В.П.ЛИТВИНЮК

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Міністерсво освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

В.П.Литвинюк

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з диференціальних рівнянь для студентів спеціальностей інженерії 7.091101 – "Лазерна і оптоелектронна техніка" та 7.092203 – "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод". Протокол № 2 від 26 вересня 2002р.

Вінниця ВДТУ 2003

УДК 517.3 (075)
Л 64

Рецензенти:

В.М.Міхалевич, доктор технічних наук, професор

В.С. Абрамчук, кандидат фізмат наук, професор

В.П.Кожем'яко, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Литвинюк В.П.

Л 64 **Рівняння математичної фізики.**

Навчальний посібник. –Вінниця: ВДТУ, 2003 – 107 с.

В посібнику розглянуті теоретичні положення про класифікацію диференціальних рівнянь з частинними похідними, методи розв'язування рівнянь параболічного, гіперболічного та еліптичного типів, розглянуто чисельний метод сіток розв'язування цих рівнянь. Один із розділів присвячений методиці проведення практичних занять, підібрано достатню кількість задач для розв'язування на практичних заняттях та для самостійної роботи студентів, вказані відповіді.

Складено по 30 варіантів індивідуальних завдань для виконання типових розрахунків з усіх розділів, зразки розв'язувань приведені в тексті посібника.

УДК 517.3 (075)

ЗМІСТ

1 Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними та зведення їх до канонічного вигляду 4
2 Рівняння параболічного типу 13
1.1 Виведення рівняння теплопровідності..13
1.2 Постановка початкової та крайових умов....................................17
1.3 Розв'язування однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах 20
3 Рівняння гіперболічного типу 27
3.1 Виведення рівняння коливання струни..27
3.2 Постановка крайових та початкових умов для хвильового рівняння..31
3.3 Рівняння електричних коливань в проводах..................................32
3.4 Розв'язування рівняння коливань струни методом відокремлення змінних 34
3.5 Формула Д'Аламбера..38
4 Рівняння еліптичного типу..43
4.1 Рівняння Лапласа..43
4.2 Рівняння Лапласа в полярних координатах...................................46
4.3 Внутрішня задача Діріхле для круга..49
5 Чисельні методи розв'язування задач математичної фізики.................54
5.1 Скінченнорізницеві наближення 55
5.2 Рівняння Лапласа в скінченних різницях....................................56
5.3 Розв'язування задач Діріхле методом сіток 57
5.4 Метод сіток для рівнянь параболічного типу................................62
5.5 Неявні різницеві схеми..66
5.6 Метод сіток для рівнянь гіперболічного типу...............................67
6 Практичні заняття..71
7 Завдання для типових розрахунків..91
Література 106

1 КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЗВЕДЕННЯ ЇХ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Рівняння математичної фізики – це математична наука, що вивчає диференціальні рівняння з частинними похідними. Більшість фізичних явищ в таких галузях, як гідродинаміка, електрика, магнетизм, механіка, оптика, теплопередача і інші, описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними (ДРЧП).

Що таке рівняння з частинними похідними? Рівняння з частинними похідними – це рівняння, що містять частинні похідні невідомої функції кількох змінних (наприклад, температура $u(x,t)$ залежить від координати x і часу t або $u(x,y,z,t)$ залежить від координат точки в просторі і часу t). Оскільки більшість фізичних законів природи можна сформулювати на мові рівнянь з частинними похідними, то є необхідність вивчати рівняння з частинними похідними. Як же розв'язувати рівняння з частинними похідними? Існує цілий арсенал методів, що використовуються при розв'язуванні диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Рівняння з частинними похідними можна класифікувати за багатьма ознаками. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними важлива тому, що, як виявилось, для кожного класу рівнянь існує відповідно своя загальна теорія і методи їх розв'язування. Приведемо основні із методів класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Порядок рівняння.

Означення. *Порядком* диференціального рівняння з частинними похідними називається *найвищий* порядок частинних похідних, що входять в рівняння.

Наприклад, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – рівняння 2-го порядку,

$u_x = u_y$ – диференціальне рівняння 1-го порядку,

$\frac{\partial u}{\partial t} = u \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \sin x$ – диференціальне рівняння з частинними похідними 3-го порядку.

2. Число змінних. Числом змінних називають число незалежних змінних..

В приведених прикладах маємо диференціальні рівняння з частинними похідними з двома змінними. Рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – диференціальне рівняння з частинними похідними з чотирма змінними. Найбільш часто зустрічаються диференціальні рівняння 2-го порядку.

Рівняння з частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними x і y має такий загальний вигляд:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

2. Лінійність. Рівняння з частинними похідними бувають лінійні і нелінійні. В лінійне рівняння шукана функція і всі її частинні похідні входять лінійно.

Означення. *Лінійним рівнянням з частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними називається рівняння*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

де A, B, C, D, E, F, G – *задані числа або задані функції змінних x і y.*

Якщо $G(x, y) \equiv 0$, то це рівняння називається *лінійним однорідним.*

Означення. *Рівняння називається лінійним відносно старших похідних, якщо воно має вигляд*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

де A, B і C – зададані функції x і y або числа. Це рівняння відіграватиме важливу роль в нашій теорії.

Перейдемо в диференціальному рівнянні з частинними похідними (1.1) до нових незалежних змінних ξ і η за формулами

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y), \tag{1.2}$$

вимагаючи, щоб існувало обернене перетворення, тобто якобіан

перетворення $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix} \neq 0$,

і функції $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ мали неперервні частинні похідні 2-го порядку, при цьому $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ є лінійно незалежні.

Постає питання: як вибрати функції $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, щоб рівняння в цих змінних ξ i η мало найпростішу форму ? Виразимо частинні похідні за незалежними змінними x і y через частинні похідні функції u за новими незалежними змінними ξ і η . Перетворимо частинні похідні до нових змінних ξ і η за формулами диференціювання складених функцій 2-х змінних:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\\
&+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y};\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\\
&+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y};
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\cdot\right\}$$

Підставивши ці вирази (1.3) в рівняння (1.1), будемо мати

$$\overline{A}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\,\overline{B}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\overline{C}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\overline{F}=0, \tag{1.4}$$

де $\overline{A}=A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2;$

$$\overline{B}=A\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+C\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\overline{C}=A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

а $\overline{F}$ не залежить від похідних 2-го порядку. Як бачимо рівняння (1.4) є теж *лінійним відносно старших похідних*.

Виберемо нові змінні η і ξ так, щоб коефіцієнт $\overline{A}$ дорівнював би нулеві. Як це зробити ?

Розглянемо допоміжне рівняння з частинними похідними 1-го порядку:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2B\,\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0. \tag{1.5}$$

Нехай $z=\varphi(x,y)$ є якийсь *частинний* розв'язок цього рівняння, тоді при $\xi=\varphi(x,y)$ будемо мати $\overline{A}=0$.

Отже, поставлена задача про вибір нових незалежних змінних зв'язана з розв'язками рівняння (1.5). Мають місце такі два твердження:

Теорема 1. Якщо $z=\varphi(x,y)$ є частинним розв'язком рівняння

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0,$$

то співвідношення $\varphi(x,y)=C$, де C – довільна стала, є загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0. \tag{1.6}$$

Теорема 2. Якщо $\varphi(x,y)=C$ є загальним інтегралом рівняння (1.6), то функція $z=\varphi(x,y)$ задовольняє рівняння (1.5).

Доведемо першу теорему. Якщо функція $z=\varphi(x,y)$ є частинним розв'язком рівняння (1.5), то виконується тотожність $A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\equiv 0$ для всіх x, y з тієї області, де задано цей розв'язок. Запишемо цю тотожність таким чином, розділивши її на $(\varphi'_y)^2$, матимемо

$$A\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)^2-2B\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)+C\equiv 0.$$

Співвідношення $\varphi=(x,y)$, де C – довільна стала, є загальним інтегралом диференціального рівняння (1.6), якщо функція y як неявна, що визначається рівнянням $\varphi(x,y)=C$, задовольнить рівняння (1.6).

Нехай $y = \varphi\,(x,C\ )$ і є тією неявною функцією, при цьому $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$.

Тоді випливатиме, що функція $y=\varphi(x,C)$ задовольнить рівняння (1.6), бо

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C\equiv 0;\quad A\frac{dy^2}{dx^2}-2B\frac{dy}{dx}+C\equiv 0\ \Rightarrow Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2\equiv 0.$$

Теорему 1 доведено.

Теорему 2 довести самостійно.

Звичайне диференціальне рівняння $Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0$ називається *рівнянням характеристик* для диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.1), а його загальні інтеграли (тобто неявні розв'язки) називаються *характеристиками* диференціального рівняння (1.1).

Отже, щоб звести диференціальне рівняння з частинними похідними (1.1) до найпростішої форми, треба знайти його характеристики.

Якщо $\varphi(x,y)=C$ є загальний інтеграл диференціального рівняння (1.6), то при $\xi=\varphi(x,y)$ ми перетворимо в нуль коефіцієнт при $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}$ (тобто $A=0$).

Якщо $\psi\,(x,y)=C$ є якийсь інший загальний інтеграл диференціального рівняння (1.6), то при $\eta=\psi(x,y)$ ми перетворюємо в *нуль* коефіцієнти при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ (тобто $\overline{C}=0$).

Оскільки рівняння (1.6) можна записати у вигляді *(перевірте це)* $Ady-(B+(\sqrt{B^2-AC})dx)(Ady-(B-\sqrt{B^2-AC})dx)=0$, то воно розпадається на два рівняння:

$$Ady-(B+\sqrt{B^2-AC})dx=0 \text{ або } \frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A} \quad \text{та} \tag{1.7}$$

$$Ady-(B-\sqrt{B^2-AC})dx=0 \text{ або } \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}. \tag{1.8}$$

Знак підкореневого виразу визначає тип диференціального рівняння з частинними похідними (1.1).

1) Якщо $B^2-AC>0$ *в деякій точці M, то диференціальне рівняння з частинними похідними* (1.1) *будемо називати рівнянням гіперболічного типу.*

2) Якщо $B^2-AC=0$, *то диференціальне рівняння з частинними похідними* (1.1) *будемо називати рівнянням параболічного типу.*

3) Якщо $B^2-AC<0$, *то диференціальне рівняння з частинними похідними* (1.1) *будемо називати рівнянням еліптичного типу.*

Який же вигляд матиме найпростіша форма диференціального рівняння (1.1) з частинними похідними ?

Встановимо *канонічний вигляд* диференціального рівняння з частинними похідними в кожному із цих трьох типів.

1) Для рівняння *гіперболічного типу* $B^2-AC>0$, тому праві частини рівнянь (1.7) *і* (1.8) *дійсні і різні.* Тоді їх загальні інтеграли $\varphi(x,y)=C$, $\psi(x,y)=C$, визначають *два різні дійсні* сімейства характеристик.

Тоді при перетвореннях $\xi=\varphi(x,y)$ і $\eta=\psi(x,y)$ рівняння (1.4) прийме вигляд: $2\overline{B}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\overline{F}\left(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\xi},\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$ (бо $\overline{A}=0$ і $\overline{C}=0$) або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (1.9)$$

Це і є канонічний вигляд рівняння гіперболічного типу.

Зауважимо, що якщо $A = 0$ і $C = 0$, то рівняння (1.1) вже має канонічний вигляд. Часто користуються і іншою канонічною формою, використовуючи такі перетворення:

$$\begin{cases}\xi = \alpha+\beta \\ \eta = \alpha-\beta,\end{cases} \text{ звідки } \begin{cases}\alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2}, \\ \beta = \dfrac{\xi-\eta}{2},\end{cases}$$ де α і β – нові змінні.

Тоді $\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\cdot\dfrac{\partial\beta}{\partial\xi} = \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}+\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\right).$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\eta} = \frac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{\partial u}{\partial\beta}\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\eta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right).$$

Тоді рівняння (1.9) прийме вигляд: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = \Phi\left(\alpha,\beta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\alpha},\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\right).$

2) Для рівняння *параболічного типу* $B^2–AC = 0$, тоді диференціальні рівняння (1.7) і (1.8) збігаються і ми матимемо один інтеграл диференціального рівняння (1.6) $\varphi(x,y) = C$. Тоді $\xi = \varphi(x,y)$, а $\eta = \psi(x,y)$, де $\psi(x,y)$ – довільна функція, лінійно незалежна з функцією φ. В цьому випадку матимемо, що $\overline{A} = 0$ і $\overline{B} = 0$, тоді рівняння (1.4) прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (1.10)$$

Це канонічний вигляд рівняння параболічного типу.

Звернемо увагу на те, що в цьому рівнянні залишається лише одна старша частинна похідна 2-го порядку саме за змінною η, яка вибирається довільно.

3) Для рівняння *еліптичного типу* $B^2 - AC < 0$ праві частини рівнянь (1.7) і (1.8) є комплексні, тоді загальні інтеграли є комплексно-спряжені функції $\varphi_1(x,y) = C$ і $\varphi_2(x,y) = C$.

Тоді $\xi + i\eta = \varphi_1(x,y)$, $\xi - i\eta = \varphi_2(x,y)$, звідки $\xi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$; $\eta = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$.

В цьому випадку $\overline{A} = \overline{C}$ і $\overline{B} = 0$, тоді рівняння (1.4) прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (1.11)$$

Це і є канонічний вигляд рівняння еліптичного типу.

Отже, щоб звести диференціальне рівняння з частинними похідними (1.1) до канонічного вигляду, треба визначити тип рівняння, скласти його рівняння характеристик і знайти його загальний інтеграл. Виходячи з типу диференціального рівняння з частинними похідними, знайти відповідні формули $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$.

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язування. Встановимо спочатку тип рівняння. Оскільки $A = x^2$, $B = 0$ і $C = -y^2$, то $B^2 - AC = y^2 x^2 > 0$, тоді це рівняння гіперболічного типу.

Складемо рівняння характеристик даного диференціального рівняння з частинними похідними $Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0$, тоді матимемо $x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0$; $(xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$, звідки маємо $xdy + ydx = 0$ або $xdy - ydx = 0$.

Це обидва диференціальні рівняння з відокремленими змінними. Поділивши кожне з рівнянь на xy, дістанемо

1) $\dfrac{dy}{y} + \dfrac{dx}{x} = 0$; $\displaystyle\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = 0$; $\ln y + \ln y = \ln C_1 \Rightarrow xy = C_1$ – загальний інтеграл диференціального рівняння.

2) $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = 0$; $\displaystyle\int \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$; $\ln y = \ln x + \ln C_2 \Rightarrow y = C_2 x$, де C_2 – довільна стала, маємо $\dfrac{y}{x} = C_2$.

Отже, маємо два *різні* загальні інтеграли диференціального рівняння. Тоді заміна змінних здійснюється так:

$$\xi = xy,\quad \eta = \frac{y}{x},\ \text{звідки}\ \frac{\partial\xi}{\partial x} = y,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = x,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2};\quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Знайдемо тепер частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = y\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = x\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{2}{x^3}y\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} =$$

$$= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} -$$

$$-2\cdot\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Підставимо ці вирази в рівняння:

$$x^2\left(y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{2y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) - y^2\left(x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) = 0;$$

$$-4y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{2y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2xy}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

Отже, рівняння прийме такий канонічний вигляд $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \dfrac{1}{2\xi}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$.

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \dfrac{1}{2\xi}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$.

2 РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

2.1 Виведення рівняння теплопровідності

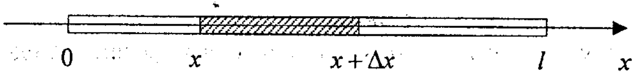
I. Розглянемо однорідний стержень довжини l, відносно якого зробимо такі припущення :

а) стержень виготовлено з одного однорідного матеріалу, наприклад, мідний або алюмінієвий;

б) бічна поверхня стержня теплоізольована (тепло може розповсюджуватися лише вздовж осі стержня);

в) стержень настільки тонкий, що в будь-який момент часу температура в усіх точках кожного поперечного перерізу стержня однакова.

Якщо вісь стержня прийняти за вісь абсцис Ox, то температура u буде функцією координати x та часу t, тобто $u=u(x,t)$.



Якщо зафіксувати t, то функція $u(x,t)$ буде представляти залежність температури точок стержня в даний момент часу від їх відстані x до початку координат; частинна похідна $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ виражає при цьому швидкість зміни температури в напрямі осі Ox.

Якщо зафіксувати абсцису x, то $u(x,t)$ виражає закон зміни температури в даному поперечному перерізі x при зміні часу t, при цьому частинна похідна $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ виражає швидкість зміни температури в будь-який момент часу в цьому поперечному перерізі.

Розглянемо процес розповсюдження температури u в стержні, який описується функцією $u=u(x,t)$ (що виражає температуру в перерізі x в момент часу t). Знайдемо рівняння, яке задовольняє ця функція $u(x,t)$.

Для цього сформулюємо фізичні закономірності, що визначають процеси, зв'язані з розповсюдженням тепла.

1. За законом Фур'є, якщо температура тіла нерівномірна, в ньому виника-

ють теплові потоки, напрямлені з місць з більш високою температурою в місця з менш низькою температурою (або з більш нагрітих місць в менш нагріті). Кількість тепла, що протікає через поперечний переріз x за проміжок часу $[t, t+\Delta t]$ (тобто за момент Δt), як встановлено експериментально, пропорційна площі S цього перерізу, швидкості зміни температури в напрямі, перпендикулярному до цього перерізу, тобто величині $\frac{\partial u}{\partial x}$, та проміжку часу Δt, тобто

$$Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t,$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, що може залежати від x. Якщо стержень однорідний, то k = const. Величина $q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$ називається щільністю теплового потоку, що дорівнює кількості тепла, яка протікає за одиницю часу через площу в 1см^2.

Знак мінус в цій формулі пояснюється тим що, якщо $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, то температура зростає при зростанні x, а оскільки тепло переходить від більш нагрітих місць до менш нагрітих, то тепловий потік буде напрямлений в сторону зменшення x, тобто його величина буде від'ємною.

2. Експериментально встановлено, що кількість тепла, яку необхідно надати однорідному тілу, щоб підвищити його температуру на величину Δu визначаємо за формулою

$$Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u,$$

де c – питома теплоємність, m – маса тіла, ρ – його щільність, V – об'єм тіла.

Виділимо ділянку стержня, обмежену поперечними перерізами з абсцисами x та x -Δx, і складемо для неї рівняння теплового балансу, скориставшись законом збереження кількості тепла, за яким загальна зміна кількості тепла на відрізку $[x; x$ -$\Delta x]$ дорівнює повній кількості тепла, що пройшла через границі, плюс повна кількість тепла, що утворилася всередині відрізка $[x;x+\Delta x]$.

Знайшовши різницю вхідного та вихідного теплових потоків, тобто теплових потоків, що проходять через перерізи x та $x+\Delta x$, ми одержимо кількість тепла ΔQ, що надано цій ділянці стержня за час Δt:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = -kS\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Delta t - \left(-kS\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\Delta t\right) = kS\Delta t\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) =$$
$$= kS\Delta t\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

тут ми скористалися відомою формулою Лагранжа про скінченні прирости, а саме $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, де $a<\xi<b$ або $\Delta f(x)=f'(\xi)\Delta x$).

Отже, з точністю до нескінченно малих вищого порядку, ніж Δx, матимемо, що

$$\Delta Q = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t,$$

де $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ обчислено в початковій точці.

З іншого боку, за проміжок часу Δt температура змінилася на величину $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$ (з точністю до нескінченно малих вищого порядку), тому кількість наданого тепла цій ділянці стержня дорівнює

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t = c\rho S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Delta t \quad (\text{тут } V = S\Delta x).$$

Прирівнюючи одержані вирази для ΔQ, будемо мати:

$$c\rho S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Delta t = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t. \qquad (*)$$

Скоротивши на спільний множник $S\Delta x\Delta t$, одержимо

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ввівши позначення $\frac{k}{c\rho} = a^2 \quad \left(\frac{k}{c\rho} > 0\right)$, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2.1)$$

Це є основне рівняння теплоповідності для однорідного стержня без теплових джерел всередині стержня. Число $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ називають коефіцієнтом теплопровідності. Це ДРЧП є *лінійним* та *однорідним параболічного* типу.

II. Припустимо тепер, що всередині виділеної ділянки стержня може виникати або поглинатись тепло, тобто всередині його знаходяться теплові джерела або стоки (наприклад, при проходженні струму або внаслідок хімічних реакцій). Виділення або поглинання тепла можна характеризувати за допомогою щільності теплових джерел. Під щільністю теплових джерел розуміють функцію $F(x,t)$ таку, що на малому проміжку $[x;x+\Delta x]$ за малий проміжок часу $[t;t+\Delta t]$ виділиться кількість тепла, яка з точністю до нескінченно малих вищого порядку дорівнює $F(x,y)\Delta x\Delta t$.

Тоді за законом збереження тепла в цьому куску стержня будемо мати:

$$c\rho S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta t = kS \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x \Delta t + F(x,t)\Delta x \Delta t. \qquad (**)$$

Після скорочення на множник $S\Delta x\Delta t$ матимемо:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} F(x,t) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c\rho S} F(x,t).$$

Якщо ввести позначення $\frac{k}{c\rho} = a^2$ і $\frac{1}{c\rho S} F(x,t) = f(x,t)$, то матимемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \qquad (2.2)$$

Це рівняння є лінійним, але неоднорідним.

