

А.С. Моргун
М.М. Сорока

**МЕХАНІКА ТОНКИХ ОБОЛОНОК ПОДВІЙНОЇ
КРИВИЗНИ**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А.С. Моргун
М.М. Сорока

**МЕХАНІКА ТОНКИХ ОБОЛОНОК ПОДВІЙНОЇ
КРИВИЗНИ**

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів напряму підготовки 0921 - "Будівництво" всіх спеціальностей. Протокол № 2 від "28" вересня 2006 р.

Вінниця ВНТУ 2007

Рецензенти:

В.А. Огородніков, доктор технічних наук професор

І. Н. Дудар, доктор технічних наук професор

О. В. Нахайчук, доктор технічних наук доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Моргун А.С., Сорока М.М.

М 79 Механіка тонких оболонок подвійної кривизни. Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2007. - 57 с.

В навчальному посібнику викладено курс аналітичного розрахунку оболонок подвійної кривизни за допомогою тригонометричних рядів Фур'є. Викладено математичний апарат розрахунку, наведено приклад знаходження напружено-деформованого стану оболонки. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмами дисциплін "Будівельна механіка" та "Спецкурс з будівельної механіки".

УДК 624.04

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ I Загальні відомості про оболонки	6
1.1 Означення	6
1.2 Основні гіпотези теорії оболонок	7
1.3 Геометрія серединної поверхні оболонки	7
1.4 Внутрішні зусилля, деформації, переміщення в оболонках	11
Розділ II Основи теорії похилих оболонок подвійної кривизни	15
2.1 Означення	15
2.2 Гіпотези і основні припущення	16
2.3 Диференціальні рівняння рівноваги елемента похилої оболонки	17
2.4 Геометричні рівняння	19
2.5 Фізичні рівняння	20
2.6 Рівняння сумісності деформацій	21
2.7 Розрахункові рівняння теорії похилих оболонок	22
2.8 Умови на контурі похилої оболонки	24
Розділ III Розрахунок похилих оболонок подвійної кривизни з шарнірним опиранням по всьому контуру	27
3.1 Розв'язування в подвійних тригонометричних рядах. Випадок довільного навантаження	27
3.2 Розв'язування в подвійних тригонометричних рядах. Випадок рівномірно - розподіленого навантаження	32
3.3 Аналіз напруженого стану шарнірно опертої похилої оболонки	33
Розділ IV Розрахунок похилих оболонок подвійної кривизни з більш складними умовами на контурі	35
4.1 Оболонка з шарнірним опиранням двох протилежних сторін контуру. Рішення в одинарних тригонометричних рядах	35
4.2 Розрахунок системи, що складається із похилих оболонок і контурних діафрагм (загальний випадок)	39
4.3 Розрахунок похилої оболонки з контурними діафрагмами, що мають жорсткість лише в своїй площині	46
4.4 Про способи розрахунку похилих оболонок із складними умовами на контурі	48
4.5 Приклад розрахунку похилої оболонки, шарнірно опертої по всьому контуру	49
Література	55

*Ні одне із досліджень, згідно з А. Моруа, ніколи не
буває до кінця завершеним. Найбільша перевага добре
виконаної роботи в тому, що вона відкриває шлях іншій,
ще кращій...*

Вступ

Просторові покриття являють собою системи, що утворюються із тонкостінних оболонок і контурних конструкцій (бортових елементів, опорних кілець, діафрагм у вигляді балок, ферм, арок).

Просторові тонкостінні покриття особливо доцільні при будівництві промислових і цивільних будівель в умовах, коли потрібно перекривати приміщення великих розмірів (порядку 30×30 м і більше) без проміжних опор. Тим більше їх успішно використовують і при менших прогонах.

В таких просторових покриттях завдяки роботі конструкції в обох напрямках в плані досягається краще використання матеріалу, його суттєва економія – значно зменшується власна вага в порівнянні з покриттями із плоских елементів (панелі для покрівель, ферми, балки, арки, підкроквяні конструкції). Оболонкам характерна завидна легкість при високій міцності і жорсткості. Пояснюється це тим, що навантаження урівноважується не лише за рахунок згину, але й завдяки виникненню в серединній поверхні оболонок нормальних і зсувних зусиль. Тут доцільно провести аналогію з арками. При раціональній осі арок в них виникають лише поздовжні (N) та поперечні (Q) сили, згинальний момент дорівнює нулю ($M=0$). Таким чином зовнішнє навантаження врівноважується лише поздовжніми силами N, що дає можливість суттєво облегшити конструкцію в порівнянні з балкою, де зовнішнє навантаження сприймається за рахунок згину. Крім того, просторові оболонкові покриття мають особливу архітектурну виразність.

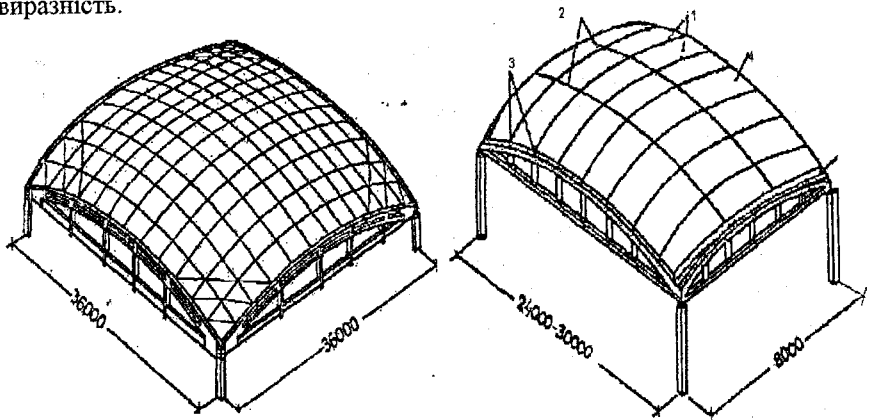


Рисунок 1.1 – Оболонки подвійної кривизни

Оболонка із залізобетону складається зі збірних елементів і опирається на контурні ферми, арки або стіни (рис.1.1). Основна частина оболонки працює на стиск, а значні розтяжні зусилля виникають тільки в кутових зонах.

По контуру оболонки укладають плити з потовщеними бортовими ребрами. Середні квадратні залізобетонні плити виготовляють товщиною 30-50 мм із діагональними ребрами висотою 200 мм. Якщо буде потреба, в плитах можуть бути улаштовані отвори для світлоаераційних пристроїв. Плити з'єднують між собою й з контурними фермами шляхом зварювання кінців арматури, випущеної із плит, і верхнього пояса ферми з наступним замоноличуванням швів. Контурні ферми суміжних оболонок мають загальний нижній пояс і роздільний верхній пояс.

Тонкостінні оболонки мають малу жорсткість на згин. Це приводить до того, що зовнішні навантаження в них сприймаються переважно нормальними силами N_x, N_y та зсувними силами N_{xy} . Тому в більшості оболонок, завантаженими загальними для покриття навантаженнями (власна вага, сніг), майже по всій області оболонки виникає безмоментний напружений стан, а повний напружений стан - лише в окремих зонах, де спостерігається помітне скривлення серединної поверхні оболонки. Таке скривлення спостерігається в місцях примикання оболонки до контурних конструкцій, в місцях різкої чи стрибкоподібної зміни навантаження, в місцях різкої чи стрибкоподібної зміни кривизни поверхні, а також в зонах прикладання місцевих навантажень (зосереджених на малих площах).

Теорія розрахунку оболонок є одним із напрямків теорії пружності, що інтенсивно розвивається. В першу чергу це пов'язано з високою економічністю цих конструкцій та з розширенням області їх застосування. Експериментальними дослідженнями встановлено, що просторові покриття з використанням оболонок в початковій стадії навантаження деформуються пружно. Їх робота в пружній стадії добре вивчена. Дослідження їх роботи в непружній стадії та в стадії граничної рівноваги є перспективними, оскільки дозволить підняти надійність та економічність цих конструкцій. Контурні конструкції розраховуються за загальними правилами будівельної механіки на зусилля, що передаються на них від оболонки.

Оболонка як елемент має суттєві переваги завдяки відносно малій вазі, здатності чинити опір великим навантаженням, поєднувати властивості функціональні та властивості несучої конструкції. Але необхідність попереднього засвоєння достатньо складного та громіздкого математичного апарату створює значні труднощі при вивченні методів розрахунку оболонок. Дуже обширна література, присвячена питанням загальної теорії і методам розрахунку оболонок різної форми, потребує часу незрівнянно більшого в порівнянні з відведеним згідно з навчальними планами.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ОБОЛОНКИ

1.1 Означення

Оболонка – це тіло, один з розмірів якого (товщина) значно менший, ніж два інші лінійні розміри. Поверхня, що проходить через точки, розташовані посередині товщини оболонки, називається серединною поверхнею оболонки. В оболонках постійної товщини геометрія серединної поверхні визначає геометрію оболонки в цілому.

Оболонка від дії поперечного навантаження чинить опір згинанню. Опір пластини зовнішньому навантаженню незалежно від форми та способу закріплення, обумовлений перш за все співвідношенням її геометричних розмірів: відношенням товщини h до найменшого розміру в плані a (рис.1.2)

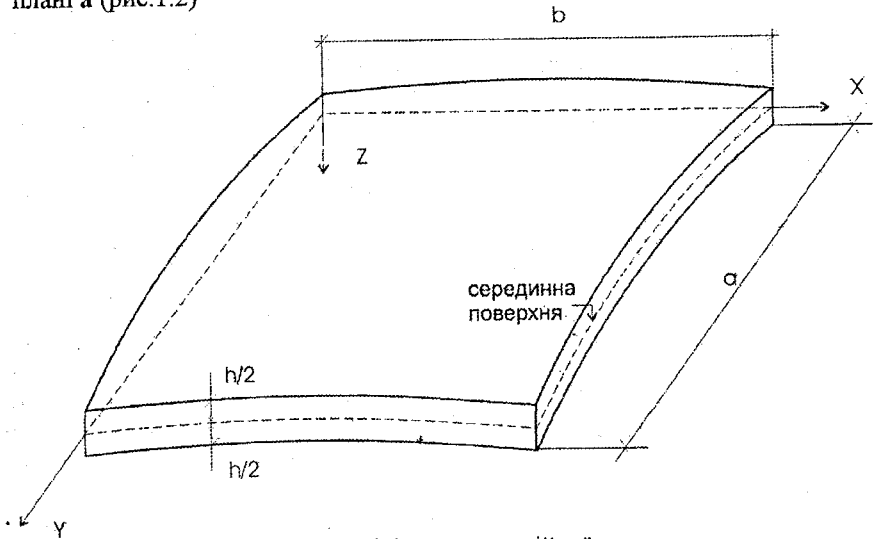


Рисунок 1.2 – Оболонка постійної товщини

Залежно від відношення $\frac{h}{a}$ пластини поділяються на групи:

- дуже тонкі пластини або мембрани $\frac{h}{a} < \frac{1}{80}$;
- тонкі пластини $\frac{1}{80} \leq \frac{h}{a} < \frac{1}{10} \left(\frac{1}{5} \right)$;

- пластини середньої товщини $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{5} \right) \left\langle \frac{h}{a} = \frac{1}{3} \right\rangle$;
- товсті пластини або плити $\frac{h}{a} \gg \frac{1}{3}$.

Для розв'язування задачі про згинання кожної із зазначених груп пластин застосовують відповідну теорію. До розгляду взято класичну теорію тонких пластин, які широко застосовуються в будівництві. Теорія придатна, якщо прогини пластини не перевищують $1/5$ її товщини. Такі пластини називаються жорсткими. В разі більших прогинів застосовують теорію гнучких пластин. Класична теорія тонких пластин, що є наближеною, ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа.

1.2 Основні гіпотези теорії оболонок

Гіпотези тонких оболонок не відрізняються від гіпотез теорії тонких пластин (гіпотез Кірхгофа):

1. Гіпотеза прямих недеформованих нормалей передбачає, що будь-який лінійний елемент, перпендикулярний до серединної поверхні до навантаження, залишається прямим і перпендикулярним до серединної поверхні пластини після деформування, а довжина його не змінюється.

2. Гіпотеза про нерозтяжність серединної поверхні передбачає відсутність деформацій у серединній площині, тобто серединна площина вільна від напружень і тому є нейтральною площиною.

3. Гіпотеза про відсутність тиску між шарами матеріалу пластини, паралельними серединній площині, дає змогу знехтувати напруженнями у напрямі нормалі до серединної площини порівняно з напруженнями в площині. Крім того, теорія розрахунку тонких оболонок базується на загальних гіпотезах теорії пружності.

В будівництві найчастіше використовуються оболонки обертання та оболонки перенесення.

1.3 Геометрія серединної поверхні оболонки

Розглянемо ділянку довільної поверхні " α " оболонки (рис.1.3). В точці " c " проведемо нормаль до неї. Довільна площина " β ", що включає цю нормаль, (тобто нормальна площина) перетинається з поверхнею " α " по плоскій кривій α , радіус кривизни якої в околі точки " c " позначимо R , а центр кривизни – O .

Величину $k = 1/R$ називають кривизною кривої α в околі точки " c ".

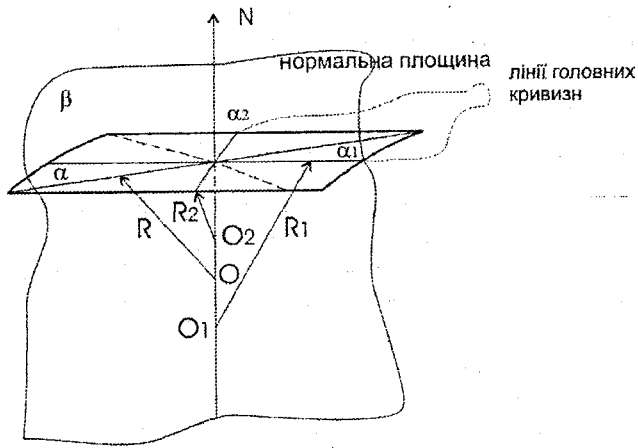


Рисунок 1.3 – Довільна ділянка поверхні оболонки

Якщо повертати площину " β " навколо нормалі " n ", отримаємо на поверхні " α " ряд кривих, що проходять через точку " c ". Центр кривизни буде при цьому переміщуватись поздовж нормалі. Відмітимо два його положення: O_1 і O_2 – найбільш і найменш віддалені від поверхні " α ". Цим центрам відповідають максимальний і мінімальний (R_1, R_2) радіуси, які називають головними радіусами кривизни поверхні " α " в точці " c ".

Відповідно $K_1 = 1/R_1$ і $K_2 = 1/R_2$ називають головними кривизнами. Їм відповідають на поверхні " α " лінії α_1 і α_2 , що називаються лініями головних кривизн. В довільній точці поверхні лінії головних кривизн нормальні одна одній.

На будь - яку поверхню можна нанести ортогональну сітку, що складається із ліній головних кривизн (рис.1.4,а).

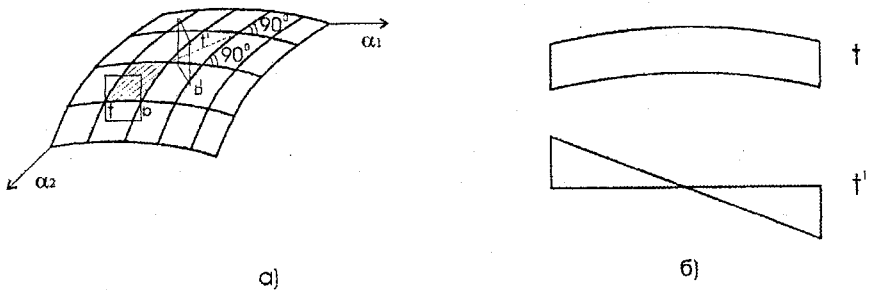


Рисунок 1.4 – Сітка головних кривизн

Лінії головних кривизн характерні ще й тим, що уздовж них відсутнє кручення поверхні. Це означає, що коли взяли 2 елементи: елемент t , утворений двома парами ліній головних кривизн, і елемент t^1 , утворений будь-якими іншими ортогональними лініями, то, спроектувавши їх на нормальні плоскості, відповідно b і b^1 , побачимо (рис.1.4,6), що другий з них закручений, а перший – ні.

