

**В.А. Огородніков, О.В. Грушко, М.І. Побережний**

**ОПР МАТЕРІАЛІВ**

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ  
З ПРИКЛАДАМИ РОЗРАХУНКІВ**

**Частина 1**

Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

В.А. Огородніков, О.В. Грушко, М.І. Побережний

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ**  
**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ**  
**З ПРИКЛАДАМИ РОЗРАХУНКІВ**

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання. Протокол №9 від 24 квітня 2003 р.

Вінниця ВНТУ 2003

Рецензенти:

*П.С. Бернік*, доктор технічних наук, професор

*І.О. Сивак*, доктор технічних наук, професор

*В.О. Федотов*, кандидат технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

**Огородніков В.А., Грушко О.В., Побережний М.І.**

О 39 **Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 1.**

Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2003. – 158 с.

Посібник призначений для студентів усіх спеціальностей денної форми навчання, що вивчають опір матеріалів.

## ЗМІСТ

Передмова.....	5
Порядок та основні вимоги до виконання роботи.....	5
1 Епюри внутрішніх силових факторів.....	7
1.1 Короткі теоретичні відомості.....	7
1.1.1 Внутрішні сили. Метод перерізів.....	7
1.1.2 Епюри внутрішніх зусиль.....	9
1.1.3 Диференціальні залежності між $q$ , $Q$ та $M$ .....	10
1.1.4 Побудова епюр $Q$ і $M$ для двоопорних балок.....	11
1.1.5 Побудова епюр $Q$ і $M$ для консольних балок.....	15
1.1.6 Побудова епюр внутрішніх зусиль для плоских рам.....	19
1.1.7 Побудова епюр для кривих стержнів.....	22
1.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи.....	26
2 Розтяг (стик). Статично невизначувані системи при розтягу (стиску).....	42
2.1 Короткі теоретичні відомості.....	42
2.1.1 Напруження при осьовому розтягу (стиску).....	42
2.1.2 Деформації при осьовому розтягу (стиску).....	42
2.1.3 Закон Гука при розтягу (стиску).....	43
2.1.4 Статично невизначувані задачі.....	44
2.1.5 Розрахунки на міцність за допустимими напруженнями.....	45
2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи.....	46
3 Напружено-деформований стан в точці.....	56
3.1 Короткі теоретичні відомості.....	56
3.1.1 Поняття про напружений стан.....	56
3.1.2 Плоский напружений стан.....	57
3.1.3 Головні площадки і головні напруження.....	58
3.1.4 Коло напружень.....	59
3.1.5 Узагальнений закон Гука.....	61
3.1.6 Потенціальна енергія деформації.....	62
3.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи.....	64
4 Геометричні характеристики плоских перерізів.....	72
4.1 Короткі теоретичні відомості.....	72
4.1.1 Статичний момент площі. Центр ваги перерізу.....	72
4.1.2 Моменти інерції перерізу.....	73
4.1.3 Формули переходу до паралельних або повернутих осей.....	74
4.1.4 Головні осі інерції та головні моменти інерції перерізу.....	75
4.1.5 Радіуси інерції. Моменти опору.....	77
4.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи.....	78
5 Кручення.....	85
5.1 Короткі теоретичні відомості.....	85
5.1.1 Напруження і деформації при крученні стержнів круглого поперечного перерізу.....	85
5.1.2 Епюри крутних моментів.....	87

5.1.3 Розрахунки на міцність і жорсткість.....	88
5.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	90
6 Згин.....	98
6.1 Короткі теоретичні відомості.....	98
6.1.1 Основні поняття.....	98
6.1.2 Напруження при чистому згині.....	98
6.1.3 Поперечний згин. Дотичні напруження.....	102
6.1.4 Аналіз напруженого стану при згині. Розрахунки на міцність.....	103
6.1.5 Рівняння пружної лінії зігнутої балки.....	105
6.1.6 Визначення кутівих та лінійних переміщень методом початкових параметрів.....	106
6.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи .....	108
Література.....	121
Додаток А Оформлення розрахунково-графічної роботи.....	122
Додаток Б Інструкції до написання програм та приклади побудови епюр для балки та криволінійного стержня.....	124
Додаток В Інструкція до розрахунків геометричних характеристик перерізу в середовищі КОМПАС.....	131
Додаток Г Повний розрахунок балки на міцність та жорсткість в середовищі MATHCAD.....	134
Додаток Д Сортамент прокатної сталі.....	141
Додаток Е Програма мінімум до складання іспиту.....	153
Додаток Ж Механічні характеристики матеріалів.....	157

## ПЕРЕДМОВА

Цей навчальний посібник написаний із врахуванням багаторічного досвіду викладання курсу опору матеріалів у Вінницькому державному технічному університеті. Він відрізняється від більшості посібників, виданих раніше іншими авторами конспективним викладенням матеріалу, наявністю 150 варіантів задач до кожного розділу із типовими розрахунками та застосуванням сучасної обчислювальної техніки.