III. Зупинимося ще на одному частинному випадку, коли бічна поверхня не є теплоізольованою. Тоді відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона, згідно якого кількість тепла, що втрачає стержень, розрахована на одиницю часу і на одиницю довжини, дорівнює

$$F_0 = h(u - \Theta),$$

де $\Theta(x,t)$ – температура навколишнього середовища, h – коефіцієнт теплообміну.

Тоді щільність теплових джерел в точці x в момент часу t дорівнює $F=F_1(x,t)-h(u-\Theta)$. Якщо стержень однорідний, то рівняння теплопровідності з бічним теплообміном має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta u+f(x,t), \tag{2.3}$$

де $\beta=\dfrac{h}{c\rho}$.

2.2 Постановка початкової та крайових умов

Для всіх фізичних задач характерна присутність "країв". Отже, для адекватного описання фізичної задачі математичною моделлю ми повинні включати краї. В нашому випадку краями є торцеві перерізи стержня , де можливий теплообмін з навколишнім середовищем, тобто поперечні перерізи стержня $x=0$ та $x=l$. Крайові умови показують, що відбувається на кінцях стержня в будь-який момент часу. Крайові умови можуть бути різних типів.

а) Найпростіший випадок крайових умов той , коли кінці стержня підтримуються при сталій температурі. Це записується таким чином:

$$u(0,t)=T_1\ ,\ u(l,t)=T_2\ .$$

б) Кінці стержня підтримуються при температурі, що залежить від часу:

$$u(0,t)=g_1(t)\ \text{ і }\ u(l,t)=g_2(t)\ ,$$

де $g_1(t)$ і $g_2(t)$ – задані функції.

в) Більш загальними є крайові умови, при яких на торцевих перерізах відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона, згідно якого потік тепла через одиницю поверхні за одиницю часу пропорційний різниці температур тіла і навколишнього середовища, тобто дорівнює $h(u-\bar{u})$, де h – коефіцієнт пропорційності, ~~який називається~~ коефіцієнтом теплообміну, u – температура кінця стержня , $\bar{u}$ – температура навколишнього середвища .

За законом Ньютона: якщо температура одного із кінців стержня менша, ніж температура навколишнього середовища, тепло буде переміщатися в стержень із швидкістю, пропорційною різниці температур.

Отже, витікаючий потік тепла при $x=0$ дорівнює $h(u(0,t)-g_1(t))$, а витікаючий потік тепла при $x=l$ дорівнює $h(u(l,t)-g_2(t))$, де h – коефіцієнт теплообміну, який показує, скільки калорій тепла протікає через переріз за одну секунду при різниці температур в один градус. Витікаючий потік дорівнює кількості калорій, що проходять через кінець стержня за одну секунду. Зауважимо, що потік тепла буде додатним на тому кінці стержня, де температура вища температури навколишнього середовища.

Закон Фур'є дає друге представлення для потоку тепла, що проходить через межу області, а саме:

потік тепла, що проходить через межу області, пропорційний похідній температури в напрямі внутрішньої нормалі. Цей закон стверджує, що якщо температура швидко зростає в напрямі зовнішньої нормалі до межі області, то потік буде текти з навколишнього середовища в дану область. В нашій одномірній задачі закон Фур'є прийме вид

витікаючий потік $\quad Q|_{x=0} = k\dfrac{\partial u}{\partial x}; \quad Q|_{x=l} = -k\dfrac{\partial u}{\partial x},$

де k – теплопровідність матеріалу, яка служить мірою того, як добре матеріал проводить тепло. Цей закон описує теплопровідність по всьому стержню, а не лише на його торцях. Потік, що протікає через точку x зліва направо дорівнює $-k\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Закон Фур'є стверджує: якщо $\dfrac{\partial u}{\partial x} < 0$, то в точці x_0 тепло тече зліва направо; якщо $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$, то в точці x_0 тепло тече справа наліво (тепло завжди тече від більш високих температур до менш високих).

На правому кінці стержня напрям теплового потоку, що напрямлений назовні, співпадає з віссю Ox і дорівнює $-kS\Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l}$, а на лівому кінці цей напрям протилежний, тому тепловий потік дорівнює $kS\Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0.}$

Тоді крайові умови на торцевих перерізах матимуть такий вигляд

$$\left[\begin{array}{l} k\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0(u|_{x=0} - g_1(t)); \\ k\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = h_l(u|_{x=l} - g_2(t)), \end{array}\right.$$

де g_1 та g_2 температура навколишнього середовища на кінцях стержня. Це так звані крайові умови 2-го роду .

Якщо якийсь кінець стержня теплоізольований, то відповідний коефіцієнт теплообміну дорівнює нулеві і крайова умова на цьому кінці прийме вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

А в загальному випадку довільного тіла цей випадок відповідає тому, що похідна за нормаллю (внутрішня чи зовнішня) дорівнює нулеві, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Це так звані крайові умови 3-го роду .

Підводячи підсумки, ми сформулюємо математичну задачу теплопровідності для однорідного стержня з теплоізольованою поверхнею.

Знайти функцію $u(x,t)$, яка є розв'язком рівняння теплоровідності (ДРЧП) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, ($0<x<l$ і $0<t<\infty$),

що задовольняє крайові умови

(КУ) $\begin{cases} u(0,t) = g_1(t)\,, \\ u(l,t) = g_2(t)\,, \end{cases}$ $0<t<\infty$

і початкову умову

(ПУ) $u(x,0)=\varphi(x)$, $(0<x<l)$.

Зауваження. Функція $u(x,t)$ визначена і неперервна в замкненій області $0\le x\le l$ *і* $0\le t\le T$, де T – будь-яке задане число і повинна задовольняти рівняння теплопровідності у відкритій області $0<x<l$ *і* $0<t<T$, а початкова умова і крайові умови повинні задовольняти умови спряження, а саме:

$$\varphi(0)=g_1(0)=u(0,0),$$
$$\varphi(l)=g_2(0)=u(l,0).$$

Ця задача називається першою крайовою задачею.

В залежності від характеру крайових умов можуть бути і інші види крайових задач, наприклад без початкових умов і $0\le x\le l$, або без початкових умов і $0<x<\infty$ (випадок безмежного стержня).

2.3 Розв'язування однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

Постановка задачі.

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\text{(ДРЧП)}\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (0<x<l \text{ і } 0<t<\infty),\tag{2.4}$$

що задовольняє крайові умови

$$\text{(КУ)}\qquad \begin{cases} u(0,t)=0\,, \\ u(l,t)=0\,, \end{cases}\quad 0<t<\infty\tag{2.5}$$

і початкову умову

$$\text{(ПУ)}\qquad u(x,0)=\varphi(x),\quad (0<x<l),\tag{2.6}$$

де $\varphi(x)$ – задана неперервна функція, що має кусково-неперервну похідну. Крайові умови (2.2) є нульовими $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Розв'язувати цю задачу будемо методом Фур'є, суть якого викладемо по кроках.

1-й крок (знаходження елементарних розв'язків ДРЧП (2.1)).

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.1) у виді добутку двох функцій

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\,, \tag{2.7}$$

де $X(x)$ – функція тільки змінної x , а $T(t)$ – функція лише змінної t.

Підставимо форму розв'язку (2.7) в ДРЧП (2.4). Оскільки $\frac{\partial u}{\partial t}=X(x)\cdot T'(t)$, а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)\cdot T(t)$, то матимемо : $X(x)\cdot T'(t)=a^2X''(x)\cdot T(t)$. Звідси, поділивши на $a^2X(x)\cdot T(t)$, матимемо:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k, \tag{2.8}$$

де k – const, оскільки x і t не залежать одне від одного, ліва частина рівності залежить лише від t, а права – лише від x. Звідси одержимо два рівняння

$$\left[\begin{array}{l} T'(t)-ka^2T(t)=0, \\ X''(x)-kX(x)=0. \end{array}\right.$$

Розв'язавши ці два звичайні диференціальні рівняння, ми знайдемо добуток їх відповідних розв'язків, який і буде задовольняти дане ДРЧП (2.4). Отже, ми істотно спростили вихідне ДРЧП (2.4), звівши його до сукупності двох звичайних диференціальних рівнянь.

Звернемо увагу на ту важливу обставину, що константа k повинна бути від'ємною, тобто $k<0$.

Якби k було додатним, тобто $k>0$ то, з рівняння $\frac{T'(t)}{T(t)}=ka^2$, проінтегрувавши його за t, матимемо $\int\frac{T'(t)}{T(t)}dt=\int ka^2dt;\ \ln T(t)=ka^2t+\ln C.$

Тоді $T(t)=C\cdot e^{ka^2t}$, де C – довільна стала, буде загальним розв'язком. При $k>0$ матимемо, що $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=C\cdot\lim\limits_{t\to\infty}e^{ka^2t}=\infty$, тоді при $t\to\infty$ випливатиме, що $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\to\infty$, що суперечить тому, що в жодному поперечному перерізі стержня, тобто ні при жодному фіксованому x температура не може необмежено зростати за абсолютною величиною. Отже, константа $k<0$. Позначимо її через $-\lambda^2$, тобто $k=-\lambda^2$(в цьому випадку k буде від'ємним при $\forall\lambda \neq 0$). Тоді звичайні диференціальні рівняння запишуться так:

$$\left[\begin{array}{l} T'(t)+\lambda^2 a^2 T=0, \\ X''(x)+\lambda^2 X(x)=0. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо ці рівняння. Загальним розв'язком 1-го із них є функція $T(t)=Ce^{-\lambda^2 a^2 t}$, де C – довільна стала. Друге із них є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $r^2+\lambda^2=0$ має чисто уявні корені $r_{1,2}=\pm\lambda i$, його фундаментальною системою розв'язків є функції $cos\lambda x$ і $sin\lambda x$, а загальним розв'язком є функція

$X(x)=C_1 cos\lambda x+C_2 sin\lambda x$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Тоді $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=C\cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}(C_1 cos\lambda x+C_2 sin\lambda x)$ або

$$u(x,t)=e^{-\lambda^2 a^2 t}(Acos\lambda x+Bsin\lambda x), \tag{2.9}$$

де A, B, λ – довільні числа, оскільки C_1, C_2, C – довільні сталі, λ – теж деяке число, поки що довільне.

Отже, ми отримали нескінченну кількість функцій (2.9), *які задовольняють* ДРЧП (2.4).

2-й крок (знаходження розв'язків, що задовольняють крайові умови).

Серед нескінченної множини розв'язків (2.9) даного рівняння виберемо ті, що задовольняють крайові умови (2.5), тобто $u(0,t)=0$ і $u(l,t)=0$. Скористаємося цими умовами. При $x=0$ матимемо :

$u(0,t)=e^{-\lambda^2 a^2 t}(Acos0\lambda+Bsin0\lambda)=0$; $\quad Ae^{-\lambda^2 a^2 t}=0$. Звідки $A=0$.

Отже, $u(x,t)=e^{-\lambda^2 a^2 t}\cdot Bsin\lambda x.$

При $x=l$ матимемо $u(l,t)=e^{-\lambda^2 a^2 t}\cdot Bsin\lambda l=0$. Оскільки $B\neq 0$ (бо при $B=0\Rightarrow$ $u(x,t)\equiv 0$, що не задовольняє початкову умову (3)), то звідси випливає, що $sin\lambda l=0$. Тоді $\lambda l=\pi n$, де $n\in Z$, $n\neq 0$, бо $\lambda\neq 0$, звідки

$$\lambda=\frac{\pi n}{l}, \qquad \text{де } n=\pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отже, щоб задовольнити умову $u(l,t)=0$, необхідно вимагати, щоб числа λ приймали значення числової послідовності

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \tag{2.10}$$

де $n=1,2,3,...$

Тоді кожному натуральному n буде відповідати розв'язок ДРЧП (2.4), що задовольняє крайові умови, виду

$$u_n(x,t) = B_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (n=1,2,...). \tag{2.11}$$

Отже, маємо послідовність функцій (2.11), що являються частинними розв'язками задачі (2.4) – (2.5).

Оскільки рівняння (2.4) лінійне і однорідне, то сума частинних розв'язків рівняння (2.4) теж задовольняє це рівняння та задані крайові умови (2.5), бо кожна із функцій (2.11) задовольняє ці умови.

Складемо формально функціональний ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{2.12}$$

де $u(x,t)$ є його сумою. Сума цього ряду функція $u(x,t)$ теж задовольнятиме ДРЧП (2.4), бо кожен його член задовольняє рівняння (2.4) та крайові умови (2.5).

3-тій крок (знаходження розв'язку, що задовольняє рівняння (2.4), крайові умови і початкову умову).

Останній крок найбільш цікавий з математичної точки зору.

Підберемо коефіцієнти B_n ряду так, щоб функція $u(x,t)$, що є сумою цього ряду, задовольняла початкову умову $u(x,0)=\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ задана неперервна кусково-диференційовна функція на проміжку $[0;l]$. При $t=0$ з рівності (2.12) маємо

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Оскільки $u(x,0) = \varphi(x)$ згідно початковій умові, то матимемо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin \frac{\pi n}{l} x . \qquad (2.13)$$

Рівність (2.13) означає, що задана функція $\varphi(x)$ розкладена в неповний ряд Фур'є за синусами. Чи можливо це зробити? Оскільки функція $\varphi(x)$ неперервна на проміжку $(0,l)$ і має на ньому кусково-неперервні похідні, то продовживши її на симетричний проміжок $(-l;0)$ непарним способом, а потім за періодичністю на всю числову пряму змінної x, функція $\varphi(x)$ буде розкладена єдиним способом в ряд Фур'є по синусах, причому коефіцієнти цього ряду Фур'є визначатимуться за відомими формулами

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) sin \frac{\pi n}{l} x dx \qquad (n=1,2,3,...) . \qquad (2.14)$$

Отже, розв'язок першої крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності при нульових (однорідних) крайових умовах, а саме :

ДРЧП $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0<x<l \;\; i \;\; 0<t<\infty$

КУ $\quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0, \end{cases}$

ПУ $\quad u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0 \le x \le l,$

знаходять у виді ряду $\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} sin \frac{\pi n}{l} x,$

де $B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) sin \frac{\pi n}{l} x dx$ - коефіцієнти розкладання заданої фунції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є за синусами на $[0,l]$.

Зауваження. Багатьох лякає складність алгоритму розв'язування цієї задачі. Цей розв'язок не буде здаватися таким складним, якщо витратити деякий час на його аналіз. Дійсно, більш складна форма розв'язку означає його більшу інформативність.

1. Звернемо увагу на таку обставину: єдина різниця між розкладанням (2.13) відомої функції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є за синусами і самим розв'язком

(2.12) полягає в наявності часового множника $e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$ в кожному члені ряду (2.12).

2. Кожен член в розкладанні є функцією від x і t. Зазначимо, що завдяки множнику $e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$ вклад членів з великими номерами при $t>0$ дуже малий. Тому при достатньо великих значеннях t повний розв'язок наближено співпадає з першим членом, тобто $u(x,t)=B_1 e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi x}{l}$, який представляє собою затухаючу з часом півхвилю синусоїди. На проміжку $[0,l]$ вміститься половина графіка функції $y=\sin\frac{\pi x}{l}$, бо її період дорівнює $2l$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при крайових умовах $u(0;t)=0$, $u(l;t)=0$ і початковій умові $u(x;0)=\sin(\pi x)+\frac{1}{3}\sin(3\pi x)+\frac{1}{5}\sin(5\pi x)$.

Розв'язування. За умовою $a=1$, $l=1$, $\varphi(x)=\sin(\pi x)+\frac{1}{3}\sin(3\pi x)+\frac{1}{5}\sin(5\pi x)$.

Оскільки функція $\varphi(x)$ на проміжку по суті розкладена в ряд Фур'є за синусами, то маємо, що $B_1=1$, $B_2=0$, $B_3=1/3$, $B_4=0$, $B_5=1/5$, $B_6=B_7=\ldots=0$.

Тоді $u(x;t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)+\frac{1}{3}e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x)+\frac{1}{5}e^{-25\pi^2 t}\sin(5\pi x)$, $u(x;t)\approx e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$.

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<1,\ t>0)$, що задовольняє крайові умови $u(0;t)=u(1;t)=0$ і початкову умову $u(x;0)=x-x^2$, $0\le x\le 1$.

Розв'язування. За умовою задачі $a=1$, $l=1$ і $\varphi(x)=x-x^2$. Розкладемо функцію $\varphi(x)=x-x^2$, задану на $[0;1]$, в ряд Фур'є за синусами, який має вид $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(\pi n x)$, де $B_n=2\int_0^1\varphi(x)\sin\pi n x\,dx$ $(n=1,2,\ldots)$.

$$=2\left(-\frac{1}{\pi n}(x-x^2)\cos\pi nx\Big|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^1(1-2x)\cos\pi nx dx\right)=\frac{2}{\pi n}\int_0^1(1-2x)\cos\pi nx dx=$$

Будемо мати $\quad B_n=2\int_0^1(x-x^2)\sin\pi nx dx=\begin{bmatrix} u=x-x^2 & du=(1-2x)dx \\ dv=\sin\pi nx dx & v=-\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx \end{bmatrix}=$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=1-2x & du=-2dx \\ dv=\cos\pi nx dx & v=-\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{array}\right]=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{\pi n}(1-2x)\sin\pi nx\Big|_0^1+\frac{2}{\pi n}\int_0^1\sin\pi nx dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi^3 n^3}(\cos\pi n-1)=-\frac{4}{\pi^3 n^3}((-1)^n-1).$$

Отже, $B_n=0$ при всіх парних n, а при непарних n маємо, що $B_n=\dfrac{8}{\pi^3 n^3}$,

тобто $B_{2n-1}=\dfrac{8}{\pi^3(2n-1)^3}$.

Оскільки $\quad \varphi(x)=\dfrac{8}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^3}\sin(2\pi-1)\pi x$, то

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\, e^{-(2\pi-1)^2\pi^2 t}\sin(2n-1)\pi x.$$

3 РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

ДРЧП другого порядку гіперболічного типу найбільш часто зустрічаються в фізичних задачах, зв'язаних з процесами коливання. Найпростіше рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

називають рівнянням *коливання струни*.

3.1 Виведення рівняння коливання струни

Під струною розуміють *гнучку пружну нитку*, яка може вільно згинатися. Нехай кінці струни закріплені, а сама струна туго натягнута. Якщо вивести струну з положення рівноваги, наприклад, *відтягнути* її або ударити по ній, то струна почне *коливатися*. Будемо вважати, що всі точки струни рухаються перпендикулярно її положенню рівноваги, причому в кожний момент часу струна лежить в одній і тій же площині. Це можливо, якщо струна робить малі відхилення від положення рівноваги. Кажуть, що струна здійснює поперечні коливання. В цій площині виберемо прямокутну систему координат xOy. Тоді, якщо в початковий момент часу струна довжини l розміщувалася вздовж осі Ox, то u буде означати малі відхилення струни від положення рівноваги. В процесі коливання величина відхилення u буде залежати від абсциси точки струни x і від часу t. Задача полягає у визначенні форми струни в будь-який момент часу та визначити закон руху кожної точки струни.

Зробимо деякі уточнення відносно гнучкості і пружності струни.

Що означає гнучкість струни з фізичної точки зору?

1. Будемо вважати струну *абсолютно гнучкою*, тобто такою, що не чинить опору згинанню. Це означає, що якщо вилучити якусь частину струни, що лежить по одну сторону від будь-якої її точки, то сила натягу $\bar{T}$, яка заміняє дію вилученої частини, завжди буде напрямлена по дотичній до струни. *Отже, сила натягу $\bar{T}$ розміщена по дотичній до струни.*

2. *Струну будемо вважати пружною*, для якої виконується *закон Гука*, за яким зміна величини сили натягу пропорційна зміні довжини струни. Нехай струна *однорідна*, її лінійну густину позначимо через ρ.

3. Будемо вважати, що на струну в площині коливань ще діють сили (крім сил натягу), що паралельні осі Оu; ці сили можуть змінюватись вздовж струни і з часом. Будемо вважати ці сили неперервно розподіленими вздовж струни. Щільність розподілу цих сил є функцією абсциси x і часу t. Позначимо її через $g(x,t)$. Зокрема, якщо єдиною зовнішньою силою є вага струни, то $g(x,t)= -\rho g$ (ρ – гнучкість струни, g – прискорення сили тяжіння).

Будемо розглядати *малі коливання струни.* Якщо через $\alpha(x,t)$ позначити кут між віссю Оx та дотичною до струни в точці з абсцисою x в момент часу t, то умова малості відхилень від положення рівноваги по-лягає в тому, що величиною α^2 можна нехтувати, тобто $\alpha^2 \approx 0$, але ж тоді $tg\alpha$ величина мала, тоді $tg^2\alpha \approx 0$. Оскільки $tg\alpha = u'_x$, то $u'^2_x \approx 0$.

Будемо розглядати малі коливання струни.

Тоді довжина елемента струни $\cup M_1M_2$ дорівнює її проекції на вісь Оx. Це буде так, якщо ми нехтуватимемо квадратом похідної u'_x по відношенню до одиниці, бо

$$l_{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u'^2_x}\,dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1 .$$

При зроблених припущеннях матимемо, що величина сили натягу в усіх точках струни однакова, (рис. 3.1).

Дійсно, візьмемо довільний кусок струни M_1M_2 в конкретний момент часу t і замінимо дію відкинутих кусків струни силами натягу $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$. Оскільки всі точки струни за умовою рухаються вздовж осі Оu і зовнішні сили також паралельні осі Оu, то сума проекцій сил натягу на вісь Оx повинна дорівнювати нулеві (за відомим принципом Д'Аламбера), (рис. 3.2).

