1, \pi/6, 2)$ .

Скористаємося виразом (1.8)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot r^2 \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (z \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot r \sin \varphi z^2) \right] = \frac{1}{r} (3r^2 \sin \varphi - z \sin \varphi + \\ &+ 2r^2 z \sin \varphi) = 3z \sin \varphi - \frac{z}{r} \sin \varphi + 2r \cdot z \sin \varphi = (3r - \frac{z}{r} + 2r \cdot z) \times \\ &\times \sin \varphi \Big|_{\substack{r=1 \\ \varphi=\pi/6 \\ z=2}} = (3-2+4) \cdot \sin \pi/65 \cdot 0.5 = 2.5. \end{aligned}$$

**Задача 4.** Визначити дивергенцію поля вектора  $\vec{A} = \bar{r}_0 r^2 \sin \theta + \bar{\theta}_0 r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta + \bar{\varphi}_0 r \cos \varphi \cdot \sin \theta$ , заданого у сферичній системі координат у точці  $(2, \pi/3, \pi/6)$ .

Скористаємось виразом (1.8):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \cdot r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cdot r \cos \varphi \cdot \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cdot r \cos \varphi \cos \theta) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^4 \sin^2 \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \cos \varphi \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} [4r^3 \sin^2 \theta - r^2 \sin \varphi \cos \theta + 2 \cos \varphi \cos 2\theta] = (4r \sin \theta - \sin \varphi \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \\ &+ \frac{2 \cos \varphi \cos 2\theta}{\sin^2 \theta}) \Big|_{\substack{r=2 \\ \theta=\pi/3 \\ \varphi=\pi/6}} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot (-\sqrt{3}/2)}{4 \cdot 1/2} = \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{4} = 5.89 \end{aligned}$$

**Задача 5.** Визначити ротор поля вектора  $\vec{A} = \bar{x}_0 x^3 y^2 + \bar{y}_0 z^2 xy + \bar{z}_0 x^2 yz^3$  у точці з координатами  $(1, 2, 3)$ .

Скористаємось виразом (1.10)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \bar{x}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 yz^3) - \frac{\partial}{\partial z} (z^2 xy) \right] + \bar{y}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial z} (x^3 y^2) - \frac{\partial}{\partial x} (x^2 yz^3) \right] + \bar{z}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (z^2 xy) - \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial y} (x^3 y^3) \right] = \left[ \bar{x}_0 (x^2 z^3 - 2zyx) + \bar{y}_0 (2xyz^3) + \bar{z}_0 (yz^2 2x^3 y) \right] \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2 \\ z=3}} = \bar{x}_0 (8-12) + \\ &+ \bar{y}_0 (-108) + \bar{z}_0 (18-4) = -4\bar{x}_0 - 108\bar{y}_0 + 14\bar{z}_0. \end{aligned}$$

## 2. ОСНОВНІ ВЕКТОРИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА МАТЕРІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

### 2.1. Попередні зауваження

При розгляді багатьох явищ у сучасній фізиці поряд з поняттям речовини вводиться поняття поля: електромагнітне поле, гравітаційне поле, поле ядерних сил і тепер уже говорять про торсіонні поля. Під полем розуміють одну з двох відомих форм існування матерії: речовина і поле.

Не дивлячись на те, що речовина і поле (у нашому випадку електромагнітне поле) є різними формами існування матерії, їх властивості є схожими у багатьох відношеннях. Так, наприклад, енергія електромагнітного поля може переходити у інші види енергії: теплову, механічну, хімічну, біологічну (фотосинтез у рослинному світі, наприклад) та інші види, що ми спостерігаємо у випадку взаємодії тіл.

Джерелами електромагнітного поля є електричні заряди. Нерухомі електричні заряди створюють тільки електричне поле. Заряди, що рухаються, створюють електричне і магнітне поле.

Розділення єдиного електромагнітного поля на електричне і магнітне має відносний характер, бо усе залежить від обраної системи координат. Наприклад, заряд, який рухається прямолінійно зі сталою швидкістю, створює навколо себе як електричне, так і магнітне поле. Проте для спостерігача, який рухається у тому самому напрямку з тією самою швидкістю, цей заряд є нерухомим і, отже, створює тільки електричне поле.

Електричне поле діє як на нерухомі, так і на рухомі електричні заряди, а магнітне тільки на рухомі заряди. Дія електромагнітного поля характеризується певним напрямком, тому для його описання вводять векторні величини. Розглянемо основні вектори, які характеризують електромагнітне поле, та зв'язки між ними.

### 2.2. Вектори електричного поля. Перше матеріальне рівняння

З курсу загальної фізики відомо, що вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  визначають як силу, з якою електричне поле діє на точковий позитивний одиничний заряд. Отже, між вектором  $\vec{E}$  і силою  $\vec{F}$ , яка діє на точковий заряд  $q$ , існує простий зв'язок

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (2.1)$$

Зауважимо, що заряд  $q$  повинен бути точковим. Тоді можна не враховувати розподіл зарядів у просторі, які, маючи певні розміри, створюють досліджуване поле.

Нагадаємо, що у системі СІ сила вимірюється у ньютонах (Н), а заряд – в кулонах (Кл), тому вектор  $\vec{E}$  вимірюється у вольтах на метр

$$[E] = [F]/[q] = \text{Н} / \text{Кл} = \text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} / \text{м} \cdot \text{А} \cdot \text{с} = \text{В} / \text{м}.$$

Як відомо з курсу загальної фізики, сила взаємодії зарядів, а отже, і напруженість електричного поля у різних середовищах різна, що пояснюється поляризацією речовини під дією електричного поля. При цьому з'являється додаткове електричне поле, яке накладається на первинне, і сумарне електричне поле виявляється відмінним від того, яким воно було б у вакуумі.

Поляризація є процес, який полягає у тому, що позитивно заряджене ядро і електрони зміщуються під дією електричного поля у протилежних напрямках. У результаті цього утворюється електричний диполь.

Неполярні молекули не мають власного дипольного моменту, але під дією зовнішнього електричного поля відбувається перерозподіл центрів позитивного заряду (ядра) і негативних зарядів електронів, тобто з'являється дипольний момент. При цьому дипольні моменти окремих молекул орієнтуються вздовж поля і сумарний дипольний момент виявляється орієнтованим по полю. Цей процес називається **електронною поляризацією**.

Полярні ж молекули (наприклад, води) мають свій власний дипольний момент. При відсутності зовнішнього електричного поля, дипольні моменти молекул орієнтовані хаотично і сумарний дипольний момент дорівнює нулю. Під дією зовнішнього електричного поля ці окремі дипольні моменти орієнтуються по полю, через що з'являється ненульовий сумарний дипольний момент. Цей процес називається **орієнтаційною поляризацією**.

Поляризація характеризується значенням вектора поляризованості  $\vec{P}$ , який визначається за формулою

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V},$$

де  $\sum \vec{P}_i$  – сумарний дипольний момент речовини в об'ємі  $\Delta v$ .

Очевидно, що вектор  $\vec{E}$  вимірюється в кулонах на квадратний метр (Кл/м<sup>2</sup>).

При слабкому зовнішньому полі величину вектора  $\vec{P}$  можна вважати пропорційною напруженості зовнішнього електричного поля

$$\vec{P} = \epsilon_0 k_{\text{ек}} \vec{E}, \quad (2.2)$$

де  $k_{en}$  – безрозмірний параметр, який називається діелектричною сприйнятливістю середовища;  $\epsilon_0$  – діелектрична стала (абсолютна діелектрична проникність вакууму,  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \Phi / M$ ).

Введемо вектор електричного зміщення  $\bar{D}$ , який виражається через вектори  $\bar{E}$  та  $\bar{P}$  співвідношенням

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}. \quad (2.3)$$

З виразів (2.2) та (2.3) матимемо

$$\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}, \quad (2.4)$$

$$\epsilon_a = \epsilon_0 (1 + k_{en}), \quad (2.5)$$

де вираз (2.4) називається першим матеріальним рівнянням,  $\epsilon_a$  – абсолютною діелектричною проникністю середовища, яка вимірюється у фарадах на метр ( $\Phi/M$ ). Вектор електричного зміщення, як і вектор  $\bar{P}$ , вимірюється в кулонах на метр квадратний ( $Кл/м^2$ ).

Поряд з  $\epsilon_a$  використовується відносна діелектрична проникність середовища, яка визначається зі співвідношення:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}. \quad (2.6)$$

У виразі (2.3) для вакууму через відсутність явища поляризації  $\bar{P} = 0$  і  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$  – значення вектора електричного зміщення у вакуумі. Аналогічно,  $\bar{D} = \epsilon_a \cdot \bar{E}$  є значенням вектора електричного зміщення у середовищі.

Якщо чисельник і знаменник виразу (2.6) домножити на  $\bar{E}$ , то можна визначитися з фізичним змістом відносної діелектричної проникності: *відносна діелектрична проникність середовища є число, яке показує у скільки разів значення вектора електричного зміщення у даному середовищі відрізняється від значення вектора електричного зміщення у вакуумі при одному й тому ж значенні зовнішнього електричного поля.*

Слід зауважити, що у багатьох випадках вирази (2.2)-(2.5) є наближеними. Наприклад, ці співвідношення порушуються у сильних електричних полях через порушення пропорційності векторів  $\bar{P}$  і  $\bar{E}$ , а значить – і векторів  $\bar{D}$  і  $\bar{E}$ . У деяких середовищах пропорційність між  $\bar{D}$  і  $\bar{E}$  порушується навіть у слабких електричних полях. Крім того, оскільки молекули у поляризаційному процесі проявляють інерцію, значення  $k_{en}$  і  $\epsilon$  залежать від частоти (швидкості зміни) поля  $\bar{E}$ .

### 2.3. Вектори магнітного поля. Друге матеріальне рівняння

Як відомо з курсу загальної фізики, сила з якою магнітне поле діє на електричний заряд, залежить від величини цього заряду і швидкості зміни його відносно цього поля. Ця сила називається магнітною силою  $\vec{F}_m$  і визначається за формулою

$$\vec{F}_m = q[\vec{v} \cdot \vec{B}], \quad (2.7)$$

де  $q$  – величина електричного заряду у кулонах (Кл);  $\vec{v}$  – вектор швидкості заряду  $q$  у метрах на секунду (м/с);  $\vec{B}$  – вектор магнітної індукції поля у веберах на метр квадратний (Вб/м<sup>2</sup>);  $\vec{F}_m$  – магнітна сила у ньютонках (Н).

Під дією магнітного поля речовина намагнічується. Коли з'являється додаткове магнітне поле, яке накладається на первинне, сумарне магнітне поле у речовині виявляється відмінним від того, яким воно було б у вакуумі.

Намагнічування є складним фізичним процесом, який спрощено можна пояснити тим, що атоми і молекули багатьох речовин мають власні магнітні моменти і їх можна розглядати як маленькі рамочки зі струмом. При відсутності зовнішнього магнітного поля ці елементарні магнітні моменти (магнітики) орієнтуються хаотично і речовина не має спонтанного намагнічування. Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається орієнтація магнітних моментів окремих атомів і молекул по полю і сумарний магнітний момент виявляється відмінним від нуля.

Середовища, в яких у результаті намагнічування додаткове магнітне поле зменшує зовнішнє, називаються **діамагнетиками**. Середовища, у яких додаткове поле збільшує зовнішнє, називаються **парамагнетиками**. Середовища, у яких це збільшення є значним, називаються **феромагнетиками**.

Намагнічування середовища характеризується **вектором намагніченості  $\vec{M}$** , який визначається за формулою

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta v},$$

де  $\sum \vec{m}_i$  – сумарний вектор магнітного моменту речовини в об'ємі  $\Delta v$ ; вектор  $\vec{M}$  вимірюється в амперах на метр (А/м).

При слабкому зовнішньому полі величину вектора  $\vec{M}$  можна вважати пропорційною напруженості зовнішнього магнітного поля  $\vec{H}$

$$\vec{M} = \mu_0 k_m \vec{H}, \quad (2.8)$$

де  $k_m$  – безрозмірний коефіцієнт, який називається **магнітною сприйнятливістю середовища**;  $\vec{H}$  – вектор напруженості магнітного

поля, який вимірюється у амперах на метр (А/м);  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнітна стала.

Вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  можна виразити через вектори  $\vec{M}$  і  $\vec{H}$  співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \quad (2.9)$$

З виразів (2.8) і (2.9) маємо

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (2.10)$$

$$\mu_a = \mu_0 (1 + k_m). \quad (2.11)$$

Вираз (2.10) називається другим матеріальним рівнянням, де  $\mu_a$  - абсолютна магнітна проникність середовища, яка вимірюється у Генрі на метр (Гн/м).

Поряд з абсолютною магнітною проникністю часто використовується відносна магнітна проникність  $\mu$

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}. \quad (2.12)$$

Якщо домножити чисельник і знаменник виразу (2.12) на вектор  $\vec{H}$ , то можемо говорити про  $\mu$ , як про число, яке показує у скільки разів відрізняється значення магнітної індукції у даному середовищі ( $\mu_a \vec{H}$ ) від значення магнітної індукції у вакуумі ( $\mu_0 \vec{H}$ ) при одному і тому ж значенні зовнішнього поля  $\vec{H}$ .

Якщо у виразі (2.11) покласти  $k_m=0$ , то  $\mu_a = \mu_0$  можна назвати абсолютною магнітною проникністю вакууму. Для діелектричних середовищ  $k_m < 0$ , для парамагнітних середовищ  $k_m > 0$ , але в обох випадках це невелике число  $|k_m| \ll 1$ . А от для феромагнетиків  $k_m \gg 1$ .

Слід пам'ятати, що у даному випадку рівняння (2.9)-(2.11) носять наближений характер оскільки: по-перше, магнітна сприйнятливість, а отже, і магнітна проникність феромагнітних матеріалів суттєво залежить від величини магнітного поля; по-друге, при перемагнічуванні має місце залишкове намагнічення (магнітний гістерезис); по-третє, через інерційність процесу переорієнтації магнітних моментів на високих частотах (при швидкодійній орієнтації вектора  $\vec{H}$ ).

## 2.4. Третє матеріальне рівняння

Третє матеріальне рівняння ще називається законом Ома у диференціальній формі, який виражає залежність об'ємної густини струму провідності  $\vec{j}_{np}$  у будь-якій точці провідного середовища від напруженості електричного поля  $\vec{E}$  у цій точці.



Зробимо перехід від звичайної (інтегральної) форми запису закону Ома до диференціальної форми. Для цього розглянемо рис. 6.1.

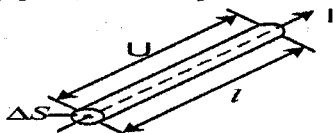


Рис. 6.1

Запишемо закон Ома в інтегральній формі щодо ділянки кола, яка має опір  $R$  і при різниці потенціалів на їх кінцях  $U$  через неї протікатиме струм  $I$

$$I = \frac{1}{R} U = GU, \quad (2.13)$$

де  $G$  – провідність цієї ділянки кола. Площу поперечного перерізу ділянки провідника  $\Delta S$  беремо малою настільки, що можна вважати рівномірно розподіленим по ній вектор об'ємної густини струму провідності  $\vec{j}_{np}$ , а тому  $I = j_{np} \cdot \Delta S$ . Провідність ділянки  $G = \sigma \frac{\Delta S}{l}$ , де  $\sigma$  – питома провідність провідника. Напряга між кінцями провідника  $U = E \cdot l$ , де  $E$  – напруженість електричного поля, що діє на цій ділянці.

Підставимо у вираз (2.13) замість  $I$ ,  $G$  та  $U$  їх значення. Отримаємо

$$j_{np} \cdot \Delta S = \sigma \frac{\Delta S}{l} \cdot E \cdot l$$

і після скорочень матимемо

$$j_{np} = \sigma \cdot E,$$

а оскільки електричний струм протікає у напрямку електричного поля, то останній вираз можна переписати у векторній формі

$$\vec{j}_{np} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad (2.14)$$

Вираз (2.14) і є законом Ома у диференціальній формі, або третім матеріальним рівнянням (третім рівнянням середовища), бо так само як і в першому та другому матеріальних рівняннях зв'язок між векторами електромагнітного поля здійснюється через первинний параметр середовища (матеріалу) – питому провідність  $\sigma$  у даному випадку та через первинні параметри  $\epsilon_0$  і  $\mu_0$  у попередніх випадках.

## 2.5. Класифікація середовища

Властивості будь-якого середовища характеризуються трьома первинними параметрами: діелектричною проникністю  $\epsilon_0$  (Ф/м), магнітною проникністю  $\mu_0$  (Гн/м) та питомою провідністю  $\sigma$  (См/м).

В залежності від характеру цих трьох параметрів середовища розділяють на:

1. **Лінійні** середовища, у яких усі три параметри ( $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$ ) не залежать від величини електричного і магнітного поля.

2. **Нелінійні** середовища, у яких хоча б один з цих трьох параметрів ( $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$ ) залежить від величини електричного чи магнітного полів.

Переважно, усі середовища є нелінійними. Проте, при слабких полях з достатньою для інженерних розрахунків точністю можна вважати, що їх параметри не залежать від електричного чи магнітного полів і що такі середовища лінійні.

1. **Однорідні** середовища є такі, у яких усі три параметри ( $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$ ) не залежать від координат, тобто властивості середовища є однаковими у всіх його точках.

2. **Неоднорідні** середовища – у яких хоча б один з трьох параметрів є функцією координат, тобто у різних точках середовища його властивості різні.

У свою чергу лінійні середовища поділяються на:

1. **Ізотропні** середовища, у яких усі три параметри є однаковими у різних напрямках.

2. **Анізотропні** середовища, у яких хоча б один з трьох параметрів ( $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$ ) буде мати різні значення в різних напрямках.

В ізотропних середовищах усі три вектори електричного поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  та  $\vec{D}$  і усі три вектори магнітного поля  $\vec{H}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{B}$  між собою є паралельними, а усі три параметри  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$  є скалярними величинами.

У анізотропних середовищах хоча б один з трьох параметрів є тензорною величиною і відповідні вектори поля можуть бути непаралельними між собою.

Наприклад, у підмагніченому фериті магнітна проникність  $\mu_a$  є тензором і її записують у формі матриці

$$\|\mu_a\| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}.$$

При цьому друге матеріальне рівняння матиме вигляд

$$\vec{B} = \|\mu_a\| \vec{H},$$

а вектори магнітного поля  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  будуть паралельними.

### 3. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА. РІВНЯННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ

У 1873 р. Дж. К. Максвелл опублікував свою фундаментальну роботу „Трактат про електрику і магнетизм”, у якій вперше сформулював у вигляді диференціальних рівнянь закони електродинаміки, узагальнивши накопичений на той час значний експериментальний матеріал. Ці, як їх цілком заслужено називають, „великі рівняння” тепер носять назву „Рівняння Максвелла”. Таких основних рівнянь чотири і за їх допомогою можна пояснити усі електричні, магнітні та електромагнітні процеси, які відносяться до макроскопічної електродинаміки.

Пройдемо подумки шляхом великого ученого, завдяки геніальним передбаченням якого ми маємо сьогодні чітке уявлення про динамічні, стаціонарні та статичні, електричні та магнітні поля.

#### 3.1. Перше рівняння Максвелла

Перше рівняння Максвелла є узагальненням відомого у домаксвеллівські часи закону повного струму, який ми тепер називаємо законом Ампера. (У ті далекі часи експериментальна фізика користувалась джерелом постійного струму – так званим „Вольтовим стовпом”, який був прототипом сучасних електричних батарейок чи акумуляторів). Закон Ампера формулюється так: циркуляція вектора напруженості  $\vec{H}$  магнітного поля по замкнутому контуру  $L$  дорівнює струму  $i_{np}$ , який пронизує цей контур

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = i_{np}, \quad (3.1)$$

де  $i_{np}$  – струм провідності. Простим прикладом є випадок, коли постійний струм протікає по прямолінійному провіднику і навколо цього провідника утворюється вихрове постійне (незмінне у часі) магнітне поле.

У загальному випадку розподіл струму  $i_{np}$  в середині контуру  $L$  може бути нерівномірним і тому

$$i_{np} = \int_S \vec{j}_{np} dS, \quad (3.2)$$

де  $S$  – довільна поверхня, яка спирається на контур  $L$ ;  $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$ ,  $\vec{n}_0$  – орт нормалі до поверхні  $S$ , який спрямований у напрямку руху гвинта у правогвинтовій системі при обході контуру  $L$  вектором  $\vec{H}$  (рис. 3.1);  $\vec{j}_{np}$  – вектор об'ємної густини струму провідності.

Підставивши у формулу (3.1) вираз для струму провідності з виразу (3.2), отримаємо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{np} d\vec{S}. \quad (3.3)$$

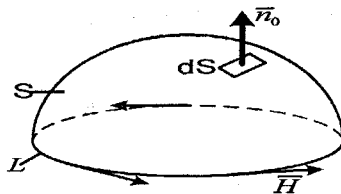


Рис. 3.1

Рівняння (3.1) і (3.3), які є справедливими для постійного струму, а, отже, і для постійного поля, не повністю описують процеси при змінному струмі.

Узагальнюючи закон Ампера на змінні у часі процеси, Максвелл увів фундаментальне поняття струму зміщення. Вивчаючи експериментальні результати свого співвітчизника М. Фарадея, він припустив, що цей струм зміщення щодо утворення магнітного поля є рівноцінним струму провідності. Проілюструємо це рисунком 3.2.

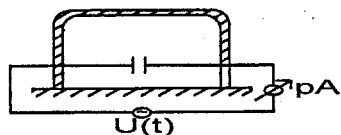


Рис. 3.2

Під ковпаком, зробленим з міцного вакуумного скла, що ідеально щільно прилягає до гладенького столу, знаходиться плоский конденсатор, який через впаяні у стінки ковпака виводи з'єднаний послідовно через амперметр  $pA$  з генератором гармонічної напруги  $U(t)$ . Амперметр засвідчить наявність струму у колі навіть тоді, коли з під ковпака відпompувати усе повітря.

Отже, змінний струм, як і передбачав Максвелл, циркулює між обкладинками конденсатора, якщо вони розділені діелектриком або навіть вакуумом, коли утворення струму провідності принципово неможливе. З'єднувальний дріт, по якому тече струм провідності, оточений круговими лініями магнітного поля, які утворюють „оболонку” навколо дроту усього електричного кола. За Максвеллом ця оболонка не розривається на конденсаторі, а є суцільною вздовж усього кола. Тобто, між обкладинками конденсатора існує змінне у часі електричне поле (бо конденсатор не перезаряджується двічі за один період гармонічної напруги), яке також оточене круговими лініями магнітного поля. Таким чином, змінне електричне поле, так само як і струм провідності, супроводжується появою магнітного поля. Отже, введений Максвеллом **струм зміщення**

характеризується вектором об'ємної густини  $\vec{j}_{zm}$ , яка визначається за формулою

$$\vec{j}_{zm} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (3.4)$$

Розмірність  $[\vec{j}_{zm}] = \frac{[\partial \bar{D}]}{\partial t} = \frac{K\epsilon_0}{m^2 \cdot c} = \frac{A}{m^2}$  – така сама як і об'ємної густини струму провідності  $j_{np}$ .

У відповідності до виразу (2.3) для будь-якого середовища

$$\vec{j}_{zm} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \quad (3.5)$$

Перший доданок у правій частині виразу (3.5)  $\epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{D}_{aux}}{\partial t}$  є виразом для об'ємної густини струму зміщення у вакуумі. Цей струм не пов'язаний з рухом зарядів між обкладинками конденсатора і визначається лише швидкістю зміни вектора електричного поля у вакуумі. Другий доданок – виражає струм, який обумовлений рухом (зміщенням) зарядів (полосів диполів поляризованих атомів) і тому він є по природі близьким до струму провідності. Крім того, струм, викликаний зміщенням зв'язаних (не вільних як електрони у провіднику) зарядів, призводить, як і струм провідності, до нагрівання матеріалу, а струм провідності у вакуумі теплового ефекту не викликає.

Як тепер стає зрозумілим, закон Ампера можна вважати законом повного струму і у випадку змінних полів, бо для цього у праву частину, окрім струму провідності  $i_{np}$ , необхідно ввести струм зміщення  $i_{zm}$ .

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = i_{np} + i_{zm} \quad (3.6)$$

Струм зміщення можна виразити через його об'ємну густину  $\vec{j}_{zm}$  за формулою

$$i_{zm} = \int_S \vec{j}_{zm} d\vec{S} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \partial \bar{S} \quad (3.7)$$

Підставивши вирази (3.1) та (3.7) у (3.6), отримаємо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{np} d\vec{S} + \int_S \vec{j}_{zm} d\vec{S} \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8) представляє собою перше рівняння Максвелла в інтегральній формі. Права частина цього рівняння є сумою  $i_{np} + i_{zm}$ , яка є повним струмом  $i_p$  через що без обмежень перше рівняння Максвелла можна вважати записом закону повного струму.

Перейдемо до диференціальної форми першого рівняння Максвелла. Для цього зробимо заміну у лівій частині рівняння (3.8), скориставшись теоремою Стокса

$$\oint_L \overline{H} d\overline{l} = \int_S \text{rot} \overline{H} d\overline{S},$$

Отриманий вираз

$$\int_S \text{rot} \overline{H} d\overline{S} = \int_S \overline{j}_{np} d\overline{S} + \int_S \overline{j}_{zu} d\overline{S},$$

оскільки у ньому скрізь йдеться про одну й ту саму область інтегрування, можна переписати таким чином:

$$\text{rot} \overline{H} = \overline{j}_{np} + \overline{j}_{zu} = \sigma \overline{E} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) і є диференціальна форма запису першого рівняння Максвелла.

У прямокутній системі координат векторне рівняння (3.9) еквівалентне трьом скалярним рівнянням

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_{np,x} + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_{np,y} + \frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_{np,z} + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Відповідно у циліндричній системі координат

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot H_\varphi) \right] = j_{np,r} + \frac{\partial D_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j_{np,\varphi} + \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = j_{np,z} + \frac{\partial D_z}{\partial t}; \end{cases}$$

і у сферичній системі координат

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot \sin \theta \cdot A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cdot A_\theta) \right] = j_{np,r} + \frac{\partial D_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \sin \theta \cdot A_\varphi) \right] = j_{np,\theta} + \frac{\partial D_\theta}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = j_{np,\varphi} + \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}. \end{cases}$$

### 3.2. Друге рівняння Максвелла

У 1831 р. Майкл Фарадей відкрив явище електромагнітної індукції, яке полягає у тому, що змінне у часі магнітне поле, яке перетинає площину провідникового витка, створює на його кінцях різницю потенціалів. Фарадей показав, що ця різниця потенціалів пропорційна швидкості зміщення потоку вектора магнітної індукції  $\vec{B}$ . Математично це виглядає так:

$$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad (3.10)$$

де  $u$  – різниця потенціалів на кінцях провідникового витка;  $\Phi$  – потік вектора  $\vec{B}$  через площину витка  $S$ . Знак „мінус” означає, що різниця потенціалів на кінцях витка породжує у витковій струм провідності такого напрямку, при якому створений цим струмом навколо витка вторинний магнітний потік спрямований проти первинного магнітного потоку. Сумарний магнітний потік при цьому зменшується, що можна вважати наслідком увімкнення додаткової різниці потенціалів у коло зовнішнього джерела, яке створило первинне магнітне поле. Знак цієї різниці потенціалів повинен бути протилежним знаку напруги джерела, яке створює первинне магнітне поле.

Різниця потенціалів є роботою, яка виконується у колі замкнутого витка  $L$  силою електричного поля  $\vec{E}$ , тобто

$$u = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (3.11)$$

Магнітний потік  $\Phi$  вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  через площину витка  $S$  дорівнює

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (3.12)$$

Підставивши значення для  $u$  з виразу (3.11) і значення  $\Phi$  з виразу (3.12) у формулу (3.10), отримаємо

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Оскільки операції інтегрування та диференціювання є лінійними математичними операціями, то порядок їх застосування у останньому виразі поміняємо місцями. Тоді

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.13)$$

Вираз (3.13) є другим рівнянням Максвелла у інтегральній формі, яке ще справедливо називають рівнянням Максвелла-Фарадея.

Щоб перейти до диференціальної форми запису цього рівняння, зробимо заміну у лівій частині виразу (3.13), скориставшись теоремою Стокса

$$\oint_L \overline{E} d\overline{l} = - \int_S \text{rot} \overline{E} d\overline{S}.$$

Якщо в отриманому виразі

$$\int_S \text{rot} \overline{E} d\overline{S} = - \int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} d\overline{S}$$

привіяти підінтегральні функції, то отримаємо

$$\text{rot} \overline{E} = - \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) є другим рівнянням Максвелла у диференціальній формі.

У прямокутній системі координат векторне рівняння (3.14) еквівалентне трьом скалярним рівнянням

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Відповідно, у циліндричній системі координат

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \cdot E_\varphi)}{\partial t} \right] = - \frac{\partial B_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = - \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r \cdot E_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] = - \frac{\partial B_z}{\partial t}, \end{cases}$$

і у сферичній системі координат

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cdot \sin \theta \cdot E_\varphi) - \frac{\partial(r \cdot E_\theta)}{\partial \varphi} \right] = - \frac{\partial B_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \cdot \sin \theta \cdot E_\varphi)}{\partial r} \right] = - \frac{\partial B_\theta}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r \cdot E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = - \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}. \end{cases}$$



### 3.3. Третє рівняння Максвелла

Третє рівняння Максвелла у інтегральній формі є теоремою Гаусса для речовини, узагальненою на змінні процеси

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = q. \quad (3.15)$$

За Гауссом мова йде про потік вектора  $\epsilon_a \vec{E}$  через замкнуту поверхню  $S$ , яка охоплює об'єм  $V$ , що містить постійний заряд  $q$  (рис.3.3).

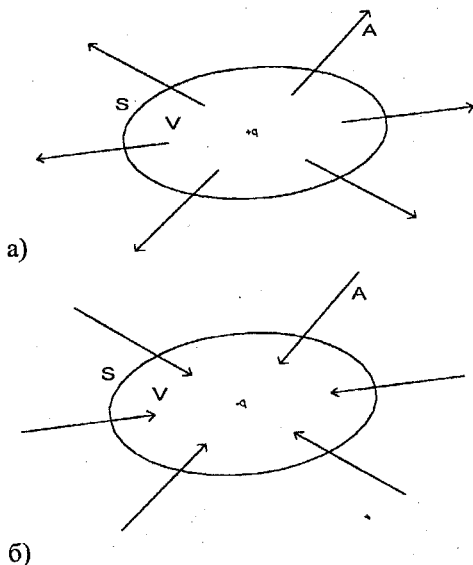


Рис. 3.3 Ілюстрації до виразу (3.15)

Якщо вектор  $\vec{D}$  виходить з об'єму  $V$ , то кажуть про додатний потік вектора  $\vec{D}$  через замкнуту поверхню  $S$ , а об'єм містить джерело поля цього вектора. Якщо ж вектор  $\vec{D}$  входить в об'єм  $V$  через замкнуту поверхню  $S$ , то кажуть, що об'єм містить споживача поля вектора  $\vec{D}$  і потік є від'ємним.

За Максвеллом заряд  $q$  може бути змінним, наприклад, гармонічною функцією часу  $q(t)$ . Тоді вектор  $\vec{D}$  також буде змінним і гармонічною функцією часу  $\vec{D}(t)$ .

З курсу вищої математики відомо, що потік вектора  $\vec{A}$  через замкнуту поверхню  $S$  може дорівнювати нулю у таких випадках:

1. Коли об'єм  $V$  (рис.3.3) не містить зарядів (немає ні джерела, ні споживача поля). Формально, коли  $q=0$  (рис.3.4а);

2. Коли заряди розміщуються в об'ємі  $V$  і зовні поверхні  $S$  у таких кількостях, що вони створюють однакові за величиною і зустрічні за напрямком потоки через поверхню  $S$ ;

3. Коли вектор  $\vec{A}$  має вихровий характер, тобто силова лінія цього поля є замкнутою лінією (рис.3.4б).

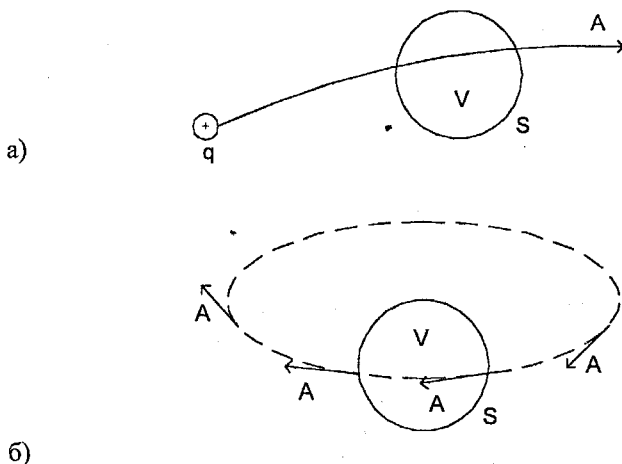


Рис. 3.4 Приклад відсутності сумарного потоку вектора  $\vec{A}$  через замкнуту поверхню

Виходячи з третього прикладу стає зрозумілим, що ненульовий потік через замкнуту поверхню може створити лише потенційний вектор поля, який має початок або кінець.

