



Т.І. Найко, С.І. Резнік

**ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ Й ЗАДАЧІ
З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Т.І. Найко, С.І. Резнік

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ Й ЗАДАЧІ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для слухачів Інституту довузівської підготовки. Протокол № 7 від 6 березня 2003 р.

Вінниця ВНТУ 2004

Рецензенти:

В.М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
В.М. Дубчак, кандидат технічних наук, доцент
Л.М. Тичинська, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерство освіти і науки України

Найко Т.І., Резнік С.І.

Н 20 Тренувальні вправи й задачі з елементарної математики.
Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2004. – 96 с.

В навчальному посібнику розглянуті основні типи задач з елементарної математики для підготовки до вступних іспитів у ВНТУ. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри для слухачів Інституту довузівської підготовки.

УДК 51(075)

Передмова	4
1. Програма вступного іспиту	7
2. Теоретичні питання з алгебри	15
3. Тотожні перетворення	16
4. Алгебраїчні рівняння	18
5. Задачі на складання рівнянь	20
6. Системи алгебраїчних рівнянь	25
7. Нерівності	27
8. Показникові й логарифмічні рівняння і нерівності	29
9. Тригонометрія	32
10. Функція, властивості, графік	37
11. Прогресія	39
12. Похідна	42
13. Теорія з геометрії	45
14. Рівнобедрений трикутник	47
15. Прямокутний трикутник	51
16. Різносторонній трикутник	54
17. Ромб	57
18. Паралелограм	59
19. Прямокутник	60
20. Вектор	60
21. Коло	62
22. Трапеція	66
23. Прямі і площини в просторі	71
24. Призма	77
25. Конус	79
26. Піраміда	83
27. Циліндр	89
28. Тіла обертання	91
29. Куля	92
30. Комбінація фігур	94

Передмова

Пропонований навчальний посібник містить тренувальні вправи і задачі з елементарної математики для підготовки до фахових випробувань із алгебри та геометрії. Мета посібника полягає не тільки в тому, щоб допомогти пригадати вивчений раніше матеріал шкільного курсу математики, а й конкретно зорієнтувати абітурієнтів на успішне складання вступного іспиту.

Система тренувальних вправ і задач, а також перелік питань програми із математики містять значну кількість завдань, які пропонувались протягом багатьох років на вступних іспитах із математики до Вінницького державного технічного університету. Навчальний посібник охоплює матеріал з арифметики, алгебри, тригонометрії та стереометрії.

Цей навчальний посібник можуть використати для самоконтролю над якістю підготовки до вступного іспиту з математики слухачі підготовчих відділень, підготовчих вечірніх та заочних курсів, які функціонують при факультетах та інститутах довузівської підготовки, а також учні фізико-математичних шкіл та технічних ліцеїв.

Не слід поспішати розв'язувати вправи або задачі тим способом, який першим спаде на думку. Потрібно поміркувати, чи не знайдеться кращий, наприклад менш трудомісткий, підхід до розв'язування. При цьому в процесі розв'язування можна використовувати будь-які формули, теореми, правила алгебри векторів і перетворень до розв'язування геометричних задач, тригонометрії – до розв'язування задач з алгебри і геометрії, застосовувати метод координат, властивості функцій та похідних, щоб здобута відповідь була строго обгрунтована.

Деякі завдання, безумовно, можуть виявитись складними. Потрібно з'ясувати причину виникнення труднощів. Якщо недостатньо засвоєний теоретичний матеріал, необхідно використати підручники, довідники, посібники для абітурієнтів чи звернутись по допомогу до викладача математики.

Помилки, які допускає значна частина абітурієнтів на вступних іспитах із математики, дуже різноманітні, але, як правило, їх причини зводяться до поверхового або часто формального знання основних властивостей, понять, теорем або недостатніх навичок виконання тотожних перетворень.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь дуже часто обидві його частини доводиться підносити до степеня з парним показником, що може, кажучи взагалі, призвести до появи сторонніх коренів. Перевірка коренів у цьому випадку є обов'язковою і невід'ємною частиною розв'язування рівняння. При цьому сторонні корені можуть належати ОДЗ невідомого, і тут чи не найпоширенішою помилкою абітурієнтів є включення у відповідь сторонніх коренів. Часто абітурієнти вважають, що якщо знайдені значення невідомого входять в ОДЗ, то їх не потрібно

перевіряти. Такі твердження є помилковими і можуть призвести до неправильного розв'язування рівнянь.

Переконаємося, що належність кореня до ОДЗ є необхідною, але недостатньою умовою. Наприклад, розв'язуючи ірраціональне рівняння

$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$, абітурієнт правильно визначив ОДЗ: $x \geq \frac{2}{3}$ і після

двократного піднесення до квадрата одержав квадратне рівняння $x^2 - 103x + 582 = 0$, яке має два корені $x_1 = 6$ і $x_2 = 97$. Зауваживши, що одержані значення коренів належать до ОДЗ, абітурієнт відмовився від перевірки і включив у відповідь сторонній корінь $x_2 = 97$, у чому можна переконатися безпосередньо перевіркою.

Помилки абітурієнтів при розв'язуванні нерівностей дуже поширені і різноманітні. Від найгрубіших, пов'язаних із безпосереднім незнанням властивостей нерівностей або властивостей якихось функцій до менш помітних помилок, які з'являються в результаті того, що абітурієнт не помітив розширення або звуження ОДЗ невідомого.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)^2(x-4)} < 0. \quad (1)$$

Розв'язування. Очевидно, $(x-2)^2 > 0$ при $x \neq 2$. Тому при розв'язуванні нерівності (1) методом інтервалів, необхідно пам'ятати, що x не повинен дорівнювати 2. Метод інтервалів без врахування умови $x \neq 2$ дає таку відповідь: 1) $x < -2$; 2) $1 < x < 4$. Частина абітурієнтів зупинилась на цьому. А між іншим із другої подвійної нерівності потрібно виключити $x = 2$.

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; 4)$.

При вивченні тригонометричних функцій велике значення мають тотожні перетворення. Зупинимось на помилках, які допускають абітурієнти внаслідок формального засвоєння матеріалу.

Приклад 2. Спростити вираз:

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 250^\circ}{2}}$$

Абітурієнт, що формально застосував формулу косинуса половинного аргументу, одержав, що даний вираз дорівнює $\cos 125^\circ$.

Насправді $\sqrt{\frac{1 + \cos 250^\circ}{2}} = |\cos 125^\circ| = -\cos 125^\circ = \sin 35^\circ$.

Зустрічаються абітурієнти, які намагаються дати означення первинним не означуваним поняттям (точка, пряма, площина). У геометрії значну роль відіграють означення, за допомогою яких вводяться нові поняття. Тут абітурієнти, дуже часто допускають серйозні помилки, вважаючи означення теоремами.

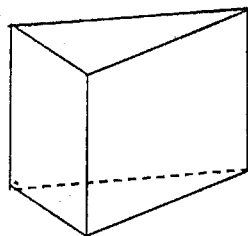
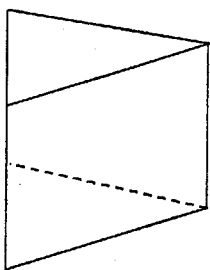
Помилки абітурієнтів, що пов'язані з вивченням стереометрії, як правило, відносять на рахунок незадовільної просторової уяви. У значній мірі цей погляд, безумовно, справедливий. Однак крім цієї причини є ще й інші. Це і формалізм у знаннях теоретичного матеріалу, і шаблонний підхід до розв'язування задач, не уміння творчо мислити, і, нарешті, прогалини у знаннях.

При розв'язуванні геометричних задач, особливо стереометричних, велике значення має акуратно і правильно зроблений рисунок. Зображення просторових фігур повинні бути наочними і створювати правильне зорове уявлення про зображені просторові об'єкти. Наочність зображення просторових фігур залежить від взаємного розташування проєкцій їх елементів. При одному розташуванні цих проєкцій зображення буде наочним, при іншому – ні. Уміння виконувати наочні рисунки набувається в процесі практики.

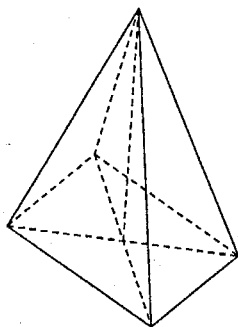
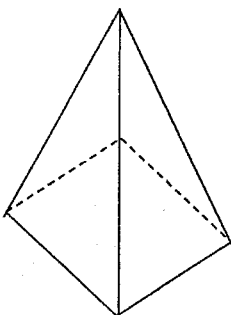
Розглянемо зображення деяких просторових об'єктів і їх комбінацій.

Зліва показані неправильні рисунки, які часто виконують абітурієнти при розв'язуванні стереометричних задач, справа – рисунки тих же геометричних об'єктів, виконані правильно.

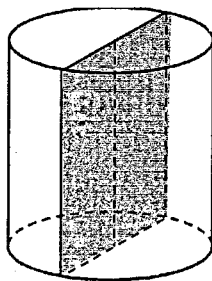
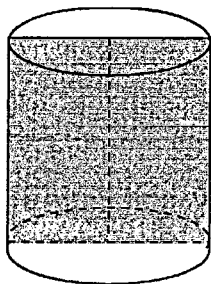
1. Пряма трикутна призма.



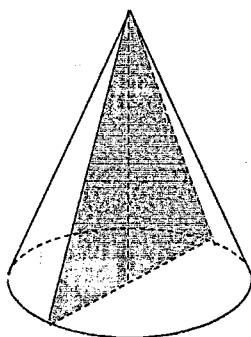
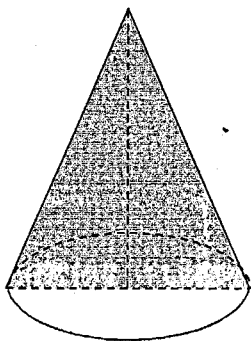
2. Правильна чотирикутна піраміда.



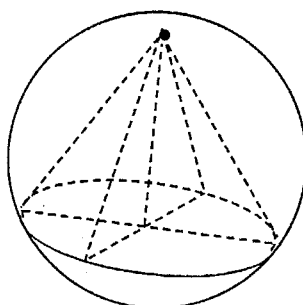
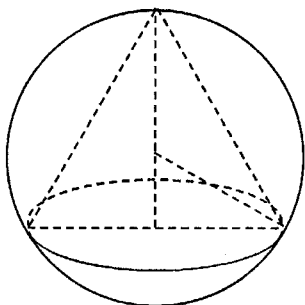
3. Циліндр з осьовим перерізом.



4. Конус з осьовим перерізом.



5. Конус, вписаний у коло.



При виконанні рисунків до стереометричних задач потрібно враховувати властивості паралельних проєкцій.

Наведемо зразок оформлення екзаменаційної роботи.

Білет №1

1. Формула коренів квадратного рівняння.
2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

3. Знайти значення $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, коли відомо, що $\sin x - \cos x = 1,4$.

4. Знайти область визначення функції:

$$y = \sqrt{1 - \log_8(x^2 - 4x + 3)}.$$

5. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$ у

точці його перетину з віссю ординат.

6. Теорема про центр кола, вписаного в трикутник (із доведенням).

7. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису гострого кута; відрізок, що сполучає її основу з точкою перетину медіан, перпендикулярний до катета. Знайти кути трикутника.

8. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють 3 і 5 см. Відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. Середня лінія ділить її

на дві частини, відношення площ яких дорівнює $\frac{5}{11}$. Знайти

довжини основ трапеції.

9. Основою паралелепіпеда є ромб, діагональні перерізи якого перпендикулярні до площини основи і мають площі 100 і 105 см². Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо відомо, що довжина лінії перетину цих перерізів дорівнює 10 см.

10. Під яким кутом нахилена твірна конуса до основи, якщо повна поверхня конуса у 2 рази більша площі поверхні вписаної у нього кулі?

1. Квадратним рівнянням називається рівність вигляду

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ де } a, b, c - \text{дійсні числа, } a \neq 0.$$

Дійсне число $x = t$, що задовольняє рівняння, називається коренем рівняння.

Корені квадратного рівняння знайдемо таким чином :

а) поділимо обидві частини рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ на } a \neq 0;$$

б) виділимо повний квадрат :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Вираз $D = b^2 - 4ac$ називається дискримінантом рівняння. Якщо $D \geq 0$, то можливі такі перетворення :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0,$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}; \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

тобто

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Отже, дійсні корені квадратного рівняння знаходяться за формулою :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Проведемо дослідження розв'язку рівняння в загальному випадку :

- 1) якщо $D < 0$, то рівняння дійсних коренів немає;
- 2) якщо $D = 0$, то рівняння має два однакових дійсних кореня

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- 3) якщо $D > 0$, то рівняння має два різних дійсних кореня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Квадратне рівняння вигляду $x^2 + px + q = 0$ називається зведеним. Його корені знаходяться за формулою :

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Розв'язування.

Додамо рівняння заданої системи :

$$4(x + y + z) = 24, \quad \text{звідки} \quad x + y + z = 6.$$

Послідовно віднявши одержане рівняння від кожного рівняння системи, знайдемо

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

3. Знайти значення $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, коли відомо, що $\sin x - \cos x = 1,4$.

Розв'язування.

Використаємо формули

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

врахувавши, що вони правильні тільки при $x \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.

Перепишемо задану рівність у такому вигляді

$$\frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = 1,4.$$

Приймаючи $tg \frac{x}{2} = z$, дістанемо таке рівняння :

$$\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2} = 1,4, \quad \text{або} \quad z^2 - 5z + 6 = 0.$$

Звідси знаходимо $z_1 = 2, z_2 = 3$. Таким чином, $tg \frac{x}{2} = 2, tg \frac{x}{2} = 3$.

4. Знайти область визначення функції :

$$y = \sqrt{1 - \log_8(x^2 - 4x + 3)}.$$

Розв'язування.

Оскільки логарифмічна функція визначена тільки для додатніх чисел, а квадратний корінь – для невід'ємних чисел, то задача зводиться до розв'язування системи нерівностей :

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ 1 - \log_8(x^2 - 4x + 3) \geq 0. \end{cases}$$

Ліву частину першої нерівності розкладемо на множники, а в другій нерівності замінемо 1 на $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x-3) \cdot (x-1) > 0, \\ \log_8(x^2 - 4x + 3) \leq \log_8 8. \end{cases}$$

Таким чином, одержуємо систему нерівностей :

$$\begin{cases} (x-3) \cdot (x-1) > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \leq 8 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (x-3) \cdot (x-1) > 0, \\ (x-5) \cdot (x+1) \leq 0. \end{cases}$$

Остання система рівносильна нерівності

$$(x-3) \cdot (x-1) \cdot (x-5) \cdot (x+1) \leq 0,$$

яку розв'язуємо методом інтервалів :

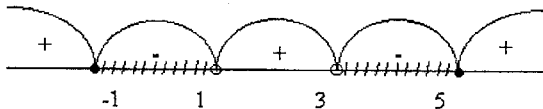


рис.1

З рис.1 одержуємо відповідь : $x \in [-1; 1] \cup [3; 5]$.

5. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$ у

точці його перетину з віссю ординат.

Розв'язування.

Рівняння дотичної має вигляд: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$,

де $(x_0; y_0)$ – координати точки дотику.

Абсциса x_0 точки перетину графіка функції з віссю Oy дорівнює нулю, а ордината $y_0 = f(0) = -2$. Отже, точка дотику $(0; -2)$. Далі знайдемо похідну заданої функції:

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2 + 4) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)^2};$$

звідки, $f'(0) = -1$. Отже, шукане рівняння дотичної має вигляд:

$$y - (-2) = -1 \cdot (x - 0), \text{ або } y = -x - 2.$$

6. Коло називається вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема. Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.

Дано: K, M, N – точки дотику кола до сторін $\triangle ABC$, O – центр вписаного кола.

Довести: O – точка перетину бісектрис.

Доведення.

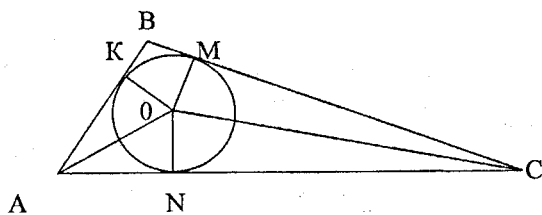


рис.2

Нехай ABC – заданий трикутник, точка O – центр вписаного кола, K, M, N – точки дотику кола до сторони трикутника (рис. 2):

$OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$ (на основі властивості дотичної до кола).

Прямокутні трикутники AOK і AON рівні за гіпотенузою і катетом. У них гіпотенуза AO – спільна, а катети KO і NO – рівні як радіуси. З рівності цих трикутників випливає рівність кутів OAK і OAN . А це означає, що точка O лежить на бісектрисі трикутника, проведеної з вершини кута A . Аналогічно доводиться, що точка O належить двом

іншим бісектрисам трикутника. Отже, точка O – точка перетину бісектрис. Теорема доведена.

7. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису гострого кута; відрізок, що сполучає її основу з точкою перетину медіани, перпендикулярний до катета. Знайти кути трикутника.

Розв'язування: Нехай FB – медіана, O – точка перетину медіан, AD – бісектриса і $OD \perp BC$ (рис. 3).

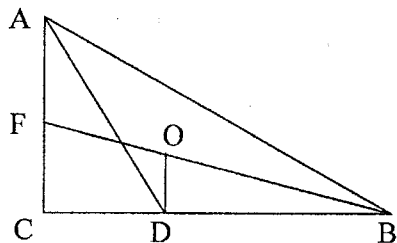


Рис. 3.

Згідно з властивістю точки перетину медіан, $FO:OB = 1:2$. Оскільки $OD \parallel FC$, то за теоремою Фалеса $CD:DB = FO:OB = 1:2$. Використовуючи властивість бісектриси трикутника, дістаємо $CD:DB = AC:AB$, тобто $AC:AB = 1:2$.

Таким чином, $\sin \beta = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$,

звідки $\angle \beta = 30^\circ$, $\angle \alpha = 60^\circ$

8. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють 3 і 5 см. Відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. Середня лінія трапеції ділить її на дві частини, відношення площ яких дорівнюють $\frac{5}{11}$. Знайти довжини основ трапеції.

Розв'язування. Нехай $ABCD$ – дана трапеція (рис. 4).

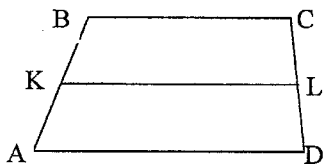


Рис. 4.