Особливістю посібника є і те, що до деяких задач пропонуються інструкції до написання програм-документів із застосуванням пакетів програм "КОМПАС 5.X", "Mathcad 200X" в середовищі "Windows 9X" та більш пізніх версій. Інструкції розраховані на студентів із початковим рівнем знань користувача названих програмних продуктів.

В посібнику розкриті такі важливі для студентів машинобудівних та будівельних вищих навчальних закладів розділи, як внутрішні зусилля, геометричні характеристики плоских перерізів, напружений стан в точці, прості види деформацій. Автори прагнули створити посібник максимально корисний студентам не тільки при вивченні дисципліни, але й в курсовому та дипломному проектуванні. Кожне із завдань ілюстроване детальним прикладом розрахунку із поясненнями при розв'язуванні задачі.

## ПОРЯДОК ТА ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

З дисципліни "Опір матеріалів" студенти виконують три розрахунково-графічні роботи (РГР). Їх зміст:

РГР№1 – Задачі 1, 2;

РГР№2 – Задачі 3, 4;

РГР№3 – Задачі 5, 6.

РГР мають бути оформлені у відповідності з діючими стандартами ЄСКД(2.105 і 2.106 для текстових конструкторських документів та 2.104 – для основних надписів). Розрахунково-графічні роботи виконуються на аркушах формату А4 (210×297мм) основним креслярським шрифтом (стандарт 2.304-68) з висотою літер не менше 2,5 мм, машинописним або на принтері ЕОМ (Times New Roman 14 пт, одинарний інтервал) на одній стороні аркуша. Перша сторінка протоколу оформляється у відповідності зі стандартом 2.105-95; на наступних сторінках повинен бути штамп у відповідності зі стандартом 2.104-68 (додаток А). На титульній сторінці вказують номер розрахунково-графічної роботи, назву дисципліни, прізвище та ініціали студента, варіант, факультет і групу.

Як виняток допускається текст роботи писати каліграфічним розбірливим почерком пастою або чорнилом синього чи чорного кольору.

При необхідності виправити помилку, неправильний символ закреслюють, а над ним пишуть виправлення. Допускається застосування коректору.

На одній сторінці допускається не більше трьох виправлень.

Розв'язання кожної задачі потрібно починати на новому аркуші так, щоб розрахункова схема та формули, складені за нею, знаходились поряд. На початку сторінки пишеться номер завдання, варіант і приводиться повна та коротка умова задачі (що відомо та що потрібно знайти). Розрахункові схеми (рисунки) виконують за допомогою креслярських приладів або відповідних графічних програм. Розрахунки необхідно супроводжувати короткими поясненнями.

Після зарахування усіх задач студент повинен до іспиту захистити роботу.

Вибір варіанта завдання здійснюється за двома останніми цифрами номера залікової книжки, які визначають номер рисунка розрахункової схеми (див. табл.), перша цифра з кінця – варіант чисельних даних в таблиці, приведеної в кожній задачі окремо.

Таблиця 1 – Вибір варіанта завдання

Схема	Останні дві цифри номера залікової книжки						
	00	15	30	45	60	75	90
00	00	15	30	45	60	75	90
01	01	16	31	46	61	76	91
02	02	17	32	47	62	77	92
03	03	18	33	48	63	78	93
04	04	19	34	49	64	79	94
05	05	20	35	50	65	80	95
06	06	21	36	51	66	81	96
07	07	22	37	52	67	82	97
08	08	23	38	53	68	83	98
09	09	24	39	54	69	84	99
10	10	25	40	55	70	85	
11	11	26	41	56	71	86	
12	12	27	42	57	72	87	
13	13	28	43	58	73	88	
14	14	29	44	59	74	89	

Наприклад: номер залікової книжки ...23.

Номер схеми рисунка – 08. Варіант чисельних даних в таблиці – 3.

Шифр варіанта – 308.

Приклад шифру в основному надписі.

ОМ.1Б-01.31.208

Студенти, що не виконали або не захистили хоча б одну розрахунково-графічну роботу не допускаються до іспиту з дисципліни "Опір матеріалів". В додатку Е приведена конспективно програма-мінімум знань, якими студенти повинні обов'язково володіти для складання іспиту на позитивну оцінку.

# 1 ЕПЮРИ ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ

## 1.1 Короткі теоретичні відомості

### 1.1.1 Внутрішні сили. Метод перерізів

У будь-якому тілі між його мікрочастинками завжди існують сили взаємодії, які зумовлюють існування тіла як єдиного цілого.

При дії на тіло зовнішніх сил у будь-якому його перерізі виникають додаткові, внутрішні сили взаємодії між частинками тіла (крім тих, що існували в цьому елементі, коли він був ненавантажений), які перешкоджають зміні відстаней між цими частинками і руйнуванню тіла. Ці сили часто називають внутрішніми силами пружності. Саме внутрішні сили і визначають для розрахунку на міцність та жорсткість бруса.