Щойно розглянуті процеси справедливі для речовин (середовища), які є ідеальним діелектриком. При наявності провідності  $\sigma$  у середовищі, обмеженому замкнутою поверхнею  $S$ , у якій знаходиться заряд  $q$ , що створює поле, за межі цієї поверхні буде витікати струм провідності

$$i_{np} = \oint_S j_{np} \vec{ds}.$$

Цей струм обумовить зменшення заряду в об'ємі за час від 0 до  $t$  на величину

$$\int_0^t i_{np} dt = \int_0^t \oint_S j_{np} \vec{ds} dt = \oint_S \int_0^t j_{np} dt \vec{ds}.$$

У такому випадку вираз (3.15) з урахуванням витрат заряду  $q$  на підтримку струму провідності слід записати у вигляді

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} = q - \oint_s \int_0^t \bar{j}_{np} \cdot dt \cdot d\bar{S},$$

або, після об'єднання поверхневих інтегралів

$$\oint_s (\bar{D} + \int_0^t \bar{j}_{np} dt) d\bar{S} = q$$

і урахування, що  $\bar{j}_{np} = \sigma \bar{E}$ , у вигляді рівняння

$$\oint_s (\bar{D} - \int_0^t \sigma \bar{E} dt) d\bar{S} = q, \quad (3.16)$$

яке називається **теоремою Гаусса**, коли  $q = \text{const}$ , або коли  $q = q(t)$  **третім рівнянням Максвелла**, для провідного середовища.

Для переходу до диференціальної форми третього рівняння Максвелла необхідно до лівої частини виразу (3.15) застосувати теорему Остроградського-Гаусса

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = \int_v \text{div} \bar{D} dV$$

та виразити заряд  $q$  через його об'ємну густину  $\rho$

$$q = \int_v \rho dV$$

Отримаємо

$$\int_v \text{div} \bar{D} dV = \int_v \rho dV.$$

Прирівнявши підінтегральні функції, матимемо рівняння

$$\text{div} \bar{D} = \rho, \quad (3.17)$$

яке називається **третім рівнянням Максвелла у диференціальній формі**.

### 3.4. Четверте рівняння Максвелла

**Четверте рівняння Максвелла у інтегральній формі** стосується вектора магнітної індукції і записується так:

$$\oint_s \bar{B} d\bar{s} = 0. \quad (3.18)$$

Такий запис свідчить про те, що у природі не існують магнітні заряди (або, принаймні, вони ще не відкриті) і тому лінії магнітного поля (силові лінії вектора  $\bar{B}$ ) є обов'язково неперервними, тобто або замкнуті, або ідуть з нескінченності у нескінченність. Іншими словами, вектор магнітної індукції має лише вихровий характер. Слід зауважити, що вектор

напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  є чисто вихровим лише у магнітно-однорідному середовищі, коли магнітна проникність не є функцією координат.

Якщо у лівій частині виразу (3.18) скористатися теоремою Остроградського-Гаусса, то отримаємо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dv = 0.$$

Прирівнявши нулю підінтегральну функцію матимемо рівняння

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.19)$$

яке називається четвертим рівнянням Максвелла у диференціальній формі.

### 3.5. Рівняння неперервності

Звернемось до третього рівняння Максвелла у інтегральній формі (3.15), яке, після заміни у правій частині заряду  $q$  виразом  $\int_V \rho dv$ , перепишемо так:

$$\oint_S \vec{D} ds = \int_V \rho dv.$$

Якщо у об'ємі, оточеному поверхнею  $S$  знаходиться заряд  $q$ , який з часом витрачається (зменшується), то це зменшення буде пов'язане з існуванням струму  $i_{np}$ , який витікає з даного об'єму. Зв'язок струму  $i_{np}$  з зарядом  $q$  визначається співвідношенням

$$i_{np} = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv.$$

Знак "мінус" перед похідною пояснюється тим, що з часом заряд  $q$  зменшується (заряд витрачається на підтримання струму).

Оскільки  $i_{np} = \oint_S \vec{j}_{np} ds$ , то

$$\oint_S \vec{j}_{np} ds = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv. \quad (3.20)$$

Співвідношення (3.20) називається законом збереження електричного заряду в інтегральній формі.

Скориставшись теоремою Остроградського-Гаусса у лівій частині виразу (3.20), матимемо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j}_{np} dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

і, прирівнявши підінтегральні функції, отримаємо:

$$\operatorname{div} \overline{j_{np}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Вираз (3.21) називається законом збереження заряду у диференціальній формі.

У відповідності до третього рівняння Максвелла  $\operatorname{div} \overline{D} = \rho$ . Продиференціюємо цей вираз за часом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \overline{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

або

$$\operatorname{div} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Враховуючи, що  $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \overline{j_{zm}}$  – об'ємна густина струму зміщення, то

$$\operatorname{div} \overline{j_{zm}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Підставивши з останнього виразу значення  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  у вираз (3.21), отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overline{j_{np}} &= -\operatorname{div} \overline{j_{zm}}, \\ \operatorname{div} \overline{j_{np}} + \operatorname{div} \overline{j_{zm}} &= 0, \end{aligned}$$

або

$$\operatorname{div} (\overline{j_{np}} + \overline{j_{zm}}) = 0. \quad (3.22)$$

Вираз (3.22) називається **рівнянням неперервності** (неперервності лінії вектора повного струму  $\overline{j_n} = \overline{j_{np}} + \overline{j_{zm}}$ ).

Цей самий результат можна отримати, якщо у виразі для першого рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{j_{np}} + \overline{j_{zm}}$$

застосувати до обох частин операцію дивергенції. Згідно з відомою векторно-диференціальною тотожністю

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \overline{H} \equiv 0,$$

матимемо

$$\operatorname{div} (\overline{j_{np}} + \overline{j_{zm}}) \equiv 0.$$

### 3.6. Сторонні струми і заряди

У правій частині виразу (3.1), який визначає закон Ампера, записано струм  $i_{np}$ . У відповідності до наведеного раніше обґрунтування під цим струмом слід розуміти струм генератора, який протікає по провіднику і створює магнітне поле. Проте таке уявлення не є єдино можливим. Якщо змінне у часі магнітне поле створене будь-яким джерелом струму, а у

просторі, де існує це поле, є провідники, то в останніх, як показує дослід, виникають струми провідності. Ці струми у свою чергу створюють магнітне поле, яке взаємодіє з первинним полем. У результаті матимемо сумарне поле, яке є результатом дії струмів генератора і струмів, що існують у провідниковому середовищі. Ці струми доцільно розділити. Струми, які створюються генераторами, домовились називати сторонніми електричними струмами або струмами збудження, а струми, створені полем у провідниковому середовищі – струмами провідності. Таким чином, перше рівняння Максвелла у диференціальній формі можна написати так:

$$\overline{P} = \overline{j_{en}} + \overline{j_{np}} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}, \quad (3.23)$$

де  $\overline{j_{en}}$  – вектор об'ємної густини стороннього струму;  $\overline{j_{np}} = \sigma \overline{E}$  – вектор об'ємної густини струму провідності.

Слід зауважити, що сторонній електричний струм не обов'язково має бути за природою струмом провідності. Сторонній струм може бути і струмом зміщення, який, протікаючи, наприклад, між обкладками плоского конденсатора, створює змінне у часі вихрове магнітне поле.

Ми матимемо право називати стороннім зарядом змінний у часі точковий електричний заряд з об'ємною густиною  $\rho(t)$ , який збудить змінне у часі електричне поле згідно з виразом

$$\operatorname{div} \overline{D} = \rho(t).$$

Порівнюючи математичну форму виразів (3.14) і (3.23), можна помітити схожість двох співвідношень у випадку, коли електрична провідність середовища  $\sigma$  дорівнює нулю і, якщо їх переписати так:

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{j_{en}} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \overline{E} = -\overline{j_M} - \frac{\partial \overline{B}}{\partial t},$$

де  $(-\overline{j_M})$  – об'ємна густина гіпотетичного і формально записаного у праву частину виразу (3.14), магнітного струму.

Розмірність  $[\overline{j_M}] = [\operatorname{rot} \overline{E}] = \frac{B}{M \cdot M} = \frac{B}{M^2}$ , а розмірність магнітного струму  $[\overline{j_M}] = B$ .

Аналогічно у праву частину виразу (3.19) можна додати значення об'ємної густини магнітного заряду  $-\rho_M$

$$\operatorname{div} \overline{B} = -\rho_M.$$

$$\text{Розмірність його } [\rho_m] = [\text{div} \bar{B}] = \frac{T_{\mathcal{J}}}{M} = \frac{B \cdot c}{M^2};$$

розмірність магнітного заряду (монополя)  $q_m$  визначимо з виразу (3.18), переписаного так:

$$\oint_S \bar{B} ds = -q_m,$$

тобто  $[q_m] = T_{\mathcal{J}} \cdot M^2 = \frac{B \cdot c \cdot M^2}{M^2} = B \cdot c$ , що і є розмірністю магнітного потоку (потoku вектора  $\bar{B}$ ) через замкнуту поверхню  $S$ , коли згадати, що  $B \cdot c = Bb$  (вебер).

Перепишемо 1-е і 2-е рівняння Максвелла з урахуванням сторонніх магнітних струмів і зарядів:

$$\begin{cases} \text{rot} \bar{H} = \bar{j}_{\text{ex}} + \sigma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{j}_{\text{ex}} + \sigma \bar{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \\ \text{rot} \bar{E} = -\bar{j}_m - \sigma_m \bar{H} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\bar{j}_m - \sigma_m \bar{H} - \mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.24)$$

де  $\sigma_m$  - питома магнітна провідність середовища, яка більш правильно мала б називатися питоим магнітним опором, а її розмірність

$$[\sigma_m] = \frac{[j_m]}{[H]} = \frac{B \cdot M}{A \cdot M^2} = \frac{O_M}{M}.$$

Легко помітити, що коли у першому рівнянні виразу (3.24) зробити заміну  $\bar{j}_{\text{ex}} \rightarrow -\bar{j}_m$ ,  $\sigma \rightarrow -\sigma_m$ ,  $\varepsilon_a \rightarrow -\mu_a$ ,  $\bar{E} \rightarrow \bar{H}$ , а у другому рівнянні – заміну  $-\bar{j}_m \rightarrow \bar{j}_{\text{ex}}$ ,  $-\sigma_m = \sigma$ ,  $-\mu_a \rightarrow \varepsilon_a$ ,  $\bar{H} \rightarrow \bar{E}$ , то перше рівняння перетворюється у друге, а друге – у перше.

Така властивість електродинамічних рівнянь називається **перестановною двоїстістю**.

Увівши поняття вектора об'ємної густини магнітного струму провідності  $\bar{j}_{\text{мпр}}$  і поняття питої магнітної провідності середовища  $\sigma_m$ , матимемо співвідношення

$$\bar{j}_{\text{мпр}} = \sigma_m \bar{H},$$

яке являє собою **четверте матеріальне рівняння**.

Формально введені магнітні заряди і струми привели до симетрії електричних і магнітних явищ, що не відповідає на сьогодні експериментальним результатам у фізиці. Але такий підхід дозволяє суттєво спростити процес розв'язання багатьох задач технічної електродинаміки і, зокрема, теорії антен.

### 3.7. Класифікація електромагнітних процесів

Протягом багатьох років досліджень явищ електромагнетизму електричні і магнітні явища то об'єднували, то знову роз'єднували в залежності від отриманих експериментальних результатів. Рівняння Максвелла дозволили чітко зрозуміти ці питання і класифікувати електромагнітні процеси.

#### 1. Електродинамічні процеси:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}_{np} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \bar{D} = \rho_{\ast}, \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0. \end{cases}$$

Електродинамічні процеси характеризуються залежністю фізичних величин від часу. У цьому випадку у 1-му і 2-му рівняннях Максвелла присутні і електричні і магнітні вектори, які утворюють єдине електромагнітне поле. Так, наприклад, якщо у якійсь точці простору існує збуджене змінне у часі магнітне поле ( $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \neq 0$ ), то, згідно з 2-м рівнянням Максвелла, воно приведе до появи змінного у часі і вихрового за характером електричного поля ( $\operatorname{rot} \bar{E} \neq 0$ ), а останнє у свою чергу, змінюючись у часі ( $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \neq 0$ ), породить, згідно з 1-м рівнянням Максвелла, змінне у часі і вихрове за характером магнітне поле ( $\operatorname{rot} \bar{H} \neq 0$ ) і т.д.

Іншими словами, буде існувати, поширюючись від точки свого "народження", електромагнітна хвиля. Швидкість цієї хвилі у вакуумі дорівнює швидкості світла  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Окрім цього у точці простору, де є змінний у часі заряд  $q(t)$ , буде існувати і змінне у часі, але потенціальне за характером електричне поле ( $\operatorname{div} \bar{D} \neq 0$ ).

Магнітне ж поле завжди залишається вихровим, про що свідчить рівність нулю  $\operatorname{div} \bar{B}$ .

#### 2. Стационарні процеси:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}_{np}, \\ \operatorname{rot} \bar{E} = 0, \\ \operatorname{div} \bar{D} = \rho, \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0. \end{cases}$$



Стаціонарні процеси описуються рівняннями, у яких відсутні похідні у часі ( $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ ), тобто усі фізичні величини не є функціями часу.

Прикладом може слугувати провідник, у якому протікає постійний струм провідності. У цьому випадку навколо провідника утвориться постійне і вихрове магнітне поле (випадок електромагніту), про що свідчать вирази  $\text{rot} \bar{H} = \bar{j}_{np}$  і  $\text{div} \bar{B} = 0$ . У провіднику під дією потенціального електричного поля ( $\text{div} \bar{D} = \rho$ ) постійного у часі рухатимуться рівномірно електричні заряди з об'ємною густиною  $\rho$ , утворюючи електричний струм провідності. Уточнимо, що електричне поле має чисто потенціальний характер:  $\text{rot} \bar{E} = 0$ ,  $\text{div} \bar{D} \neq 0$ .

### 3. Статичні процеси:

$$\begin{cases} \text{rot} \bar{H} = 0, \\ \text{rot} \bar{E} = 0, \\ \text{div} \bar{D} = \rho, \\ \text{div} \bar{B} = 0. \end{cases}$$

У наведених рівняннях нема жодного зв'язку між електричними і магнітними векторами, що свідчить про те, що окремо існують електричні статичні і магнітні статичні поля.

#### Рівняння електростатичного поля

$$\begin{cases} \text{rot} \bar{E} = 0, \\ \text{div} \bar{D} = \rho \end{cases}$$

вказують на чисто потенціальний характер електростатичного поля, яке може існувати лише при наявності постійного у часі і нерухомого електричного заряду і інтенсивність цього поля визначається об'ємною густиною заряду  $\rho$ .

#### Рівняння магнітостатичного поля

$$\begin{cases} \text{rot} \bar{H} = 0, \\ \text{div} \bar{B} = 0 \end{cases}$$

вказують на чисто вихровий характер магнітного поля, яке утворюється, наприклад, підковоподібним магнітом.

## 4. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ МОНОХРОМАТИЧНИХ КОЛИВАНЬ

У курсі “Основи електричних кіл” суттєве спрощення розрахунків дає введення комплексного методу, який може з успіхом бути використаним і у електродинаміці. Це так званий метод комплексних амплітуд, справедливність застосування якого вимагає виконання двох обов'язкових умов:

- 1) середовище має бути лінійним;
- 2) вектори поля створюються, наприклад, монохроматичним струмом з частотою  $\omega$ , об'ємна густина якого  $\vec{j}_{el} = \vec{j}_{el,m} \cos(\omega t + \varphi_j)$ , або у іншій формі

$$\vec{j}_{el} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{j}_{el,m} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left( \vec{j}_{el,m} \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} \right),$$

де  $\vec{j}_{el,m} = \vec{j}_{el,m} \cdot e^{j\varphi_1}$  — комплексна амплітуда об'ємної густини стороннього електричного струму.

Таким чином, для отримання миттєвого значення вектора густини електричного струму при відомому значенні його комплексної амплітуди достатньо помножити комплексну амплітуду на  $e^{j\omega t}$  і взяти дійсну частину цього добутку.

Аналогічно можуть бути представлені усі фізичні величини, які входять у рівняння Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{el} = \operatorname{Re} \left\{ q_{el,m} \cdot e^{j\omega t} \right\}, q_m = \operatorname{Re} \left\{ q_{m,m} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \\ \rho_{el} = \operatorname{Re} \left\{ \rho_{el,m} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \rho_m = \operatorname{Re} \left\{ \rho_{m,m} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \\ \vec{j}_{el} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{j}_{el,m} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \rho_m = \operatorname{Re} \left\{ \rho_{m,m} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \\ \vec{E} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}, \vec{H} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{H}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}, \\ \vec{D} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{D}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}, \vec{B} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{B}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Похідні у часі від векторів поля записуються так:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{Re} \left\{ j\omega \vec{E}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{Re} \left\{ j\omega \vec{H}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}. \quad (4.2)$$

#### 4.1. Рівняння Максвелла для комплексних амплітуд

Комплекс вектора напруженості магнітного поля дорівнює  $\vec{H} = \vec{H}_m \cdot e^{j\omega t}$ , комплекс вектора напруженості електричного поля  $\vec{E} = \vec{E}_m \cdot e^{j\omega t}$ , комплекс вектора електричного зміщення  $\vec{D} = \vec{D}_m \cdot e^{j\omega t}$ , комплекс вектора магнітної індукції  $\vec{B} = \vec{B}_m \cdot e^{j\omega t}$ , комплекс вектора об'ємної густини стороннього електричного струму  $\vec{j}_{\text{ex}} = \vec{j}_{\text{ex},m} \cdot e^{j\omega t}$ , комплекс вектора об'ємної густини струму електричної провідності  $\sigma \vec{E}_m \cdot e^{j\omega t}$ , комплекс вектора об'ємної густини стороннього магнітного струму  $\vec{j}_m = \vec{j}_{m,m} \cdot e^{j\omega t}$ , комплекс вектора об'ємної густини струму магнітної провідності  $\sigma_m \vec{H}_m \cdot e^{j\omega t}$ .

Підставивши у перше рівняння виразу (3.24) замість миттєвих значень векторів поля їх комплекси, отримаємо:

$$\text{rot } \vec{H}_m \cdot e^{j\omega t} = \vec{j}_{\text{ex},m} \cdot e^{j\omega t} + \sigma \vec{E}_m \cdot e^{j\omega t} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}_m \cdot e^{j\omega t}).$$

Оскільки  $e^{j\omega t}$  не залежить від координат, його можна винести за операцію ротора; комплексна амплітуда вектора електричного зміщення  $\vec{D}_m$  не залежить від часу, то її можна винести за операцію диференціювання у часі. З урахуванням сказаного останній вираз можна переписати так:

$$e^{j\omega t} \cdot \text{rot } \vec{H}_m = \vec{j}_{\text{ex},m} \cdot e^{j\omega t} + \sigma \vec{E}_m \cdot e^{j\omega t} + j\omega \vec{D}_m \cdot e^{j\omega t}$$

Після скорочення на  $e^{j\omega t}$  він матиме вигляд:

$$\text{rot } \vec{H}_m = \vec{j}_{\text{ex},m} + \sigma \vec{E}_m + j\omega \vec{D}_m. \quad (4.3)$$

Вираз (4.3) називається **першим рівнянням Максвелла для комплексних амплітуд векторів поля**, записаним у диференціальній формі.

Аналогічно, підставивши у друге рівняння виразу (3.24) замість миттєвих значень векторів поля їх комплекси, отримаємо вираз

$$\text{rot } \vec{E}_m = -\vec{j}_{m,m} - \sigma_m \vec{H}_m - j\omega \vec{B}_m, \quad (4.4)$$

який називається **другим рівнянням Максвелла для комплексних амплітуд векторів поля**, записаним у диференціальній формі.

Звернувшись до виразу (3.17) і, застосовуючи до нього аналогічні дії, отримаємо рівняння

$$\text{div } \vec{D}_m = \rho_m, \quad (4.5)$$

яке називають **третьім рівнянням Максвелла для комплексних амплітуд векторів поля**.

Скориставшись виразом (3.19), за аналогією запишемо

$$\operatorname{div} \overline{B}_m = 0 \text{ або } \operatorname{div} \overline{B}_m = -\rho_{\text{зм}}. \quad (4.6)$$

Вираз (4.6) називається **четвертим рівнянням Максвелла для комплексних амплітуд векторів поля у диференціальній формі**.

З урахуванням стороннього електричного струму перше рівняння Максвелла для векторів поля у інтегральній формі має вигляд

$$\oint_L \overline{H} dl = \int_s \overline{J}_{\text{ен}} ds + \int_s \sigma \overline{E} ds + \int_s \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} ds.$$

Після заміни векторів поля на їх комплекси і скорочення на множник  $e^{j\omega t}$ , отримаємо 1-е рівняння Максвелла для комплексних амплітуд у інтегральній формі

$$\oint_L \overline{H}_m dl = \int_s \overline{J}_{\text{ен}m} ds + \int_s \sigma \overline{E}_m ds + \int_s j\omega \overline{D}_m ds \quad (4.7)$$

З урахуванням стороннього магнітного струму друге рівняння Максвелла для векторів поля у інтегральній формі має вигляд

$$\oint_L \overline{E} dl = -\int_s \overline{J}_m ds - \int_s \overline{H} ds - \int_s \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} ds.$$

Відповідно йому друге рівняння Максвелла для комплексних амплітуд у інтегральній формі запишеться так:

$$\oint_L \overline{E}_m dl = -\int_s \overline{J}_{\text{зм}m} ds - \int_s \sigma_m \overline{H}_m ds - \int_s j\omega \overline{B}_m ds. \quad (4.8)$$

Третьюму рівнянню Максвелла для векторів поля (узагальненій теоремі Гауса) відповідатиме третє рівняння Максвелла для комплексних амплітуд

$$\oint_s \overline{D}_m ds = q_m, \quad (4.9)$$

а четвертому рівнянню Максвелла для векторів поля відповідатиме четверте рівняння Максвелла для комплексних амплітуд

$$\oint_s \overline{B}_m ds = 0 \text{ або } \oint_s \overline{B}_m ds = -q_{\text{зм}m}, \quad (4.10)$$

якщо брати до уваги комплексну амплітуду гармонічно-змінного з частотою  $\omega$  магнітного заряду  $q_{\text{зм}m}$ .

## 4.2. Комплексна діелектрична проникність. Відносність поділу середовищ на діелектрики і провідники

Звернемось до виразу (4.3) – першого рівняння Максвелла для комплексних амплітуд у диференціальній формі, а саме

$\operatorname{rot} \overline{H}_m = \overline{J}_{\text{ен}m} + \sigma \overline{E}_m + j\omega \varepsilon_0 \overline{E}_m$ , і перепишемо його у такому вигляді:

$$\text{rot } \overline{H}_m = \overline{j_{ex,m}} + (\sigma + j\omega\varepsilon_a)\overline{E}_m = \overline{j_{ex,m}} + j\omega\varepsilon_a(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a})\overline{E}_m = \overline{j_{ex,m}} + j\omega\varepsilon_a\overline{E}_m. \quad (4.11)$$

Величину  $\varepsilon_a = \varepsilon_a(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a})$  називають **комплексною діелектричною проникністю середовища**. Відношення  $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}$  позначається через  $\text{tg}\delta$  і називається тангенсом кута діелектричних втрат у цьому середовищі:

$$\text{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}. \quad (4.12)$$

Домноживши чисельник і знаменник виразу (4.12) на модуль вектора напруженості електричного поля  $|\overline{E}|$ , отримаємо

$$\text{tg}\delta = \frac{\sigma|\overline{E}|}{\omega\varepsilon_a|\overline{E}|}, \quad (4.13)$$

де  $\sigma|\overline{E}|$  – є модулем вектора об'ємної густини струму провідності;  $\omega\varepsilon_a|\overline{E}|$  – модуль вектора об'ємної густини струму зміщення.

Таким чином, за своїм фізичним змістом тангенс кута діелектричних втрат у даному середовищі показує у скільки разів модуль об'ємної густини струму провідності відрізняється від модуля об'ємної густини струму зміщення:

$$\text{tg}\delta = \frac{|j_{np}|}{|j_{zm}|}. \quad (4.14)$$

Так, в ідеальному діелектрику (наприклад, у вакуумі)  $\sigma = 0$  і  $\text{tg}\delta = 0$ , що свідчить про відсутність струму провідності у такому середовищі.

В ідеальному провіднику ( $\sigma \rightarrow \infty$  і  $\text{tg}\delta \rightarrow \infty$ ) логічно вважати відсутнім (рівним нулю) струм зміщення.

У будь-якому реальному середовищі значення  $\text{tg}\delta$  буде мати проміжне між цими крайніми випадками значення. Чим менший тангенс кута діелектричних втрат, тим ближчим за своїми властивостями середовище буде до ідеального діелектрика. Чим більше значення кута діелектричних втрат, тим ближче воно буде до ідеального провідника.

Очевидно у випадку, коли  $\text{tg}\delta \approx 1$  (мало відрізняється від одиниці, є сумірним з нею), середовище можна називати напівпровідником або напівдіелектриком, тобто таким, у якому є сумірними струм провідності і струм зміщення.

Тому домовлено вважати:

– коли  $\text{tg}\delta \ll 1$  – середовище є діелектриком у тому розумінні, що у ньому струм провідності набагато (на порядок і більше) є більшим за струм зміщення;

– коли  $tq\delta \gg 1$  – середовище є провідником у тому розумінні, що у ньому струм провідності набагато є меншим за струм зміщення;

– коли  $tq\delta \approx 1$ , то середовище є напівпровідником (напівдіелектриком) у тому розумінні, що у ньому струм провідності і струм зміщення є сумірними за величиною.

Оскільки тангенс кута діелектричних втрат залежить від частоти поля (див. вираз 3.36), то цей розподіл буде мати відносний характер, бо одне і те ж середовище в залежності від частоти може бути віднесеним як до провідного, так і до діелектричного. Наприклад, поверхня Землі при дослідженні процесу поширення електромагнітних хвиль кілометрового діапазону вважається дуже добрим провідником ( $tq\delta \gg 1$ ), а у декаметровому діапазоні ця ж сама поверхня проявляє себе діелектриком ( $tq\delta \ll 1$ ).

Слід вважати, що усі метали на будь-яких частотах є “надійними” провідниками, бо у цих матеріалів через величезну провідність ( $\sigma \geq 10^7 \text{ См/м}$ ) на будь-якій частоті тангенс кута діелектричних втрат буде на декілька порядків більшим за одиницю.

## 5. ОДНОРІДНІ ХВИЛЬОВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ

Спочатку зробимо деякі загальні зауваження. Будемо вважати середовище необмеженим однорідним лінійним та ізотропним. Електромагнітний процес у такому середовищі будемо розглядати як такий, що утворився поза його межами, а тому в рівняннях Максвелла прийемо рівними нулю сторонні струми та заряди, тобто:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \sigma \bar{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \varepsilon_a \operatorname{div} \bar{E} = 0, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = \mu_a \operatorname{div} \bar{H} = 0. \quad (5.4)$$

Задача полягає у визначенні векторів електромагнітного поля в процесі поширення його в указаному раніше середовищі з параметрами  $\mu_a$ ,  $\varepsilon_a$  та  $\sigma$ . Для цього досить розв'язати систему перших двох рівнянь Максвелла відносно двох невідомих  $\bar{E}$  та  $\bar{H}$ .

### 5.1. Однорідні хвильові рівняння Даламбера

Застосуємо операцію ротора до першого рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} = \sigma \operatorname{rot} \bar{E} + \varepsilon_a \operatorname{rot} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

і поміняємо місцями порядок дії операторів у другому доданку правої частини отриманого результату

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} = \sigma \operatorname{rot} \bar{E} + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{E}. \quad (5.5)$$

Підставимо в (5.5) значення  $\operatorname{rot} \bar{E}$  з другого рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} = -\mu_a \sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}. \quad (5.6)$$

Скориставшись відомою векторно-диференціальною тотожністю

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \nabla^2 \bar{a}, \quad (5.7)$$

перепишемо (5.6) у вигляді

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{H} - \nabla^2 \bar{H} = -\mu_a \sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}.$$

Враховуючи справедливість (5.4), отримаємо

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0. \quad (5.8)$$

Застосуємо операцію ротора до другого рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{H}.$$

Підставивши значення  $\operatorname{rot} \bar{H}$  з першого рівняння Максвелла (3.9) та врахувавши (5.7) і те, що при відсутності стороннього електричного заряду  $\operatorname{div} \bar{E} = 0$ , остаточно матимемо

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0. \quad (5.9)$$

Рівняння (5.8) та (5.9) називають однорідними рівняннями Даламбера. З курсу загальної фізики відомо, що хвильовий процес у вакуумі для довільного вектора  $\bar{a}$  описується хвильовим рівнянням

$$\nabla^2 \bar{a} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.10)$$

Перепишемо (5.8) і (5.9) для випадку вакууму ( $\sigma=0$ )

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.11)$$

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.12)$$

Порівнюючи (5.11), (5.12) з (5.10) відмітимо, що за конструкцією ці рівняння однакові. Це свідчить про те, що (5.11) та (5.12) теж є рівняннями хвильовими, а швидкість електромагнітної хвилі визначається як

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}}} = 3 \cdot 10^8 \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] = c, \quad (5.13)$$

тобто дорівнює швидкості світла у вакуумі.

Очевидно, що 
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (5.14)$$

є швидкість електромагнітної хвилі в середовищі, яке має значення відносних магнітної та діелектричної проникностей  $\mu$  та  $\epsilon$  відповідно.

## 5.2. Однорідні хвильові рівняння Гельмгольца

Досить часто в радіотехніці електромагнітний процес доцільно розглядати як монохроматичний процес. Це дозволяє суттєво спростити формули переходом від векторів поля до їхніх комплексних амплітуд. Це ми в означених раніше умовах можемо зробити, бо наше середовище є лінійним. У такому випадку скористаємося системою рівнянь Максвелла для комплексних амплітуд векторів поля



$$\operatorname{rot} \vec{H}_m = j\omega \varepsilon_a \vec{E}_m, \quad (5.15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_m = -j\omega \mu_a \vec{H}_m, \quad (5.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}_m = 0, \quad (5.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}_m = 0, \quad (5.18)$$

Застосувавши операцію ротора до (5.15) та, підставивши в отриманий результат значення для  $\operatorname{rot} \vec{E}_m$  з (5.16) й зваживши на (5.18), отримаємо

$$\nabla^2 \vec{H}_m + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \vec{H}_m = 0. \quad (5.19)$$

Застосувавши операцію ротора до (5.16), підставивши в отриманий результат значення для

$$\nabla^2 \vec{E}_m + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \vec{E}_m = 0. \quad (5.20)$$

Рівняння (5.19) та (5.20) є також хвильовими і називаються однорідними рівняннями Гельмгольца.

Рівняння Гельмгольца є однорідними диференціальними рівняннями другого порядку в частинних похідних з постійними коефіцієнтами, але векторними.

Кожне з них еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь відповідно:

$$\begin{aligned} \nabla^2 H_{mx} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a H_{mx} &= 0, \\ \nabla^2 H_{my} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a H_{my} &= 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 H_{mz} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a H_{mz} &= 0, \\ \nabla^2 E_{mx} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a E_{mx} &= 0, \\ \nabla^2 E_{my} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a E_{my} &= 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_m = x_0 E_{mx} + y_0 E_{my} + z_0 E_{mz}, \quad \vec{H}_m = x_0 H_{mx} + y_0 H_{my} + z_0 H_{mz}. \end{aligned}$$

### 5.3. Однорідні рівняння Гельмгольца для плоских хвиль

Уявімо собі, що електромагнітна хвиля поширюється у декартовій системі координат вздовж осі OZ так, що в площині XOY вона характеризується сталими значеннями векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , які розташовані в цій площині (рис.4.1).