$AB = 5$ см, $CD = 3$ см, KL – середня лінія. Позначимо $BC = x$, $AD = y$. Якщо в чотирикутник можна вписати коло, то $x + y = AB + CD$, або $x + y = 8$. (1)

Оскільки KL – середня лінія, то $KL = \frac{x+y}{2} = 4$. Якщо h – висота

трапеції, то висоти трапецій $KBCL$ і $AKLD$ дорівнює $h/2$.

Для площ цих трапецій маємо:

$$S_{KBCL} = \frac{BC + KL}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{x + 4}{2} \cdot \frac{h}{2},$$

$$S_{AKLD} = \frac{AB + KL}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{y + 4}{2} \cdot \frac{h}{2}.$$

За умовою $\frac{S_{KBCL}}{S_{AKLD}} = \frac{5}{11}$, тобто $\frac{x + 4}{y + 4} = \frac{5}{11}$. Після спрощення одержуємо рівняння:

$$11x - 5y = -24. \quad (2)$$

Об'єднаємо рівняння (1) і (2) у систему:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 11x - 5y = -24. \end{cases}$$

Вона має єдиний розв'язок $x = 11$ см, $y = 7$ см.

9. Основою паралелепіпеда є ромб, діагональні перерізи якого перпендикулярні площині основи і мають площі 100 і 105см^2 . знайти об'єм паралелепіпеда, якщо відомо, що довжина лінії перетину цих перерізів дорівнює 10см .

Розв'язування.

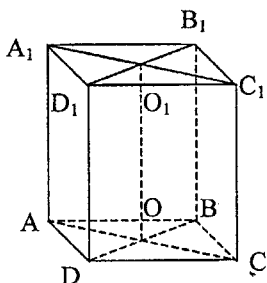


Рис. 5.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – паралелепіпед, $ABCD$ – ромб, $S_{ACC_1 A_1} = 105\text{ см}^2$, $OO_1 = 10\text{ см}$.

Знайти: V .

Об'єм паралелепіпеда обчислюється за формулою $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, де $h = OO_1$, бо площини $A_1 C_1 C A$ і $D_1 B_1 B D$ перпендикулярні до площини основи, отже лінія перетину OO_1 площини перпендикулярна до основи.

Для знаходження площі основи визначимо діагоналі ромба $ABCD$.

Використаємо для цього формули площ перерізів $ACC_1 A_1$ і $DBB_1 D_1$:

$$S_{ACC_1 A_1} = AC \cdot OO_1 \Rightarrow AC = \frac{105}{10} = 10,5\text{ см},$$

$$S_{DBB_1 D_1} = DB \cdot OO_1 \Rightarrow DB = \frac{100}{10} = 10\text{ см},$$

$$S_{\text{осн}} = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10,5 \cdot 10 = \frac{105}{2}\text{ см}^2$$

Обчислюємо об'єм паралелепіпеда:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{105}{2} \cdot 10 = 525\text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: $V = 525\text{ см}^3$.

10. Під яким кутом нахилена твірна конуса до основи, якщо повна поверхня конуса в 2 рази більша площі поверхні вписаної в нього кулі?

Розв'язування:

Дано: $S_{\text{повн}} = 2S_{\text{кулі}}$.

Знайти: $\angle SAB = \alpha$.

Розв'язування. Центр кулі, вписаної у конус, належить висоті конуса, всі точки якої рівновіддалені від поверхні конуса.

Позначимо $\triangle ASB$ – осьовий переріз конуса, O – центр кулі, $r = MO = OK$ – радіус кулі, $R = AK$ – радіус основи конуса, $l = AS$ – твірна конуса.

Площа повної поверхні конуса дорівнює:

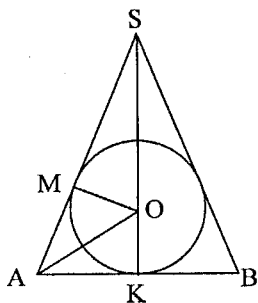


Рис. 6.

$$S_{\text{повн}} = \pi Rl = \pi R^2 = \pi R(R+l),$$

площа поверхні кулі дорівнює

$$S_{\text{кулі}} = 4\pi r^2.$$

Оскільки $S_{\text{повн}} = 2S_{\text{кулі}}$, то

$$\pi R(R+l) = 2 \cdot 4\pi r^2. \quad (1)$$

Оскільки точка O рівновіддалена від сторін $\triangle ASB$, то AO – бісектриса

$\angle SAK$: Тому $\angle OAK = \frac{\alpha}{2}$. З прямокутних трикутників AKS і AKO

знайдемо співвідношення між l, R і r . З прямокутного $\triangle AKO$ маємо:

$$\frac{OK}{AK} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{r}{R} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

З прямокутного $\triangle AKS$ маємо:

$$\frac{AK}{AS} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{R}{l} = \cos \alpha \Rightarrow l = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Підставимо знайдені значення l і R у рівняння (1).

$$\pi R \left(R + \frac{R}{\cos \alpha} \right) = 8\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos \alpha} = 8 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Додамо до обох частин число 8; дістанемо

$$9 + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{8}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Скористаємось формулою

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Одержуємо

$$9 + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{16}{1 + \cos \alpha} \Rightarrow 9(1 + \cos \alpha) \cos \alpha + 1 + \cos \alpha = 16 \cos \alpha$$

$$9 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 1 = 0$$

Звідси

$$(3 \cos \alpha - 1)^2 = 0, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\angle SAB = \arccos \frac{1}{3}$.

1. Теоретичні питання з алгебри

1. Властивості й графік функції $y = ax + b$.
2. Властивості й графік функції $y = k/x$.
3. Властивості й графік функції $y = ax^2 + bx + c$.
4. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники (з доведенням).
5. Вивести формулу для знаходження коренів квадратного рівняння.
6. Логарифм числа M за даною основою a (означення). Логарифм добутку, степеня, частки (з доведенням).
7. Означення, властивості й графік функції $y = \sin x$.
8. Означення, властивості й графік функції $y = \cos x$.
9. Означення, властивості й графік функції $y = \operatorname{tg} x$.
10. Тригонометричні функції подвійного аргументу (вивести формули).
11. Залежність між тригонометричними функціями одного й того ж аргументу.
12. Формули зведення.
13. Дотична до графіка функції (означення). Вивести рівняння дотичної.
14. Похідна функції (означення). Похідна суми двох функцій (вивести формулу).
15. Похідна функції (означення). Похідна добутку двох функцій (вивести формулу).
16. Похідна функції (означення). Похідна частки двох функцій (вивести формулу).
17. Похідна функції (загальне означення). Похідна функції $y = \sin x$ (вивести формулу).
18. Похідна функції (загальне означення). Похідна функції $y = \cos x$ (вивести формулу).

19. Похідна функції (загальне означення). Похідна функції $y = \operatorname{tg} x$ (вивести формулу).

2. Тотожні перетворення

Спростити вираз :

$$1. \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x}{x^2 + 1}$$

$$2. \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 + 3x^2 - 4x}$$

$$3. \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} - \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} + \frac{3 + 2x - x^2}{x - 3}$$

$$4. \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} - \frac{2x^2 + 2x - 24}{x + 4}$$

$$5. \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4}$$

$$6. \frac{x^3 + y^3}{x + y} : (x^2 - y^2) + \frac{(2 \cdot y)}{x + y} - \frac{(x \cdot y)}{x - y^2}$$

$$7. \frac{2}{a} \left[\frac{(a+1)}{a^3 - 1} - \frac{1}{a^2 + a + 1} - \frac{2}{1 - a} \right] : \frac{a^3 + a^2 + 2a}{a^3 - 1}$$

$$8. (a^2 - b^2 - c^2 + 2b \cdot c) : \frac{a^3 + a^2 + 2a}{a^3 - 1}$$

$$9. \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 12} - \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 20}$$

$$10. \frac{4a}{a + 8} - \frac{9a}{a^2 + 16a + 64} \cdot \frac{a^2 - 64}{4a + 23} + \frac{(a - 8) \cdot 8}{a + 8}$$

$$11. \frac{1}{(a-b) \cdot (a-c)} + \frac{1}{(b-c) \cdot (b-a)} + \frac{1}{(c-a) \cdot (c-b)}.$$

$$12. \frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$$

$$13. \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+2}{1-a^3}.$$

$$14. \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}} \right) : \left[i + \sqrt{\frac{(a+b)}{a-b}} \right].$$

$$15. \left(\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right) : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}.$$

$$16. \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} + \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{16}{a-4} \right)^2.$$

$$17. \left(\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}} - \frac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}} \right) : \frac{4m\sqrt{m^2-n^2}}{n^2}.$$

$$18. \left(\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y} \right) : \frac{y^2}{4x^2-y^2}.$$

Знайти точне значення виразу :

$$15. \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

$$16. \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

3. Алгебраїчні рівняння

Розв'язати рівняння :

$$1. |x-3| + 2|x+5| = 15.$$

$$2. |x-2| + |x-3| = 5.$$

$$3. |2-x| + |x+4| = 10.$$

$$4. |x-1| + |x+2| = 3.$$

$$5. |x+1| + 3|x-4| = 8.$$

$$6. |x-1| + |x+4| = 5.$$

$$7. |x-3| + 2|x+1| = 4.$$

$$8. |x-2| + 3|x+4| = 10.$$

$$9. |x+2| + |3-x| = 4.$$

$$10. \sqrt{3x-2} = 2\sqrt{x+2} - 2.$$

$$11. \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2.$$

$$12. \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+2} = 2.$$

$$13. \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2.$$

$$14. \sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6.$$

$$15. \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2.$$

$$16. \sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2.$$

$$17. (x-1)^{\frac{1}{2}} + 6(x-1)^{\frac{1}{4}} = 16.$$

$$18. (x+3)^3 - (x+1)^3 = 56.$$

$$19. (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0.$$

$$20. (x^2 - x - 4)^2 - 10x^2 + 10x + 56 = 0.$$

$$21. \quad 8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0 .$$

$$22. \quad \frac{x^2 + 1}{x - 4} - \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 23 .$$

$$23. \quad \frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2 .$$

$$24. \quad x^3 - 2x^2 + \frac{4}{x \cdot (2 - x)} = 8x - \frac{4}{x \cdot (x - 2)} .$$

$$25. \quad x^3 + 2x^2 + \frac{3}{x \cdot (x - 2)} = 8x - \frac{3}{x(2 - x)} .$$

$$26. \quad \frac{x^2 - 2x - 6}{x} - \frac{3x}{x^2 - 2x - 6} = 2 .$$

$$27. \quad \left(x - \frac{12}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{12}{x}\right) - 4 = 0 .$$

$$28. \quad \frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6 .$$

$$29. \quad |x - 3| + |2 - x| + |x + 1| = 0 .$$

$$30. \quad \sqrt{x + 1} + \sqrt{4x + 13} = \sqrt{3x + 12} .$$

$$31. \quad \sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9} .$$

$$32. \quad 3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 .$$

$$33. \quad \frac{x^2 - x - 6}{x} - \frac{8x}{x^2 - x - 6} = 2 .$$

$$34. \quad \sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 4} = 6 .$$

$$35. \quad |x - 3| + 2|x - 1| + |x + 4| = 0 .$$

$$36. \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{x^2+24} = x+1.$$

$$37. (x^2+3x-1)^2 = x^2+3x+1.$$

$$38. \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}.$$

$$39. \frac{x^2-3x-6}{x} - \frac{8x}{x^2-3x-6} = -2.$$

$$40. (x^2-5x)^2 - 2(x^2-5x) - 24 = 0.$$

$$41. \sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2+5x-2} = 1.$$

$$42. \sqrt{3x^2+5x-8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1.$$

$$43. \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x-1}.$$

4. Задачі на складання рівнянь

- З двох міст, відстань між якими 360 км., одночасно назустріч один одному виїхали два поїзди і зустрілися через 4 години. Перший поїзд проходить весь шлях на 1 годину 48 хвилин швидше, ніж другий. Яка швидкість кожного поїзда?
- Відстань між двома пристанями 120 км. Пароплав туди і назад подолав її за 9 годин. Назад він рухався зі швидкістю на 6 км / год. меншою. Яка початкова швидкість пароплава?
- З двох міст, відстань між якими 240 км., виїхали назустріч один одному два автомобілі і зустрілися на середині дороги. Перший автомобіль виїхав на 1 годину раніше, ніж другий зі швидкістю на 20 км / год. меншою, ніж швидкість другого автомобіля. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.
- Відстань між селом і містом дорівнює 120 км. З села до міста виїхав легковий автомобіль. Одночасно з ним з міста до села

виїхала вантажна машина. Скільки кілометрів пройшла вантажна машина до зустрічі з легковим автомобілем, якщо він рухався з швидкістю 48 км / год., а швидкість вантажної машини становила $\frac{3}{4}$ від швидкості легкового автомобіля.

5. З двох пунктів, відстань між якими 37 км., вийшли одночасно назустріч один одному два туристи. Один з них проходив за годину на 0,5 км. більше від другого. З якою швидкістю йшов кожний турист, якщо через 2,5 години після виходу відстань між ними дорівнювала 18,25 км. ?
6. Для виготовлення одного електродвигуна типу А потрібно 2 кг міді і 1 кг свинцю, а для виготовлення одного електродвигуна типу В потрібно 3 кг міді і 2 кг свинцю. Скільки електродвигунів кожного типу було виготовлено, якщо відомо, що витратили 130 кг міді і 80 кг свинцю.
7. Тракторна бригада може зорати ділянку землі за 4 год. 15 хв. До обідньої перерви бригада працювала 2,5 години, після чого залишилося зорати ще 8 га. Знайти площу всієї ділянки.
8. Перший робітник, працюючи один, може виконати деяку роботу за 8 днів, а другий – за 12 днів. До виконання роботи обидва робітники приступили одночасно і попрацювали разом декілька днів, після чого другий робітник був переведений на іншу роботу. Решту роботи перший робітник закінчив за три дні. Скільки всього днів працював перший робітник ?
9. Перший робітник, працюючи один, виконує всю роботу за 40 год., а другий – за 60 год. За скільки годин буде зроблено всю роботу, якщо робітники працюватимуть разом ?
10. Двоє робітників виконують певне завдання за 12 днів. Якщо половину роботи буде виконувати один робітник, а решту – другий, то все завдання буде виконане за 25 днів. За скільки днів кожний робітник окремо виконає все завдання ?
11. Бригада трактористів повинна була щодня виорювати по 20 га землі. Однак вона виорювала щодня по 25 га, тому закінчила оранку на 4 дні раніше. Скільки землі виорала бригада?

12. Дві труби, працюючи одночасно, наповнюють басейн за 12 годин. Перша труба наповнює басейн на 12 годин швидше, ніж друга. За скільки годин наповнює басейн друга труба?
13. Скільки чистого спирту треба додати до 735 г шістнадцяти-процентного розчину йоду в спирті, щоб одержати десятипроцентний розчин ?
14. Басейн наповнюється водою двома трубами за 6 годин. Перша труба наповнює його на 5 годин швидше, ніж друга. За який час кожна труба, діючи окремо, може заповнити басейн.
15. Через першу трубу басейн наповнюється за 60 хв, а через другу – за 30 хв. За який час наповниться басейн, якщо відкрити обидві труби одночасно.
16. З двох станцій, відстань між якими 400 км, вирушили назустріч один одному два поїзди і зустрілися на середині дороги. Перший поїзд вийшов на 1 годину пізніше, ніж другий із швидкістю на 10 км / год більшою, ніж швидкість другого поїзда. Знайдіть швидкість кожного поїзда.
17. Два робітники за 5 днів спільної роботи виконали 75 % всієї роботи. За скільки днів може виконати все завдання кожний робітник, якщо перший із них виконує цю роботу на 3 дні швидше, ніж другий.
18. Змішали 30 % розчин соляної кислоти з 10 % і одержали 600 г 15 % - го розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?
19. Відстань між двома містами 480 км. Пасажирський поїзд проходить її на 4 години швидше, ніж товарний. Якщо швидкість пасажирського поїзда збільшити на 4 км / год., а швидкість товарного – на 8 км / год., то пасажирський поїзд пройде всю відстань на 2,5 години швидше, ніж товарний. Яка швидкість кожного поїзда ?
20. Бригада робітників повинна виготовити 360 деталей. Виготовляючи щоденно на 4 деталі більше, ніж передбачалося за планом, бригада виконала завдання на 1 день раніше запланованого терміну. Скільки днів витратила бригада на виконання всього завдання?

21. Маємо два сплави золота і срібла; в першому сплаві кількість цих металів знаходиться у відношенні 2 : 3, а в другому – у відношенні 3 : 7. Скільки треба взяти кожного сплаву, щоб одержати 8 кг нового сплаву, в якому золото і срібло було б у відношенні 5 : 11 ?
22. При спільній роботі двох тракторів різної потужності поле було зоране за 6 годин. Якби половину поля зорати одним трактором, а другу – іншим трактором, то вся робота буде закінчена за 12 год. 30 хвилин. За скільки годин можна було б зорати поле кожним трактором окремо?
23. Для пошиття 16 пальт і 15 костюмів витрачено 85 м сукна. Якщо пальт пошити більше на 25 %, а костюмів – на 20 %, то для їх пошиття буде витрачено 104 м сукна. Скільки сукна пішло для пошиття одного пальта і одного костюма?
24. З двох міст, відстань між якими 560 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі і зустрілися через 3 години 44 хвилини. Перший автомобіль проходить весь шлях на 1 годину довше, ніж другий. Яка швидкість кожного автомобіля?
25. Перший трактор, працюючи сам, може зорати ділянку землі за 9 годин, а другий трактор – за 6 годин. За який час буде зорано цю ділянку, якщо трактори працюватимуть одночасно.
26. Два робітники виконують роботу за 4 дні. Якщо один виконає половину роботи, а другий – решту, то робота буде закінчена за 9 днів. За скільки днів виконає цю роботу кожний робітник окремо?
27. Один трактор за 5 годин зорав половину поля. Після цього до роботи приступив другий трактор. Два трактори, працюючи разом, закінчили роботу за 3 години. Яка площа ділянки, якщо другий трактор зорює 8 га за 1 годину?
28. Змішавши 30 %-ий і 60 %-ий розчин оцтової кислоти, одержали 750 г 44 %-го розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?
29. Два поїзди, одночасно виходячи з двох міст назустріч один одному, зустрічаються через 3 год. 44 хв. За скільки годин проїде віддаль між цими містами кожен поїзд, якщо перший поїзд це зробить на 1 годину швидше, ніж другий?