Для встановлення величини внутрішніх сил, що виникають у перерізі

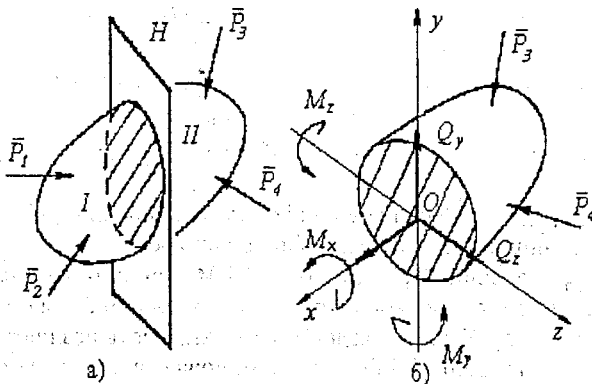


Рисунок 1.1

стержнів, які підлягають зовнішній силовій дії, використовується метод перерізів. Нехай є деяке пружне тіло (рисунок 1.1, а), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ . Розділимо це тіло деякою площиною  $H$  на дві частини  $I$  і  $II$ . Відкинемо одну з частин, наприклад  $I$  і розглянемо умови рівноваги частини  $II$  (рисунок 1.1, б), що залишилася. Щоб ця частина була в рівновазі, як і у випадку, коли вона була частиною цілого тіла, треба, щоб крім зовнішніх сил, прикладених до неї, були збережені й раніше діючі на цю частину внутрішні сили взаємодії, що виникають між частинами  $I$  і  $II$  під впливом зовнішніх сил.

Згадані внутрішні сили, суцільно розподілені по зробленому перерізу, очевидно, можна звести до деякої системи сил, яка замінює вплив відкинutoї частини тіла на ту, що залишилася.

Якби ми розглядали рівновагу частини  $I$ , відкинувши частину  $II$ , то

вплив відкинутої частини, очевидно, врахувався б такими самими внутрішніми силами, прикладеними до частини  $I$  у тому самому перерізі, але у зворотному до попереднього напрямку.

У найбільш загальному випадку систему внутрішніх сил можна звести до однієї сили  $\vec{R}$  (головного вектора) і однієї пари сил  $\vec{M}$  (головного моменту).

При визначенні внутрішніх сил в стержнях рекомендується проводити переріз перпендикулярно до осі стержня. Виберемо осі координат  $x, y, z$  з початком в центрі ваги перерізу так, щоб осі  $Oy$  і  $Oz$  лежали в його площині. Розкладемо головний вектор  $\vec{R}$  на складові по осях координат:  $N, Q_y, Q_z$ , а головний момент  $\vec{M}$  – на три моменти:  $M_x, M_y$  і  $M_z$  (рисунки 1.1, б).

Ці шість зусиль можуть бути легко знайдені з рівнянь рівноваги (рівнянь статки), записаних для будь-якої із частин

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{yi} + Q_y = 0, & \quad \sum_{i=1}^n m_{yi} + M_y = 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{zi} + Q_z = 0, & \quad \sum_{i=1}^n m_{zi} + M_z = 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{xi} + N = 0, & \quad \sum_{i=1}^n m_{xi} + M_x = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $P_{yi}, P_{zi}, P_{xi}$  – проекції зовнішніх сил на відповідні осі;  $m_{yi}, m_{zi}, m_{xi}$  – моменти зовнішніх сил відносно відповідних осей.

Шість величин  $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y$  і  $M_z$  прийнято називати внутрішніми силовими факторами або внутрішніми зусиллями. Кожна із цих сил має свою назву. Силу  $N$ , що діє вздовж осі  $x$ , називають поздовжньою або нормальною силою. Сили  $Q_y$  і  $Q_z$  називають поперечними силами (рідше – силами, що перерізують). Моменти  $M_y$  і  $M_z$ , очевидно, намагатимуться зігнути стержень у площинах  $xOy$  і  $xOz$ , тому їх називають згинальними, а момент  $M_x$ , який скручує стержень, називають крутним моментом.

Для зусиль і моментів у перерізі можна дати такі визначення:  
*поздовжня сила  $N$*  – це сума проекцій усіх внутрішніх сил, що діють у перерізі на нормаль до перерізу (чи на вісь стержня);  
*поперечні сили  $Q_y, Q_z$*  – це суми проекцій усіх внутрішніх сил у перерізі на головні центральні осі перерізу у  $y$  і  $z$  відповідно;  
*крутний момент  $M_x$  (чи  $M_{кр}$ )* – це сума моментів усіх внутрішніх сил у перерізі щодо осі стержня;  
*згинальні моменти  $M_y$  і  $M_z$*  – це суми моментів усіх внутрішніх сил у перерізі щодо головних центральних осей перерізу у  $y$  і  $z$  відповідно.

Кожне з цих зусиль чи моментів, як уже вказувалося, є результатом взаємодії частин розсіченого тіла, а тому повинно бути представлене у вигляді двох протилежно направлених, але рівних векторів чи моментів. Скупність величин  $N, Q_y, Q_z$  і т.д., прикладених до правої сторони перерізу,

заміняє дію вилученої лівої частини стержня на праву частину; сукупність зусиль і моментів, прикладених до лівої сторони перерізу, виражає дію правої частини стержня на ліву.