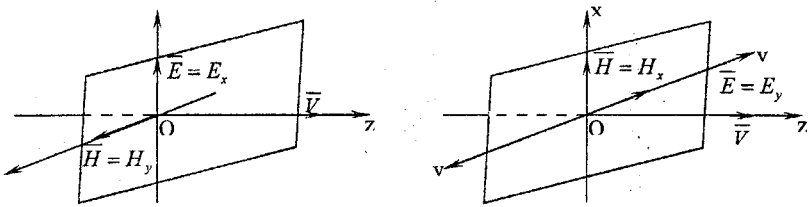


Рис. 4.1

У зв'язку з цим будемо називати вісь  $OZ$  повздовжною, а осі  $OX$  і  $OY$  поперечними осями, площину  $XOY$  - поперечною площиною. З рис. 4.1 (а,б) виходить, що  $E_z = 0$  та  $H_z = 0$ , тобто вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  є поперечними векторами, які утворюють поперечну електромагнітну хвилю, або хвилю  $T$ -типу (від англійського Transverse – поперечний).

Через сталість значень векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  в поперечній площині

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0.$$

Тобто вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  є функціями лише координати  $Z$  і тому

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \neq 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} \neq 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} \neq 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} \neq 0.$$

Площина  $XOY$ , таким чином, є площиною рівних амплітуд (еквіпотенціальною) і рівних фаз векторів поля (еквіфазною), а електромагнітна хвиля, що відповідає цим умовам, називається плоскою електромагнітною хвилею.

Такі хвилі створити неможливо, але досить близькими до них є хвилі, що досягають точок приймання, віддалених від точки передавання радіосигналу на великі відстані, коли маленьку частинку їхнього сферичного фронту, що взаємодіє з приймальною антеною, можна вважати плоскою.

Для плоскої хвилі у випадку (рис.4.1а) скалярні рівняння Гельмгольца (5.21) та (5.22) перепишуться так:

$$\nabla^2 \dot{E}_{mx} + \omega^2 \mu_a \dot{\epsilon}_a \dot{E}_{mx} = 0, \quad (5.23)$$

$$\nabla^2 \dot{E}_{my} + \omega^2 \mu_a \dot{\epsilon}_a \dot{E}_{my} = 0, \quad (5.24)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа. З урахуванням цього ми

фактично маємо справу з величинами  $\dot{E}_{mx}$  та  $\dot{H}_{my}$ , кожна з яких є функціями лише одного аргументу  $Z$ , тобто рівняння (5.23) та (5.24) перетворюються в лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_{mx} = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{my}}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_{my} = 0, \quad (5.26)$$

де  $k = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$  – коефіцієнт поширення хвилі.

#### 5.4. Загальний розв'язок скалярних однорідних рівнянь Гельмгольца для плоскої хвилі

Знайдемо загальний розв'язок рівнянь (5.25) та (5.26), використовуючи знання з курсу вищої математики:

$$\dot{E}_{mx} = A e^{-jkz} + B e^{jkz}, \quad (5.27)$$

$$\dot{H}_{my} = C e^{-jkz} + D e^{jkz}. \quad (5.28)$$

Враховуючи комплексність  $k = \beta - j\alpha$ , отримані результати перепишемо у вигляді

$$\dot{E}_{mx} = A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} + B e^{\alpha z} \cdot e^{j\beta z}, \quad (5.29)$$

$$\dot{H}_{my} = C e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} + D e^{\alpha z} \cdot e^{j\beta z}. \quad (5.30)$$

Вирази  $A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$  та  $C e^{-\beta z} \cdot e^{-j\alpha z}$  вказують на те, що йдеться про хвильовий процес, який поширюється вздовж осі  $OZ$  з початковими значеннями (при  $Z=0$ ) амплітуд  $\dot{E}_{mx}(0) = A$ ,  $\dot{H}_{my}(0) = C$ , та згасає за законом  $\exp(-\alpha z)$  з поточними значеннями фази ( $-\beta z$ ) (рис.4.1).

Поряд з цим вирази  $B e^{\alpha z} \cdot e^{j\beta z}$  та  $D e^{\alpha z} \cdot e^{j\beta z}$  вказують і на те, що існує зворотний хвильовий процес з початковими значеннями (при  $Z=0$ ) амплітуд  $\dot{E}_{mx}(Z_1) = B$ ,  $\dot{H}_{my}(Z_1) = D$ , який утворився за рахунок відбиття в точці  $Z_1$  і згасає за законом  $\exp(\alpha z)$  з початковими значеннями фази ( $\beta z$ ), та поширюється вздовж напрямку  $-OZ$ .

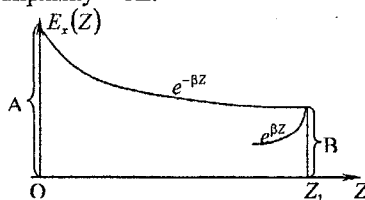


Рис. 4.2

У даному розділі ми розглядаємо середовище необмежене і однорідне, що виключає відбиття взагалі. Тому в (5.29) та (5.30) можемо

вважати  $B=D=0$ , тобто хвильовий процес існує лише у вигляді прямої (падаючої) хвилі, а зворотна (відбита) хвиля відсутня.

Таким чином, будемо вважати, що вираз

$$\dot{E}_{mx} = A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \quad (5.31)$$

є комплексною амплітудою вектора  $\overline{E}_{mx}$ , а вираз

$$\dot{H}_{my} = C e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \quad (5.32)$$

– комплексною амплітудою вектора  $\overline{H}_{my}$  плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі  $OZ$ .

Оскільки  $\overline{E}$  та  $\overline{H}$  є вектори взаємопов'язані, що відображають єдиний електромагнітний процес, і якщо  $A$  є довільним коефіцієнтом, то  $C$  довільним уже бути не може. Тому для знаходження  $\dot{H}_{my}$  скористаємося другим рівнянням Максвелла для комплексних амплітуд (5.16) і запишемо:

$$\overline{H}_m = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \text{rot } \overline{E}, \quad (5.33)$$

або

$$\overline{H}_m = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \begin{vmatrix} \overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_{mx} & \dot{E}_{my} & \dot{E}_{mz} \end{vmatrix},$$

де

$$\dot{E}_{my} = \dot{E}_{mz} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Тоді

$$\overline{H}_m = -\overline{y}_0 \frac{1}{j\omega\dot{\mu}_a} \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} = -\overline{y}_0 \frac{-jk}{j\omega\dot{\mu}_a} A e^{-jkz} = \overline{y}_0 \left( \frac{-j\omega\sqrt{\dot{\mu}_a \dot{\epsilon}_a}}{-j\omega\dot{\mu}_a} \right) A e^{-jkz} = \overline{y}_0 \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}_a}{\dot{\mu}_a}} \dot{E}_{mx};$$

$$\overline{H}_m = \dot{H}_{my} = \overline{y}_0 \frac{\dot{E}_{mx}}{z_c}, \quad (5.34)$$

де  $z_c = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\epsilon}_a}}$  – комплексний хвильовий опір середовища з

параметрами  $\dot{\mu}_a$  та  $\dot{\epsilon}_a$ .

Таким чином, загальний розв'язок однорідних рівнянь Гельмгольца буде мати вигляд:

$$\dot{E}_{mx} = A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}, \quad (5.35)$$

$$\dot{H}_{my} = \frac{A}{Z_c} e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}. \quad (5.36)$$

Хвильовий опір середовища є характеристикою середовища (його характеристичним опором) і залежить лише від його властивостей, а опором він названий тільки через те, що має розмірність Ом. Якщо

розділити (5.35) на (5.36), то отримаємо, що  $Z_c = \frac{E_{mx}}{H_{my}}$ , тобто хвильовий

опір є відношення поперечної складової вектора  $\vec{E}$  до поперечної складової вектора  $\vec{H}$  і не залежить від параметрів електромагнітної хвилі.

Для вакууму:

$$z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1/36\pi \cdot 10^{-9}}} = 120\pi (\text{Ом}).$$

## 6. ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ В НЕОБМЕЖЕНОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

### 6.1. Фазова та групова швидкості

Будемо, як і в попередньому розділі, вважати, що мова йтиме про необмежене однорідне лінійне і ізотропне середовище, у якому поширюється монохроматична плоска електромагнітна хвиля.

Загальний розв'язок однорідних рівнянь Гельмгольца для прямої хвилі має вигляд:

$$E_{mx} = A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z},$$

$$H_{my} = \frac{A}{Z_c} e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}.$$

Величина  $\alpha$  називається коефіцієнтом згасання хвилі, вимірюється в  $m^{-1}$  і показує у скільки разів зменшиться амплітуда хвильового процесу на кожному метрі поширення його вздовж осі  $OZ$ .

Величина  $\beta z$  показує, що поточна фаза  $\varphi$  хвилі зростає прямо пропорційно довжині пройденого шляху вздовж осі  $OZ$ , тобто

$$\varphi = \beta \cdot z.$$

Якщо початкову фазу (при  $z=0$ ) вважати рівною нулю  $\varphi(0) = 0$ , то на шляху, що дорівнює довжині хвилі  $\lambda$  значення фази буде дорівнювати  $\varphi(\lambda) = \beta \lambda = 2\pi$  радіан.

Звідси виходить, що

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} [\text{радіан/метр}]. \quad (6.1)$$

Це коефіцієнт фази хвилі, який показує на скільки радіан зросте значення фази при проходженні хвилею кожного метра шляху вздовж осі  $OZ$ .

Наприклад, якщо електромагнітна хвиля довжиною в 10 метрів пройде шлях  $\ell = 100$  метрів, то її фаза зростає на

$$\Delta\varphi = \beta \cdot z = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \ell = \frac{2\pi}{10} \cdot 100 = 20\pi \text{ рад.}$$

Миттєве значення вектора  $\vec{E}_x = \vec{E}_x(t)$  отримаємо, виділивши дійсну частину з комплексної величини цього вектора  $\vec{E}_x$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= \operatorname{Re} \{ \vec{E}_x \} = \operatorname{Re} \{ \vec{E}_{mx} \cdot e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ A \cdot e^{-j\alpha z} \cdot e^{j\omega t} \} = \\ &= \operatorname{Re} \{ \vec{E}_{mx} \cdot e^{j(\omega t - \alpha z)} \} = E_{mx} \cdot \cos(\omega t - \alpha z), \end{aligned}$$

де  $\overline{E}_{mx} = \overline{x}_0 \cdot A$  – амплітуда вектора напруженості плоскої електромагнітної хвилі.

Вираз  $(\omega t - \beta z)$  є поточне значення фази хвилі як електромагнітного монохроматичного процесу, яка є функцією двох координат: часу  $t$  та простору  $z$ .

При поширенні плоскої хвилі можемо вказати на координати  $Z_1$  та  $Z_2$ , коли значення фази будуть відрізнятися на сталу величину, що відповідає періоду гармонічного коливання:

$$\omega t - \beta z = n \cdot \pi = const, \text{ де } n = 0, 1, 2, \dots$$

Обчисливши повний диференціал цього виразу, отримаємо:

$$\omega dt - \beta dz = 0 \text{ або } dz/dt = \omega/\beta.$$

Відношення  $dz/dt$  – швидкість руху поверхні рівних фаз і тому називається фазовою швидкістю плоскої хвилі:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}. \quad (6.2)$$

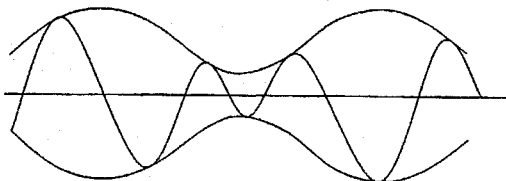


Рис. 6.1

Введемо поняття групової швидкості, як швидкості передачі інформації за допомогою радіосигналу (рис. 6.1). Для цього домовимось, що мова йтиме про вузькосмуговий радіосигнал, який має, наприклад, дискретний спектр. Для такого сигналу обмежимося  $n$ -ою гармонікою і тоді, розклавши в ряд Фур'є значення комплексного вектора електричного поля, отримаємо

$$\begin{aligned} \overline{E}_{mx} &= \overline{E}_{0mx} \cdot e^{-\alpha_0 z} \cdot e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} + \overline{E}_{1mx} \cdot e^{-\alpha_1 z} \cdot e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} + \overline{E}_{2mx} \cdot e^{-\alpha_2 z} \cdot e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)} + \dots \\ &\dots + \overline{E}_{nmx} \cdot e^{-\alpha_n z} \cdot e^{j(\omega_n t - \beta_n z)} = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} (\overline{E}_{0mx} \cdot e^{-\alpha_0 z} + \overline{E}_{1mx} \cdot e^{-\alpha_1 z} \cdot e^{j((\omega_1 - \omega_0)t - (\beta_1 - \beta_0)z)} + \\ &+ \overline{E}_{2mx} \cdot e^{-\alpha_2 z} \cdot e^{j((\omega_2 - \omega_0)t - (\beta_2 - \beta_0)z)} + \dots + \overline{E}_{nmx} \cdot e^{-\alpha_n z} \cdot e^{j((\omega_n - \omega_0)t - (\beta_n - \beta_0)z)}). \end{aligned}$$

Вираз у фігурних дужках позначимо через  $\overline{F}$  і запишемо:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \bar{E}_{0mx} \cdot e^{\alpha_0 z} + \bar{E}_{1mx} \cdot e^{-\alpha_1 z} \cdot e^{j(\beta_1 - \beta_0) \left( \frac{\omega_1 - \omega_0}{\beta_1 - \beta_0} t - z \right)} + \bar{E}_{2mx} \cdot e^{-\alpha_2 z} \cdot e^{j(\beta_2 - \beta_0) \left( \frac{\omega_2 - \omega_0}{\beta_2 - \beta_0} t - z \right)} + \dots + \\ & + \bar{E}_{nmx} \cdot e^{-\alpha_n z} \cdot e^{j(\beta_n - \beta_0) \left( \frac{\omega_n - \omega_0}{\beta_n - \beta_0} t - z \right)}. \end{aligned}$$

Розглянемо вирази:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\beta_1 - \beta_0} \approx \frac{\omega_2 - \omega_0}{\beta_2 - \beta_0} \approx \dots \approx \frac{\omega_n - \omega_0}{\beta_n - \beta_0} = \frac{\Delta \omega}{\Delta \beta}.$$

При вузькосмуговому сигналі  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  і їм відповідні  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  будуть мало відрізнятися між собою, тобто

$$\left. \frac{\Delta \omega}{\Delta \beta} \right|_{\substack{\omega \rightarrow \omega_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} = \frac{d\omega}{d\beta}, \quad (6.3)$$

а саме відношення  $d\omega$  до  $d\beta$  має розмірність швидкості, позначається  $v_{ep}$  і називається груповою швидкістю:

$$v_{ep} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

## 6.2. Коефіцієнт фази та коефіцієнт згасання плоскої хвилі

Далі отримаємо формули, за допомогою яких зможемо визначити коефіцієнти фази та втрат в середовищі, значення яких будуть залежати від параметрів середовища  $\mu_a, \epsilon_a, \sigma$  (магнітними втратами нехтуємо).

Коефіцієнт поширення  $K = \omega \sqrt{\mu_a \cdot \epsilon_a} = \alpha - j\beta$ . Після піднесення до квадрату правої та лівої частин, одержимо:

$$\omega^2 \mu_a \epsilon_a = (\alpha - j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 - 2j\alpha\beta,$$

$$\omega^2 \mu_a \epsilon_a (1 - jtg\delta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 - 2j\alpha\beta.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини обох сторін останнього рівняння, отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \omega^2 \mu_a \epsilon_a \\ 2\alpha\beta &= \omega^2 \mu_a \epsilon_a tg\delta \end{aligned} \right\}$$

розв'язування якої дасть такі результати:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{2} (\sqrt{1 + tg^2 \delta} + 1)}, \quad (6.4)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{2} (\sqrt{1 + tg^2 \delta} - 1)}. \quad (6.5)$$



### 6.3. Поширення плоских хвиль у середовищі без втрат

Таким середовищем є вакуум, а близьким до нього є сухе повітря. На практиці зустрічаються випадки, коли за умов конкретної задачі втратами можна знехтувати. В усіх цих випадках будемо вважати, що йде мова про середовище, в якому  $\sigma=0$  і  $tg\delta=0$ .

В цьому випадку  $\beta = \omega\sqrt{\mu_a\epsilon_a}$ ,  $\alpha = 0$ .

Фазова швидкість плоскої хвилі буде дорівнювати

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_a\epsilon_a}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a\epsilon_a}}, \quad (6.6)$$

а групова швидкість 
$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}(\omega\sqrt{\mu_a\epsilon_a})} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a\epsilon_a}}. \quad (6.7)$$

В таких середовищах фазова та групова швидкості між собою рівні.

Хвильовий опір  $z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$  є дійсним числом, а тому вектори  $\vec{E}_x$  та  $\vec{H}_y$  зберігаються за фазами:

$$\vec{E}_{mx} = \vec{x}_0 A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z},$$

$$\vec{H}_{my} = \vec{y}_0 \frac{A}{z_c} e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} = \vec{y}_0 A \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}.$$

### 6.4. Поширення плоских хвиль у середовищі з втратами

Таким середовищем є напівпровідник, для якого струм зміщення  $I_{zm}$  має значення одного порядку зі струмом провідності  $I_n$  і тому нехтувати ним не можна. В цьому випадку фазова та групова швидкості визначаються за загальними формулами

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a\epsilon_a}{2}(\sqrt{1+tg^2\delta}+1)}}, \quad (6.8)$$

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\left(\omega\sqrt{\frac{\mu_a\epsilon_a}{2}(\sqrt{1+tg^2\delta}+1)}\right)}. \quad (6.9)$$

Хвильовий опір середовища з втратами визначається:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a(1-jtg\delta)}} = |Z_c| e^{j\varphi},$$

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{\mu_a \cdot \cos\delta}{\epsilon_a}}; \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctg \delta = \frac{\delta}{2}.$$

У цьому випадку вектори хвилі приймають вигляд:

$$\vec{E}_{mx} = \overline{x_0} A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z},$$

а

$$\vec{H}_{my} = \overline{y_0} \frac{A}{z_c} e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} = \overline{y_0} A \sqrt{\frac{|\epsilon_a|}{\mu_a}} e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{-j\delta/2}.$$

Звідси видно, що вектор напруженості магнітного поля буде відставати за фазою від вектора напруженості електричного поля на кут, що дорівнює половині кута діелектричних втрат у середовищі.

### 6.5. Поширення плоскої хвилі в металах

У металах навіть на надвисоких частотах виконується нерівність  $tg\delta \gg 1$ , тобто комплексна діелектрична проникність  $\epsilon_a$  є величиною уявною, яку можна записати у вигляді

$$\epsilon_a = \epsilon_a(1 - jtg\delta) \approx -j\epsilon_a tg\delta = -j\epsilon_a \frac{\sigma}{\omega\epsilon_a} = -j\frac{\sigma}{\omega}. \quad (6.10)$$

Тоді коефіцієнт поширення буде дорівнювати

$$k = \alpha - j\beta = \omega \sqrt{\mu_a(-j\frac{\sigma}{\omega})} = \omega \sqrt{-j} \cdot \sqrt{\frac{\mu_a\sigma}{\omega}}.$$

Враховуючи, що  $-j = e^{-\pi/2}$ ,  $\sqrt{-j} = e^{-j\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j)$ , отримаємо

$$k = \alpha - j\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a\sigma}{2\omega}} (1 - j).$$

Звідки

$$\alpha = \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a\sigma}{2\omega}},$$

або

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\sigma}{2}}. \quad (6.11)$$

Цього наслідку досягнемо знехтувавши в формулі (6.10) одиницею порівняно з  $tg\delta$ , тобто:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a\epsilon_a}{2} \cdot tg\delta} = \omega \sqrt{\frac{\mu_a\epsilon_a\delta}{2\omega\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_a}{2}},$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a\epsilon_a}{2} \cdot tg\delta} = \omega \sqrt{\frac{\mu_a\epsilon_a}{2} \cdot \frac{\sigma}{\omega\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_a}{2}}.$$

Нехтуючи в формулах (6.8) та (6.9) одиницею порівняно з  $tg2\delta$ , отримаємо:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma \mu_0}}, \quad (6.12)$$

$$a \quad g_{sp} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}{2} \cdot \frac{\sigma}{\omega}}} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \epsilon_0}{2}} \cdot \frac{\mu_0 \sigma}{2}} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma \mu_0}}. \quad (6.13)$$

Як бачимо, групова швидкість у два рази більша фазової швидкості. В середовищі без втрат фазова та групова швидкості збігаються за значенням і не залежать від частоти  $\omega$  електромагнітної хвилі. В двох останніх випадках ця залежність існує, а тому стверджують, що в цих випадках має місце дисперсія, яка вказує на залежність значень фазової та групової швидкостей хвилі від частоти, подібно до дисперсії в оптиці, де йде мова про залежність коефіцієнта заломлення світла від частоти його променя.

Хвильовий опір в металах визначається:

$$Z_{cm} = \sqrt{\frac{\mu_0}{-j \frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{j \frac{\omega \mu_0}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\sigma}} \cdot e^{j\pi/4}.$$

Електрична та магнітна складові хвилі мають вигляд

$$\vec{E}_{mx} = x_0 A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z},$$

$$\vec{H}_{my} = y_0 A \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu_0}} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{-j\pi/4}.$$

Як бачимо, вектор магнітної складової електромагнітної хвилі в металах відстає за фазою від електричної складової на  $\pi/4$  радіана.

## 6.6. Поверхневий ефект

Нехай плоска електромагнітна хвиля поширюється в металі з питомою провідністю  $\sigma$  і на початку координат напруженість електричного поля дорівнювала  $E_0$  (рис. 6.2).

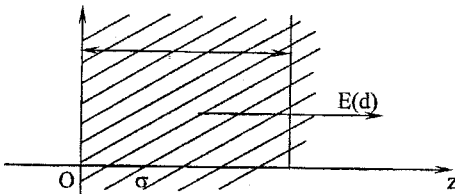


Рис. 6.2

При зануренні в метал на глибину  $d$  значення напруженості електричного поля  $E(d)$  буде в  $e^{-\alpha d}$  разів меншою ніж  $E_0$ , тобто через згасання поля з коефіцієнтом згасання  $\alpha$  (6.11) будемо мати:

$$E(d) = E_0 \cdot e^{-\alpha d} = E_0 \cdot e^{-1}.$$

Звідси:

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}}.$$

Ця величина має назву глибина проникнення поля в метал, тобто глибина, на якій вектори поля ослаблюються в  $e$  разів.

Чим більша питомо провідність і вища частота поля, тим на меншу глибину проникає поле в метал. Для кольорових металів  $\sigma = (1 \dots 6,3) \cdot 10^7$  сим/м,  $\mu_a = \mu_0$ , для заліза  $\sigma = 1,0 \cdot 10^7$  сим/м, для феромагнітних металів  $\sigma$  має значення порядку  $10^6$  сим/м, а значення  $\mu_a$  може досягати тисяч одиниць.

Тому метали є дуже добрими електромагнітними екранами. На надвисоких частотах срібний екран завтовшки в декілька мікрон забезпечує ослаблення поля в тисячі разів. На низьких частотах більш ефективними виявляються екрани з феромагнітних матеріалів.

При дії змінного електромагнітного поля на провідник в останньому виникає електричний струм, який протікає лише в приповерхневому тонкому шарі. Це явище відоме в електротехніці як поверхневий або скінефект.

В наслідок поверхневого ефекту центральна частина провідника, по суті, не використовується. Тому на високих частотах для економії металу і зменшення ваги часто суцільні провідники замінюють полими.

## 7. ГРАНИЧНІ УМОВИ

### 7.1. Загальні зауваження

На практиці постійно зустрічаються випадки, коли параметри середовища ( $\mu, \epsilon, \sigma$ ), або один з них, змінюються стрибком від одних значень до інших. Така ситуація виникає при переході через границю, що розділяє два різних середовища, при передаванні електромагнітних хвиль по хвилеводах і в багатьох інших випадках. Стрибокподібні зміни параметрів середовища повинні привести до таких самих змін і у векторів поля. При цьому диференціювання по координатах в цих пограничних точках неможливе, а рівняння Максвелла в диференціальній формі втрачають зміст. Тому для вивчення поведінки векторів електромагнітного поля на межі розділення середовищ потрібно застосовувати рівняння Максвелла в інтегральній формі, які залишаються справедливими і в цих випадках.

Співвідношення, які зв'язують значення векторів поля в різних середовищах на поверхні (межі) їх розподілення, мають назву граничних умов.

Для визначення цих умов будемо вважати, що з обох боків в межах тонкого шару з кінцевою товщиною  $\Delta h$  (рис. 7.1) параметри першого середовища змінюються плавно у напрямку другого середовища, наближаючись до значень  $\mu_2, \epsilon_2, \sigma_2$ , а параметри другого середовища змінюються плавно у напрямку першого середовища, наближаючись до значень  $\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1$ .

Далі граничним переходом за умови, що  $\Delta h \rightarrow 0$ , відтворимо реальну ситуацію, коли межа переходу є нескінченно тонкою ( $\Delta h = 0$ ) (рис. 7.1).

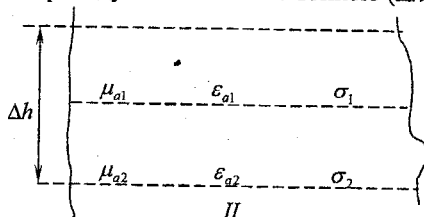


Рис. 7.1

Будемо вважати, що перше і друге середовища є однорідними лінійними і ізотропними.

Оскільки будь-який вектор, довільно зорієнтований відносно межі розділення, можна подати як суму нормальної до границі і тангенціальної до неї складових, то аналіз можна здійснити окремо для цих складових, що суттєво полегшує задачу. Зауважимо, що жодна з задач не може бути задовільно розв'язана без граничних умов.

## 7.2. Граничні умови для векторів електричного поля

### 7.2.1. Граничні умови для нормальних складових векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$

Спочатку будемо вважати, що поверхня розділення двох середовищ не містить електричних зарядів. В примежевому шарі (рис. 7.2) товщиною  $\Delta h$ , що охоплює межу розділення першого і другого середовищ, уявно «вирізаємо» прямокутну призму з верхньою основою  $\Delta S_1$ , нижньою основою  $\Delta S_2$  і середнім перерізом граничною поверхнею  $\Delta S$ . Площини ці будемо вважати настільки малими, що, по-перше, їх можна вважати плоскими і, по-друге, в обох середовищах розподіл нормальних компонент векторів можна вважати рівномірним в межах  $\Delta S_1$  і  $\Delta S_2$ .

Основи призми будуть зорієнтовані ортами зовнішніх (по відношенню до об'єму призми) нормалей  $n_{01}$  і  $n_{02}$ , тобто  $\Delta \vec{S}_1 = \vec{n}_{01} \cdot \Delta S_1$ ,  $\Delta \vec{S}_2 = \vec{n}_{02} \cdot \Delta S_2$ .

Застосуємо третє рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_{S_n} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad (7.1)$$

де  $S_n$  – повна площа поверхні призми,  $V$  – повний об'єм призми,  $\rho$  – об'ємна щільність заряду.

Очевидно, що  $S_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_\delta$  де  $\Delta S_1$  і  $\Delta S_2$  – площі основ, а  $\Delta S_\delta$  – площа бічної поверхні призми. Тоді рівняння (7.1) буде мати вигляд:

$$\int_{\Delta S_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{D} d\vec{S} + \int_{\Delta S_\delta} \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

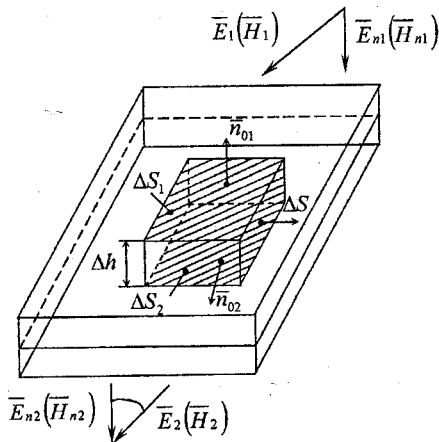


Рис. 7.2

Наблизимо товщину примежевого шару  $\Delta h$  до нуля. При цьому  $\Delta S_1$  і  $\Delta S_2$  зліплюються з  $\Delta S$ . В результаті отримуємо

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \overline{D}_1 d\overline{S} + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta S_2} \overline{D}_2 d\overline{S} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dV, \quad (7.2)$$

де 
$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta S_1} \overline{D}_1 d\overline{S} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\overline{D}_1 \overline{\Delta S}_1) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\overline{D}_1 \cdot \overline{n}_{01}) \Delta S_1 = D_{1n} \cdot \Delta S_1,$$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta S_2} \overline{D}_2 d\overline{S} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} -(\overline{D}_2 \overline{\Delta S}_2) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} -(\overline{D}_2 \cdot \overline{n}_{02}) \Delta S_2 = -D_{2n} \cdot \Delta S_2,$$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta S_2} \overline{D} d\overline{S} = 0, \quad \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dV = 0.$$

Таким чином, з урахуванням граничного переходу при  $\Delta h \rightarrow 0$  рівняння (7.2) переписується у вигляді

$$D_{2n} - D_{1n} = 0.$$

При наявності в межі розділення поверхневих зарядів зі щільністю  $\rho_s$  матимемо :

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s. \quad (7.3)$$

Співвідношення показує, що при переході з одного середовища в інше нормальні складові вектора  $D$  змінюється стрибком, який рівний поверхневій щільності заряду. З урахуванням I-ого матеріального рівняння  $\epsilon_{a1} E_{1n} - \epsilon_{a2} E_{2n} = \rho_s$ . При  $\rho_s = 0$

$$\epsilon_{a1} E_{1n} - \epsilon_{a2} E_{2n} = 0; \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}. \quad (7.4)$$

Співвідношення показує, що нормальні складові вектора  $\vec{E}$  при переході з одного середовища в інше терплять розрив (зміну), значення якого визначається відношенням діелектричних проникностей цих середовищ. Наявність поверхневої щільності заряду приводить до зміни величини розриву, збільшуючи або зменшуючи його. При деяких значеннях  $\rho_s$  нормальна складова вектора  $\vec{E}$  може бути неперервною. Зауважимо, що поверхневі заряди в природі відсутні. Їх вводять для спрощення розрахунків замість реального тонкого шару зарядів у випадках, коли не цікавить розподіл поля в середині шару.

## 7.2.2. Граничні умови для тангенціальних складових векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$

Розмістимо вектор  $\vec{E}_1$  у першому середовищі так, щоб він ліг в площину  $P$ , яка збігається з площиною рис.7.3

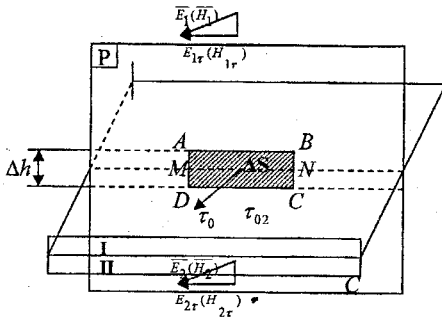


Рис. 7.3

В площині перерізу площини  $P$  з примезевим шаром малої товщини  $\Delta h$  виділимо прямокутний контур  $ABCD$ , у якого  $AB = \Delta l_1 (\Delta \vec{l}_1 = \Delta l_1 \cdot \vec{\tau}_{01})$  та  $CD = \Delta l_2 (\Delta \vec{l}_2 = \Delta l_2 \cdot \vec{\tau}_{02})$  є верхня та нижня сторони такої малої довжини, що їх можна вважати відрізками прямих і вздовж них тангенціальні складові векторів  $E_{1\tau}$  та  $E_{2\tau}$  відповідно можна вважати розміщеними рівномірно. Лінія  $MN$  збігається з межею розділення першого і другого середовищ і має довжину  $\Delta l$ . Площа  $AS$  прямокутника  $ABCD$  орієнтована вздовж орта  $\vec{\tau}_0$ , а нормаль до неї спрямована так, що орти  $\vec{\tau}_{01}$  та  $\vec{\tau}_{02}$  збігаються з додатним напрямом обходу контуру  $ABCD$ .