Величина

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \quad (1.1)$$

називається гауссовою кривизною. Важливою характеристикою поверхні є знак гауссової кривизни, який залежить від того, як розташовані центри головних кривизн відносно до поверхні (рис. 1.5.)

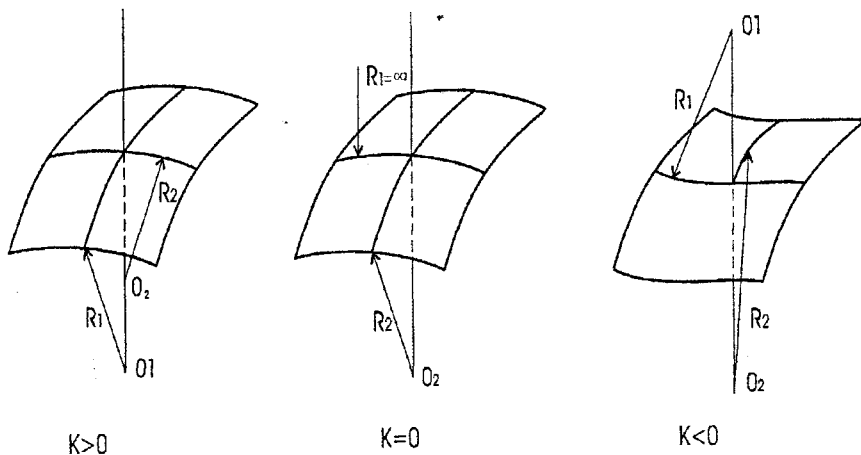


Рисунок 1.5 – Визначення знака гауссової кривизни

Гауссова кривизна серединної поверхні визначає загальну жорсткість оболонки, тобто її властивість зберігати початкову форму при дії зовнішніх сил. Найбільш жорсткими в цьому понятті є оболонки із серединною поверхнею, що мають додатну гауссову кривизну, скорочено їх називають оболонками додатної гауссової кривизни.

Менш жорсткі оболонки характеризуються нульовою гауссовою кривизною. Найменш жорсткі оболонки – від'ємною гауссовою кривизною.

Серединні поверхні оболонок, що їх використовують в будівництві, можуть бути утворені різними способами. Найбільш важливі випадки:

- оболонки обертання (рис.1.6), утворені обертанням плоскої кривої навколо прямої лінії. Для таких поверхонь лінії головних кривизн є меридіанами і паралелями.
- Оболонки перенесення (рис.1.7), утворені переміщенням плоскої кривої t , що лежить у вертикальній площині b , по двох напрямних кривих S , що лежать також у вертикальних площинах, перпендикулярних площині b .
- лінійчаті оболонки (рис.1.8), утворені переміщенням прямої лінії по двох прямих (але не паралельних) або кривих напрямних.

Деколи одну і ту ж саму поверхню можна утворювати різними способами. Так, циліндрична поверхня може вважатись поверхнею обертання, лінійчатою поверхнею і поверхнею перенесення; гіперболоїд обертання можна утворити лінійчатою поверхнею.

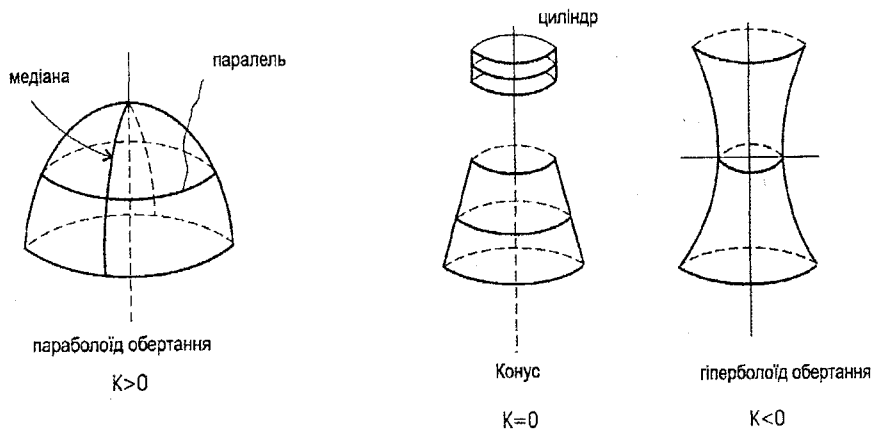


Рисунок 1.6 – Оболонки обертання

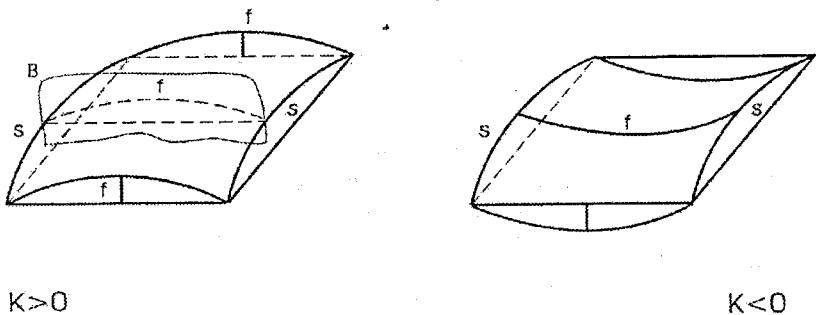
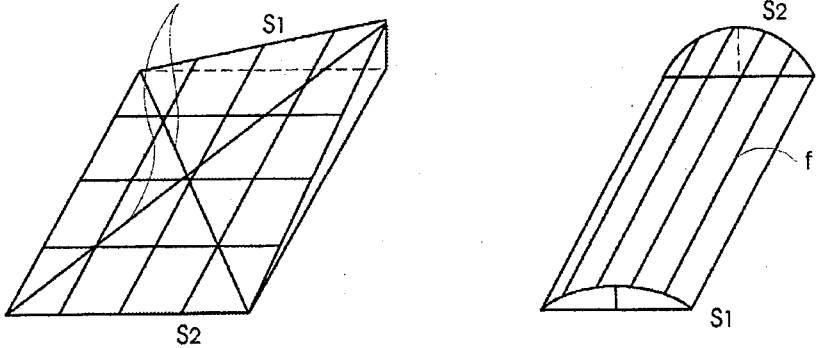


Рис. 1.7 – Оболонки перенесення

лінії головних кривизн



гіперболічний параболоїд (гіпар)

Рисунок 1.8 – Лінійчаті оболонки

1.4 Внутрішні зусилля, деформації, переміщення в оболонках

Коли відношення товщини оболонки h до найменшого із головних радіусів кривизни не перевищує $1/20$, то така оболонка вважається тонкою. (В реальних конструкціях це відношення може сягати $1/200 - 1/300$).

Внутрішні зусилля в оболонці діляться на 2 групи:

а) зусилля мембранного типу (рис.1.9,а): нормальні N_1, N_2 і зсувні S_{12}, S_{21} ; такі зусилля можуть виникати в плоскому диску чи в тонкій мембрані.

б) зусилля моментного типу (рис.1.9,б): згинальні моменти M_1, M_2 , крутні моменти M_{12}, M_{21} , поперечні сили Q_1, Q_2 ; такі зусилля можуть виникати в тонких пластинах.

Для тонких оболонок можна з достатньою точністю прийняти, що

$$S_{12} = S_{21} = S; \quad M_{12} = M_{21} = M_K. \quad (1.2)$$

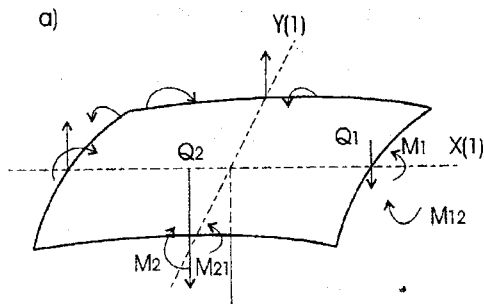
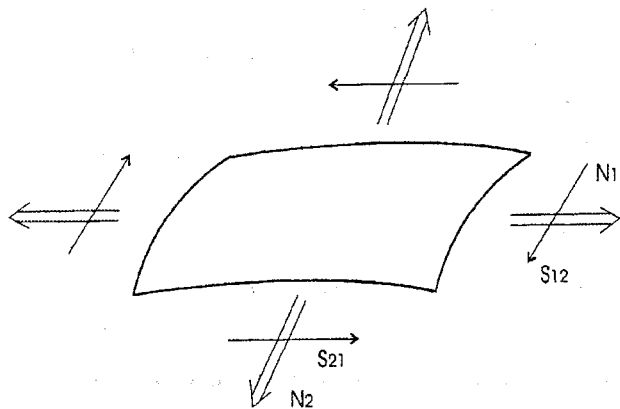
Під дією поперечного навантаження оболонка згинається, а точки в її серединній площині переміщуються. Складова переміщень вздовж OX позначається u (рис.1.9,в), в напрямі осі $OY - v$, в напрямі осі $OZ - w$ (це прогин оболонки).

Відносні подовження або лінійні деформації вздовж осей координат пов'язані з функціями лінійних переміщень диференціальними співвідношеннями Коші

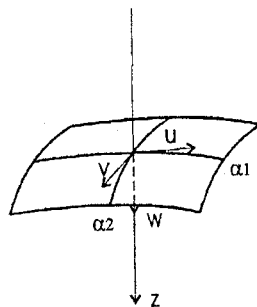
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{dv}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \quad (1.3)$$

Відносні зсуви, або кутові деформації, дають ще три співвідношення Коші

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}; \quad \gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}; \quad \gamma_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}. \quad (1.4)$$



б)



в)

Рисунки 1.9 – Види зусиль та переміщень в оболонках

Виходячи з гіпотези прямих недеформованих нормалей, вважається, що елементи матеріалу, які розташовані вздовж нормалі, не зазнають деформацій зсуву в площинах XOZ , YOZ , тобто

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad (1.5)$$

а розмір елемента в напрямі осі OZ не змінюється, отже, відповідна лінійна деформація нульова

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = 0 \quad (1.6)$$

Останнє співвідношення виконується лише тоді, коли прогини оболонки є функціями тільки двох координат X і Y: $W = \omega(X, Y)$. Отже, у всіх точках, які розташовані на вертикальній прямій, прогини однакові, постійні вздовж осі OZ.

Таким чином, в оболонці виникають лінійні деформації ε_x , ε_y ; кутові γ_{xy} ; деформації викривлення \varkappa_1 , \varkappa_2 та кручення χ .

Між зусиллями та деформаціями існує відповідність:

$$\begin{array}{ll} N - \varepsilon_x; & M - \varkappa_1; \\ N - \varepsilon_y; & M - \varkappa_2; \\ S - \gamma_{xy}; & M_k - \chi. \end{array}$$

Зусиллям Q_1 , Q_2 не відповідають ніякі деформації в силу гіпотези 1, де висловлюється думка, що в поперечних перерізах оболонки відсутні деформації зсуву.

Згідно із законом Гука, лінійні деформації вдовж осей OX, OY в пружному тілі визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z \delta)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

За гіпотезою про відсутність тиску між шарами матеріалу пластини σ_z слід знехтувати ($\sigma_z = 0$), а лінійні деформації будуть такими, як при плоскому напруженому стані:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x). \quad (1.8)$$

Нормальні напруження можна виразити через лінійні деформації:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x). \quad (1.9)$$

Дотичні напруження, згідно із законом Гука при зсуві:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (1-\nu) \gamma_{xy}. \quad (1.10)$$

Враховуючи [3,4], дістанемо такі формули для основних розрахункових напружень в оболонці:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{d^2w}{dy^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{d^2w}{dy^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (1-\nu) \cdot \frac{d^2w}{dx dy}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Напруження (1.7-1.11) характеризують міцність оболонки. Вони є функціями лише двох координат: $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$; $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$; $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$.

Тому задача про згинання пластини в математичному аспекті буде двовимірною, а у фізичному – просторовою (тривимірною).

З рівнянь рівноваги тривимірного тіла можна визначити також напруження $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, які називаються додатковими. Порівняно з основними, ці напруження невеликі і неістотно впливають на міцність оболонки.

Таким чином, із загального потоку математичної думки, в теорії оболонок розглядаються 8 зусиль, 6 деформацій і 3 переміщення. Кожна з цих величин є функцією двох координат (в загальному випадку криволінійних).

Зовнішнє навантаження, що діє на оболонку, задається у вигляді проєкцій на координатні осі X, Y, Z , і самі проєкції позначаються через $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

Коли в якійсь області оболонки діють лише мембранні зусилля, тоді такий напружений стан має назву **безмоментний**. При цьому напруження в поперечних перерізах розподіляються рівномірно по товщині і несуча спроможність матеріалу використовується найповніше.

Саме тому оболонки дають можливість перекривати в десятки раз більші прогони, ніж з використанням пластин тієї ж товщини і стають вельми економічними конструкціями. При проектуванні оболонок завжди прагнуть до того, щоб зусилля моментної групи були по можливості меншими за величиною і діями в обмежених областях.

РОЗДІЛ II

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИЛИХ ОБОЛОНОК ПОДВІЙНОЇ КРИВИЗНИ

2.1 Означення

Оболонку вважають похилою, коли її геометричні розміри такі, що виконується умова:

$$f \leq \frac{1}{5} \min(l_1, l_2), \quad (2.1)$$

тобто, якщо стріла підняття оболонки в центрі f не перебільшує 1/5 довжини меншої сторони оболонки в плані (рис.2.1), або

$$f_1 \leq \frac{l_1}{10}, \quad f_2 \leq \frac{l_2}{10}, \quad (2.2)$$

де f_1, f_2 - стріли підняття сторін контуру, l_1, l_2 - розміри оболонки в плані.

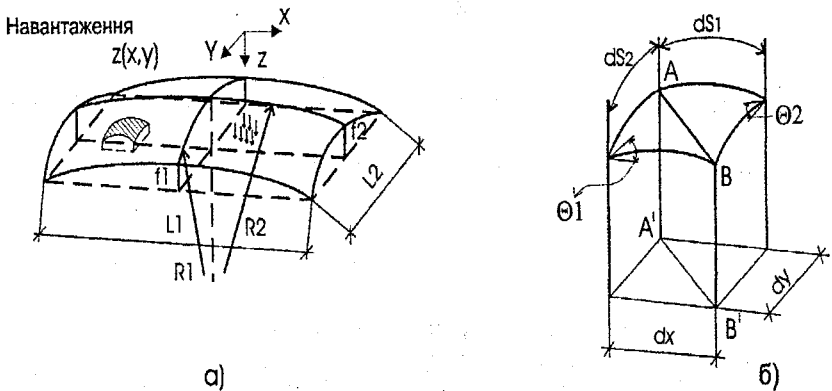


Рисунок 2.1 – Геометрія похилої оболонки

Очевидно, що похила оболонка подвійної кривизни, зображена на рис. 2.1, характеризується додатною гауссовою кривизною і їй властива велика жорсткість. Такі оболонки на наш час достатньо широко використовуються для влаштування як залізобетонних, так і металевих великопрогонових покрить. Оболонки подвійної кривизни, що характеризуються додатною гауссовою кривизною потребують **найменшої кількості опорних закріплень**, завдяки чому складаються **виключно сприятливі умови** для експлуатації приміщень промислового та цивільного призначення.