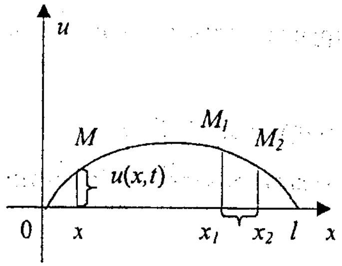


Рисунок 3.1

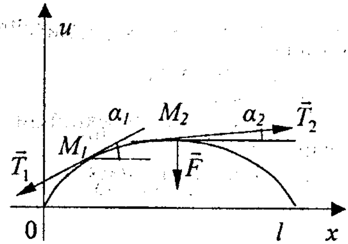


Рисунок 3.2

Тоді матимемо $-T_1 cos\alpha_1 + T_2 cos\alpha_2 = 0$. Оскільки $cos\alpha_1 \approx 1$ і $cos\alpha_2 \approx 1$, то $\Rightarrow -T_1 + T_2 = 0$, звідки маємо $T_1 = T_2$. Оскільки точки M_1 M_2 вибрані довільно, то це доводить, що сили натягу в даний момент рівні між собою. Оскільки немає зміни довжини будь-якої частини струни, то на підставі закону Гука незмінним залишається натяг струни. Отже, величина сили натягу T є сталою.

Виділимо тепер малу частину струни M_1M_2, що проектується на вісь Оx на відрізок $[x, x+\Delta x]$.

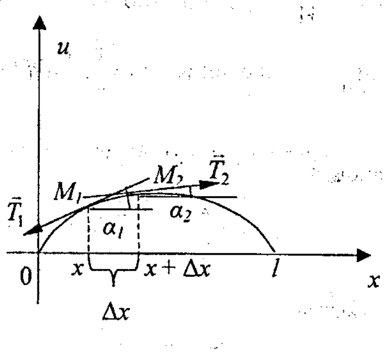


Рисунок 3.3

На нього діють сили натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, які заміняють дію відкинутих частин струни, будучи розміщеними вздовж дотичної до струни в точках M_1 і M_2, величина цих сил є сталою і дорівнює T. Для побудови математи-

математичної моделі малих коливань струни розглянемо сили, що діють на частину M_1M_2 струни.

Знайдемо суму проекцій цих сил натягу на осі Оx і Оu:

а) сума проекцій сил натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ на вісь Оx повинна дорівнювати нулеві;

б) сума проекцій цих же сил натягу на вісь Оu буде такою

$$-T\sin\alpha_1 + T\sin\alpha_2 = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).$$

Оскільки кути α_1 і α_2 малі при малих відхиленнях струни, то $\sin\alpha_1 \approx tg\alpha_1$, а $\sin\alpha_2 \approx tg\alpha_2$.

Тоді $T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T(tg\alpha_2 - tg\alpha_1) = T(\frac{\partial u(x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(x)}{\partial x}) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$ [*за формулою Лагранжа*].

Рівнодійну зовнішніх сил, прикладених до виділеної частини M_1M_2 струни, позначимо через $\vec{F}$, тоді величина сили $\vec{F}$ буде визначена так $F=g(x,t)\Delta x$ (напрям сили $\vec{F}$ визначається знаком функції $g(x,t)$).

Тоді за законом Ньютона відносно частини струни M_1M_2, за яким добуток маси струни на прискорення $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ дорівнює сумі всіх діючих на струну сил, враховуючи те, що $m=\rho \cdot \breve{M_1M_2} = \rho \cdot \Delta x$, будемо мати

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x + g(x,t)\Delta x.$$

Звідки матимемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}g(x,t).$$

Введемо позначення $\frac{T}{\rho} = a^2$, тоді попередня рівність запишеться так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}g(x,t). \qquad (*)$$

Рівняння (*) називається *рівнянням коливання струни або одномірним* *хвильовим рівнянням.*

Якщо $g(x,t)\equiv 0$, то рівняння (*) прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (3.1)$$

Це рівняння називається *лінійним однорідним* і *описує воно вільні коливання струни* без впливу зовнішніх сил.

Може виникнути питання: чому рівняння виду (3.1) повинно описувати дещо таке, що схоже на коливання струни скрипки чи гітари? Інтуїтивно це можна пояснити так. Величина $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ визначає вертикальне прискорення струни в точці x. А прискорення струни, викликане натягуванням її, в кожній точці тим більше, чим більша вгнутість струни в цій точці, що визначається величиною $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (коефіцієнтом пропорційності є константа $a^2=\frac{T}{\rho}$).

3.2 Постановка крайових та початкових умов для хвильового рівняння

Самого рівняння коливання струни недостатньо, щоб повністю однозначно визначити функцію $u(x,t)$, яка визначає величину відхилення в будь-який момент часу в будь-якій точці струни, бо саме ДРЧП має нескінченну множину розв'язків. Необхідно сформулювати ще умови, достатні для однозначного визначення шуканої функції $u(x,t)$.

Для струни, що закріплена на кінцях, *крайові умови* задаються так

$$\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0 \end{cases} \text{при} \quad t>0. \qquad (3.2)$$

Початкові умови, що показують положення струни в момент початку коливання, повинні вказувати форму струни в початковий момент та початкову швидкість струни (при $t=t_0$ $(t_0=0)$).

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u'_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \text{при } 0 \le x \le l, \qquad (3.3)$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – задані функції абсциси точки.

Зауваження. *Одна із функцій* $f(x)$ або $g(x)$ може дорівнювати нулеві. Якщо $f(x) \equiv 0$ і $g(x) \equiv 0$, то струна знаходиться в стані спокою, тому $u(x,t) \equiv 0$.

Якщо кінці струни *рухаються* за заданим законом, то крайові умови приймають вигляд

$$\begin{cases} u(x,0) = g_1(t), \\ u(l,t) = g_2(t), \end{cases} \qquad (3.2')$$

де $g_1(t)$ і $g_2(t)$ – задані функції при $t > 0$.

Крайові умови (3.2) і (3.2′) називають крайовими умовами першого роду.

Крайові умови задаються і іншим способом, а саме: коли задаються сили на кінцях, то

$$\begin{cases} u'_x(0,t) = \mu_1(t), \\ u'_x(l,t) = \mu_2(t). \end{cases} \qquad (3.2'')$$

Це є крайові умови другого роду.

3.3 Рівняння електричних коливань в проводах

Проходження електричного струму по проводу характеризується силою струму i та напругою v, які являються функціями положення точки x і часу t.

За допомогою хвильового рівняння можна описати розподіл електричного струму в проводі.

За законами Кірхгофа отримуємо таку систему двох рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial x} + C\dfrac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + L\dfrac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \end{cases} \qquad (3.4)$$

де R – опір на одиницю довжини, L – індуктивність проводу, C – ємність проводу, G – величина втрат кількості електрики внаслідок недосконалості ізоляції, розрахована на одиницю довжини.

1. Кількість електричного струму, що протікає через елемент проводу, дорівнює сумі кількості електричного струму, необхідної для зарядки елементу, і кількості струму, що втрачається внаслідок недосконалості ізоляції.

2. Спад напруги в проводі дорівнює сумі електрорушійних сил (дорівнює спаду напруги на індуктивності і на опорі).

Виключимо змінну v з цієї системи рівнянь. Для цього продиференціюємо перше рівняння за x

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+G\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad (*)$$

а друге за t

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+L\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+R\frac{\partial i}{\partial t}=0;$$

помноживши його на C, дістанемо

$$C\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+CR\frac{\partial i}{\partial t}=0. \qquad (**)$$

Далі віднімемо від (*) рівняння (**) почленно, дістанемо

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+G\frac{\partial v}{\partial x}-CR\frac{\partial i}{\partial t}=0.$$

З другого рівняння системи (3.4)

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-L\frac{\partial i}{\partial t}-Ri.$$

Замінивши $\frac{\partial v}{\partial x}$ цим виразом в попередньому рівнянні, дістанемо

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-GL\frac{\partial i}{\partial t}-GRi-CR\frac{\partial i}{\partial t}=0,$$

звідки

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(GR+CR)\frac{\partial i}{\partial t}+GRi. \qquad (3.5)$$

Аналогічний вигляд матиме рівняння для напруги v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (GR + CR)\frac{\partial v}{\partial t} + GRv. \qquad (3.6)$$

Рівняння (3.5) і (3.6) є *лінійними* ДРЧП другого порядку.

Рівняння (3.5) і (3.6) називаються телеграфними рівняннями.

Якщо нехтувати втратами через ізоляцію і якщо опір малий (тобто $G\equiv 0$, $R\equiv 0$), то рівняння (3.6) прийме вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (3.7)$$

Отже, телеграфне рівняння (3.7) *має вигляд рівняння коливань, тобто є хвильовим рівнянням, де* $a = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$.

3.4 Розв′язування рівняння коливань струни методом відокремлення змінних (метод Фур′є)

Постановка задачі. Знайти розв'язок рівняння коливання струни

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (0<x<l,\ t>0) \qquad (3.8)$$

що задовольняє нульові крайові умови

$$\text{(КУ)} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \quad t>0 \qquad (3.9)$$

та початкові умови

$$\text{(ПУ)} \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t'(x,0) = g(x), \end{cases} \qquad (3.19)$$

де $f(x)$ *і* $g(x)$ *– задані функції при* $0 \le x \le l$.

Перший крок. (Знаходження елементарних розв'язків ДРЧП (3.8))

Розв'язок рівняння (3.8) будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad (3.11)$$

де $X(x)$ – функція змінної x, а $T(t)$ – функція змінної t.

Підставимо функцію (3.11) в рівняння (3.8). Оскільки $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)T''(t)$,

а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)T(t)$, дістанемо $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$,

звідки матимемо $\quad \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$,

при цьому ліва і права частини приймають стале значення. Знову звернемо увагу на те, що ця стала повинна бути *від'ємною* (як це було у випадку рівняння теплопровідності), позначимо цю константу через $-\lambda^2$.

Отже,
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2. \tag{3.12}$$

Із (3.12) одержуємо сукупність двох звичайних диференціальних рівнянь

$$T''(t)+\lambda^2a^2T(t)=0, \tag{3.13}$$
$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \tag{3.14}$$

(це рівняння таке ж саме, як і при розв'язуванні задачі для однорідного рівняння теплопровідності).

Кожне з цих рівнянь є лінійне однорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Оскільки їх характеристичні рівняння $r^2+\lambda^2a^2=0$ і $r^2+\lambda^2=0$ мають чисто уявні корені, відповідно $r_{1,2}=\pm\lambda ai$ та $r_{1,2}=\pm\lambda i$, то загальні розв'язки рівнянь (3.13) і (3.14) матимуть вигляд

$T(t)=A\cos\lambda at+B\sin\lambda at$, де A і B – довільні сталі,

$X(x)=C\cos\lambda x+D\sin\lambda x$, де C і D – довільні сталі.

Отже, розв'язки рівняння (3.8) матимуть вигляд

$$u(x,t)=(A\cos\lambda at+B\sin\lambda at)(C\cos\lambda x+D\sin\lambda x), \tag{3.15}$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Отже, маємо нескінченну множину елементарних розв'язків ДРЧП (3.8).

Другий крок. (Знаходження розв'язків, що задовольняють крайові умови). Будемо вимагати від (3.15), щоб ці розв'язки задовольняли крайові умови (3.9). При $x=0$ матимемо

$$u(0,t)=0,$$
$$u(0,t)=(Acos\lambda at+Bsin\lambda at)(Ccos0+Dsin0).$$

Отже, $(Acos\lambda at+Bsin\lambda at)C=0 \Rightarrow C=0$, бо $Acos\lambda at+Bsin\lambda at$ не може дорівнювати нулеві при всіх t.

Тоді розв'язки (3.15) приймуть вигляд

$$u(x,t)=Dsin\lambda x(Acos\lambda at+Bsin\lambda at). \tag{3.15'}$$

Скористаємося другою (КУ) $u(l,t)=0$; при $x=l$ матимемо

$$u(x,t)=Dsin\lambda l(Acos\lambda at+Bsin\lambda at)$$

Отже, $Dsin\lambda l(Acos\lambda at+Bsin\lambda at)=0$, звідки матимемо $sin\lambda l=0$.

Отже, $\lambda l=\pi n \Rightarrow \lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$, де n=1,2,3… . (3.16)

Зауважимо, що $\lambda \neq 0$, бо при $\lambda=0 \Rightarrow u(x,t)=0$, що не задовольняє (ПУ).

Отже, константа розділення λ є числовою послідовністю (3.16).

Тоді кожному натуральному n відповідає числова послідовність $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$ (де n =1,2,…), а кожному λ_n за формулою (3.15`) відповідає послідовність функцій

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=D_n sin\frac{\pi n}{l}x(A_n cos\frac{\pi na}{l}t+B_n sin\frac{\pi na}{l}t),$$

де A_n, B_n, D_n – послідовності довільних констант або ж після згортання

$$u_n(x,t)=(a_n cos\frac{\pi na}{l}t+b_n sin\frac{\pi na}{l}t)sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.17}$$

де a_n і b_n – довільні сталі.

Оскільки рівняння (3.8) є лінійним та однорідним, то будь-яка сума цих розв`язків (3.17) теж буде розв`язком ДРЧП (3.8) і буде задовольняти нульові крайові умови.

Тоді функція $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$, тобто функція, що є сумою функціонального ряду, теж задовольнятиме рівняння (3.8) і (КУ) (3.9).

Отже, $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{\pi na}{l}t+b_n sin\frac{\pi na}{l}t)sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (3.18)$$

є розв'язком ДРЧП (3.8) і задовольняє нульові крайові умови (3.9).

3-й крок. Залишилось підібрати коефіцієнти цього ряду a_n і b_n так, щоб функція (3.18) ще задовольнила початкові умови (3.10), а саме:

$$u(x,0)=f(x) \quad \text{і} \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x).$$

1. Скористаємось першою із цих умов. При $t=0$ з рівності (3.18) матимемо $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n sin\frac{\pi n}{l}x$, або $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n sin\frac{\pi n}{l}x$, (3.19)

звідки випливає, що функція $f(x)$, яка задана на проміжку $(0,l)$, розкладена в неповний ряд Фур'є за синусами, а як відомо, коефіцієнти a_n цього ряду Фур'є знаходяться за формулами

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{\pi n}{l}xdx \quad (n=1,2,...,). \qquad (3.20)$$

2. Скористаємось тепер другою із умов, що входить в (3.10). Продиференціювавши за t функціональний ряд (3.18) почленно, матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\pi na}{l}a_n sin\frac{\pi na}{l}t+\frac{\pi na}{l}b_n cos\frac{\pi na}{l}t)sin\frac{\pi n}{l}x.$$

При $t=0 \Rightarrow \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n sin\frac{\pi n}{l}x$, що можна записати так

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (3.21)$$

Отже, задана функція $g(x)$ $(0<x<l)$, що входить в склад (ПУ) (3.10), теж розкладена в неповний ряд Фур'є за синусами, тоді коефіцієнти цього ряду $\frac{\pi na}{l}b_n$ будуть визначатися за формулами

$$\frac{\pi na}{l}b_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$ звідки маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l g(x) sin \frac{\pi n}{l} x dx. \qquad (3.22)$$

Отже, коефіцієнти a_n і b_n в ряді (3.11) треба обчисляти за формулами (3.20) і (3.22), тоді функція (3.18) задовольнить і рівняння (3.8), і нульові крайові умови (3.9), і початкові умови (3.10).

Висновок. Розв'язок вказаної крайової задачі

$$\text{(ДРЧП)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (0 < x < l,\ t > 0)$$

$$\text{(КУ)} \qquad \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (t > 0)$$

$$\text{(ПУ)} \qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{cases}$$

шукаємо за формулою $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos \frac{\pi n a}{l} t + b_n sin \frac{\pi n a}{l} t) sin \frac{\pi n}{l} x$,

де $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sin \frac{\pi n}{l} x dx$, $\qquad b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l g(x) sin \frac{\pi n}{l} x dx$.

3.5 Формула Д'Аламбера

Розглянемо задачу Коші для рівняння коливання струни з початковими умовами для необмеженої струни, а саме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty \qquad (3.23)$$

$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u'(x,0) = g(x). \end{cases}$ де $f(x)$ і $g(x)$ – задані неперервні функції.

Оскільки країв в необмеженої струни немає, тому крайові умови відсутні. Ця задача була розв'язана в 1750 році французьким математиком Д'Аламбером. Викладемо суть цього методу.

1- й крок. Зведемо рівняння (3.23) до канонічного вигляду, що містить лише мішану частинну похідну, записавши рівняння (3.23) у вигляді

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \text{ де } A=a^2, B=0 \text{ і } C=-1. \qquad (2.23')$$

Складемо рівняння характеристик $Ady^2-2Bdydx+Cdx^2$, взявши замість dy відповідно dt, дістанемо $a^2dt^2-dx^2=0$ або $dx^2-a^2dt^2=0$. Це рівняння рівносильне такому $(dx-adt)(dx+adt)=0$, яке розпадеться на два звичайні диференціальні рівняння:

$$dx-adt=0 \quad dx+adt=0.$$

Це є диференціальні рівняння з відокремленими змінними.

Проінтегрувавши їх $\int dx-a\int dt=0$ *і* $\int dx+a\int dt=0$, дістанемо два загальні інтеграли $x-at=C_1$, $x+at=C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Тоді, замінивши координати x і t на ξ і η за формулами

$$\begin{cases}\xi=x-at,\\ \eta=x+at,\end{cases} \qquad (3.25)$$

рівняння (3.23) буде зведено до рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

Дійсно, виразимо частинні похідні за новими змінними ξ *і* η, враховуючи, що $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial t\partial u}=-a$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial t}=a$, дістанемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right).$$

Підставимо в рівняння (3.23'), дістанемо

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=0;\ 4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

Отже,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0. \tag{3.26}$$

2 - й крок. (Розв'язування перетвореного рівняння).

Рівняння (3.26) неважко розв'язати двома послідовними інтегруваннями, спочатку за ξ, а потім за η.

Оскільки рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ рівносильне рівнянню $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, тоді матимемо $\frac{\partial u}{\partial\eta}=\varphi(\eta)$ – довільна функція від η.

Звідси $u(\xi,\eta)=\int\varphi(\eta)d\eta+\varphi_1(\xi)$, бо інтегрування ведеться за η , а довільну сталу відносно η треба вважати як довільну функцію від ξ.

Позначивши $\int\varphi(\eta)d\eta$ через $\varphi_2(\eta)$, дістанемо

$$u(\xi,\eta)=\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\eta).$$

Отже, загальний інтеграл рівняння (3.26) записується у вигляді

$$u(\xi,\eta)=\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\eta), \tag{3.27}$$

де $\varphi_1(\xi)$ і $\varphi_2(\eta)$ – довільні функції відповідно однієї змінної ξ та η. Наприклад, очевидно, що функції $u(\xi,\eta)=sin+2\xi^3$, $u(\xi,\eta)=e^{\xi}+5tg\eta$, $u(\xi,\eta)=\frac{2}{\eta}+ln\xi$ задовольняють рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$. (перевірте !)

3-й крок. Повернемось до старих змінних x та t. Оскільки рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ рівносильне рівнянню (3.23), то в загальний інтеграл (3.27) замість ξ та η підставимо вирази (3.25), одержимо

$$u(x,t)=\varphi_1(x-at)+\varphi_2(x+at). \tag{3.28}$$

Це є загальний інтеграл рівняння (3.23), тут φ_1 та φ_2 є довільні функції своїх аргументів.

4-й крок. Знаючи, що функція (3.28) є загальним інтегралом рівняння (3.23), скористаємось початковими умовами (3.24) для того, щоб знайти конкретні розв'язки рівняння (3.23), тобто знайти конкретні вирази функцій φ_1 і φ_2 в формулі (3.28).

Для цього спочатку знайдемо частинну похідну за t функції (3.28)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1'(x-at)\cdot(-a) + \varphi_2'(x+at)\cdot a.$$

Тоді при $t=0$ матимемо $u(x,0)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$; $u_t'(x,0) = -a\varphi_1'(x) + a\varphi_2(x)$.

Враховуючи початкові умови (3.24), матимемо

$$\begin{cases} \varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x), \\ -a\varphi_1'(x)+a\varphi_2'(x)=g(x). \end{cases} \tag{3.29}$$

Проінтегруємо 2-е із рівнянь в межах від x_0 до x:

$$-a\int_{x_0}^{x}\varphi_1'(z)dz + a\int_{x_0}^{x}\varphi_2'(z)dz = \int_{x_0}^{x}g(z)dz;$$

$$-a\varphi_1(z)\Big|_{x_0}^{x} + a\varphi_2(z)\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x}g(z)dz + C;$$

$$-a\varphi_1(x)+a\varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x}g(z)dz + C;\ -\varphi_1(x)+\varphi_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(z)dz + \frac{C}{a}.$$

Із системи рівнянь $\begin{cases} \varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x), \\ -\varphi_1(x)+\varphi_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)dz + \dfrac{C}{a}, \end{cases}$ маємо

$$2\varphi_2(x) = f(x) + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(z)dz + \frac{C}{a};\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(z)dz + \frac{C}{2a};$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(z)dz - \frac{C}{2a}.$$

Тоді шуканий розв'язок $u(x,t) = \varphi_1(x-at)+\varphi_2(x+at) = \frac{1}{2}f(x-at) -$

$$-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at} g(z)dz+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} g(z)dz\ .$$

Отже, $$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x-at)+f(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(z)dz\ . \qquad (3.30)$$

Висновок. Розв'язок задачі Коші для необмеженої струни

(ДРЧГІ) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad -\infty<x<+\infty$ і $0<t<\infty$

(ПУ) $\begin{cases} u(x,0)=f(x), & -\infty<x<+\infty \\ u'_t(x,0)=g(x) \end{cases}$

дається формулою $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(f(x-at)+f(x+at))+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(z)dz$.