Застосуємо в даній задачі друге рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_{ABD} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{AS} \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S},$$

де  $d\vec{l}$  – елемент контуру  $ABCD$ ,  $\Delta S$  – площа, обмежена цим контуром. Або, враховуючи вищевикладене, отримаємо

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{AS} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}. \quad (7.5)$$

Взявши границю від першої і третьої складової, а також від суми другої і четвертої складових при умові, що  $\Delta h \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{AB} \vec{E}_1 d\vec{l}_1 &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{E}_1 \Delta \vec{l}_1) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{\tau}_{01}) \Delta l_1 = E_{1\tau} \cdot \Delta l, \\ \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{CD} \vec{E}_2 d\vec{l}_2 &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{E}_2 \Delta \vec{l}_2) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{\tau}_{02}) \Delta l_2 = -E_{2\tau} \cdot \Delta l, \\ \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{BC} \vec{E} d\vec{l} + \int_{DA} \vec{E} d\vec{l} &= 0. \end{aligned}$$



Оскільки  $\Delta S$  дуже мала, то вектор магнітної індукції  $\vec{B}$ , спрямований перпендикулярно до неї, можемо вважати розміщеним рівномірно, а тому:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \frac{d\vec{B}}{\Delta S} d\vec{S} = \frac{d}{dt} \left( \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \vec{B} d\vec{S} \right) = \frac{d}{dt} \left( \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int \vec{B} \Delta S \right) = 0.$$

Таким чином, після граничного переходу за умови, що  $\Delta h \rightarrow 0$ , отримаємо рівняння (7.4) у такому вигляді:

$$(E_{1r} - E_{2r})\Delta l = 0.$$

При цьому, маючи на увазі, що  $\Delta l \neq 0$ , отримаємо граничні умови для тангенціальних складових вектора електричного поля

$$E_{1r} = E_{2r} \quad (7.6)$$

Скориставшись першим матеріальним рівнянням, цей вираз перепишемо так:  $\frac{D_{1r}}{\epsilon_{a1}} = \frac{D_{2r}}{\epsilon_{a2}}$ ,  $\frac{D_{2r}}{D_{1r}} = \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}$ . Звідси одержимо

$$D_{2r} = \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}} D_{1r}.$$

З (7.5) та (7.6) витікає, що тангенціальна складова вектора електричного поля при переході через межу розділення двох середовищ не змінюється, а тангенціальна складова вектора електричного зміщення - змінюється стрибком, величина якого дорівнює відношенню  $\frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}$ .

Граничні умови показують, що на межі розділення двох середовищ вектори  $E$  і  $D$  заломлюються. Позначимо кути між нормаллю  $\vec{n}_0$  до поверхні розділення та векторами  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  відповідно  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ .

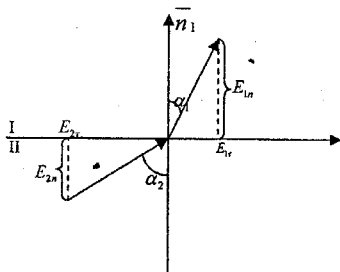


Рис. 7.4

Оскільки  $tg\alpha_1 = \frac{E_{1r}}{E_{1n}}$ ;  $tg\alpha_2 = \frac{E_{2r}}{E_{2n}}$ , то застосувавши граничні умови при відсутності поверхневого заряду на межі розподілення отримаємо співвідношення

$$tg\alpha_1 = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}} tg\alpha_2.$$

### 7.3. Фізична сутність граничних умов для векторів електричного поля

Розглянемо межу розділення двох однорідних ізотропних середовищ, які відрізняються лише значенням діелектричних проникностей: у першому це  $\epsilon_{a1}$ , у другому —  $\epsilon_{a2}$ . Будемо спочатку вважати, що на цій межі відсутні вільні поверхневі заряди ( $\rho_s = 0$ ).

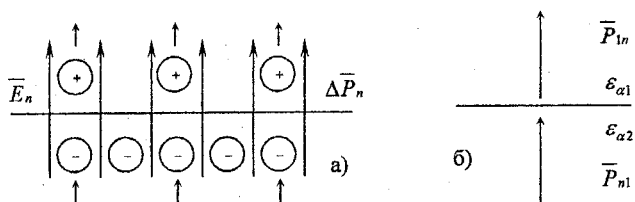


Рис. 7.5

Заряди однозначності припустимо, що  $\epsilon_{a2} > \epsilon_{a1}$  (рис. 7.5 а). Зорієнтуємо вектор зовнішнього електричного поля перпендикулярно до межі розділення середовищ. Під дією цього поля обидва середовища поляризуються з утворенням електричних диполів, кількість яких буде більшою у другому середовищі, тому що  $\epsilon_{a2} > \epsilon_{a1}$ . У цьому випадку кожен диполь утворить елементарний вектор поляризації  $\Delta \bar{P}_n$ . Таким чином, вектор макрополяризованості першого середовища  $\Delta \bar{P}_{1n}$  буде меншим за вектор макрополяризованості другого середовища  $\Delta \bar{P}_{2n}$  (рис. 7.5, б).

На межі розділення середовищ знаходяться незкомпенсовані додатні заряди диполів другого середовища, які утворять вторинне електричне поле (рис. 7.5). Вектори цього поля  $\bar{E}$  та  $-\bar{E}$  у першому та другому середовищах будуть рівними за довжиною і протилежно спрямованими.

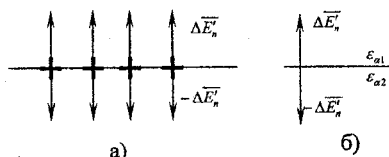


Рис. 7.6

Таким чином, нормальна складова електричного поля в першому середовищі  $\bar{E}_{1n} = \bar{E}_n + \bar{E}_n$  буде мати більше значення, ніж у другому середовищі  $\bar{E}_{2n} = \bar{E}_n - \bar{E}_n$ .

Нормальна складова вектора електричного зміщення у першому середовищі  $\bar{D}_{1n} = \epsilon_0 \bar{E}_{1n} + \bar{P}_1$  і нормальна складова цього вектора у

другому середовищі  $\overline{D}_{2n} = \epsilon_0 \overline{E}_{2n} + \overline{P}_2$  будуть мати однакові значення, бо додатний стрибок  $\epsilon_0 \overline{E}_{1n}$  порівняно з  $\epsilon_0 \overline{E}_{2n}$  компенсується таким самим стрибком  $\overline{P}_2$  порівняно з  $\overline{P}_1$ .

Зрозуміло, що у випадку, коли межа розділення двох середовищ матиме вільні електричні заряди  $\rho_s$ , то «висота» стрибка нормальної складової  $\overline{D}_n$  дорівнюватиме  $\rho_s$ , а «висота» стрибка нормальної складової  $\overline{E}_n$  зросте на  $\rho/\epsilon_0$ .

Розглянемо тепер випадок, коли зовнішнє електричне поле є тангенціальним до межі розділення двох середовищ ( $\epsilon_{a2} > \epsilon_{a1}$ ). Як бачимо з рис.7.7 на межі розділення середовищ відбувається взаємна компенсація додатних і від'ємних полюсів диполів і вторинне електричне поле не утворюється, а тому  $\overline{E}_{1\tau} = \overline{E}_{2\tau} = \overline{E}_\tau$  – тангенціальна складова вектора напруженості електричного поля є неперервною при переході з одного середовища в інше.

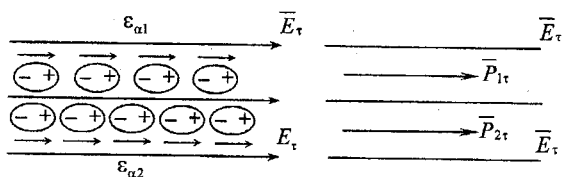


Рис. 7.7

Тангенціальні складові векторів електричного зміщення будуть мати значення у першому середовищі  $\overline{D}_{1\tau} = \epsilon_{a1} \overline{E}_\tau + \overline{P}_{1\tau}$ , а у другому –  $\overline{D}_{2\tau} = \epsilon_{a2} \overline{E}_\tau + \overline{P}_{2\tau}$ . Вектор  $\overline{P}_{2\tau}$  довший за  $\overline{P}_{1\tau}$ , а тому  $\overline{D}_\tau$  буде мати стрибок при переході з першого середовища в друге, «висота» якого пропорційна відношенню  $\epsilon_{a2}/\epsilon_{a1}$ .

## 7.4. Граничні умови для векторів магнітного поля

### 7.4.1. Граничні умови для нормальних складових векторів $\overline{H}$ і $\overline{B}$

Звертаючись до рис. 7.3, застосуємо четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі  $\oint_S \overline{B} d\overline{S} = 0$ , (7.7)

$$\text{або} \quad \int_{\Delta S_1} \overline{B} d\overline{S} + \int_{\Delta S_2} \overline{B} d\overline{S} + \int_{\Delta S_3} \overline{B} d\overline{S} = 0.$$

За аналогією з викладеним у 7.2.1 після межового переходу отримаємо

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (7.7)$$

Тобто, при переході через межу розділення середовищ, нормальна складова вектора магнітної індукції є неперервною.

Враховуючи друге матеріальне рівняння, умова (7.7) перепишеться так:

$$H_{2n} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}} H_{1n}. \quad (7.8)$$

З виразу (7.8) бачимо, що нормальна складова вектора напруженості магнітного поля на границі переходу з першого середовища в друге змінюється стрибком в  $\frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}$  разів.

#### 7.4.2. Граничні умови для тангенціальних складових векторів $\overline{H}$ і $\overline{D}$

Повертаючись до рис. 7.3, застосуємо перше рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_{ADCB} \overline{H} d\overline{l} = \int_{\Delta S} \overline{j} d\overline{S} + \int_{\Delta S} \frac{d\overline{D}}{dt} d\overline{S},$$

$$\text{або} \quad \int_{BA} \overline{H} d\overline{l} + \int_{AD} \overline{H} d\overline{l} + \int_{DC} \overline{H} d\overline{l} + \int_{CB} \overline{H} d\overline{l} = \int_{\Delta S} \overline{j} d\overline{S} + \int_{\Delta S} \frac{d\overline{D}}{dt} d\overline{S}. \quad (7.9)$$

За аналогією з викладеним в 7.2.1 та після межового переходу отримаємо

$$H_{2t} = H_{1t}. \quad (7.10)$$

В цьому випадку при переході через межу розділення, яка не містить електричні поверхневі струми, тангенціальна складова вектора напруженості магнітного поля є неперервною.

Враховуючи друге матеріальне рівняння, умова (7.10) перепишеться

у вигляді:  $\frac{B_{2t}}{\mu_{a2}} = \frac{B_{1t}}{\mu_{a1}}$ , або  $\frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}$ . Звідси:

$$B_{2n} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}} B_{1n} \quad (7.11)$$

Тобто тангенціальна складова вектора магнітної індукції при переході через межу з першого середовища в друге змінюється стрибком в  $\frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}$  разів.

Окремо розглянемо випадок, коли електричні струми розподілені по поверхні розділення середовищ у вигляді нескінченно тонкого шару (рис.7.8). Такі струми називають поверхневими і визначають співвідношенням

$$\bar{j} = \bar{r}_0 \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l}. \quad (7.12)$$

З урахуванням (7.7) і розглядом рис. 7.8 можемо записати

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \bar{j} d\bar{S} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{\Delta S} (\bar{j}, \bar{r}_0) = \int_{\Delta S} (\bar{j}_S, \bar{r}_0) dl = j_S \Delta l. \quad (7.13)$$

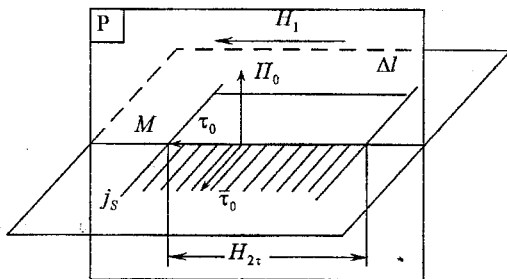


Рис. 7.8

Підставляючи (7.13) після межового переходу в (7.9), отримаємо

$$H_{1r} - H_{2r} = j_S, \quad (7.14)$$

або у векторній формі

$$[\bar{n}_0, (\bar{H}_1 - \bar{H}_2)] = \bar{j}_S. \quad (7.15)$$

Умови (7.14) і (7.15) показують, що при переході через межу розділення першого в друге середовище, в якій течуть поверхневі струми, тангенціальна складова вектора напруженості магнітного поля змінюється стрибком на величину, яка дорівнює поверхневій густині струму в цій точці.

Для тангенціальної складової вектора магнітної індукції граничні умови в такому разі запишуться:

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} - \frac{B_{1a}}{\mu_{a2}} = \bar{j}_s. \quad (7.16)$$

### 7.5. Фізична сутність граничних умов для векторів магнітного поля

Розглянемо межу розділення двох однорідних ізотропних середовищ, які відрізняються лише значеннями магнітних проникностей  $\mu_{a1}$  і  $\mu_{a2}$ . Припустимо, що  $\mu_{a1} > \mu_{a2}$ .

Зорієнтуємо вектор зовнішнього магнітного поля тангенціально до межі розділення, тобто перпендикулярно площині рисунка у напрямку від нас (рис.7.9).

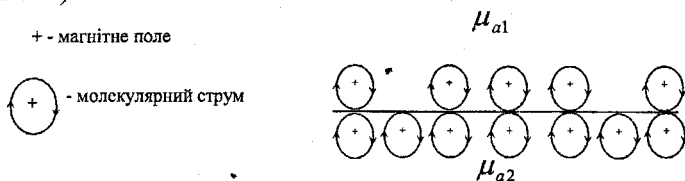


Рис. 7.9

Під дією вектора магнітного поля  $\bar{H}_\tau$  в першому і другому середовищі утворяться елементарні молекулярні кругові струми. За рахунок їхньої неповної взаємної компенсації (тому що  $\mu_{a1} > \mu_{a2}$ ) в межі розділення цих середовищ буде існувати поверхневий електричний струм (рис. 7.10 а).

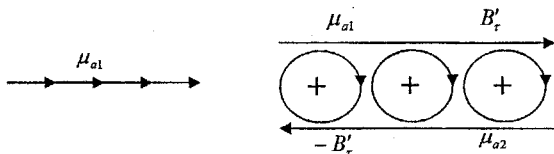


Рис 7.10

Цей струм, в свою чергу, утворить у першому середовищі додаткове магнітне поле  $\bar{B}'_\tau$ , а в другому середовищі – поле  $-\bar{B}'_\tau$  (рис. 7.10 б), площина якого повернута відносно площини (рис. 7.10 а) на  $90^\circ$  так, що некомпенсований поверхневий струм спрямований від нас. Силкові лінії цього поля показані колами. Нормальні ж складові додаткового поля на межі розділення взаємно компенсуються і тому  $\bar{B}_{in} = \bar{B}_{2n}$ .

Тангенціальні складові магнітної індукції в першому середовищі  $\bar{B}_{1\tau} = \bar{B}_\tau + \bar{B}'_\tau$  і в другому середовищі  $\bar{B}_{2\tau} = \bar{B}_\tau - \bar{B}'_\tau$  будуть відрізнятися на межі розділення в  $\mu_{a2}/\mu_{a1}$  разів.

При відсутності поверхневих струмів, зумовлених рухом вільних зарядів, тангенціальні складові векторів  $\bar{B}/\mu_0$  і  $\bar{M}_L$  мають однаковий

розрив при переході через межу розділення. Тому тангенціальна складова вектора  $\vec{H}$ , яка дорівнює  $\vec{H}_t = \vec{B}_t / \mu_a + \vec{M}_t$ , де  $\mu_a$  - вектор намагніченості, буде неперервною на межі розділення.

Разом з цим нормальна складова вектора  $\vec{H}$  ( $H_n = B_n / \mu_a + M_n$ ) на межі розділення зміниться стрибком, тому що  $\vec{B}_n$  неперервна. Нормальна складова вектора  $\vec{M}_n$  матиме різні значення (через  $\mu_{a1} \neq \mu_{a2}$ ) з різних боків межі розділення.

Поверхневі ж струми (за рахунок руху вільних зарядів по поверхні розділення) залишають нормальну складову вектора  $\vec{B}$  і нормальну складову вектора  $\vec{H}$  неперервними. Але при наявності цих струмів зміна значення  $\vec{B}_t / \mu_0$  не буде дорівнювати зміні значення  $\vec{H}$  і тому тангенціальна складова  $\vec{H}_t$  на межі розділення матиме розрив, який дорівнюватиме значенню поверхневої густини струму  $j_s$ , тобто  $H_{1t} - H_{2t} = j_s$ .

## 7.6. Повна система граничних умов для векторів електромагнітного поля

На поверхні розділення двох середовищ у загальному випадку мають виконуватись такі граничні умови:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \rho_s, \\ E_{2t} = E_{1t}, \\ B_{2n} = B_{1n}, \\ H_{1t} - H_{2t} = j_s. \end{cases} \quad (7.17)$$

Ці рівняння (граничні умови) справедливі для будь-яких електромагнітних процесів, які розглядаються в Максвеллівській (класичній) електродинаміці, і складають повну систему граничних умов для векторів електромагнітного поля. Всі інші граничні умови для складових  $D$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $H$  є наслідками рівнянь цієї системи і трьох матеріальних рівнянь електродинаміки.

У векторній формі система рівнянь (7.17) має вигляд:

$$\begin{cases} (\vec{n}_0 \vec{D}_2) - (\vec{n}_0 \vec{D}_1) = \rho_s, \\ [\vec{n}_0, \vec{E}_2] = [\vec{n}_0, \vec{E}_1], \\ (\vec{n}_0, \vec{B}_2) = (\vec{n}_0, \vec{B}_1), \\ [\vec{n}_0, \vec{H}_1] - [\vec{n}_0, \vec{H}_2] = j_s. \end{cases} \quad (7.18)$$

## 7.7. Граничні умови на поверхні ідеального провідника

На практиці при дослідженні надвисокочастотних електромагнітних полів у хвилеводах, поблизу відбиваючих металевих поверхонь апертурних антен тощо через мале їхнє проникнення в метал часто припускають, що цей метал є ідеальним провідником. Тоді граничні умови спрощуються, бо в середовищі з  $\sigma \rightarrow \infty$  поле відсутнє.

Нехай ідеально провідним буде друге середовище. Тоді

$\overline{D}_2 = \overline{E}_2 = \overline{B}_2 = \overline{H}_2 = 0$ , а умови (7.17) і (7.18) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} E_{1n} = \rho_S / \varepsilon_{a1}, \\ E_{1r} = 0, \\ H_{1n} = 0, \\ H_{1r} = j_S. \end{cases} \quad (7.19)$$

$$\begin{cases} (\overline{n}_0, \overline{E}_1) = \rho_S / \varepsilon_{a1}, \\ [\overline{n}_0, \overline{E}_1] = 0, \\ (\overline{n}_0, \overline{H}_1) = 0, \\ [\overline{n}_0, \overline{H}_1] = j_S. \end{cases} \quad (7.20)$$

Таким чином, електричне поле до поверхні ідеального провідника може бути лише нормальним, а магнітне поле – лише дотичним.



## 8. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

### 8.1. Теорема Пойнтінга для векторів електромагнітного поля

Виходячи з закону збереження енергії, сформулюємо теорему: в об'ємі  $V$ , що містить однорідне ізотропне середовище з параметрами  $\mu_a, \varepsilon_a, \sigma$  (рис. 8.1), обмеженому замкненою поверхнею  $S$  так, що усі джерела поля входять до цього об'єму, має місце баланс потужностей

$$P_{cm} + P_{втр} + P_{\Sigma} + \frac{dW}{dt} = 0, \quad (8.1)$$

де  $P_{cm}$  – потужність джерел об'єму  $V$ ,  $P_{втр}$  – потужність втрат в об'ємі  $V$ ,  $P_{\Sigma}$  – потужність, що витікає з об'єму  $V$  в навколишнє середовище через поверхню  $S$ ,  $dW/dt$  – потужність, що накопичується в об'ємі  $V$ .

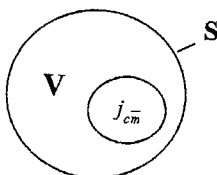


Рис. 8.1

Для доведення справедливості стверджуваного, скористуємося першим та другим рівняннями Максвелла в диференціальній формі:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{cm} + \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{d\vec{E}}{dt}, \\ \text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{d\vec{H}}{dt}. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння скалярно на  $\vec{E}$ , друге рівняння – скалярно на  $\vec{H}$  і, віднявши від першого результату другий, отримаємо:

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} = (\vec{j}_{cm} \cdot \vec{E}) + \varepsilon_a \left( \vec{E} \frac{d\vec{E}}{dt} \right) + \mu_a \left( \vec{H} \frac{d\vec{H}}{dt} \right) + \sigma \vec{E}^2. \quad (8.2)$$

Використавши відому з математики тотожність

$$\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}, \quad (8.3)$$

і зосередивши всі члени у лівій частині, перепишемо рівняння (8.2) таким чином:

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] + (\vec{j}_{cm} \cdot \vec{E}) + \sigma \vec{E}^2 + \epsilon_0 \left( \vec{E} \frac{d\vec{E}}{dt} \right) + \mu_0 \left( \vec{H} \frac{d\vec{H}}{dt} \right) = 0. \quad (8.4)$$

Вираз (8.4) називається теоремою Пойнтінга в диференціальній формі. Проінтегрувавши рівняння (8.4) по об'єму  $V$  і замінивши за допомогою теореми Остроградського – Гаусса  $\int_V \operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] dV$  на  $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] dS$ ,

отримаємо:

$$\int_V (\vec{j}_{cm} \cdot \vec{E}) dV + \int_V \sigma \vec{E}^2 dV + \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] dS + \int_V \epsilon_0 \left( \vec{E} \frac{d\vec{E}}{dt} \right) dV + \int_V \mu_0 \left( \vec{H} \frac{d\vec{H}}{dt} \right) dV = 0. \quad (8.5)$$

Дане співвідношення називається теоремою Пойнтінга в інтегральній формі.

Розглянемо фізичний зміст отриманого результату. Почнемо з третього доданку. Він являє собою потік через замкнену поверхню вектора  $\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}]$ , який називається вектором Пойнтінга. Розмірність вектора  $\vec{P}$  є  $\frac{B}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{Bm}{m^2}$  що вказує на поверхневу густину потоку цього вектора через поверхню  $S$ . Тоді інтеграл  $\oint_S \vec{P} d\vec{S}$  буде мати розмірність  $Bm$  і

трактуватиметься як потужність, що витікає з об'єму  $V$  через замкнену поверхню  $S$ . Очевидно, що всі інші доданки рівняння (8.5) мають також розмірність  $Bm$  і є потужностями. Зокрема, перший доданок в (8.5) є потужність електромагнітного поля, яка створюється в об'ємі  $V$  сторонніми електричними струмами з об'ємною густиною  $\vec{j}_{cm}$ . Другий доданок є потужність Джоулевих втрат електричної енергії в середовищі з питомою провідністю  $\sigma$  ( $\sigma \vec{E}^2 \rightarrow GU^2 = \frac{U^2}{R}$  – Джоулеві втрати на ділянці провідника, де діє різниця потенціалів  $U$ , а провідність (опір) цієї ділянки –  $G(R)$ ). Величина  $\sigma \vec{E}^2$  має розмірність  $Bm/m^3$  і визначає об'ємну густину втрат, а  $\int_V \sigma \vec{E}^2 dV$  – потужність втрат в об'ємі  $V$ .

Розглянемо детальніше четвертий і п'ятий доданки (8.5), а саме:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left( \epsilon_0 \vec{E} \frac{d\vec{E}}{dt} + \mu_0 \vec{H} \frac{d\vec{H}}{dt} \right) dV.$$

Кількість енергії за інтервал часу від 0 до  $t$  буде дорівнювати

$$W = \int_0^t \int_V \left( \epsilon_0 \vec{E} \frac{d\vec{E}}{dt} + \mu_0 \vec{H} \frac{d\vec{H}}{dt} \right) dV dt.$$

Змінивши порядок інтегрування по об'єму  $V$  і в часі  $t$ , отримаємо

$$W = \int_V \left( \int_0^t \epsilon_a \bar{E} \frac{d\bar{E}}{dt} dt + \int_0^t \mu_a \bar{H} \frac{d\bar{H}}{dt} dt \right) dV,$$

або, вважаючи, що в момент часу  $t=0$  напруженості електричного і магнітного полів рівні нулю, а в момент часу  $t$  – рівними  $\bar{E}$  та  $\bar{H}$ , відповідно, маємо право переписати вираз у вигляді

$$W = \int_V \left( \int_0^{\bar{E}} \epsilon_a \bar{E} d\bar{E} + \int_0^{\bar{H}} \mu_a \bar{H} d\bar{H} \right) dV = \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV.$$

Тобто,  $W_e = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV$  – енергія, накопичена електричною складовою,

а  $W_m = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV$  – енергія, накопичена магнітною складовою

електромагнітного поля в об'ємі  $V$ . Тоді  $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$  – є потужність електромагнітного поля, накопичена в об'ємі  $V$ .

Таким чином, вираз (8.5) відображає баланс потужностей (8.1) в об'ємі за означених теоремою умов, де

$P_{cm} = \int_V (\bar{j}_{cm} \bar{E}) dV$  – потужність джерел, що діють у об'ємі  $V$ ,

$P_{emp} = \int_V \sigma \bar{E}^2 dV$  – потужність втрат (теплових) у об'ємі  $V$ ,

$P_\Sigma = \oint_S [\bar{E}, \bar{H}] d\bar{S}$  – потужність, що проходить через поверхню  $S$ ,

$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$  – потужність накопичена в об'ємі  $V$ .

Теорему доведено.

Розглянемо частинні випадки, які мають практичне значення.

$$1) P_{cm} = P_{emp}, \quad \left( P_\Sigma = \frac{dW}{dt} = 0 \right).$$

Тут мова йде про перетворення енергії джерела електромагнітного поля в енергію Джоулевих або теплових втрат у середовищі з  $\sigma \neq 0$ . Такий результат бажаний в надвисокочастотних (НВЧ) печах (мікрохвильові печі), при НВЧ висушуванні деревини, зерна тощо. Розігрівання речовини відбувається одразу в усьому її об'ємі. Причому, сильніше розігріваються ті ділянки, де вологість більша (більше  $\sigma$ ), і менше – де вологість менша (менша  $\sigma$ , ближче до ідеального діелектрика). За рахунок цього ефективність висушування є надзвичайно високою.

$$2) P_{cm} = P_\Sigma, \quad \left( P_{emp} = \frac{dW}{dt} = 0 \right).$$

Тут мається на увазі випромінювання з об'єму  $V$ , що дуже важливо при побудові високоякісних передавальних (та й приймальних) антен, коли

вся енергія передавача випромінюється без втрат чи затримання її частини в антені.

$$3) P_{cm} = \frac{dW}{dt}, \quad (P_{amp} = P_z = 0).$$

В цьому випадку передбачається, що густина середовища  $\sigma$  в об'ємі  $V$  дорівнює нулю, а поверхня  $S$  виконана з ідеального провідника і є ідеальним екраном. Тоді вся енергія буде зосереджена в замкненому об'ємі (об'ємному резонаторі), який поводить себе подібно до ідеального коливального контуру, тобто енергія електричного поля зі швидкістю  $dW_e/dt$  перетворюється в енергію магнітного поля  $W_m$ , яка в свою чергу зі швидкістю  $dW_m/dt$  перетворюється в енергію електричного поля  $W_e$  і так далі.

Ми розглянули три ідеалізовані випадки. На практиці ж завжди йдеться про реальну ситуацію, коли одночасно має місце і випромінювання, і втрати, і накопичування енергії. Сформульована вище теорема враховує все, а справа радіоінженера побудувати таку систему, де небажані доданки рівняння (8.5) або (8.1) були б мінімальними.

## 8.2. Теорема Пойнтінга для комплексних амплітуд векторів поля

Зміст цієї теореми подібний до змісту попередньої, тільки йдеться не про миттєве значення векторів електромагнітного поля, а про їхні комплексні амплітуди. Тобто розглядається випадок, коли об'ємна густина сторонніх струмів  $\vec{j}_{cm}$  є монохроматичною функцією часу.

Запишемо перше і друге рівняння Максвелла для комплексних амплітуд в диференціальній формі

$$\text{rot} \vec{H}_m = \vec{j}_{cm} + \sigma \vec{E}_m + j\omega \epsilon_a \vec{E}_m,$$

$$\text{rot} \vec{E}_m = -j\omega \mu_a \vec{H}_m.$$

Перше рівняння перепишемо для величин  $\vec{H}_m$  комплексно-спряженої з  $\vec{H}_m$  і  $\vec{E}_m$  комплексно-спряженої з  $\vec{E}_m$ , а друге залишаємо без змін

$$\overline{\text{rot}} \vec{H}_m = \overline{j}_{cm} + \overline{\sigma} \vec{E}_m - j\omega \epsilon_a \vec{E}_m,$$

$$\text{rot} \vec{E}_m = -j\omega \mu_a \vec{H}_m.$$

Помножимо перше рівняння скалярно на  $\vec{E}_m$ , а друге – на  $\vec{H}_m$ , і від другого результату віднімемо перший. Тоді отримаємо

$$\vec{H}_m \text{rot} \vec{E}_m - \vec{E}_m \text{rot} \vec{H}_m = -\overline{j}_{cm} \vec{E}_m - \overline{\sigma} \vec{E}_m \vec{E}_m + j\omega \epsilon_a \vec{E}_m \vec{E}_m + j\omega \mu_a \vec{H}_m \vec{H}_m$$

і, скориставшись тотожністю (8.3), перепишемо отримане так:

$$\operatorname{div} \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\vec{H}}_m \right] + j_{cm} \overline{\vec{E}}_m + \sigma |\dot{\vec{E}}_m|^2 - j\omega \varepsilon_a |\dot{\vec{E}}_m|^2 + j\omega \mu_a |\dot{\vec{H}}_m|^2 = 0. \quad (8.6)$$

Вираз (8.6) називається теоремою Пойнтінга для комплексних амплітуд в диференціальній формі.

Проінтегрувавши рівняння (8.6) по об'єму  $V$  і замінивши  $\int_V \operatorname{div} \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\vec{H}}_m \right] dV$  на  $\oint_S \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\vec{H}}_m \right] dS$ , отримаємо

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_V j_{cm} \overline{\vec{E}}_m dV + \int_V \sigma |\dot{\vec{E}}_m|^2 dV + \oint_S \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\vec{H}}_m \right] dS + j\omega \int_V \varepsilon_a |\dot{\vec{E}}_m|^2 dV - j\omega \int_V \mu_a |\dot{\vec{H}}_m|^2 dV \right\} = 0. \quad (8.7)$$

Отримане співвідношення називається теоремою Пойнтінга для комплексних амплітуд в інтегральній формі. Коефіцієнт  $\frac{1}{2}$  введений для зручності подальших викладок.

$$\text{Інтеграл} \quad P_{cm} = \frac{1}{2} \int_V j_{cm} \cdot \overline{\vec{E}}_m dV \quad (8.8)$$

називають комплексною потужністю джерела електромагнітного поля.

$$\text{Інтеграл} \quad P_{amp} = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\dot{\vec{E}}_m|^2 dV = \int_V \frac{\sigma E_m^2}{2} dV \quad (8.9)$$

є дійсною величиною, яка дорівнює значенню потужності активних (теплових) втрат в об'ємі  $V$ .

$$\text{Інтеграл} \quad P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \oint_S \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\vec{H}}_m \right] \quad (8.10)$$

є комплексною потужністю потоку через поверхню комплексного вектора Пойнтінга, який визначається як

$$\overline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\vec{H}}_m \right]. \quad (8.11)$$

Сума інтегралів

$$P_p = j\omega \left( \int_V \frac{\varepsilon_a |\dot{\vec{E}}_m|^2}{2} dV - \int_V \frac{\mu_a |\dot{\vec{H}}_m|^2}{2} dV \right) = j\omega \left( \int_V \frac{\varepsilon_a E_m^2}{2} dV - \int_V \frac{\mu_a H_m^2}{2} dV \right) \quad (8.12)$$

є уявною величиною, яка дорівнює значенню реактивної потужності електромагнітного поля  $P_p$ , накопиченого в об'ємі  $V$ .

Середнє за період  $T$  значення монохроматичного коливання дорівнює потужності випромінювання  $P_{\Sigma \text{сеп}}$ , яка визначається виразом

$$P_{\Sigma \text{сеп}} = \oint_S \overline{\vec{\Pi}}_{\text{сеп}} d\vec{S}, \quad (8.13)$$

де  $\overline{\Pi}_{\text{сеп}}$  – середнє за період значення вектора Пойнтинга  $\overline{\Pi}$ , яке в свою чергу дорівнює:

$$\overline{\Pi}_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{\Pi} dt, \quad (8.14)$$

або

$$\overline{\Pi}_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T [\overline{E}, \overline{H}] dS,$$

де

$$\overline{E} = \text{Re} \left\{ \overline{\dot{E}}_m e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \overline{\dot{E}}_m e^{-j\omega t} \right\}, \quad \overline{H} = \text{Re} \left\{ \overline{\dot{H}}_m e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \overline{\dot{H}}_m e^{-j\omega t} \right\}.$$

Враховуючи, що

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \left( \overline{\dot{E}}_m e^{j\omega t} + \overline{\dot{E}}_m e^{-j\omega t} \right) \quad \text{і} \quad \overline{H} = \frac{1}{2} \left( \overline{\dot{H}}_m e^{j\omega t} + \overline{\dot{H}}_m e^{-j\omega t} \right), \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\text{сеп}} &= \frac{1}{4T} \int_0^T \left[ \left( \overline{\dot{E}}_m e^{j\omega t} + \overline{\dot{E}}_m e^{-j\omega t} \right) \cdot \left( \overline{\dot{H}}_m e^{j\omega t} + \overline{\dot{H}}_m e^{-j\omega t} \right) \right] dt = \frac{1}{4T} \int_0^T \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] e^{j\omega t} dt + \\ &+ \frac{1}{4T} \int_0^T \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] e^{j\omega t} dt + \frac{1}{4T} \int_0^T \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] e^{j\omega t} dt + \frac{1}{4T} \int_0^T \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] e^{j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Інтеграли перший і четвертий в отриманому виразі дорівнюють нулю, бо це є середнє значення гармонічних функцій з частотами  $2\omega$  за період  $T$ . Тоді отримаємо

$$\overline{\Pi}_{\text{сеп}} = \frac{1}{2T} \int_0^T \frac{1}{2} \left( \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] + \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] \right) dt. \quad (8.15)$$

Враховуючи, що доданки  $\left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right]$  і  $\left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right]$  є комплексно-спряженими величинами, їхня напівсума  $\frac{1}{2} \left( \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] + \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] \right) dt$  дорівнює дійсній частині кожного з них.