Ефективною тактикою розв'язування задачі про напружено - деформований стан оболонок є теорія похилих оболонок, яка була напрацьована в другій половині 40-х років В.З. Власовим [1], вона лежить в основі більшості методів розрахунку згаданих вище конструкцій.

2.2 Гіпотези і основні припущення

В теорії похилих оболонок крім гіпотез, вказаних в пункті 1.2, приймається ряд спеціальних допущень.

Розглянемо елемент серединної поверхні (рис.2.1,б), зі сторонами, паралельними осям X, Y. Кути нахилу дотичних до його сторін позначимо θ_1, θ_2 . В силу умови (2.2) ці кути достатньо малі, тоді можна було прийняти

$$\sin \theta_1 \approx \theta_1; \quad \cos \theta_1 \approx 1; \quad \sin \theta_2 \approx \theta_2; \quad \cos \theta_2 \approx 1. \quad (2.3)$$

Звідки витікає

$$dS_1 \approx dx, \quad dS_2 \approx dy, \quad AB \approx \overline{AB}. \quad (2.4)$$

Тому вважаємо, що

- а) геометрія серединної поверхні похилої оболонки не відрізняється від геометрії площини;
- б) для похилих оболонок можна також прийняти

$$\frac{1}{K_1} = R_1 = const, \quad \frac{1}{K_2} = R_2 = const;$$

- в) лінії на серединній поверхні, проекції яких суть прямі, паралельні осям X, Y, є лініями головних кривизн.

Із (2.3) також випливає, що можна не робити різниці між нормаллю до серединної поверхні і вертикаллю.

Для похилих оболонок, що використовуються для влаштування покрить і перекрыть, в більшості випадків основним є вертикальне навантаження (власна вага, корисне навантаження). Тому в подальшому вважаємо, що від нуля різняться лише складова навантаження Z , що діє в напрямку осі z .

Розрахунок похилої оболонки потребує визначення 17 невідомих (8 зусиль, 6 деформацій, 3 переміщення), що є функціями 2-х змінних x, y .

Таким чином, теорія похилих оболонок має включати 17 рівнянь.

2.3 Диференціальні рівняння рівноваги елемента похилої оболонки

Для елемента оболонки можна записати 6 умов рівноваги:

$$\begin{aligned}
 1) \sum X = 0, & \quad 4) \sum M_x = 0, \\
 2) \sum Y = 0, & \quad 5) \sum M_y = 0, \\
 3) \sum Z = 0, & \quad 6) \sum M_z = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Якщо взяти до уваги (1.2), то рівняння 6 перетворюється в тотожність. Залишається 5 рівнянь.

При запису 1-го і 2-го рівнянь можна знехтувати проєкціями поперечних сил на осі X і Y в порівнянні з проєкціями нормальних і зсувних сил на ці ж осі (наприклад, $Q_1 \sin \theta_1 \ll N_1 \cos \theta_1$, дійсно $\sin \theta_1 \ll \cos \theta_1$), а крім того, зазвичай $Q_1 < N_1$. Тоді отримані рівняння не будуть відрізнятися від відповідних рівнянь елемента плоского диска, які при відсутності компонент навантаження \bar{X}, \bar{Y} , а також сил інерції мають вигляд [3].

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} = 0; \quad \frac{d\tau_{yx}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} = 0.
 \tag{2.6}$$

Внутрішні зусилля мембранного типу записуються через напруження так:

$$N_1 = \sigma_x \cdot \delta, \quad N_2 = \sigma_y \cdot \delta, \quad S = \tau_{xy} \cdot \delta,
 \tag{2.7}$$

де δ - товщина оболонки.

Помноживши (2.6) на δ і враховуючи (2.7) отримаємо для похилої оболонки дві перші умови рівноваги в такому вигляді:

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dS}{dy} = 0; \quad \frac{dS}{dx} + \frac{dN_2}{dy} = 0. \quad (2.8)$$

Для похилої оболонки четверта та п'ята умови рівноваги:

$$\frac{dM_1}{dx} + \frac{dM_k}{dy} = Q_1; \quad \frac{dM_k}{dx} + \frac{dM_2}{dy} = Q_2. \quad (2.9)$$

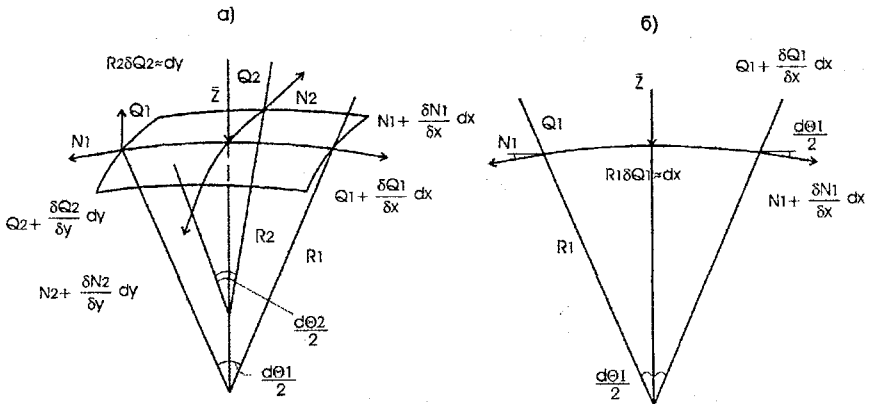


Рисунок 2.2 – Внутрішні зусилля серединної поверхні оболонки, що дають ненульові проекції на вісь Z

На рис.2.2 наведено елемент серединної поверхні похилої оболонки з внутрішніми зусиллями, що дають ненульові проекції на вісь Z .

Сума проекції сил на вісь Z дає:

$$2N_1 dy \frac{d\theta_1}{2} + 2N_2 dx \frac{d\theta_2}{2} + \frac{dQ_1}{dx} dx dy + \frac{dQ_2}{dy} dx dy + Z dx dy = 0. \quad (2.10)$$

Розділивши (2.10) на $dx \times dy$ і, враховуючи, що :

$$\frac{d\theta_1}{dx} = \frac{1}{R_1}, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = \frac{1}{R_2}; \quad (2.11)$$

отримаємо

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} = -Z. \quad (2.12)$$

При $R_1 = R_2 = \infty$, тобто, коли похила оболонка вироджується в пластинку, це рівняння пов'язує в пластинці похідні поперечних сил і зовнішнє навантаження.

Таким чином, для похилої оболонки система рівнянь рівноваги через внутрішні зусилля має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dS}{dy} = 0; \quad \frac{dS}{dx} + \frac{dN_2}{dy} = 0; \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} = -\bar{Z}; \\ \frac{dM_1}{dx} + \frac{dM_k}{dy} = Q_1; \quad \frac{dM_k}{dx} + \frac{dM_2}{dy} = Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Оскільки невідомих зусиль більше, ніж рівнянь рівноваги, задача розрахунку оболонки є статично невизначеною.

2.4 Геометричні рівняння

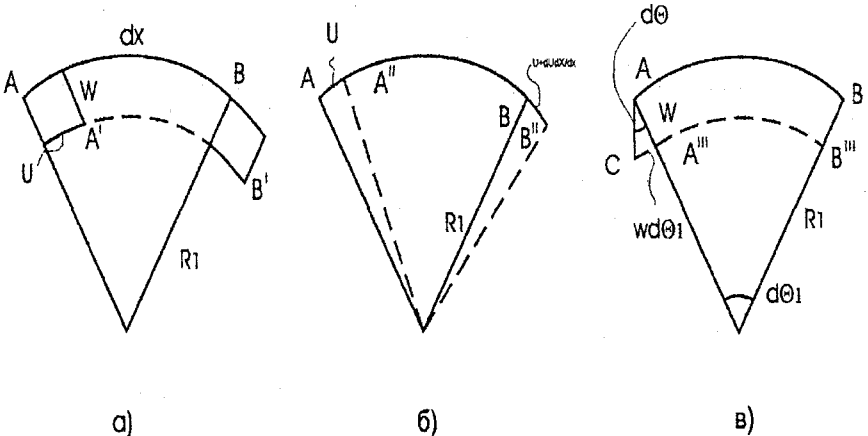


Рисунок 2.3 – Елемент перерізу середньої поверхні після деформації

Встановимо зв'язок між переміщеннями і деформаціями елемента оболонки.

Елемент перерізу серединної поверхні АВ (рис.2.3,а) після деформації займає положення А¹ В¹. Розглянемо окремо переміщення його точок по дотичній до дуги (рис.2.3,б) і по нормалі (рис.2.3,в). В першому випадку відносно подовження:

$$\varepsilon_1^x = \frac{A''B'' - AB}{AB} = \frac{du}{dx}$$

В другому випадку:

$$\varepsilon_1^y = -\frac{A''C}{AC} - \frac{wd\theta_1}{dx} = -\frac{wd\theta_1}{R_1 dx} = -\frac{w}{R_1} = -k_1 w.$$

Подовження ε_2 визначається аналогічно. В результаті:

$$\varepsilon_1 = -\frac{du}{dx} - k_1 w; \quad \varepsilon_2 = -\frac{dv}{dy} - k_2 w. \quad (2.14)$$

Деформація зсуву елемента серединної поверхні (рис.2.1,а), що проходить в дотичній площині, буде такою ж, як і для елемента плоского диска:

$$\gamma = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \quad (2.15)$$

До рівнянь (2.14), (2.15) додаються ще вирази деформацій викривлення і кручення через переміщення W, які записуються так само, як для випадку плоскої пластинки:

$$\varkappa_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}; \quad \varkappa_2 = -\frac{d^2 w}{dy^2}; \quad \chi = -2 \frac{d^2 w}{dxdy} \quad (2.16)$$

2.5 Фізичні рівняння

Відомо, що при $\sigma_z = 0$ закон Гука можна показати в вигляді залежностей:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}.$$

Враховуючи це, а також (2.7), можна записати:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E\delta}(N_1 - \mu N_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E\delta}(N_2 - \mu N_1), \quad \gamma = \frac{2(1-\mu)}{E\delta}S. \quad (2.17)$$

Залежність між внутрішніми зусиллями моментного типу і переміщеннями W , враховуючи пологість оболонок, приймається такою, як і в теорії згину пластин [4]:

$$M_1 = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{d^2 w}{dy^2} \right);$$

$$M_2 = -D \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2} \right);$$

$$M_k = -D(1-\mu) \frac{d^2 w}{dx dy}; \quad (2.18)$$

$$D = \frac{EI}{1-\mu} = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad (2.19)$$

Із 4-го та 5-го рівнянь рівноваги (2.13) і рівнянь (2.18) отримаємо вирази для поперечних сил, також відомі із теорії згину пластин:

$$Q_1 = -D \frac{d}{dx} \nabla^2 w;$$

$$Q_2 = -D \frac{d}{dy} \nabla^2 w; \quad (2.20)$$

де $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$ - бігармонічний оператор Лапласа. (2.21)

Таким чином отримаємо: 5 рівнянь рівноваги (2.13), 6 геометричних рівнянь (2.14) - (2.16) і 6 фізичних (2.17), (2.18) - всього 17 рівнянь для визначення 17 невідомих (8 зусиль, 6 деформацій, 3 переміщення).

2.6 Рівняння сумісності деформацій

Для запису рівняння сумісності два рази продиференціюємо рівності (2.14), перше за y , друге за x , та додамо отримані вирази:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon_1}{dy^2} &= \frac{du^3}{dxdy^2} - k_1 \frac{d^2 w}{dy^2}; \\ &+ \\ \frac{d^2 \varepsilon_2}{dx^2} &= \frac{d^3 v}{dx^3 dy} - k_2 \frac{d^2 w}{dx^2}; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{dy^2} + \frac{d^2 \varepsilon_2}{dx^2} = \frac{d^2}{dxdy} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) - \left(k_q \frac{d^2 w}{dy^2} + k_2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right)$$

Введемо позначення

$$k_1 \frac{d^2}{dy^2} + k_2 \frac{d^2}{dx^2} = \nabla_k^2. \quad (2.22)$$

Із урахуванням (2.15) отримаємо:

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{dy^2} + \frac{d^2 \varepsilon_2}{dx^2} - \frac{d^2 \gamma}{dxdy} = -\nabla_k^2 w. \quad (2.23)$$

Це і є рівняння сумісності деформацій для похилої оболонки, записане в деформаціях. При $k_1 = k_2 = 0$ рівняння (2.23) перетворюється в рівняння сумісності деформацій плоскої задачі.

2.7 Розрахункові рівняння теорії похилих оболонок

П'ять рівнянь рівноваги (2.13), одне рівняння сумісності деформацій (2.23) та шість фізичних залежностей (2.17), (2.18) пов'язують 8 невідомих внутрішніх зусиль $N_1, N_2, S, M_1, M_2, M_\kappa, Q_1, Q_2$, 3 деформації $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ і одне переміщення w . Для зручності розв'язання цієї системи, що складатиметься із 12 диференціальних і алгебричних рівнянь, вводиться функція напружень $\varphi(x, y)$. Подібна функція $\varphi_1(x, y)$ використовується в [4] та задається виразами:

$$\sigma_x = \frac{d^2 \varphi_1}{dy^2}, \quad \delta y = \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{d^2 \varphi_1}{dxdy} \quad (2.24)$$

Відомо, що при зведенні напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в вигляді (2.4) тотожно задовольняються рівняння рівноваги (2.6).

Із (2.4) випливає, що $\varphi = \varphi_1 \cdot \delta$.

Природно, що мембранні зусилля подаються у вигляді:

$$N_1 = \frac{d^2\varphi}{dy^2}, \quad N_2 = \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad S = \frac{d^2\varphi}{dxdy}, \quad (2.25)$$

І це приводить до тотожного задоволення двох перших рівнянь (2.13).

В формулах (2.17) за допомогою залежностей (2.25) можна виразити зусилля N_1 , N_2 і S через функцію напружень φ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E\delta} \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E\delta} \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \mu \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right); \\ \gamma &= \frac{2(1+\mu)}{E\delta} \cdot \frac{d^2\varphi}{dxdy}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Підставимо в третє із рівнянь рівноваги (2.13) вирази для поперечних сил (2.20) і для мембранних зусиль (2.25):

$$k_1 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + k_2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - D \left(\frac{d^2}{dx^2} \nabla^2 w + \frac{d^2}{dy^2} \nabla^2 w \right) = -\bar{z}.$$

Використасмо позначення (2.21) і (2.22) і отримаємо диференціальне рівняння:

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \nabla_k^2 \varphi = \bar{z}. \quad (2.27)$$

Якщо підставити вираз для деформації (2.26) в рівняння сумісності деформацій (2.23), то воно набуде виразу:

$$\nabla_k^2 w + \frac{1}{E\delta} \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.28)$$

Позначимо $\nabla^2\nabla^2 = \nabla^4$ і отримаємо систему двох розрахункових рівнянь теорії похилих оболонок в вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} D\nabla^4 w - \nabla_k^2 \varphi &= z \\ \nabla_k^2 w + \frac{1}{E\delta} \nabla^4 \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.29, a) \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{aligned} \nabla^4 w - \frac{1}{D} \nabla_k^2 \varphi &= \frac{z}{D} \\ E\delta \nabla_k^2 w + \nabla^4 \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.29, b)$$

Рівняння (2.29) є рівняннями змішаного методу. Дійсно, тут одна невідома функція (φ) – силова, інша (w) – геометрична.

Перше рівняння виведене на основі умови рівноваги, друге – на основі умови сумісності деформацій. Нарешті, оператори, розташовані симетрично відносно головної діагоналі (2.29.а), відрізняються лише знаком, що характерно для системи рівнянь змішаного типу.

Природно, що при вирішенні конкретних задач до системи розрахункових рівнянь (2.29) потрібно приєднати умови на контурі.