30. Човен пройшов 40 км за течією річки і 32 км проти течії, витративши стільки часу, скільки йому потрібно, щоб у стоячій воді пройти 78 км. Яку швидкість має човен у стоячій воді, якщо швидкість течії 3 км / год?
31. 10 літрів 60 %-ої соляної кислоти змішали з 4 літрами 95 %-ої. Якої міцності вийшла суміш?
32. Поїзд проїхав частину шляху зі швидкістю 50 км за годину, а решту шляху зі швидкістю 45 км за годину і витратив на весь шлях 13 годин. Назад він їхав 10 годин зі швидкістю 62 км за годину. Яку відстань пройшов поїзд зі швидкістю 45 км за годину?
33. 20 л 60 %-го спирту змішали з 10 л 90 %-го спирту. Якої міцності вийшла суміш?
34. Маємо два шматки сплаву срібла і міді. Перший з них містить 81 % міді, другий – 95 %. В якому відношенні потрібно брати сплави від обох шматків, щоб одержати новий сплав, який містив би 87 % міді?
35. Свіжі гриби містять по вазі 90 % води, а сухі – 12 % води. Скільки одержують сухих грибів з 22 кг свіжих грибів?
36. Два автомобілі виїхали одночасно з одного міста в друге. Відстань між містами 200 км. Швидкість першого автомобіля більша від швидкості другого на 10 км / год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо перший автомобіль прибув в друге місто на 1 годину раніше, ніж другий автомобіль.
37. З автовокзалу в аеропорт виїхав автобус зі швидкістю 40 км / год., а через 30 хвилин з швидкістю 60 км / год. з цього вокзалу в аеропорт виїхала легкова автомашина, яка прибула на 0,5 год. раніше ніж автобус. Яка відстань від вокзалу до аеропорту?
38. Велосипедист за кожну хвилину проїжджає на 500 м менше, ніж мотоцикліст, тому на шлях в 120 км він витрачає часу на 2 години більше, ніж мотоцикліст. Знайти швидкість кожного з них.
39. Знайти двоцифрове число, сума цифр якого дорівнює 9, а сума квадратів цих сил – 41.

5. Системи алгебраїчних рівнянь

Розв'язати систему рівнянь :

1.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x(x + y) = 9, \\ y(x + y) = 16. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3|y| - x = 1. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x^2 - y = 23, \\ x^2 \cdot y = 50. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} x - y = 8, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ 4\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} y - x = 1, \\ |y| + x = 1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + y^2 = 7, \\ x \cdot y^2 = 12. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x \cdot y = 3. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} xy = 16, \\ x^2 + y^2 = 68. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4, \\ x^2 - 5xy = 6. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x^2 + y = y^2 + x, \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} (x+1) \cdot (y+1) = 10, \\ (x+y) \cdot (xy+1) = 25. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0,5 \cdot \sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x+y) = -2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{10}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ y^2 + xy = 3. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \frac{5}{2x+y} + \frac{7}{x-y} = 8, \\ \frac{3}{x-y} - \frac{10}{2x+y} = 1. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 1, \\ x^2 + xy - 4y^2 = 2. \end{cases}$$

6. Нерівності

Розв'язати нерівність :

1. $\frac{x^2 + x + 9}{x^2 + 2x - 3} > 0$.

2. $\frac{x^2 + x + 9}{x^2 + x - 2} > 0$.

3. $\frac{x^2 + 4x + 20}{x^2 - 2x - 8} > 0$.

4. $\frac{x^2 + 4}{x^2 - 11x + 30} > 0$.

5. $(x^2 + 3x + 9) \cdot \sqrt{x^2 - 16x + 15} > 0$.

6. $(x^2 + 2x + 8) \cdot \sqrt{x - 5} > 0$.

7. $(x^2 + x - 2) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 8} \geq 0$.

8. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{3 - x} > 0$.

9. $(x - 3) \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 8} > 0$.

10. $\sqrt{20 - x} < x$.

11. $(x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 5x + 6} > 0$.

12. $\sqrt{5 - 4x} < x$.

13. $\sqrt{13x - 30} < x$.

14. $\sqrt{11x - 30} < x$.

15. $|x + 1| + |x - 1| \leq 2$.

16. $\left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| < 1$.

17. $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 - 2x + 1} < 0$

18. $x^2 + |x| - 2 > 0$.

19. $(x - 1) \cdot \sqrt{12 - x - x^2} > 0$.

20. $\sqrt{x^2 - x - 2} < x - 1$.

21. $\sqrt{4x + 5} \leq x$.

22. $|x - 2| + |x - 3| \geq |x - 4|$.

23. $\left| \frac{x - 1}{2x + 3} \right| < \frac{1}{2}$.

24. $\left| \frac{x - 1}{x + 3} \right| > 2$.

25. $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2} - \sqrt{2x + 4} > 0$.

26. $\sqrt{x + 78} < x + 6$.

27. $(x - 1) \cdot \sqrt{12 - x - x^2} > 0$

27. При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + 2x + a > 0$ виконується при будь-яких x ?
28. При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + ax + 3a > 0$ виконується при будь-яких x ?
29. При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + 3x + a^2 > 0$ виконується при всіх дійсних x ?
30. При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 - 2ax + 3a - 2 > 0$ виконується для всіх значень x ?
31. При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + (2a+4)x - a > 0$ виконується для всіх значень x ?

Розв'язати систему нерівностей :

$$32. \begin{cases} 10 + 3x - x^2 > 0, \\ 3 - 4x + x^2 > 0. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} -x^2 + 4x + 5 > 0, \\ x^2 - 2x > 0. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x^2 - 9 \leq 0, \\ x^2 + 2x > 0. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} |x-3| > |x+2|, \\ x + 6 > 0. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 6 + x - x^2 \geq 0, \\ x^3 - 3x^2 - 4x > 0. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} \frac{1}{x} \leq 1, \\ |x-1| < 2. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ |x+1| < 2. \end{cases}$$

7. Показникові й логарифмічні рівняння і нерівності

Обчислити :

1. $4^{\log_2 \sqrt{7}} - 1.$

2. $\log_{\frac{2}{3}} (\log_8 4).$

3. $5^{\log_5 64} - 9^{\log_3 2}$

4. $5^{\log_5 3} - 3^{\log_3 5}$

5. $\lg(\operatorname{ctg} 8) + \lg(\operatorname{tg} 3) + \lg(\operatorname{ctg} 3) + \lg(\operatorname{tg} 8).$

6. $7^{\log_7 5} - 5^{\log_5 7}$

7. $\sqrt{\frac{1}{25^{\log_5 5}} + \frac{1}{49^{\log_7 7}}}$

8. $\frac{2}{5^{\log_2 25}}$

9. $11^{\log_{21} 25} - 8^{\log_2 3}$

10. $121^{0,5 - \log_{11} 3} - 7^{-\log_{19} 16}.$

Розв'язати рівняння :

11. $0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$

12. $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$

13. $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

14. $\frac{4}{2^{x-1} + 2} - \frac{1}{2^{x-1} - 3} = 2.$

15. $4^x + 2 \cdot 2^x - 15 = 0.$

16. $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0.$

17. $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2.$

18. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$

19. $2^{x+1} \cdot 5^x = 200.$

20. $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} = 1536.$

21. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

22. $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$

23. $\frac{2}{8^x} - 2 \frac{3x+3}{x} + 12 = 0.$

24. $20^{3x+2} = 4^{x+12} \cdot 5^{5x-8}.$

25. $3 \cdot 9^x - 29 \cdot 6^{x-1} + 2^{(2x+1)} = 0.$

26. $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x.$

27. $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0.$

28. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}.$

$$29. 3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0.2$$

$$30. 2^{x^2 \cdot 2x} \cdot 5^{x^2 \cdot 2x} = 1000^{2x}$$

Розв'язати нерівність :

$$31. 2^{\frac{1}{x-1}} > \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$32. 2^{\frac{2x-1}{x+3}} > \frac{1}{32}$$

$$33. \frac{2x+1}{2^{x+7}} > 4$$

$$34. 2^{\frac{x-1}{x+2}} > \frac{1}{16}$$

$$35. \frac{(x-1)}{3^{x+4}} > 9$$

$$36. 3^{\frac{(x^2+1)}{x+2}} > \frac{1}{3}$$

$$37. 7^{\frac{(x+2)}{2x-1}} > \frac{1}{49}$$

$$38. 3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}$$

$$39. \frac{(2x-1)}{3^{x+4}} > 9$$

$$40. \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3} \geq 3^{1-x}$$

$$41. \frac{(2x-1)}{4^{x+3}} > 16$$

$$42. \frac{(x-1)}{4^{2x+3}} > 16$$

$$43. \frac{(2x-1)}{4^{x+3}} > \frac{1}{16}$$

$$44. \frac{(x-1)}{4^{2x+5}} > \frac{1}{2}$$

$$45. \frac{(3x-1)}{4^{x+5}} > 64$$

$$46. \frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$$

$$47. 0.5^{\frac{x^2-x-2}{x}} \leq 1$$

$$48. \frac{2}{2^x-4} < \frac{1}{3 \cdot 2^{x+1}-2}$$

$$49. 5^{|x+2|} < \frac{1}{5}$$

$$50. \frac{x^2-3x-2}{2^{x+x^2-1}} > 1$$

Розв'язати рівняння :

51. $\lg\left(\frac{x+6}{\sqrt{2x+3}}\right) = \lg 4$.
52. $\log_2\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = 1 - \log_2\left(\frac{x+3}{x-4}\right)$.
53. $\log_3(3x-8) = 2-x$.
54. $\lg(2x-19) - \lg(3x-20) + \lg x = 0$.
55. $\log_3(x-3) + \log_3(x-6) = \log_3(1+x^2)$.
56. $\lg\left(\frac{x-3}{\sqrt{23-2x}}\right) = \lg 1$.
57. $2\log_3 x - \log_3(3x^2 - x) = 0$.
58. $\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1$.
59. $\lg(12x - x^2 - 19) = 2 \cdot \lg(x-1)$.
60. $\log_{12}(x^2 + 5x + 6) = 1$.
61. $\lg(3x^2 + 7x) - \lg(3x-2) = 1$.
62. $\log_{16}x + \log_4x + \log_2x = 7$.
63. $\log_2(x^2 - 8x + 14) = 1$.
64. $\log_{2x}(x^2 + x - 2) = 1$.
65. $\lg(5-x) + 2\lg\sqrt{3-x} = 1$.
66. $\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2$.
67. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$
68. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x \end{cases}$.
69. $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

Розв'язати нерівність :

70. $\log_2\left(\frac{1}{2-x}\right) > \log_2 x$.
71. $\log_3\left[\frac{(x+3)}{x^2+2}\right] > 1$.
72. $\log_{0.3}(3x+4) > \log_{0.3}(x^2+2)$.
73. $\log_5(x^2+x+1) > \log_5(x+5)$.
74. $\log_{\frac{1}{6}}(x^2-3x+2) < -1$.
75. $\log_3(x+3) - \log_3(2x-5) > \log_3 2$.
76. $\log_3(x+4) - \log_3(x-6) > \log_3 2$.
77. $\log_3(x-2) - \log_3(10-x) > \log_3 5$.

78. $\log_3(x-5) - \log_3(2x-1) > \log_3 2$. 79. $\log(x^2+x+6) - \log(x-1) > \log 1$.
80. $\lg^2 x - \lg x^2 \geq 3$. 81. $\lg^2 x + \lg x^3 + 2 \geq 0$.
82. $\log_2\left(\frac{x-1}{x+3}\right) > 1$. 83. $\log_2\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right) < 0$.
84. $\log_2\left(\frac{3x-1}{x-5}\right) > 0$. 85. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0.3 > 0$.
86. $\log_{0.4}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) > 1$. 87. $\log_3 \frac{x-1}{2x+4} > 1$.
88. $\log_2 x + \log_2(x-1) \leq 1$.

8. Тригонометрія

1. Відомо, що $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Обчислити $(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg} \beta)$.

Обчислити точне значення виразу :

2. $\frac{5}{6 + 7 \sin(2\alpha)}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$. 3. $\frac{(2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha)}{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 6$.
4. $\frac{8}{2 + 10 \sin \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$. 5. $\frac{7 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.
6. $\frac{5 \sin x + 4 \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$, якщо $\operatorname{tg} x = 8$. 7. $\frac{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 5$.
8. $\frac{3}{4 + 5 \cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$. 9. $\frac{(6 \sin \alpha + 3 \cos \alpha)}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 7$.
10. $\operatorname{tg} \beta$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -3$. 11. $\sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$.
12. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$. 13. $\lg \operatorname{tg} 22^\circ + \lg \operatorname{tg} 68^\circ$.
14. $\sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$. 15. $\frac{2}{3 + 4 \cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 0.5$.

16. $\frac{3\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}$, якщо $\operatorname{tg} x = 4$. 17. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{5}\right)$.
18. $\frac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 9$.

Спростити вираз :

19. $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}$ 20. $\frac{(\sin\alpha + \sin 3\alpha) \cdot (\cos\alpha - \cos 3\alpha)}{1 - \cos 4\alpha}$
21. $\cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1$
22. $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha + (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) \cdot \sin^2\alpha$
23. $\frac{1}{\sin\alpha + \sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}$ 24. $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1 + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$
25. $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \cos^2\alpha - 1$ 26. $\sin^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta)$
27. $\frac{\sin^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 4}$ 28. $\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$
29. $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$ 30. $\operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)$
31. $\frac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}$ 32. $\frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$
33. $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1}$ 34. $\frac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} - \frac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha} - 2$
35. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$ 36. $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$
37. $\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ 38. $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$
39. $\frac{(1 - \sin^2 x) \cdot (\sin 4x - \sin 2x)}{\cos x + 2\cos 3x + \cos 5x}$ 40. $\frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (\cos 4x - \cos 2x)}{\sin x + 2\sin 3x + \sin 5x}$

$$41. \frac{\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\sin x + \sin 3x} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1\right). \quad 42. \sin\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right).$$

$$43. \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}. \quad 44. \frac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{\cos x - \cos 3x + \cos 5x}.$$

$$45. \frac{\cos^2 x - 4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x + \cos 3x} \cdot \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

$$46. \frac{1 - \cos(8\alpha - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha}.$$

$$47. 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad 48. \cos 2x + \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x,$$

$$49. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Довести тотожність :

$$50. \frac{(\cos 4\alpha + 1)}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \sin 4\alpha.$$

$$51. \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}.$$

$$52. \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 3\beta}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\beta} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\beta}.$$

$$53. \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

$$54. \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$55. \operatorname{ctg}(45^\circ + 2\alpha) = \frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}.$$

$$56. \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$57. \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$58. (\cos \alpha + \cos \beta)^2 - (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{(\alpha - \beta)}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

$$59. \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta.$$

$$60. \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

$$61. \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

62. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1.$
63. $\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$
64. $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$
65. $\frac{(\sin \alpha + \sin 3\alpha) \cdot (\cos \alpha - \cos 3\alpha)}{1 - \cos 4\alpha} = \sin 2\alpha.$
66. $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = \frac{\cos 5\alpha \cdot \sin 4\alpha}{\sin \alpha}.$
67. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha.$
68. $\frac{1}{\sin x + \sin 3x} - \frac{1}{\sin 3x + \sin 5x} = \frac{\sin 3x}{\sin 2x \cdot \sin 4x}.$
69. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta).$
70. $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}.$
71. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = 1.$
72. $1 - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha.$
73. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha = 1.$
74. $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta).$
75. $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \sin 8x = \frac{\sin 5x \cdot \sin 4x}{\sin x}.$
76. $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$
77. $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x - \cos^2 x}{2(1 - \cos x)} = \cos^2 \frac{x}{2}.$
78. $\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha.$
79. $3 - 4\cos 2x + \cos 4x = 8\sin^4 x.$

$$80. \frac{\sin^2 x - 4\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x - 4 + 4\sin^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

$$81. \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$$

$$82. \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos 3\alpha - \cos \alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

$$83. \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Розв'язати рівняння :

$$84. 1 - \sin 3x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2.$$

$$85. \sin 2x = \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$86. \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right) = 9\cos\left(\frac{\pi}{5} + x\right).$$

$$87. \sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1.$$

$$88. \cos 4x + 2\cos^2 x = 0.$$

$$89. \cos^2 x - \sin x + 5 = 0.$$

$$90. 6\sin x - \sin^3 x = 0.$$

$$91. \sin\left(\frac{\pi}{9} + x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{9} + x\right).$$

$$92. 3\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 2.$$

$$93. 11\cos^2 x - 7\sin x \cdot \cos x + 1 = 0.$$

$$94. 3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0.$$

$$95. \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + 12\cos^2 x = 0.$$

$$96. 4\sin x \cdot \cos x - 6\cos^2 x + 1 = 0.$$

$$97. \sin 2x = \sin 6x - \sin 4x.$$

$$98. 5\cos^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 1 = 0.$$

$$99. \sin\left(\frac{\pi}{7} + x\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{7} + x\right).$$

$$100. (1 - \cos 4x) \cdot \cos 2x = \sin^2 2x.$$

$$101. 15\sin x - 2\cos^2 x - 6 = 0.$$

$$102. \sin\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{8} + x\right).$$

$$103. \sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x.$$

$$104. 1 - \cos 2x = \sin 2x.$$

$$105. 3\sin x = 2(1 - \cos x).$$

$$106. \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 4x.$$

$$107. \sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0.25.$$

$$108. \sqrt{3}\sin^2 2x - 2\sin 4x + \sqrt{3}\cos^2 2x = 0.$$

$$109. 4\cos^2 x - \sin 2x = 1.$$

$$110. \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4}\sin 12x.$$

$$111. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{8}.$$

$$112. \sin 9x = 2\sin 3x.$$

113. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

115. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

117. $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.

119. $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$.

121. $\sin 2x = \cos \frac{4x}{2} - \sin \frac{4x}{2}$.

123. $\cos 2x - 1 = \sin 2x$.

125. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

127. $\cos 3x = \sin 2x + \cos x$.

114. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.

116. $\sqrt{3} \cos^2 3x + \sin 6x - \sqrt{3} \sin^2 3x = 0$.

118. $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x$.

120. $\cos 6x = 2 \sin \left(3 \frac{\pi}{2} + 2x \right)$.

122. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$.

124. $(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos^2 2x$.

126. $\sin x \cdot \sin 2x = \sin 3x \cdot \sin 5x$.

128. $2\cos^2(2\pi + x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) + 2$.

9. Функція, властивості, графік.

Знайти область визначення функції :

1. $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+5}} - 1$.

2. $y = \sqrt{\frac{29-13x}{x^2+1}} + 1$.