Ця формула називається формулою *Д'Аламбера.*

Приклад. Розв'язати задачу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty)$,

якщо $u(x,0)=sin2x,\ \ u'_t(x,0)=0.$

Розв'язування: За умовою $a=2,\ f(x)=sin2x,\ \ g(x)=0.$

Тоді $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(sin2(x-3t)+sin2(x+3t))+0=\dfrac{1}{2}\cdot 2sin2xcos3t.$

Отже, $u(x,t)=sin2xcos3t.$

Відповідь: $u(x,t)=sin2xcos3t.$

4 РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

4.1 Рівняння Лапласа

Розглянемо одномірне, двомірне та тримірне рівняння теплопровідності при відсутності джерел тепла

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \text{де}\ a^2=\frac{k}{C\rho};\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \qquad (4.1)$$

$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$, де $u=u(x,y,z,t)$, $a^2=\frac{k}{C\rho}$, k – коефіцієнт теплопровідності, C – питома теплоємність, ρ – густина (г/см^3).

Якщо теплове поле є нестаціонарним, то температура u при будь-якому t цього поля задовольняє рівняння теплопровідності.

Розглянемо тепер *стаціонарне* теплове поле при відсутності джерел тепла. Оскільки поле стаціонарне, тобто температура u не змінюється із зміною часу t, то $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, тоді одержимо такі рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \text{ або }\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (4.2)$$

Ці рівняння називаються *рівняннями Лапласа* відповідно на площині і в просторі. Якщо ввести оператор *Лапласа* $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ в просторі і $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ на площині, то ці рівняння запишуться так: $\Delta u=0$. (I)

Оператор Лапласа або *лапласіан* є одним із самих важливих в математичній фізиці. Який зміст цього оператора і яке відношення має сума трьох частинних похідних другого порядку до законів природи ?

Відповіді на питання зв'язані з тим фактом, що лапласіан функції дозволяє оцінити значення функції через значення функції в сусідніх точках. Крім цього, лапласіан є узагальненням другої похідної функції однієї змінної на багатовимірний випадок.

Вкажемо на основну властивість двомірного оператора Δ, а саме:

1. Якщо $\Delta u > 0$ в точці (x, y), то значення $u(x, y)$ в цій точці (x, y) менше "середнього значення функції в сусідніх точках"; наприклад, на колі з центром в цій точці.

Під *"середнім значенням функції в сусідніх точках"* розуміють середнє значення функції або по *колу,* або по *кругу* з центром в точці (x, y).

2. Якщо $\Delta u = 0$ в точці (x, y), то $u(x, y)$ дорівнює "середньому значенню функції в сусідніх точках".

3. Якщо $\Delta u < 0$ в точці (x, y), то $u(x, y)$ більше "середнього значення функції в сусідніх точках". Це інтуїтивно зрозуміло, якщо виходити із основних рівнянь матфізики. Згідно з рівнянням теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$, для температури u швидкість зміни температури $\frac{\partial u}{\partial t}$ пропорційна величині Δu. Отже, якщо температура в точці (x, y) менша, ніж середня температура на колі, центр якого знаходиться в цій точці, то температура в цій точці буде зростати, тобто $\Delta u > 0$. Якщо ж в цій точці (x, y) температура вища, ніж середня температура в точках кола, що обмежує цю точку, де точка (x, y) є центром кола, то в цій точці температура буде зменшуватись, тобто $\Delta u < 0$. Якщо ж в точці (x, y) температура дорівнює середньому значенню температури в точках кола, що обмежує цю точку, то $\Delta u = 0$.

Згідно з хвильовим рівнянням $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$ при зміщенні мембрани прискорення мембрани $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (або сили, що діють на точку) пропорційне величині Δu. Це означає, що точка мембрани прискорюється вверх (сила напрямлена вверх), якщо її зміщення (по висоті) менше, ніж середнє зміщення сусідніх точок, тобто $\Delta u > 0$.

Якщо функція u задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u = 0$, то її значення в точці (x, y) збігається із середнім значенням в сусідніх точках.

При наявності джерел тепла одержимо рівняння

$$\Delta u = -f, \qquad \text{(II)}$$

неоднорідне диференціальне рівняння, де $f = \dfrac{F}{k}$, F – щільність теплових джерел, k – коефіцієнт теплопровідності.

Так, рівняння $\Delta u = -\rho$ описує потенціал електричного поля, де ρ – щільність статичних зарядів.

Неоднорідне рівняння (II) ще *називають рівнянням Пуассона.*

Як ставиться крайова задача для рівняння Лапласа?

Розглянемо деяку об'ємну область (V), обмежену деякою замкненою поверхнею Г, що є межею цієї області (V).
Нехай всередині цієї області температура u не залежить від зміни часу, тобто теплове поле стаціонарне.

Задача про розподіл температури $u(x, y, z)$ ставиться таким чином. Знайти функцію $u(x, y, z)$, що всередині тіла задовольняє рівняння $\Delta u = 0$ або $\Delta u = f(x, y, z)$ *і крайову умову*, яка може бути взята в одному із виглядів:

1) $u = f_1$ на Γ (це *перша крайова задача*), тобто $u|_\Gamma = f_1$;

2) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Γ (це *друга крайова задача*), тобто $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = f_2$,

тут $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – похідна за зовнішньою нормаллю до поверхні Γ;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = h(u - f_3) = 0$ на Γ (це *третя крайова задача*),

де f_1, f_2, f_3 – задані функції.

Першу крайову задачу називають *задачею Діріхле*, а другу крайову задачу називають *задачею Неймана*. Третя крайова задача називається мішаною задачею, а крайові умови називають *умовами Робена*.

Зауваження. До рівняння Лапласа приводять і інші фізичні задачі, зокрема рівняння $\Delta u=-\rho$ описує *потенціал статичного електричного поля,* якщо ρ – щільність статичних зарядів.

4.2 Рівняння Лапласа в полярних координатах

В багатьох задачах виникає необхідність знати вираз оператора Лапласа Δu в інших координатах (так званих криволінійних координатах). Так, наприклад, якщо межею області є коло, то зручно переходити до полярних координат r і φ ; якщо межею просторової області є сфера, то переходять до сферичних координат r , φ і Θ .

Перехід від декартових координат x і y до полярних r і φ здійснюється за формулами

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} r^2=x^2+y^2 \\ tg\varphi=\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Знайдемо вираз Δu в полярних координатах, де $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Для цього знайдемо вирази $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ через r і φ.

Почнемо з частинних похідних 1-го порядку

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Із формули $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$ маємо:

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\varphi. \qquad \text{Отже,} \quad \frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi.$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial y}=2y \;\Rightarrow\; \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=sin\varphi . \qquad \text{Отже,} \;\; \frac{\partial r}{\partial y}=sin\varphi .$$

З другої формули $tg\varphi=\frac{y}{x}$ маємо:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2};\;\; \frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}. \;\; \text{Отже,} \;\; \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{sin\varphi}{r};$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{x};\;\; \frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{r\cos\varphi}; \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{cos\varphi}{r}.$$

Тоді $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r};\;\; \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}. \qquad (4.4)$$

Знайдемо тепер частинні похідні 2-го порядку

а) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}cos\varphi -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{sin\varphi}{r}\right)cos\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{sin\varphi}{r}\right)\cdot\left(\frac{-sin\varphi}{r}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}cos\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\cdot\frac{sin\varphi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{sin\varphi}{r^2}\right)\cdot cos\varphi+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi}\cdot\frac{sin\varphi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{cos\varphi}{r}\right)\cdot\left(-\frac{sin\varphi}{r}\right);$$

б) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}sin\varphi \; +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{cos\varphi}{r}\right)sin\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{cos\varphi}{r}\right)\cdot\frac{cos\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}sin\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\cdot\frac{cos\varphi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{cos\varphi}{r^2}\right)\cdot sin\varphi+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}sin\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot cos\,\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{cos\,\varphi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{sin\,\varphi}{r}\right)\cdot\frac{cos\,\varphi}{r}.$$

Тоді $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\dfrac{\partial u}{\partial\varphi\partial r}\left(-\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}-\right.$

$$\left.-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot\left(\frac{\sin^2\varphi}{r^2}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\sin^2\varphi}{r}+\frac{\cos^2\varphi}{r}\right)+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Отже, рівняння Лапаласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2=0}$ в полярних координатах має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0. \qquad (4.5)$$

Зауваження. 1. Тільки в декартових координатах оператор Лапласа має *сталі коефіцієнти*. Цим пояснюється, чому задачі в інших системах координат розв'язувати складніше. Але до полярних координат і інших доводиться переходити в рівнянні Лапласа, бо для рівнянь Лапласа із змінними коефіцієнтами все-таки можна застосувати метод відокремлених змінних, правда утворюються звичайні диференціальні рівняння теж із змінними коефіцієнтами.

Покажемо це на такій важливій задачі Діріхле для круга.

2. Рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ при переході до циліндричних координат точки в просторі прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (4.6)$$

4.3 Внутрішня задача Діріхле для круга

Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа для деяких найпростіших областей може бути знайдено методом відокремлення змінних, але при розв'язуванні допоміжних звичайних диференціальних рівнянь часто потрібні спеціальні класи функцій, зокрема це відноситься до рівняння Бесселя, рівняння Лежандра і інших.

Зупинимось на одній із простих задач Діріхле для круга, розв'язок якої можна отримати за допомогою тригонометричних функцій. Розглянемо круг радіуса a з центром в початку координат.

Постановка задачі. Знайти функцію u, що задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ всередині круга радіуса a і крайову умову $u|_{\Gamma} = f$, де f – задана неперервна функція, а Γ – коло, що є границею круга.

Ця задача дуже важлива у фізичних застосуваннях. Її можна інтерпретувати (трактувати) як задачу знаходження електростатичного потенціалу всередині круга за відомим розподілом потенціалу на межі.

Будемо розв'язувати цю задачу в полярних координатах.

Рівняння Лапласа прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \quad \text{або} \quad r^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \tag{4.7}$$

де $0 \le r < a$ і $0 \le \varphi < 2\pi$, а *крайову умову* можна записати так

$$u(a;\varphi) = f(\varphi) \text{ при } 0 \le \varphi < \pi, \tag{4.8}$$

де $f(\varphi)$ – задана неперервна функція.

Будемо розв'язувати цю задачу методом відокремлення змінних, а саме: шукатимемо розв'язок рівняння (4.7) у вигляді

$$u = \Phi(\varphi)\cdot R(r). \tag{4.9}$$

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \Phi(\varphi)\cdot R'(r)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \Phi(\varphi)\cdot R''(r)$, а $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \Phi''(\varphi)\cdot R(r)$,

то, підставляючи ці вирази в рівняння (4.7), одержимо

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r) + r\Phi(\varphi)R'(r) + \Phi''(\varphi)R(r) = 0.$$

Звідси, поділивши рівняння на $\Phi(\varphi)R(r)$, дістанемо

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Оскільки ліва частина рівняння не залежить від φ , а права від r, то вони дорівнюють сталій, яку позначимо через $-\lambda^2$, тобто ця стала є від'ємною

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\lambda^2. \qquad (4.10)$$

Звідси одержимо сукупність двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\Phi''(\varphi)+\lambda^2\Phi(\varphi)=0, \qquad (4.10')\\ r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda^2R(r)=0. \qquad (4.10'')\end{array}\right.$$

Перше із рівнянь має загальний розв'язок функцію $\Phi(\varphi)=A\cos\lambda\varphi+B\sin\lambda\varphi$, бо його характеристичне рівняння $k^2+\lambda^2=0$ має коренями $k_{1,2}=\pm\lambda i$ і його фундаментальною системою розв'язків є функції $\cos\lambda\varphi$ і $\sin\lambda\varphi$ (A і B – довільні сталі).

Зауважимо, що при зміні кута φ на величину 2π однозначна функція $u(r,\varphi)$ повинна повернутися до свого попереднього значення, бо це буде одна і та ж точка (точки (r,φ) і $(r;\varphi+2\pi)$ – збігаються), тобто $u(r;\varphi+2\pi)=u(r;\varphi)$, а це означає, що функція $\Phi(\varphi)$ повинна задовольняти таку рівність $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\pi)$, тобто $\Phi(\varphi)$ є *періодичною* функцією кута φ з періодом 2π, а це можливо лише тоді, коли λ є число ціле, тобто $\lambda=n$. Зауважимо, що якби ми спільне відношення (4.10) прирівняли до додатного числа, то періодичного розв'язку не отримали б.

Отже, при n цілому маємо функцію

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi. \qquad (4.11)$$

Друге рівняння (4.10'') називається *рівнянням Ейлера* і його розв'язок шукаємо за допомогою відомої підстановки

$$R(r)=r^m, \qquad (4.12)$$

де m – деяке число.

Підставимо функцію (4.12) в рівняння Ейлера (4.10").

Оскільки $R'(r) = mr^{m-1}$, а $R''(r) = m(m-1)r^{m-2}$, то дістанемо

$r^2 m(m-1)r^{m-2} + r \cdot mr^{m-1} - \lambda^2 r^m = 0; \quad m(m-1)r^m + mr^m - \lambda^2 r^m = 0$.

Звідси маємо $m(m-1) + m - \lambda^2 = 0; \quad m^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\lambda$.

Тоді при $m_1 = \lambda \Rightarrow R_1(r) = r^{\lambda}$, а при $m_2 = -\lambda \Rightarrow R_2(r) = r^{-\lambda}$.

Одержимо два лінійні незалежні розв'язки, тоді загальний розв'язок рівняння (4.10") має вигляд

$R(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda}$, де C і D – довільні сталі.

Оскільки $\lambda = n$, то для кожного n ми знайшли розв'язки рівняння (4.10"):

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}. \qquad (4.13)$$

Тоді, підставляючи вирази (4.11) і (4.13) в (4.9), дістанемо

$$u_n(r;\varphi) = (A_n cosn\varphi + B_n sinn\varphi)\cdot(C_n r^n + D_n r^{-n}). \qquad (4.14)$$

У випадку, коли $\lambda = 0$, рівняння (4.10') і (4.10") приймуть вигляд

$$\left[\begin{array}{l} \Phi''(\varphi) = 0, \\ r^2 R''(r) + rR'(r) = 0. \end{array}\right.$$

а) $\Phi'(\varphi) = B_0 = const \Rightarrow \Phi(\varphi) = B_0\varphi + A_0$. Оскільки функція $\Phi(\varphi)$ періодична, то $B_0 = 0$. Отже, $\Phi(\varphi) = A_0$;

б) $r(rR''(r) + R'(r)) = 0 \Rightarrow rR''(r) + R'(r) = 0$.

Нехай $R'(r) = p(r)$, то $R''(r) = p'(r) \Rightarrow r\cdot p'(r) + p(r) = 0$;

$$p'(r) = -\frac{p(r)}{r}; \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{p}{r}; \quad \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dr}{r}; \quad \ln|p| = -\ln|r| + \ln D_0;$$

$$p = \frac{D_0}{r} \Rightarrow R'(r) = \frac{D_0}{r}; \quad R(r) = D_0 \ln r + C_0 \qquad (r > 0).$$

Отже, $u_0 = A_0(D_0 \ln r + C_0)$.

Оскільки ми шукаємо скінченний розв'язок в крузі, то в центрі круга (при $r=0$) розв'язки повинні бути скінченними, тому повинно бути, що і $D_0=0$ і $B_0=0$ (бо $\ln r \to \infty$).

Огже, $u_0=C_0 \cdot A_0$, позначимо його через $\frac{a_0}{2}$, тобто $u_0=\frac{a_0}{2}$,

$$u_n=(A_n cosn\varphi+B_n sinn\varphi)\cdot C_n r^n=(a_n cosn\varphi+b_n sinn\varphi)r^n .$$

Оскільки рівняння Лапласа є однорідним, то розв'язком його буде

функція
$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosn\varphi+b_n sinn\varphi)r^n , \qquad (4.15)$$

де a_0, a_n, b_n – довільні сталі.

Підберемо тепер довільні сталі a_n, b_n i $\frac{a_0}{2}$ так, щоб виконувалась крайова умова, а саме $u(a;\varphi)=f(\varphi)$. З рівності (4.15) при $r=a$ матимемо:

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosn\varphi+b_n sinn\varphi)a^n . \qquad (4.16)$$

А це означає, що функція $f(\varphi)$ розкладена в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi;\pi)$, бо період її повинен дорівнювати 2π.

Оскільки розкладання $f(x)$ в ряд Фур'є на $[-\pi;\pi]$ має вигляд

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n cosnx+\beta_n sinnx),$$

де $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$; $a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx$ і $\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx$,

тоді коефіцієнтами ряду Фур'є будуть числа $a_n \cdot a^n$ і $b_n \cdot a^n$, тобто

$$a_n \cdot a^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)cosn\varphi d\varphi ; \quad b_n \cdot a^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)sinn\varphi d\varphi ,$$

звідки $a_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)cosn\varphi d\varphi$, $\quad b_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)sinn\varphi d\varphi$.

Тоді, об'єднавши у формулі (4.15) множники $\frac{1}{a^n}$ з r^n, матимемо

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$

де $A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi$, $A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$, $B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$.

Отже, розв'язком внутрішньої задачі Діріхле для круга буде така функція

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi), \tag{4.17}$$

де $A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi$, $A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$, $B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$

або $A_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\varphi)d\varphi$, $A_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$, $B_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$.

5 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

5.1 Скінченнорізницеві наближення

Спочатку покажемо, як звичайні похідні та частинні похідні замінити скінченнорізницевими похідними.

Запишемо ряд Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 + \ldots$$

або, якщо ввести позначення $x - x_0 = h$ $(x = x_0 + h)$, дістанемо іншу форму запису ряду Тейлора

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \ldots .$$

Для довільного x ряд Тейлора матиме вигляд

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots . \qquad (*)$$

Якщо це розкладання обірвати на другому члені, то дістанемо

$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\cdot h$, звідки матимемо $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.   (5.1)

Вираз, що стоїть в правій частині, називається *правою різницевою похідною,* яка наближає першу похідну функції.

Якщо в ряді Тейлора h замінити на $-h$, то одержимо

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots . \qquad (**)$$

Обмежившись тільки двома першими членами, одержимо

$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)\cdot h$, звідки $f'(x) \approx \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$.   (5.2)

Це наближення є *лівою різницевою похідною.*

Якщо відняти від рівності $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\cdot h$ рівність $f(x-h) \approx f(x) - f'(x)\cdot h$, то дістанемо $f(x+h) - f(x-h) \approx 2f'(x)\cdot h$, звідки $$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \qquad (5.3)$$

Вираз, що стоїть в правій частині, називається *центральною різницевою похідною*, що наближає першу похідну $f'(x)$.

Якщо в рядах Тейлора (*) і (**) залишити на один член більше, то дістанемо наближені рівності

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 \text{ і } f(x-h) \approx f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}h^2.$$

Додаючи почленно ці дві наближені рівності, дістанемо

$f(x+h)+f(x-h) \approx 2f(x)+f''(x)\cdot h^2$, звідки матимемо

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

Ми дістали *центральну різницеву похідну 2-го порядку* для наближення другої похідної $f''(x)$.

Розповсюдимо тепер поняття різницевих похідних для наближення *частинних похідних* функції двох змінних $u(x,y)$.

Запишемо ряд Тейлора для функції $u(x,y)$ за змінною x

$$u(x+h,y)=u(x,y)+u'_x(x,y)\cdot h+\frac{u''_{xx}(x,y)}{2!}h^2+\ldots,$$

$$u(x-h,y)=u(x,y)-u'_x(x,y)\cdot h+\frac{u''_{xx}(x,y)}{2!}h^2-\ldots.$$

Тоді матимемо: $$u'_x(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h},$$

$$u'_x(x,y) \approx \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h}, \quad u'_x(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h},$$

$$u''_{xx}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}.$$

Праві частини цих рівностей, називаються відповідно *правою* та *лівою різницевою похідною* за x, *центральною різницевою частинними похідними* за x *1-го* та *2-го* порядків.

Аналогічно з формул

$$u(x,y+k)=u(x,y)+u'_y(x,y)\cdot k+u''_{yy}(x,y)\cdot\frac{k^2}{2!}+\dots,$$

$$u(x,y-k)=u(x,y)-u'_y(x,y)\cdot k+u''_{yy}(x,y)\cdot\frac{k^2}{2!}+\dots$$

дістанемо такі наближені рівності

$$u'_y(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k},\quad u'_y(x,y)\approx\frac{u(x,y)-u(x,y-k)}{k},$$

$$u'_y(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-u(x,y-k)}{2k},\quad u''_{yy}(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)}{k^2}.$$

В правих частинах цих наближень записані відповідно *права* різницева, *ліва* різницева, *центральна* різницева похідні за змінною у.

5.2 Рівняння Лапласа в скінченних різницях

Основна ідея наближеного методу розв'язування задачі Діріхле основана на заміні частинних похідних в рівнянні Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (5.4) їх скінченнорізницевими наближеннями.