Потрібно відмітити, що при:

$$R_1 = R_2 = \infty, \quad K_1 = K_2 = 0, \quad (2.30)$$

де R_1, R_2 – радіуси кривизни; K_1, K_2 – кривизни.

Тобто, коли серединна поверхня оболонки вироджується в площину, система рівнянь (2.29) розкладається на 2 самостійні диференціальні рівняння в частинних похідних. Перше із цих рівнянь, як видно із (2.29.б), є бігармонічним рівнянням плоскої задачі [3.4], друге – основним рівнянням згину пластин [3.4].

Перше із них побудоване для вирішення задачі в напруженнях, а друге – для вирішення в переміщеннях.

Функції w і φ є розрахунковими. Тобто, через них можна виразити мембранні зусилля (2.25), згинальні та крутні моменти (2.18), поперечні сили (2.20), а також підставивши (2.26) в (2.14), можна отримати вирази для переміщень u і v :

$$u = \int \left[\frac{1}{E\delta} \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) + k_1 w \right] dx, \quad (2.31)$$

$$v = \int \left[\frac{1}{E\delta} \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \mu \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right) + k_2 w \right] dy.$$

2.8 Умови на контурі похилої оболонки

Як відомо, при розв'язуванні конкретних задач з розрахунку похилих оболонок до системи диференціальних розрахункових рівнянь (2.29) необхідно додати умови на контурі.

У відповідності з першою гіпотезою теорії тонких оболонок лінійний елемент краю оболонки, нормальний до серединної поверхні, в процесі деформації має розглядатись як абсолютно жорсткий. На рис. 2.4

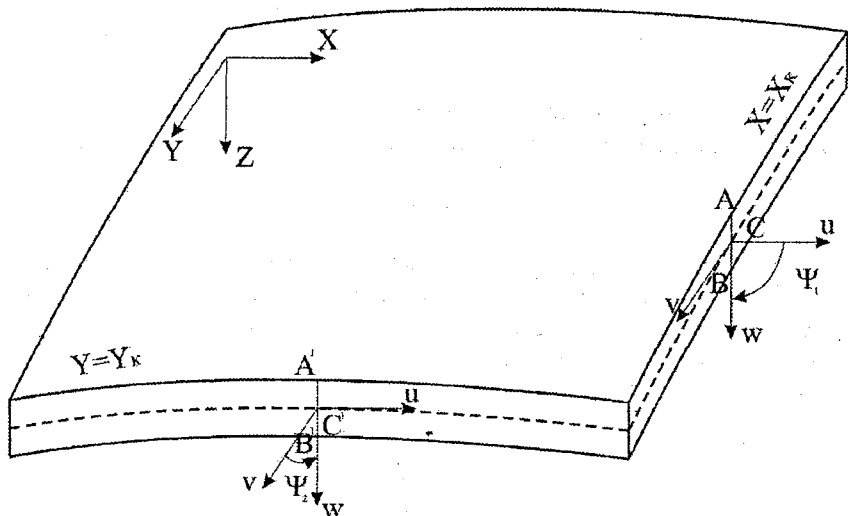


Рисунок 2.4 – Криволінійний елемент оболонки

такі елементи позначені AB і $A'B'$. Положення такого елемента після деформації визначають 4 величини: три компоненти переміщень середини елемента (C та C') - u , v , w і кут повертання елемента в площині, нормальній до серединної поверхні і до контурного перерізу (ψ_1 чи ψ_2 , в залежності від того як направлена нормаль до контурного перерізу).

У відповідності з цим умови жорсткого закріплення, наприклад з боку контуру $y = y_k$ прямокутної оболонки, записуються так :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \psi_2 = \frac{dw}{dy} = 0. \quad (2.32)$$

Тепер розглянемо випадок, коли на вільній стороні контуру прямокутної похилої оболонки, наприклад $x = x_k$, відсутні внутрішні зусилля. Умовою того, що ця сторона контуру вільна, має бути рівність нулю п'яти внутрішніх зусиль: N_1 , S , M_1 , M_k ($M_k = M_{12} = M_{21}$), Q_1 , (рис.1.9). Але диференціальні рівняння задачі такі (2.29), що на кожній стороні контуру можливе задоволення лише чотирьох умов. В силу цього, на контурі крутні моменти замінюються статично еквівалентними поперечними силами, точно так, як це робиться в теорії згину пластин.

Іншими словами, в теорії похилих оболонок при записі умов на контурі зусилля M_k , Q_1 а також Q_2 , M_k замінюються статично еквівалентними поперечними силами Q_1^* , Q_2^* [4,5]:

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{dM_k}{dy}, \quad Q_2^* = Q_2 + \frac{dM_k}{dx} \quad (2.33)$$

Таким чином, умови на вільно опертій стороні контуру $x = x_k$ прямокутної похилої оболонки записуються у вигляді:

$$N_1 = 0, \quad S = 0, \quad M_k = 0, \quad Q_1^* = 0 \quad (2.34)$$

Із (2.32) і (2.34) видно, що умови на жорстко закріпленій стороні контуру записуються в переміщеннях, а на вільній – в зусиллях. Умови на контурі можуть бути і змішаного типу, тобто можливе задання частини умов в зусиллях, частини – в переміщеннях.

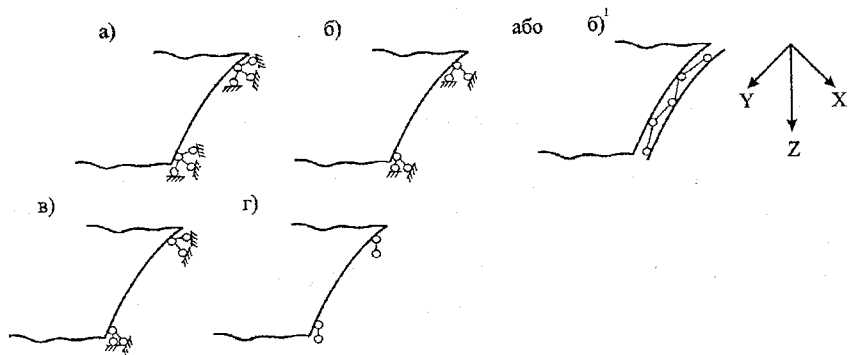


Рисунок 2.5 – Граничні умови на контурі оболонки

Так на рис. 2.5,а подано шарнірно нерухоме закріплення краю $x = x_k$. Граничні умови тут такі:

$$U=0, \quad V=0, \quad W=0, \quad M_1=0. \quad (2.35)$$

На рис. 2.5,б показано шарнірно рухоме закріплення з рухомістю в напрямку осі x .

Граничні умови :

$$V=0, \quad W=0, \quad N_1=0, \quad M_1=0. \quad (2.36)$$

(В теорії оболонок таке закріплення прийнято називати „шарнірним” і зображується воно так, як показано на рис. 2.5,б).

Рис. 2.5,в – шарнірно рухоме закріплення з рухомістю в напрямку осі у. Граничні умови :

$$U=0, \quad W=0, \quad S=0, \quad M_1=0. \quad (2.37)$$

Рис. 2.5,г – шарнірне закріплення в напрямку осей x, у або радіальне опирання. Граничні умови :

$$S=0, \quad W=0, \quad N_1=0, \quad M_1=0. \quad (2.38)$$

Всього можна зобразити 8 видів шарнірних закріплень контуру зв'язками, а загальна кількість варіантів закріплення контуру, що не деформується, – 16. Та цими варіантами умов на контурі не вичерпується вся їх множина. Можливе накладання на контур різного роду пружних зв'язків, а також прикріплення контуру чи його частини до елементів конструкцій арками, фермами і т.д. В цьому випадку умови на контурі описують умови контакту краю оболонки з елементом, до якого прикріплений цей край.

РОЗДІЛ III

Розрахунок похилих оболонок подвійної кривизни з шарнірним опиранням по всьому контуру

3.1 Розв'язування в подвійних тригонометричних рядах. Випадок довільного навантаження

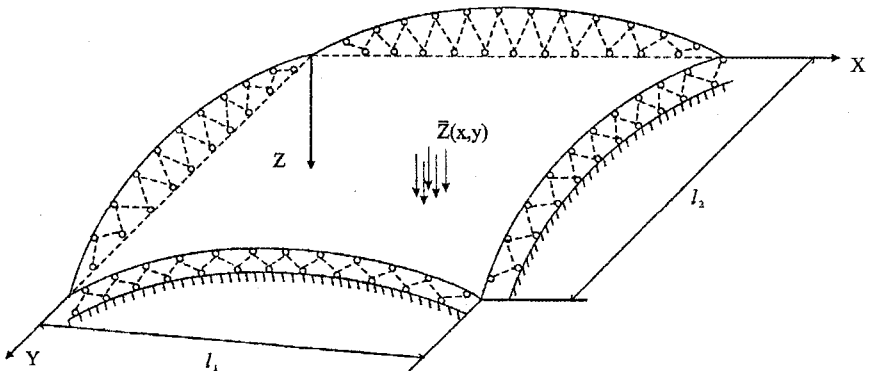


Рисунок 3.1 – Похила оболонка з шарнірним закріпленням по контуру

Одержати інтеграл системи диференціальних рівнянь (2.29,а) в замкнутому вигляді можна лише в небагатьох випадках

$$D^4 w - \Delta_K^2 \varphi = Z(x, y)$$

$$\frac{1}{E\delta} \Delta^4 \varphi + \Delta_K^2 w = 0$$

Перше з рівнянь системи є рівнянням рівноваги, друге – рівнянням сумісності деформацій.

Через $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ позначено оператор Лапласа.

$\nabla_K^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – диференціальний оператор, пов'язаний з кривизнами;

q – інтенсивність розподіленого поверхневого навантаження.

Найбільш поширені різноманітні наближені методи розрахунку, до яких належить метод подвійних тригонометричних рядів – метод Нав'є.

Нехай похила оболонка додатної гауссової кривизни (рис.3.1) шарнірно закріплена по всьому контуру, як показано на рис. 2.5,б¹.

Граничні умови у відповідності з (2.36)

$$\text{при } x=0, \text{ і } x=l_1: \quad W=0, \quad N_1=0, \quad M_1=0, \quad V=0; \quad (3.1)$$

$$\text{при } y=0, \quad y=l_2: \quad V=0, \quad W=0, \quad N_2=0, \quad M_2=0.$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.29) шукатимемо з нескінченного подвійного тригонометричного ряду

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \quad (3.2)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \quad (3.3)$$

де A_{mn}, B_{mn} – невідомі постійні коефіцієнти, які потрібно визначити; m, n – додатні цілі числа натурального ряду 1,2,3...

Цей метод розв'язування розрахункових рівнянь теорії похилих оболонок був запропонований В.В. Власовим [1].

Величину зовнішнього навантаження $Z(x,y)$, що стоїть в правій частині другого рівняння (2.29), теж розкладемо в подвійний тригонометричний ряд на прямокутній області $0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$, тобто:

$$Z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \quad (3.4)$$

Коефіцієнт C_{mn} – відома величина, що визначається згідно з теорією рядів Фур'є:

$$C_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} Z(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} dx dy \quad (3.5)$$

Якщо функції (3.2), (3.3) є розв'язком задачі, вони мають задовольняти розрахункові диференціальні рівняння та граничні умови. При шарнірному обпиранні оболонки прогинів у точках на її контурі немає і згинальні моменти, тобто другі похідні функції прогину в напрямі, перпендикулярному до краю оболонки, дорівнюють нулю.

Другі похідні функції прогину мають вигляд

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{l_1} \right)^2 \sin \frac{n\pi y}{l_2} \sin \frac{m\pi x}{l_1};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{l_2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2};$$

Звідки робимо висновок, що граничні умови виконуються, оскільки при

$$x=0 \text{ та при } x=l_1 \quad \sin \frac{m\pi x}{l_1} = 0, \quad \text{а при } y=0, \quad y=l_2, \quad \sin \frac{n\pi y}{l_2} = 0.$$

Якщо розгорнути граничні умови (3.1) за допомогою виразів (2.25), (2.18), (2.31), то побачимо, що для $x=0$, і для $x=l_1$

$$\int \left[\frac{1}{E\delta} \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} - \mu \frac{d\varphi^2}{dy^2} \right) + k_2 w \right] dy = 0; \quad w = 0; \quad \frac{d\varphi^2}{dy^2} = 0; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.6)$$

В (3.6) входять похідні за x лише парних порядків а оскільки при $x=0$, $x=l_1$ величина $\sin \frac{m\pi x}{l_1} = 0$ і будь-яка їх парна похідна перетворюється в нуль, то граничні умови задовольняються. Те ж можна показати і для країв $y=0$, $y=l_2$.

Для визначення коефіцієнтів A_{mn} , і B_{mn} , підставляємо ряди (3.2), (3.3), (3.4) в систему (2.29 б):

$$\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right) A_{mn} + \frac{1}{D} \left(k_2 \frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + k_1 \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right) B_{mn} - \frac{1}{D} C_{mn} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} = 0; \right. \quad (3.7)$$

$$\left. \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-E\delta \left(k_2 \frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + k_1 \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right) A_{mn} + \left(\frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right) B_{mn} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} = 0.$$

Відомо, що якщо сума ряду, складеного за ортогональними функціями, рівна нулю, то має дорівнювати нулю будь-який коефіцієнт цього ряду.

Оскільки функції $\sin \frac{m\pi x}{l_1} = 0$ ортогональні в проміжку $0 \leq x \leq l_1$, а

$\sin \frac{n\pi y}{l_2} = 0$ в проміжку $0 \leq y \leq l_2$, то потрібно прирівняти до нуля

коефіцієнти рядів (3.7), тобто вирази в квадратних дужках. В результаті отримуємо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} -E\delta \left(k_2 \frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + k_1 \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right) A_{mn} + \left(\frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right) B_{mn} = 0 \\ \left(\frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right)^2 A_{mn} + \frac{1}{D} \left(k_2 \frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} + k_1 \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} \right) B_{mn} = \frac{1}{D} C_{mn}; \end{cases} \quad (3.8)$$

Коренями цієї системи будуть вирази

$$A_{mn} = \frac{\frac{\pi^4}{D} \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right)^2 C_{mn}}{\pi^8 \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right)^4 + \pi^4 \frac{E\delta}{D} \left(k_2 \frac{m^2}{l_1^2} + k_1 \frac{n^2}{l_2^2} \right)^2}, \quad (3.9)$$

$$B_{mn} = \frac{\pi^2 \frac{E\delta}{D} \left(k_2 \frac{m^2}{l_1^2} + k_1 \frac{n^2}{l_2^2} \right) C_{mn}}{\pi^8 \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right)^4 + \pi^4 \frac{E\delta}{D} \left(k_2 \frac{m^2}{l_1^2} + k_1 \frac{n^2}{l_2^2} \right)^2}.$$

Для спрощення формул введемо позначення $\gamma = \frac{l_1}{l_2}$, $\nu = \frac{E\delta \cdot l_1^4}{\pi^4 D}$. Тоді

$$\begin{cases} A_{mn} = \frac{l_1^4 C_{mn}}{\pi^4 D} \frac{(m^2 + \gamma^2 + n^2)^2}{(m^2 + \gamma^2 + n^2)^4 + \nu(k_2 m^2 + k_1 \gamma^2 n^2)^2}, \\ B_{mn} = \frac{l_1^2 C_{mn}}{\pi^2} \frac{k_2 m^2 + k_1 \gamma^2 n^2}{(m^2 + \gamma^2 + n^2)^4 + \nu(k_2 m^2 + k_1 \gamma^2 n^2)^2}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Підставивши (3.2), (3.3) в (2.18), (2.20) і (2.25) можна отримати залежності для розрахунку