Тоді рівняння (8.15) перепишеться як

$$\overline{\Pi}_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right], \quad (8.16)$$

а середнє значення буде дорівнювати

$$P_{\Sigma \text{сеп}} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S \left[ \overline{\dot{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] dS. \quad (8.17)$$

Порівнюючи (8.17) з (8.10), маємо право вважати, що

$$P_{\Sigma \text{сеп}} = \text{Re}\{\dot{P}_{\Sigma}\} = \text{Re}\left\{\frac{1}{2} \oint_S \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] dS \right\}. \quad (8.18)$$

Усреднимо за період  $T$  рівняння (8.7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2T} \int_0^T \int_V \left( \overline{j_{cm} \vec{E}}_m \right) dV dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \int_V \sigma |\overline{\vec{E}}_m|^2 dV dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \int_S \left( \overline{\vec{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right) d\overline{S} dt + \\ & + j\omega \frac{1}{2T} \int_0^T \int_V \varepsilon_a |\overline{\vec{E}}_m|^2 dV dt - j\omega \frac{1}{2T} \int_0^T \int_V \mu_a |\overline{\dot{H}}_m|^2 dV dt = 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Тоді перший інтеграл (8.19) є середнє за період  $T$  значення потужності джерела  $P_{cm \text{ сеп}}$ , яке за аналогією з (8.18) дорівнює

$$P_{cm \text{ сеп}} = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_V \left( \overline{j_{cm} \vec{E}}_m \right) dV dt = \text{Re}\{\dot{P}_{cm}\} = \text{Re}\left\{\frac{1}{2} \int_V \left( \overline{j_{cm} \vec{E}}_m \right) dV dt \right\}. \quad (8.20)$$

Другий інтеграл (8.19) є дійсною величиною і тому

$$P_{сеп} = P_{amp} = \frac{1}{2} \int_V \sigma E_m^2 dV. \quad (8.21)$$

Третій інтеграл (8.19) є середнє значення потужності  $P_{сеп}$ , що витікає з об'єму  $V$  і згідно з (8.18) дорівнює

$$P_{сеп} = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_S \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] d\overline{S} dt = \text{Re}\left\{\frac{1}{2} \oint_S \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] d\overline{S} \right\}. \quad (8.22)$$

Сума четвертого і п'ятого інтегралів (8.19) є середнє значення реактивної потужності електромагнітного поля (8.12), дійсна частина якої дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} P_p \text{ сеп} &= j\omega \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a |\overline{\vec{E}}_m|^2 dV - \frac{1}{2} \int_V \mu_a |\overline{\dot{H}}_m|^2 dV \right) dt = \text{Re}\{P_p\} = \\ &= \text{Re}\left\{ j\omega \left( \int_V \frac{\varepsilon_a |\overline{\vec{E}}_m|^2}{2} dV - \int_V \frac{\mu_a |\overline{\dot{H}}_m|^2}{2} dV \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Враховуючи (8.20), (8.21), (8.22) та (8.23), рівняння (8.19) перепишемо у такому вигляді:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \int_V \left( \overline{j_{cm} \vec{E}}_m \right) dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma |\overline{\vec{E}}_m|^2 dV + \frac{1}{2} \text{Re} \oint_S \left[ \overline{\vec{E}}_m, \overline{\dot{H}}_m \right] dS = 0, \quad (8.24)$$

або

$$P_{cm \text{ сеп}} + P_{amp} + P_{\Sigma \text{сеп}} = 0. \quad (8.25)$$

Отже, в об'ємі  $V$  з середовищем, означеним в умові попередньої теореми, що містить джерела монохроматичного електромагнітного поля, є середній за період  $T$  запас енергії цього поля (8.23) і баланс середніх за період  $T$  потужностей в цьому об'ємі (8.25).

### 8.3. Теорема єдиності розв'язку рівнянь Максвелла

Рівняння Максвелла є диференціальними рівняннями з частинними похідними. Такі рівняння мають безліч розв'язків, тому що ми маємо справу з векторами електромагнітного поля – фізичними величинами, які мають певний фізичний зміст. Отриманий експериментальним шляхом результат при визначенні фізичної величини тільки тоді має однозначне значення, коли при повторенні експерименту будь-яку кількість разів, результат буде повторюватись. Це, ймовірно, можливо лише тоді, коли повністю повторюються умови проведення експерименту. Наприклад, визначається опір ділянки провідника методом вольтметра-амперметра. Якщо температура в лабораторії буде суттєво змінюватися, то при повторенні експерименту отримаємо різні результати і однозначної оцінки значення опору не матимемо.

Розглянемо два випадки: теорему єдиності розв'язку рівнянь Максвелла для обмеженого об'єму (теорема єдиності як внутрішня задача електродинаміки) і теорему єдиності розв'язку рівнянь Максвелла для необмеженого простору (теорема єдиності як зовнішня задача електродинаміки).

#### 8.3.1. Теорема єдиності розв'язку рівнянь Максвелла для обмеженого об'єму

В обмеженому об'ємі  $V$  з однорідним ізотропним середовищем, який містить усі джерела електромагнітного поля, рівняння Максвелла мають єдиний розв'язок, якщо:

1) в початковий момент  $t=0$  в усьому об'ємі  $V$  однозначно задані вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ ;

2) на кінець обмеженого відрізка часу  $[0, t]$  на поверхні  $S$ , яка охоплює об'єм  $V$ , однозначно задані або тангенціальна складова вектора  $\vec{E}_t$ , або тангенціальна складова вектора  $\vec{H}_t$ .

Доведення теореми проведемо від супротивного, тобто будемо вважати, що за означених обставин рівняння Максвелла мають два розв'язки:  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  та  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ . Тоді ці обидва розв'язки мають задовольняти рівняння Максвелла



$$\operatorname{rot} \bar{H}_1 = \bar{j}_{cm} + \sigma \bar{E}_1 + \varepsilon_a \frac{d\bar{E}_1}{dt}, \quad (8.26)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E}_1 = -\mu_a \frac{d\bar{H}_1}{dt}, \quad (8.27)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H}_2 = \bar{j}_{cm} + \sigma \bar{E}_2 + \varepsilon_a \frac{d\bar{E}_2}{dt}, \quad (8.28)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E}_2 = -\mu_a \frac{d\bar{H}_2}{dt}. \quad (8.29)$$

Звертається увага на те, що  $\bar{j}_{cm}$  має місце в рівняннях Максвелла для обох розв'язків, бо за умовою теореми об'єм  $V$  містить усі джерела поля.

Віднявши від (8.26) рівняння (8.28) і від (8.27) рівняння (8.29), отримаємо в силу лінійності цих рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \sigma(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) + \varepsilon_a \frac{d(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{dt}, \\ \operatorname{rot}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = -\mu_a \frac{d(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)}{dt}. \end{cases} \quad (8.30)$$

Ввівши позначення  $\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \bar{E}_3$ ,  $\bar{H}_1 - \bar{H}_2 = \bar{H}_3$  отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H}_3 = \sigma \bar{E}_3 + \varepsilon_a \frac{d\bar{E}_3}{dt}, \\ \operatorname{rot} \bar{E}_3 = -\mu_a \frac{d\bar{H}_3}{dt}. \end{cases} \quad (8.31)$$

Як бачимо, існує ще й третій різнищевий розв'язок  $\bar{E}_3$  і  $\bar{H}_3$ , який теж задовольняє рівняння Максвелла. Але ці рівняння не містять джерел поля і тому теорема Пойнтінга для третього розв'язку запишеться у вигляді:

$$\oint_S [\bar{E}_3, \bar{H}_3] d\bar{S} + \oint_V \sigma |\bar{E}_3|^2 dV + \frac{dW_3}{dt} = 0. \quad (8.32)$$

Перший інтеграл цього рівняння є потужність поля для третього розв'язку, яка витікає з об'єму  $V$  через поверхню  $S$ , тобто через цю поверхню існує потік вектора Пойнтінга  $\bar{P}_3 = [\bar{E}_3, \bar{H}_3]$ . Елементарний потік через елемент поверхні  $d\bar{S}$  є скалярним добутком  $(\bar{P}_3 \cdot d\bar{S}) = P_{3n} dS$ , де  $P_{3n}$  є проєкція вектора на нормаль до поверхні  $S$ . Тоді потік для третього розв'язку утворюється тангенціальними складовими  $\bar{E}_{3r}$  і  $\bar{H}_{3r}$ , векторний добуток яких дорівнює  $\bar{P}_n$ , тобто

$$\oint_S [\vec{E}_3, \vec{H}_3] d\vec{S} = \int_V \vec{E}_3 \cdot \vec{H}_3 dV. \quad (8.33)$$

За другою умовою теореми на поверхні  $S$  добуток  $\vec{E}_3 \cdot \vec{H}_3 = 0$ , а баланс потужностей рівняння (8.7) має вигляд

$$\frac{dW_3}{dt} = - \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dV. \quad (8.34)$$

Таким чином, питома провідність  $\sigma$  у рівнянні (8.34) є суцього додатною величиною,  $|\vec{E}_3|^2$  — теж величина додатна і тому права частина останнього рівняння (8.34) є недодатною величиною (від'ємною або нулем)

$$\frac{dW_3}{dt} \leq 0. \quad (8.35)$$

З усього бачимо, що справедливі твердження

$$\frac{dW_3}{dt} < 0, \text{ або } \frac{dW_3}{dt} = 0.$$

У відповідності до першої умови теореми в початковий момент, коли  $t=0$ , вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  задані однозначно, тобто  $E_1=E_2$  і  $E_3=0$ ,  $H_1=H_2$  і  $H_3=0$ , енергія  $W_3$ , що накопичилася для третього розв'язку в об'ємі  $V$  при  $t=0$ , дорівнювала нулю. Отже, з часом зменшуватись вона не могла, тому твердження  $dW_3 / dt < 0$  є не справедливим і  $dW_3 / dt = 0$ , тобто кількість енергії протягом відрізка часу від  $0$  до  $t$  залишалася незмінною та рівною нулю.

Для третього розв'язку протягом вказаного відрізка часу  $[0, t]$ ,  $\vec{E}_3$  та  $\vec{H}_3$  дорівнювали нулю, а тому  $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ . Звідси  $\vec{H}_1 - \vec{H}_2 = 0$  і  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$ , а також  $\vec{H}_1 = \vec{H}_2 = \vec{H}$ , тобто рівняння Максвелла мають єдиний розв'язок.

### 8.3.2. Теорема єдиності розв'язку рівнянь Максвелла для необмеженого простору

Утримавшись поки від формулювання самої теореми, у думках пройдемося доведенням щойно виконаним у попередньому випадку і зупинимось на розгляді умови балансу потужностей для третього розв'язку (8.32) у вигляді:

$$\oint_S [\vec{E}_3, \vec{H}_3] d\vec{S} + \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dV + \frac{dW_3}{dt} = 0. \quad (8.36)$$

Тепер маємо нескінченно великий об'єм  $V$ , який обмежується нескінченно великою поверхнею  $S$ . Розташували всі  $\vec{j}_{cm}$  на кінцевій відстані від початку координат, отримаємо поверхню  $S$  радіусом  $r \rightarrow \infty$ , кожна точка якої знаходиться на нескінченній відстані від джерел електромагнітного поля (рис.8.2).

Отже, поле векторів  $\vec{E}_3, \vec{H}_3$  ніколи не може досягти цієї поверхні, тому складові  $\vec{E}_{3r}$  і  $\vec{H}_{3r}$  на поверхні  $S$  дорівнюють нулю і перший інтеграл у (8.36) завжди дорівнює нулю (рис.8.2). Ми розсудили хоч і якісно, але досить строго і на цьому можна було б зупинитись, бо подальше доведення теореми повністю збігається з попереднім випадком.

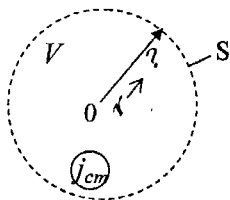


Рис. 8.2

Проте є підхід, який має практичне значення. Для цього розглянемо перший інтеграл виразу (8.36), коли поверхню  $S$  будемо мати при відстані  $r \rightarrow \infty$ , тобто:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S [\vec{E}_3, \vec{H}_3] \cdot d\vec{S}. \quad (8.37)$$

Границі цього співвідношення не існує через невизначеність, але  $S$  прямопропорційна  $r_2$ , а вектор Пойнтінга  $\vec{P}_3$  пропорційний  $1/r_2$ , вектори  $\vec{E}_3$  і  $\vec{H}_3$  пропорційні  $1/r$  кожен. При зростанні  $r$  до нескінченності добуток  $\vec{P}_3 \cdot d\vec{S}$  має невизначеність типу  $(0 \cdot \infty)$ , а нам потрібно, щоб ця границя дорівнювала нулю. Цього досягти можливо, якщо вектор  $\vec{P}_3$  при зростанні  $r$  буде зменшуватись швидше, ніж зростатиме  $S$ , а тому поставимо умову, що  $\vec{E}_3$  і  $\vec{H}_3$  пропорційні  $1/r_n$  кожен, де  $n > 1$ . У такому випадку

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S [\vec{E}_3, \vec{H}_3] \cdot d\vec{S} = 0. \quad (8.38)$$

Подальше доведення проводити немає потреби. На підставі всього висловленого сформулюємо теорему єдиності розв'язку рівнянь Максвелла для необмеженого простору таким чином: у необмеженому просторі, коли  $V \rightarrow \infty$  з лінійним ізотропним середовищем при розташуванні усіх джерел на кінцевій відстані від початку координат, рівняння Максвелла мають єдиний розв'язок, якщо:

1) у момент часу  $t=0$  в усьому об'ємі  $V$  задані однозначно вектори поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ ;

2) при зростанні відстані від джерел поля вектори поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  зменшуються пропорційно  $1/r_n$  кожен, де  $n > 1$ .

Звернемо увагу, що при формулюванні теореми, середовище не назване однорідним. Саме неоднорідним воно є завжди, коли йдеться про реальну лінію радіозв'язку між двома дуже віддаленими кореспондентами. Неоднорідним є не тільки повітря (вітер, дощ, сніг, туман, хмари тощо),

неоднорідними є і іоносфера Землі, і навіть відкритий космос, де через розсіювання на неоднорідностях вектори поля зменшуються швидше, ніж зворотно-пропорційно  $r$  у першому степені.

#### 8.4. Лема Лоренця

Розглянемо дві системи джерел монохроматичного електромагнітного поля в об'ємі  $V_1$  зі стороннім струмом  $\bar{j}_{cm1}$  і в об'ємі  $V_2$  зі стороннім струмом  $\bar{j}_{cm2}$  (рис. 8.3).

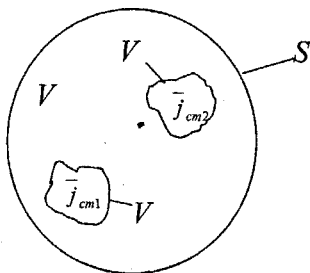


Рис. 8.3

Перша система збудить електромагнітне поле з векторами  $\bar{E}_{m1}$  і  $\bar{H}_{m1}$ , які задовольняють перше і друге рівняння Максвелла

$$\text{rot} \bar{H}_{1m} = \bar{j}_{cm1} + j\omega \epsilon_a \bar{E}_{m1}, \quad (8.39)$$

$$\text{rot} \bar{E}_{1m} = -j\omega \mu_a \bar{H}_{m1}. \quad (8.40)$$

Друга система збудить електромагнітне поле з векторами  $\bar{E}_{m2}$  і  $\bar{H}_{m2}$ , які задовольняють перше і друге рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \bar{H}_{2m} = \bar{j}_{cm2} + j\omega \epsilon_a \bar{E}_{m2}, \quad (8.41)$$

$$\text{rot} \bar{E}_{2m} = -j\omega \mu_a \bar{H}_{m2}. \quad (8.42)$$

Домноживши (8.39) скалярно на  $\bar{E}_{m2}$ , рівняння (8.42) скалярно на  $\bar{H}_{m1}$  і віднявши від першого результату другий, отримаємо

$$\bar{E}_{2m} \cdot \text{rot} \bar{H}_{1m} - \bar{H}_{1m} \cdot \text{rot} \bar{E}_{2m} = \bar{j}_{cm1} \cdot \bar{E}_{2m} + j\omega \epsilon \bar{E}_{2m} \cdot \bar{E}_{1m} + \mu_a j\omega \bar{H}_{2m} \cdot \bar{H}_{1m}. \quad (8.43)$$

Домноживши (8.41) скалярно на  $\bar{E}_{m1}$ , а рівняння (8.40) скалярно на  $\bar{H}_{m2}$  і віднявши від першого результату другий, отримаємо

$$\bar{E}_{1m} \cdot \text{rot} \bar{H}_{2m} - \bar{H}_{2m} \cdot \text{rot} \bar{E}_{1m} = \bar{j}_{cm2} \cdot \bar{E}_{1m} + j\omega \epsilon \bar{E}_{2m} \cdot \bar{E}_{1m} + \mu_a j\omega \bar{H}_{1m} \cdot \bar{H}_{2m}. \quad (8.44)$$

Використовуючи відому тотожність

$$\bar{e} \cdot \text{rot} \bar{a} - \bar{a} \cdot \text{rot} \bar{e} = \text{div} [\bar{a}, \bar{e}],$$

ліві частини рівнянь (8.43) та (8.44) приймуть вигляд

$$\bar{E}_{2m} \cdot \text{rot} \bar{H}_{1m} - \bar{H}_{1m} \cdot \text{rot} \bar{E}_{2m} = -\text{div} [\bar{E}_{2m} \bar{H}_{1m}], \quad (8.45)$$

$$\bar{E}_{1m} \cdot \text{rot} \bar{H}_{2m} - \bar{H}_{2m} \cdot \text{rot} \bar{E}_{1m} = -\text{div} [\bar{E}_{1m} \bar{H}_{2m}]. \quad (8.46)$$

З урахуванням (8.45) та (8.46) та віднявши від (8.43) (8.44), отримаємо

$$\text{div} [\bar{E}_{1m} \bar{H}_{2m}] - \text{div} [\bar{E}_{2m} \bar{H}_{1m}] = j_{cm1} \bar{E}_{2m} - j_{cm2} \bar{E}_{1m}. \quad (8.47)$$

Вираз (8.47) має назву **леми Лоренця в диференціальній формі**.

Проінтегрувавши цей вираз по кінцевому об'єму (рис. 8.3) і скориставшись для лівої частини результатом теоремою Остроградського-Гауса, отримаємо:

$$\oint_S \left( [\bar{E}_{1m} \bar{H}_{2m}] - [\bar{E}_{2m} \bar{H}_{1m}] \right) d\bar{S} = \int_V j_{cm1} \cdot \bar{E}_{2m} dV - \int_V j_{cm2} \cdot \bar{E}_{1m} dV. \quad (8.48)$$

Вираз (8.48) має назву **леми Лоренця для кінцевого об'єму V**.

Спрямуємо об'єм V, обмежений поверхнею S, до нескінченності і розглянемо границю лівої частини (8.48). В результаті отримаємо

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S \left( [\bar{E}_{1m} \bar{H}_{2m}] - [\bar{E}_{2m} \bar{H}_{1m}] \right) d\bar{S} = 0, \quad (8.49)$$

бо поля першого і другого джерел ніколи не досягнуть поверхні S, яка знаходиться на нескінченній відстані від цих джерел полів. Тоді (8.48) прийме вигляд

$$\int_V j_{cm1} \bar{E}_{2m} dV = \int_V j_{cm2} \bar{E}_{1m} dV. \quad (8.50)$$

Це рівняння має назву **леми Лоренця для необмеженого простору**.

### 8.5. Теорема взаємності

З позиції радіотехніки об'єми  $V_1$  і  $V_2$  є випромінювачами електромагнітної енергії – антенами. Сторонній струм  $\bar{j}_{cm1}$  існує тільки в межах об'єму  $V_1$ , сторонній струм  $\bar{j}_{cm2}$  існує тільки в межах  $V_2$ , в решті простору  $\bar{j}_{cm1}$  і  $\bar{j}_{cm2} = 0$ . Тому інтегрування по об'єму в виразі (8.50) слід замінити інтегруванням по  $V_1$  у лівій частині і по  $V_2$  у правій частині

$$\int_{V_1} j_{cm1} \bar{E}_{2m} dV_1 = \int_{V_2} j_{cm2} \bar{E}_{1m} dV_2. \quad (8.51)$$

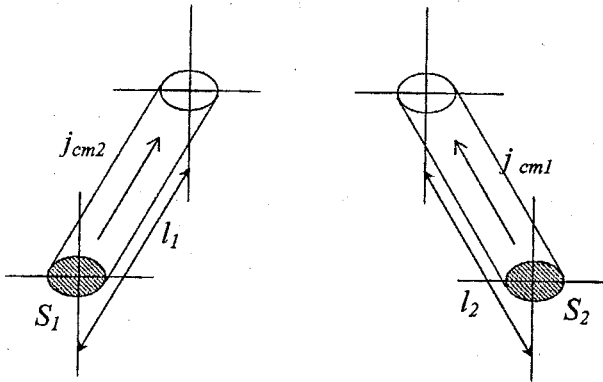


Рис. 8.4

Уявімо собі, що випромінювачами є відрізки циліндричних провідників (рис.8.4) з поверхнями  $S_1$  і  $S_2$  та довжинами  $l_1$  і  $l_2$ . Тоді очевидно, що  $V_1 = S_1 l_1$

$$dV_1 = S_1 dl_1; V_2 = S_2 l_2; dV_2 = S_2 dl_2$$

і вираз (8.51) можемо переписати у вигляді

$$\int_{l_1} \bar{j}_{cm1} \cdot \bar{S}_1 \cdot \bar{E}_{2m} \cdot d\bar{l}_1 = \int_{l_2} \bar{j}_{cm2} \cdot \bar{S}_2 \cdot \bar{E}_{1m} \cdot d\bar{l}_2. \quad (8.52)$$

Вважаючи, що  $\bar{j}_{cm}$  мають однакові значення вздовж відрізків, маємо право винести за знаки інтегралів незалежні від  $l_1$  і  $l_2$  величини

$$\bar{j}_{cm1} \cdot \bar{S}_1 \cdot \bar{E}_{2m} \int_{l_1} d\bar{l}_1 = \bar{j}_{cm2} \cdot \bar{S}_2 \cdot \bar{E}_{1m} \int_{l_2} d\bar{l}_2, \quad (8.53)$$

або записати, що

$$\bar{j}_{cm1} \cdot \bar{S}_1 \cdot \bar{E}_{2m} \cdot \bar{l}_1 = \bar{j}_{cm2} \cdot \bar{S}_2 \cdot \bar{E}_{1m} \cdot \bar{l}_2. \quad (8.54)$$

Враховуючи, що  $\bar{j}_{cm1} \cdot \bar{S}_1 = I_{cm1}$  – сторонній електричний струм у лівому провіднику (перша антена),  $\bar{j}_{cm2} \cdot \bar{S}_2 = I_{cm2}$  – сторонній електричний струм у правому провіднику (друга антена),  $\bar{E}_{2m} \cdot \bar{l}_1 = \bar{U}_{2m}$  – різниця потенціалів, наведена в першій антені полем другої антени,  $\bar{E}_{1m} \cdot \bar{l}_2 = \bar{U}_{1m}$  – різниця потенціалів, наведена в другій антені полем першої антени, останній вираз перепишемо таким чином:

$$I_{cm1} \cdot \bar{U}_{2m} = I_{cm2} \cdot \bar{U}_{1m}. \quad (8.55)$$

Вираз (8.55) має назву теореми взаємності стосовно антенних систем.

Якщо взяти дві однакові антени і спочатку збудити сторонній струм  $I_{cm1}$  в першій антені за допомогою генератора, то в другій антені наведеться різниця потенціалів  $U_1$ ; потім генератор підімкнати до другої

антени і збудити в ній струм  $I_{cm2}$ , то в першій антені наведеться напруга  $U_2$ . Добутки  $I_{cm1} \cdot U_2 = I_{cm2} \cdot U_1$  рівні між собою, що свідчить про те, що антени передавальна і приймальна нічим принципово не відрізняються.

Ця обставина широко використовується на практиці. Наприклад, сучасна радіолокаційна станція має лише одну антену, яка працює як передавальна антена, коли посиляється потужний радіоімпульс на ціль, і як приймальна антена, коли приймає слабкий відбитий від цілі радіоімпульс і спрямовує його на чутливий вхід радіолокаційного приймача.

## 9. ПАДІННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ НА ПЛОСКУ МЕЖУ РОЗДІЛЕННЯ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

### 9.1. Попередні зауваження

У попередніх розділах ми розглядали поширення електромагнітних хвиль в необмежених однорідних ізотропних середовищах. Проте у багатьох випадках практики середовище не є однорідним. Розглянемо важливий випадок, коли плоска хвиля падає на плоску межу, яка розділяє два різних за своїми параметрами однорідних ізотропних середовища. При цьому, як відомо із загальної фізики, електромагнітна хвиля може повністю чи частково відбитися від межі розділення або повністю чи частково заломлюючись пройти у друге середовище.

Задача полягає у визначенні параметрів відбитої та заломленої хвиль, коли відомі параметри падаючої хвилі та параметри обох середовищ.

Для вивчення цих явищ введемо прямокутну систему координат таким чином, щоб поверхня (межа) розділення збігалася, наприклад, з віссю  $Ox$  (рис. 9.1). Плоска електромагнітна хвиля падає вздовж напрямку  $\vec{n}$  під кутом  $\varphi$ , відбита хвиля поширюється у напрямку  $\vec{n}_v$  під кутом відбиття  $\varphi_v$  і

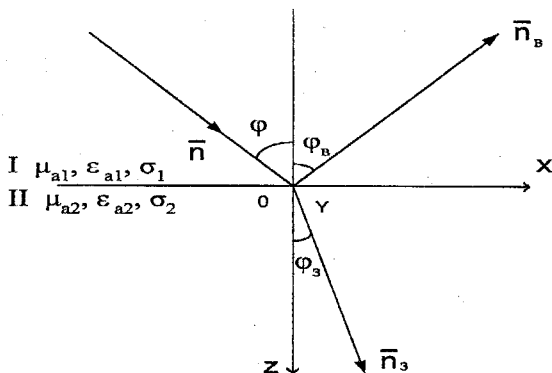


Рис. 9.1

заломлена хвиля – у напрямку  $\vec{n}_s$  під кутом заломлення  $\varphi_s$ . Перше середовище має параметри  $\mu_{a1}, \epsilon_{a1}, \sigma_{a1}$ , а друге –  $\mu_{a2}, \epsilon_{a2}, \sigma_{a2}$ .

Будемо вважати, що електромагнітна хвиля є лінійно поляризованою, бо випадки кругової чи еліптичної поляризації можна представити у вигляді суперпозиції двох лінійно поляризованих хвиль.

Розглянемо два випадки :

1) на межі розділення падає плоска хвиля з паралельною поляризацією (рис. 9.2a);

2) на межі розділення падає плоска хвиля з перпендикулярною поляризацією (рис. 9.2б) під довільним кутом падіння.



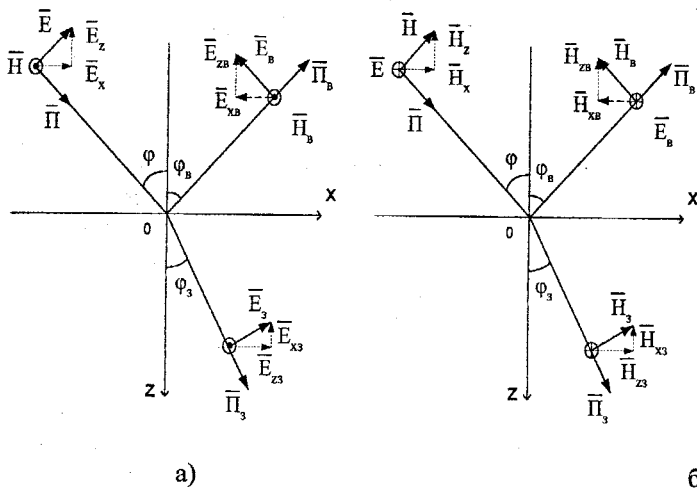


Рис. 9.2

## 9.2. Виведення виразів для коефіцієнтів відбиття і заломлення

### Випадок паралельної поляризації

Плоска електромагнітна хвиля падає під довільним кутом  $\varphi$  (рис.9.3а) у напрямку  $\vec{n}$ . Оскільки у даному випадку вектор  $\vec{n}$  має лише одну складову, орієнтовану вздовж осі  $OY$  (у напрямку до нас), то його і виберемо для аналізу. Для нього є справедливим вираз

$$H_{my} = A_1 e^{-jk_1 n} \quad (9.1)$$

де  $k_1 = \sqrt{\mu_{a1} \cdot \epsilon_{a1}}$  – стала поширення хвилі у першому середовищі.

Оскільки обидва середовища вважаються однорідними ізотропними, то у відбитій та заломленій хвилі орієнтація цього вектора не зміниться, іншими будуть лише амплітуди і фази.

Тоді для відбитої хвилі

$$H_{myo} = R_{H_y} \cdot A_1 e^{-jk_1 n b} \quad (9.2)$$

для заломленої хвилі

$$H_{mys} = T_{H_y} \cdot A_1 e^{-jk_2 n b} \quad (9.3)$$

де  $k_2 = \sqrt{\mu_a \cdot \epsilon_a}$  – стала поширення заломленої хвилі у другому середовищі;

$R_{H_y}$  та  $T_{H_y}$  – відповідно коефіцієнти відбиття та заломлення по складовій  $H_y$  при паралельній поляризації хвилі, що падає.

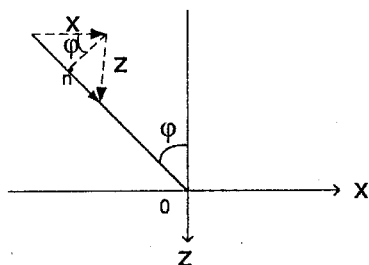


Рис. 9.3

Задачу будемо розв'язувати у прямокутній системі координат  $x, y, z$ , до якої перейдемо від напрямків  $\bar{n}$ ,  $\bar{n}_B$ ,  $\bar{n}_3$ .