Замінивши частинні похідні, що входять в рівняння Лапласа, відповідними *центральними* різницевими похідними другого порядку, будемо мати

$$\frac{1}{h^2}(u(x-h,y)-2u(x,y)+u(x+h,y))+\frac{1}{k^2}(u(x,y-k)-2u(x,u)+u(x,y+k))=0.$$

У випадку, коли $h=k$, тобто кроки вздовж осі Ox і Oy однакові, попереднє рівняння прийме вигляд

$$\frac{1}{h^2}(u(x-h,y)-2u(x,y)+u(x+h,y))+\frac{1}{h^2}(u(x,y-h)-2u(x,u)+u(x,y+h))=0,$$

$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)=0$. Звідси маємо

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)).\qquad(5.5)$$

Ось який вигляд має рівняння Лапласа на площині при скінченнорізницевих наближеннях.

Зауваження. Користуючись розкладанням функцій $u(x-h,y)$, $u(x+h,y)$, $u(x,y-h)$ і $u(x,y+h)$ в ряд Тейлора, можна показати, що залишковий член R_h формули Тейлора є величиною такого ж порядку малості як h^4, тобто $R_h = 0(h^4)$. Тому точність цього наближеного методу $\Delta = 0(h^2)$.

Отже, формула (5.4) дає можливість наближено знайти значення функції $u(x,y)$ в точці $A(x,y)$ як середнє значення її в сусідніх чотирьох точках $B(x-h,y), C(x+h,y), D(x,y+h)$ і $E(x,y-h)$, при цьому точка $A-$ центр квадрата зі стороною $2h$, а точки B, C, D і E знаходяться на *серединах* його сторін.

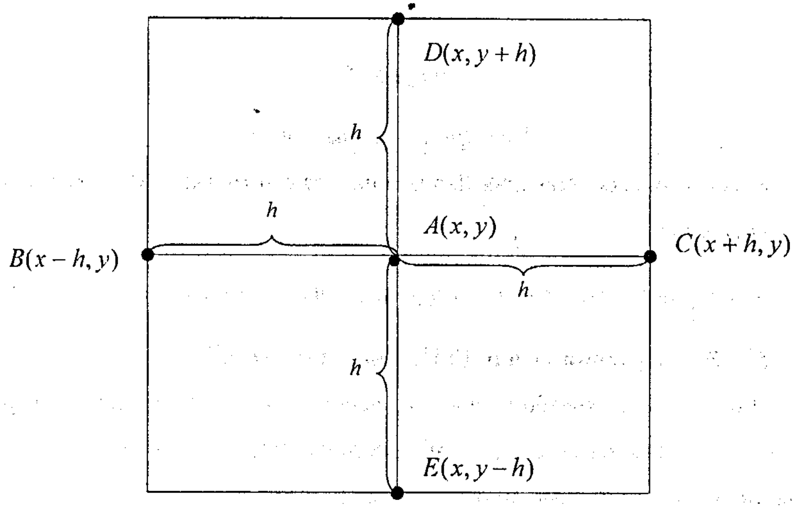


Рисунок 5.1

Це є *перша основна схема*.

Зауваження. Можливі і інші схеми. Зокрема, коли значення функції $u(x,y)$ в точці $A(x,y)$ знаходяться наближено як "середнє значення" в сусідніх точках, що є *вершинами* квадрата зі стороною $2h$, сторони якого паралельні осям Ox і Oy, тобто в точках $B(x-h,y+h), C(x+h,y+h)$, $D(x+h,y-h)$ і $E(x-h,y-h)$.

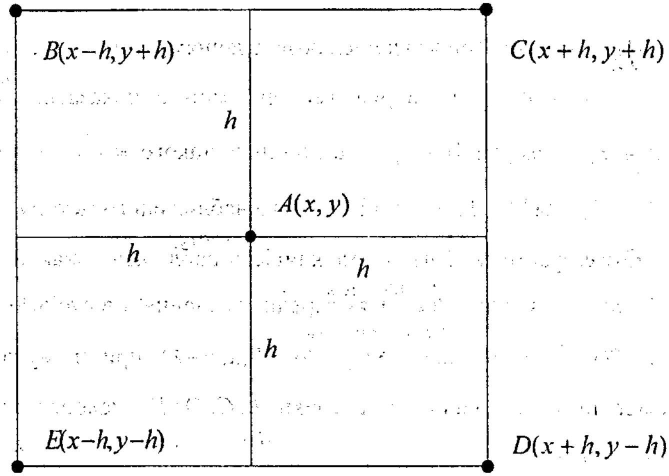


Рисунок 5.2

Це є *друга основна схема.*

В цьому випадку рівняння Лапласа наближено можна замінити *різницевим* рівнянням

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(u(x+h,y-h)+u(x+h,y+h)+u(x-h,y-h)+u(x-h,y+h)).$$

5.3 Розв'язування задачі Діріхле методом сіток

Ідея *методу сіток* або *методу скінченних різниць* для наближеного розв'язку крайових задач для двовимірних диференціальних рівнянь з частинни- ми похідними полягає в наступному:

а) в плоскій області G, в якій шукається розв'язок, *будується сіткова область* G_h, що складається з однакових кліток і наближає дану область G;

б) дане диференціальне рівняння з частинними похідними заміняється у вузлах побудованої сітки відповідним скінченнорізницевим рівнянням;

в) на основі заданих крайових умов визначається значення шуканого розв'язку в межових вузлах області G_h. В результаті цих дій дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши одержану систему скінченнорізницевих рівнянь, для чого треба розв'язати по суті систему

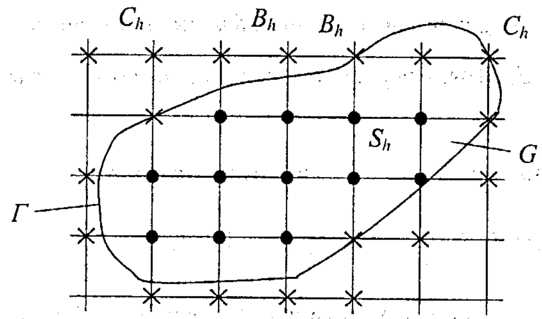


Рисунок 5.3

алгебраїчних рівнянь з великою кількістю невідомих, знаходять значення шуканої функції у вузлах сітки, тобто будемо мати чисельний розв'язок нашої задачі.

Вибір сіткової області G_h здійснюється в залежності від конкретної крайової задачі, але в усіх випадках контур Γ_h сіткової області G_h треба вибирати так, щоб він якомога краще наближав контур Γ_h заданої області G. Сіткова область може складатися із квадратних, прямокутних, трикутних і інших клітин. Від вибору основного розміру клітини h (кроку побудови сітки) залежить величина залишкового члена R_h при заміні диференціального рівняння з частинними похідними різницевим рівнянням. Випадок сіткової області G_h з квадратними клітинами один з найпростіших.

Покажемо застосування методу сіток для побудови наближених розв'язків внутрішньої задачі Діріхле, а саме: знайти функцію $u(x, y)$, що задовольняє рівняння Лапласа $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (5.6)$$

при $(x, y) \in G$ і крайову умову $u\big|_{\Gamma} = f$, (5.2)

тобто $u(P) = f(P)$ при $P \in \Gamma$, де f – задана неперервна функція на контурі Γ. Вибравши крок h квадратної клітини, побудуємо два сімейства прямих

$$x = ih \quad \text{та} \quad y = jh, \qquad (5.8)$$

де i та j приймають цілі значення. Тоді область G покриється сіткою S_h сіткової області G_h. Точки перетину цих прямих називаються *вузлами сітки.*

Координати точок, що є вузлами сітки, можна визначити так:

$$\left[\begin{array}{l} x_i = x_0 + ih, \\ y_j = y_0 + jh, \end{array}\right. \quad \text{де} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5.8'}$$

причому вузол (x_i, y_j) сітки S_h повинен або належати області G, або бути віддаленим від її межі Γ на відстань меншу, ніж h, де відстань міряється або по горизонталі, або по вертикалі.

Вузли сітки S_h називаються *сусідніми*, якщо вони віддалені один від одного в напрямі осі Ox або осі Oy на відстань, що дорівнює кроку сітки h.

Вузол A_h сітки S_h називається *внутрішнім*, якщо він належить області G, а всі чотири сусідні з ним вузли належать сітці S_h; в протилежному випадку вузол називається *межовим*. Внутрішні вузли будемо замальовувавти, а межові вузли будемо позначати *зірочками*. Межові вузли можуть належати області G, а можуть і не належати їй.

Межові вузли розрізняють двох типів: межовий вузол сітки S_h називається вузлом *першого роду*, якщо він має *сусідній внутрішній вузол* сітки; в протилежному випадку межовий вузол називається вузлом другого роду. Так, вузол B_h є межовим вузлом першого роду, а вузол C_h є межовим вузлом другого роду (рисунки 5.3 і 5.4).

Внутрішні вузли і межові вузли першого роду називаються *розрахунковими* точками. Межові вузли другого роду не входять в обчислення, тому вони можуть бути відкинуті.

Відносно сітки S_h будемо вважати, що вона є "зв'язною" множиною розрахункових точок. Це означає, що дві будь-які розрахункові точки можна з'єднати ланцюгом вузлів, кожні два суміжні елементи якого є сусідніми вузлами.

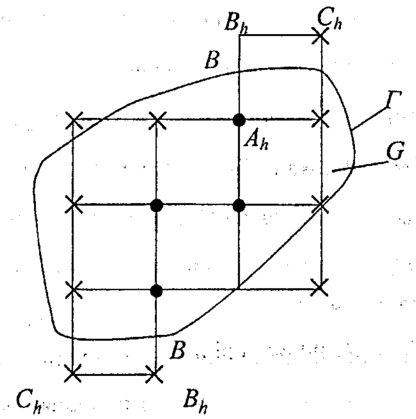


Рисунок 5.4

B_h – межовий вузол першого роду; C_h – межовий вузол другого роду.

Введемо позначення: значення щуканої функції $u(x, y)$ в точках (x_i, y_i), що є вузлами сітки S_h, позначимо через u_{ij}, тобто $u_{ij} = u(x_i, y_j)$.

Тоді для першої основної схеми для кожної *внутрішньої точки* (x_i, y_j) сітки S_h скінченнорізницеве наближення (5.7) рівняння Лапласа запишеться так:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \,, \tag{5.9}$$

де $(x_{i\pm1}, y_{j\pm1})$ – розрахункові точки, (де $i = \pm1, \pm2, ..., j = \pm1, \pm2, ...$).

В межових вузлах першого роду B_h сітки S_h будемо мати, що

$$u(B_h) = u(B) = f(B), \tag{5.10}$$

де B – найближча до B_h точка межі $Г$.

Отже, розв'язки u_{ij} наближаються середнім значенням розв'язку за чотирма сусідніми точками. Ми одержали *систему* лінійних алгебраїчних рівнянь (5.9). Ця система є *неоднорідною,* при цьому число невідомих, тобто число внутрішніх вузлів сітки, збігається з числом рівнянь.

Система (5.9) завжди сумісна і має єдиний розв'язок (доведення цього твердження можна знайти в книзі "Чисельні методи аналізу" авторів Демідович, Марон, Шувалова). Розв'язавши систему (5.9), одержимо наближені значення функції $u(x,y)$ у вузлах сіткової області G_h. Тим самим буде знайдено наближений чисельний розв'язок задачі Діріхле для області G_h. Можна показати, що похибка наближеного розв'язку має порядок $O(h)$.

Якщо вимагається висока точність методу, тоді h треба брати достатньо малим, а це означає, що розрахункових точок буде досить багато.

5.4 Метод сіток для рівнянь параболічного типу

Розглянемо рівняння теплопровідності однорідного теплоізольованого стержня довжиною l, а саме: знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0<x<l$, $t>0$), якщо $u(0,t)=g_1(t)$, $u(l,t)=g_2(t)$ при $t>0$, $u(x,0)=f(x)$ при $0\le x\le l$.

Для простоти викладок і запису формул будемо вважати, що $a=1$, тобто розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.11}$$

До такого виду завжди можна прийти, якщо ввести часову змінну за формулою $\tau=a^2t$.

Будемо розв'язувати цю задачу методом сіток. В півсмузі $t\ge 0$ і $0\le x\le l$ побудуємо прямокутну сітку: $\begin{cases} x=ih, (i=0,1,2,3,...,n) \\ t=jk, (j=0,1,2,3,...) \end{cases}$, де $h=\frac{l}{n}$ (n ціле) – крок вздовж осі Ox і k – крок вздовж осі Ot. Введемо позначення $x_i=ih$, $t_j=jk$, $u_{ij}=u(x_i,t_i)$. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k}$ – це права скінченнорізницева похідна за t,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$ – це є центральна скінченнорізницева

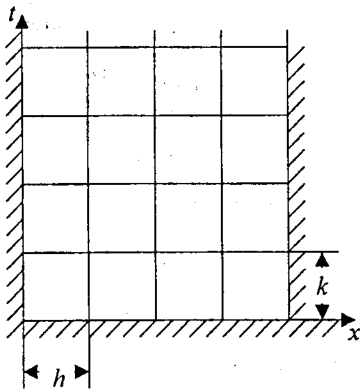


Рисунок 5.5

похідна за x 2-го порядку, то рівняння теплопровідності (5.11) в скінченних різницях прийме вигляд

$$\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} \approx \frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}. \tag{5.12}$$

Для внутрішнього вузла сітки (x_i, t_j) це рівняння запишеться так

$\dfrac{u_{i,t+1}-u_{ij}}{k} = \dfrac{u_{i,t+1}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}$, звідки маємо, що

$u_{i,j+1} = u_{ij} + \dfrac{k}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j})$. Якщо ввести позначення $\dfrac{k}{h^2} = \sigma$, (5.13)

то це рівняння запишеться так $u_{i,j+1} = \sigma u_{i+1,j}(1-2\sigma)+\sigma u_{i-1,j}$. (5.14)

З цієї формули видно, що, знаючи значення функції $u(x,t)$ в вузлах j-го рядка $t = jk$, можна обчислити значення функції $u(x,t)$ в точках наступного (j+1)-го рядка за такою схемою:

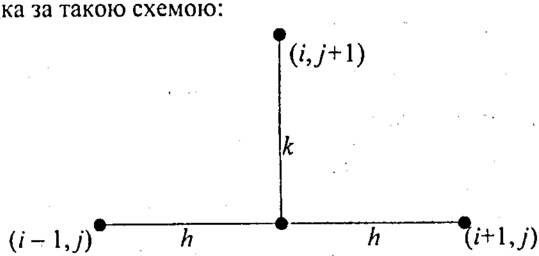


Рисунок 5.6

Отже, обчислення ведуться у явному вигляді, використовуються чотири сусідні вузли, причому $u_{i,j+1}$ одержуємо у явному вигляді через значення функції в трьох вузлах $(x_{i+1},t_i),(x_i,t_j)$ і (x_{i-1},t_j) попереднього j-го рядка. *Ця схема називається явною схемою.*

Значення $u_{ij}=u(x_i,t_i)$ обчислюють так. Спочатку обчислюють значення функції $u(x,t)$ у вузлах початкового рядка $t=0$, користуючись початковою умовою $u(x,0)=f(x)$; при $i=0,1,2,\ldots,n$ будемо мати $u_{i0}=u(x_i,0)=f(x_i)$. Користуючись крайовими умовами $u(0,t)=g_1(t)$ і $u(l,t)=g_2(t)$, для $j=0,1,2,\ldots$ будемо мати $u_{oj}=g_1(t_j)$, $u_{nj}=g_2(t_j)$.

А далі за формулою (5.14) послідовно обчислюємо значення функції $u(x,t)$в усіх вузлах відповідно 1-го, 2-го, 3-го і т.д. рядків, тобто $u_{j1}=u(x_i,t_i)$; $u_{j2}=u(x_i,t_2)$; $u_{j3}=u(x_i,t_3)$; для =1,2,..., $n-1$; таким чином, знаходимо значення функції $u(x,t)$ в усіх вузлах вказаної півсмуги.

Постає важлива *проблема*: як розумно вибрати величину σ, виходячи з вимоги, щоб похибка методу при заміні диференціального рівняння (5.11) скінченнорізницевим рівнянням (5.12), була *найменшою*?

Зауваження. При використанні скінченнорізницевої схеми для розв'язування крайової задачі важливим є питання стійкості такої схеми. Під цим розуміють таке: скінченнорізницева схема називається стійкою, якщо малі похибки, що допускаються в процесі розв'язування згасають або в усякому разі залишаються малими при необмеженому зростанні номера рядка. В протилежному випадку схема називається *нестійкою*. Зрозуміло, що нестійка схема протипоказана, оскільки неминучі незначні похибки, наприклад, похибки округлення, будуть приводити до результатів, що сильно відрізняються від точного розв'язку.

В книзі Самарського "Вступ в чисельні методи" та в підручнику "Чисельні методи аналізу" авторів Демідович, Марон, Шувалова доводиться, що явна схема (5.14) є *стійкою*, якщо $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$. Зокрема, при

$\sigma = \frac{1}{2}$ з формули (5.14) матимемо $u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$, (5.15)

при цьому, оскільки $\sigma = \frac{k}{h^2}$, маємо, що $k = \frac{h^2}{2}$ і використовується всього три сусідні вузли (рис. 5.7).

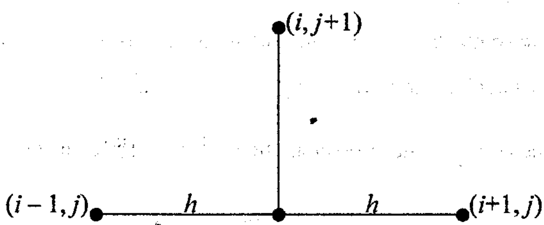


Рисунок 5.7

Похибка наближення рівняння (5.11) рівнянням (5.15) одного порядку малості, що і h^2, тобто $\Delta = O(h^2)$. При якому ж σ, де $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$, похибка наближення буде найменшою? В цих же підручниках доводиться, що *найменша* похибка схеми буде при $\sigma = \frac{1}{6}$. Ця похибка буде порядку $O(h^4)$. Отже, схема в цьому випадку вибирається так: задаються цілим n, знаходять $h = \frac{l}{n}$ – це крок по осі Ox, знаходять $k = \frac{h^2}{6}$ – крок по осі Ot.

Наприклад, при $h = 0.1$ (точність методу $O(10^{-4}$)) маємо $k = \frac{1}{600}$. Отже, для описання процесу розповсюдження тепла в стержні за одиницю часу треба скласти таблицю значень температури u, що містить 600 рядків, тоді як при $\sigma = \frac{1}{2}$ маємо всього 200 рядків. При $\sigma = \frac{1}{6}$ матимемо

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,j} + u_{i,j} + u_{i-1,j}) \text{ де } h = \frac{l}{n}, \ k = \frac{h^2}{6}. \tag{5.16}$$

5.5 Неявні різницеві схеми

В неявних різницевих схемах $u_{i,j+1}$ вже не виражаються в явному вигляді через значення функції $u(x,t)$ на попередніх рядках. В неявних схемах вже потрібно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Перевага неявних схем перед явними полягає в тому, що в неявних схемах крок сітки можна вибирати достатньо великим, не побоюючись, що похибки округлення "знищать" смисл розв'язку. Розглянемо іншу стійку схему, для якої відношення $\sigma = \frac{k}{h^2}$ не є обмеженим зверху (адже в неявних схемах вимагалось, щоб величина σ задовольняла умову $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$), тобто крок $k = \Delta t$ за часовою координатою може бути вибраним достатньо великим.

В рівнянні теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$ замінимо лівою різницевою похідною за t , а саме: $u_t'(x,t) \approx \frac{u(x,t) - u(x,t-k)}{k}$.

Тоді рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ заміниться таким наближенням в скінченних різницях $\frac{u(x,t) - u(x,t-k)}{k} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$, яке в вузлах запишеться так: $\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$. Звідси маємо, що $u_{ij} - u_{i,j-1} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$; вводячи позначення $\frac{k}{h^2} = \sigma$, матимемо

$$u_{i,j-1} = -\sigma u_{i+1,j} + (1+2\sigma)u_{i,j} - \sigma u_{i-1,j}, \tag{5.17}$$

де $i = 0,1,2,\ldots, n$; $j = 0,1,2,\ldots$. За цією формулою ми виразили значення функції $u(x,t)$ у вузлах ($j - 1$)-го рядка сітки через значення цієї функції у вузлах наступного j-го рядка в трьох вузлах $(x_{i+1},t_j),(x_i,t_j)$ і (x_{i-1},t_j) за такою схемою

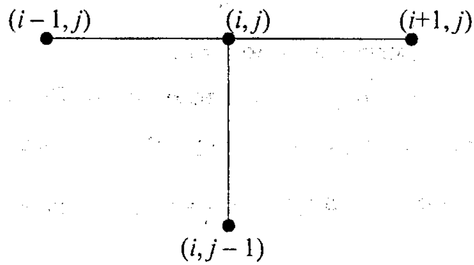


Рисунок 5.8

Визначивши за початковими умовами $u(x,0)=f(x)$ значення функції $u(x,t)$ у вузлах нульового рядка (t = 0), тобто числа $u_{i0}=f(x_i)$ для i=1,2,..., n, а за (КУ) $u_{oj}=g_1(t_1)$, $u_{nj}=g_2(t_j)$ для j = 0,1,2,... складемо систему рівнянь (5.7) для $j=1$ при $i=1,2,\ldots,n-1$. Розв'язавши цю систему (n – 1) рівнянь, визначивши цим самим значення функції $u(x,t)$ у (n – 1) вузлах 1-го ряду, перейдемо до складання системи рівнянь для 2-го ряду і т.д. В результаті послідовного складання і розв'язування систем рівнянь, ми визначимо значення функції в усіх внутрішніх вузлах сітки. Ці системи можна розв'язувати, наприклад методом ітерацій або методом Гаусса. Зокрема, при $\sigma=1$ матимемо

$$u_{i,j}=\frac{1}{3}(u_{i-1,j}+u_{i,j-1}). \qquad (5.18)$$

5.6 Метод сіток для рівнянь гіперболічного типу

Розглянемо рівняння вільних коливань однорідної струни довжиною l

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при } 0<x<l \text{ і } t\geq 0. \qquad (5.19)$$

Будемо шукати його розв'язок при заданих крайових і початкових умовах, а саме:

$$u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t) \text{ при } t\geq 0 \qquad (5.20)$$

$$\text{і } u(x,0)=f(x),\ u'_t(x,0)=\varphi(x), \qquad (5.21)$$

де $f(x)$ і $\varphi(x)$ – задані функції при $0\leq x\leq l$.