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$N_1 = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{l_2^2} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$N_2 = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{l_1^2} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}, \quad (3.11)$$

$$S = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nm\pi^2}{l_1 l_2} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$M_1 = \frac{\pi^2 D}{l_1^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + \mu \gamma^2 n^2) A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$M_2 = \frac{\pi^2 D}{l_2^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu m^2 + \gamma^2 n^2) A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$M_k = \frac{\pi^2 D(1-\mu)}{l_1 l_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$Q_1 = \frac{\pi^3 D}{l_1^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + \gamma^2 n^2) mA_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$Q_2 = \frac{\pi^3 D \gamma}{l_1^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + \gamma^2 n^2) n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2}.$$

3.2 Розв'язування в подвійних тригонометричних рядах. Випадок рівномірно розподіленого навантаження

При $Z(x,y) = q = \text{const}$ вираз (3.5), який використовується при розрахунку як оболонок, так і пластин, приймає вигляд

$$C_{mn} = \begin{cases} \frac{16q}{\pi^2 mn} & \text{при } m, n \text{ не парне} \\ 0 & \text{при } m, n \text{ парне} \end{cases} \quad (3.12)$$

Підстановка (3.12) в (3.11) дає

$$A_{mn} = \frac{16ql_1^4}{\pi^6 D} a_{mn}, \quad B_{mn} = \frac{16ql_1^2}{\pi^4} v b_{mn} \quad (3.13)$$

де

$$a_{mn} = \frac{(m^2 + \gamma^2 n^2)^2}{mn[(k_2 m^2 + k_1 \gamma^2 n^2)^2 + (m^2 + \gamma^2 n^2)^4]} \quad (3.14)$$

$$m, n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$b_{mn} = \frac{k_2 m^2 + k_1 \gamma^2 n^2}{mn[(k_2 m^2 + k_1 \gamma^2 n^2) + (m^2 + \gamma^2 n^2)^4]}$$

При підстановці (3.13) в (3.11) отримуємо розрахункові формули

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{16ql_1^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 N_1 &= - \frac{16q\gamma^4 v}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 N_2 &= - \frac{16q}{\pi^2} v \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 S &= - \frac{16q\gamma v}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} nmb_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 M_1 &= \frac{16ql_1^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + \mu\gamma^2 n^2) a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 M_2 &= \frac{16ql_1^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma^2 n^2 + \mu n^2) a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 M_k &= \frac{16(1-\mu)l_1^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mna_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 Q_1 &= \frac{16ql_1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(m^2 + \gamma^2 n^2) a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}, \\
 Q_2 &= \frac{16ql_1\gamma}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n(m^2 + \gamma^2 n^2) a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Швидкість збіжності рядів (3.15) визначається структурою їх коефіцієнтів. Кожний з них являє собою дріб, чисельник і знаменник якого є багаточленами відносно індексів m і n . Чим більший степінь знаменника порівняно зі степенем чисельника, тим швидше збігається ряд.

Взагалі, ряди для мембранних зусиль мають більшу збіжність, ніж для моментних. В цьому можна впевнитись, порівнявши форми епюр тих і інших зусиль (рис.3.2). В мембранних зусиллях вона більш плавна.

3.3 Аналіз напруженого стану шарнірно опертої похилої оболонки

В будівництві зазвичай використовують похилі оболонки із

співвідношенням розмірів $1 \leq \frac{l_1}{l_2} \leq 2$, найчастіше – квадратні. На рис. 3.2 показано типовий вигляд епюр внутрішніх зусиль в квадратній оболонці при рівномірно розподіленому навантаженні.

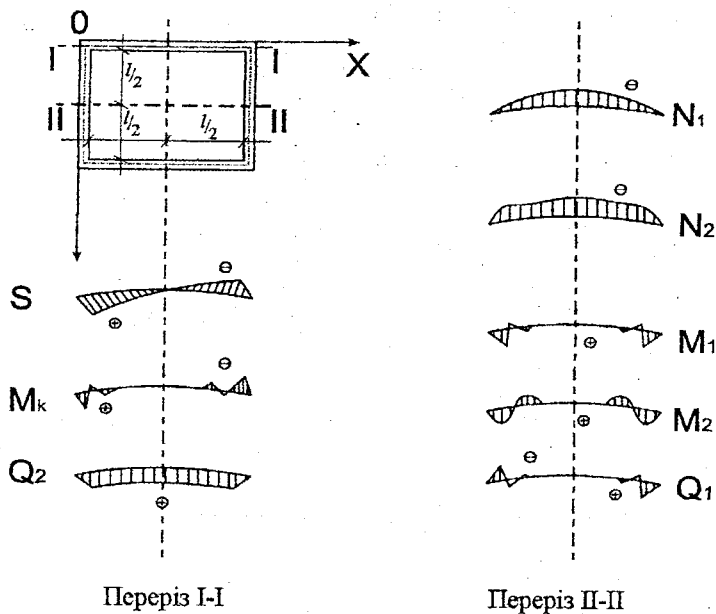


Рисунок 3.2 – Типові епюри внутрішніх зусиль квадратної оболонки при дії на неї розподіленого навантаження

Із рис. 3.2 видно, що зусилля моментного типу (M_1, M_2, M_k, Q_1, Q_2) швидко зменшується з віддаленням від краю. Таке явище називається **крайовим ефектом**.

В середній частині оболонки діють лише мембранні зусилля (N_1, N_2, S), тобто там існує безмоментний напружений стан. В куткових зонах розвиваються головні розтяжні зусилля. Вони діють по діагональних перерізах (рис. 3.3,а).

При розрахунку залізобетонної прямокутної в плані похилої оболонки подвійної кривизни потрібно мати на увазі, що про дії рівномірно розподіленого навантаження можлива поява тріщин двох типів. Тріщини першого типу (1 на рис. 3.3,а) можуть розвиватись через наявність головних розтяжних напружень по діагональних перерізах в куткових зонах. Тріщини другого типу (2 на рис. 3.3,а) пов'язані з дією

згинального моменту в зоні краевого ефекту і можливі на нижній поверхні оболонки.

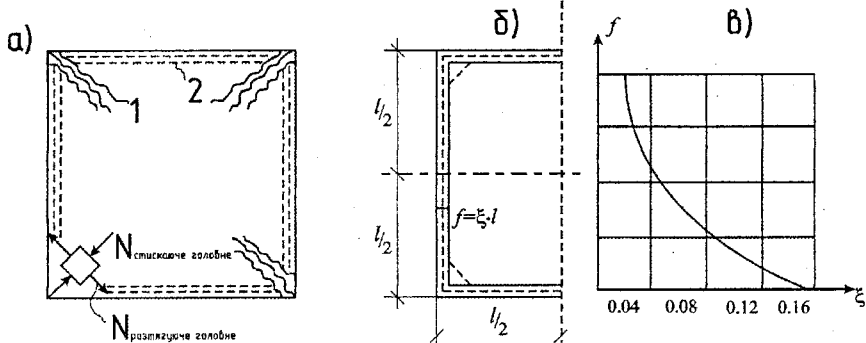


Рисунок 3.3 - Види тріщин в залізобетонній прямокутній оболонці

Таким чином, в оболонці можна виділити приконтурну смугу, на якій по нижній поверхні діють розтягуючі напруження (рис.3.3.б). Ширина цієї смуги t залежить від параметра $\lambda = 1.17 \sqrt{\frac{f}{\delta}}$, причому для квадратної оболонки ця залежність зображається графіком, наведеним на рис. 3.3,в.

Оболонка має бути спроектована таким чином, щоб в процесі її експлуатації тріщини не з'являлись або щоб була обмежена ширина їх розкриття.

РОЗДІЛ IV

Розрахунок похилих оболонок подвійної кривизни з більш складними умовами на контурі

4.1 Оболонка з шарнірним опиранням двох протилежних сторін контуру. Розв'язання в одинарних тригонометричних рядах

Оболонка на рис.4.1 закріплена шарнірно-рухомо по краях $x=0$, $x=l_1$, а по двох інших краях закріплення довільне; наприклад, один край може бути жорстко закріплений, інший – вільний.

Розв'язок системи (2.29) шукаємо в формі рядів:

$$W(x,y) = \sum_m W_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l_1}, \quad \varphi(x,y) = \sum_m \Phi_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l_1}. \quad (4.1)$$

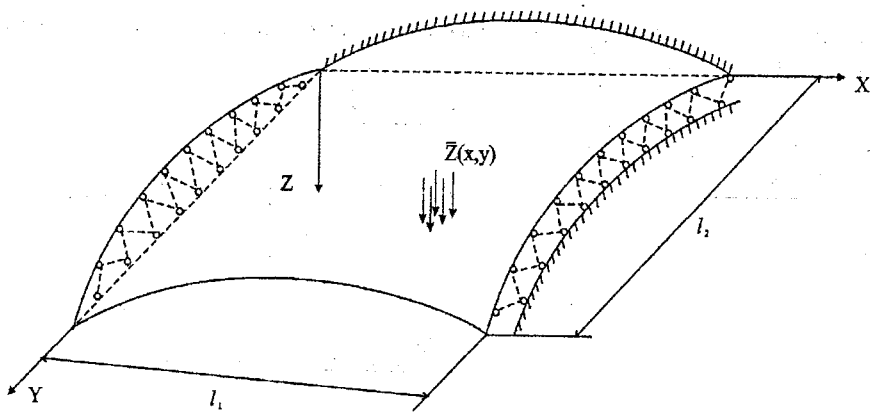


Рисунок 4.1 – Оболонка з різним опиранням сторін

Навантаження подано теж у вигляді ряду:

$$\bar{Z}(x, y) = \sum_m^{\infty} Z_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l_1} ; \quad (4.2)$$

де коефіцієнти знаходимо згідно з теорією рядів Фур'є:

$$Z_m(y) = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} Z(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l_1} dx . \quad (4.3)$$

Розв'язок (4.1) задовольняє умови шарнірного опирання по краях $x=0$, $x=l_1$.

Підстановка (4.1) і (4.2) в систему (2.29,6) і прирівнювання нулю коефіцієнтів за аналогією, як це було зроблено в 3.1, приводить до системи диференціальних рівнянь в звичайних похідних за змінною y :

$$\begin{cases} (W_m \alpha_m^4 - 2W_m'' \alpha_m^2 + W_m^{IV}) - \frac{1}{D} (-k_2 \alpha_m^2 \Phi_m + k_1 \Phi_m'') = \frac{1}{D} Z_m, \\ E \delta (-k_2 \alpha_m^2 W_m + k_1 W_m'') + \Phi_m \alpha_m^4 - 2\Phi_m'' c^2 + \Phi_m^{IV} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

Через a_m позначено :

$$a_m = \frac{m\pi}{l_1} . \quad (4.5)$$

Загальний розв'язок однорідної системи рівнянь, що відповідає (4.4) шукається у вигляді:

$$W_m = A_m e^{SmY}; \quad \Phi_m = B_m e^{SmY}; \quad (4.6)$$

Тут S_m – постійна величина, поки що невідома;

A_m, B_m – довільні постійні.

Підстановка (4.6) в (4.4) дає систему характеристичних рівнянь (алгебричних):

$$\begin{cases} (\alpha_m^2 - S_m^2)^2 A_m - \frac{1}{D} (-k_2 \alpha_m^2 + k_1 S_m^2) B_m = 0, \\ E \delta (-k_2 \alpha_m^2 + k_1 S_m^2) A_m + (\alpha_m^2 - S_m^2)^2 B_m = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Оскільки система (4.7) однорідна відносно A_m, B_m , то ці величини будуть ненульові лише тоді, коли визначник системи дорівнюватиме нулю:

$$\begin{vmatrix} (\alpha_m^2 - S_m^2)^2 & -\frac{1}{D} (-k_2 \alpha_m^2 + k_1 S_m^2) \\ E \delta (-k_2 \alpha_m^2 + k_1 S_m^2) & (\alpha_m^2 - S_m^2)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.8)$$

З (4.8) отримуємо характеристичне рівняння:

$$(\alpha_m^2 - S_m^2)^4 + \frac{E \delta}{D} (-k_2 \alpha_m^2 + k_1 S_m^2) = 0; \quad (4.9)$$

що має 8 комплексних коренів такого вигляду:

$$\begin{aligned} S_{1+4,m} &= \pm (\rho_{1m} \pm i q_{1m}) \\ S_{5+8,m} &= \pm (\rho_{2m} \pm i q_{2m}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

(При $m = 1$ величини $\rho_{1m}, q_{1m}, \rho_{2m}, q_{2m}$ можна знайти із виразів (4.18) і (4.17)).

Із (4.7) можна знайти відношення $\rho_m = \frac{B_m}{A_m}$, їх має бути 8, як і S_m .

$$\rho_m = \frac{B_m}{A_m} = \frac{D(\alpha_m^2 - S_m^2)^2}{-k_2 \alpha_m^2 + k_1 S_m^2}. \quad (4.11)$$

В результаті, з урахуванням (4.6):

$$W_m = \sum_{j=1}^{\infty} A_{jm} e^{S_{jm}Y}; \quad \Phi_m = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{jm} A_{jm} e^{S_{jm}Y}. \quad (4.12)$$

Ці розв'язки подаються в більш зручному вигляді за допомогою відомої залежності:

$$e^{(\alpha+i\beta)} = e^\alpha (\cos \beta + i \cdot \sin \beta),$$

а саме:

$$W_m = \sum_{j=1}^8 C_{jm} \Psi_{jm}; \quad \Phi_m = \sum_{j=1}^{\infty} C_{jm} \Psi_{jm}; \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \Psi_{1m} &= e^{-P_{1m} \cdot Y} \cos q_{1m} \cdot Y, & \Psi_{5m} &= e^{P_{1m} \cdot Y} \cos q_{1m} \cdot Y, \\ \Psi_{2m} &= e^{-P_{1m} \cdot Y} \sin q_{1m} \cdot Y, & \Psi_{6m} &= e^{P_{1m} \cdot Y} \sin q_{1m} \cdot Y, \\ \Psi_{3m} &= e^{-P_{2m} \cdot Y} \cos q_{2m} \cdot Y, & \Psi_{7m} &= e^{P_{2m} \cdot Y} \cos q_{2m} \cdot Y, \\ \Psi_{4m} &= e^{-P_{2m} \cdot Y} \sin q_{2m} \cdot Y, & \Psi_{8m} &= e^{P_{2m} \cdot Y} \sin q_{2m} \cdot Y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Постійні G_{jm} пов'язані з C_{jm} лінійними залежностями, що витікають з (4.11).

Додавши до (4.13) часткові розв'язки системи (4.4), W_{0m} та Φ_{0m} , що залежать від характеру розподілення навантаження (при $Z_m = \text{const}$ вони теж постійні), приходимо до кінцевих виразів:

$$\begin{aligned} W &= \sum_m \sum_{j=1}^8 (C_{jm} \Psi_{jm} + W_{0m}) \sin \alpha_{mx}; \\ \varphi &= \sum_m \sum_{j=1}^8 (G_{jm} \Psi_{jm} + \Phi_{0m}) \sin \alpha_{mx} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Звідси за допомогою (2.18), (2.20), (2.25), (2.31) можна отримати вирази для всіх зусиль і переміщень.

Довільні постійні C_{jm} (а через них і G_{jm}) визначаються з граничних умов по краях $y=0$ і $y=l_2$, загальним числом 8. Таким чином можуть бути уточнені різні способи закріплення цих країв.

Якщо розміри оболонки такі, що значення $P_{1m} \frac{l_2}{2}$ і $P_{2m} \frac{l_2}{2}$ будуть досить великими, то отримаємо, що при $y=l_2/2$ $\Psi_{1+4} \ll 1$, $\Psi_{5+8} \gg 1$.