3. $y = \sqrt{\frac{2x+4}{x-1}} - 2$.

4. $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+4}} - 2$.

5. $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - 2$.

6. $y = \sqrt{1 - \frac{7}{x^2+3x+9}}$.

7. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}} - 1$.

8. $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-4}} - 1$.

9. $y = \sqrt{\frac{x^2+2x+5}{x^2-8x+15}}$.

10. $y = \sqrt{\frac{x^2+x+8}{x-7}}$.

11. $y = \log_2 \frac{x^2+2x+10}{x^2-2x-3}$.

12. $\log_x \frac{(x+3)}{4-x}$.

13. $y = \log_2 \frac{x^2+x+5}{x^2-7x+12}$.

14. $y = \log_3 \left(\frac{x-3}{x+4} - 2 \right)$.

15. $y = \log_3 \left(\frac{2x+4}{x-1} - 2 \right)$.

16. $y = \log_4 \left(\frac{x-3}{x+5} - 1 \right)$.

17. $\log_5\left(\frac{x+3}{x-7} - 1\right)$.
18. $y = \log_2\left(\frac{x-2}{x+3} - 1\right)$.
19. $\log_6\left(\frac{x+5}{2x-3} - 1\right)$.
20. $y = \log_x \frac{4-x}{x+3}$.
21. $y = \log_x \frac{x+2}{x+3}$.
22. $y = \log_x \frac{x+3}{x+5}$.
23. $y = \log_x \frac{1}{x^2 + 4x - 5}$.
24. $y = \log_x \frac{2x-1}{x+3}$.
25. $y = \log_x \frac{x+2}{3-x}$.
26. $y = \lg(4 - x^2)$.
27. $y = \log_{0.3}(2x^2 - x + 8)$.
28. $f(x) = 10^x + 3 \cdot 10^{-x}$.
29. $y = \lg(3x^2 - 4x + 5)$.
30. $y = \lg(x^2 - x + 9)$.
31. $f(x) = |x^2 - x - 2|$.
32. $y = \log_6(x^2 + 4x + 10)$.
33. $\lg \frac{x^2 - x + 8}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$.
34. $\lg \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{15 - 2x - x^2}}$.
35. $\log_2(x-3) \cdot \sqrt{4 - 5x + x^2}$.
36. $y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}$.
37. $y = \sqrt{3 - |x-1|} - \frac{2}{x^2 - 1}$.
38. $y = \sqrt{\frac{x+2}{2x+5} - \frac{1}{2}}$.
39. $y = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1} - \frac{1}{2}}$.

Побудувати графік функції :

40. $y = \sin|x|$.
41. $y = \lg|x|$.
42. $y = |\sin|x||$.
43. $y = x^2 - |x|$.
44. $y = |x^2 - 5 \cdot |x| + 6|$.
45. $y = x^2 + 2|x| - 1$.
46. $y = 4|x| - x^2$.
47. $y = x^2 + 2|x| - 8$.
48. $y = |x^2 - 3|x| + 2|$.
49. $y = |3 + 2x - x^2| + 3x - 3$.
50. $y = |x+3| - |x-1|$.
51. $y = |x^2 + 4x| - x^2$.
53. $y = |2x - x^2| + x^2$.

54. $y = |x - 1| + |x + 2|.$

56. $y = |\sin |2x||.$

58. $y = x^2 - 2|x + 1| - 1.$

55. $y = |x^2 - |x|| - x.$

57. $y = |x - 3| - |x + 1|.$

59. $y = |x^2 - 3x| + x^2.$

10. Прогресія

1. Між числами 2,5 і 40 вставте три числа так, щоб усі п'ять чисел утворювали геометричну прогресію.
2. Між числами 2 і 7 вставте три числа так, щоб усі п'ять чисел утворювали арифметичну прогресію.
3. Знайти суму всіх двозначних натуральних чисел.
4. Сума третього і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайти суму перших одинадцяти членів цієї прогресії.
5. Сума трьох чисел, що становлять арифметичну прогресію дорівнює 12. Якщо до них відповідно додати 1, 2, 11, то утворені числа становитимуть геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.
6. Знайти суму усіх натуральних чисел, які кратні 6 і не більші за 288.
7. Знайдіть суму усіх натуральних чисел, які кратні 7 і не більші за 287.
8. Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 31, а сума першого і третього членів дорівнює 26. Знайти сьомий член прогресії.
9. Між числами 1 і 11 вставте сім чисел так, щоб усі дев'ять чисел утворювали арифметичну прогресію.
10. Між числами 2 і 9 вставте три числа так, щоб усі п'ять чисел утворювали арифметичну прогресію.

11. Сума перших чотирьох членів геометричної прогресії дорівнює 30, а сума наступних чотирьох членів дорівнює 480. Знайти суму перших дванадцяти членів прогресії.
12. Сума чотирьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 1, а сума квадратів цих чисел дорівнює 0,3. Знайти ці числа.
13. Між числами 2 і 13 вставте чотири числа так, щоб усі шість чисел утворювали арифметичну прогресію.
14. Між числами 4 і 9 вставте три числа так, щоб усі п'ять чисел утворювали арифметичну прогресію.
15. Знайти суму всіх натуральних чисел, більших за 59, але менших за 150.
16. Знайти перший і п'ятий члени геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює 3, а сума перших шести членів дорівнює 1820.
17. Якою є сума натуральних чисел, які менші за 190 і не кратні 3?
18. Між числами 3 і 23 вставте сім чисел так, щоб усі дев'ять чисел утворювали арифметичну прогресію.
19. Сума трьох чисел, що становлять арифметичну прогресію, дорівнює 12. Якщо до них відповідно додати 1, 2 і 11, то утворені числа становитимуть геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.
20. Знайти суму всіх тризначних чисел, які кратні 3.
21. Знайдіть перший і шостий член арифметичної прогресії, якщо різниця її дорівнює 9, а сума восьми її перших членів дорівнює 180.
22. Три числа, сума яких 21, становлять геометричну прогресію. Якщо до них відповідно додати 2, 3 і 1 то утворені числа становитимуть арифметичну прогресію. Знайдіть ці числа.
23. Знайдіть чотири числа, з яких перші три складають геометричну прогресію, а останні – арифметичну прогресію. Сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх дорівнює 12.

24. Сума трьох чисел, що становлять геометричну прогресію дорівнює 21. Якщо від них відповідно відняти 1, 1 і 4 то утворені числа становитимуть арифметичну прогресію. Знайдіть ці числа.
25. Три числа x , y , z утворюють у вказаному порядку геометричну прогресію, а числа x , $2y$, $3z$ утворюють у вказаному порядку арифметичну прогресію. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, відмінний від одиниці.
26. Між числами 1 і 4 вставте дев'ять чисел так, щоб усі 11 чисел утворили арифметичну прогресію .
27. Знайдіть перший і п'ятий члени арифметичної прогресії , якщо різниця її дорівнює 7, а сума шести її перших членів дорівнює 159.
28. Знайдіть перший і шостий члени геометричної прогресії , якщо її знаменник дорівнює 2, сума восьми перших членів дорівнює 765.
29. Сума третього і п'ятого членів геометричної прогресії дорівнює 10, а сума другого і четвертого членів дорівнює $10/3$. Знайдіть четвертий член прогресії .
30. Три числа, що дають у сумі 27, становлять арифметичну прогресію . Якщо від них відповідно відняти 1, 3 і 2 , то утворені числа становитимуть геометричну прогресію . Знайдіть ці числа.
31. Другий, перший і третій члени арифметичної прогресії , різниця якої відмінна від нуля, утворюють у вказаному порядку геометричну прогресію. Знайдіть її знаменник.
32. В арифметичній прогресії перший член дорівнює 28, а сума 25 перших членів дорівнює 925. Знайти різницю і тридцять шостий член прогресії .
33. Сума трьох чисел, що становлять арифметичну прогресію, дорівнює 15, а сума квадратів цих же чисел дорівнює 93. Знайдіть ці числа.
34. Три числа утворюють арифметичну прогресію . Сума цих чисел дорівнює 3, а сума їх кубів дорівнює 4. Знайти ці числа.

35. Чи утворюють числа $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_3 2}$ арифметичну прогресію?

11. Похідна

1. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в точці його перетину з віссю ОХ:

$$y = \frac{x}{x^2 + 6}$$

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в точці його перетину з віссю ОХ:

$$y = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$$

3. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в точці його перетину з віссю ОУ:

$$y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в точці його перетину з віссю ОХ:

$$y = \frac{x}{x^2 + 4}$$

5. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в точці його перетину з віссю ОХ:

$$y = 6x^5 + 2x^3 + 3x + 7$$

6. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в точці його перетину з віссю ОУ:

$$y = x^4 + 3x^2 + x + 6$$

7. Скласти рівняння дотичної до графіка функції в точці його перетину з віссю ОУ:

$$y = \frac{3}{x^2 + 2x + 3}.$$

8. На кривій $y = 4x^2 - 6x + 3$ знайти точку, в якій дотична паралельна прямій $y = 2x$.

9. На кривій $y = x^2 - x + 1$ знайти точку, в якій дотична паралельна прямій $y = 5x + 2$.

10. Знайти координати точки М, яка належить кривій $y = \frac{x-1}{x+1}$, щоб дотична до цієї кривої в точці М була паралельна прямій $y = 2x + 1$.

11. Знайти координати точки, яка належить гіперболі $y = \frac{x+1}{x-1}$, в якій дотична до цієї гіперболи паралельна прямій $y = -2x + 1$.

Знайти проміжки зростання та спадання функції :

12. $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 8.$

13. $y = \frac{x}{x^2 + 4x + 36}.$

14. $y = x^4 - 2x^2 + 5.$

15. $y = x^3 - 6x^2 + 1.$

16. $y = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}.$

17. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x.$

18. $y = \frac{1}{2x^2 + x + 8}.$

19. $y = \frac{x}{x^2 + 6x + 49}.$

20. $y = \frac{2x}{6x^2 + 1}.$

21. $y = \left| \frac{x-1}{x} \right|.$

22. $y = \frac{3x}{x^2 + 6}.$

Знайти екстремальні точки функції :

23. $y = 2x^3 - 12x + 3.$

24. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5.$

25. $y = \frac{x}{x^2 + 3x + 9}.$

26. $y = \frac{x}{x^2 + 3x + 9}.$

27. $y = \frac{2x}{x^2 + 4x + 10}.$

28. $y = \frac{2x}{x^2 + 2x + 4}.$

29. $y = \frac{6x}{x^2 + 2x + 3}.$

30. $y = \frac{3x}{x^2 + 6x + 25}.$

31. $y = \frac{3x}{x^2 + x + 9}.$

32. $y = \frac{4x}{x^2 + x + 49}.$

33. $y = \frac{2x}{6x^2 + 1}.$

34. $y = \left| \frac{x-1}{x} \right|.$

35. $y = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2.$

Знайти найбільше та найменше значення функції

36. $y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$ на відрізку $[0; 3]$.

37. $y = \cos^2 2x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{6}\right]$.

38. $y = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$ на відрізку $[-3; 0]$.

39. $y = x^2 + 2x^2 + 5$ на відрізку $[-3; 3]$.

40. $y = \frac{x}{x^2 + 2x + 8}$ на відрізку $[0; 4]$.

41. $y = \frac{2x}{x^2 + 4x + 16}$ на відрізку $[-3; 3]$.

42. $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 12x$ на відрізку $[0; 9]$.

43. $y = \frac{3x}{x^2 + x + 8}$ на відрізку $[0; 4]$.

44. Парканом довжиною 100м необхідно загородити найбільшу за площею прямокутну ділянку, що межує з річкою. Якими мають бути розміри ділянки, якщо зі сторони річки паркан відсутній?
45. Різниця двох чисел дорівнює 7. Якими мають бути ці числа, щоб добуток їх був найменшим?
46. Розкладіть число 20 на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.
47. Число 18 розбити на такі два доданки, щоб сума їх квадратів була найменша.
48. Тризначне число закінчується цифрою 2. Якщо її перенести на початок запису числа, то одержане число буде на 18 більше початкового. Знайти це число.
49. Число 18 розкласти на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.
50. Розкласти число 8 на два невід'ємні доданки так, щоб сума квадрата першого доданка та куба другого доданка була найменшою.
51. Знайти число, яке перевищувало б свій квадрат на максимальне значення.
52. Розкласти число 6 на два невід'ємні доданки так, щоб добуток квадрата першого доданка на другий доданок був найбільшим.
53. Знайдіть розміри відкритого басейна з квадратним дном і об'ємом 256 м^3 такого, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

12. Теорія з геометрії

1. Сума внутрішніх кутів трикутника (з доведенням).
2. Сума внутрішніх кутів опуклого багатокутника (вивести формулу).
3. Паралелограм (означення). Ознака паралелограма (з доведенням).
4. Сформулювати три ознаки рівності трикутників і довести одну з них.

5. Вивести формули для знаходження площ паралелограма, трикутника, трапеції.
6. Подібні трикутники (означення). Ознака подібності трикутників (сформулювати всі ознаки й довести одну з ознак).
7. Теорема Піфагора (з доведенням).
8. Вписаний кут (означення). Вимірювання вписаного кута (з доведенням).
9. Теорема про центр кола, вписаного в трикутник (з доведенням).
10. Теорема про центр кола, описаного навколо трикутника (з доведенням).
11. Формула відстані між двома точками площини. Вивести рівняння кола.
12. Паралельні прями (означення). Ознака паралельності двох прямих (з доведенням).
13. Властивості рівнобедреного трикутника.
14. Властивість точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
15. Перпендикулярність двох площин (означення). Ознака перпендикулярності двох площин (з доведенням).
16. Паралельність прямої і площини (з доведенням).
17. Паралельні площини (означення). Ознака паралельності двох площин (з доведенням).

13. Рівнобедрений трикутник

1. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бічна сторона відноситься до основи, як 5:6. Обчислити діаметр вписаного кола.
2. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бічна сторона – 40 см. Знайти радіус вписаного кола.
3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 160 см, а висота, опущена на основу дорівнює 40 см. Знайти всі сторони трикутника.
4. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 55 см, а його основа дорівнює 66 см. Обчислити довжину відрізків, на які ділить бічну сторону бісектриса кута при основі.
5. Бічна сторона рівнобедреного трикутника ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки 24 см і 16 см, починаючи від кінця основи. Знайти радіус цього кола.

6. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника відносяться як $5 : 6$, а периметр його дорівнює 48 см. Знайти відстань від точки перетину медіан до основи.
7. Бісектриса, проведена до бічної сторони рівнобедреного трикутника, ділить її на відрізки 25 см і 30 см, починаючи від вершини, яка протилежна основі. Обчислити периметр трикутника.
8. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см, а висота, опущена на неї – 24 см. Знайти периметр трикутника.
9. У рівнобедреному трикутнику висота, опущена на основу, дорівнює 32 см. Бісектриса кута, при основі перетинає дану висоту в точці, яка віддалена від основи на 12 см. Знайти основу трикутника.
10. У рівнобедреному трикутнику кут, утворений висотою, проведеною до основи, і бісектрисою кута при основі, дорівнює 55° . Знайти всі кути трикутника.
11. У рівнобедреному трикутнику висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 48 см і ділить бічну сторону на відрізки у відношенні $18 : 7$, починаючи від вершини кута при основі. Обчислити периметр трикутника.
12. У рівнобедреному трикутнику медіана бічної сторони дорівнює 10 см, а висота, опущена на основу, – 16 см. Знайти основу трикутника.
13. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 10 см, а висота – 20 см. Знайти висоту опущену на бічну сторону.
14. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 32 см, а діаметр описаного навколо нього кола дорівнює 50 см. Обчислити периметр трикутника.
15. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана бічної сторони 5 см. Знайти довжину бічної сторони.
16. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 30 см, а висота, опущена на бічну сторону – 24 см. Обчислити периметр трикутника.

17. Основа рівнобедреного трикутника довша від бічної сторони на 9 см. Відстань від точки перетину медіан до основи дорівнює 3 см. Обчислити периметр трикутника.
18. Знайти площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника, якщо основа цього трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона 13 см.
19. На медіані рівнобедреного трикутника, проведеної до основи, взято точку, що однаково віддалена від кінців бічної сторони. Обчислити периметр трикутника якщо відстань від цієї точки до основи дорівнює 14 см, а до кінця основи – 50 см.
20. Навколо радіуса R описано рівнобедрений трикутник з кутом 120 град. Знайти його сторони.
21. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною, що дорівнює 4 см, проведено медіану бічної сторони. Знайти основу трикутника, якщо довжина медіани дорівнює 3 см.
22. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α , а висота опущена на бічну сторону, – h . Знайти периметр трикутника.
23. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бічна сторона відноситься до висоти, проведеної до основи, як 5:4. Знайдіть діаметр описаного кола.
24. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 96 см, а бічна сторона і основа відноситься, як 5 : 6. Точка медіани, проведеної до основи однаково віддалена від бічної сторони і основи. Обчисліть відстань від цієї точки до вершини, протилежної основи.
25. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 80см, а висота, проведена до основи – 20см. Знайдіть висоту, проведеному до бічної сторони трикутника.
26. Центр вписаного у рівнобедрений трикутник кола ділить його висоту, проведеному до основи, на відрізки 12 і 20см, починаючи від основи. Обчисліть периметр трикутника.

27. Центр вписаного у рівнобедрений трикутник кола ділить висоту, проведену до основи, на відрізки 12 і 20см починаючи від основи. Обчисліть радіус описаного кола.
28. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60см, а периметр – 192см. Обчисліть відстань між точками перетину медіан і бісектрис трикутника.
29. Бічна сторона і периметр рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 25 і 80см. Обчисліть периметр подібного йому трикутника, висота якого, опущена на бічну сторону, дорівнює 48см.
30. Бічна сторона рівнобедреного трикутника і висота опущена на неї, відповідно дорівнюють 25 і 24см. Обчисліть периметр подібного йому трикутника, основа якого дорівнює 60см.
31. Висота, опущена на основу рівнобедреного трикутника, дорівнює 20см, а висота опущена на бічну сторону – 24см. Обчисліть площу трикутника.
32. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 96см, а основа і висота опущена на неї, відносяться, як 3 : 2. Точка медіани, проведеної до основи, рівновіддалена від бічної сторони і основи. Обчисліть цю відстань.
33. Висота, опущена на бічну сторону рівнобедреного трикутника, дорівнює 24см, а бічна сторона відноситься до основи, як 5:6. Знайдіть площу трикутника.
34. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 11см і вдвічі більша своєї проекції на бічну сторону. Знайдіть площу трикутника.
35. Висота, опущена на бічну сторону рівнобедреного трикутника, ділить її на відрізки, різниця між якими 11см. Обчисліть площу трикутника, якщо його бічна сторона відноситься до основи, як 5:6.
36. Сума бічної сторони і основи рівнобедреного трикутника дорівнює 78см. Точка бісектриси, проведеної до основи, рівновіддалена від бічної сторони та основи і ділить цю бісектрису на відрізки у відношенні 5:4. Знайдіть основу.