Для практичного обчислення зусиль і моментів у перерізі варто мати на увазі таке:  $N$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стержня (на нормаль до перерізу) усіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву) розсіченого стержня;  $Q_y$  – те ж, але на вісь  $y$ ,  $Q_z$  – те ж, але на вісь  $z$ ;  $M_{кр}$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо осі стержня всіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву) розсіченого стержня;  $M_y$  – те ж щодо осі  $y$ ,  $M_z$  – те ж, але щодо осі  $z$ . До цього висновку легко прийти, якщо розглянути рівновагу кожної з частин розсіченого стержня. При цьому сума проєкцій (чи моментів) сил, розташованих ліворуч від перерізу, повинна бути прикладена до правої сторони перерізу і навпаки.

### 1.1.2 Епюри внутрішніх зусиль

Метод перерізів дозволяє знайти всі зусилля і моменти в будь-якому перерізі стержня при дії будь-якого навантаження. Для цього потрібно:

- знайти головні центральні осі поперечних перерізів стержня;
- увяно провести поперечний переріз стержня в тому місці, де потрібно знайти зусилля і моменти;
- обчислити сили  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  і моменти  $M_{кр}$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  як алгебраїчні суми проєкцій і моментів зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву відносно перерізу) розсіченого стержня (звичайно на ту, де проєкції і моменти обчислюються простіше).

Для того, щоб поперечна сила і згинальний момент, визначені з розгляду лівої та правої частин балки, були однакових знаків, слід дотримуватися певного *правила знаків*.

Поперечну силу  $Q$  в перерізі будемо вважати додатною, якщо вона намагається повернути вирізаний елемент за стрілкою годинника (рисунок 1.2, а). Згинальний момент  $M$  (для горизонтальних прямолінійних ділянок) будемо вважати додатним, якщо він вигинає балку опуклістю вниз (стиснуті верхні волокна) (рисунок 1.2, а). Поздовжню силу  $N$  в перерізі будемо вважати додатною, якщо її вектор направлений від перерізу (викликає деформацію розтягу). Крутий момент  $M_{кр}$  вважається додатним, якщо при спостереганні з торця вздовж осі частини, що розглядається, він діє за годинниковою стрілкою (рисунок 1.3).

Зусилля і моменти в різних перерізах одного й того ж стержня різні.

*Графіки (діаграми), що показують, як змінюються внутрішні зусилля при переході від перерізу до перерізу, називають епюрами.*

Відзначимо деякі правила, які застосовуються при побудові епор:

- вісь (базу), на якій будується епора, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна чи просто збігалася з віссю стержня;

- б) ординати епюри відкладають від осі епюри по перпендикуляру;  
 в) штрихувати епюри прийнято лініями, перпендикулярними до бази;  
 г) для зусиль і моментів вибирають деякий масштаб. Ординати відкладають в масштабі. Крім того, на епюрах проставляють числа, що показують величини характерних ординат, а в полі епюри в кружках ставлять знак зусилля.

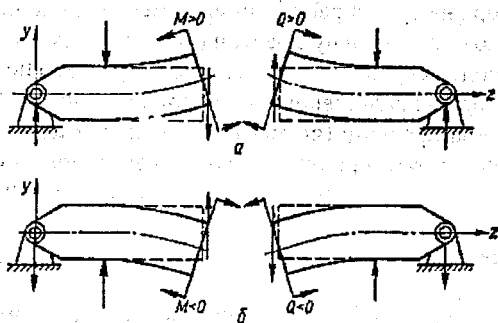


Рисунок 1.2

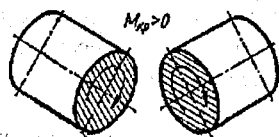


Рисунок 1.3

### 1.1.3 Диференціальні залежності між $q$ , $Q$ та $M$

Нехай на прямолінійний стержень в деякій площині  $xOy$  діє зрівноважена система зосереджених сил, зосереджених моментів та розподілених сил  $q$  напрямком яких не збігається з віссю стержня. Тоді диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження  $q$ , поперечною силою  $Q$  і згинальним моментом  $M$  будуть мати вигляд (теореми Журавського)

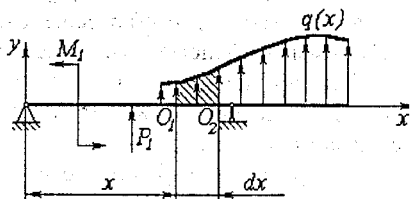


Рисунок 1.4

Тоді диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження  $q$ , поперечною силою  $Q$  і згинальним моментом  $M$  будуть мати вигляд (теореми Журавського)

$$\begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} &= q, \\ \frac{dM_z}{dx} &= Q_y, \\ \frac{d^2 M_z}{dx^2} &= q. \end{aligned} \quad (1.2)$$

З рівнянь (1.2) випливають такі правила, що застосовують для перевірки правильності побудови епюр:

- а) на тих ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюра  $Q$  обме-

жена прямими, паралельними базі, а епюра  $M$ , у загальному випадку — похилими прямими;

б) на тих ділянках, де до балки прикладене рівномірно розподілене навантаження, епюра  $Q$  обмежена похилими прямими, а епюра  $M$  — квадратичними параболоми. При побудові епюри  $M$  на стиснутих волокнах опуклість параболи звернена убік; протилежну напрямку дії навантаження  $q$ ;

в) у тих перерізах, де  $Q = 0$ , дотична до епюри  $M$  паралельна осі епюри;

г) на ділянках, де  $Q > 0$ ,  $M$  зростає; де  $Q < 0$ ,  $M$  спадає.