(Наприклад, при $P_{1m} \frac{l_2}{2} = 5$ $e^{P_{1m} \cdot l_2/2} \approx 150$, $e^{-P_{1m} \cdot l_2/2} \approx 1/150$). Це значить, що взаємний вплив граничних умов на контурі $y=0$ і на контурі $y=l_2$ незначний, і тому можна розв'язувати граничну задачу і знаходити довільні постійні для кожного краю окремо. Тоді, наприклад, для краю $y=0$

в формулах (4.13),(4.15) можна відкинути довільні постійні $C_{s+8,m}$ і $G_{s+8,m}$. Розрахунок в цьому випадку суттєво спроститься.

Описане в цьому розділі рішення можна використовувати в випадках, коли два протилежні краї оболонки (тобто, $y=0$ і $y=l_2$) підкріплено пружними ребрами, а також і тоді, коли є проміжні ребра, що йдуть в тому ж напрямку (в останньому випадку оболонку доводиться ділити на декілька секцій і записувати умови їх спряження). Розв'язання перерахованих задач можна знайти в [13].

4.2 Розрахунок системи, що складається із похилих оболонок і контурних діафрагм (загальний випадок)

Тонкостінні просторові покриття, як правило, підкріплюються по контуру діафрагмами. Для похилої оболонки додатної гауссової кривизни це можуть бути арки (рис.4.2,а,б), ферми (рис. 4.2, в), криволінійні балки, що оперті на ряд стояків, які коливаються (рис. 4.2,г), або на суцільну стіну (рис. 4.2, д).

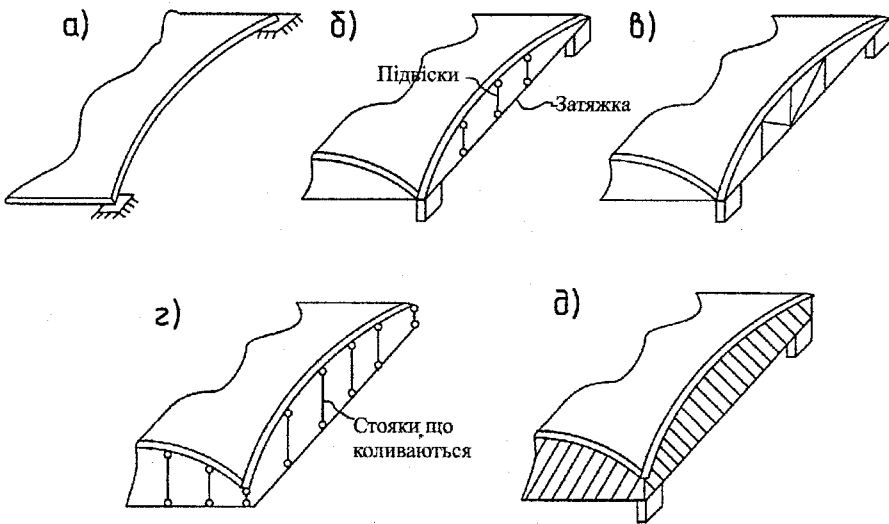


Рисунок 4.2 – Контурні кріплення оболонок

Діафрагма, будучи **монолітно** зв'язаною з оболонкою, **деформує разом** з нею. Якщо вона являє собою конструкцію, достатньо жорстку в своїй площині і піддатливу із цієї площини (як наприклад схеми на рис. 4.2, в, і 4.2, д), то таку оболонку допускається наближено розраховувати як шарнірно оперту і використовувати весь розрахунковий апарат, описаний

раніше в розділі 3. Отримані при цьому зусилля на контурі оболонки прикладаються (в зворотному напрямку) до верхнього краю діафрагми, яка на ці зусилля і розраховується. Але для таких діафрагм, як аркові, цей варіант не годиться через велику деформівність у власній площині.

Один із раціональних практичних методів розрахунку похилих оболонок з діафрагмами розроблений В.С. Бартедьовим [14]. Його суть:

I. Для розкриття статичної невизначеності, обумовленої спряженням оболонки з діафрагмою (рис. 4.3, а), використовується змішаний метод будівельної механіки. Для країв $y = const$ за невідомі прийнято:

- зусилля $X_1(X) = M_{20}(X)$ і $X_2(X) = N_{20}(X)$, що діють по лінії спряження;
- переміщення точок цієї лінії - $Z_3(X) = DU_0(X)$ і $Z_4(X) = D \cdot W_0(X)$ (рис. 4.3, б).

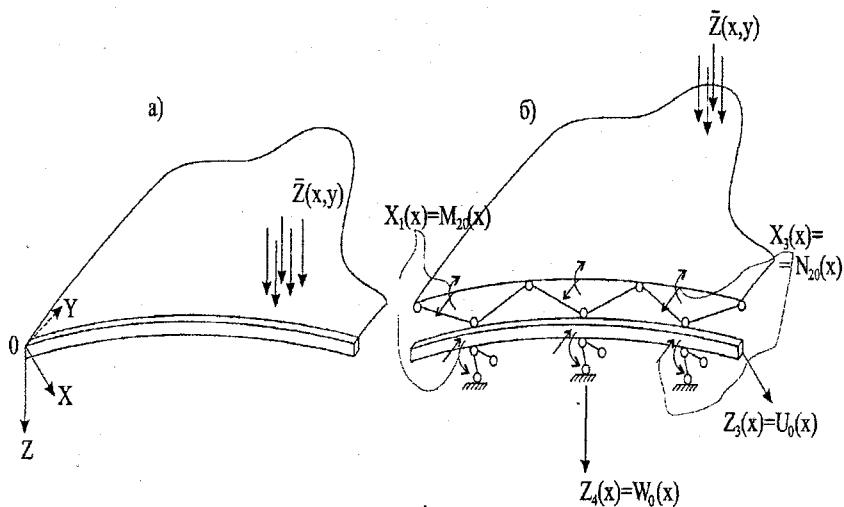


Рисунок 4.3 – Спряженість оболонок з діафрагмами

Щоб побудувати основну систему, необхідно:

- вилучити паралельні осі Y зв'язки, що з'єднують оболонку і діафрагму, а також моментні зв'язки;
- накласти на лінію спряження розподілені зв'язки, паралельні осям X і Z .

Таким чином, основна система складається із діафрагми, закріпленої від переміщень в своїй площині, і оболонки, на краю якої рівні нулю M_2 , N_2 , V , W . Але тоді оболонка в основній системі стає шарнірно опертою, як

показано на рис. 3.1, а тому для знаходження переміщень і зусиль, що виникають в ній від дії зовнішнього навантаження, можна використовувати викладений вище в розділі III розрахунковий апарат.

II. Вважаємо, що невідомі $X_1(X), X_2(X), Z_3(X), Z_4(X)$, які діють на краю оболонки, що її розглядають, не залежать від відповідних невідомих на інших трьох краях.

Викликаний ними напружено-деформований стан оболонки зручно описати за допомогою одинарних тригонометричних рядів.

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \sum_m^{\infty} N_{1m}(y) \sin a_m x; & M_k(x, y) &= \sum_m^{\infty} M_{km}(y) \cos a_m x; \\
 N_2(x, y) &= \sum_m^{\infty} N_{2m}(y) \sin a_m x; & U(x, y) &= \sum_m^{\infty} U_m(y) \cos a_m x; \\
 M_1(x, y) &= \sum_m^{\infty} M_{1m}(y) \sin a_m x; & V(x, y) &= \sum_m^{\infty} V_m(y) \sin a_m x; \\
 M_2(x, y) &= \sum_m^{\infty} M_{2m}(y) \sin a_m x; & W(x, y) &= \sum_m^{\infty} W_m(y) \sin a_m x; \\
 Q_2^*(x, y) &= \sum_m^{\infty} Q_{2m}^*(y) \sin a_m x; & \psi_2(x, y) &= \sum_m^{\infty} \psi_{2m}(y) \sin a_m x. \\
 S(x, y) &= \sum_m^{\infty} S_m(y) \cos a_m x; & &
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Коли $Z = const$, то $m = 1, 3, 5, 7, \dots$

Коефіцієнти цих рядів залежать від $W_m(y)$ і $\Phi_m(y)$.

III. Вважають, що для практичних розрахунків можна наближено враховувати тільки $m=1$, зберігши таким чином в рядах (4.16) лише перші члени.

Якщо (4.16) розгорнути за допомогою (4.15) і (4.14), то отримаємо вирази, наведені в табл. 1 (індекс m тут і далі опущено).

Позначення в табл. 1:

$$C = \sqrt{\frac{E\delta}{D}}; \quad \lambda = aR_2 = \frac{\pi R_2}{l_1}; \quad B_1 = A - \lambda^2; \quad B_2 = A - \lambda^2;$$

$$B_3 = B + b_1; \quad B_4 = B - b_1, \quad \text{якщо } R_2 > R_1; \quad \alpha = \frac{\pi}{l_1};$$

$$B_3 = B - b_1; \quad B_4 = B + b_1, \quad \text{якщо } R_2 < R_1;$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{b_1^4 + a_1^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)^2} + b_1^2 \right]}; \quad \alpha_1 = CR_2 \lambda^2;$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{b_1^4 + a_1^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)^2} - b_1^2 \right]}; \quad b_1 = \frac{CR_2^2}{2R_1}; \quad (4.17)$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{B_2^2 + B_4^2} - B_2 \right)}; \quad d_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{B_2^2 + B_4^2} + B_2 \right)};$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{B_2^2 + B_4^2} + B_2 \right)}; \quad d_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{B_2^2 + B_4^2} - B_2 \right)};$$

Примітки:

I. $C_1 = R_1 P_{12}; C_2 = R_2 P_{2m};$ при $m=1$ (4.18)

$$d_1 = R_2 q_{1m}; \quad d_2 = R_2 q_{2m}; \quad \text{при } m=1. \text{ Див. (4.10).}$$

II. Для сферичної оболонки $R = R_1 = R_2,$

$$A = 0; B = b_1; B_1 = \lambda^2; B_2 = -\lambda^2; B_3 = 0; B_4 = 2B_1; C_2 = \lambda; d_2 = 0; \psi_4(y) = 0.$$

III. В розрахунках, що тут описуються, коефіцієнт Пуассона прийнятий рівним нулю.

Довільні постійні, що є в наявності в таблиці 1, визначаються із 4-х граничних умов при $y=0$.

Як видно із (4.14): $\psi_1(0) = \psi_3(0) = 1; \quad \psi_2(0) = \psi_4(0) = 0. \quad (4.19)$

Крайові значення зусиль і переміщень на основі (4.16) і таблиці 1 визначаються:

$$N_{20}(x) = N_0 \sin ax; \quad S_0(x) = S_0 \cos ax;$$

$$M_{20}(x) = M_0 \sin ax; \quad Q_{20}^*(x) = Q_{20}^* \sin ax; \quad (4.20)$$

$$U_0(x) = U_0 \cos ax; \quad V_0(x) = V_0 \sin ax;$$

$$W_{20}(x) = W_0 \sin ax; \quad \varphi_{20}(x) = \varphi_0 \sin ax.$$

IV. На основі припущення, зробленого в п. II, для кожного краю оболонки окремо потрібно записати систему 4-х рівнянь змішаного методу, з якої і будуть знайдені $X_1(x), X_2(x), Z_3(x), Z_4(x)$. Ці рівняння можна подати в такій формі:

Таблиця 1 - Коефіцієнти в формулах для визначення невідомих

Зусилля і переміт	Множник	C ₁		C ₂		C ₃		C ₄	
		Ψ ₁	Ψ ₂	Ψ ₁	Ψ ₂	Ψ ₃	Ψ ₄	Ψ ₃	Ψ ₄
N ₁	Csin ax	-B ₄	-B ₂	B ₂	-B ₄	B ₃	-B ₁	B ₁	B ₃
N ₂	(-1)* cλ ² sin ax	-	1	-1	-	-	-1	1	-
S	(-1)* Cλcos ax	d ₁	-c ₁	-c ₁	d ₁	d ₁	-c ₁	-c ₁	d ₁
M ₁	λ ² sin ax	1	-	-	1	1	-	-	1
M ₂	-sin ax	-B ₂	B ₄	-B ₄	-B ₂	B ₁	B ₃	-B ₃	B ₁
M _K	λcos ax	-c ₁	-d ₁	d ₁	-c ₁	-c ₂	-d ₂	d ₂	-c ₂
Q ₂	-1/R ₂ * Sin ax	C ₁ B ₁ + d ₁ B ₄	- C ₁ B ₄ + d ₁ B ₁	C ₁ B ₄ - d ₁ B ₁	C ₁ B ₁ + d ₁ B ₄	- C ₂ B ₂ + d ₂ B ₃	-C ₂ B ₃ - d ₂ B ₂	C ₂ B ₃ + d ₂ B ₂	- C ₂ B ₂ + d ₂ B ₃
Du	-R ² /cλ ² * Cos ax	-B ₃	-B ₂	B ₂	-B ₃	B ₄	-B ₁	B ₁	B ₄
Dv	R ² /cλ ² * Sin ax	C ₁ B ₃ - d ₁ B ₁	C ₁ B ₁ + d ₁ B ₃	-C ₁ B ₁ - D ₁ B ₃	C ₁ B ₃ - d ₁ B ₁	-C ₄ B ₃ - d ₂ B ₂	C ₂ B ₂ - D ₂ B ₄	-C ₂ B ₂ + d ₂ B ₄	-C ₂ B ₄ - d ₂ B ₂
Dw	R ₂ ² sin ax	1	-	-	1	1	-	-	1
DΨ ₂	R ₂ ² sin ax	-c ₁	-d ₁	d ₁	-c ₁	-c ₂	-d ₂	d ₂	-c ₂

$$\begin{cases} \Delta_{11}(x) + \Delta_{12}(x) + \Delta_{13}(x) + \Delta_{14}(x) + \Delta_{1P}(x) = 0 \\ \Delta_{21}(x) + \Delta_{22}(x) + \Delta_{23}(x) + \Delta_{24}(x) + \Delta_{2P}(x) = 0 \\ \Delta_{31}(x) + \Delta_{32}(x) + \Delta_{33}(x) + \Delta_{34}(x) + \Delta_{3P}(x) = 0 \\ \Delta_{41}(x) + \Delta_{42}(x) + \Delta_{43}(x) + \Delta_{44}(x) + \Delta_{4P}(x) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Перше з рівнянь виражає рівність нулю кута взаємного обертання оболонки і діафрагми відносно осі X.

Друге – рівність нулю взаємного переміщення їх в напрямку осі У, третє – рівність нулю реакцій в накладених зв'язках, направлених вздовж осі X, четверте – те ж в зв'язках, направлених вздовж осі Z.

В рівняннях (4.21) $\Delta_{ik}(x)$ – D кратне переміщення в напрямку невідомого $X_i(x)$, викликане дією $X_k(x)$ (або $Z_k(x)$);

$\Delta_{iP}(x)$ – те ж від зовнішнього навантаження;

$R_{ik}(x)$ – реакція в зв'язках і-того напрямку, викликана вказаними вище діями;

$R_{iP}(x)$ – те ж від зовнішнього навантаження.

Кожну складову в (4.21) можна подати у вигляді суми двох величин:

$$\Delta_{ik}(x) = \Delta_{ik}^{oo}(x) + \Delta_{ik}^o(x); \quad \Delta_{iP}(x) = \Delta_{iP}^{oo}(x) + \Delta_{iP}^o(x); \quad \text{і т. д.} \quad (4.22)$$

Перша складова – це Дкратне переміщення (або реактивне зусилля) оболонки, а друге – діафрагми.