Як бачимо з додаткового рисунка, шлях довжиною  $n$  можна записати так:

$$n = x \sin \varphi + z \cos \varphi.$$

Аналогічно

$$n_B = x \sin \varphi_B + z \cos \varphi_B, \quad (9.4)$$

$$n_3 = x \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3.$$

Підставивши відповідні значення  $\bar{n}$ ,  $\bar{n}_B$ ,  $\bar{n}_3$  з (9.4) у (9.1), (9.2), (9.3), отримаємо вирази для комплексних амплітуд напруженостей магнітної складової поля падаючої, відбитої та заломленої хвиль у прямокутних декартових координатах  $x, y, z$ .

$$H_{my} = A_1 e^{-jk_1(x \sin \varphi + z \cos \varphi)},$$

$$H_{myn} = A_1 R e^{-jk_1(x \sin \varphi_B + z \cos \varphi_B)}, \quad (9.5)$$

$$H_{mys} = A_1 T_H e^{-jk_2(x \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3)}$$

Тепер задача полягає у визначенні коефіцієнтів відбиття  $R_{Hy}$ , заломлення  $T_{Hy}$ , кутів відбиття  $\varphi_B$  та заломлення  $\varphi_3$ . Для цього скористаємось граничними умовами для тангенціальних складових векторів магнітного поля. З боку першого середовища на межі розділення (точка  $O$ ) тангенціальна складова  $H_{1mr}$  складатиметься з  $H_{my}$  та  $H_{myn}$ , оскільки ці хвилі знаходяться у першому середовищі, з боку другого середовища на межі розділення тангенціальна складова  $H_{2mr}$  дорівнює (за аналогічних причин)  $H_{mys}$ . Тобто на межі розділення (при  $Z = 0$ ) справедливе співвідношення:  $H_{1mr} = H_{2mr}$ ,

$$\text{або} \quad A_1 e^{-jk_1 x \sin \varphi} + A_1 R_H e^{-jk_1 x \sin \varphi_B} = A_1 T_H e^{-jk_2 x \sin \varphi_3}. \quad (9.6)$$

Останній вираз є тотожністю, бо ця рівність виконується в усіх точках межі розділення, тобто при будь-яких значеннях змінної  $x$ . Але це можливо, якщо виконується умова

$$k_1 \sin \varphi = k_1 \sin \varphi_s = k_1 \sin \varphi_s, \quad (9.7)$$

Тоді з (9.6) отримаємо перше рівняння для визначення коефіцієнтів

$$\dot{R}_{H_s} \text{ та } \dot{T}_{H_s}: \quad 1 + R_{H_s} = T_{H_s}. \quad (9.8)$$

З виразу (9.7) випливають відомі у оптиці закони Снелліуса

$$\varphi = \varphi_s, \quad (9.9)$$

$$\frac{\sin \varphi_s}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\mu_{o1} \cdot \varepsilon_{o1}}}{\sqrt{\mu_{o2} \cdot \varepsilon_{o2}}}. \quad (9.10)$$

З виразів (9.9) та (9.10) легко визначити кути відбиття та заломлення.

Для визначення коефіцієнтів відбиття та заломлення крім рівняння (9.8) треба мати ще одне відносно цих самих двох невідомих.

Таке рівняння можна отримати, виходячи з граничних умов для тангенціальних складових векторів електричного поля, які знайдемо, скориставшись першим рівнянням Максвелла для комплексних амплітуд

$$\text{rot} \bar{H}_m = j\omega \varepsilon_a \bar{E}_m.$$

З останнього рівняння

$$\bar{A}_m = \frac{1}{j\omega \varepsilon_a} \cdot \text{rot} \bar{H}_m = \frac{1}{j\omega \varepsilon} \left[ x_0 \left( \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial H_{my}}{\partial x} \right) + y_0 \left( \frac{\partial H_{m0}}{\partial z} - \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} \right) + z_0 \left( \frac{\partial H_{m0}}{\partial x} - \frac{\partial H_{m0}}{\partial y} \right) \right]. \quad (9.11)$$

Враховуючи, що у даному випадку  $H_{mx} = H_{mz} = 0$  і похідна  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ,

вираз (9.11) матиме вигляд

$$\bar{E}_m = x_0 \bar{E}_{mx} + z_0 \bar{E}_{mz} = -x_0 \frac{1}{j\omega \varepsilon_a} \cdot \frac{\partial H_{my}}{\partial z} + z_0 \frac{1}{j\omega \varepsilon_a} \cdot \frac{\partial H_{mz}}{\partial x}. \quad (9.12)$$

Звідси

$$\bar{E}_{mx} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_a} \cdot \frac{\partial H_{my}}{\partial z}, \quad (9.13)$$

$$\bar{E}_{mz} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_a} \cdot \frac{\partial H_{mz}}{\partial x}. \quad (9.14)$$

З урахуванням (9.5), у падаючій хвилі

$$\bar{E}_{mx} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{o1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ A_1 e^{-jk_1(x \sin \varphi + z \cos \varphi)} \right] = \frac{k_1 \cos \varphi}{\omega \varepsilon_{o1}} A_1 e^{-jk_1(x \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \quad (9.15)$$

у відбитій хвилі

$$\bar{E}_{mz} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_{o1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ A_1 R_{H_s} e^{-jk_1(x \sin \varphi_s + z \cos \varphi_s)} \right] = \frac{k_1 \cos \varphi_s}{\omega \varepsilon_{o1}} A_1 R_{H_s} e^{-jk_1(x \sin \varphi_s + z \cos \varphi_s)}, \quad (9.16)$$

у заломленій хвилі

$$\vec{E}_{mz} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ A_1 \dot{T}_{Hy} e^{-jk_2(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)} \right] = \frac{k_1 \cos \varphi_1}{\omega \varepsilon_{a2}} A_1 \dot{T}_{Hy} e^{-jk_2(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}; \quad (9.17)$$

у падаючій хвилі

$$\vec{E}_{mz} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{a1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1 e^{-jk_1(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)} \right] = \frac{k_1 \sin \varphi_1}{\omega \varepsilon_{a1}} A_1 e^{-jk_1(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}; \quad (9.18)$$

у відбитій хвилі

$$\vec{E}_{mz} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_{a1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1 \dot{R}_{Hy} e^{-jk_1(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)} \right] = \frac{k_1 \sin \varphi_1}{\omega \varepsilon_{a1}} A_1 \dot{R}_{Hy} e^{-jk_1(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}; \quad (9.19)$$

у заломленій хвилі

$$\vec{E}_{mz} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_1 \dot{T}_{Hy} e^{-jk_2(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)} \right] = \frac{k_1 \sin \varphi_1}{\omega \varepsilon_{a2}} A_1 \dot{T}_{Hy} e^{-jk_2(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}; \quad (9.20)$$

Зваживши на те, що  $\varphi = \varphi_0$  і  $\frac{k}{\omega \varepsilon_a} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a}}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = z_c$  — комплексний хвильовий опір середовища, вирази (9.15), (9.16) і (9.17) можна переписати так:

у падаючій хвилі

$$\vec{E}_{mx} = z_{c1} \cos \varphi \cdot A_1 e^{-jk_1(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}; \quad (9.21)$$

у відбитій хвилі

$$\vec{E}_{mx} = -z_{c1} \cos \varphi \cdot A_1 \dot{R}_{Hy} e^{-jk_1(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}; \quad (9.22)$$

у заломленій хвилі

$$\vec{E}_{mx} = -z_{c2} \cos \varphi \cdot A_1 \dot{T}_{Hy} e^{-jk_2(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}. \quad (9.23)$$

З урахуванням (9.7), поділивши усі члени останнього виразу на  $\dot{z}_{c1} \cos \varphi$ , отримаємо:

$$1 - \dot{R}_{Hy} = \frac{\dot{z}_{c2}}{\dot{z}_{c1}} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi} \dot{T}_{Hy} \quad (9.24)$$

Розв'язавши систему рівнянь (9.8) та (9.24), знаходимо коефіцієнти заломлення та відбиття по складовій  $H_y$ :

$$\dot{T}_{Hy} = \frac{2\dot{z}_{c1} \cos \varphi}{\dot{z}_{c1} \cos \varphi + \dot{z}_{c2} \cos \varphi}; \quad (9.25)$$

$$\dot{R}_{Hy} = \frac{\dot{z}_{c1} \cos \varphi - \dot{z}_{c2} \cos \varphi_2}{\dot{z}_{c1} \cos \varphi + \dot{z}_{c2} \cos \varphi_2}. \quad (9.26)$$

Визначимо коефіцієнти відбиття ( $R_{Ex}$ ) та заломлення ( $T_{Ex}$ ) при паралельній поляризації для складової  $E_{mx}$ . Для цього розділимо (9.16) на (9.15), (9.17) на (9.15) при  $Z = 0$  (пам'ятаючи, що при цьому  $\varphi = \varphi_3$  і  $k_1 x \sin \varphi = k_2 x \sin \varphi_3$ )

$$R_{Ex} = \frac{E_{mx}}{E_{mx}} = -R_{Hy} = \frac{z_{c2} \cos \varphi_3 - z_{c1} \cos \varphi}{z_{c2} \cos \varphi_3 + z_{c1} \cos \varphi}, \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned} T_{Ex} &= \frac{E_{mx3} k_2 \varepsilon_{a1} \cos \varphi_3}{E_{mx} k_2 \varepsilon_{a2} \cos \varphi} T_{Hy} = \frac{z_{c2} \cos \varphi_3}{z_{c1} \cos \varphi} T_{Hy} = \frac{z_{c2} \cos \varphi_3 \cdot 2 z_{c2} \cos \varphi}{z_{c1} \cos \varphi (z_{c1} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi)} = \\ &= \frac{z_{c2} \cos \varphi_3}{z_{c1} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

### Випадок перпендикулярної поляризації

Цьому випадку відповідає рис. 9.3 б. Як бачимо, вектор  $\vec{E}_m$  має лише одну складову  $E_{dy}$ , а вектор  $\vec{H}_0$  — дві складові  $H_{mx}$  і  $H_{mz}$ . Для визначення коефіцієнтів відбиття  $R_{Ey}$  та заломлення  $T_{Ey}$  по складовій  $\vec{E}_{my}$  скористаємось у виразах (9.25) та (9.26) принципом перестановчої подвійності, згідно з яким проведемо заміни:  $\vec{H}_{my}$  на  $\vec{E}_{my}$ ,  $\mu_{a1}$  на  $\varepsilon_{a1}$ ,  $\varepsilon_{a1}$  на  $\mu_{a1}$  (тобто  $z_{c1}$  на  $\frac{1}{z_{c1}}$ ),  $\mu_{a2}$  на  $\varepsilon_{a2}$ ,  $\varepsilon_{a2}$  на  $\mu_{a2}$  (тобто  $z_{c2}$  на  $\frac{1}{z_{c2}}$ ). Тоді отримаємо

$$\hat{T}_{Ey} = \frac{2 \hat{z}_{c2} \cos \varphi}{\hat{z}_{c2} \cos \varphi + \hat{z}_{c1} \cos \varphi}, \quad (9.29)$$

$$\hat{R}_{Ey} = \frac{\hat{z}_{c2} \cos \varphi - \hat{z}_{c1} \cos \varphi_3}{\hat{z}_{c2} \cos \varphi + \hat{z}_{c1} \cos \varphi_3}. \quad (9.30)$$

Для визначення коефіцієнтів відбиття ( $R_{Hy}$ ) та заломлення ( $T_{Hy}$ ) по складовій  $H_{mx}$  у випадку перпендикулярної поляризації, провівши аналогічні зміни в виразах (9.29) та (9.30), отримаємо:

$$\hat{T}_{Hy} = \frac{2 \hat{z}_{c1} \cos \varphi}{\hat{z}_{c1} \cos \varphi + \hat{z}_{c2} \cos \varphi}, \quad (9.31)$$

$$\hat{R}_{Hy} = \frac{\hat{z}_{c1} \cos \varphi - \hat{z}_{c2} \cos \varphi_3}{\hat{z}_{c1} \cos \varphi + \hat{z}_{c2} \cos \varphi_3}. \quad (9.32)$$

Вирази (9.25) та (9.26) для тангенціальної складової магнітного поля  $H_{my}$  збігаються з виразами (9.31) та (9.32) для тангенціальної складової

магнітного поля  $H_{mx}$ . Відповідно збігаються вирази (9.27) та (9.28) з виразами (9.29) та (9.30) для тангенціальної складової електричного поля, що є природним.

### 9.3. Явище повного заломлення хвилі

Дослідимо явище повного заломлення (повного проходження хвилі у друге середовище) для випадків паралельної і перпендикулярної поляризацій.

#### Випадок паралельної поляризації

При повному проходженні хвилі у друге середовище відбита хвиля відсутня і коефіцієнт відбиття, наприклад, по складовій  $H_{my}$  дорівнює нулю. Прирівнюючи до нуля вираз (9.26), отримаємо

$$z_{e1} \cos \varphi_A = z_{e2} \cos \varphi_3,$$

або

$$\dot{z}_{e1}^2 \cos \varphi_A = \dot{z}_{e2}^2 \cos \varphi_3. \quad (9.33)$$

Виразивши значення хвильових опорів середовищ через їх параметри, отримаємо

$$\frac{\mu_{a1} \cos^2 \varphi_B}{\dot{\epsilon}_{a1}} = \frac{\mu_{a2} \cos^2 \varphi_3}{\dot{\epsilon}_{a2}}, \quad (9.34)$$

де  $\varphi_B$  – відомий з оптики кут Брюстера, – такий кут падіння хвилі на межу розділення двох середовищ, при якому відбувається повне проходження хвилі у друге середовище.

Розв'яжемо рівняння (9.34), замінивши  $\cos^2 \varphi_B$  на  $(1 - \sin^2 \varphi_B)$ ,  $\cos^2 \varphi_3$  на  $(1 - \sin^2 \varphi_3)$  і, скориставшись законом Снелліуса,  $\sin^2 \varphi_3$  на

$\frac{(\mu_{a1} \cdot \epsilon_{a1} \sin^2 \varphi_B)}{\mu_{a2} \cdot \epsilon_{a2}}$ , відносно  $\sin^2 \varphi_B$ :

$$\mu_{a2} \cdot \epsilon_{a2}$$

$$\sin \varphi_B = \sqrt{\frac{(\mu_{a2} \cdot \dot{\epsilon}_{a1} - \mu_{a1} \cdot \dot{\epsilon}_{a2}) \dot{\epsilon}_{a2}}{\mu_{a2} (\dot{\epsilon}_{a1}^2 - \dot{\epsilon}_{a2}^2)}}. \quad (9.35)$$

Визначимо тепер умови, за яких можливе повне заломлення хвилі. Формула (9.35) справедлива для будь-яких діелектричних середовищ. На практиці часто втратами в діелектриках можна знехтувати і вважати, що

$$\epsilon_{a1} = \epsilon_{a1} \quad \text{та} \quad \epsilon_{a2} = \epsilon_{a2}.$$

Тоді можливі такі два випадки:

$$1. \quad \mu_{o1} = \mu_{o2} \sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_{o2}}{(\varepsilon_{o1} + \varepsilon_{o2})}}. \quad (9.36)$$

Оскільки  $\varepsilon_{o2} < \varepsilon_{o1} + \varepsilon_{o2}$ , то повне заломлення фізично можливе. Але формула (9.36) не має фізичного змісту при  $\varepsilon_{o1} = \varepsilon_{o2}$  і тільки формально при цьому  $\varphi_B = 45^\circ$ . Слід зауважити, що ця формула працює лише при  $\varepsilon_{o1} \neq \varepsilon_{o2}$  і втрачає зміст при наближенні  $\varepsilon_{o1}$  до  $\varepsilon_{o2}$ .

2.  $\mu_{o1} \neq \mu_{o2}$ . Тоді, щоб фізично здійснити повне проходження у друге середовище, необхідне виконання двох обов'язкових умов у формулі (9.35):

а)  $|\varepsilon_{o2}(\mu_{o2} \cdot \varepsilon_{o2})| < |\mu_{o1}(\varepsilon_{o1}^2 - \varepsilon_{o2}^2)|$ ;

б) чисельник і знаменник повинні мати однакові знаки (бути або додатними, або від'ємними одночасно).

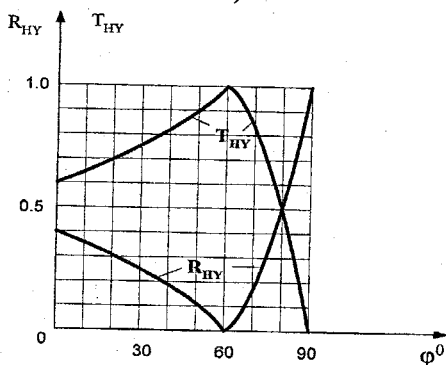


Рис. 9.4

Зі сказаного робимо висновки: по-перше, повне проходження хвиль у друге середовище виникає не при будь-яких середовищах; по-друге, значення кута Брюстера є фіксованим для заданої пари середовищ, бо при більших чи менших кутах падіння ( $\varphi \neq \varphi_B$ ) це явище зникає.

На рисунку 9.4 наведено графіки залежності коефіцієнтів відбиття та заломлення від кута падіння для випадку, коли перше середовище є вакуум, а друге – діелектрик без втрат з  $\varepsilon_2 = 3$ .

### Випадок перпендикулярної поляризації

Застосувавши до виразу (9.35) принцип перестановної двоїстості, отримаємо:

$$\sin \varphi_B = \sqrt{\frac{(\mu_{o1} \cdot \varepsilon_{o2} - \mu_{o2} \cdot \varepsilon_{o1}) \mu_{o2}}{\varepsilon_{o1}(\mu_{o1}^2 - \mu_{o2}^2)}}. \quad (9.37)$$

Рівність (9.37) виконується лише за умови, коли  $\mu_{a1} \neq \mu_{a2}$ . Якщо при цьому  $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{a2}$ , то для кута Брюстера виходить співвідношення:

$$\sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1} - \mu_{a2}}}. \quad (9.38)$$

У випадку, коли  $\mu_{a1} \neq \mu_{a2}$  та  $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{a2}$  для існування повного проходження хвилі у друге середовище є одночасне виконання двох умов:

1.  $(\mu_{a1} \cdot \varepsilon_{a2} - \mu_{a2} \cdot \varepsilon_{a1})\mu_{a2} < \varepsilon_{a1}(\mu_{a1}^2 - \mu_{a2}^2)$ ;
2. Чисельник і знаменник у виразі (9.37) повинні мати однакові знаки (плюс або мінус одночасно).

Необхідною ж умовою існування кута Брюстера при перпендикулярній поляризації є  $\mu_{a1} \neq \mu_{a2}$ .

Плоску хвилю з круговою чи еліптичною поляризаціями, як відомо, можна представити як суперпозицію двох лінійно поляризованих плоских хвиль, одна з яких має паралельну, а друга – перпендикулярну поляризації до площини падіння (площини рисунка). Оскільки умови існування кута Брюстера для хвиль паралельної і перпендикулярної поляризації є різними, то хвилі з круговою чи еліптичною поляризаціями будуть відбиватися при будь-яких кутах падіння. Проте при цьому співвідношення між амплітудами паралельних і перпендикулярних складових у відбитій і заломленій хвилях буде іншим, ніж у падаючій хвилі. Це приводить до зміни поляризації відбитої і заломленої хвиль у порівнянні з падаючою хвилею. Зокрема, якщо плоска хвиля з круговою поляризацією падає під кутом Брюстера для однієї з двох лінійно поляризованих хвиль, то відбита хвиля виявиться лінійно поляризованою, а заломлена – еліптично поляризованою.

#### 9.4. Явище повного внутрішнього відбиття

Виходячи з закону Снелліуса (9.10) і вважаючи обидва середовища середовищами без втрат, запишемо

$$\sin \varphi_3 = \sqrt{\frac{\mu_{a1}\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}} \cdot \sin \varphi. \quad (9.39)$$

Якщо перше середовище є оптично більш густим, ніж друге ( $\mu_{a1} \cdot \varepsilon_{a1} > \mu_{a2} \cdot \varepsilon_{a2}$ ), то завжди можна підібрати такий кут падіння  $\varphi$ , при якому

$$\sin \varphi_3 = 1 \text{ і } \varphi_3 = 90^\circ. \quad (9.40)$$

Підставивши (9.40) в (9.39), визначимо такий кут падіння, при якому заломлена хвиля не проходить у друге середовище (рис. 9.5) і буде спрямована вздовж межі розділення середовищ.



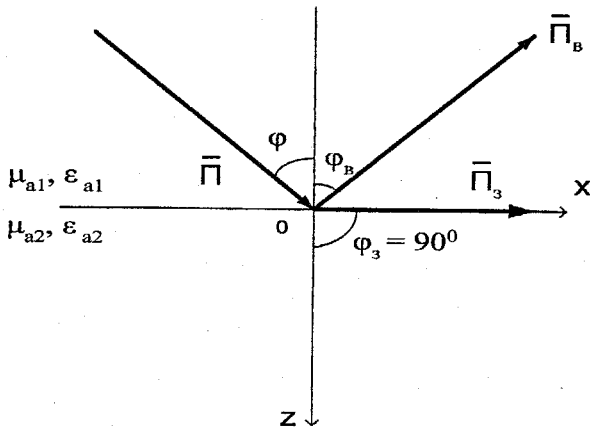


Рис. 9.5

Цей кут падіння назвемо кутом повного внутрішнього відбиття і позначимо його через  $\varphi_{пв}$ . Отже

$$\sin \varphi_{пв} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}\mu_{a1}}}. \quad (9.41)$$

Закон Снелліуса (9.10) є справедливим при будь-яких кутах падіння  $\varphi$ . Але при  $\varphi > \varphi_{пв}$  синус кута заломлення, як бачимо з виразу (9.39), стає більшим за одиницю, що суперечить законам тригонометрії при дійсних значеннях кута  $\varphi_3$ .

Щоб розкрити цю суперечність припустимо, що даний кут є комплексною величиною:

$$\varphi_3 = \varphi_{31} + j\varphi_{32}. \quad (9.42)$$

Тоді

$$\sin \varphi_3 = \sin(\varphi_{31} + j\varphi_{32}) = \sin \varphi_{31} \cdot \cos(j\varphi_{32}) \cdot \cos \varphi_{31} \cdot \sin(j\varphi_{32}). \quad (9.43)$$

З математики відомо, що

$$\sin(j\varphi_{32}) = jsh\varphi_{32}, \quad \cos(j\varphi_{32}) = ch(\varphi_{32}),$$

де sh та ch є гіперболічним синусом та косинусом кута  $\varphi_{32}$

Вважаючи середовища середовищами без втрат, то їх параметри  $\mu_a$  та  $\epsilon_a$  є дійсними величинами, а значить і  $\sin \varphi_3$  має бути дійсним числом. Це досягається у (9.43), коли  $\varphi_{31} = 90^\circ$ . Тоді

$$\sin \varphi_{31} = 1, \quad \cos \varphi_{31} = 0, \quad \varphi_3 = 90^\circ + j\varphi_{32}, \quad (9.44)$$

$$\sin \varphi_3 = \cos(j\varphi_{32}) = ch\varphi_{32} \quad (9.45)$$

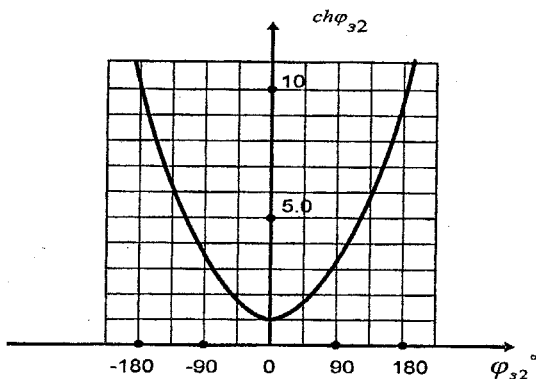


Рис. 9.6

На рисунку 9.6 показано графік гіперболічного косинуса  $ch\varphi_{32}$ , з якого випливає, що ця функція має будь-які додатні значення, найменшим з яких є одиниця. Залишається з'ясувати, якому фізичному процесу відповідатиме цей випадок. Оскільки стає уявною величиною

$$\cos\varphi_3 = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_3}$$

то останній вираз можемо переписати у вигляді

$$\cos\varphi_3 = -j\sqrt{\sin^2\varphi_3 - 1} \quad (9.46)$$

У виразі (9.45) перед коренем взято знак „мінус” з міркувань, які будуть пояснені у ході подальшого аналізу. Підставивши (9.45) у вираз (9.5) для  $\dot{H}_{my}$  складової заломленої хвилі, отримаємо

$$\dot{H}_{my} = A_1 T_{H_1} e^{-jk_2(x\sin\varphi_3 - z\sqrt{\sin^2\varphi_3 - 1})} = A_1 T_{H_1} e^{-k_2 z\sqrt{\sin^2\varphi_3 - 1}} \cdot e^{-jk_2 x\sin\varphi_3} \quad (9.47)$$

Підставивши (9.46) у вирази (9.17) та (9.20), отримаємо вирази для  $\dot{E}_{mx}$  та  $\dot{E}_{mz}$  складових заломленої хвилі:

$$\dot{E}_{my} = z_{c2} \left( -j\sqrt{\sin^2\varphi_3 - 1} \right) \cdot A_1 T_{H_1} e^{-k_2 z\sqrt{\sin^2\varphi_3 - 1}} \cdot e^{-jk_2 x\sin\varphi_3} \quad (9.48)$$

$$\dot{E}_{mz} = -z_{c2} \sin\varphi_3 \cdot A_1 T_{H_1} e^{-k_2 z\sqrt{\sin^2\varphi_3 - 1}} \cdot e^{-jk_2 x\sin\varphi_3} \quad (9.49)$$

### Поверхнева хвиля

З виразів (9.47), (9.48) бачимо, що у випадку повного внутрішнього відбиття вздовж осі  $Ox$  відбувається електромагнітний гармонічний

процес зі складовими  $\vec{E}_{mx}$  та  $\vec{H}_{my}$ , середнє значення вектора Пойнтинга якого  $\overline{\Pi}_{сєрз}$  дорівнює

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{сєрз} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \vec{E}_{mx} \vec{H}_{my}^* \right] = \frac{1}{2} \left[ -\bar{z}_0 \bar{y}_0 \right] \operatorname{Re} \left\{ z_{c2} \sin \varphi_3 A_1^2 \cdot T_{Hy}^2 \cdot e^{-2k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1} \cdot z} \cdot e^{-jk_2 \sin \varphi_3 x} \cdot e^{jk_2 \sin \varphi_3 x} \right\} = \\ &= \bar{x}_0 \frac{1}{2} z_{c2} \sin \varphi_3 \cdot A_1^2 T_{Hy}^2 \cdot e^{-2k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1} \cdot z}. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Вздовж осі Z також відбувається електромагнітний процес зі складовими  $\vec{E}_{mx}$  та  $\vec{H}_{my}$ , середнє значення вектора Пойнтинга якого дорівнює:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{сєрз} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \vec{E}_{mx} \vec{H}_{my}^* \right] = \frac{1}{2} \left[ \bar{z}_0 \bar{y}_0 \right] \operatorname{Re} \left\{ z_{c2} (-j \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1}) A_1^2 \cdot T_{Hy}^2 \cdot e^{-2k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1} \cdot z} \cdot e^{-jk_2 \sin \varphi_3 x} \cdot e^{jk_2 \sin \varphi_3 x} \right\} = \\ &= \bar{x}_0 \frac{1}{2} z_{c2} \sin \varphi_3 \cdot A_1^2 T_{Hy}^2 \cdot e^{-2k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1} \cdot z}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Нагадаємо, якщо б у виразі (9.46) було взято знак „плюс”, то це б означало, що амплітуда складових заломленої хвилі у виразах (9.47), (9.48) зростала б зі зростанням z, що є неможливим у даному випадку.

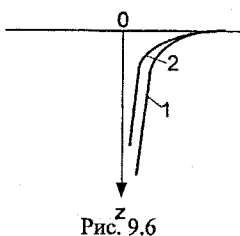


Рис. 9.6

Зазначені вирази показують, що амплітуда складових поля зменшується за експоненціальним законом  $e^{-2k_1 \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1} \cdot z}$  при віддалені від першого середовища (рис. 5.6). Електромагнітне поле ніби „прилипає” до нього. Оскільки середнє значення вектора Пойнтинга  $\overline{\Pi}_{сєрз} \neq 0$ , то можна говорити про перенесення енергії поля вздовж межі розділення середовищ. Рівність нулю середнього значення вектора Пойнтинга ( $\overline{\Pi}_{сєрз} = 0$ ) трактується як

хвильовий процес, у якому потік енергії поля за період коливання через межу розділення середовищ дорівнює нулю. Тобто у один напівперіод потік енергії спрямований, наприклад, з першого середовища у друге (вздовж осі OZ), а у другий напівперіод він у такій самій кількості повертається назад з другого у перше середовище (вздовж осі OZ). У середньому ж за період потік енергії поля дорівнює нулю. Це говорить про те, що у напрямку осі OZ електромагнітна хвиля не поширюється, і уся енергія заломленої хвилі спрямована вздовж межі розділення середовищ. Таку хвилю називають **поверхневою хвилею**. Зі збільшенням оптичної густини першого середовища ( $\mu_{a1} \cdot \varepsilon_{a1}$ ) підкореневий вираз в експоненті

$\sqrt{\frac{\mu_{a1} \cdot \varepsilon_{a1}}{\mu_{a2} \cdot \varepsilon_{a2}} \cdot \sin^2 \varphi - 1}$  зростатиме експонента зменшуватиметься швидше

(крива 2 у порівнянні з кривою 1, рисунок 9.6), тобто поверхнева хвиля сильніше „притискатиметься” до першого середовища. Це явище має велике практичне значення у техніці надвисоких частот.

Визначимо фазову швидкість поверхневої хвилі, скориставшись, наприклад, комплексною амплітудою магнітної складової  $H_{\text{мг}}$  з виразу (9.47). Миттєве значення цієї гармонічної функції дорівнює дійсній частині комплексу, який отримуємо, домноживши  $H_{\text{мг}}$  на  $e^{j\omega t}$ , де  $\omega$  – кругова частота електромагнітної хвилі.

$$\begin{aligned} H_{\text{дб}} &= \text{Re} \left\{ H_{\text{дбс}} e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ A_1 \cdot T_{H_z} \cdot e^{-k_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1} \cdot z} \cdot e^{-jk_2 \sin \varphi_3 x} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \\ &= A_1 \cdot T_{H_z} \cdot e^{-k_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_3 - 1} \cdot z} \cdot \cos(\omega t - k_2 x \sin \varphi_3). \end{aligned}$$

Фаза гармонічної (з частотою  $\omega$ ) поверхневої хвилі дорівнює

$$\omega t - k_2 \cdot x \cdot \sin \varphi_3 = \omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2} \cdot \varepsilon_{a2}} x \cdot \sin \varphi_3.$$

Через кожен період гармоніки її фаза зростає на  $2\pi$  радіан. Для таких точок вздовж осі OZ є справедливим співвідношення

$$\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \cdot \sin \varphi_3 \cdot x = 2\pi n, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Визначивши повний диференціал останнього виразу

$$\dot{\omega} \cdot dt - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \cdot \sin \varphi_3 \cdot dx = 0,$$

отримаємо вираз для фазової швидкості  $V_\varphi$  поверхневої хвилі

$$V_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a1}} \cdot \sin \varphi_3}. \quad (9.52)$$

Якщо, наприклад, друге середовище є сухим повітрям, то  $\mu_{a2} = \mu_0$  і  $\varepsilon_{a2} = \varepsilon_0$ . Фазова ж швидкість поверхневої хвилі

$$V_\varphi \approx \frac{c}{\sin \varphi_3} \quad (9.53)$$

(при повному внутрішньому відбитті, згадаємо,  $\sin \varphi_3 > 1$ ) буде меншою за швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі (сухому повітрі),  $V_\varphi < c$ .

Такі хвилі в електродинаміці називаються повільними хвилями. Отже, поверхнева хвиля є повільною хвилею.

### 9.5. Падіння плоскої хвилі на плоску межу розділення з провідником

Розглядається задача, коли *друге середовище є провідником. У такому середовищі  $\text{tg} \delta \gg 1$ , а діелектрична провідність*

$$\dot{\varepsilon}_{a2} = \varepsilon_{a2} (1 - j \text{tg} \delta) \approx -j \varepsilon_{a2} \cdot \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{a2}} = -j \frac{\sigma}{\omega} \quad (9.54)$$

буде уявною величиною. У такому разі закон Снелліуса (вираз 9.39) переписється таким чином:

$$\sin \varphi_3 = \sqrt{\frac{\mu_{a1} \cdot \varepsilon_{a1}}{\mu_{a2} (-j \frac{\sigma}{\omega})}} \cdot \sin \varphi. \quad (9.55)$$

Для наочності будемо вважати перше середовище сухим повітрям (майже вакуумом) і тоді

$$\sin \varphi_3 = \sqrt{j \frac{\omega \varepsilon_0}{\mu_2 \sigma}} \sin \varphi \quad (9.56)$$

**Випадок, коли друге середовище є ідеальним провідником** ( $\sigma_2 = \infty$ ), показує, що кут заломлення дорівнюватиме нулю при будь-яких значеннях кута падіння

$$\sin \varphi_3 = 0, \quad \cos \varphi_3 = 1,$$

тобто завжди заломлена хвиля буде поширюватись строго перпендикулярно до межі розділення середовища. Нагадаємо, що у відповідності до граничних умов амплітуда заломленої хвилі дорівнюватиме нулю.

**Випадок реального провідника.** На відміну від попереднього випадку поле в реальному провіднику (металі) існує, хоч і швидко згасає. Зваживши на велике значення питомої провідності металів (порядку  $10^7 \text{ См/м}$ ) можна вважати, виходячи з виразу (9.54), що практично кут заломлення мало відрізняється від нуля  $\varphi_3 \approx 0$  і

$$\sin \varphi_3 \approx 0, \quad \cos \varphi_3 \approx 1,$$

при будь-яких значеннях кута падіння. Тобто, заломлена хвиля проходитиме у метал завжди практично перпендикулярно до межі розділення середовищ.