Для простоти викладок припустимо, що $a = 1$, тоді рівняння (5.19) запишеться так
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l,\ t \geq o) \qquad (5.22)$$
(цього легко можна досягти заміною $\tau = at$).

Розв'яжемо цю крайову задачу методом сіток. Як і у випадку рівнянь параболічного типу, побудуємо в півсмузі $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t < \infty$ прямокутну сітку $x_i = ih$, $t_i = jk$, де $i = 0,1,2,\ldots, n$, $j = 0,1,2,\ldots$, вибравши $h = \frac{l}{n}$, де n – ціле число. Замінивши у вузлах сітки частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що входять в рівняння (5.22), центральними різницевими похідними 2-го порядку за t і за x, дістанемо таке різницеве рівняння
$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}.$$
У вузлах сітки (x_i, t_j) ці рівняння запишуться так
$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}. \qquad (5.22')$$

Введемо позначення
$$\lambda = \frac{k}{h}, \qquad (5.23)$$
тоді з рівняння (5.22′) матимемо
$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \lambda^2(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad \text{або}$$
$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \qquad (5.24)$$
де $\lambda = \frac{k}{h}$; $i = 0,1,2,\ldots,n$; $j = 0,1,2,\ldots$.

Отже, значення функції $u(x,t)$ у вузлі (x_i, t_{j+1}) $(j+1)$-го рядка обчислюється в явному виді як середнє значення функції у вузлах (x_i, t_j), (x_{i+1}, t_j), (x_{i-1}, t_j) та (x_i, t_{j-1}) двох попередніх рядків, тобто при обчисленні використовується така схема

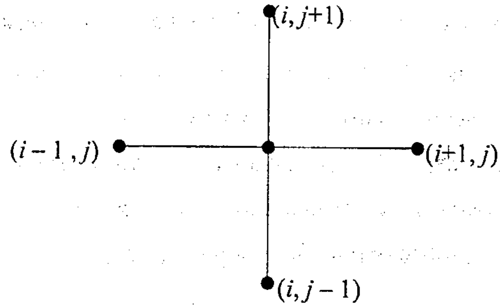


Рисунок 5.9

Як же розпочати обчислювальний процес? Для початку обчислень за формулою (5.24) також необхідно знати значення функції $u(x,t)$ у вузлах двох попередніх рядків, в той час як початкові умови (5.21) задають значення функції $u(x,t)$ лише на *нульовому* рядку $j = 0$, а саме: $u_{i0} = f(x_i)$ для $i = 1,2,\ldots, n-1$ (для $i = 0$ та $i = n$ використовуються крайові умови (5.20)). Звідки взяти значення функції $u(x,t)$ ще на одному рядку? Якщо використати другу з початкових умов $u'_t(x,0) = \varphi(x)$, то значення функції $u(x,t)$ можна визначити на *фіктивному* рядку з номером $j = -1$. Для цього замінимо частинну похідну $u'_t(x,t)$ *лівою* різницевою похідною за t за формулою $u'_t(x,t) \approx \dfrac{u(x,t)-(u(x,t-k)}{k}$. Тоді, враховуючи те, що $u'_t(x,0) = \varphi(x)$, при $j = 0$ будемо мати $\dfrac{u_{i0} - u_{i,-1}}{k} = \varphi(x_i)$, звідки

$$u_{i,-1} = u_{i0} - k\varphi(x_i), \tag{5.25}$$

де $i = 0,1,2,\ldots, n$.

Крайові умови (5.20) використовуються для знаходження значень u_{0j} та u_{nj} , а саме: $u_{0j} = g_1(ik)$, $u_{nj} = g_2(k)$ для j=0,1,2,… .

Знаючи значення функції $u(x,t)$ у вузлах рядків з номерами $j = 0$ та

$j=-1$, можна знайти значення функції у вузлах 1-го рядка (j=1), користуючись формулами (5.24). Продовжуючи цей процес далі при j=2, j=3 і т.д., знаходять значення функції $u(x,t)$ в усіх вузлах сітки.

Зауваження. При $\lambda \le 1$ ця явна схема *стійка*, процес є збіжним, а крок по осі Ot вибирають з умови, що $k \le h$. При $\lambda \ge 1$ схема *нестійка*. Зокрема, при $\lambda = 1$, тобто при $k = h$, з формул (5.24) маємо

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1}.$$

6 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

ЗАНЯТТЯ №1

6.1 Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та зведення їх до канонічного вигляду

Лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку називається рівняння

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G, \qquad (6.1)$$

де $u=u(x,y)$ – шукана функція двох змінних x і y; A, B, C, D, E, F і G – задані функції змінних x і y або задані числа.

Вираз B^2-AC називається *дискримінантом* рівняння. В залежності від його знаку ДРЧП відноситься до одного із трьох типів: а) якщо $B^2-AC>0$ – до *гіперболічного* типу; б) якщо $B^2-AC=0$ – до *параболічного* типу; в) якщо $B^2-AC<0$ – до *еліптичного* типу. Тип лінійного ДРЧП є його важливою особливістю і зберігається при будь-якому *невиродженому перетворенні*

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y). \qquad (6.2)$$

Звичайне диференціальне рівняння

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0 \qquad (6.3)$$

називається *рівнянням характеристик* ДРЧП (6.1).

Загальні інтеграли рівняння (6.3) використовуються для спрощення лінійних ДРЧП, тобто для зведення їх до *канонічного* вигляду.

Для рівнянь *гіперболічного* типу рівняння (6.3) має два *різні загальні інтеграли* $\varphi(x,y)=C_1$ і $\psi(x,y)=C_2$. Тоді якщо ліві частини цих загальних інтегралів використати у формулах (6.2), то ДРЧП зведеться до канонічного вигляду *гіперболічного* типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F_1(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}). \quad (6.4)$$

Для рівняння *параболічного* типу обидва загальні інтеграли рівняння (6.3) збігаються, тобто існує лише один загальний інтеграл $\varphi(x,y) = C$. В цьому випадку треба зробити заміну $\xi = \varphi(x,y)$, а для $\eta = \psi(x,y)$ взяти будь-яку функцію $\psi(x,y)$, лінійно незалежну з функцією $\varphi(x,y)$. Після такої заміни рівняння зведеться до *канонічного* вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F_2(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}). \quad (6.5)$$

Для рівняння *еліптичного* типу загальні інтеграли рівняння (6.3) є комплексноспряженими $\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1$ та $\varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2$. Тоді за допомогою підстановки $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ рівняння (6.1) зведеться до *канонічного* вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F_3(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}). \quad (6.6)$$

Задача 1. Встановити тип рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$ і звести його до канонічного вигляду.

Розв'язування. Оскільки $A = 1$, $2B = -1$, і $C = 0$, то $B^2 - AC = \frac{1}{4}$. Отже, це рівняння відноситься до гіперболічного типу. Складемо рівняння характеристик $Ady^2 - 2Bdydx + Cdx^2 = 0$. Це буде $dy^2 + dydx = 0$ або $(y')^2 + y' = 0$, звідки маємо $y' = 0$ або $y' = -1$. Тоді $y = C_1$ та $y = -x + C_2$. Отже, загальними інтегралами цього рівняння є $y = C_1$ та $x + y = C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Зробимо заміну змінних $\xi = y$, $\eta = x + y$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0; \frac{\partial\xi}{\partial y} = 1; \frac{\partial\eta}{\partial x} = 1$ і $\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1$. Тоді $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} =$

$$= \frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial\eta}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Тоді рівняння запишеться так: $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$ або $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$

Це і є канонічний вигляд даного рівняння.

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$

Задача 2. Встановити тип рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}=0$ та звести його до канонічного вигляду.

Розв'язування. З рівняння маємо, що $A=1$, $B=-1$, $C=2$, тоді $B^2-AC=-1$. Отже, це рівняння еліптичного типу. Складемо рівняння характеристик (6.3) $dy^2+2dydx+2dx^2=0$ або $(y')^2+2y'+2=0$, його розв'язками є $y=-1\pm i$, звідки $y=(-1\pm i)\ x+C \Rightarrow y=(-1+i)x+C$ *або* $y=(-1-i)\ x+C$. Отже, $y+x-x\,i=C_1, y+x+x\,i=C_2$ – загальні інтеграли рівняння. Тоді $\varphi(x,y)=x+y$, $\psi(x,y)=x$. Зробимо заміну змінних за формулами $\xi=x+y$, $\eta=x$. Оскільки $\frac{\partial\xi}{\partial x}=1$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}=1$, $\frac{\partial\eta}{\partial x}=1$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}=0$, то матимемо $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}.$$

Тоді рівняння прийме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-5\frac{\partial u}{\partial\xi}-5\frac{\partial u}{\partial\eta}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-5\frac{\partial u}{\partial \xi}-5\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-5\frac{\partial u}{\partial \xi}-5\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$

Задача 3. Встановити тип рівняння $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+$ $+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ та звести його до канонічного вигляду.

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}y+\frac{\partial u}{\partial \xi}=$*Розв'язування.* Оскільки $A=x^2, B=-xy$ і $C=y^2$, то $B^2-AC=(-xy)^2-x^2y^2=0$. Отже, це рівняння параболічного типу. Складемо рівняння характеристик (6.3) $x^2dy^2+2xydydx+y^2dx^2=0$ або $(xdy+ydx)^2=0$, звідки $xdy+ydx=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0;$ $\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{x}=0;$ $ln|y|+ln|x|=lnC \Rightarrow xy=C$ – це загальний інтеграл ДР. Тоді $\xi=xy$, а функція η вибирається довільно, але так, щоб функція ξ і η були лінійно незалежними, наприклад $\eta=y$. Тоді $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}y+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 0=\frac{\partial u}{\partial \xi}y;$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}x+\frac{\partial u}{\partial \eta};\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}y+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}y+\frac{\partial u}{\partial \xi}=$$

$=xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi};$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$. Підставивши ці вирази в дане рівняння, будемо мати $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$

Відповідь: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$

Встановити тип та звести до канонічного вигляду рівняння

Задача 4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0;\quad \xi=x+y;\quad \eta=3x+y.$

Задача 5. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0;\quad \xi=\dfrac{y}{x};\quad \eta=y.$

Задача 6. $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{1}{2\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0;\quad \xi=y^2;\quad \eta=x^2.$

ЗАНЯТТЯ №2

6.2 Розв'зування однорідного рівняння теплопровідності при нульових крайових умовах

Постановка задачі. Знайти розв'язок рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що задовольняє крайові умови $u(0,t)=u(l,t)=0$ і початкову умову $u(x,0)=\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – задана кусково-неперервна функція при $0\le x\le l$.

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t}\sin\dfrac{\pi n}{l}x$,

де $B_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}x\,dx.$

Задача 1. Розв'язати рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $(0<x<1,\ t>0)$, якщо $u(0,t)=u(l,t)=0$ і $u(x,0)=\sin\pi x-\dfrac{1}{3}\sin 3\pi x+\dfrac{1}{5}\sin 5\pi x.$

Розв'язування. За умовою задачі $l=1,\quad a=1;$

$\varphi(x)=\sin\pi x-\dfrac{1}{3}\sin 3\pi x+\dfrac{1}{5}\sin 5\pi x.$ Оскільки функція $\varphi(x)$ уже розкладена в ряд Фур'є за синусами, то маємо, що $B_1=1,\ B_2=0,\ B_3=\dfrac{1}{3},\ B_4=0,\ B_5=\dfrac{1}{5},$

і $B_k = 0$ при всіх $k \geq 0$. Тоді, домноживши вказані гармоніки на відповідну експоненту, будемо мати $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} sin\pi x - \frac{1}{3} e^{-9\pi^2 t} sin3\pi x + \frac{1}{5} e^{-25\pi^2 t} sin5\pi x.$

Задача 2. Розв'язати рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < 4, \quad t > 0)$, якщо

$$u(0,t) = u(4,t) = 0 \quad і \quad u(t,0) = \begin{cases} x & при \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x & при \quad 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Розв'язування. За умовою задачі $a = 1$, $l = 4$ і

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & при \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x & при \quad 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді ряду $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(\frac{\pi n}{4})^2 t} sin\frac{\pi n}{4} x,$

де $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) sin\frac{\pi n}{l} x dx$. При $l = 4 \Rightarrow B_n = \frac{1}{2} \int_0^4 \varphi(x) sin\frac{\pi n}{4} x dx = \frac{1}{2} (\int_0^2 x sin\frac{\pi n}{4} x dx +$ $+ \int_2^4 (4 - x) sin\frac{\pi n}{4} x dx)$. Кожен із цих інтегралів знайдемо за формулою інтегрування частинами $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

$$I_1 = \int_0^2 x sin\frac{\pi n}{4} x dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = sin\frac{\pi n}{4} x dx. & v = -\frac{4}{\pi n} cos\frac{\pi n}{4} x. \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} x cos\frac{\pi n}{4} x \Big|_0^2 + \frac{4}{\pi n} \int_0^2 cos\frac{\pi n}{4} x dx = -\frac{8}{\pi n} cos\frac{\pi n}{2} + \frac{16}{\pi^2 n^2} sin\frac{\pi n}{4} x \Big|_0^2 = -\frac{8}{\pi n} cos\frac{\pi n}{2} +$$
$$+ \frac{16}{\pi^2 n^2} sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$I_2 = \int_2^4 (4 - x) sin\frac{\pi n}{4} x dx = \begin{bmatrix} u = 4 - x, & du = -dx, \\ dv = sin\frac{\pi n}{4} x dx. & v = -\frac{4}{\pi n} cos\frac{\pi n}{4} x. \end{bmatrix} = -\frac{4}{\pi n} (4 - x) cos\frac{\pi n}{4} x \Big|_2^4 -$$
$$- \frac{4}{\pi n} \int_2^4 cos\frac{\pi n}{4} x dx = \frac{8}{\pi n} cos\frac{\pi n}{2} - \frac{16}{\pi^2 n^2} sin\frac{\pi n}{4} x \Big|_2^4 = \frac{8}{\pi n} cos\frac{\pi n}{2} - \frac{16}{\pi^2 n^2} sin\pi n + \frac{16}{\pi^2 n^2} sin\frac{\pi n}{2} =$$
$$= \frac{8}{\pi n} cos\frac{\pi n}{2} + \frac{16}{\pi^2 n^2} sin\frac{\pi n}{2}.$$

Тоді $B_n = \frac{1}{2}(-\frac{8}{\pi n}cos\frac{\pi n}{2} + \frac{16}{\pi^2 n^2}sin\frac{\pi n}{2} + \frac{8}{\pi n}cos\frac{\pi n}{2} + \frac{16}{\pi^2 n^2}sin\frac{\pi n}{2}) = \frac{16}{\pi^2 n^2}sin\frac{\pi n}{2}$.

Отже, $u(x,t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}sin\frac{\pi n}{2}e^{-(\frac{\pi n}{4})^2 t}sin\frac{\pi n}{4}x.$

Задача 3. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < 1,\ \ t > 0)$, якщо $u(0,t) = u(1,t) = 0$ і $u(x,0) = x - x^2$ при $0 \le x \le 1$.

Відповідь: $u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}sin(2n-1)\pi x.$

Задача 4. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < 2,\ \ t > 0)$, якщо $u(0,t) = u(2,t) = 0$ і $u(x,0) = sin\pi x + \frac{1}{6}sin2\pi x.$

Задача 5. Тонкий однорідний теплоізольований стержень довжиною l має початкову температуру $f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$. Кінці стержня підтримуються при нульовій температурі. Визначити температуру стержня в будь-який момент часу $t > 0$.

Відповідь: $u(x,t) = \frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{l^2}}sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

Задача 6. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<1, t>0)$, якщо $u(0,t) = u(1,t) = 0$ і $u(x,0) = 2sin2\pi x - \frac{1}{9}sin4\pi x + \frac{1}{7}sin6\pi x.$

Відповідь: $u(x,t) = 2e^{-4\pi^2 t}sin2\pi x - \frac{1}{3}e^{-16\pi^2 t}sin4\pi x + \frac{1}{7}e^{-36\pi^2 t}sin6\pi x.$

Задача 7. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < 4,\ \ t > 0)$, що задовольняє умови $u(0,t) = u(4,t) = 0$ і $u(x,0) = \begin{cases} x & при\ \ 0 \le x \le 2, \\ 4 - x & при\ \ 2 < x \le 4. \end{cases}$

Відповідь: $u(x,t)=\dfrac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{4}}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{4}.$

Задача 8. Знайти розв'язок рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

якщо $u(0,t)=u(8,t)=0$ і $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, & 0\le x\le 4,\\ 8-x, & 4<x\le 8.\end{cases}$

Відповідь: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{6}{\pi n}\cos\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{20}{\pi^2 n^2}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)e^{-\left(\frac{3\pi n}{8}\right)^2 t}\sin\dfrac{\pi n}{8}x.$

ЗАНЯТТЯ №3

6.3 Розв'язування неоднорідного рівняння теплопровідності при ненульових крайових умовах

Постановка задачі. Знайти розв'язок рівняння

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$, $(0<x<l;\ t>0)$, якщо

(КУ) $u(0,t)=u(l,t)=0$, $0\le t<\infty$

(ПУ) $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le l.$

Метод розв'язування. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, де $v(x,t)$ та $w(x,t)$ є відповідно розв'язками таких задач:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$,

(КУ) $v(0,t)=v(l,t)=0$,

(ПУ) $v(x,0)=\varphi(x)$

та

(ДРЧП) $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x,t)$,

(КУ) $w(0,t)=w(l,t)=0$,

(ПУ) $w(x,0)=0$.

Перша з цих задач розв'язується вже відомим методом Фур'є відокремлення змінних. Розв'язок останньої задачі шукаємо у вигляді:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де $T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau$, де $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)sin\frac{\pi n}{l}xdx$.

Задача 1. Знайти розв'язок рівняння

(ДРЧП) $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<4$ і $0<t<\infty$,

(КУ) $u(0,t)=2$, $u(4,t)=2t$, $t>0$,

(ПУ) $u(x,0)=\frac{x}{2}-1$, $0<x<4$.

1. Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+g_1(t)+(g_2(t)-g_1(t))\frac{x}{e},$$

де $g_1(t)=2$; $g_2(t)=2x$; $\varphi(x)=x-1$; $l=4$; $a=3$.

Тоді $u(x,t)=v(x,t)+2+(2t-2)\frac{x}{4}$; $u(x,t)=v(x,t)+2+\frac{1}{2}x(t-1)$. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, то ДРЧП зведеться до такого $\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{x}{2}=9\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v}{\partial t}=9\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{x}{2}$.

Скористаємося початковими умовами, матимемо $u(x,0)=v(x,0)+2-\frac{x}{2}$, звідки $v(x,0)=x-3$. Отже, дана задача зведеться до такої задачі:

(ДРЧП) $\frac{\partial v}{\partial t}=9\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{x}{2}$; $0<x<4$, $t>0$,

(КУ) $v(0,t)=v(4,t)=0$ при $t>0$,

(ПУ) $v(x,0)=x-3$ при $0\le 4\le x$.

2. Цю задачу розв'язуємо підстановкою:

$$v(x,t)=s(x,t)+w(x,t),$$

де функції $s(x,t)$ і $w(x,t)$ є розв'язками таких двох задач:

а) (ДРЧП) $\dfrac{\partial s}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}$,   б) $\dfrac{\partial w}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{x}{2}$,

(КУ) $s(0,t)=0$, $w(0,t)=0$,

$s(4,t)=0$, $w(\varphi,t)=0$,

(ПУ) $v(x,0)=x-3$ $w(x,0)=0$.

б) $s(x,t)=\sum\limits_{n=l}^{\infty}B_n e^{-\left(\frac{\pi nx}{l}\right)^2 t}\sin\dfrac{\pi n}{l}x$,

де $B_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx$. Оскільки $\varphi(x)=x-3$, то

$$B_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^4(x-3)\sin\frac{\pi n}{4}xdx=\begin{bmatrix}u=x-3\ ;\ du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi n}{4}xdx\ ;\ v=-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}(x-3)\cos\frac{\pi n}{4}\cos\frac{\pi n}{4}x\Big|_0^4+\frac{4}{\pi n}\int\limits_0^4\cos\frac{\pi n}{4}xdx\right)=-\frac{2}{\pi n}((-1)^n+3).$$

Тоді $s(x,t)=-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}((-1)^n+3)\sin\dfrac{\pi n}{4}x$.