37. Сума бічної сторони і основи рівнобедреного трикутника дорівнює 46см, висота – 24 см. Знайти площу.
38. Точка висоти, опущеної на основу, рівновіддалена від бічної сторони та основи і ділить цю висоту на відрізки у відношенні 5:3. Знайдіть бічну сторону.
39. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить висоту, опущену на основу, на відрізки 15см і 9см. Знайти площу трикутника.
40. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить висоту, опущену на основу, на відрізки у відношенні 5:3. Знайти цю висоту, якщо периметр трикутника дорівнює 48см.
41. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 150см, а бічна сторона – 125см. Обчисліть довжину відрізка, кінцями якого є основи висот, проведених до бічних сторін.
42. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 144см, а периметр – 384см. Обчисліть відстань між точками перетину медіан і серединних перпендикулярів трикутника.
43. Точка перетину медіан і точка перетину бісектрис рівнобедреного трикутника віддалені від вершини, яка протилежна основі, на 16 і 15см. Обчисліть периметр трикутника.
44. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить висоту, опущену на бічну сторону, на відрізки 75 і 21см. починаючи від кінця основи. Знайдіть сторони трикутника.
45. Основа і висота рівнобедреного трикутника, опущена на неї, відносяться, як 8:3, а периметр його дорівнює 54см. Обчисліть відстань від точки перетину медіан до вершини, яка протилежна основі.
46. Всередині рівностороннього трикутника взято точку М, яка знаходиться на відстанях b , c , d від сторін трикутника. Знайдіть висоту цього трикутника.

14. Прямокутний трикутник

1. Площа прямокутного трикутника дорівнює $2\sqrt{3}\text{см}^2$. Знайти висоту, проведену до гіпотенузи, якщо вона ділить прямиий кут у відношенні 1:2.
2. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 132, а сума квадратів усіх сторін – 6050. Знайти сторони трикутника.
3. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а площа його дорівнює 24 см^2 . Знайти площу описаного круга.
4. Знайти відношення площі круга, вписаного у правильний трикутник, до площі круга, описаного навколо нього.
5. Знайти радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 3 см, а менший катет дорівнює 10 см.
6. Відрізок, проведений з вершини прямого кута до середини гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а різниця катетів – 6 см. Знайти периметр трикутника.
7. В прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною в 5 і 12 см. Знайти катети трикутника.
8. В прямокутному трикутнику довжини медіан гострих кутів дорівнюють $\sqrt{156}$ і $\sqrt{89}$ см. Знайти довжину гіпотенузи.
9. Відрізок, що сполучає середини катетів прямокутного трикутника, дорівнює 25 см, а різниця катетів дорівнює 10 см. Обчислити периметр трикутника.
10. Точка дотику вписаного у прямокутний трикутник кола ділить його гіпотенузу на два відрізки, різниця між якими 4 см. Обчислити периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 20 см.
11. Точка на гіпотенузі, рівновіддалена від обох катетів, ділить гіпотенузу на відрізки, довжиною 30 см і 40 см. Знайти катети трикутника.

12. Точка, що належить катету прямокутного трикутника, віддалена від кінців гіпотенузи на 25 см. Відстань від цієї точки до другого катета дорівнює 7 см. Обчислити периметр трикутника.
13. Радіус кола описаного навколо прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а катет – 16 см. Знайти радіус вписаного кола.
14. Радіус вписаного кола у прямокутний трикутник дорівнює 4 см, а катет – 12 см. Знайти радіус описаного кола.
15. Бісектриса прямого кута прямокутника ділить його діагональ на відрізки 20 см і 15 см. Обчислити площу прямокутника.
16. Бісектриса ділить гіпотенузу прямокутного трикутника у відношенні 3:4, а різниця катетів дорівнює 5 см. Обчислити периметр трикутника.
17. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет у відношенні 5:4. Знайти інший катет трикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.
18. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти катети подібного йому трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 35 см.
19. Куті відносяться, як 1:2:3. Обчислити кут між бісектрисою, проведеною з вершини найбільшого кута, та висотою, проведеною до найбільшої сторони трикутника.
20. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Обчислити радіус вписаного кола.
21. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см, а різниця між гіпотенузою і одним з катетів – 3 см. Знайти другий катет трикутника.
22. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 63 см і 112 см. Обчислити довжини відрізків, на які ділить її бісектриса прямого кута.
23. Діаметр кола, вписаного у прямокутний трикутник, дорівнює 8 см, а катет – 24 см. Обчислити радіус описаного кола.

24. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 і 12см. Знайдіть відстань між точкою перетину його бісектрис і точкою перетину медіан.
25. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $8\sqrt{5}$ і $6\sqrt{5}$ см. Знайдіть довжину бісектриси, проведену з вершини більшого гострого кута трикутника.
26. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, різниця між якими 10см. Обчисліть радіус описаного кола, якщо катети відносяться, як 3 : 4.
27. Катет прямокутного трикутника дорівнює 32см, а точка, що належить цьому катету, віддалена від кінців гіпотенузи на 25см. Обчисліть периметр трикутника.
28. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 20 і 25см. Знайдіть гіпотенузу подібного йому трикутника, висота якого, проведена до гіпотенузи, дорівнює 36см.
29. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 7 і 2см. Знайдіть радіус вписаного кола.
30. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 15 і 20см. Знайдіть площу трикутника.
31. Радіуси описаного і вписаного у прямокутний трикутник кіл відповідно дорівнюють 15 і 6см. Обчисліть периметр трикутника.
32. Точка дотику вписаного у прямокутний трикутник кола ділить його гіпотенузу на відрізки 12 і 8см. Обчисліть діаметр цього кола.
33. Точка дотику вписаного у прямокутний трикутник кола ділить його гіпотенузу на відрізки у відношенні 3 : 2. Обчисліть периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 20см.
34. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 21 і 35см. Знайдіть площі частин трикутника, на які ділить його бісектриса прямого кута.
35. Центр півкола, вписаного у прямокутний трикутник так, що його діаметр лежить на гіпотенузі, ділить гіпотенузу на відрізки 30 і

- 40 см. Знайти довжину дуги півкола, що розташована між точками дотику півкола з катетами.

15. Різносторонній трикутник

1. Сторони трикутника дорівнюють 30 і 40 см, а висота, опущена на третю сторону, дорівнює 24 см. Знайти медіану, проведену до третьої сторони трикутника.
2. Сторони трикутника дорівнюють 25 см, 24 см і 7 см. Знайти радіус описаного кола.
3. Сторони трикутника дорівнюють 3 і 5 см, а кут між ними 120 град. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 60 см.
4. Сторона трикутника дорівнює 35 см, а дві інші сторони утворюють кут 120 град. і відносяться, як 5:3. Обчислити периметр трикутника.
5. Сума двох сторін трикутника дорівнює 8 см, а кут між ними – 120 град. Знайти периметр трикутника, якщо третя сторона дорівнює 7 см.
6. Сторони трикутника, кут між якими 60 град., відносяться як 5:6, а третя сторона дорівнює 21 см. Обчислити периметр трикутника.
7. Сторони трикутника відносяться, як 5:4:2. Знайти сторони подібного трикутника, сума найбільшої та найменшої сторін якого дорівнює 21 см.
8. Сторони трикутника дорівнюють 14 см, 18 см і 28 см. Знайти медіану трикутника, опущену на більшу сторону.
9. Сума двох сторін трикутника дорівнює 65 см. Бісектриса між цими сторонами ділить протилежну сторону на відрізки 15 см і 24 см. Знайти всі сторони трикутника.
10. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 і 7 см. Кут, протилежний до більшої з них, дорівнює 60 град. Знайти довжину третьої сторони трикутника.

11. Дві сторони трикутника відносяться, як 5:8. Висота, проведена до третьої сторони, ділить її на відрізки 7 см і 32 см. Знайти сторони трикутника.
12. Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Бісектриса кута між даними сторонами ділить третю сторону на відрізки, різниця між якими 4 см. Знайти периметр трикутника.
13. Висота трикутника, опущена на сторону, ділить її на відрізки 7 см і 32 см, а бісектриса ділить цю сторону на відрізки у відношенні 5:8. Обчислити периметр трикутника.
14. В коло радіуса R вписано трикутник з кутами 15 і 60 град. Знайти площу трикутника.
15. У трикутнику основа дорівнює 60 см, висота 12 см і медіана, проведена до основи, 13 см. Знайти бічні сторони.
16. У трикутнику одна із сторін дорівнює 1 м, а прилеглі до неї кути дорівнюють 30 і 45 град. Знайти інші сторони трикутника.
17. З однієї вершини трикутника проведено висоту, бісектрису і медіану. Відстань від другої вершини до кінців висоти, бісектриси і медіани відповідно дорівнюють 21 см, 25 см і 25,5 см. Знайти периметр трикутника.
18. Знайти радіуси вписаного й описаного кола трикутника із сторонами 4 см, 5 см і 7 см.
19. Різниця двох кутів трикутника дорівнює 10 град., а кут між бісектрисами, проведеними з вершин цих кутів, дорівнює 115 град. Знайти ці кути.
20. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить медіану, проведenu до основи, на відрізки 10 см і 6 см. Обчислити периметр трикутника.
21. Периметр трикутника дорівнює 45 см, а його сторони відносяться, як 4:5:6. Знайти найбільшу сторону трикутника.

22. Медіана трикутника, проведена до сторони, довжина якої 20 см, утворює з нею кут 60 град., а сторона, що лежить проти цього кута, дорівнює $2\sqrt{19}$ см. Знайти третю сторону трикутника.
23. Висота, проведена до основи трикутника, дорівнює 72см і ділить основу на відрізки 30см і 96см. Обчислити радіус описаного кола.
24. Бічні сторони трикутника дорівнюють 25 і 40см, а висота, проведена до основи, - 24см. Обчисліть площі частин трикутника, на які його ділить бісектриса, проведена до основи.
25. Медіани трикутника дорівнюють 24, 30 і 18см. Знайти площу трикутника.
26. Основа трикутника дорівнює 20см; медіани бічних сторін дорівнюють 18 і 24см. Знайти площу трикутника.
27. Знайти площу трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 1 і $\sqrt{13}$, а медіана третьої сторони дорівнює 2.
28. Сторони трикутника дорівнюють 10, 13 і 16см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо сума найбільшої і найменшої сторін трикутника дорівнює 78см.
29. Сторони трикутника дорівнюють 24см і 40см, а кут між ними дорівнює 120° . Знайдіть відрізки, на які бісектриса даного кута ділить третю сторону.
30. Сторона трикутника дорівнює 56см. До неї проведено медіану і висоту, відстань між основами яких дорівнює 8см. Більша з двох інших сторін дорівнює 60см. Обчисліть діаметр описаного кола.
31. До основи трикутника проведено бісектрису, яка ділить її на відрізки 15 і 24см. Менша бічна сторона трикутника дорівнює 25см. Обчисліть площу трикутника.
32. Дві бічні сторони трикутника дорівнюють 78 і 20см, а висота, проведена до основи, дорівнює 72см. Обчисліть радіус описаного кола.

16. Ромб

1. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить його основу на відрізки довжиною m і n . Знайти діагоналі ромба.
2. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, ділить сторону на відрізки 7 см і 18 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити радіус вписаного кола.
3. Сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см, а менша його діагональ – 8 см. Знайти другу діагональ.
4. Сума діагоналей ромба дорівнює 70 см, а сторона – 25 см. Знайти висоту ромба.
5. Різниця діагоналей ромба дорівнює 10 см, а його периметр дорівнює 100 см. Обчислити площу ромба.
6. Діагоналі ромба відносяться, як 3:4. Знайти висоту ромба, якщо його сторона дорівнює 25 см.
7. Діагоналі ромба дорівнюють 6 і 8 см. Обчислити периметр подібного йому ромба, висота якого дорівнює 48 см.
8. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба, ділить його сторону на відрізки 16 см і 9 см. Знайти діагоналі ромба.
9. Перпендикуляр, проведений з вершини гострого кута паралелограма до його діагоналі, ділить її на відрізки 18 см і 6 см. Знайти діагоналі паралелограма, якщо сума його сторін дорівнює 48 см.
10. Більша діагональ ромба ділить його висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 см і 21 см. Знайти площу ромба.
11. Різниця між стороною і висотою ромба дорівнює 1 см. Діагоналі ромба відносяться, як 3:4. Знайти периметр ромба.
12. Точка дотику вписаного в ромб кола ділить його сторону на відрізки 16 см і 9 см. Обчислити діаметр кола.

13. Більша діагональ ромба ділить його висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки у відношенні $25 : 7$. Обчисліть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 100см .
14. Тупий кут ромба дорівнює 120° . З вершини цього кута до протилежних сторін ромба проведено два перпендикуляри, відстань між основами яких дорівнює 12см . Обчисліть периметр ромба.
15. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, ділить його сторону на відрізки 7 і 18см , починаючи від вершини гострого кута. Обчисліть площі частин, на які ділить ромб ця висота.
16. В ромб вписано коло радіуса R . Знайти площу ромба, якщо його більша діагональ дорівнює $4R$.
17. Діагоналі ромба відносяться, як $3:4$, а їх різниця дорівнює 20см . Обчисліть площі частин, на які ділить ромб пряма, що проходить через вершину тупого кута і середину протилежної сторони.
18. Сторона ромба дорівнює 25см , а його висота – 24см . Знайдіть діагоналі ромба.
19. Діагоналі ромба відносяться, як $3:4$, а його периметр дорівнює 100см . Обчисліть площу ромба.
20. В ромб з гострим кутом 30° вписано коло, а в коло – квадрат. Знайти відношення площі ромба до площі квадрата.
21. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба, ділить його сторону на відрізки 7 і 18см ., починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть діагоналі ромба.

17. Паралелограм

1. Сторони паралелограма дорівнюють 40 см і 60 см , а різниця діагоналей дорівнює 8 см . Знайти діагоналі паралелограма.
2. Висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 12 і 8 см , а кут між ними – 30 град. Обчислити площу паралелограма.

3. Одна із сторін паралелограма дорівнює 15 см, а тупий кут 120 град. Протилежна до цього кута діагональ дорівнює 21 см. Знайти периметр паралелограма.
4. Бісектриса кута паралелограма, який дорівнює 150 град., ділить його сторону на відрізки 24 см і 16 см, починаючи від вершини протилежного кута. Обчислити площу паралелограма.
5. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а сторони відносяться, як 6:7. Знайти периметр паралелограма.
6. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а менша його сторона – 6 см. Знайти другу сторону.
7. Діагоналі паралелограма дорівнюють 80 і 120 см, а різниця його сторін дорівнює 48 см. Обчисліть периметр паралелограма.
8. Бісектриса кута паралелограма, який дорівнює 30° , ділить сторону на відрізки 18 см і 12 см, починаючи від вершини протилежного кута. Знайдіть площу паралелограма.
9. Сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см, а діагоналі відносяться як 4:7. Знайдіть довжини діагоналей.
10. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі ділить її на відрізки 41 см і 57 см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо різниця сторін паралелограма дорівнює 14 см.
11. Одна із сторін паралелограма дорівнює 15 см, а гострий кут 60° . Протилежна до цього кута діагональ дорівнює 21 см. Обчисліть периметр паралелограма.
12. Сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см, а сума діагоналей – 22 см. Знайдіть діагоналі паралелограма.
13. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 15 см, а кут між його висотами дорівнює 30° . Знайдіть площу паралелограма.
14. Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 см і 11 см, а його периметр – 34 см. Знайдіть сторони паралелограма.

18. Прямокутник

1. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см і ділить його кут на два кути у відношенні 1:5. Знайти площу прямокутника.
2. Периметр прямокутника дорівнює 98 см, а бісектриса прямого кута ділить діагональ на відрізки у відношенні 3:4. Обчислити радіус описаного кола.
3. Сторони прямокутника відносяться як 3:4, а його діагональ дорівнює 35 см. Обчисліть площі частин, на які ділить цей прямокутник бісектриса, проведена з його вершини.
4. Периметри прямокутника 56 см, а бісектриса, проведена з його вершини, ділить діагональ у відношенні 3:4. Обчисліть площу прямокутника.

19. Вектор

1. Для яких значень x вектори $\vec{a}(x; -13; 6)$ і $\vec{b}(x; x; 7)$ перпендикулярні?
2. Для яких значень x вектори $\vec{a}(x; 1; 2)$ і $\vec{b}(x; -3; x)$ перпендикулярні?
3. Для яких значень x вектори $\vec{a}(x; x; 6)$ і $\vec{b}(x; 5; -4)$ перпендикулярні?
4. Для яких значень x вектори $\vec{a}(x; 5; 6)$ і $\vec{b}(x; x; 1)$ перпендикулярні?
5. Для яких значень x вектори $\vec{a}(x; 1; 3)$ і $\vec{b}(x; 2x; -1)$ перпендикулярні?
6. Вектори $\vec{a}(n; -2; 1)$ і $\vec{b}(n; 1; -n)$ перпендикулярні. Знайти n .
7. Довести, що трикутник з вершинами $A(2; 1)$, $B(-2; 1)$, $C(2; 4)$ – прямокутний.
8. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(7; 1; -5)$, $B(4; -3; -4)$, $C(1; 3; -2)$ – рівнобедрений.
9. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; 4; 0)$ – прямокутний.