На практиці таким провідником є благородний метал (срібло, золото) або кольоровий метал чи сплав (мідь, латунь, алюміній тощо), які мають велике значення питомої провідності ( $\sigma_2 > 10^7 \text{ См/м}$ ). Визначимо хвильовий опір металу  $Z_M$ , скориставшись, наприклад, співвідношенням для  $\dot{H}_{\text{мяз}}$  (9.5) та для  $\dot{E}_{\text{мяз}}$  (9.23) і, пам'ятаючи, що  $\cos \varphi_3 \approx 1$

$$Z_M = \frac{\dot{E}_{\text{мяз}}}{\dot{H}_{\text{мяз}}} = Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}},$$

де  $\mu_{a2} = \mu_{\text{ам}}$  – абсолютна магнітна проникність металу;  $\varepsilon_{a2} = \varepsilon_{a2} = -j \frac{\sigma}{\omega}$  – комплексна діелектрична проникність металу, згідно з виразом (9.54). Тоді,

$$\dot{Z}_M = \sqrt{j \frac{\omega \mu_{\text{ам}}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{\text{ам}}}{\sigma} e^{j\pi/2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{\text{ам}}}{\sigma}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{\omega \mu_{\text{ам}}}{2\sigma}} (1 + j) \quad (9.57)$$

З останнього виразу бачимо, що модуль комплексного хвильового опору металу

$$Z_M = |\dot{Z}_M| = \sqrt{\frac{\omega \mu_{ам}}{\sigma}} \quad (9.58)$$

є малою величиною і чим більша його провідність, тим меншим буде його хвильовий опір. Так, наприклад, для срібла (найкращого провідника з  $\sigma_2 > 6,3 \cdot 10^7 \text{ СМ/М}$ ) цей опір на частоті 10 ГГц

$$Z_M = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^{10} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{6,3 \cdot 10^7}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ (Ом)},$$

тобто складає усього 0,04 Ом, а на частоті 100 МГц – лише 0,4 Ом.

## 9.6. Наближені граничні умови Леонтовича – Щукіна

Мова йтиме про важливу у техніці НВЧ задачу знаходження зв'язку між тангенціальною складовою вектора електричного поля на границі діелектрика (1-е середовище) і металу (2-е середовище) з боку 1-го середовища зі значенням тангенціальної складової вектора напруженості магнітного поля у тій самій точці. Нагадаємо, що звичайні граничні умови зв'язують значення векторів поля на межі розділення, але, по-перше, вони є однойменними ( $E_1$  та  $E_2$ ), ( $H_1$  та  $H_2$ ) і, по-друге, знаходяться по різні боки межі.

У попередньому підрозділі було показано, що через високу провідність металів заломлена плоска хвиля поширюватиметься у другому середовищі перпендикулярно до межі розділення при падінні плоскої хвилі під будь-яким кутом  $\varphi$  на межу розділення. При цьому між векторами поля  $E_m$  та  $H_m$  у другому середовищі буде виконуватися співвідношення:

$$\vec{E}_{2m} = Z_M \vec{H}_{2m}. \quad (9.59)$$

Оскільки у другому середовищі плоска хвиля поширюється перпендикулярно до межі розділення, то вектори  $\vec{E}_{2m}$  і  $\vec{H}_{2m}$  мають бути паралельними цій межі. Згідно із загальними граничними умовами тангенціальні складові векторів  $\vec{E}_m$  та  $\vec{H}_m$  мають бути (у випадку відсутності в межі розділення сторонніх струмів) неперервними:

$$\vec{E}_{1mr} = \vec{E}_{2mr} \quad \text{і} \quad \vec{H}_{1mr} = \vec{H}_{2mr}.$$

Отже, у виразі (9.59) можна зробити заміну

$$\vec{E}_{2m} \text{ на } \vec{E}_{2mr}, \quad \vec{H}_{2m} \text{ на } \vec{H}_{2mr},$$

$$\vec{E}_{2mr} \text{ на } \vec{E}_{1mr}, \quad \vec{H}_{2mr} \text{ на } \vec{H}_{1mr} \text{ та}$$

отримати співвідношення

$$\vec{E}_{1mr} = Z_M \vec{H}_{1mr}, \quad (9.60)$$

або у векторній формі

$$\vec{E}_{1nr} = Z_M [\vec{n}_0 H_{1nr}], \quad (9.61)$$

де  $\vec{n}_0$  – орт зовнішньої нормалі до металу.

Вирази (9.60) та (9.61) називаються **наближеними граничними умовами Леонтовича - Щукіна**, записаними у скалярній та векторній формах.

З цих умов випливає, що дотична складова напруженості електричного поля на поверхні реального металу відмінна від нуля. Зі зростанням провідності металу ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) ця складова поля прямує до нуля.

В інженерних задачах дотичну складову електричного поля на металі не враховують. Вважається, що структура поля над металом є такою ж самою, як і над ідеальним провідником. Вона враховується тоді, коли потрібно визначити втрати у реальному провіднику.

## 10. ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

### 10.1. Постановка задачі

У розділі 5 досліджувалось поширення електромагнітних хвиль у різних середовищах. Але ця частина простору не містила джерел поля (сторонніх струмів та зарядів), бо вважалось, що усі джерела знаходяться за межами досліджуваної частини простору. Тому дослідження почалося з запису першого і другого рівнянь Максвелла, які не містять сторонніх струмів. Відповідні їм хвильові рівняння Гельмгольца були однорідними і труднощі з їх розв'язанням не було.

Тепер же мова йтиме про випромінювання електромагнітних хвиль, а це означає, що досліджувана частина простору містить джерела поля, наприклад, сторонній електричний струм. У такому випадку перше та друге рівняння Максвелла для комплексних амплітуд векторів поля (4.11) та (4.4) перепишемо у такому вигляді:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_m - j\omega \varepsilon_a \vec{E}_m = \vec{j}_{em}, \quad (10.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_m + j\omega \mu_a \vec{H}_m = 0. \quad (10.2)$$

Задача полягає у знаходженні векторів електромагнітного поля  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$  по заданому джерелу  $\vec{j}_{em}$  (пряма задача електродинаміки). Обернена задача електродинаміки полягає у знаходженні джерела по заданих векторах, збудженого ним поля.

У цьому розділі будемо розв'язувати лише пряму задачу електродинаміки. Визначити вектори поля безпосередньо з рівнянь (10.1) і (10.2) дуже складно, а тому перейдемо від них до хвильових рівнянь Гельмгольца, подібно до того, як ми це зробили у 5-му розділі, вважаючи середовище однорідним лінійним та ізотропним. Для цього застосуємо ротор до обох частин рівняння (10.1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}_m - j\omega \varepsilon_a \vec{E}_m = \operatorname{rot} \vec{j}_{em}$$

і підставимо в ньому замість  $\operatorname{rot} \vec{E}_m$  його значення з виразу (10.2)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}_m - j\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \vec{E}_m = \operatorname{rot} \vec{j}_{em}. \quad (10.3)$$

Скориставшись відомою тотожністю  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$ , рівняння (10.3) перепишемо так:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H}_m - \nabla^2 \vec{H}_m - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \vec{H}_m = \operatorname{rot} \vec{j}_{em}.$$

Через вихровий характер магнітного поля  $\operatorname{div} \vec{H}_m = 0$  останній вираз буде таким:



$$\nabla^2 \vec{H}_m + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \vec{H}_m = -\text{rot } \dot{j}_{\text{ex},m}. \quad (10.4)$$

Аналогічно, застосувавши ротор до обох частин рівняння (10.2), підставивши в отриманий результат значення  $\text{rot } \vec{H}_m$  з виразу (10.1) і зваживши, що  $\text{div } \vec{E}_m = \rho_{\text{ex},m}$ , отримаємо

$$\nabla^2 \vec{E}_m + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \vec{E}_m = j\omega \mu_a \dot{j}_{\text{ex},m} + \frac{1}{\varepsilon_a} \text{grad } \rho_{\text{ex},m}. \quad (10.5)$$

Вирази (10.4) та (10.5) називаються неоднорідними хвильовими рівняннями Гельмгольца.

## 10.2. Електродинамічні потенціали

Розв'язавши рівняння (10.4) і (10.5), можемо знайти вектори електромагнітного поля по заданих джерелах  $\dot{j}_{\text{ex},m}$  та  $\rho_{\text{ex},m}$ . Але через те, що у правих частинах цих рівнянь джерела знаходяться під дією операторів диференціювання, розв'язок стає дуже незручним.

У такому разі вводять допоміжні функції таким чином, щоб рівняння Гельмгольца відносно них за конструкцією були такими ж, як і (10.4) та (10.5), але у правих частинах були просто задані джерела поля. Такі допоміжні функції називаються **електродинамічними потенціалами**. Потрібно також, щоб перехід від них до векторів електромагнітного поля був простим і завжди можливим.

Введемо допоміжну функцію  $\vec{A}_{\text{ex},m}$  таким чином, що

$$\vec{B}_{\text{ex},m} = \text{rot } \vec{A}_{\text{ex},m}, \quad (10.6)$$

і назвемо її **електричним векторним потенціалом**. Тоді

$$\vec{H}_m = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{A}_{\text{ex},m}. \quad (10.7)$$

За відомим значенням  $\vec{A}_{\text{ex},m}$  можемо з (10.6) і (10.7) однозначно знайти вектори електромагнітного поля  $\vec{B}_m$  та  $\vec{H}_m$ .

Слід зазначити, що у виразі (10.6) є певна нестрогість, бо

$$\text{rot } \vec{A}_{\text{ex},m} = \text{rot} \left( \vec{A}_{\text{ex},m} + \text{grad } U_{\text{ex},m} \right), \quad (10.8)$$

де  $U$  – будь-яка скалярна функція і  $\text{rot grad } U = 0$ . Тобто зв'язок векторів  $\vec{B}_m$  і  $\vec{A}_{\text{ex},m}$  у виразі (10.6) визначено з точністю до градієнта довільної скалярної функції, яку назвемо **скалярним електричним потенціалом**.

Підставимо (10.6) в (10.2):

$$\text{rot } \vec{E}_m + j\omega \text{rot } \vec{A}_{\text{ex},m} = 0,$$

або

$$\operatorname{rot}(\vec{E}_m + j\omega \operatorname{rot} \vec{A}_{\text{ек.м}}) = 0.$$

Скориставшись тотожністю  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$ , запишемо:

$$\vec{E}_m + j\omega \vec{A}_{\text{ек.м}} = -\operatorname{grad} U_{\text{ек.м}}. \quad (10.8)$$

Звідси

$$\vec{E}_m = -\operatorname{grad} U_{\text{ек.м}} - j\omega \vec{A}_{\text{ек.м}} \quad (10.9)$$

i

$$\vec{D}_m = -\varepsilon(\operatorname{grad} U_{\text{ек.м}} - j\omega \vec{A}_{\text{ек.м}}). \quad (10.10)$$

У виразі (10.8) перед градієнтом взято знак „мінус”, щоб у випадку електричного поля ( $\omega = 0$ ) забезпечилась загальновідома рівність  $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$ , де  $U$  – потенціал цього поля.

Отже, вирази (10.6), (10.7), (10.9) і (10.10) дають можливість визначити всі вектори електромагнітного поля через електродинамічні потенціали  $\vec{U}_{\text{ек.м}}$  і  $\vec{A}_{\text{ек.м}}$ .

Підставивши (10.7) і (10.9) у перше рівняння Максвелла (10.1), отримаємо у випадку однорідного лінійного та ізотропного середовища

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}_{\text{ек.м}} - j\omega \varepsilon_0 (\operatorname{grad} U_{\text{ек.м}} - j\omega \vec{A}_{\text{ек.м}}) = \vec{j}_{\text{ек.м}},$$

або, скориставшись відомою тотожністю, матимемо

$$\nabla^2 \vec{A}_{\text{ек.м}} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{A}_{\text{ек.м}} - \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}_{\text{ек.м}} + j\omega \mu_0 \varepsilon_0 U_{\text{ек.м}}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{ек.м}}. \quad (10.11)$$

Щоб отримати з (10.11) рівняння, за конструкцією аналогічне (10.4) і (10.5), вибираємо дивергенцію векторного потенціалу такою:

$$\operatorname{div} \vec{A}_{\text{ек.м}} = -j\omega \mu_0 \varepsilon_0 U_{\text{ек.м}}. \quad (10.12)$$

Тоді рівняння (10.11) перепишеться так:

$$\nabla^2 \vec{A}_{\text{ек.м}} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{A}_{\text{ек.м}} = \mu_0 \vec{j}_{\text{ек.м}}. \quad (10.13)$$

До речі, вибрати умову (10.12), яка називається **умовою калібрування**, досить легко, бо, як зазначалося раніше, вираз (10.6) визначено з точністю до градієнта довільної скалярної функції.

З умови калібрування випливає рівність

$$U_{\text{ек.м}} = j \frac{1}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{A}_{\text{ек.м}}, \quad (10.14)$$

тобто для визначення векторів поля достатньо скористатися лише однією допоміжною функцією – електричним векторним потенціалом  $\vec{A}_{ел.т}$ , значення якого знайдемо, розв'язавши рівняння (10.13).

З урахуванням (10.14) вирази (10.9) і (10.10) перепишуться так:

$$\vec{E}_{ел.т} = -j \frac{1}{\omega \mu_a} \text{grad div } \vec{A}_{ел.т} - j \omega \vec{A}_{ел.т} \quad (10.15)$$

i

$$\vec{D}_m = -j \frac{1}{\omega \mu_a} \text{grad div } \vec{A}_{ел.т} - j \omega \epsilon \vec{A}_{ел.т}. \quad (10.16)$$

Якщо в рівняннях Максвелла (10.1) та (10.2) скористатися принципом перестановної двоїстості, то вони перепишуться так:

$$\text{rot } \vec{E}_m + j \omega \mu_a \vec{H}_m = 0, \quad (10.17)$$

$$\text{rot } \vec{H}_m - j \omega \epsilon_a \vec{E}_m = -\vec{j}_{м.т}, \quad (10.18)$$

де  $-\vec{j}_{м.т}$  – комплексна амплітуда вектора об'ємної густини стороннього магнітного струму.

Якщо у виразах (10.6), (10.15), (10.16) додатково замінити

$$\vec{A}_{ел.т} \rightarrow \vec{A}_{м.т} \quad \text{і} \quad \vec{U}_{ел.т} \rightarrow \vec{U}_{м.т},$$

то отримаємо вирази для векторів електромагнітного поля, збудженого стороннім магнітним струмом

$$\vec{D}_m = \text{rot } \vec{A}_{м.т}, \quad (10.19)$$

$$\vec{E}_m = -\frac{1}{\epsilon_a} \text{rot } \vec{A}_{м.т} \quad (10.20)$$

i

$$\vec{H}_m = -j \frac{1}{\omega \mu_a \epsilon} \text{grad div } \vec{A}_{м.т} - j \omega \vec{A}_{м.т}, \quad (10.21)$$

$$\vec{B}_m = -j \frac{1}{\omega \epsilon_a} \text{grad div } \vec{A}_{м.т} + j \mu_a \vec{A}_{м.т}, \quad (10.22)$$

де  $\vec{A}_{м.т}$  та  $\vec{U}_{м.т}$  – комплексні амплітуди магнітного векторного потенціалу та скалярного магнітного потенціалу.

Неоднорідне рівняння Гельмгольца після зазначених змін (див. 10.13) для векторного магнітного потенціалу буде таким:

$$\nabla^2 \vec{A}_{м.т} + \omega^2 \mu_a \epsilon_a \vec{A}_{м.т} = -\epsilon_a \vec{j}_{ел.т}. \quad (10.23)$$

### 10.3. Розв'язок неоднорідних рівнянь Гельмгольца

Отже, вихідними даними у цьому підрозділі є неоднорідні векторні рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{A}_{el,m} + k^2 \vec{A}_{el,m} = -\mu_a \vec{j}_{el,m}, \quad (10.24)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_{m,m} + k^2 \vec{A}_{m,m} = \varepsilon_a \vec{j}_{m,m}, \quad (10.25)$$

$$k^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a,$$

де  $k = \omega \sqrt{\mu_a \cdot \varepsilon_a}$  — стала поширення електромагнітної хвилі у необмеженому просторі, яка у загальному випадку є комплексною величиною, про що йшла мова у 5-му розділі.

За конструкцією ці рівняння є однаковими. Тому достатньо розглянути розв'язок будь-якого з них, а розв'язок іншого знайдемо за допомогою згадуваних раніше змін.

Для прикладу візьмемо до уваги рівняння (10.24). Для цього розділимо векторне рівняння на три скалярних, які, наприклад, у декартовій прямокутній системі координат матимуть вигляд

$$\begin{cases} \nabla^2 A_{el,m,x} + k^2 A_{el,m,x} = -\mu_a j_{el,m,x}, \\ \nabla^2 A_{el,m,y} + k^2 A_{el,m,y} = -\mu_a j_{el,m,y}, \\ \nabla^2 A_{el,m,z} + k^2 A_{el,m,z} = -\mu_a j_{el,m,z}, \end{cases} \quad (10.26)$$

де  $A_{el,m,x}$ ,  $A_{el,m,y}$ ,  $A_{el,m,z}$  — складові векторного електричного потенціалу;

$j_{el,m,x}$ ,  $j_{el,m,y}$ ,  $j_{el,m,z}$  — складові електричного стороннього струму вздовж координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Розв'язання будь-якого з однотипних рівнянь системи (10.26) є складною і громіздкою задачею, яка потребує знань з курсу вищої математики, що виходять за програму математичної підготовки радіоінженера. Зокрема, необхідно використати другу функцію Гріна, яка у сферичній системі координат записується так:

$$G(r) = \frac{e^{-jkz}}{4\pi r}.$$

При виконанні так званих умов випромінювання векторні потенціали поля та їх похідні мають зменшуватись швидше, ніж функція  $1/r$ . У необмеженому просторі вирази для складових векторного електричного потенціалу у точці  $M(x, y, z)$ , збудженого стороннім електричним струмом, який протікає у об'ємі  $V$ , залишаться у вигляді

$$\begin{cases} \nabla^2 A_{\text{eл.м.х}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V j_{\text{eл.м.х}} \frac{e^{-jkx}}{r} dV, \\ \nabla^2 A_{\text{eл.м.у}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V j_{\text{eл.м.у}} \frac{e^{-jkx}}{r} dV, \\ \nabla^2 A_{\text{eл.м.з}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V j_{\text{eл.м.з}} \frac{e^{-jkx}}{r} dV, \end{cases} \quad (10.27)$$

де  $\frac{\mu_0 e^{-jkx}}{r}$  відповідає векторному електричному потенціалу у точці  $M(x, y, z)$ , збудженого там об'ємною густиною електричного струму, який протікає у нескінченно малому об'ємі  $dV$ ,  $r$  – відстань від точки  $M$  до цього малого об'єму  $dV$  з координатами  $x_1, y_1, z_1$  (рис 10.1, а).

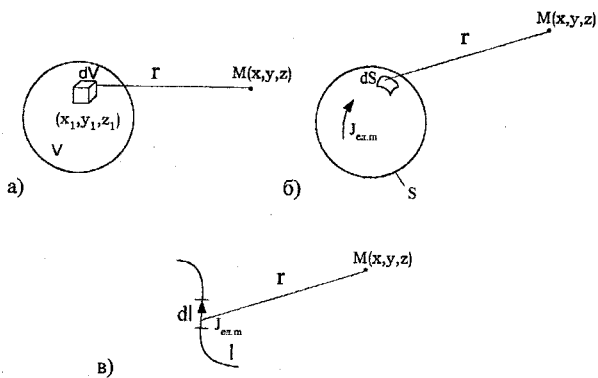


Рис. 10.1

Об'єднавши три скалярних рівняння системи (10.27), отримаємо вираз для векторного електричного потенціалу у точці  $M$ , збудженого стороннім струмом, що протікає у об'ємі  $V$

$$\nabla^2 \vec{A}_{\text{eл.м.}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V j_{\text{eл.м.}} \frac{e^{-jkx}}{r} dV. \quad (10.28)$$

Якщо сторонній струм  $j_{\text{eл.м.}}$  протікає по поверхні  $S$  (рис. 10.1, б), то

$$\nabla^2 \vec{A}_{\text{eл.м.}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S j_{\text{eл.м.}} \frac{e^{-jkx}}{r} dS, \quad (10.29)$$

а якщо сторонній струм  $j_{\text{eл.м.}}$  протікає вздовж лінії  $L$ , то

$$\nabla^2 \vec{A}_{\text{eл.м.}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L j_{\text{eл.м.}} \frac{e^{-jkx}}{r} dL. \quad (10.30)$$

Щоб отримати вирази для магнітного векторного потенціалу, достатньо у виразах (10.28), (10.29) та (10.30) виконати зміни

$$\vec{A}_{\text{eл.м.}} \rightarrow \vec{A}_{\text{м.м.}}, \quad \mu_0 \rightarrow -\epsilon, \quad \vec{j}_{\text{eл.м.}} \rightarrow \vec{j}_{\text{м.м.}}$$

Тоді для зазначених виразів

$$\vec{A}_{e\ell,m} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_V \vec{j}_{e\ell,m} \frac{e^{-jkz}}{r} dV, \quad (10.31)$$

$$\vec{A}_{m,m} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{4\pi} \int_S \vec{j}_{m,m} \frac{e^{-jkz}}{r} dS, \quad (10.32)$$

$$\vec{A}_{m,m} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_L \vec{j}_{m,m} \frac{e^{-jkz}}{r} dL. \quad (10.33)$$

#### 10.4. Елементарний електричний випромінювач

Під елементарним електричним випромінювачем будемо розуміти прямолінійний відрізок тонкого дроту, по якому протікає електричний гармонічний струм з комплексною амплітудою його об'ємної густини  $\vec{j}_{e\ell,m}$ . Довжина дроту  $l$  має бути настільки меншою за довжину хвилі (рис. 10.2а) струму  $\lambda$  ( $l \ll \lambda$ ), щоб можна було вважати комплексну амплітуду струму та його фазу однаковими у межах усієї довжини дроту  $l$  (рис. 10.2б).

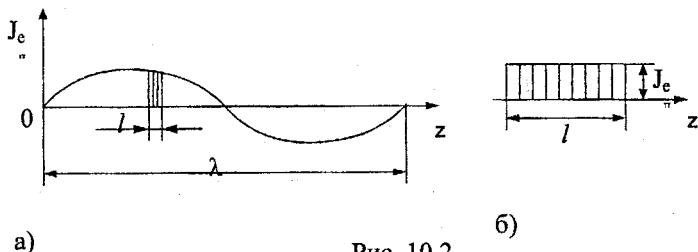


Рис. 10.2

В основу міркувань покладемо загальний розв'язок рівняння Гельмгольца (10.28) і знайдемо векторний електричний потенціал у довільній точці М сферичних координат по заданому сторонньому електричному струму (рис. 10.3).

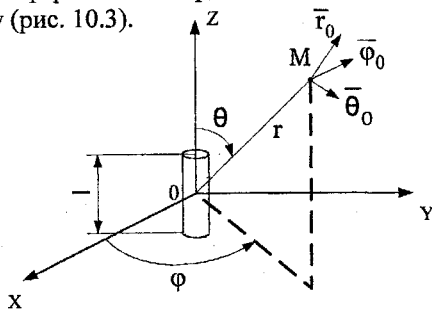


Рис. 10.3

Будемо вважати, що точка М віддалена від випромінювача так, що відстань  $r$  буде однаковою до всіх точок випромінювача на довжині  $l$ .

Припустимо, що по відрітку дроту протікає електричний сторонній струм зі складовою  $\vec{j}_{\text{ex},m,z}$ .

У цьому випадку вираз (10.28) слід переписати так:

$$\vec{A}_{\text{ex},m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}_{\text{ex},m,z} \frac{e^{-jkz}}{r} dV, \quad (10.34)$$

де  $V$  – об'єм відрізка дроту,  $dV = S \cdot dl$  – об'єм нескінченно малої частини довжини провідника  $dl$  (тут  $S$  – площа поперечного перерізу відрізка дроту),  $\vec{j}_{\text{ex},m,z} = \vec{z}_0 \cdot j_{\text{ex},m,z}$ . З урахуванням цих зауважень вираз (10.34) перепишеться у вигляді

$$\vec{A}_{\text{ex},m} = \vec{z}_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} j_{\text{ex},m} \vec{S} \frac{e^{-jkz}}{r} dl. \quad (10.35)$$

Вибравши відрізок дроту настільки тонким, щоб можна було вважати розподіл струму по поперечному перерізу провідника рівномірним, отримаємо значення комплексної амплітуди стороннього електричного струму у провіднику

$$I_{\text{ex},m} = j_{\text{ex},m} S,$$

величина якого не залежить від довжини дроту і може бути винесеною за знак інтегралу. Від довжини провідника також не залежить і співмножник  $\frac{e^{-jkr}}{r}$ , бо ми домовилися, що відстань від будь-якої точки провідника  $r$  до точки  $M$  є однаковою. Цей співмножник також виноситься з під інтегралу.

З урахуванням шойно зазначеного, вираз (10.35) матиме вигляд:

$$\vec{A}_{\text{ex},m} = \vec{z}_0 \frac{\mu_0 I_{\text{ex},m} l}{4\pi r} e^{jkz}. \quad (10.36)$$

Отже, у довільній точці  $M$  електричний векторний потенціал матиме лише одну складову  $\vec{A}_{\text{ex},m,z}$ :

$$\vec{A}_{\text{ex},m,z} = \frac{\mu_0 I_{\text{ex},m} l}{4\pi r} e^{jkz}. \quad (10.37)$$

## 10.5. Виведення виразів для складових поля елементарного електричного випромінювача

За допомогою виразу (10.7) знайдемо магнітні складові та визначимо електричні складові електромагнітного поля елементарного електричного випромінювача у довільній точці простору  $M$  (рис. 10.3), скориставшись першим рівнянням Максвелла

$$j\omega \vec{E}_m = \text{rot } \vec{H}_m. \quad (10.38)$$

Після підстановки (10.37) у (10.7) матимемо

$$\vec{H}_m = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}_{\text{ен.м.з.}} \quad (10.39)$$

Операція ротора має бути виконана у сферичній системі координат. У нас же  $\vec{A}_{\text{ен.м.з.}} = \vec{z}_0 \cdot \vec{A}_{\text{ен.м.з}}$  визначений у декартовій прямокутній системі координат і має лише одну складову, спрямовану вздовж напрямку OZ. Знайдемо складові цього вектора у сферичній системі координат, скориставшись рис.10.4, на якому бачимо, що його радіальна

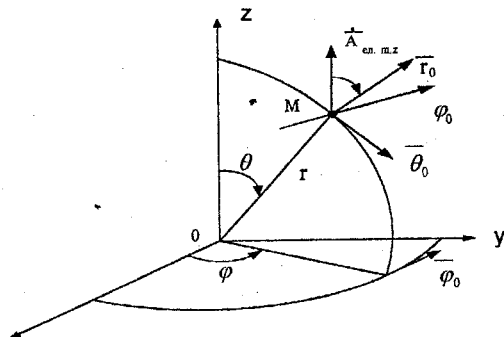


Рис. 10.4

складова визначається як проекція на напрямок  $r_0 \vec{A}_{\text{ен.м.з}} = \vec{A}_{\text{ен.м.з}} \cos \theta$ ; меридіональна складова – як проекція на напрямок  $\theta_0 \vec{A}_{\text{ен.м.з}} = \vec{A}_{\text{ен.м.з}} \sin \theta$ ; екваторіальна складова – як проекція на напрямок  $\varphi_0 \vec{A}_{\text{ен.м.з}} = 0$ .

Таким чином, рівняння (10.38) у сферичній системі координат переписється так:

$$\begin{aligned} \vec{H}_m &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \vec{r}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{A}_{\text{ен.м.з}} \cdot r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\dot{A}_{\text{ен.м.з}} \cdot r \cos \theta) \right] + \vec{\theta}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\dot{A}_{\text{ен.м.з}} \cdot r) - \frac{\partial}{\partial r} (\dot{A}_{\text{ен.м.з}} \cdot r \sin \theta) \right] + \right. \\ &+ \left. \vec{\varphi}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\dot{A}_{\text{ен.м.з}} \cdot r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{A}_{\text{ен.м.з}} \cdot r) \right] \right\} = \frac{\vec{\varphi}_0}{\mu_0 r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \dot{A}_{\text{ен.м.з}}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{A}_{\text{ен.м.з}} \cdot r) \right\} = \\ &= \frac{\vec{\varphi}_0}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\dot{I}_{\text{ен.м.з}} l}{4\pi} e^{-jkr} \cdot (-\sin \theta) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\dot{I}_{\text{ен.м.з}} l}{4\pi r} e^{-jkr} \cdot \cos \theta \right] \right\} = \\ &= \vec{\varphi}_0 \frac{\dot{I}_{\text{ен.м.з}} l}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin \theta \quad (10.40) \end{aligned}$$

Отриманий результат підтверджується і з фізичних міркувань, бо прямолінійний струм випромінювача, згідно з першим рівнянням Максвелла, може створити лише кільцеві силові лінії  $\vec{H}_{\text{тф}}$ .



Щоб визначити електричні складові поля випромінювача, підставимо (10.40) в (10.38), розв'язавши останнє рівняння відносно  $\vec{E}_m$ . В результаті отримуємо:

$$\vec{E}_m = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \operatorname{rot} \vec{H}_m = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left\{ \frac{\bar{r}_0}{r^2 \cdot \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} (H_{m\varphi} \cdot r \cdot \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (H_{m\theta} \cdot r) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\theta}_0}{r \cdot \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\varphi} (H_{m\kappa}) - \frac{\partial}{\partial\kappa} (H_{m\varphi} \cdot r \cdot \sin\theta) \right] + \frac{\bar{\varphi}_0}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (A_{m\theta} \cdot r) - \frac{\partial}{\partial\theta} (H_{m,r}) \right] \right\}.$$

Оскільки  $H_{mr} = H_{m\theta} = 0$ , останній вираз переписеться так:

$$\vec{E}_m = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left\{ \frac{\bar{r}_0}{r^2 \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{I_{em} \cdot l}{4\pi r} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin^2\theta \right) - \frac{\bar{\theta}_0}{r \cdot \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{I_{em} \cdot l}{4\pi r} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin^2\theta \right) \right\} = \\ = \bar{r}_0 \frac{I_{em} \cdot l}{j\omega\epsilon_a 2\pi^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \cos\theta + \bar{\theta}_0 \frac{I_{em} \cdot l}{j\omega\epsilon_a 4\pi^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \cdot \sin\theta. \quad (10.41)$$

З отриманих результатів випливає, що електромагнітне поле елементарного електричного випромінювача має три складових: одну магнітну ( $\vec{H}_\varphi$ ) та дві електричні ( $\vec{E}_r, \vec{E}_\theta$ ). Вирази для них мають вигляд

$$H_{m\varphi} = \frac{I_{em} \cdot l}{4\pi r} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin^2\theta, \quad (10.42)$$

$$E_{mr} = \frac{I_{em} \cdot l}{j\omega\epsilon_a 2\pi^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \cos^2\theta, \quad (10.43)$$

$$E_{m\theta} = \frac{I_{em} \cdot l}{j\omega\epsilon_a 4\pi^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \cdot \sin\theta. \quad (10.44)$$

## 10.6. Аналіз складових поля елементарного електричного випромінювача

### Близька зона (зона індукції)

Близька зона простору, що оточує випромінювач, передбачає такі відстані до випромінювача  $r$ , при яких є справедливою сильна нерівність  $kr \ll 1$ , або  $kr = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r = 2\pi \left(\frac{r}{\lambda}\right) \ll 1$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі випромінювача електромагнітного поля. Практично ця зона охоплює відстані, коли  $r \ll \lambda$ .

Нехтуючи у виразах (10.42)...(10.44) в дужках величинами менших порядків, отримаємо

$$H_{m\varphi} = \frac{I_{ex.m} \cdot l}{4\pi r^2} e^{-jkr} \cdot \sin^2 \theta \quad ,$$

$$E_{mr} = \frac{I_{ex.m} \cdot l}{j\omega \epsilon_a 2\pi r^3} e^{-jkr} \cdot \cos^2 \theta \quad ,$$

$$E_{m\theta} = \frac{I_{ex.m} \cdot l}{j\omega \epsilon_a 4\pi r^3} e^{-jkr} \cdot \sin \theta \quad .$$

Як бачимо, у близькій зоні присутні усі три складових поля, амплітуди яких зменшуються пропорційно відстані у квадраті і навіть у кубі. Прикладом поля зони індукції є електромагнітне поле силового трансформатора.