Щоб привести рівняння (4.21) до канонічної форми, всім невідомим по черзі надають одиничні значення, тобто, згідно з (4.20), потрібно прийняти

- 1) $M_0=1$, тоді $X_1(x) \equiv M_{20}(x) = \sin ax$,
- 2) $N_0=1$, тоді $X_2(x) \equiv N_{20}(x) = \sin ax$,
- 3) $Du_0=1$, тоді $Z_3(x) \equiv Du_0(x) = \cos ax$,
- 4) $Dw_0=1$, тоді $Z_4(x) \equiv Dw_0(x) = \sin ax$,

$$(4.23)$$

В першому випадку розв'язується гранична задача

$$M_0=1, \quad N_0 = u_0 = w_0 = 0, \quad (4.24)$$

і визначаються за допомогою таблиці 1 довільні постійні $C_1^M, C_2^M, C_3^M, C_4^M$, а потім Дкратне переміщення $D\Psi_{20}(x), Dv_0(x)$ і зусилля $S_0(x), Q_{20}^*(x)$. Із (4.21) і (4.22) зрозуміло, що ці величини являють собою відповідно Дкратні одиничні переміщення $\delta_{11}^{o6}(x), \delta_{21}^{o6}(x)^*$ і одиничні реакції $r_{31}^{o6}(x)$; де - тут і далі для спрощення пишеться $\delta_k(x)$, а не $D\delta_k(x)$.

У відповідності з (4.20) ці величини можна подати в такій формі:

$$\begin{aligned} \delta_{11}^{o6}(x) &= \delta_{11}^{o6} \sin ax, & \delta_{21}^{o6}(x) &= \delta_{21}^{o6} \sin ax, \\ r_{31}^{o6}(x) &= r_{31}^{o6} \cos ax, & r_{41}^{o6}(x) &= r_{41}^{o6} \sin ax. \end{aligned} \quad (4.25)$$

До подібного вигляду приводяться величини $\delta_{11}^{\partial}(x), \delta_{21}^{\partial}(x), \delta_{31}^{\partial}(x), \delta_{41}^{\partial}(x)$.

Після цього розглядається друга гранична задача

$$N_0=1, \quad M_0 = u_0 = w_0 = 0, \quad (4.26)$$

і знаходяться $C_1^N, C_2^N, C_3^N, C_4^N$, а за ними - $\delta_{12}^{o6}(x), \delta_{22}^{o6}(x), r_{32}^{o6}(x), r_{42}^{o6}(x); \delta_{12}^{\partial}(x), \delta_{22}^{\partial}(x), r_{32}^{\partial}(x), r_{42}^{\partial}(x)$. Потім розв'язуються третя та четверта задачі:

$$Du_0=1, \quad M_0 = N_0 = w_0 = 0, \quad Dw_0=1, \quad M_0 = N_0 = u_0 = 0. \quad (4.27)$$

У вільні члени системи (4.21) входять, згідно з (4.22), вказані вище переміщення і зусилля на краю шарнірно опертої оболонки при дії

зовнішнього навантаження. Вони визначаються згідно з викладеним у розділі III, в припущенні, що $m = 1$ (при цьому всі подвійні ряди перетворюються в одинарні), і подаються в формі, аналогічній (4.25). Нарешті, визначаються і другі складові вільних членів – вантажні переміщення і реактивні зусилля в діафрагмі.

Після підстановки всіх знайдених величин, наприклад, в перше із рівнянь (4.21) маємо

$$(\delta_{11}^{o\delta} + \delta_{11}^{\delta}) \sin ax \cdot M_0 + (\delta_{12}^{o\delta} + \delta_{12}^{\delta}) \sin ax \cdot N_0 + \dots + (\Delta_{1P}^{o\delta} + \Delta_{1P}^{\delta}) \sin ax = 0.$$

Скоротивши на $\sin ax$, отримуємо алгебричне рівняння.

На завершення система (4.21) набуває вигляду:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \delta_{11}^{o\delta} & \delta_{12}^{o\delta} & \delta_{11}^{\delta} & \delta_{12}^{\delta} \\ \delta_{21}^{o\delta} & \delta_{22}^{o\delta} & \delta_{21}^{\delta} & \delta_{22}^{\delta} \\ \delta_{31}^{o\delta} & \delta_{32}^{o\delta} & \delta_{31}^{\delta} & \delta_{32}^{\delta} \\ \delta_{41}^{o\delta} & \delta_{42}^{o\delta} & \delta_{41}^{\delta} & \delta_{42}^{\delta} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc|cc} \delta_{13}^{o\delta} & \delta_{14}^{o\delta} & \delta_{13}^{\delta} & \delta_{14}^{\delta} \\ \delta_{23}^{o\delta} & \delta_{24}^{o\delta} & \delta_{23}^{\delta} & \delta_{24}^{\delta} \\ \delta_{33}^{o\delta} & \delta_{34}^{o\delta} & \delta_{33}^{\delta} & \delta_{34}^{\delta} \\ \delta_{43}^{o\delta} & \delta_{44}^{o\delta} & \delta_{43}^{\delta} & \delta_{44}^{\delta} \end{array} \right) \times \begin{array}{c} M_0 \\ N_0 \\ Du_0 \\ Dw_0 \end{array} = - \begin{array}{c} \Delta_{1P}^{o\delta} \\ \Delta_{2P}^{o\delta} \\ \Delta_{3P}^{o\delta} \\ \Delta_{4P}^{o\delta} \end{array} - \begin{array}{c} \Delta_{1P}^{\delta} \\ \Delta_{2P}^{\delta} \\ \Delta_{3P}^{\delta} \\ \Delta_{4P}^{\delta} \end{array}. \quad (4.28)$$

Примітка. Перший і четвертий блоки кожної із матриць, що стоять в лівій частині, симетричні, другий і четвертий блоки взаємно транспоновані і мають протилежні знаки.

Розв'язування цієї системи дає значення M_0 , N_0 , Du_0 , Dw_0 . За ними визначаються постійні C_{1-4} :

$$C_j = C_j^M M_0 + C_j^N N_0 + C_j^u Du_0 + C_j^w Dw_0. \quad (4.29)$$

Нарешті, за таблицею 1 обчислюються зусилля і переміщення в оболонці; зусилля в діафрагмі знаходяться за правилами будівельної механіки стержневих систем.

Такий розрахунок потрібно повторити стільки раз, скільки сторін контуру оболонки підкріплено пружними діафрагмами. При цьому рекомендується кожний раз змінювати систему координат, сполучаючи вісь X з проекцією краю, що розглядається. Обчислені зусилля і переміщення додаються до відповідних величин, знайдених для основної системи (тобто, шарнірно опертої оболонки) при дії на неї зовнішнього навантаження.

4.3 Розрахунок похилої оболонки з контурними діафрагмами, що мають жорсткість лише в своїй площині

Якщо діафрагма має дуже малу жорсткість із власної площини, то можна вважати, що вона не сприймає ні згинального моменту, ні нормальної сили. Тому для краю $x=0$ буде

$$M_0 = N_0 = 0,$$

і тоді потрібно шукати лише Du_0 і Dw_0 , тобто задача про спряження розв'язується методом переміщень. Система (4.21), а відповідно і (4.28), значно спрощуються, (4.28) набирає вигляду

$$\left(\begin{array}{c|c} r_{33}^{o6} & r_{34}^{o6} \\ \hline r_{43}^{o6} & r_{44}^{o6} \end{array} + \begin{array}{c|c} r_{33}^o & r_{34}^o \\ \hline r_{43}^o & r_{44}^o \end{array} \right) * \begin{array}{c} Du_0 \\ Dw_0 \end{array} = - \begin{array}{c} R_{3P}^{o6} + R_{3P}^o \\ R_{4P}^{o6} + R_{4P}^o \end{array} \quad (4.30)$$

Із одиничних станів (4.23) потрібно розглядати лише третій і четвертий. Нижче наведена збірка формул для цього випадку:

$$\begin{aligned} r_{33}^{o6} &= \frac{c^2 \lambda^2}{R_2 p} (-Ae_1 + Be_2); & r_{34}^{o6} &= r_{43}^{o6} = -\frac{c \lambda}{R_2^2 p} (-Ae_6 + Be_5); \\ r_{44}^{o6} &= \frac{1}{R_2^3 p} [e_6(-Ae_1 + B\lambda^2) + e_{11}(AB_1 + BB_4) - e_{12}(AB_2 + BB_3)]; \\ p &= 2(A^2 + B^2). \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$R_{3P}^{o6} = -\frac{16q\nu}{\pi^2 \gamma^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{A_n^4 + \frac{\nu}{\gamma^4} B_n^2}; \quad (n=1,3,5,7,\dots)$$

$$R_{4P}^{o6} = -\frac{16ql_2}{\pi^3} [\alpha_{40}^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu B_n^2 (\frac{1}{\gamma^2} + A_n)}{\gamma^4 A_n^2 (A_n^4 + \frac{\nu}{\gamma^4} B_n^2)}]; \quad (4.32)$$

$$A_n = \frac{1}{\gamma^2} + n^2; \quad B_n = \frac{k_2}{\gamma^2} + k_1 n^2;$$

α_{40}^n визначається з таблиці 2.

Таблиця 2

γ	α''_{40}	γ	α''_{40}	γ	α''_{40}	γ	α''_{40}
0,3	0,354	0,6	0,686	1	0,982	1,667	1,164
0,4	0,470	0,75	0,821	1,25	1,081	2	1,194
0,5	0,582	0,8	0,859	1,333	1,104	2,5	1,215
						3,333	1,227

Якщо діафрагма являє собою кругову арку з затяжкою (рис. 4.2), то

$$r_{33}^d = \frac{1}{D_a} (A_1 - \frac{A_2 B_2}{a_n}); \quad r_{34}^d = r_{43}^d = -\frac{1}{D_a} (A_2 - \frac{e_0 R_a}{\lambda_1 B_2} - \frac{A_2}{a_n} (B_2 A_3 - \frac{e_0}{\lambda_1}));$$

$$r_{44}^d = \frac{1}{D_a} (A_3 - \frac{e_0}{\lambda_1^2 B_2} (2 - \frac{e_0}{B_2}) - \frac{1}{a_n B_2} (B_2 A_3 - \frac{e_0}{\lambda_1})^2);$$

$$D_a = \frac{J r^2}{J_a \lambda_1^2} R_1^2 (1 - \frac{A_3 B_2}{a_n}); \quad B_2 = \frac{R_a}{\lambda_2^2 - 1}; \quad A_1 = r^2 + R_a^2; \quad A_2 = \lambda_2 r^2 + R_a / \lambda_1;$$

$$A_3 = \lambda_2^2 r^2 + 1 / \lambda_1^2; \quad r^2 = \frac{J_a}{F_a}; \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{l_a}; \quad \lambda_2 = \frac{\pi R_a}{l_a}; \quad a_n = B_2 A_3 + A_{sam};$$

$$A_{sam} = \frac{E l_a^2 J_a}{8 \cos^2 \beta_0 B_2 E_{sam} F_{sam}}; \quad \beta_0 = \arcsin \frac{l_2}{2 R_2}; \quad (4.33)$$

де: l_a, R_a – прогін арки і радіус її осі;

e_0 – відстань від осі арки до середньої поверхні оболонки;

E – модуль пружності матеріалу оболонки і арки;

E_{sam} – те ж матеріалу затяжки;

F_a, F_{sam} – площі поперечних перерізів арки і затяжки;

J – момент інерції перерізу оболонки одиничної ширини,

J_a – момент інерції арки.

Довільні постійні C_j^u, C_j^w ($j=1 \div 4$) обчислюють за формулами (4.34)

$$C_1^u = -\frac{c l B}{R_2 p^2}; \quad C_2^u = \frac{c l A}{R_2 p^2}; \quad C_3^u = -C_1^u; \quad C_4^u = C_2^u; \quad (4.34)$$

$$C_1^w = \frac{AB_1 + BB_4}{R_2^2 p^2}; \quad C_1^w = \frac{B_1^2 - Ab_1}{R_2^2 p^2}; \quad C_3^w = \frac{AB_2 + BB_3}{R_2^2 p^2}; \quad C_4^w = C_2^w,$$

а потім підставляють у вираз (4.29). Далі за допомогою таблиці 1 обчислюють зусилля і переміщення в оболонці.

Щоб знайти зусилля в арковій діафрагмі, достатньо прикласти до неї красві зусилля $S_0 \cos \alpha x$ і $Q_0 \sin \alpha x$ та виконати розрахунок будь-яким із методів будівельної механіки стержневих систем.

Якщо діафрагма являє собою двошарнірну арку (рис.4.2,а), то в (4.33) потрібно прийняти $E_{зат.} = \infty$; якщо вона така, як на рис. 4.2,г, приймаєм $w_0 = 0$ і залишаєм в системі (4.29) лише перше рівняння.

4.4 Про способи розрахунку похилих оболонок із складними умовами на контурі

При розрахунку похилих оболонок, у яких закріплення по всьому контуру відрізняється від шарнірного, є ефективними варіаційні методи. Існує декілька різновидів цих методів. Їх суть в тому, що невідомі $w_i \varphi$ подаються у вигляді подвійних рядів за функціями, які задовольняють (повністю чи частково) граничні умови, але не задовольняють, в загальному випадку, рівняння (2.29). Складається вираз потенційної енергії внутрішніх та зовнішніх сил, а потім записується математичний вираз принципу можливих переміщень або принципу мінімуму потенційної енергії. В результаті будемо мати нескінченну систему алгебричних рівнянь. Утримуючи ту чи іншу їх кількість, можна отримати розв'язок з потрібною точністю. Початок застосування варіаційних методів до задач теорії похилих оболонок було покладено В.В. Власовим [1]. Більш детально з ними можна познайомитись в [2,3,4,9,10].

При розрахунках похилих оболонок широко використовується метод скінченних різниць (МСР). Якщо виходити із рівняння (2.29), то для кожного вузла сітки доводиться в загальному випадку записувати два алгебричних рівняння, що включають по 18 невідомих кожне. МСР дозволяє враховувати всі можливі закріплення контуру, в тому числі перервні і точкові, змінну товщину оболонки, змінні кривизни серединної поверхні. Можна також розраховувати оболонки з ребрами жорсткості і з отворами (це потребує сильного згущення сітки).

Опис розрахунків оболонок за МСР наведено в [13]. Потрібно також згадати велику серію науково-методичних матеріалів з цього питання, напрацьовану в Красноярському політехнічному інституті під керівництвом Н. П. Абовського.

Методом розрахунку конструкцій довільної форми, в тому числі і похилих оболонок, є метод скінченних елементів (МСЕ).

Оболонка подається у вигляді сукупності плоских елементів чотирикутної або трикутної форми. Таким шляхом зручно розраховувати збірні оболонки, складені із плоских панелей, а при достатньому подрібненні на елементи можна з достатньою точністю розраховувати і суцільні оболонки. На теперешній час існують універсальні обчислювальні комплекси, такі як "SCAD", "LIRA", що дозволяють проводити розрахунки на ЕОМ.

4.5 Приклад розрахунку похилої оболонки, шарнірно опертої по всьому контуру

Розраховується прямокутна в плані похила оболонка, яка стоїть окремо, з шарнірним опиранням по всьому контуру, рис. 4.4. Навантаження приймається рівномірно розподілене.

На оболонку наноситься прямокутна сітка координат. Кожна із сторін l_1 і l_2 розбивається на 20 рівних частин.

Задана розрахункова схема при вказаному вище навантаженні має дві осі симетрії, тому достатньо розглянути зусилля і прогини в одній чверті оболонки, рис.4.4.

Для розрахунково-графічного завдання зусилля $N_1, N_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_K$ і прогин w достатньо визначити в 49 точках, відмічених на рис. 4.4 (по двох контурах та по діагоналі).