10. Вершинами трикутника є точки $A(0;4)$, $B(-2;-1)$, $C(4;0)$. Знайти довжину медіани, яку проведено до сторони AC .
11. Дано три вершини паралелограма $ABCD$: $A(1;3)$, $B(2;0)$, $C(-1;-3)$. Знайти координати четвертої вершини D і координати точки перетину діагоналей.
12. Знайти координати точки, яка симетрична середині відрізка AB відносно площини π , якщо $A(7; -3; 1)$ і $B(6; 7; 8)$.
13. Дано куб $ABCD_1B_1C_1D_1$. Обчисліть кут між векторами BD_1 і MA_1 , де M – середина ребра AD .
14. Дано вектор $\vec{a} = (-2; 1; 4)$ і точку $M(1; 0; -1)$. Знайти координати точки N , якщо $2\vec{a} + 3\vec{MN} = \vec{0}$.
15. На осі Oz знайти точку A , рівновіддалену від точок $M(-2; 3; 5)$ і $N(3; -5; 1)$.
16. Дано куб $ABCD_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між векторами BC_1 і BK , де K – середина ребра DD_1 .
17. Знайдіть довжину діагоналі BD паралелограма $ABCD$, якщо $A(1; -3; 0)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(-3; 1; 1)$.
18. Точки $A(3; 1; 8)$, $B(4; 7; 1)$, $C(3; 5; -8)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини D .
19. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$.
20. Знайдіть кут між стороною AC і медіаною BM трикутника ABC , якщо $A(-3; -5; 1)$, $B(-4; -1; -2)$, $C(3; 3; 1)$.
21. Точка $M(2; 8; 5)$ – середина відрізка, кінці якого знаходяться на осі Oz і в площині π . Знайдіть координати кінців і довжину відрізка.
22. На які частини площина xOz ділить відрізок з кінцями $A(4; -12; 5)$, $B(13; 8; -7)$?
23. Знайдіть координати точки, що лежить на осі X і рівновіддалена від точок $A(1; 2; 2)$ і $B(-2; 1; 4)$.

24. На які частини площина xOy ділить відрізок з кінцями $A(1; 2; 6)$ і $B(7; 11; -12)$.
25. Знайдіть абсолютну величину вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 8$, а кут між ними 120° .
26. Точка $M(2; 6; 3)$ – середина відрізка, кінці якого знаходяться на осі Ox і в площині YZ . Знайдіть координати кінців і довжину відрізка.

20. Коло

1. Точки ділять коло на частини, які відносяться, як $7:8:9$. Знайти кути трикутника, вершинами якого є дані точки.
2. Точки ділять коло на частини, які відносяться, як $5:6:7$. Знайти кути трикутника, вершинами якого є дані точки.
3. З однієї точки кола проведено дві хорди довжиною 36 і 40 см. Обчислити діаметр кола, якщо відстань між серединами цих хорд дорівнює 34 см.
4. З точки поза колом проведено до нього дотичну довжиною 32 см. Відстань від цієї точки до кола дорівнює 24 см. Знайти радіус кола.
5. З точки поза колом проведено дотичну, довжина якої дорівнює 20 см. Знайти радіус кола, якщо відстань від цієї точки до кола дорівнює 10 см.
6. З точки поза колом проведено січну, зовнішня і внутрішня частини якої відповідно дорівнюють 8 см і 10 см. Обчислити довжину дотичної, проведеної з даної точки до кола.
7. З точки поза колом проведено січну, зовнішня і внутрішня частини якої відносяться, як $4:5$. Обчислити довжину цієї січної, якщо дотична, проведена з цієї точки до кола, дорівнює 12 см.
8. З точки кола проведено дві рівні хорди, одна з яких дорівнює $4\sqrt{2}$ і стягує дугу 90 град. Обчислити радіус кола.

9. З точки поза колом проведено січну. Різниця зовнішньої і внутрішньої частини січної дорівнює 4 см, а відстань від точки до кола – 10 см. Обчислити довжину цієї січної, якщо діаметр кола дорівнює 14 см.
- 10.3 точки поза колом до нього проведено дотичну довжиною 36 см. Радіус кола дорівнює 15 см. Обчислити відстань від даної точки до кола.
- 11.3 точки до кола проведено дотичну довжиною 20 см. Обчислити відстань від даної точки до кола, якщо радіус кола дорівнює 15 см.
- 12.3 точки поза колом проведено січну, зовнішня і внутрішня частини якої відносяться, як 4:5. Обчислити довжину цієї січної, якщо відстань від точки до кола дорівнює 10 см, а радіус кола – 7 см.
13. З точки до кола проведено січну, яка перетинає коло в точках, відстань між якими 8 см. Найменша відстань від даної точки до кола дорівнює 10 см, а до центра – 17 см. Обчислити відстані від точок перетину січної з колом до даної точки.
- 14.3 точки проведено дві перпендикулярні хорди, різниця між якими 8 см. Знайти довжини цих хорд, якщо радіус кола дорівнює 20 см.
15. Хорда, довжина якої 48 см, перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки у відношенні 9:16. Знайти радіус кола.
16. Хорда, довжина якої 24 см, перпендикулярна до діаметра, довжина якого дорівнює 25 см. Знайти відстані від одного кінця хорди до кінців діаметра.
17. Хорда, довжина якої 24 см, перпендикулярна до діаметра кола і ділить його на відрізки різниця між якими дорівнює 7 см. Знайти радіус кола.
18. Хорда стягує дугу 80 град. Знайти гострий кут, утворений цією хордою і дотичною до кола в кінці хорди.
19. Хорда, довжина якої 40 см, перетинає другу хорду і ділить її на відрізки у відношенні 3:8. Знайти довжину відрізків першої хорди, на які ділить її друга хорда, якщо різниця відрізків другої хорди дорівнює 20 см.

20. Хорда, довжина якої 44 см, перетинає другу хорду і ділить її на відрізки у відношенні 3:2. Знайти довжину відрізків першої хорди, на які ділить її друга хорда, якщо сума відрізків другої хорди дорівнює 40 см.
21. У колі, діаметр якого дорівнює 80 см, по один бік від центра проведено дві паралельні хорди довжиною 48 см і 64 см. Знайти відстань між цими хордами.
22. У колі по різні боки від центра проведено дві паралельні хорди, довжини яких 48 см і 30 см, а відстань між ними дорівнює 27 см. Знайти радіус кола.
23. Перпендикуляр, опущений з точки кола на діаметр, ділить його на відрізки, різниця між якими 14 см. Радіус кола дорівнює 25 см. Обчислити довжину перпендикуляра.
24. Перпендикуляр, опущений з точки кола на діаметр, ділить його на відрізки у відношенні 9:16. Діаметр кола дорівнює 50 см. Обчислити довжину перпендикуляра.
25. Два кола, різниця радіусів яких дорівнює 4 см, дотикаються зовнішньо. Відстань від точки дотику кіл до їх спільної дотичної дорівнює 3 см. Знайти радіуси цих кіл.
26. Два кола, радіуси яких 3 см і 1 см, дотикаються зовнішньо. Знайти відстань від точки дотику кіл до їх спільної дотичної.
27. Точки кола ділять його на частини, які відносяться як 2:3:4:5:6. Знайти кути, утворені радіусами, проведеними у ці точки.
28. В колі знаходиться точка на відстані 15 см від центра; через цю точку проведено хорду, яка ділиться нею на дві частини – 7 см і 25 см, знайти радіус кола.
29. В колі радіуса 1 см проведено хорду довжиною 1 см. Знайти площі частин круга, на які даний круг розбиває проведена хорда.
30. Хорда перпендикулярна до діаметра. Відстані від одного кінця хорди до кінців діаметра дорівнюють 15 і 20 см. Знайти довжину хорди.

31. З точки кола проведено дві хорди довжиною 9 см і 17 см. Знайти радіус кола, якщо відстань між серединами даних хорд дорівнює 5 см.
32. В круговий сектор з центральним кутом 120° вписано коло. Знайти радіус вписаного кола, якщо радіус даного кола дорівнює R .
33. Два кола, радіуси яких R і r дотикаються зовнішньо. Знайти площу трапеції, яка обмежена двома спільними дотичними до цих кіл та прямими, що з'єднують точки дотику.
34. З точки поза колом проведено січну, яка перетинає коло в точках, віддалених від даної точки на 12 і 20 см. Відстань від даної точки до центра кола дорівнює 17 см. Обчисліть радіус кола.
35. В трикутник зі сторонами a , b , c вписано півкруг, діаметр якого лежить на стороні довжиною c . Знайти радіус цього півкруга.
36. З точки до кола проведені дві дотичні. Довжина кожної дотичної 12 см, а відстань між точками дотику дорівнює 14,4 см. Знайти радіус кола.
37. З точки кола проведено хорди, довжини яких 10 і 15 см. Кінці цих хорд сполучено відрізком, який стягує дугу 60° . Знайдіть діаметр кола, якщо відрізок і точка лежать по один бік від центра.
38. Знайти відстань між центрами вписаного і описаного кола прямокутного трикутника з катетами 3 і 4 см.
39. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 13 см, а катет – 24 см. Обчисліть діаметр описаного кола.
40. Точка дотику вписаного у прямокутну трапецію кола ділить більшу бічну сторону на відрізки 9 і 16 см. Знайдіть основи трапеції та відстані від центра цього кола до кінців цієї бічної сторони.

21. Трапеція

1. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута і ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 см і 21 см. Знайти периметр трапеції.

2. Діагональ прямокутної трапеції ділить тупий кут пополам, а другу діагональ -- у відношенні 2:5. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 24 см.
3. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 11:5. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 24 см.
4. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 11:25. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 24 см.
5. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 50 см і 14 см, а діагональ дорівнює 40 см. Обчислити площу трапеції.
6. Основа і більша діагональ прямокутної трапеції відповідно дорівнюють 7, 16 і 20 см. Знайти бічні сторони трапеції.
7. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 16 см. Одна з бічних сторін дорівнює 10 см і утворює з більшою основою кут 60 град. Знайти діагоналі трапеції.
8. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 25 см і 7 см, а діагональ -- перпендикулярна до бічної сторони. Знайти бічну сторону трапеції.
9. Основи трапеції дорівнюють 8 і 42 см, а діагоналі -- 30 і 40 см. Обчислити площу трапеції.
10. Основи трапеції дорівнюють 28 і 11 см, а бічні сторони -- 25 і 26 см. Знайти висоту трапеції.
11. Перпендикуляр, опущений з вершини тупого кута рівнобічної трапеції на більшу основу, ділить її на відрізки 25 см і 7 см. Знайти радіус вписаного кола.
12. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі і дорівнюють $12\sqrt{5}$ і $12\sqrt{10}$ см. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.
13. Бічна сторона, висота й діагональ рівнобічної трапеції відносяться, як 13:12:20. Знайти основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 32 см.

14. Бічні сторони і висота трапеції відповідно дорівнюють 25, 30 і 24 см. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на другій її основі. Знайти периметр трапеції.
15. Більша діагональ прямокутної трапеції є бісектрисою прямого кута. Різниця основ дорівнює 16 см, а різниця бічних сторін – 4 см. Обчислити периметр трапеції.
16. В рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 44 см, бічна сторона 17 см і діагональ 39 см. Знайти площу трапеції.
17. Точки дотику вписаного у трапецію кола ділять бічну сторону на відрізки 9 см і 16 см, а другу бічну сторону – на відрізки, різниця яких дорівнює 10 см. Знайти основи трапеції.
18. Точки дотику вписаного у трапецію кола ділять одну бічну сторону на відрізки 9 см і 16 см, а другу – на відрізки у відношенні 4:9. Знайти основи трапеції.
19. Центр описаного навколо рівнобічної трапеції кола лежить на більшій основі. Бічна сторона і висота трапеції відповідно дорівнюють 30 см і 24 см. Знайти радіус описаного кола
20. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців бічної сторони на 2 см і 4 см. Знайти площу трапеції.
21. Менша основа і бічна сторона трапеції утворюють кут 120 град. і відповідно дорівнюють 15 см і 10 см. Сума основ трапеції дорівнює 46 см. Знайти другу бічну сторону трапеції.
22. Менша діагональ прямокутної трапеції, довжина якої $12\sqrt{2}$ см, є бісектрисою прямого кута. Обчислити периметр трапеції, якщо різниця її основ дорівнює 9 см.
23. У рівнобічній трапеції центр описаного кола лежить на більшій основі. Діагональ і висота трапеції відповідно дорівнюють 40 і 24 см. Знайти радіус описаного кола.
24. Сума основ прямокутної трапеції дорівнює 23 см, а різниця бічних сторін – 3 см. Обчислити периметр трапеції, якщо більша діагональ дорівнює 20 см.

25. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а сума бічних сторін – 27 см. Обчислити периметр трапеції, якщо менша діагональ трапеції дорівнює 20 см.
26. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 і 15 см. Знайдіть основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.
27. Бісектриса тупого кута прямокутної трапеції ділить більшу основу на відрізки 5 і 15 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 11 см.
28. Більша діагональ прямокутної трапеції є бісектрисою прямого кута. Різниця основ трапеції дорівнює 30 см, а різниця бічних сторін – 10 см. Обчисліть площу трапеції.
29. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 100 см, а менша основа – 18 см. Знайди радіус вписаного кола.
30. Центр, вписаного у прямокутну трапецію кола, віддалений від кінців меншої основи на 12 і 15 см, починаючи від вершини прямокутного кута. Знайти сторони трапеції.
31. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть діагональ трапеції, якщо її основи дорівнюють 25 і 7 см.
32. У рівнобічній трапеції з гострим кутом 60° і периметром 144 см діагональ ділить середню лінію на відрізки, різниця між якими дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції.
33. Кінці більшої сторони прямокутної трапеції віддалені від центра вписаного у неї кола на 15 і 20 см. Обчисліть периметр трапеції.
34. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см. і ділить площу трапеції у відношенні 3:5. Знайти основи трапеції.
35. Менша діагональ прямокутної трапеції ділить середню лінію на відрізки 5 і 11 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 9 см.

36. Бічна сторона трапеції дорівнює 10см. і утворює з більшою основою, довжина якої 22см, кут 60° . Сума основ трапеції дорівнює 28см. Знайдіть другу бічну сторону трапеції.
37. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 25 і 32см., а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчисліть периметр трапеції.
38. У рівнобічній трапеції центр вписаного кола лежить на більшій основі. Висота і різниця основ трапеції відповідно дорівнюють 24 і 36см. Обчисліть радіус описаного кола.
39. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 21 і 28см. Обчисліть радіус вписаного у неї кола.
40. Бічні сторони трапеції дорівнюють 25 і 30см., а висота – 24см. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі. Обчисліть площу трапеції.
41. Бічні сторони і висота трапеції, відповідно дорівнюють 25, 30 і 24см. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі. Обчисліть периметр трапеції.
42. Основи трапеції дорівнюють 3 і 14см., а діагоналі – 25 і 26см. Знайдіть висоту трапеції.
43. Довжини основ рівнобічної трапеції відносяться, як 5:12, а висота її дорівнює 17см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо відомо, що середня лінія трапеції дорівнює висоті.
44. Центр описаного навколо рівнобічної трапеції кола лежить на більшій основі. Менша основа трапеції дорівнює 14см., а висота – 24см. Обчислити радіус описаного кола.
45. У рівнобічній трапеції з тупим кутом 120° і периметром 220см. діагональ ділить середню лінію у відношенні 5:6. Знайдіть бічні сторони трапеції.
46. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 10см, а площа дорівнює 48см^2 . Знайти висоту трапеції.
47. Висота рівнобічної трапеції дорівнює 14см, а основи – 16 і 12см. Знайти площу описаного кола.

48. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію на відрізки 13 і 23см. Знайдіть висоту трапеції.
49. Більша діагональ прямокутної трапеції є бісектрисою гострого кута. Сума основ трапеції дорівнює 31см, а сума бічних сторін – 25см. Знайдіть основи та висоту трапеції.
50. Діагональ рівнобічної трапеції з основами 25 і 39см є бісектрисою гострого кута. Знайдіть висоту трапеції.
51. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 13 і 37см, а діагоналі взаємно перпендикулярні. Обчисліть площу трапеції.
52. Бісектриса гострого кута ділить меншу основу прямокутної трапеції на відрізки 5 і 15 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо її більша основа дорівнює 29 см.
53. В рівнобічній трапеції довжина середньої лінії дорівнює 5, а діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайти площу трапеції.
54. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 і 15 см. Знайдіть основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.
55. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 25 і 37 см, а менша діагональ є бісектрисою тупого кута. Обчисліть периметр трапеції.
56. Діагональ рівнобічної трапеції з основами 7 і 25 см перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть цю діагональ.
57. Діагональ рівнобічної трапеції з основами 11 і 25 см є бісектрисою тупого кута. Знайдіть висоту трапеції.

22. Прямі і площини в просторі

1. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка М знаходиться поза площиною ромба і віддалена від усіх сторін ромба на 8 см. Знайдіть відстань від точки М до площини ромба.

2. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 768 см^2 , а його основа 48 см . Точка простору знаходиться на відстані 60 см від площини трикутника і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайти відстань від цієї точки до вершин трикутника.
3. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 120° , а бічні сторони – 10 см . Поза трикутником дано точку, яка віддалена від усіх його вершин на 26 см . Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.
4. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено перпендикуляр до площини трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює 12 см , а один із гострих кутів – 60° . Знайдіть відстань від верхнього кінця перпендикуляра до вершин гострих кутів трикутника, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 8 см .
5. Периметр правильного трикутника дорівнює $36\sqrt{3}$, а відстані від деякої точки до кожної зі сторін трикутника 10 см . Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.
6. Із точки до площини проведено дві похилі, кут між якими дорівнює 60° , а кут між їх проєкціями – 90° . Довжини проєкцій похилих на площину дорівнюють – 3 см кожна. Знайдіть відстань від точки до площини.
7. З вершини гострого кута прямокутного трикутника ABC ($\angle C=90^\circ$) проведено перпендикуляр AD до його площини. Знайдіть відстані від точки D до вершин B і C , якщо $AC = 15 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, $AD = 12 \text{ см}$.
8. З точки, віддаленої від площини на 12 см , проведено до неї дві похилі довжиною 13 і $12\sqrt{2} \text{ см}$. Кут між проєкціями цих похилих на площину дорівнює 90° . Знайдіть відстань між основами похилих.
9. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 50 см , а її діагоналі, перпендикулярні до бічних сторін. Точка, віддалена від площини трапеції на відстань 60 см і рівновіддалена від її вершин. Знайдіть відстані від цієї точки до вершин трапеції.
10. З точки до площини проведено дві похилі. Довжина першої похилої дорівнює 13 см , а довжина її проєкції – 5 см . Кут між

проекціями дорівнює 120, а довжина відрізка, що сполучає основи похилих, - 19 см. Знайдіть довжину другої похилої.