д) у тих перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили на епюрі  $Q$  будуть стрибки на величину  $q$  у напрямку прикладених сил, а на епюрі  $M$  будуть злами;

е) у тих перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі  $M$  будуть стрибки на величину цих моментів, на епюрі  $Q$  змін не буде.

#### 1.1.4 Побудова епюр $Q$ і $M$ для двоопорних балок

Побудову епюр  $Q$  та  $M$  для балок починають з визначення повної системи навантажень, в яку входять як задані сили, так і опорні реакції, тобто визначають реакції опор. Після визначення опорних реакцій та їх перевірки балку розбивають на ділянки. При цьому керуються правилом, що граничними точками ділянок є точки прикладення зосереджених сил, зосереджених моментів, а також точки змінювання інтенсивності розподіленого навантаження.

Далі, використовуючи метод перерізів, будують епюри  $Q$  та  $M$  на кожній ділянці балки, з врахуванням основних правил побудови епюр (див. п. 1.1.2).

З практичної сторони, стосовно балок, часто користуються такими правилами, які слідують із вищевстановлених:

а) поперечна сила  $Q$  в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вертикальну вісь перерізу всіх сил, що діють по одну сторону від нього

$$Q_y = \sum_{i=1}^n P_{y_i}^{\text{відсіч}}$$

В праву частину записуються проєкції зовнішніх сил з врахуванням такого *правила знаків*: якщо зовнішня сила намагається повернути відсічену частину балки відносно перерізу, що розглядається, за годинниковою стрілкою, то вона береться зі знаком “+” (рис. 1.5, а; 1.2).

б) згинальний момент  $M$  в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх сил, що розташовані по одну сторону від цього перерізу.

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_{z_i}^{\text{відсіч}}$$

В праву частину записуються моменти зовнішніх сил з врахуванням такого правила знаків: якщо зовнішня сила (або момент чи розподілене навантаження)

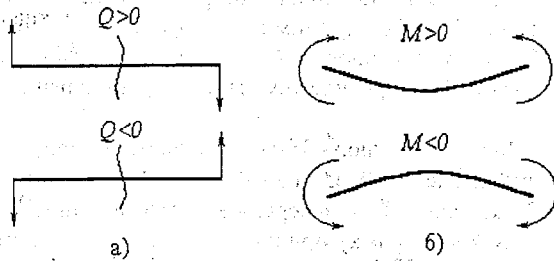


Рисунок 1.5

створює такий згинальний момент, що викликає деформації стиску в верхніх волокнах балки відносно перерізу, то він береться зі знаком “+” (рис. 1.5, б; 1.2).

*Приклад.* Побудуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на рисунку 1.6, а.

Спочатку визначимо реакції опор  $R_A$  і  $R_K$  із рівнянь рівноваги статички (в опорі А горизонтальна складова реакції  $R_A$  дорівнює нулю, оскільки в системі відсутні сили, що проєктуються на вісь стержня):

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$M_1 - P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 - q \cdot 3(2 + 3/2) - M_2 + R_K \cdot 5 = 0;$$

$$\Sigma M_A = 4 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - 3 + R_K \cdot 5 = 0;$$

$$R_K = 3 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_K = 0;$$

$$M_1 - R_A \cdot 5 + P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 3 - q \cdot 3(3/2) - M_2 = 0;$$

$$\Sigma M_K = 4 - R_A \cdot 5 + 1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3 = 0;$$

$$R_A = 1 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\Sigma Y = R_A - P_1 + P_2 - q \cdot 3 + R_K = 1 - 1 + 3 - 2 \cdot 3 + 3 = 0.$$

Отже, реакції розраховані правильно.

Розділяємо балку на чотири ділянки і складаємо рівняння поперечних сил та згинальних моментів для кожної з них.

Побудуємо епюри  $Q_y$  і  $M_z$  для ділянки АВ. Для цього зробимо переріз  $m_1-n_1$  на відстані  $x$  від опори А і розглянемо рівновагу відсіченої частини (рисунку 1.6, г). Згинальний момент  $M_z$  і поперечну силу  $Q_y$  в перерізі будемо зображати додатними.