Розрахункова схема суцільної оболонки має такі параметри:

$$l_1 = 24 \text{ м}; \quad l_2 = 42 \text{ м}; \quad \frac{l_1}{f_1} = 11,5; \quad \frac{l_2}{f_2} = 12; \quad \delta = 0,07 \text{ м},$$

$$E = 3,3 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2; \quad q = 5,5 \text{ кН/м}^2; \quad f_1 = 2,087 \text{ м}; \quad f_2 = 3,5 \text{ м}.$$

Згідно із заданими розмірами оболонки розраховуються радіуси головних кривизн

$$R_1 = \frac{l_1^2 + 4f_1^2}{8f_1} = 35,54 \text{ м}; \quad R_2 = \frac{l_2^2 + 4f_2^2}{8f_2} = 64,75 \text{ м}.$$

Погонний момент інерції суцільної оболонки

$$J = \delta^3 / 12 = 1/2,8583^{0,5}.$$

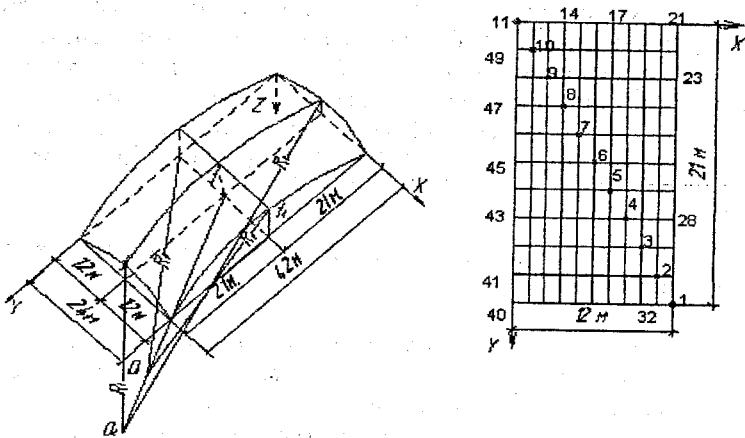


Рисунок 4.4 – Розрахункова схема оболонки

Алгоритм розрахунку оснований на використанні подвійних тригонометричних рядів [9,10]. Згідно з [9,10], в цих рядах потрібно утримувати лише члени з непарними індексами. В програмі, складений алгоритмічною мовою “Delphi”, враховуються значення $m = 1,3,5,7,9,11,13,15$; $n = 1,3,5,7,9,11,13,15$. Коефіцієнт Пуассона приймається рівним 0,167.

Деякі слів про фізичне тлумачення розкладання функцій в тригонометричний ряд Фур’є. Тригонометричні ряди Фур’є використовуються в теорії та практиці в порівнянні з іншими рядами Фур’є так часто, що зазвичай їх називають “просто” рядами Фур’є. Якщо функції w і φ - неперервні на сегменті $[-\pi, \pi]$, то всі інтеграли [18] мають зміст і, таким чином, можна говорити про ряд Фур’є цієї функції і про його збіжність. Збіжність ряду Фур’є забезпечує умова Діріхле [18].

Якщо як незалежну змінну розглядати час, то функціональна залежність буде описувати деякий процес, що протікає в часі. Нехай цей процес зводиться до механічного руху системи, тобто до її просторових переміщень.

Постає питання про подання руху на деякому відрізку шляху у вигляді комбінацій тих чи інших наперед заданих рухів. Цьому питанню руху буде відповідати розкладання функції, що описує цей рух, в функціональний ряд за заданими функціями.

Як окремий випадок, можна поставити питання про подання достатньо довільного руху на даному відрізку часу $[-\pi, \pi]$ у вигляді

одночасного здійснення деякого стаціонарного зміщення а також гармонічних коливань з періодами $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \dots$

Оскільки довільне коливання такого вигляду можна записати виразом

$$A_n \sin(nt + \varphi_n), \tag{4.35}$$

йому відповідатиме пара членів тригонометричного ряду

$$b_n \sin(nt) + a_n \cos(nt), \tag{4.36}$$

де $a_n = A_n \sin \varphi_n;$ $b_n = A_n \cos \varphi_n.$

Таким чином, пара сусідніх членів (4.36) тригонометричного ряду відповідає деякій гармонічній складовій (4.35) загального руху системи з періодом $2\pi/n$ і амплітудою A_n . Ця гармонічна складова зазвичай має назву n-ї гармоніки руху.

Результати розрахунку оболонки наведено на рис. 4.5-4.8.

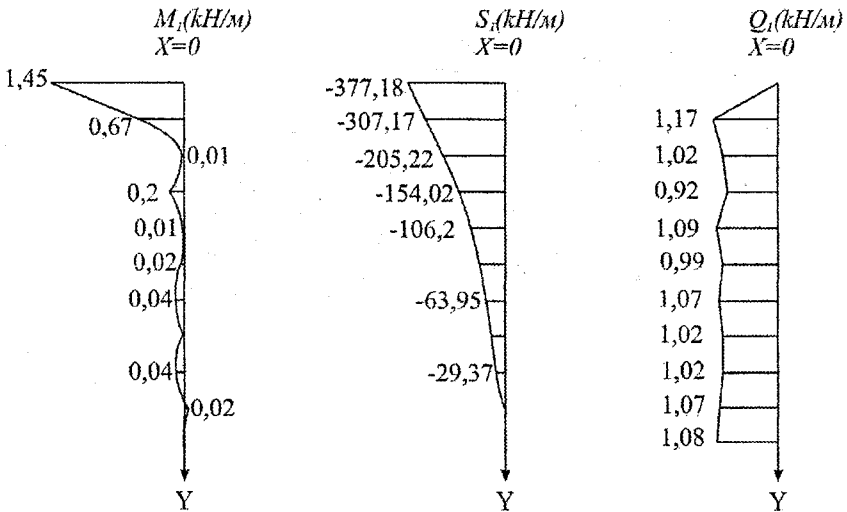


Рисунок 4.5 – Зусилля в оболонці вздовж осі Y

Епюри діагоналі

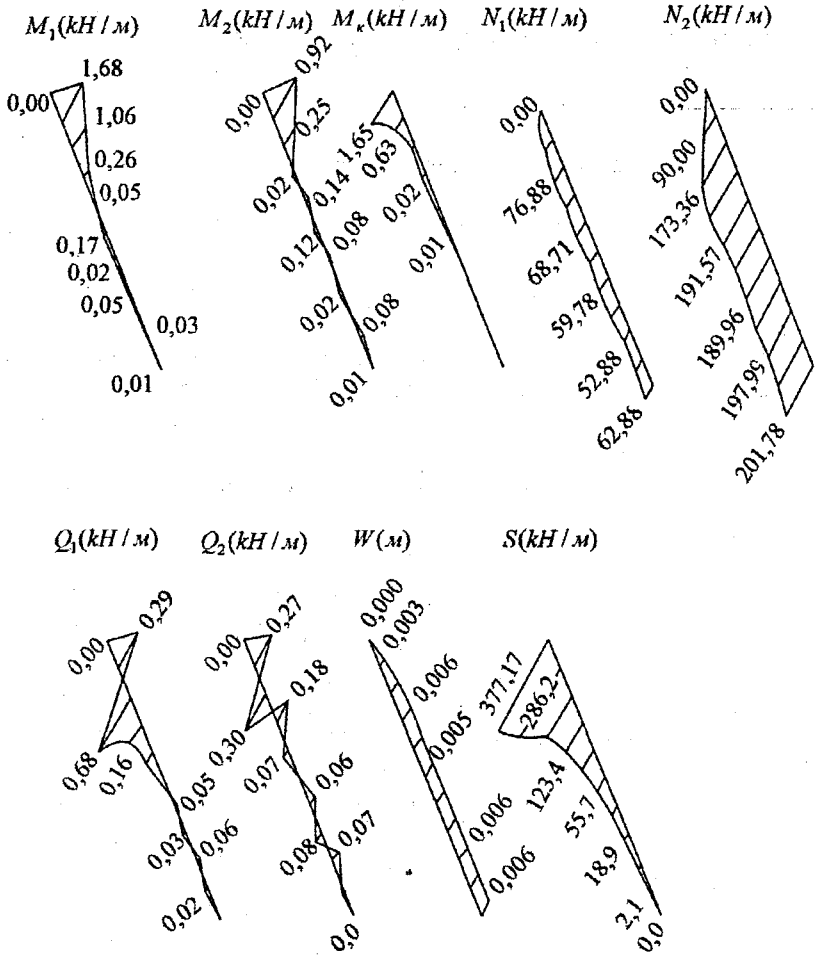


Рисунок 4.6 – Зусилля в оболонці в точках, розташованих по діагоналі чверті розрахункової схеми

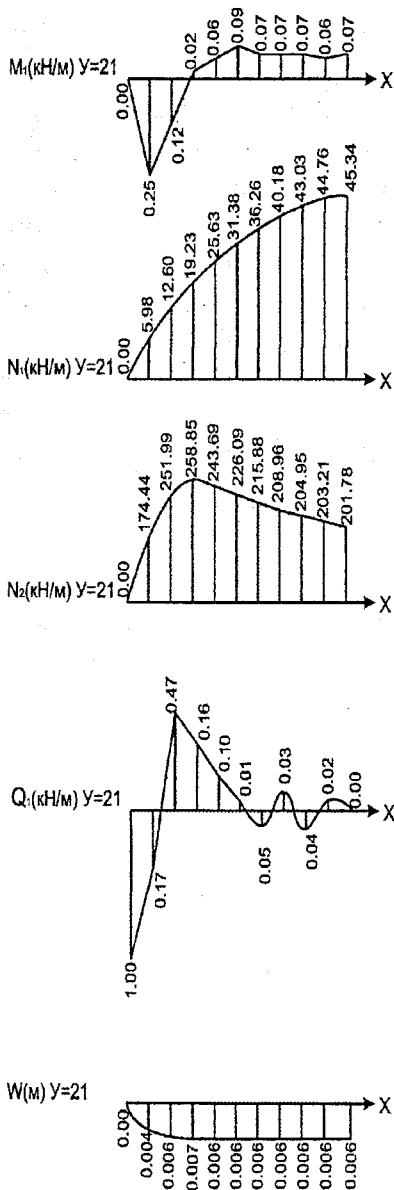
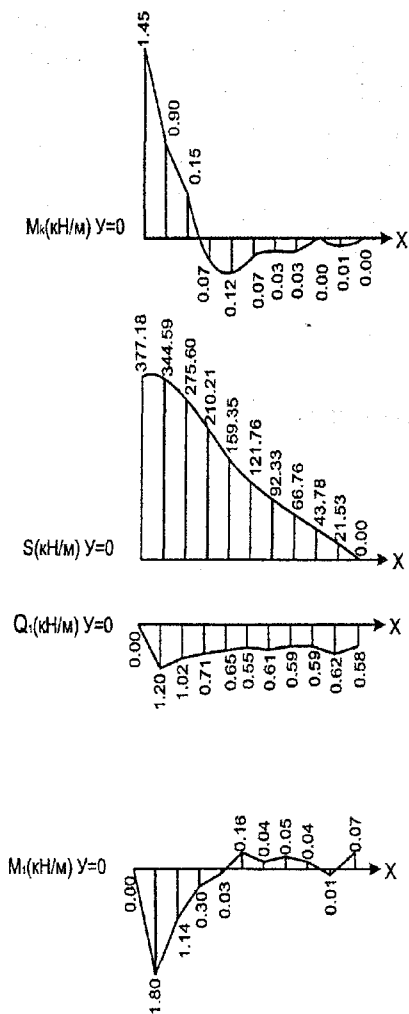


Рисунок 4.7 – Зусилля вздовж осі X

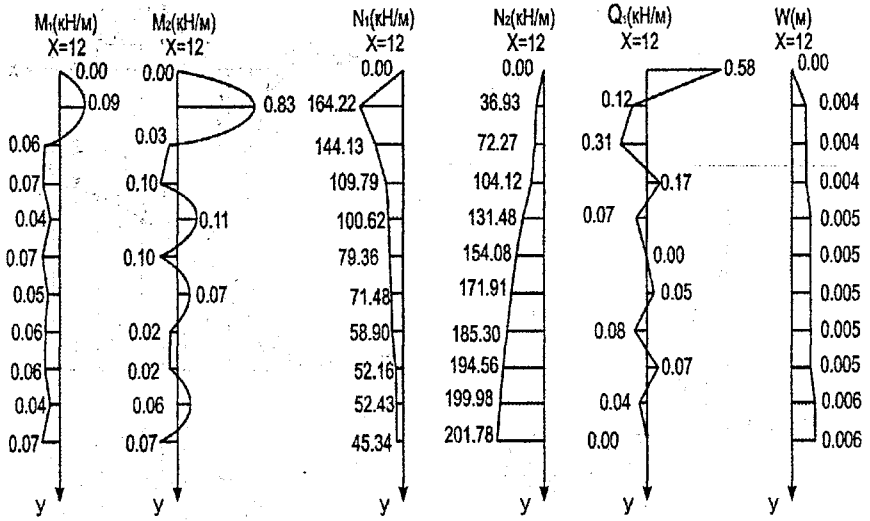


Рисунок 4.8 – Зусилля вздовж осі Y

Література

1. Власов В.З. «Общая теория оболочек и её приложение в технике». – М: Гостехтеориздат, 1949.- 784 с.
2. Колкунов Н.В. «Основы расчета упругих оболочек».- М: ВШ, 1972.- 183с.
3. Прокопович Р.Е., Яременко А.Ф. «Методические указания по изучению плоской задачи теории упругости».-Одесса: Издательство ОИСИ, 1978.- 31 с.
4. Прокопович И.Е., Яременко А.Ф. Методические указания по изучению раздела курса теории упругости «Изгиб пластинок».- Одесса: Издательство ОИСИ, 1979.-74с.
5. Піскунов В.Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності і пластичності. Ч.І. Книга 3. Опір дво- і тривимірних тіл. - К.: Вища школа, 1995.- 272 с.
6. Бутенко Ю.И. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. - К.: Вища школа, 1984.- 327 с.
7. Піскунов В.Г. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності Ч. II. Книга 5.- К.: Вища школа, 1995.- 207 с.
8. Руководство по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий. НИИЖБ Госстрой СССР.- М.: Стройиздат, 1979.-147 с.
9. Прокопович И.Е., Малахова Н.А., Штейнберг. Методические указания по разделу курса «Строительная механика», - «Основы расчета пространственных тонкостенных систем» - «Расчет систем, состоящих из пологих оболочек двоякой кривизны и бортовых балок».-Одесса: ОГАСА, 1981.- 52 с.
10. Сорока Н.Н., Малахова Н.А., Штейнберг М.В. Методические указания по выполнению расчетно-проектировочной работы «Расчет пологой оболочки двоякой кривизны». - Одесса: Издательство ОИСИ, 1983.- 27 с.
11. Піскунов В.Г., Шевченко В.Д., Рубан М.М. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Книга III. - К.: ВШ, 1995.- 320 с.
12. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. - М.: Стройиздат, 1978.- 767 с.
13. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек.- Л-М.: Стройиздат, 1966.-301с.
14. Бартнев В. С. Практический способ решения пологих железобетонных оболочек положительной гауссовой кривизны на прямоугольном плане. СБ. «Тонкостенные железобетонные пространственные конструкции», НИИЖБ Госстроя СССР.- М.: Стройиздат, 1970.

15. Огородніков В.А., Сивак І.О., Бабак М.В. Методика оцінки міцності контейнерів, що падають з висоти // Вісник ВПІ .- 2000.- №5.- С. 50-55.
16. СНиП 2.03.01 – 84* «Бетонные и железобетонные конструкции».
17. СНиП 2.01.07 – 85. «Нагрузки и воздействия».
18. Воробьев Н.Н. Теория рядов, М.: Наука, 1976. -367с.

Навчальне видання

Алла Серафимівна Моргун
Микола Миколайович Сорока

Механіка тонких оболонок подвійної кривизни

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З.В. Поліщук

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021 м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 20.09.07 р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7x42 1/4 Папір офсетний
Друк різнографічний Ум. друк. арк. 3.9
Тираж 75 прим.
Зам. № 2007-138

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021 м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