11. Відрізок довжиною 25 см опирається кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Відстані від кінців відрізка до площини дорівнюють 15 см і 16 см. Знайдіть проекції відрізка на кожну із площин.
- 12.3 точки до площини проведено дві похилі, довжин яких 10 см і 17 см. Різниця проекцій цих похилих дорівнює 9 см. Знайдіть довжини проекцій даних похилих.
- 13.3 точки простору до площини проведено дві похилі, довжини яких відносяться, як 5:6. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо відповідні проекції похилих дорівнюють 4 см і $3\sqrt{3}$ см.
14. Дано трикутник із сторонами 26 см, 28 см і 30 см. Точка М віддалена від усіх сторін трикутника на 17 см і проектується у внутрішню точку трикутника. Знайти відстань від точки М до площини трикутника.
15. Площа ромба дорівнює 120 см^2 , а його сторона - 12 см. Точка простору рівновіддалена від сторін цього ромба на 13 см. Знайти відстань від цієї точки до площини ромба.
- 16.3 точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють $3\sqrt{2}$ см кожна. Кут між похилими дорівнює 60° , а кут між їх проекціями - прямий. Знайти відстань від цієї точки до площини.
17. Трапеція, вписана в коло, причому менша її основа, що дорівнює 16 см, стягує дугу в 60° . На відстані 12 см від площини трапеції знаходиться точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції. Знайти відстань від цієї точки до вершин трапеції.
18. До площини прямокутника ABCD через його вершину D проведено перпендикуляр ДК, кінець якого К віддалений від сторони АВ на 2,4 см, від сторони ВС - на 2,8 см, від вершини В - на 3,6 см. Знайдіть ДК.
19. Основа й висота рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см. Дана точка знаходиться на відстані 6 см від площини трикутника і на однаковій відстані від його вершин. Знайдіть цю відстань.

20. З точки до площини прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см, проведено перпендикуляр довжиною 24 см. Основа перпендикуляра – вершина одного з кутів прямокутника. Знайти відстань від даної точки до протилежної вершини прямокутника.
21. Кінці відрізка лежать на двох взаємно перпендикулярних площинах. Проекції відрізка на кожен із площин відповідно дорівнюють $\sqrt{369}$ см і 20 см. Відстань між основами перпендикулярів, проведених із кінців відрізка до площин, дорівнює 12 см. Знайдіть довжину даного відрізка.
22. Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 25 см і 29 см. Відстань від деякої точки до площини трикутника дорівнює 15 см. Відстань від цієї точки до сторін трикутника рівні. Знайти ці відстані.
23. Висота рівностороннього трикутника дорівнює 9 см. Точка знаходиться на відстані 8 см від площини трикутника і рівновіддалена від його вершин. Знайдіть відстані від цієї точки до вершин трикутника.
24. З точки, що знаходиться на відстані 4 см від площини, проведено до цієї площини дві похилі довжиною 5 см і $4\sqrt{5}$ см. Кут між проекціями цих похилих дорівнює 60° . Знайти відстань між основами похилих.
25. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Точка простору віддалена від кожної сторони цього трикутника на 5 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.
26. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 14 см і 50 см, а бічна сторона – 30 см. Знайдіть відстань від площини трапеції до точки, віддаленої від кожної вершин на 65 см.
27. У трикутнику ABC сторона $AB = 15$ см, $AC = 13$ см, $CB = 14$ см. З вершини A проведено до його площини перпендикуляр, довжина якого дорівнює 16 см. Знайти відстані від кінців перпендикуляра до сторони BC.
28. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, що дорівнює 16 см. Відстань між вершинами цих трикутників – 13 см. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см. Другий трикутник – прямокутний. Знайдіть кут між площинами цих трикутників.

29. Сторони трикутника 9 см, 10 см і 11 см. Із вершини кута, що лежить напроти сторони довжиною 10 см, проведено перпендикуляр до площини трикутника довжиною 7 см. Знайдіть відстань від кінців перпендикуляра до протилежної сторони.
30. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 1200 см^2 , а його висота, проведена до основи, дорівнює 40 см. Відстань від деякої точки простору до площини трикутника дорівнює 36 см, а відстані від цієї точки до сторін трикутника однакові. Обчисліть цю відстань.
31. Із точки до площини проведено дві похилі, різниця між якими дорівнює 5 см. Проекції цих похилих на площину відповідно дорівнюють 18 см і 7 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини.
32. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, а їх площини утворюють між собою кут 60° . Спільна їх основа дорівнює 16 см. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, а бічні сторони другого – взаємно перпендикулярні. Обчисліть відстань між вершинами трикутників.
33. Через гіпотенузу АВ прямокутного рівнобедреного трикутника АВС проведено площину β під кутом 45° до площини трикутника. Знайдіть кути нахилу катетів трикутника АВС до площини β .
34. Через вершину прямого кута С прямокутного трикутника АВС до його вершини проведено перпендикуляр СД, що дорівнює 1 см. Знайдіть площу трикутника АДВ, якщо $AC = 3 \text{ см}$, $BC = 2 \text{ см}$.
35. Точка М знаходиться на відстані 15 см від кожної сторони паралелограма і на відстані 9 см від його площини. Знайдіть площу цього паралелограма, якщо його діагоналі відносяться як 3:4.
36. Із точки до площини прямокутника зі сторонами 9 см і 12 см, проведено перпендикуляр, основою якого є одна із вершин прямокутника. Відстань від протилежної вершини прямокутника до цієї точки дорівнює 39 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.
37. Із точки, що знаходиться на відстані 24 см від площини, проведено до неї дві похилі, кут між якими 90° . Проекції цих

похилих на площину дорівнюють 18 см і 32 см. Знайдіть відстань між основами похилих.

38. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 см і 18 см. Деяка точка простору рівновіддалена від кожної сторони цієї трапеції на 10 см. Обчисліть відстань від цієї точки до площини трапеції.
39. Рівнобічна трапеція, периметр якої дорівнює 48 см, а гострий кут – 60° , лежить у площині α . Точка рівновіддалена від усіх сторін трапеції, знаходиться на відстані 3 см від площини α . Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.
40. Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 12 см. Із середини більшої сторони прямокутника проведено перпендикуляр до його площини довжиною 4,8 см. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до однієї з діагоналей.
41. Сторони трикутника дорівнюють 20 см, 65 см і 75 см. Із вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр, довжина якого – 60 см. Знайдіть відстані від кінців перпендикуляра до більшої сторони трикутника.
42. Основи трапеції дорівнюють 36 см і 24 см. Через більшу основу трапеції проведено площину на відстані 12 см від точки перетину її діагоналей. Знайдіть відстань від меншої основи трапеції до цієї площини.
43. Із деякої точки простору до площини ромба, сторона якого дорівнює 13 см, а більша діагональ – 24 см, проведено перпендикуляр, довжиною 24 см. Основою його є вершина тупого кута ромба. Обчисліть відстань від даної точки до прямої, що містить більшу діагональ ромба.
44. Із кінців відрізка, що лежать у двох взаємно перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри до цих площин, довжини яких відповідно дорівнюють 16 см і 15 см. Відстань між основами цих перпендикулярів дорівнює 12 см. Знайдіть довжину даного відрізка.
45. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює 24 см, належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців відрізка до лінії перетину даних площин відповідно дорівнюють 12 см і $12\sqrt{2}$. Обчисліть кути утворені відрізком з цими площинами.

46. Квадрат і прямокутник, площі яких відповідно дорівнюють 64 см^2 і 24 см^2 , мають спільну сторону. Відстань між стороною квадрата і стороною прямокутника, що паралельні між собою, дорівнює 7 см . Обчисліть кут між площинами квадрата і прямокутника.
47. Квадрат і прямокутник, площі яких відповідно дорівнюють 64 см^2 і 24 см^2 , мають спільну сторону. Кут між їх площинами 60° . Знайдіть відстань між стороною квадрата і стороною прямокутника, що паралельні між собою.
48. Величина двогранного кута 60° . Дві прямі, що лежать у гранях цього кута, паралельні і знаходяться від його ребра на відстані 4 см і 2 см . Знайдіть відстань між цими прямими.
49. Точка лежить поза площиною прямого кута і знаходиться на відстані 8 см від кожної із сторін цього кута. Знайдіть відстань від цієї точки до площини даного кута.
50. Відстань від точки до площини дорівнює 4 см . Із цієї точки проведено дві похилі довжини яких 5 см і $4\sqrt{5} \text{ см}$. Кут між проекціями цих похилих дорівнює 60° . Знайдіть відстань між основами цих похилих.
51. Площа ромба дорівнює 120 см^2 , а його сторона – 12 см . Точка M віддалена від усіх сторін ромба на 13 см . Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

23. Призма

1. Основою прямої призми є трикутник, сторони якого дорівнюють 5 см , 5 см , 6 см . Висота призми дорівнює більшій висоті цього трикутника. Знайти об'єм призми.
2. Основою призми є трикутник у якого сторони дорівнюють 3 см , 5 см , 7 см . Бічне ребро довжиною 8 см утворює з площиною основи кут 60° . Обчислити об'єм призми.
3. Основа прямого паралелепіпеда – ромб із гострим кутом 60° і більшою діагоналлю $6\sqrt{3} \text{ см}$; менша діагональ паралелепіпеда

- утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.
4. Основа прямого паралелепіпеда – ромб, площа якого 1 м^2 . Площа діагональних перерізів 3 м^2 і 6 м^2 . Знайти об'єм паралелепіпеда.
 5. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі діагональних перерізів дорівнюють 6 см^2 і 8 см^2 . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
 6. В основі похилої призми лежить паралелограм зі сторонами 3 см і 6 см і гострим кутом в 45° . Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайти об'єм призми.
 7. В основі прямого паралелепіпеда лежить паралелограм зі сторонами 1 см і 4 см і гострим кутом 60° . Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 5 см . Знайти його об'єм.
 8. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з тупим кутом 120° і меншою основою 3 см . Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайти об'єм призми.
 9. В основі похилої призми лежить паралелограм зі сторонами 6 см і 12 см і гострим кутом 60° . Бічне ребро призми дорівнює 14 см і утворює з площиною основи кут 30° . Обчисліть об'єм призми.
 10. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 10 см , 17 см і 21 см . Площа перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи – 72 см^2 . Знайти бічну поверхню призми.
 11. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з гострим кутом 60° і бічною стороною 4 см . Діагональ трапеції є бісектрисами гострих кутів, діагональ призми нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайти об'єм призми.
 12. У похилій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 4 см , 13 см , 15 см . Бічне ребро дорівнює $10\sqrt{2} \text{ см}$ і нахилене до площини основи під кутом 45° . Знайти об'єм призми.

13. У правильній шестикутній призмі велика діагональ дорівнює $4\sqrt{3}$ і нахилена до основи під кутом 60° . Знайти площу повної поверхні призми.
14. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 3,5 см, а діагональ бічної грані 2,5 см. Знайти об'єм призми.
15. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 4 см^2 , а площі бічних граней – 9 см^2 , 10 см^2 і 17 см^2 . Знайти об'єм призми.
16. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 13 см, а діагоналі його бічних граней дорівнюють $4\sqrt{10}$ см і $3\sqrt{17}$ см. Знайти об'єм паралелепіпеда.
17. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, в якого одна з діагоналей дорівнює 17 см, а сторони дорівнюють 9 см і 10 см. Площа повної поверхні паралелепіпеда – 334 см^2 . Знайдіть його об'єм.
18. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними 60° . Визначте об'єм паралелепіпеда, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 220 см^2 .
19. З мідної болванки, яка має форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами 80 см, 20 см і 5 см, прокатують лист товщиною 1 мм. Визначте площу цього листа.
20. Основа прямої призми – трапеція, в якій паралельні сторони 9 см і 39 см. Три бічні грані призми – квадрати. Знайдіть повну поверхню призми.
21. Основою прямої призми є ромб. Висота і діагоналі призми відповідно дорівнюють 40 см, 41 см і 50 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
22. Площа найбільшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми дорівнює 1 см^2 . Обчисліть бічну поверхню призми.

24. Конус

1. Висота конуса і його твірна відповідно дорівнюють 4 см і 5 см. Знайти об'єм вписаної у конус півкулі, основа якої лежить на основі конуса.
2. Через дві твірні конуса, кут між якими β , проведено площину. Площа бічної поверхні конуса дорівнює S . Визначте площу перерізу, якщо твірна конуса утворює з висотою кут α .
3. Твірна конуса утворює з його основою кут 30° . Визначте об'єм конуса, якщо площа перерізу, що проходить через твірні, кут між якими 120° , дорівнює $4\sqrt{3}$ см².
4. Осьовий переріз конуса – рівносторонній трикутник. Площа повної поверхні конуса дорівнює 18 см². Знайдіть площу основи.
5. Металеву кулю радіуса R перелито в конус, бічна поверхня якого в три рази більша за площу основи. Обчислити висоту конуса.
6. Радіус основи конуса дорівнює R , а кут при вершині розгортки його бічної поверхні дорівнює 90° . Знайти об'єм конуса.
7. З центра основи конуса до твірної проведено перпендикуляр, який утворює з висотою кут β . Твірна конуса дорівнює L . Визначте об'єм конуса.
8. Радіуси основ зрізаного конуса 3 м і 6 м, а висота – 4 м. Знайти довжину твірної.
9. Площі основ зрізаного конуса M і m ($M > m$). Знайдіть площу серединного перерізу, паралельного основи.
10. Півкруг згорнуто в конічну поверхню. Знайдіть кут між твірною і віссю конуса.
11. Радіус кругового сектора дорівнює 3 м, а його кут 120° . Сектор згорнуто у конічну поверхню. Знайти радіус основи конуса.
12. Твірна зрізаного конуса нахилена до площини більшої основи під кутом α . Радіуси основ R і r ($R > r$). Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

13. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, якщо його бічна поверхня дорівнює $208\pi \text{ см}^2$, твірна – 13 см, а висота – 5 см.
14. Як відносяться бічна й повна поверхні конуса, осьовий переріз якого – правильний трикутник?
15. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Знайдіть діаметр основи, якщо площа повної поверхні конуса дорівнює $363\pi \text{ см}^2$.
16. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює β , проведено переріз, який перетинає основу по хорді довжиною m . Знайдіть об'єм конуса, якщо твірна нахилена до площини його основи під кутом α .
17. У зрізаному конусі, відношення площ основ дорівнює 4. Твірна, довжиною 4 см, нахилена до площини основи під кутом 30° . Визначте об'єм конуса.
18. Висота конуса і його твірна відповідно дорівнюють 4 см і 5 см. Знайти об'єм вписаної в конус півкулі, основа якої лежить на основі конуса.
19. В основі конуса проведено хорду, яку видно з центра основи під кутом α , а із вершини конуса – під кутом φ . Знайти бічну поверхню конуса, якщо його радіус основи дорівнює R .
20. Твірна зрізаного конуса дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом 60° . Діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл. Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса.
21. Радіуси основ зрізаного конуса R і r ($R > r$), а твірна утворює з площиною основи кут 45° . Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.
22. Бічна поверхня конуса вдвічі більша за площу основи. Площа його осьового перерізу дорівнює 81 см^2 . Знайти об'єм конуса.
23. Твірна конуса дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут, що дорівнює 60° . Знайдіть повну поверхню конуса.

24. Через вершину конуса проведено площину перерізу під кутом 45° до основи. Ця площина перетинає основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом 60° . Знайти об'єм конуса, якщо відстань від центра основи до хорди дорівнює 6 см.
25. Через дві твірні конуса проведено площину, яка перетинає основу по хорді довжиною 8 см. Ця площина утворює з основою кут 60° . Обчисліть об'єм конуса, якщо радіус основи дорівнює 5 см.
26. Об'єм конуса дорівнює V . Висоту його розділено на три рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні основи. Знайти об'єм середньої частини.
27. Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до основи. Площина перетинає основу по хорді, що дорівнює радіусу основи конуса. Визначте об'єм конуса, якщо відстань від його вершини до хорди дорівнює 6 см.
28. Висота конуса дорівнює діаметру його основи. Знайти відношення площі його основи до площі бічної поверхні.
29. Скільки оліфи потрібно, щоб пофарбувати зовнішню поверхню 100 відер, що мають форму зрізаного конуса з діаметрами основ 25 см і 30 см і твірною 27,5 см, якщо на 1 м^2 потрібно 150 грамів оліфи.
30. Висота і твірна конуса відносяться, як $4 : 5$, а об'єм конуса дорівнює $96 \pi \text{ см}^3$. Знайдіть його повну поверхню.
31. Радіуси основ зрізаного конуса – 11 см і 16 см, твірна – 13 см. Знайдіть відстань від центра меншої основи до точки кола більшої.
32. Радіуси основ зрізаного конуса – 3 см і 7 см, твірна – 5 см. Знайти площу осьового перерізу.
33. Твірна конуса дорівнює L , а довжина кола основи – C . Знайти об'єм конуса.
34. Виразити об'єм конуса через його бічну поверхню S і відстань r від центра основи до твірної.
35. Висоту конуса розділено на три рівні частини і через точки поділу паралельно основи проведено площини, які розбивають

- конус на три частини. Знайти об'єм середнього зрізаного конуса, якщо об'єм даного конуса дорівнює V .
36. Площа бічної поверхні конуса втричі більша від площі основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус основи 2 см.
 37. Висота конуса дорівнює H . Розгортокою бічної поверхні цього конуса є сектор з центральним кутом 120° . Знайти об'єм конуса.
 38. Знайти об'єм конуса, розгортка якого є півкруг радіуса R .
 39. У зрізаному конусі висота, твірна і бічна поверхня дорівнюють відповідно H , L і S . Визначте площу осевого перерізу.
 40. Кут між твірною конуса і площиною основи дорівнює 30° . Бічна поверхня конуса дорівнює $3\pi\sqrt{3}$ см². Знайти об'єм правильної шестикутної піраміди, яка вписана в цей конус.
 41. Бічна поверхня конуса дорівнює S , а повна поверхня – P . Знайти кут між висотою і твірною конуса.
 42. Радіус основи конуса дорівнює R , а кут розгортки його бічної поверхні дорівнює 90° . Знайти об'єм конуса.
 43. Через дві твірні конуса проведено площину, що нахилена до площини основи під кутом α . Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра його основи під кутом β . Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює L .
 44. У зрізаному конусі твірна дорівнює 10 см, а радіуси основ – 1 см і 7 см. Знайдіть радіус основи циліндра такої ж висоти, повна поверхня якого рівновелика повній поверхні зрізаного конуса.
 45. Конус утворено обертанням прямокутного трикутника площею S навколо одного з катетів. Знайти об'єм конуса, якщо довжина кола, описаного при обертанні трикутника точкою перетину медіан, дорівнює L .
 46. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 24 см і 15 см, а його висота – 27 см. Знайдіть радіус описаної кулі.

47. Визначте повну поверхню зрізаного конуса, діагоналі осевого перерізу якого взаємно перпендикулярні, твірна нахилена до площини основи під кутом 60° , а висота дорівнює 6 см.