Ділянка АВ

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$$

$$Q_y(x_1) = R_A = 1 \text{ кН;} \quad (1.3)$$

$$M_z(x_1) = R_A x_1 - M_1 = x_1 - 4; \quad (1.4)$$

при  $x_1=0 \text{ м}$   $M_z(0) = -4 \text{ кН}\cdot\text{м,}$

при  $x_1=1 \text{ м}$   $M_z(1) = 1 - 4 = -3 \text{ кН}\cdot\text{м.}$

Як видно із рівнянь (1.6) і (1.7) поперечна сила залишається сталою на всій довжині ділянки АВ, а згинальний момент змінюється за лінійним

законом. Графіки цих залежностей показані на рисунках 1.6, б та 1.6, в. Додатні значення сили  $Q_y$  будемо відкладати вгору від базової прямої, а від'ємні – вниз. Епюри згинальних моментів будемо на стиснутих волокнах. Тому вгору від базової лінії будемо відкладати в масштабі додатні значення згинального моменту, а вниз – від'ємні.

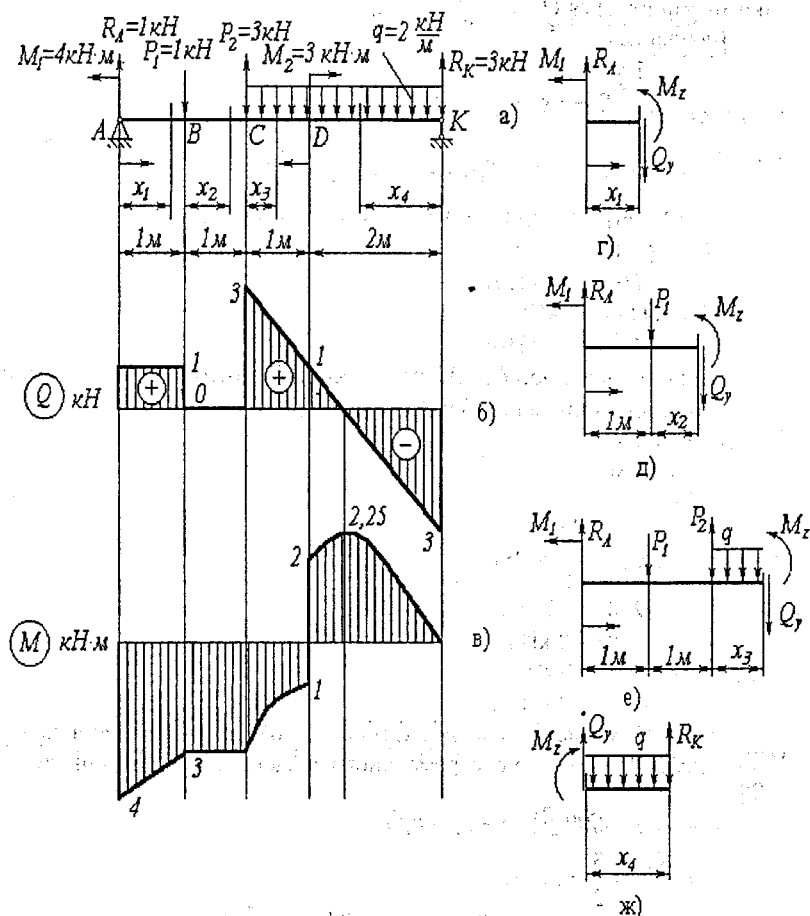


Рисунок 1.6

**Вказівка.** При побудові епюр згинальних моментів на розтягнутих волокнах додатні значення згинального моменту відкладаються вниз, а вверх – від'ємні).

Побудуємо епюри  $M_2$  і  $Q_y$  для ділянки BC. Для цього зробимо переріз  $m_2-n_2$  і розглянемо рівновагу лівої відрізаної частини балки (рис. 1.6, д)

Ділянка BC

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м};$$

$$Q_y(x_2) = R_A - P_1 = 1 - 1 = 0 \text{ кН};$$

$$M_z(x_2) = R_A(1+x_2) - P_1x_2 - M_1 = 1(1+x_2) - 1x_2 - 4 = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо графіки епюри  $Q_y$  і  $M_z$  на ділянці  $BC$  (рис. 1.6, б, в).

Із умов рівноваги лівої відсіченої частини балки знаходимо закони, за якими змінюються  $Q_y$  і  $M_z$  на ділянці  $CD$ .

Ділянка  $CD$

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м};$$

$$Q_y(x_3) = R_A - P_1 + P_2 - qx_3 = 3 - 2 \cdot x_3;$$

$$M_z(x_3) = R_A(2+x_3) - M_1 - P_1(1+x_3) + P_2x_3 - \frac{qx_3^2}{2} =$$

$$= 1(2+x_3) - 4 - 1(1+x_3) + 3x_3 - 2 \cdot x_3^2/2 = -3 + 3x_3 - x_3^2;$$

при  $x_3 = 0 \text{ м}$   $Q_y(0) = 3 \text{ кН};$

$$M_z(0) = -3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при  $x_3 = 1 \text{ м}$   $Q_y(1) = 1 \text{ кН};$

$$M_z(1) = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для побудови епюр  $Q_y$  і  $M_z$  на ділянці  $DK$  розглянемо рівновагу правої відрізаної частини балки (переріз  $m_3-n_3$ , рисунок 1.6, е)