в) другу задачу розв'язуємо так:

$w(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\dfrac{\pi n}{4}x$, де $T_n(t)=\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau$,

$f_n(t)=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx$. Оскільки $f(x,t)=-\dfrac{x}{2}$, то

$$f_n(t)=\frac{2}{4}\int\limits_0^4\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi n}{4}xdx=-\frac{1}{4}\int\limits_0^4 x\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\begin{bmatrix}u=x;\ du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi n}{4}xdx;\ v=-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}x\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{\pi n}x\cos\frac{\pi n}{4}x\Big|_0^4+\frac{4}{\pi n}\int\limits_0^4\cos\frac{\pi n}{4}xdx\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{\pi n}4\cos\pi n+\left(\frac{4}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi n}{4}x\Big|_0^4\right)=(-1)^n\frac{4}{\pi n}.$$

Тоді $T_n(t)=\int\limits_0^t(-1)^n\dfrac{4}{\pi n}e^{-\left(\frac{\pi n3}{4}\right)^2(t-\tau)}d\tau=(-1)^n\dfrac{4}{\pi n}\left(\dfrac{4}{3\pi n}\right)e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2(t-\tau)}\Bigg|_0^t=$

$$=(-1)^n\frac{4^3}{3^2\pi^3n^3}\left(1-e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2t}\right).$$

Тоді $w(x,t)=\dfrac{4^3}{3^2}\dfrac{64}{9\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^3}\left(1-e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2t}sin\dfrac{\pi n}{4}\right).$

г) отже, $v(x,t)=s(x,t)+w(x,t)=-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left((-1)^n+3\right)sin\dfrac{\pi n}{4}x+$

$$+\frac{64}{9\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}\left(1-e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2t}\right)sin\frac{\pi n}{4}x.$$

$$u(x,t)=2+\frac{x(t-1)}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left((-1)^n+3\right)sin\frac{\pi n}{4}x+$$

$$+\frac{64}{9\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}\left(1-e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2t}\right)sin\frac{\pi n}{4}x.$$

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}\quad(0<x<4,\ t>0)$, якщо $u(0,t)=cos\dfrac{t}{2},\ u(4,t)=0\quad(t>0)$,

$u(x,0)=x$ при $0\le x\le 4$.

Розв'язування. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$u(x,t)=v(x,t)+g_1(t)+(g_2(t)-g_1(t))\dfrac{x}{l}$. Оскільки $g_1(t)=cos\dfrac{t}{2}$, $g_2(t)=0$, $l=4$, $a=3$, то $u(x,t)=v(x,t)+cos\dfrac{t}{2}\dfrac{4-x}{4}$. Перейдемо в ДРЧП до функції $v(x,t)$: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{1}{2}sin\dfrac{t}{2}\dfrac{4-x}{4}$, $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}$. Тоді матимемо

(ДРЧП) $\qquad\dfrac{\partial v}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}+\dfrac{1}{2}sin\dfrac{t}{2}\dfrac{4-x}{x}$,

(КУ) $\qquad v(0,t)=v(4,t)=0$ і

(ПУ) $\qquad v(x,0)=\frac{5}{4}x-1$.

Цю задачу будемо шукати підстановкою $v(x,t)=s(x,t)+w(x,t)$, де

а) функція $s(x,t)$ є розв'язком такої задачі

(ДРЧП) $\qquad \frac{\partial s}{\partial t}=9\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (0<x<4,\ t>0)$,

(КУ) $\qquad s(0,t)=s(4,t)=0$ при $t>0$,

(ПУ) $\qquad s(x,0)=\frac{5}{4}x-1$.

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді ряду

$$s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де $B_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ при $l=4 \quad \varphi(x)=\frac{5}{4}x-1$. Знаходимо

$$B_n=\frac{1}{2}\int_0^4\left(\frac{5}{4}x-1\right)\sin\frac{\pi n}{4}x\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=\frac{5}{4}x-1 & du=\frac{5}{4}dx \\ dv=\sin\frac{\pi n}{4}x\,dx & v=-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}x \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\left(\frac{5}{4}x-1\right)\cos\frac{\pi n}{4}x\Big|_0^4+\frac{5}{4}\frac{4}{\pi n}\int_0^4\cos\frac{\pi n}{4}x\,dx\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}(4\cos\pi n+1)+\frac{5}{4}\frac{16}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{4}x\Big|_0^4\right)=-\frac{2}{\pi n}(4(-1)^n+1).$$

Тоді $s(x,t)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4(-1)^n+1)e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{4}x$.

б) функцію $w(x,t)$ шукатимемо у вигляді $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$, де

$$T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau \text{, де } a=3,$$

$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$, при $l=4$ матимемо

$$f_n(t)=\frac{1}{2}\int_0^4 \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)\sin\frac{\pi n}{4}x\,dx=\frac{1}{4}\sin\frac{t}{2}\int_0^4\left(1-\frac{x}{4}\right)\sin\frac{\pi n}{4}x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=1-\frac{x}{4}\ ;\ du=-\frac{1}{4}dx \\ dv=\sin\frac{\pi n}{4}dx\ ;\ v=-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{4}x \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\sin\frac{t}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\left(1-\frac{x}{4}\right)\cos\frac{\pi n}{4}x\Big|_0^4-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi n}\int_0^4\cos\frac{\pi n}{4}x\,dx\right)=\frac{1}{4}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\tau}{2}e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{\pi n}e^{-\frac{9\pi^2n^2}{16}(t-\tau)}\int_0^t\sin\frac{\tau}{2}e^{\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^\tau}d\tau.$$

Скориставшись формулою $\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$,

будемо мати $T_n(t)=\frac{1}{\pi n}e^{-\frac{9\pi^2n^2}{16}t}\left.\frac{e^{\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2\tau}\left(\frac{9\pi^2n^2}{16}\sin\frac{\tau}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\tau\right)}{\left(\frac{9\pi^2n^2}{16}\right)^2+\frac{1}{4}}\right|_0^t=$

$$=\frac{256}{\pi n(81\pi^2n^2+64)}e^{-\frac{9\pi^2n^2}{16}t}\left(e^{\left(\frac{3\pi n}{4}\right)t}\left(\frac{9\pi^2n^2}{16}\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right).$$

Тоді одержимо, що

$$u(x,t)=v(x,t)+\cos\frac{t}{2}\frac{4-x}{4}=\left(1-\frac{x}{4}\right)\cos\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4(-1)^n+1)e^{-\frac{9\pi^2n^2}{16}t}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi n}{4}x+\frac{256}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(81\pi^2n^2+64)}\left(\frac{9\pi^2n^2}{16}\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{2}e^{-\frac{9\pi^2n^2}{16}t}\right)\sin\frac{\pi n}{4}x.$$

Задача 3. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(0<x<2,\ t>0)$,

якщо $u(0,t)=t,\ u(2,t)=0\quad(t>0)$, $u(x,0)=2x$ при $0\le x\le 2$.

ЗАНЯТТЯ №4

6.4 Розв'язування рівняння коливання струни

Постановка задачі. Знайти розв'язок рівняння

$$\text{(ДРЧП)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } 0 < x < l,\ 0 < t < \infty,$$

що задовольняє крайові та початкові умови

$$\text{(КУ)}\quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \text{ при } t > 0 \text{ і}$$

$$\text{(ПУ)}\quad u(x,0) = f(x),\ u'_t(x,0) = g(x),$$

де $f(x)$ і $g(x)$ задані функції при $0 \le x \le l$.

Розв'язок цієї крайової задачі визначається формулою

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{\pi na}{l}t + b_n sin\frac{\pi na}{l}t\right)sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sin\frac{\pi n}{l}xdx$, $b_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l g(x) sin\frac{\pi n}{l}xdx$.

Задача 1. Знайти розв'язок задачі $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $0 < x < 2$, якщо

$u(0,t) = u(2,t) = 0$ при $t > 0$ і $u(x,0) = sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}sin\frac{3\pi x}{2}$, $u'_t(x,0) = 0$ при $0 \le x \le 2$.

Розв'язування. За умовою задачі $a=3$, $l=2$, $g(x)\equiv 0$ і $f(x) = sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}sin\frac{3\pi x}{2}$.

Оскільки функція $f(x)$ вже розкладена в ряд Фур'є за синусами, то звідси, враховуючи, що $l = 2$, будемо мати $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 0$, $a_k = 0$ при $k \ge 4$. Коефіцієнти $b_n = 0$ при всіх $n = 1,2,3,\ldots$, оскільки $g(x) \equiv 0$. Тоді, використовуючи формули розв'язку у вигляді ряду, одержимо

$$u(x,t) = cos\frac{3\pi}{2}t\, sin\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}cos\frac{9\pi}{2}t\, sin\frac{3\pi}{2}x.$$

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $0 < x < 3$, якщо

$u(0,t)=u(3,t)=0$ при $t>0$ і $u(x,0)=0,\ u'_t(x,0)=-\frac{4}{3}sin\frac{2\pi}{3}x+\frac{1}{5}sin\pi x$.

Розв'язування. За умовою задачі $a=2,\ l=3,\ f(x)\equiv 0$ і $g(x)=-\frac{4}{3}sin\frac{2\pi}{3}x+\frac{1}{5}sin\pi x$. Тоді всі $a_n=0$ $(n=1,2,3,...)$, бо $f(x)\equiv 0$. Оскільки функція $g(x)$ вже розкладена в ряд Фур'є за синусами та $l=3$ і $a=2$, то, записавши вираз $g(x)$ у вигляді: $g(x)=-\frac{4}{3}sin\frac{2\pi}{3}x+\frac{1}{5}sin\frac{3\pi}{3}x$, бачимо, що в розкладанні функції $g(x)$ присутні лише другий та третій члени ряду, при цьому $b'_2=-\frac{4}{3},\ b'_3=\frac{1}{5}$. Враховуючи те, що $\frac{2\pi a}{l}b_2=-\frac{4}{3}$, матимемо, що $b_2=-\frac{1}{\pi}$, а із $\frac{3\pi a}{l}b_3=\frac{1}{5}$ матимемо, що $b_3=\frac{1}{10\pi}$.

Тоді $u(x,t)=-\frac{1}{\pi}sin\frac{2\pi}{3}xsin\frac{4\pi}{3}t+\frac{1}{10\pi}sin\pi xsin2\pi t$.

Задача 3. Струна закріплена на кінцях $x=0$ і $x=2$ і в початковий момент має форму параболи $u=hx(2-x)$. Визначити відхилення точок струни від осі Ox, якщо початкові швидкості відсутні.

Розв'язування. Треба розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $0<x<2$, якщо $u(0,t)=u(2,t)=0$, $u(x,0)=h(2-x)x$, $u'_t(x,0)=0$. Отже, $g(x)\equiv 0$, а $f(x)=hx(2-x)$. Знайдемо коефіцієнти тригонометричного ряду, який визначає розв'язок рівняння коливання струни. Оскільки $g(x)\equiv 0$, то $b_n=0$ $(n=1,2,3,...)$. Коефіцієнти a_n визначаються за формулами $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l sin\frac{\pi n}{l}xdx$. Тоді $a_n=\int_0^2 hx(2-x)sin\frac{\pi n}{2}xdx=h\int_0^2(2x-x^2)sin\frac{\pi n}{2}xdx=$

$$=\left[\begin{matrix} u=2x-x^2\ ;\ du=(2-2x)dx \\ dv=sin\frac{\pi n}{2}xdx\ ;\ v=-\frac{2}{\pi n}cos\frac{\pi n}{2}x \end{matrix}\right]=h\left(0+\frac{4}{\pi n}\int_0^2(1-x)cos\frac{\pi n}{2}xdx\right)=$$

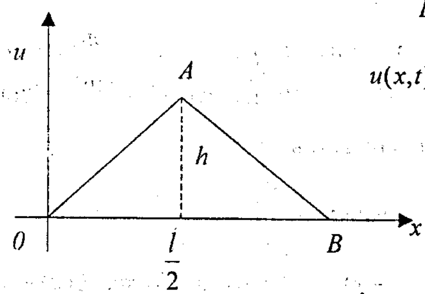
$$= \frac{4h}{\pi n}\int_0^2 (1-x)\cos\frac{\pi n}{2}x dx = \begin{bmatrix} u = 1-x \ ; \ du = -dx \\ dv = \cos\frac{\pi n}{2}xdx \ ; \ v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4h}{\pi n}\left(\frac{2}{\pi n}(1-x)\sin\frac{\pi n}{2}x\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\frac{\pi n}{2}xdx\right)\frac{4h}{\pi n}\left(0 - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n}{2}x\Big|_0^2\right) =$$

$$= -\frac{16h}{\pi^3 n^3}(1-(-1)^n).$$

Отже, $u(x,t) = \frac{16h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)\cos\frac{\pi n a}{2}t\sin\frac{\pi n}{2}x.$

Задача 4. Однорідна струна закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$. В початковий момент струна має форму ламаної OAB, що зображена на рисунку. Початкові швидкості відсутні. Знайти форму струни в будь-який момент часу.



Відповідь:

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{\pi n a x}{l}.$$

Задача 5. Однорідна струна закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$. В початковий момент струна має форму ламаної OAB, де $O(0;0)$, $A(2;-0.1)$ і $B(3;0)$. Знайти форму струни в будь-який момент часу t, якщо початкові швидкості відсутні.

Відповідь: $u(x,t) = -\frac{0{,}9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{2\pi n}{3}\sin\frac{\pi n}{3}x\cos\frac{\pi n x t}{3}.$

Задача 6. Початкові відхилення струни, закріпленої в точках $x=0$ і $x=4$, дорівнюють нулеві, а початкова швидкість виражається формулою

$$u'_t = \begin{cases} v_0, & \text{якщо } |x-2| < 0.2, \\ 0, & |x-2| > 0.2. \end{cases}$$

Визначити форму струни в будь-який момент часу t.

Відповідь: $u(x,t) = -\dfrac{16v_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} sin\dfrac{\pi n}{2} sin\dfrac{0.1\pi n}{8} cos\dfrac{\pi n x t}{4}$.

ЗАНЯТТЯ №5

6.5 Формула Д'Аламбера

Постановка задачі. Знайти розв'язок рівняння

(ДРЧП) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty,\ 0 \le t < \infty)$

(ПУ) $\quad u(x,t) = f(x);\ u'_t(x,0) = g(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$

Розв'язок цієї задачі Коші дається формулою

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\big(f(x-at) + f(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(z)dz,$$

яка називається *формулою Д'Аламбера.*

Задача 1. Знайти розв'язок задачі $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty;\ t > 0)$,

якщо $u(x,0) = sin3x$, $u'_t(x,0) = -x$ при $-\infty < x < +\infty$.

Розв'язування. Скористаємось формулою Д'Аламбера при $a = 1$, $f(x) = 3sinx$ і $g(x) = -x$, матимемо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(sin3(x-t) + sin3(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(-z)dz = \frac{1}{2}2sin3xcos3t - \frac{1}{2}\frac{z^2}{2}\bigg|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= sin3xcos3t - \frac{1}{4}((x+t)^2 - (x-t)^2) = sin3xcos3t - xt.$$

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty;\ t > 0)$, якщо $u(x,0) = sin2x$, $u'_t(x,0) = 0$.

Побудувати графік розв'язку при деяких t.

Задача 3. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty;\ t > 0),$$

якщо задана початкова швидкість $u_t'(x,0) = sinx$ при відсутності відхилення при $t = 0$. Побудувати графік розв'язку при $t = \frac{\pi}{8}$ та $t = \frac{\pi}{4}$.

Задача 4. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty;\ t > 0),$$

якщо задана початкова швидкість $u_t'(x,0) = cosx$, $u(x,0) = 0$. Побудувати графік розв'язку при різних значеннях t.

Задача 5. Знайти форму струни, що виражається рівнянням

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t = \pi$, якщо $u(x,0) = sin2x$, $u_t'(x,0) = 0$.

ЗАНЯТТЯ №6

6.6 Внутрішня задача Діріхле для круга

Постановка задачі. Знайти розв'язок рівняння

$$\text{(ДРЧП)} \quad r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \text{ при } r < 0, \text{ якщо}$$

$$\text{(КУ)} \qquad u(a,\varphi) = f(\varphi),$$

де $f(\varphi)$ – задана неперервна функція на колі $r = a$.

Розв'язок цієї задачі визначається формулою

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cosn\varphi + B_n sinn\varphi)\left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

де $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi$, $A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)cosn\varphi d\varphi$, $B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)cosn\varphi d\varphi$.

Задача 1. Знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга $r < 3$, якщо $u(3,\varphi) = 1 + \varphi$.

Розв'язування. За умовою задачі $a=3$ і $f(\varphi)=1+\varphi$. Знайдемо коефіцієнти ряду

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(1+\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi d\varphi\right)=\frac{1}{\pi}(2\pi+0)=2.$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(1+\varphi)cosn\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}cosn\varphi d\varphi+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi cosn\varphi d\varphi\right)=$$

$=\frac{1}{\pi}\left(2\frac{1}{n}sinn\varphi\Big|_0^{\pi}+0\right)=0$, оскільки $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi cos\,n\varphi d\varphi=0$ за властивістю визначеного інтеграла в симетричних межах від непарної функції.

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\varphi)sinn\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}sinn\varphi d\varphi+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi sinn\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0+2\int_{0}^{\pi}\varphi sinn\varphi d\varphi\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi sinn\varphi d\varphi=\begin{bmatrix}u=\varphi\ ;\ du=d\varphi\\ dv=sinn\varphi\ ;\ v=-\frac{1}{n}cosn\varphi\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\varphi cos\,n\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}cos\,n\varphi d\varphi\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi cos\,n\pi+\frac{1}{n^2}sin\,n\varphi\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$=-\frac{2}{n}cosn\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$. Тоді $u(r,\varphi)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n_n}sinn\varphi\left(\frac{r}{3}\right)^n$.

Відповідь: $u(r,\varphi)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\pi n}sinn\varphi\left(\frac{r}{3}\right)^n$.

Задача 2. Знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга $r<4$, якщо $u(4,\varphi)=1+2cos2\varphi-\frac{1}{2}sin3\varphi$.

Розв'язування. За умовою задачі $f(\varphi)=1+2cos2\varphi-\frac{1}{2}sin3\varphi$ і $a=4$. Оскільки функція $f(x)$ вже розкладена в ряд Фур'є, то маємо

$\frac{A_0}{2}=1,\ A_1=0,\ A_2=2,\ A_3=0,\ A_k=0$ при всіх $k\geq 3$;

$B_1 = 0,\ B_2 = 0,\ B_3 = -\frac{1}{2},\ B_k = 0$ при всіх $k > 2$,

то розв'язок цієї задачі буде мати вигляд

$$u(r,\varphi) = 1 + 2cos2\varphi\left(\frac{r}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}sin3\varphi\left(\frac{r}{4}\right)^3 = 1 + \frac{1}{8}cos2\varphi r^2 - \frac{1}{128}sin3\varphi r^3.$$

Задача 3. Знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга $r < 1$, якщо $u(1,\varphi) = sin^4\varphi$.

Розв'язування. За умовою задачі $a = 1$ і $f(\varphi) = sin^4\varphi$. Користуючись формулами пониження степеня, функцію $sin^4\varphi$ виразимо як лінійну комбінацію тригонометричних функцій в перших степенях:

$$sin^4\varphi = (sin^2\varphi)^2 = \left(\frac{1 - cos2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2cos2\varphi + cos^2 2\varphi) = \frac{1}{4}(1 - 2cos2\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}(1 + cos4\varphi)) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2cos2\varphi + \frac{1}{2}cos4\varphi\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2\varphi + \frac{1}{8}cos4\varphi.$$

Звідси маємо, що $\frac{A_0}{2} = \frac{3}{8},\ A_1 = 0,\ A_2 = -\frac{1}{2},\ A_3 = 0,\ A_4 = \frac{1}{8},\ A_k = 0$ при всіх $k > 4$. Тоді розв'язок цієї задачі буде мати вигляд $u(r,\varphi) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos2\varphi r^2 + \frac{1}{8}cos4\varphi r^4$.

Задача 4. Розв'язати рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в крузі r>2, якщо $u(2,\varphi) = sin^2\varphi + cos^2 2\varphi$.

Задача 5. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле в крузі $0 \le r < 1$, якщо $u(1,\varphi) = \varphi^2$.

Задача 6. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле в крузі $0 \le r < 3$, якщо $u(3,\varphi) = 4 + sin^3\varphi$.

Задача 7. Знайти розподіл температури на однорідній тонкій пластині радіуса $R = 4$, якщо на колі верхньої половини якої підтримується температура в 1°, а на нижній половині 0°.

7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

Задача 1. 1. Встановити тип ДРЧП. 2. Звести ДРЧП до канонічного вигляду.

1.1 а) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\dfrac{\partial u}{\partial x}+4\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.2 а) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.

1.3 а) $sin^2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2ysinx\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.

1.4 а) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.

1.5 а) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\dfrac{\partial u}{\partial x}-6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.6 а) $4tg^2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2ytgx\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+tg^3x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.7 а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2cosx\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-sin^2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-sinx\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.8 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - cosx\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.9 а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.10 а) $sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ysinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

б) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.11 а) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.12 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.13 а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.14 а) $(2 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2(1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.15 а) $cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial y}-u=0$.

1.16 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

1.17 а) $(4+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-10\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.18 а) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\,tgx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+tg^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+27\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

1.19 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin y\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.20 а) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.21 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-5\frac{\partial u}{\partial x}-2u=0$.

1.22 а) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.23 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

1.24 а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

1.25 а) $(2+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.26 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.27 а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.28 а) $(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(5+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

1.29 а) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 6\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 12\frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1.30 а) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Задача 2. Знайти розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності на відрізку $[0,l]$, якщо $u(0,t) = u(l,t) = 0$ при $t \ge 0$.