25. Піраміда

1. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 18 см і 24 см. Кожне з бічних ребер дорівнює 25 см. Знайдіть об'єм піраміди.
2. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а висота – 9 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчислити об'єм піраміди.
3. Основа піраміди – прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° . Знайти висоту піраміди.
4. Основа піраміди – прямокутник зі сторонами 4 см і 3 см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Найбільше бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть об'єм піраміди.
5. Основа піраміди – ромб із діагоналями 6 м і 8 м; висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей ромба і дорівнює 1 м. Знайдіть бічну поверхню піраміди.
6. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см. Висота піраміди проходить через вершину меншого кута основи. Відстань від вершини піраміди до прямої, що містить меншу сторону основи, дорівнює 37 см. Знайдіть об'єм піраміди.
7. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник зі гіпотенузою 12 см і гострим кутом 30° . Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45° .
8. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою, яка дорівнює s , і гострим кутом 30° . Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайти об'єм піраміди.
9. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 4 см, 5 см і 7 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм піраміди.

10. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють 8 см і 2 см. Висота дорівнює 4 см. Знайти повну поверхню.
11. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді висота дорівнює 2 см, а сторони основ 3 см і 5 см. Знайти діагональ піраміді.
12. У правильній чотирикутній піраміді бічна поверхня дорівнює $14,76 \text{ м}^2$, а повна поверхня 18 м^2 . Знайти сторону основи й висоту піраміді.
13. У трикутній піраміді бічні ребра взаємно перпендикулярні і мають довжини $\sqrt{70}$ см, $\sqrt{99}$ см і $\sqrt{126}$ см. Знайти об'єм піраміді.
14. Висота правильної чотирикутної піраміді дорівнює 3 см. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайдіть бічне ребро піраміді.
15. Сторона основи правильної трикутної піраміді дорівнює 1 см, а її бічна поверхня дорівнює 3 см^2 . Знайти об'єм піраміді.
16. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміді дорівнюють 4 см і 1 см, а бічна сторона – 2 см. Знайдіть висоту піраміді.
17. Сторона основи правильної трикутної піраміді дорівнює a , а двогранний кут при основі – β . Визначте об'єм і повну поверхню піраміді.
18. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміді дорівнюють 2 см і 6 см. Бічна грань утворює з більшою основою кут 60° . Знайдіть висоту піраміді.
19. У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічною гранню кут β . Відстань від середини висоти піраміді до бічної грані дорівнює m . Визначте об'єм піраміді.
20. У правильній чотирикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом β . Відрізок, що сполучає середину висоти піраміді із серединою апофемі, дорівнює m . Визначте об'єм піраміді.

21. У правильній зрізаній трикутній піраміді сторона нижньої основи дорівнює 15 см, а бічне ребро довжиною 8 см нахилене під кутом 30° до основи піраміди. Визначте об'єм зрізаної піраміди.
22. Знайти об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо її діагональ дорівнює 18 см, а довжини сторін основ – 14 см і 10 см.
23. Знайти повну поверхню правильної трикутної піраміди, сторона якої дорівнює a , а двогранний кут при основі дорівнює 60° .
24. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює H . Двогранний кут при основі дорівнює 60° . Знайти повну поверхню піраміди.
25. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 7 см. Сторони основ дорівнюють 10 см і 2 см. Знайти бічне ребро піраміди.
26. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює 60° , а бічне ребро – 6 см. Знайти об'єм піраміди.
27. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник зі сторонами 6 см, 6 см і 8 см. Усі бічні ребра дорівнюють 9 см. Знайти об'єм піраміди.
28. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а плоский кут при вершині 90° . Знайти об'єм піраміди.
29. Бічна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює $S \text{ см}^2$, а висота – H см. Знайти сторону основи піраміди.
30. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a , а плоский кут при вершині β . Знайти об'єм піраміди.
31. Знайти бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо плоский кут при її вершині дорівнює 90° , а площа основи дорівнює S .
32. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, якщо площина, що проходить через сторону основи довжиною a і середину її висоти нахилена до основи під кутом φ .

33. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює H і утворює з апофемою кут α . Знайдіть повну поверхню піраміди.
34. Основа піраміди – квадрат зі стороною b . Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені під кутом α . Знайдіть бічну поверхню піраміди.
35. Знайдіть повну поверхню правильної трикутної зрізаної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 10 см, а сторони основ – 18 см і 6 см.
36. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b , а двогранний кут при основі – α . Знайдіть повну поверхню піраміди.
37. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3, а сторона основи – 2. Обчислити косинус кута між бічною гранню і площиною основи піраміди.
38. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .
39. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди утворює з висотою піраміди кут 45° . Довжина бічного ребра дорівнює $2L$. Знайти площу бічної поверхні піраміди.
40. Основа піраміди - паралелограм з гострим кутом 30° і сторонами 32 см і 70 см. Бічне ребро довжиною 12 см перпендикулярне до основи. Знайдіть площу поверхні піраміди:
41. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a . Кут між суміжними бічними гранями дорівнює β . Знайдіть бічну поверхню піраміди.
42. В основі піраміди лежить правильний трикутник. Дві бічні грані перпендикулярні до основи, а третя – нахилена до неї під кутом φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо найбільше бічне ребро дорівнює L .
43. У зрізаній трикутній піраміді висота дорівнює 10 см, сторони однієї основи дорівнюють 27 см, 29 см і 52 см, а периметр другої основи дорівнює 72 см. Знайти об'єм зрізаної піраміди.
44. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює L і утворює з висотою піраміди кут β . Визначте об'єм піраміди.

45. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро утворює з площиною основи кут 45° , а площа діагонального перерізу дорівнює S .
46. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди – 4 см і 1 см. Бічне ребро дорівнює 2 см. Знайдіть висоту піраміди.
47. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут β . Відрізок, що сполучає основу висоти з серединою бічного ребра, дорівнює a . Знайдіть об'єм піраміди.
48. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо висота піраміди дорівнює H .
49. Основа піраміди – ромб з діагоналями 30 см і 40 см. Бічне ребро довжиною 18 см перпендикулярне до основи. Знайдіть площу поверхні піраміди.
50. Основа піраміди – трапеція, в якій паралельні сторони – 30 см і 48 см, а висота – 13 см. Довжина кожного бічного ребра піраміди – 65 см. Знайдіть об'єм піраміди.
51. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник ABC з основою $AC = 70$ см, бічною стороною $AB = 37$ см. Ребро піраміди, що проходить через вершину B , перпендикулярне до площини основи і дорівнює 16 см. Обчисліть бічну поверхню піраміди.
52. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , а висота, опущена з будь-якої вершини основи на протилежну їй бічну грань, дорівнює b . Знайдіть об'єм піраміди.
53. Основою піраміди є правильний трикутник, площа якого дорівнює S . Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.
54. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом α . Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а третя грань нахилена до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо більше бічне ребро дорівнює L .

55. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться, як 1 : 2. Висота піраміди дорівнює 3 см, бічне ребро утворює з більшою основою кут 45° . Знайдіть площі основ піраміди.
56. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Відстань від середини висоти піраміди до бічного ребра дорівнює b . Визначте об'єм піраміди.
57. Діагоналі основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 2 см, а двогранний кут при ребрі більшої основи – 60° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
58. Знайдіть бічну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо площина, що проходить через сторону основи довжиною a і середину її висоти, нахилена до основи під кутом ϕ .
59. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 15 см, і 14 см. Бічні грані, що містять сторони 13 см і 15 см, перпендикулярні до основи. Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.
60. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a , а плоский кут при вершині – β . Визначте об'єм конуса, вписаного в піраміду.
61. Основою піраміди є паралелограм, у якого сторони дорівнюють 10 см і 18 см, а площа дорівнює 90 см^2 . Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 6 см. Знайдіть бічну поверхню цієї піраміди.
62. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b , а бічна грань нахилена до площини основи під кутом α . Визначте об'єм піраміди.
63. Основою піраміди є правильний трикутник. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя – нахилена до неї під кутом α . Висота піраміди дорівнює H . Визначте бічну поверхню піраміди.
64. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює h , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.

65. Знайдіть повну поверхню правильної трикутної піраміди за даним її об'ємом V і кутом α між бічною гранню і площиною основи.
66. Основою піраміди є правильний трикутник. Одна бічна грань піраміди має площу S і перпендикулярна до основи. Дві інші грані піраміди нахилені до неї під кутом β . Визначте об'єм піраміди.
67. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .
68. В зрізаній трикутній піраміді висота дорівнює 10 см, сторони однієї основи дорівнюють 27 см, 29 см і 52 см, а периметр другої основи дорівнює 72 см. Знайти об'єм зрізаної піраміди.
69. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює a . Обчислити об'єм піраміди, якщо відомо, що її бічна поверхня в десять раз більша за площу основи.
70. Бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, а площі їх дорівнюють a^2 , b^2 і c^2 . Знайти об'єм піраміди.

16. Циліндр

1. Повна поверхня циліндра дорівнює 105π см^2 , а бічна поверхня – 80π см^2 . Знайдіть об'єм циліндра.
2. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 16π см^2 . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.
3. В основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу a . Відрізок, який сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм циліндра.
4. Висота циліндра 6 дм, радіус основи 5 дм. Кінці відрізка AB , довжина якого 10 дм, лежать на колах обох основ. Знайти найкоротшу відстань від відрізка AB до осі циліндра.
5. У нижній основі циліндра проведена хорда, довжина якої дорівнює b . Ця хорда стягує дугу a . Відрізок, який сполучає центр

верхньої основи із серединою проведеної хорди, утворює з площиною кут φ . Визначте бічну поверхню циліндра.

6. Висота циліндра 8 см, радіус основи 5 см. Циліндр перетинає площина, яка паралельна осі циліндра, так, що в перерізі одержуємо квадрат. Знайдіть відстань від перерізу до осі циліндра.
7. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого дорівнює 54 см^2 . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 9 см.
8. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює $6/\pi \text{ см}^2$. Знайти площу бічної поверхні циліндра.
9. У циліндрі паралельно його осі проведено площину. Вона перетинає основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Діагональ утвореного перерізу дорівнює b і нахилена до основи під кутом β . Визначте об'єм циліндра.
10. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині його повної поверхні. Знаючи, що діагональ осьового перерізу дорівнює 5 см, знайдіть повну поверхню циліндра.
11. Рідину, що налита в конічну посудину висотою 18 см і діаметром основи 24 см, перелили в циліндричну посудину, діаметр основи якої 10 см. Знайти висоту рівня води в циліндричній посудині.
12. Бічна поверхня циліндра розгортається у квадрат зі стороною 9 см. Визначте об'єм циліндра.
13. У циліндрі паралельно до його осі проведено переріз, діагональ якого утворює з площиною нижньої основи кут φ . Цей переріз перетинає основу по хорді, яка стягує дугу α . Визначте бічну поверхню циліндра, якщо радіус цієї основи дорівнює R .
14. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра знаючи, що об'єм циліндра дорівнює $240\pi \text{ см}^3$, а бічна поверхня - $120\pi \text{ см}^2$.
15. У циліндрі на відстані 8 см від його осі і паралельно до неї проведено переріз, діагональ якого дорівнює 13 см. Обчислити радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см.

16. Площа основи циліндра відноситься до площі осевого перерізу, як $\pi : 4$. Знайдіть кут між діагоналями осевого перерізу.
17. Циліндр перетнуто площиною, паралельною осі так, що в перерізі утворився квадрат з діагоналлю - $a\sqrt{2}$ см. Переріз відтинає від кола основи дугу 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
18. Діагональ осевого перерізу циліндра нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть об'єм циліндра, якщо периметр осевого перерізу дорівнює P .
19. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник, одна із сторін якого вдвічі більша від другої. Бічна поверхня циліндра дорівнює 20 см^2 . Визначте його повну поверхню, якщо твірна циліндра – менша сторона його розгортки.
20. У циліндрі паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яка стягує дугу α . Цю хорду видно з центра верхньої основи під кутом ϕ . Знайдіть площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R .
21. Знайдіть діагональ осевого перерізу циліндра, знаючи, що об'єм циліндра дорівнює $240\pi \text{ см}^3$, а бічна поверхня - $120\pi \text{ см}^2$.
22. Циліндр перетнуто площиною, паралельною осі так, що в перерізі утворився квадрат з діагоналлю - $a\sqrt{2}$ см. Переріз відтинає від кола основи дугу 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

27. Тіла обертання

1. Рівнобедрений трикутник із кутом при вершині 120° і бічною стороною 20 см обертається навколо основи. Знайти площу поверхні та об'єм тіла обертання.
2. Прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим до нього кутом 60° обертається навколо осі, що містить гіпотенузу. Знайти площу поверхні тіла обертання.
3. Трикутник зі сторонами 20 см , 37 см і 51 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

4. Прямокутний трикутник, із катетом 1 см і гіпотенузою 2 см, обертається навколо гіпотенузи. Знайти об'єм тіла обертання.
5. Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони, довжини якої a . Знайти об'єм тіла обертання.
6. Трикутник зі сторонами 12 см, 17 см і 15 см обертається навколо меншої сторони. Знайти площу поверхні тіла обертання.
7. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 10 см і 15 см, обертається навколо осі, що містить його гіпотенузу. Знайдіть об'єм тіла обертання.
8. Рівнобічна трапеція з основами 2 см і 3 см і гострим кутом 60° обертається навколо меншої основи. Обчислити поверхню й об'єм тіла обертання.
9. Рівнобедрений трикутник із бічною стороною, що дорівнює 20 см і основою – 10 см, обертається навколо осі, яка містить його основу. Знайдіть об'єм тіла обертання.
10. Рівнобедрений трикутник, основа якого 16 см і бічна сторона – 10 см, обертається навколо бічної сторони. Обчислити площу поверхні й об'єм тіла обертання.
11. Трикутник зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см обертається навколо більшої сторони. Знайти площу поверхні й об'єм тіла обертання.
12. Паралелограм, в якого сторони – 21 см і 89 см, а діагоналі відносяться як 41 : 50, обертається навколо меншої сторони. Визначте об'єм тіла обертання.
13. Ромб з діагоналями $\sqrt{15}$ см і $\frac{60}{\pi}$ см обертається навколо більшої діагоналі. Знайдіть об'єм тіла обертання.
14. Прямокутний трикутник, катети якого 12 см і 16 см, обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання та його об'єм.

28. Куля

1. Площі поверхонь двох куль відносяться, як 9 : 16. Як відносяться об'єми куль?
2. Радіуси двох куль – 25 см і 29 см, а відстань між їх центрами – 36 см. Визначте довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.
3. Площина перетинає кулю. Діаметр, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною кут 45° . Знайдіть площу перерізу, якщо діаметр кулі дорівнює $4\sqrt{3}$ см.
4. Об'єми двох куль відносяться, як 27 : 64. Як відносяться площі їх поверхонь?
5. Зовнішній діаметр порожнистої кулі дорівнює 18 см, а товщина стінок – 3 см. Знайдіть об'єм стінок.
6. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну з точок перерізу, має довжину $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною кут 45° . Знайдіть довжину лінії перетину.
7. Радіуси двох куль дорівнюють 13 см і 15 см, а відстань між їх центрами 14 см. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.
8. Сторони трикутника 13 см, 14 см і 15 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника. Радіус кулі 5 см.
9. Потрібно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі з діаметрами 25 см і 35 см. Знайти діаметр нової кулі.
10. Перерізи кулі двома паралельними площинами, між якими лежить центр кулі, мають площі 144π см² і 25π см². Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між паралельними площинами дорівнює 17 см.
11. Переріз кулі площиною, що знаходиться на відстані 12 см від її центра, має площу 25π см². Визначте площу поверхні кулі.

12. Сторони трикутника 13 см, 14 см, 15 см. Знайдіть відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника. Радіус кулі – 5 см.
13. Діагоналі ромба – 15 см і 20 см. Куля дотикається до всіх його сторін. Радіус кулі – 10 см. Знайдіть відстань від площини ромба до центра кулі.

29. Комбінація фігур

1. В конус вписано кулю. Знайти об'єм кулі, якщо твірна конуса дорівнює L і нахилена до площини основи під кутом β .
2. В конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, вписано кулю. Знайти об'єм конуса, якщо об'єм кулі дорівнює $32\pi/3 \text{ см}^3$.
3. Знайти площу поверхні сфери, описаної навколо конуса, радіус основи якого дорівнює R , а висота дорівнює h .
4. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильну чотирикутну піраміду, висота якої дорівнює H , а двогранный кут при основі дорівнює 60° .
5. В сферу вписано конус, твірна якого дорівнює діаметру основи. Знайти відношення повної поверхні конуса до поверхні сфери.
6. Знайти об'єм кулі, вписаної у зрізаний конус, твірна якого дорівнює 10 см і нахилена до площини основи під кутом 45° .
7. У пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник з кутом α і гіпотенузою c , вписано сферу. Знайдіть об'єм призми.
8. У кулю радіуса R вписано прямокутний паралелепіпед, основою якого є квадрат зі стороною a . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
9. В конус вписано циліндр, висота якого дорівнює радіусу основи конуса. Знайти кут між віссю конуса і його твірною, якщо повна поверхня циліндра відноситься до площі основи конуса як 3 : 2.
10. В зрізаний конус вписано кулю радіуса R . Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть об'єм конуса.

11. У циліндр, що вписаний у кулю, вписано кулю. Знайдіть відношення площ поверхонь і об'ємів цих куль.
12. Знайдіть відношення об'ємів циліндра і конуса, вписаних в одну і ту ж кулю, якщо висота і циліндра, і конуса дорівнює радіусу кулі.
13. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду, висота якої дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а плоский кут при вершині – α . Знайдіть об'єм конуса.
14. В конус вписано сферу. Радіус кола, по якому дотикаються конус і сфера, дорівнює g . Знайти об'єм конуса, якщо кут між висотою і твірною конуса дорівнює β .
15. Знайти об'єм правильної чотирикутної призми, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює R . Цей радіус, проведений до вершини призми, утворює кут φ з бічною гранню, що містить цю вершину.

Навчальне видання

Тетяна Іванівна Найко, Сергій Іванович Резнік

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ Й ЗАДАЧІ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором Найко Т.І.

Редактор В.О. Дружиніна

Коректор З.В. Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 26.11.04р.

Формат 29,7×42 $\frac{1}{4}$

Друк різнографічний

Тираж 85 прим.

Зам. № 2004 - 192

Гарнітура Times New Roman

Папір офсетний

Ум. друк. арк. 5.32

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