Ділянка  $DK$

$$0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м};$$

$$Q_y(x_4) = q \cdot x_4 - R_K = 2x_4 - 3; \quad (1.5)$$

$$M_z(x_4) = R_K x_4 - \frac{qx_4^2}{2} = 3x_4 - x_4^2; \quad (1.6)$$

при  $x_4 = 0 \text{ м}$   $Q_y(0) = -3 \text{ кН};$

$$M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при  $x_4 = 2 \text{ м}$   $Q_y(2) = 1 \text{ кН};$

$$M_z(2) = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Епюра  $Q_y(x_4)$  перетинає вісь  $x$ , (рис. 1.6, б), це означає, що в точці перетину момент  $M_z$  набуде екстремального значення. Знайдемо цю точку із умови

$$Q_y(x_4) = 0, \text{ або } 2x_4 - 3 = 0, \text{ звідки}$$

$$x_4 = \frac{R_K}{q} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ м}.$$

Величина згинального моменту при  $x_4 = 1,5 \text{ м}$ ,

$$M_z(1,5) = 3x_4 - x_4^2 = 3 \cdot 1,5 - 1,5^2 = 2,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюри  $Q_y$  і  $M_z$  на ділянці  $DK$  (рис. 1.6, б, в).

Перевірка епюр (п. 1.1.3, правила а) – е)).

Як видно із рисунків 1.6, б, в на ділянках, де немає розподіленого навантаження ( $q=0$ ), поперечна сила  $Q_y$  залишається сталою, а момент  $M_z$  змінюється за лінійним законом (ділянка  $AB$ ). На ділянці  $BC$   $Q_y=0$ , а  $M_z=\text{const}$ . На ділянках  $CD$  та  $CK$  з рівномірно розподіленим навантаженням

( $q = \text{const}$ ), епюра  $Q_y$  – лінійна (вираз 1.5), а згинальний момент  $M_z$  змінюється за законом квадратичної параболи (вираз 1.6).

Оскільки епюра  $M_z$  побудована на стиснутих волокнах, то опуклість параболи звернена убік протилежний напрямку дії навантаження  $q$  (ділянки  $CD$  та  $CK$ ).

**Вказівка.** При побудові епюр згинальних моментів на розтягнутих волокнах опуклість параболи звернена убік, що збігається з напрямком дії навантаження  $q$ .

В перерізах, де прикладені зосереджені сили, на епюрі  $Q_y$  мають місце стрибки на величину цих сил в напрямку вектора сили, а на епюрі  $M_z$  – злами.

В перерізах, де прикладені тільки зосереджені моменти, на епюрі  $Q_y$  змін немає, а на епюрі  $M_z$  мають місце стрибки на величину цих моментів.

На ділянках, де  $Q_y = 0$ , момент  $M_z$  сталий, а в перерізах, де  $Q_y = 0$ , згинальний момент набуває екстремального значення.

В додатку Б наведена програма, інструкція до написання програми та результати розрахунку приведеної вище задачі із застосуванням пакета програм Mathcad 2000.

### 1.1.5 Побудова епюр $Q$ і $M$ для консольних балок

Балка, жорстко закріплена одним кінцем (рисунок 1.7) називається консольною.



На відміну від двоопорних балок, при побудові епюр внутрішніх зусиль для консольних балок, опорні реакції можна не визначати, проте необхідно рухатись завжди від вільного кінця балки до защемлення. При відомих опорних реакціях напрямок розгляду ділянок не має значення.

Рисунок 1.7

Всі інші правила та залежності при побудові  $Q$  і  $M$  для консольних балок залишаються незмінними (див п. 1.1.3, 1.1.4).

**Приклад.** Скласти рівняння та встановити закони розподілу поперечних сил і згинальних моментів для балок, показаних на рисунку 1.8, 1.9.

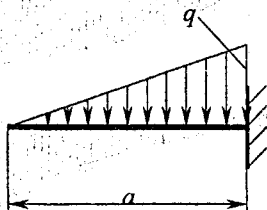


Рисунок 1.8

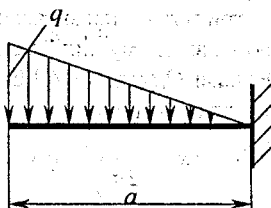


Рисунок 1.9

Рисунок 1.8. Розріжемо балку довільним перерізом, що знаходиться на відстані  $x$  від вільного кінця балки. Значення розподіленого навантаження в цьому перерізі визначимо через подібність трикутників

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q}{a}, \quad q(x) = \frac{q}{a}x.$$

Поперечна сила  $Q_y(x)$  чисельно дорівнює площі трикутника, утвореного його катетами  $q(x)$  та  $x$ . Ця сила прикладена в центрі ваги трикутника – на відстані  $\frac{x}{3}$  від його катета.

Вирази  $Q_y(x)$  та  $M_z(x)$  запишемо із врахування правил знаків:

$$Q_y(x) = -G = -\frac{1}{2}q(x) \cdot x = -\frac{q}{2a}x^2;$$

$$M_z(x) = -G \cdot \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}q(x) \cdot x \cdot \frac{x}{3} = -\frac{q}{6a}x^3.$$

Отже,  $Q_y(x)$  змінюється по квадратичній параболі,  $M_z(x)$  – по кубічній (рисунок 1.10).