### **Проміжна зона**

Точки цієї частини простору знаходяться від випромінювача на таких відстанях, коли  $kr$  є сумірним з одиницею ( $r$  сумірна з  $\lambda$ ). У цьому випадку слід користуватися виразами (10.42)...(10.44).

### **Далека зона (зона випромінювання)**

Далека зона характеризується відстанями, коли  $kr \gg 1$  ( $r \gg \lambda$ ). Тоді у виразах (10.42)...(10.44) знехтуємо в дужках меншими величинами і отримаємо

$$H_{m\varphi} = j \frac{I_{ex.m} \cdot l \cdot k}{4\pi r} e^{-jkr} \cdot \sin \theta \quad , \quad (10.45)$$

$$E_{mr} = \frac{I_{ex.m} \cdot l \cdot k}{j\omega \epsilon_a 2\pi r^2} e^{-jkr} \cdot \cos \theta \quad , \quad (10.46)$$

$$E_{m\theta} = j \frac{I_{ex.m} \cdot l \cdot k^2}{\omega \epsilon_a 4\pi r} e^{-jkr} \cdot \sin \theta \quad . \quad (10.47)$$

Аналіз щойно отриманих виразів для складових поля у далекій зоні показує, що при віддальх  $r \gg \lambda$  складовою  $E_{mr}$ , яка зменшується пропорційно  $r^2$ , у порівнянні з іншими складовими, амплітуди яких обернено пропорційні  $r$ , можна знехтувати і вважати, що електромагнітне поле елементарного електричного випромінювача має лише екваторіальну складову магнітного поля  $H_{m\varphi}$  та меридіональну складову електричного поля  $E_{m\theta}$ .

## 10.7. Напрявленість елементарного електричного випромінювача

Основні складові поля у далекій зоні (саме така обставина зустрічається у радіотехніці), коли приймач і передавач знаходяться достатньо далеко один від одного і нерівність  $r \gg \lambda$  виконується з запасом, як це видно з виразів (10.45) і (10.47), не залежать від координати  $\varphi$ , але залежать від координати  $\theta$

$$|H_{m0}| = H_{m0} \cdot \sin \theta, \quad (10.49)$$

$$|E_{m0}| = E_{m0} \cdot \sin \theta. \quad (10.50)$$

У такому разі кажуть, що **функція (характеристика) напрямленості випромінювача** у меридіональній площині (рис.10.3) є

$$f(\theta) = \sin \theta, \quad (10.51)$$

а функція напрямленості у екваторіальній площині  $XOY$  є одиничною

$$f(\varphi) = 1, \quad (10.52)$$

тобто випромінювач у цій площині є ненапрявленим. Графік функції напрямленості називається **діаграмою напрямленості**. У полярних координатах на площині  $XOY$ , яка є перпендикулярною до осі випромінювача, графік функції  $f(\varphi)$  є колом (рис.10.5б),

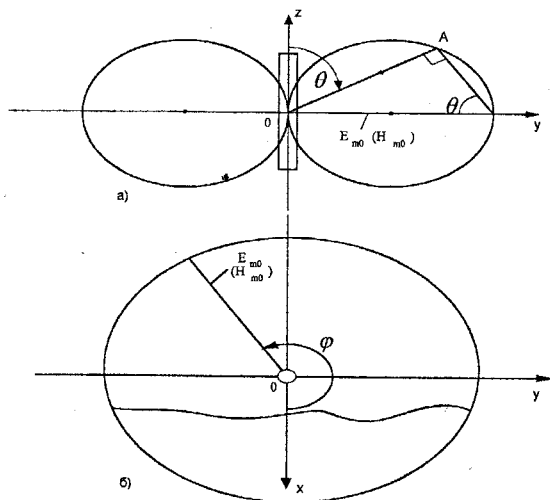


Рис. 10.5

а графік  $f(\theta) = \sin\theta$  – “вісімкою” (рис.10.5а), кожна половинка якої є колом, побудованим на відрізку  $E_{m0}$  або  $H_{m0}$ , як на діаметрі. Тоді довжина хорди  $OA = E_{m0} \cdot \sin\theta$  ( $OA = H_{m0} \sin\theta$ ).

Просторова діаграма напрямленості (рис.10.6) є тороїдом з нульовим внутрішнім діаметром.

Як бачимо, елементарний електричний випромінювач створює максимальне випромінювання в екваторіальній площині ( $\theta=90^\circ$ ) і зовсім не випромінює у напрямку осі  $OZ$  ( $\theta=0$  та  $180^\circ$ ).

Слід зауважити, що на практиці така діаграма напрямленості формується лише у далекій зоні, де відстань  $r$  на два і більше порядків перевищує довжину хвилі  $\lambda$ .

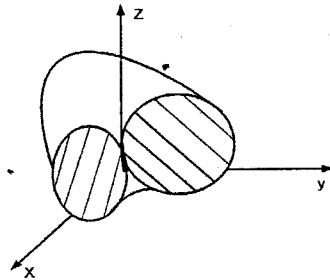


Рис. 10.6

### 10.8. Потужність та опір випромінювання елементарного електричного випромінювача

Потужність  $P_S$ , яку випромінює елементарний електричний випромінювач, визначимо як потік вектора густини потоку потужності (середнє значення вектора Пойнтінга) через сферичну поверхню  $S$ , у центрі якої знаходиться випромінювач (рис. 10.7):

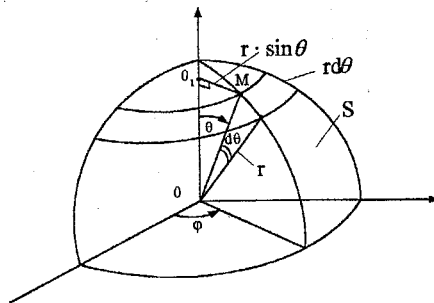


Рис. 10.7

$$P_{\Sigma} = \oint_S \overline{\Pi}_{\text{сеп}} \cdot \overline{dS}.$$

У цьому виразі елемент поверхні  $dS$  сфери радіусом  $r$  є площа смужки (заштрихована) з нескінченно малою шириною  $r \cdot d\theta$  та довжиною  $2\pi r \cdot \sin\theta$ , яку можна у розгортці вважати прямокутником, площа якого  $\overline{dS} = \overline{r_0} dS = \overline{r_0} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ . Тоді, щоб охопити усю поверхню сфери, інтегрування в (10.48) слід провести по куту  $\theta$  у межах від 0 до  $\pi$ .

Визначимо середні значення векторів Пойнтінга у довільній точці простору, що оточує випромінювач, за відомою формулою:

$$\overline{\Pi}_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \overline{\dot{E}}_{m\theta} \cdot \overline{\dot{H}}_{m\varphi} \right]. \quad (10.53)$$

У загальному випадку маємо три складових поля  $\dot{H}_{m\varphi}, \dot{E}_{mz}, \dot{E}_{m\theta}$ , які описуються виразами (10.42), (10.43), (10.44).

Величина  $\dot{H}_{m\varphi}$  є комплексно-спряженою щодо  $\dot{H}_{m\varphi}$  і дорівнює:

$$\dot{H}_{m\varphi} = \frac{I_{\text{ем}} \cdot l}{4\pi r^2} (1 - jkr) e^{jkr} \cdot \sin\theta.$$

Складові  $\dot{E}_{mz}$  та  $\dot{H}_{m\varphi}$  утворюють вектор Пойнтінга вздовж напрямку координатної лінії  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\text{сеп}\theta} &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \overline{\dot{E}}_{mz} \cdot \overline{\dot{H}}_{m\varphi} \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \overline{r_0} \cdot \frac{I_{\text{ем}} l}{j\omega \epsilon_0 \cdot 2\pi r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cos\theta \cdot \overline{\dot{\varphi}_0} \cdot \frac{I_{\text{ем}} l}{4\pi r^2} (1 - jkr) e^{jkr} \sin\theta \right] = \\ &= -\overline{\theta_0} \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{|I_{\text{ем}}|^2 \cdot l^2}{j\omega \epsilon_0 \cdot 8\pi^2 r^5} (1 + k^2 r^2) \cdot \sin\theta \cos\theta \right] = 0. \end{aligned}$$

З точки зору фізики це означає, що у меридіональному напрямку випромінювач не випромінює, а існує лише коливання енергії у безпосередній близькості від випромінювача, бо при значних відстанях ( $kr \gg 1$ ) цей потік швидко ослаблюється пропорційно кубу відстані.

Середнє значення радіальної складової вектора Пойнтінга

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\text{рад}r} &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \overline{\dot{E}}_{\theta\theta} \cdot \overline{\dot{I}}_{\theta\varphi} \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \overline{\theta_0} \cdot \frac{I_{\text{ае}\theta} l}{j\omega \epsilon_0 \cdot 2\pi r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \sin\theta \cdot \overline{\dot{\varphi}_0} \cdot \frac{I_{\text{ае}\theta} l}{4\pi r^2} (1 - jkr) e^{jkr} \sin\theta \right] = \\ &= \overline{r_0} \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{|I_{\text{ае}\theta}|^2 \cdot l^2}{j\omega \epsilon_0 \cdot 16\pi^2 r^5} (1 + k^2 r^2) \cdot \sin^2\theta \right] = \overline{r_0} \frac{|I_{\text{ае}\theta}|^2 \cdot l^2 k^3}{32\omega \epsilon_0 \pi^2 r^2} \cdot \sin^2\theta \quad (10.54) \end{aligned}$$

не дорівнює нулю і свідчить про те, що існує потік потужності у напрямку від випромінювача, густина якого обернено пропорційна квадрату відстані, завдяки якому і можливо здійснювати радіозв'язок на великих відстанях.

Використавши вираз (10.53) і врахувавши, що  $dS = 2\pi r^2 \sin\theta \cdot d\theta$ , отримаємо для потужності випромінювання :

$$P_{\Sigma} = \int_0^{\pi} \frac{|I_{em}|^2 \cdot l^2 k^3 \sin\theta}{32\omega\varepsilon_0\pi^2 r^2} \cdot 2\pi \sin^2\theta \cdot d\theta = \frac{|I_{em}|^2 \cdot l^2 k^3}{16\omega\varepsilon_0\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\theta \cdot d\theta = \frac{|I_{em}|^2 \cdot l^2 k^3}{12\omega\varepsilon_0\pi}.$$

Записавши  $k^3 = k \cdot k^2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot 4\pi^2 / \lambda^2$ , останню формулу перепишемо таким чином :

$$P_{\Sigma} = \frac{|I_{em}|^2 \cdot \pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (10.55)$$

Для будь-якої активної потужності, вираз (10.55) можна записати у вигляді

$$P_{\Sigma} = \frac{|I_{em}|^2}{2} \cdot R_{\Sigma}, \quad (10.56)$$

де  $R_{\Sigma}$  – коефіцієнт пропорційності між потужністю і квадратом струму. Оскільки цей коефіцієнт має розмірність Ом, то його називають опором випромінювання. Порівнявши вирази (10.55) та (10.56), отримаємо

$$R_{\Sigma} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (10.57)$$

У випадку коли середовище є вакуумом (сухим повітрям)

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}, \quad R_{\Sigma} = 789.6 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2,$$

то слід зауважити, що усі співвідношення для елементарного електричного випромінювача є справедливими за умови, що  $l \ll \lambda$ .

## 10.9. Фізична модель елементарного електричного випромінювача

Маємо усвідомити, що елементарний електричний випромінювач, розглянутий у попередніх розділах, є певною математичною абстракцією, бо реалізувати його на практиці у вигляді відрізка прямолінійного провідника з рівномірним розподілом струму по його довжині неможливо. Але отримані результати мають велике значення у побудові теорії реальних провідних вібраторних антен. То чи існує технічний пристрій у якому, хоч приблизно, були закладені описані властивості випромінювача? Тобто, чи існує його реальна фізична модель? Таким пристроєм є елементарний електричний вібратор (вібратор Герца), показаний на рис 10.8. Він представляє собою два коротких відрізки дроту, на кінцях яких

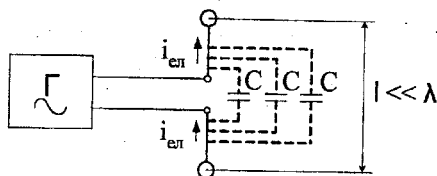


Рис. 10.8

розташовані металеві кульки, що є ємностями, з зосередженими параметрами. Сторонній електричний струм провідності  $i_{ext} = I_{em} \sin \omega t$  замикається струмом зміщення через розподілені ємності  $C$ , утворюючи замкнутий контур повного струму. Зосереджена ємність між металевими кульками слугує для вирівнювання розподілених ємностей по довжині коротких провідів, що приводить до майже рівномірного розподілу стороннього струму вздовж вібратора. Нехтуючи незначним відхиленням в реальному вібраторі розподілу струму від рівномірного, можна використовувати, з достатньою для інженерних розрахунків точністю усі формули, виведені для елементарного електричного випромінювача.

### 10.10. Елементарний магнітний випромінювач

Повернемося до елементарного електричного випромінювача, але у вигляді вузької ( $d \ll l$ ) смужки тонкого провідника електричного струму довжиною  $l \ll \lambda$  (рис. 10.9а), у якому по обох сторонах протікає електричний струм з поверхневою густиною  $\vec{j}_{ea}^s$ . Для ідеального провідника

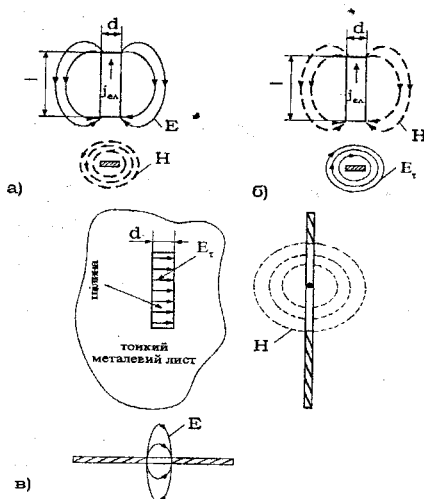


Рис. 10.9

згідно з граничними умовами тангенціальна складова електричного поля на поверхні випромінювача  $E_r=0$ , а тангенціальна складова магнітного поля  $H_r = j_{\alpha}^s$ . За аналогією введемо поняття елементарного магнітного випромінювача, як вузьку смужку тонкого провідника магнітного струму довжиною  $l \ll \lambda$  (рис.10.9б), у якому протікає сторонній магнітний струм з поверхневою густиною  $\dot{j}_M^s$ . Вважаючи цей провідник ідеальним, тангенціальна складова магнітного поля на поверхні випромінювача  $H_r = 0$ , а тангенціальна складова електричного поля  $E_r = -j_M^s$ . Тобто все те, що є справедливим для вектора  $\bar{H}$  в магнітному випромінювачі, буде справедливим для вектора  $\bar{E}$  у електричному, а те, що є справедливим для вектора  $\bar{H}$  в електричному випромінювачі, буде справедливим для вектора  $\bar{E}$  у магнітному.

### 10.11. Визначення складових поля елементарного магнітного випромінювача

Дану задачу розв'яжемо скориставшись принципом перестановки двоїстості. Для цього у виразах (10.42)...(10.44) проведемо заміну

$$\bar{E}_m \rightarrow H_m, H_m \rightarrow \bar{E}_m, \varepsilon_a \rightarrow -\mu_a, I_{em} \rightarrow -I_{M,m},$$

де  $I_{Mm}$  – комплексна амплітуда стороннього магнітного струму, що протікає в елементарному магнітному випромінювачі. У результаті цього отримаємо

$$\bar{E}_{m\varphi} = \frac{I_{M,m} \cdot l}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin \theta, \quad (10.58)$$

$$H_{mr} = -\frac{I_{M,m} \cdot l}{j\omega\mu_a 2\pi r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \cos \theta, \quad (10.59)$$

$$H_{m\theta} = -\frac{I_{M,m} \cdot l}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \cdot \sin \theta. \quad (10.60)$$

Аналіз результатів у близькій, проміжній та далекій зонах показує, що напруженість електричного поля елементарного магнітного вібратора має лише одну складову  $\bar{E}_{m\varphi}$ , а напруженість магнітного поля – дві складових  $H_{mr}$  та  $H_{m\theta}$ . У даному випадку вектор  $\bar{E}$  лежить в азимутальній площині, а вектор  $\bar{H}$  – у меридіональній.

Магнітним силовим лініям, як зазначалось раніше, дотичним до поверхні електричного вібратора, відповідає поверхневий електричний



струм з густиною  $j_{ex}^S$ . У випадку ж магнітного вібратора (чисто формально) електричним силовим лініям, дотичним до поверхні вібратора, має відповідати поверхневий магнітний струм з густиною  $\vec{j}_{Mm}^S (j_{Mm}^S = -E_r)$ . Тоді магнітний струм у магнітному вібраторі дорівнюватиме

$$\dot{I}_{Mm} = j_m^s \cdot 2d = -\dot{E}_{mr} \cdot 2d, \quad (10.61)$$

де коефіцієнт 2 з'явився через те, що по плоскій пластині провідника магнітного струму (рис. 10.96) протікає магнітний струм по обох її сторонах.

З урахуванням виразу (10.61), вирази (10.58)...(10.60) переписуться так:

$$\dot{E}_{m\varphi} = \frac{2E_{mr} \cdot d \cdot l}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin \theta, \quad (10.62)$$

$$\dot{H}_{mr} = -\frac{2E_{mr} \cdot d \cdot l}{j\omega\mu_a 2\pi r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \cos \theta, \quad (10.63)$$

$$\dot{H}_{m\theta} = -\frac{2E_{mr} \cdot d \cdot l}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \cdot \sin \theta. \quad (10.64)$$

Якщо звернутися до рис. 10.9 в), то побачимо, що добуток  $E_{mr} \cdot d = U_{mu}$  є напругою між краями елементарної щілини у тонкому металевому листі. Тоді останні вирази можна переписати у такій формі:

$$\dot{E}_{m\varphi} = \frac{2\dot{U}_{mu} \cdot l}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin \theta, \quad (10.65)$$

$$\dot{H}_{mr} = -\frac{2\dot{U}_{mu} \cdot l}{j\omega\mu_a 2\pi r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \cos \theta, \quad (10.66)$$

$$\dot{H}_{m\theta} = -\frac{2\dot{U}_{mu} \cdot l}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \cdot \sin \theta. \quad (10.67)$$

Порівнюючи вирази (10.58)...(10.60) та (10.65)...(10.67), бачимо, що

$$\dot{I}_{Mm} = -2\dot{U}_{mu}, \quad (10.68)$$

тобто фізичним аналогом магнітного струму у випадку щілинного вібратора (рис 10.9в) є подвійна різниця потенціалів між краями щілини.

У відношенні напрямлених властивостей елементарного магнітного вібратора можна провести повну аналогію з елементарним електричним вібратором. Їхні функції (характеристики) та діаграми напрямленості у екваторіальній і меридіональній площинах повністю збігаються.

## 10.12. Потужність та опір випромінювання елементарного магнітного вібратора

За аналогією з елементарним електричним випромінювачем потужність випромінювання елементарного магнітного вібратора визначимо як потік середнього значення вектора Пойнтінга (рис. 10.7) за виразом (10.53), де його середнє значення вектора Пойнтінга дорівнює

$$\overline{P}_{\text{ср}}^M = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \overline{E}_{\text{мф}} \cdot \dot{\overline{H}}_{\text{мф}} \right].$$

З урахуванням виразів (10.58) і (10.60) середнє значення вектора Пойнтінга дорівнюватиме

$$\overline{P}_{\text{ср}}^M = r_0 \frac{|\dot{U}_{\text{мц}}|^2 \cdot l^2 \cdot k^2}{8\pi^2 \omega \mu_0 k^2} \sin^2 \theta.$$

Тоді потужність випромінювання  $P_{\Sigma}^M$  матиме вигляд:

$$P_{\Sigma}^M = \frac{|\dot{U}_{\text{мц}}|^2 \cdot l^2 \cdot k^3}{3\pi \omega \mu_0}. \quad (10.69)$$

Розглядаючи потужність випромінювання як будь-яку активну потужність, можемо записати:

$$P_{\Sigma}^M = \frac{|\dot{U}_{\text{мц}}|^2}{2R_{\Sigma}^M}. \quad (10.70)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (10.68) та (10.69), отримаємо вираз для опору випромінювання

$$R_{\Sigma}^M = \frac{3\pi \omega \mu_0}{2l^2 k^3},$$

або, враховуючи, що  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  та  $k = (2\pi / \lambda)^2$ ,

$$R_{\Sigma}^M = \frac{3}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (10.71)$$

Для вакууму (на практиці це сухе повітря)

$$R_{\Sigma}^M = 45 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (10.72)$$

## 10.13. Фізичні моделі елементарного магнітного випромінювача

У підрозділі 10.11 було сказано (вираз 10.68), що фізичним аналогом магнітного струму в елементарному магнітному вібраторі є подвійна різниця потенціалів (напруга) між краями щілини (рис. 10.9в). Таким чином, вузька щілина ( $d \ll l$ ) у тонкому металевому листі довжиною  $l \ll \lambda$  і є фізичною моделлю елементарного магнітного вібратора, яка може бути

названою елементарним щілинним вібратором. Співвідношення, що характеризують елементарний магнітний вібратор, а значить і елементарний щілинний вібратор, використовуються при побудові теорії щілинних вібраторних антен, які знайшли широке застосування у діапазоні надвисоких частот.

Крім щойно описаної можна ввести ще одну фізичну модель елементарного магнітного вібратора. Для цього його представимо у вигляді, аналогічному до електричного вібратора Герца (рис. 10.8). Тобто, маємо циліндричний стрижень довжиною  $l \ll \lambda$  з кульками на кінцях, виконаний з матеріалу з магнітною проникністю набагато більшою магнітної проникності навколишнього середовища, наприклад, з фериту ( $\mu \gg 1$ ). Пристроєм збудження буде кругла рамка, по якій протікає електричний струм провідності (рис. 10.10а) від генератора.

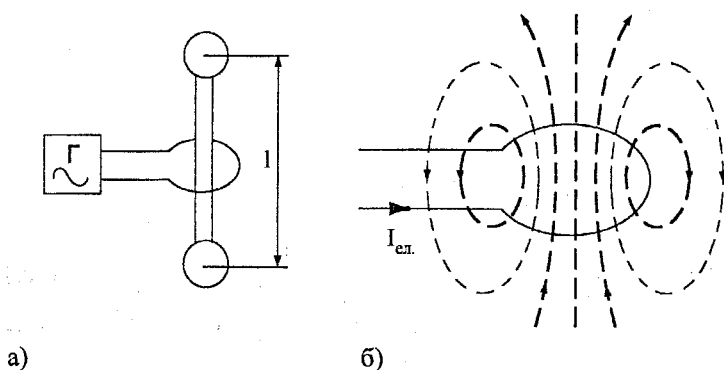


Рис. 10.10

Якщо в схемі магнітного вібратора, зображеного на рис.10.10 а), вилучити магнітний (феритовий) стрижень і залишити саму рамку (петлю) зі струмом, то характер структури поля не зміниться (рис. 10.10б). Таким чином, малого розміру рамку (довжина витка її має бути набагато меншою за довжину хвилі) з електричним гармонічним струмом можна також вважати фізичною моделлю елементарного магнітного вібратора.

У такому випадку елементарний магнітний вібратор характеризується струмом у рамці  $i_{ez} = I_m \cos \omega t$  з постійним значенням амплітуди по довжині рамки і її площиною  $S$ .

Вирази для поля, створеного рамкою, можуть бути отримані із виразу для векторного потенціалу  $\vec{A}_m$  кільцевого електричного струму та обчислення інтегралу, який входить у цей вираз, вважаючи, що відстань від усіх точок рамки до точки спостереження велика у порівнянні з розмірами рамки. Потім необхідно перейти до векторів  $\vec{E}_m$  та  $\vec{H}_m$ , як це було зроблено у випадку елементарного електричного вібратора.

Порівняння цих виразів з виразами (10.58)...(10.60) для поля елементарного магнітного вібратора показує, що вони переходять одне в одне при такій заміні:

$$I_{M.m} l \rightarrow j\omega\mu_a \dot{I}_m \cdot S.$$

Виконавши заміни (10.58)...(10.60), отримаємо вирази для елементарної рамки

$$\dot{E}_{m\varphi} = j \frac{\omega\mu_a \cdot \dot{I}_m \cdot S}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \sin\theta, \quad (10.73)$$

$$\dot{H}_{mr} = \frac{\dot{I}_m \cdot S}{2\pi r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \cdot \cos\theta, \quad (10.74)$$

$$\dot{H}_{m\theta} = -\frac{\dot{I}_m \cdot S}{4\pi r^3} (1 + jkr - k^2 r^2) e^{-jkr} \cdot \sin\theta, \quad (10.75)$$

де  $\dot{I}_m$  – комплексна амплітуда гармонічного електричного струму у рамці.

Потужність та опір випромінювання елементарної рамки визначається так, як і для елементарного електричного вібратора

$$P_{zp} = \frac{I_m^2 R_{zp}}{2}, \quad (10.76)$$

$$R_{zp} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left( \frac{2\pi S}{\lambda^2} \right)^2. \quad (10.77)$$

#### 10.14. Елемент Гюйгенса

Фізично елемент Гюйгенса можна уявити як елемент фронту плоскої хвилі, яка поширюється вздовж координати  $OZ$  (рис.10.11, а). Складові  $\vec{E}_{m\varphi}$  та  $\vec{H}_{mr}$  поля є дотичними до площини елемента з розмірами  $\Delta l_1$  і  $\Delta l_2 \ll \lambda$ .

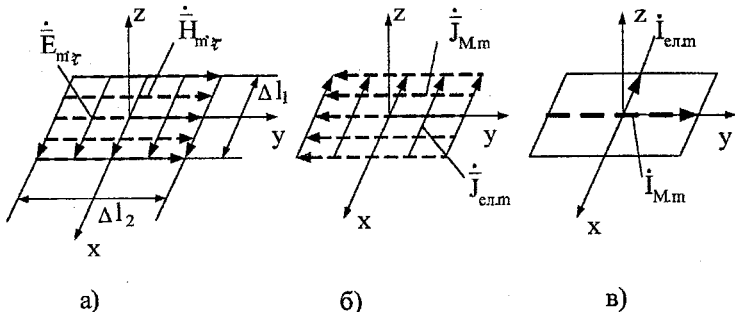


Рис. 10.11

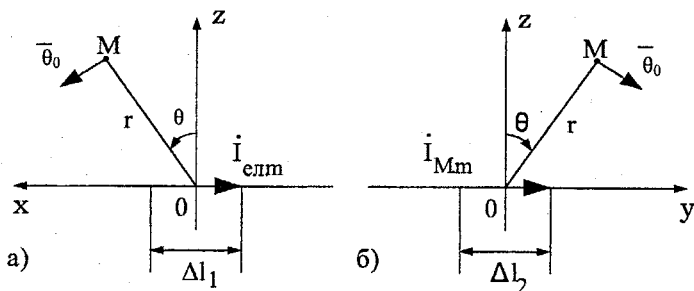


Рис. 10.12

Магнітне поле, яке діє в елементі, можна замінити еквівалентним електричним струмом  $\vec{j}_{el.m} = \vec{H}_{mr}$ , електричне – еквівалентним магнітним струмом  $j_{M.m} = -E_{mr}$  (рис. 10.11б). Оскільки розміри елемента  $\Delta l_1$  і  $\Delta l_2 \ll \lambda$ , можна вважати, що вектори поля  $E_{mr}$ ,  $\vec{H}_{mr}$  (а отже і вектори густини поверхневих струмів  $\vec{j}_{el.m}$  і  $\vec{j}_{M.m}$ ) розподілені по елементу рівномірно і можуть бути замінені їх “рівнодіючими” значеннями, а саме:

$$I_{el.m} = j_{el.m} \cdot \Delta l_2, \quad I_{M.m} = j_{M.m} \cdot \Delta l_1.$$

Це відображено на рис. 10.11 в).

Таким чином, елемент Гюйгенса представляє собою систему двох взаємноперпендикулярних елементарних випромінювачів: електричного – довжиною  $\Delta l_1$  зі струмом  $I_{el.m}$  і магнітного довжиною  $\Delta l_2$  зі струмом  $I_{M.m}$ . У довільній точці М (рис. 10.12) їх поля будуть складатися як відповідні взаємноортогональні вектори. Для далекої зони, наприклад, вектор  $E_{m\varphi}$  магнітного вібратора з вектором  $E_{m\theta}$  електричного та вектор  $\vec{H}_{m\varphi}$  електричного вібратора з вектором  $\vec{H}_{m\theta}$  магнітного.

У координатах рис.10.11 та рис.10.12 ці складові будуть такими:

для електричного вібратора (рис. 10.12а) у площині X0Z (меридіональна площина)

$$E_{m\theta} = j \frac{I_{el.m} \cdot \Delta l_1 \cdot k^2}{j\omega\epsilon_0 4\pi r^2} \cdot \cos\theta;$$

для магнітного вібратора у площині X0Z (екваторіальна площина)

$$E_{m\varphi} = -\frac{I_{M.m} \cdot \Delta l_2 \cdot k}{4\pi r} e^{-jkr};$$

для електричного вібратора (рис. 10.126) у площині YOZ (екваторіальна площина)

$$H_{m\phi} = j \frac{I_{ca.m} \Delta l_1 \cdot k}{4\pi r} e^{-jkr};$$

для магнітного вібратора у площині YOZ (меридіональна площина)

$$\dot{H}_{m\phi} = \frac{I_{M.m} \cdot \Delta l_2 \cdot k^2}{j\omega\epsilon_0 4\pi r} e^{-jkr} \cdot \cos\theta.$$

Напрявленість елемента Гюйгенса дослідимо на прикладі його електричного поля у площині XOZ. У цій площині електричний вектор має спрямованість, яка характеризується функцією

$$f_{ca}(\theta) = \cos\theta. \quad (10.78)$$

Магнітний вібратор є перпендикулярним до площини. Вона, в свою чергу, по відношенню до вібратора є екваторіальною. Тому він в даному випадку не спрямований, а функція спрямованості має вигляд:

$$f_M(\theta) = 1. \quad (10.79)$$

Оскільки електричне поле елемента Гюйгенса є сумою векторів  $\vec{E}_{m\phi}$  та  $\vec{E}_{M\phi}$ , то його функція спрямованості має дорівнювати сумі виразів (10.78) і (10.79), тобто

$$f(\theta) = 1 + \cos\theta. \quad (10.80)$$

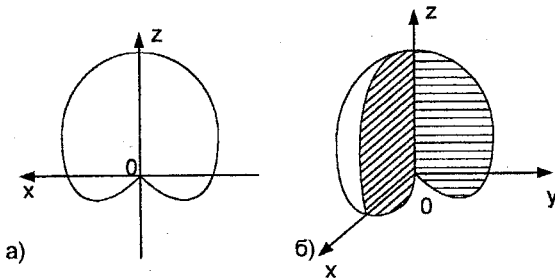


Рис. 10.13

Діаграмою спрямованості (графік функції) у полярній системі координат є кардіоида (рис. 10.13а). Очевидно, що і у площині YOZ отримаємо такий же результат. Просторова ж діаграма спрямованості елемента Гюйгенса має вигляд, зображений на рис. 10.13 б).

Отже, елемент Гюйгенса має чітко виражену односторонню спрямованість. Максимальне випромінювання буде у напрямку OZ, перпендикулярному до площини елемента.

Отримані результати використовуються при вивченні великого класу так званих апертурних антен (рупорних, дзеркально-параболічних тощо), які широко використовуються у радіолокації, радіоастрономії та у багатьох інших царинах радіотехніки.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Баскаков С. И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Сов. радио, 1992.
2. Баскаков С. И. Основы электродинамики. – М.: Сов. радио, 1973.
3. Вольман В. И., Пименов Ю. В. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971.
4. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1975.
5. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1979.
6. Фальковский О.Е. Техническая электродинамика. – М.: Энергия, 1975.
7. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. – М.: Высшая школа, 1980.
8. Черенкова Е.Л., Чернышев О.В. Распространение радиоволн. – М.: Радио и связь, 1984.



*Навчальне видання*

**Юрій Володимирович Крушевський  
Юрій Іванович Кравцов  
Віктор Миколайович Мізерний**

**ЕЛЕКТРОДИНАМІКА  
ТА ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ  
Ч.1. Основи електродинаміки**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготував Кравцов Ю.І.

Редактор С.А. Малішевська

Навчально-методичний відділ ВНТУ  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 8.04.05р.  
Формат 29,7x42<sub>1/4</sub>  
Друк різнографічний  
Тираж 75 прим.  
Зам. № 2005-054

Гарнітура Times New Roman  
Папір офсетний  
Ум. друк. арк. 5.31

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