2.1 $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 3 - x, \frac{3}{2} < x \le 3. \end{cases}$

2.2 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} x^2, \ 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, \ 1 < x \le 2. \end{cases}$

2.3 $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, \ 0 \le x \le \frac{5}{2}, \\ 5 - x, \ \frac{5}{2} < x \le 5. \end{cases}$

2.4 $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, \ 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, \ 2 < x \le 4. \end{cases}$

2.5 $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, \ 0 \le x \le \frac{5}{2}, \\ 5 - x, \ \frac{5}{2} < x \le 5. \end{cases}$

2.6 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{3}, & 0\le x\le\dfrac{3}{2},\\ 3-x, & \dfrac{3}{2}<x\le 3.\end{cases}$

2.7 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}, & 0\le x\le 4,\\ 8-x, & 4<x\le 8.\end{cases}$

2.8 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases}$

2.9 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$

2.10 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 4-x, & 2<x\le 4.\end{cases}$

2.11 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}, & 0\le x\le\dfrac{5}{2},\\ 10-x, & \dfrac{5}{2}<x\le 10.\end{cases}$

2.12 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{9}, & 0\le x\le\dfrac{9}{2},\\ 9-x, & \dfrac{9}{2}<x\le 9.\end{cases}$

2.13 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{3}, & 0\le x\le\dfrac{3}{2},\\ 3-x, & \dfrac{3}{2}<x\le 3.\end{cases}$

2.14 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{5}, & 0\le x\le\dfrac{5}{2},\\ 5-x, & \dfrac{5}{2}<x\le 5.\end{cases}$

2.15 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{7}, & 0\le x\le\dfrac{7}{2},\\ 7-x, & \dfrac{7}{2}<x\le 7.\end{cases}$

2.16 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$

2.17 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 4-x, & 2<x\le 4.\end{cases}$

2.18 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}, & 0\le x\le 5,\\ 10-x, & 5<x\le 10.\end{cases}$

2.19 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases}$

2.20 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}, & 0\le x\le 4,\\ 8-x, & 4<x\le 8.\end{cases}$

2.21 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$

2.22 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 4-x, & 2<x\le 4.\end{cases}$

2.23 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, & 0\le x\le 3,\\ 6-x, & 3<x\le 6.\end{cases}$

2.24 $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le \frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$

2.25 $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{5}, & 0\le x\le \frac{5}{2},\\ 5-x, & \frac{5}{2}<x\le 5.\end{cases}$

2.26 $\frac{\partial u}{\partial t}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}, & 0\le x\le 3,\\ 6-x, & 3<x\le 6.\end{cases}$

2.27 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{6}, & 0\le x\le 6,\\ 12-x, & 6<x\le 12.\end{cases}$

2.28 $\frac{\partial u}{\partial t}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases}$

2.29 $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}, & 0\le x\le 3,\\ 6-x, & 3<x\le 6.\end{cases}$

2.30 $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{4}, & 0\le x\le 4,\\ 8-x, & 4<x\le 8.\end{cases}$

Задача 3. Знайти розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\,(0<x<l,\ 0<t<+\infty)$, якщо $u(0,t)=g_1(t)$, $u(l,t)=g_2(t)$ при $t\ge 0$ і $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le l$.

3.1 $a=3;\ l=4;\ f(x,t)=x-5t;\ g_1(t)=3t-1;\ g_2(t)=2;\ \varphi(x)=x+3.$

3.2 $a=2;\ l=3;\ f(x,t)=2t;\ g_1(t)=1-4t;\ g_2(t)=-3t;\ \varphi(x)=2x-1.$

3.3 $a=1;\ l=3;\ f(x,t)=x-4;\ g_1(t)=0;\ g_2(t)=e^{-t};\ \varphi(x)=\frac{1}{4}x.$

3.4 $a=2;\ l=4;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=0;\ g_2(t)=2t-4;\ \varphi(x)=3-2x$.

3.5 $a=4;\ l=2;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=e^t;\ g_2(t)=0;\ \varphi(x)=2+x$.

3.6 $a=4;\ l=2;\ f(x,t)=x+t;\ g_1(t)=2-t;\ g_2(t)=3t+1;\ \varphi(x)=2x$.

3.7 $a=2;\ l=2;\ f(x,t)=2xt;\ g_1(t)=2t+3;\ g_2(t)=4-t;\ \varphi(x)=x-1$.

3.8 $a=1;\ l=4;\ f(x,t)=3t+1;\ g_1(t)=2;\ g_2(t)=5+t;\ \varphi(x)=1-3x$.

3.9 $a=2;\ l=4;\ f(x,t)=3x-t;\ g_1(t)=2t;\ g_2(t)=2+t;\ \varphi(x)=2x-1$.

3.10 $a=1;\ l=2;\ f(x,t)=x-2t;\ g_1(t)=3;\ g_2(t)=t-1;\ \varphi(x)=x-3$.

3.11 $a=4;\ l=2;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=sint;\ g_2(t)=0;\ \varphi(x)=2$.

3.12 $a=3;\ l=4;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=0;\ g_2(t)=2e^t;\ \varphi(x)=x+1$.

3.13 $a=2;\ l=4;\ f(x,t)=2;\ g_1(t)=t+3;\ g_2(t)=1-t;\ \varphi(x)=x+2$.

3.14 $a=2;\ l=3;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=cost;\ g_2(t)=0;\ \varphi(x)=3+x$.

3.15 $a=2;\ l=2;\ f(x,t)=4x;\ g_1(t)=3;\ g_2(t)=2t;\ \varphi(x)=4x+1$.

3.16 $a=1;\ l=3;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=0;\ g_2(t)=e^{-2t};\ \varphi(x)=4$.

3.17 $a=2;\ l=1;\ f(x,t)=3x;\ g_1(t)=t+3;\ g_2(t)=3t;\ \varphi(x)=2x+3$.

3.18 $a=3;\ l=3;\ f(x,t)=xt;\ g_1(t)=3t;\ g_2(t)=t-3;\ \varphi(x)=2x+3$.

3.19 $a=1;\ l=4;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=e^{-t};\ g_2(t)=0;\ \varphi(x)=2$.

3.20 $a=2;\ l=1;\ f(x,t)=3x-t;\ g_1(t)=4t;\ g_2(t)=t+4;\ \varphi(x)=1-x$.

3.21 $a=4;\ l=2;\ f(x,t)=t-x;\ g_1(t)=t;\ g_2(t)=2t-1;\ \varphi(x)=3x+1$.

3.22 $a=2;\ l=4;\ f(x,t)=1;\ g_1(t)=sint;\ g_2(t)=0;\ \varphi(x)=2$.

3.23 $a=3;\ l=2;\ f(x,t)=2+t;\ g_1(t)=2t+1;\ g_2(t)=2+t;\ \varphi(x)=3x-1$.

3.24 $a=2;\ l=2;\ f(x,t)=x+t;\ g_1(t)=5t;\ g_2(t)=t-1;\ \varphi(x)=3x+2$.

3.25 $a=4;\ l=3;\ f(x,t)=2t+1;\ g_1(t)=1-t;\ g_2(t)=2t;\ \varphi(x)=2x-1$.

3.26 $a=4;\ l=2;\ f(x,t)=0;\ g_1(t)=e^{-2t};\ g_2(t)=0;\ \varphi(x)=2$.

3.27 $a=3;\ l=4;\ f(x,t)=-3;\ g_1(t)=2t-1;\ g_2(t)=2+t;\ \varphi(x)=4-2x$.

3.28 $a=1$; $l=3$; $f(x,t)=2x$; $g_1(t)=4$; $g_2(t)=3t+2$; $\varphi(x)=2x-3$.

3.29 $a=2$; $l=2$; $f(x,t)=0$; $g_1(t)=1$; $g_2(t)=e^{-2t}$; $\varphi(x)=1$.

3.30 $a=3$; $l=2$; $f(x,t)=3t$; $g_1(t)=4$; $g_2(t)=4+t$; $\varphi(x)=2-3x$.

Задача 4. Розв'язати крайову задачу для хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l,\ t>1)$, якщо $u(0,t)=u(l,t)=0$; $u(x,0)=f(x)$, $u_t'(x,0)=g(x)$ $(0\le x\le l)$.

4.1 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=x(x-1)$, $u_t'(x,0)=0$.

4.2 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=\frac{3}{2}$; $u(x,0)=x(x-\frac{3}{2})$, $u_t'(x,0)=0$.

4.3 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=x(x-3)$, $u_t'(x,0)=2$.

4.4 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=x(x-2)$, $u_t'(x,0)=-x$.

4.5 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=\frac{1}{2}$; $u(x,0)=x(x-\frac{1}{2})$, $u_t'(x,0)=1$.

4.6 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=x(x-1)$, $u_t'(x,0)=0$.

4.7 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=\frac{2}{3}$; $u(x,0)=x(x-\frac{2}{3})$, $u_t'(x,0)=1$.

4.8 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=0.1x(x-3)$, $u_t'(x,0)=0$.

4.9 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0.1x(x-2)$, $u_t'(x,0)=2x$.

4.10 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=0.1x(x-4)$, $u_t'(x,0)=\frac{1}{2}x$.

4.11 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0.1x(x-2)$, $u'_t(x,0)=3$.

4.12 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=0.1x(x-1)$, $u'_t(x,0)=x$.

4.13 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=0.2x(x-3)$, $u'_t(x,0)=0$.

4.14 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0.1x(x-2)$, $u'_t(x,0)=1-x$.

4.15 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=4$; $u(x,0)=-0.1x(x-4)$, $u'_t(x,0)=2-x$.

4.16 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=\frac{3}{2}$; $u(x,0)=0.1x(x-\frac{3}{2})$, $u'_t(x,0)=2$.

4.17 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=-0.2x(x-3)$, $u'_t(x,0)=x-1$.

4.18 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=-0.3x(x-2)$, $u'_t(x,0)=2-x$.

4.19 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=-0.2x(x-1)$, $u'_t(x,0)=1+x$.

4.20 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=\frac{1}{2}$; $u(x,0)=0.1x(x-\frac{1}{2})$, $u'_t(x,0)=\frac{1}{2}x$.

4.21 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=2$; $u(x,0)=0.1x(x-2)$, $u'_t(x,0)=-1+x$.

4.22 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{4}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=0.1x(x-3)$, $u'_t(x,0)=1$.

4.23 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=1$; $u(x,0)=0.1x(x-1)$, $u'_t(x,0)=2$.

4.24 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=3$; $u(x,0)=0.4x(x-3)$, $u'_t(x,0)=1-x$.

4.25 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l=\frac{1}{2}$; $u(x,0)=0.1x(x-\frac{1}{2})$, $u'_t(x,0)=\frac{1}{2}$.

4.26 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 2$; $u(x,0) = 0.3x(x-2)$, $u_t'(x,0) = 2 - x$.

4.27 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 3$; $u(x,0) = 0.3x(x-3)$, $u_t'(x,0) = 0$.

4.28 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{4}{9}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 4$; $u(x,0) = 0.1x(x-4)$, $u_t'(x,0) = 1 + x$.

4.29 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = \dfrac{3}{2}$; $u(x,0) = -0.1x(x-\dfrac{3}{2})$, $u_t'(x,0) = \dfrac{3}{2}$.

4.30 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $l = 2$; $u(x,0) = -0.2x(x-2)$, $u_t'(x,0) = \dfrac{1}{2}$.

Задача 5. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в крузі при заданних крайових умовах.

5.1 $0 \le r < 1$; $u(1,\varphi) = \varphi^2 + 1$.

5.2 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = 1 - \varphi^2$.

5.3 $0 \le r < 1$; $u(1,\varphi) = 3\varphi + 5$.

5.4 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = 5\varphi + 7$.

5.5 $0 \le r < 3$; $u(3,\varphi) = \varphi^2 + 2$.

5.6 $0 \le r < 1$; $u(1,\varphi) = 3\varphi^2 + 2$.

5.7 $0 \le r < 4$; $u(4,\varphi) = 3\varphi - 2$.

5.8 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = 4\varphi^2 + 1$.

5.9 $0 \le r < 1$; $u(1,\varphi) = 2\varphi^2 + 1$.

5.10 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = 3\varphi^2 - \varphi$.

5.11 $0 \le r < 1$; $u(1,\varphi) = 2\varphi^2 - \varphi + 2$.

5.12 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = \varphi^2 - 5\varphi$.

5.13 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = 5\varphi^2 - 2\varphi + 1$.

5.14 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = \varphi^2 - 5$.

5.15 $0 \le r < 3$; $u(3,\varphi) = -\varphi^2 + 3\varphi$.

5.16 $0 \le r < 3$; $u(3,\varphi) = -2\varphi^2 + 7$.

5.17 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = \varphi^2 - 3\varphi + 2$.

5.18 $0 \le r < 1$; $u(1,\varphi) = \varphi^2 + 7\varphi - 1$.

5.19 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = \varphi^2 - 2\varphi + 1$.

5.20 $0 \le r < 1$; $u(1,\varphi) = -2\varphi^2 - 5\varphi + 3$.

5.21 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = -3\varphi^2 + \varphi$.

5.22 $0 \le r < 3$; $u(3,\varphi) = \varphi^2 + 2\varphi$.

5.23 $0 \le r < 4$; $u(4,\varphi) = \varphi^2 - \varphi$.

5.24 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = 3\varphi^2 + 2\varphi - 2$.

5.25 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = -4\varphi^2 + 3\varphi$.

5.26 $0 \le r < 3$; $u(3,\varphi) = -\varphi^2 + \varphi + 1$.

5.27 $0 \le r < 4$; $u(4,\varphi) = 5\varphi^2 - \varphi + 3$.

5.28 $0 \le r < 2$; $u(2,\varphi) = -4\varphi^2 + 2\varphi - 1$.

5.29 $0 \le r < 3$; $u(3,\varphi) = -\varphi^2 + 3\varphi$.

5.30 $0 \le r < 4$; $u(4,\varphi) = \varphi^2 - 4\varphi + 2$.

Задача 6. Методом сіток знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданих крайових умовах $u(0,t) = g_1(t)$, $u(0,t;t) = g_2(t)$ та початковій умові $u(x,0) = f(x)$ для $x \in [0;0.6]$. Розв'язок виконати при $h = 0.1$ для $t \in [0;0.01]$ з чотирма десятковими знаками при $\sigma = \frac{1}{6}$.

6.1 $u(x,0) = cos2x$; $u(0,t) = 1 - 6t$; $u(0.6;t) = 0.3624$.

6.2 $u(x,0) = x(x+1)$; $u(0,t) = 0$; $u(0.6;t) = 2t + 0.96$.

6.3 $u(x,0) = 1.2 + lg(x + 0.4)$; $u(0,t) = 0.8 + t$; $u(0.6;t) = 1.2$.

6.4 $u(x,0) = sin2x$; $u(0,t) = 2t$; $u(0.6;t) = 0.932$.

6.5 $u(x,0) = 3x(2 - x)$; $u(0,t) = 0$; $u(0.6;t) = t + 2.52$.

6.6 $u(x,0) = 1 - lg(x + 0.4)$; $u(0,t) = 1.4$; $u(0.6;t) = t + 1$.

6.7 $u(x,0) = sin(0.55x + 0.03)$; $u(0,t) = t + 0.03$; $u(0.6;t) = 0.354$.

6.8 $u(x,0) = 2x(1 - x) + 0.2$; $u(0,t) = 0.2$; $u(0.6;t) = t + 0.68$.

6.9 $u(x,0) = sinx + 0.08$; $u(0,t) = 0.08 + 2t$; $u(0.6;t) = t + 0.6446$.

6.10 $u(x,0) = cos(2x + 0.19)$; $u(0,t) = 0.932$; $u(0.6;t) = t + 0.1798$.

6.11 $u(x,0) = 2x(x + 0.2)$; $u(0,t) = 2t + 0.4$; $u(0.6;t) = 1.36$.

6.12 $u(x,0) = lg(x + 0.26)$; $u(0,t) = 0.415 + t$; $u(0.6;t) = 0.9345$.

6.13 $u(x,0) = sin(x + 0.45)$; $u(0,t) = 0.435 - 2t$; $u(0.6;t) = 0.8674$.

6.14 $u(x,0) = 0.3 + x(x + 0.4)$; $u(0,t) = 0.3$; $u(0.6;t) = 6t + 0.9$.

6.15 $u(x,0) = (x - 0.3)(x + 1) + 0.2$; $u(0,t) = 6t$; $u(0.6;t) = 0.84$.

6.16 $u(x,0) = x(0.3+2x)$; $u(0,t) = 0$; $u(0.6;t) = 6t+0.9$.

6.17 $u(x,0) = sin(x+0.48)$; $u(0,t) = 0.4618$; $u(0.6;t) = 3t+0.882$.

6.18 $u(x,0) = sin(x+0.2)$; $u(0,t) = 3t+0.02$; $u(0.6;t) = 0.581$.

6.19 $u(x,0) = cos(x+0.48)$; $u(0,t) = 6t+0.887$; $u(0.6;t) = 0.4713$.

6.20 $u(x,0) = lg(2.63-x)$; $u(0,t) = 3(0.14+x)$; $u(0.6;t) = 0.3075$.

6.21 $u(x,0) = 1.5-x(1-x)$; $u(0,t) = 3(0.5-t)$; $u(0.6;t) = 1.26$.

6.22 $u(x,0) = cos(x+0.845)$; $u(0,t) = 6(t+0.11)$; $u(0.6;t) = 0.1205$.

6.23 $u(x,0) = lg(2.42+x)$; $u(0,t) = 0.3838$; $u(0.6;t) = 6(0.08-t)$.

6.24 $u(x,0) = 0.6+x(0.8-x)$; $u(0,t) = 0.6$; $u(0.6;t) = 3(0.24+t)$.

6.25 $u(x,0) = cos(x+0.66)$; $u(0,t) = 3t+0.79$; $u(0.6;t) = 0.3058$.

6.26 $u(x,0) = lg(1.43+2x)$; $u(0,t) = 0.1533$; $u(0.6;t) = 3(t+0.14)$.

6.27 $u(x,0) = 0.9+2x(1-x)$; $u(0,t) = 3(0.36-2t)$; $u(0.6;t) = 1.38$.

6.28 $u(x,0) = lg(1.95+x)$; $u(0,t) = 0.29-6t$; $u(0.6;t) = 0.4065$.

6.29 $u(x,0) = 2cos(x+0.55)$; $u(0,t) = 1.705$; $u(0.6;t) = 0.817+3t$.

6.30 $u(x,0) = x(x-1)+0.2$; $u(0,t) = 0.2$; $u(0.6;t) = 2(t+0.22)$.

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Задача. Методом сіток знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<0.6)$, якщо (*КУ*) $u(0,t) = 2(t+0.06)$; $u(0.6;t) = 0.84$ та (*ПУ*) $u(0;x) = 3x(1-x)+0.12$ при $0 \le x \le 0.6$.

Розв'язування. Скористаємось явною схемою при $\sigma = \frac{1}{6}$, матимемо формулу

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,j} + 4u_{i,j} + u_{i-1,j}) \qquad (*)$$

при $i = 1,2,3,4,5,6$ та $j = 1,2,3,4,5,6$. Оскільки $h = 0.1$, то крок по осі $0t$

$k = \frac{h^2}{6} = \frac{0.01}{6} = 0.0017$, при цьому $n = 6$, бо $h = \frac{0.6}{n}$. Спочатку заповнимо значення функції $u(x,t)$ у вузла рядка з номером $j = 0$, користуючись (ПУ) $f(x) = 3x(1-x) + 0.12$ при $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$, $x_4 = 0.4$, $x_5 = 0.5$ і $x_6 = 0.6$, матимемо: $u_{00} = 0.12$, $u_{10} = 0.39$, $u_{20} = 0.60$, $u_{30} = 0.75$, $u_{40} = 0.84$, $u_{50} = 0.87$ і $u_{60} = 0.84$.

Користуючись (КУ), заповнимо стовпці з номерами $i = 1$ та $i = 6$ при значеннях $j = 0,1,2,3,4,5,6$ маємо $u_{00} = 0.12$, $u_{01} = 0.1233$, $u_{02} = 0.1267$, $u_{03} = 0.1300$, $u_{04} = 0.1333$, $u_{05} = 0.1367$, $u_{06} = 0.1400$ і всі $u_{6j} = 0.84$, бо $g_2(t) = 0.84$.

Розрахунки проводимо за формулами (*)

$u_{11} = \frac{1}{6}(u_{20} + u_{10} + u_{00}) = 0.3800$; $u_{21} = \frac{1}{6}(u_{30} + 4u_{20} + u_{10}) = 0.5900$ і т.д.

Всі розрахунки приведені в таблиці:

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	$t_j \backslash x_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0	0.12	0.39	0.60	0.75	0.84	0.87	0.84
1	0.0017	0.1233	0.3800	0.5900	0.7400	0.8300	0.8600	0.84
2	0.0033	0.1267	0.3772	0.5800	0.7300	0.8200	0.8514	0.84
3	0.0050	0.1300	0.3659	0.5704	0.7200	0.8103	0.8445	0.84
4	0.0067	0.1333	0.3607	0.5612	0.7101	0.8009	0.8380	0.84
5	0.0083	0.1367	0.3562	0.5526	0.7004	0.7919	0.8322	0.84
6	0.01	0.1400	0.3524	0.5445	0.6910	0.7834	0.8268	0.84

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука,1972.
2. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985.
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1968.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
5. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982.
7. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М.: Высшая школа, 1990.

Навчальне видання

Василь Парфенович Литвинюк

Рівняння математичної фізики

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор О.Д.Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВДТУ

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ

Підписано до друку 15.04.03 р.
Формат 29,7х42 1/4
Друк різографічний
Тираж 75 прим
Зам. № 2003-064

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 4.48

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі

Вінницького державного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95