Рисунок 1.9. Задача зводиться до попередньої. Додамо до прикладеного до балки навантаження до рівномірно розподіленого  $q$ . Для того, щоб схема навантаження не змінилась, прикладемо знизу навантаження протилежного знака, так як показано на рисунку. Тепер маємо балку, що навантажена рівномірно розподіленим навантаженням  $q = \text{const}$  та трикутним навантаженням з вершиною на вільному кінці балки.

Вирази  $Q_y(x)$  та  $M_z(x)$  будуть мати вигляд із врахуванням

$$Q_y(x) = G - qx = \frac{q}{2a}x^2 - qx;$$

$$M_z(x) = G \cdot \frac{x}{3} - \frac{q}{2}x^2 = \frac{q}{6a}x^3 - \frac{q}{2}x^2.$$

Рисунок 1.11 ілюструє характер змінювання  $Q_y(x)$  та  $M_z(x)$ .

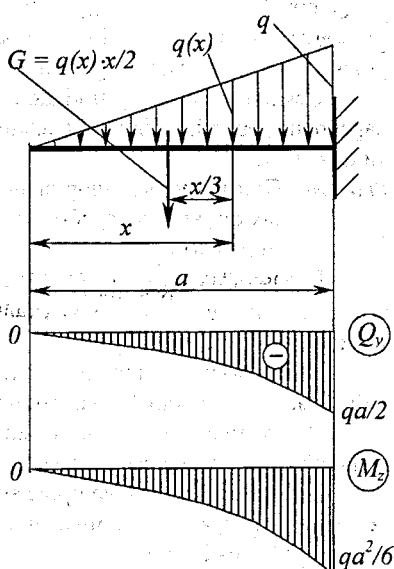


Рисунок 1.10

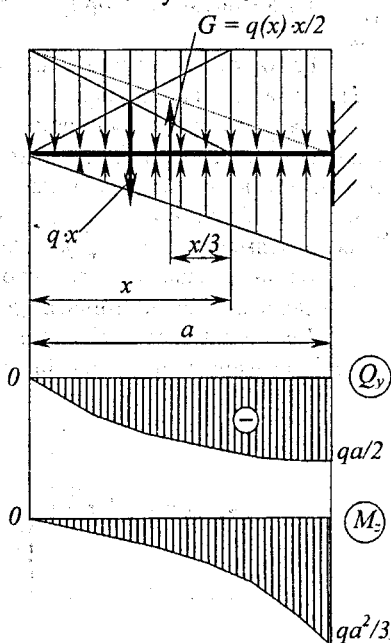


Рисунок 1.11

*Приклад.* Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки, показаної на рисунку 1.12, а.

Опорні реакції не визначаємо. Напрямок розгляду перерізів – від точки А до защемлення.

Розділяємо балку на чотири ділянки і складаємо рівняння поперечних сил  $Q_y(x)$  та згинальних  $M_z(x)$  моментів для кожної з них. Для трикутного розподіленого навантаження користуємось виведеними вище залежностями.

Ділянка АВ

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$$

$$Q_y(x_1) = -\frac{q}{2a}x_1^2 = -x_1^2,$$

$$M_z(x_1) = M - \frac{q}{6a}x_1^3 = -\frac{1}{3}x_1^3 + 2,$$

при  $x_1=0$  м  $Q_y(0) = 0$  кН,

$$M_z(0) = 2 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

при  $x_1=1$  м  $Q_y(1) = -1$  кН,

$$M_z(1) = 1,67 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка ВС

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м.}$$

$$Q_y(x_2) = -\frac{qa}{2} - qx_2 = -1 - 2x_2,$$

$$M_z(x_2) = M - \frac{qa}{2}\left(\frac{1}{3}a + x_2\right) - \frac{qx_2^2}{2} = 1,67 - x_2 - x_2^2,$$

при  $x_2=0$  м  $Q_y(0) = -1$  кН,

$$M_z(0) = 1,67 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

при  $x_2=1$  м  $Q_y(1) = -3$  кН,

$$M_z(1) = -0,33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка CD

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м.}$$

$$Q_y(x_3) = -\frac{qa}{2} - qb - qx_3 + \frac{q}{2c}x_3^2 = -3 - 2x_3 + x_3^2,$$

$$M_z(x_3) = M - \frac{qa}{2}\left(\frac{1}{3}a + b + x_3\right) - qb\left(\frac{1}{2}b + x_3\right) - \frac{qx_3^2}{2c} + \frac{q}{6c}x_3^3 =$$

$$= -0,33 - 3x_3 - x_3^2 + \frac{1}{3}x_3^3,$$

при  $x_3=0$  м  $Q_y(0) = -3$  кН,

$$M_z(0) = -0,33 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

при  $x_3=1$  м  $Q_y(1) = -4$  кН,

$$M_z(1) = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка DE

$$0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м.}$$

$$Q_y(x_4) = -\frac{qa}{2} - qb - \frac{qc}{2} + P = 1 \text{ (кН)},$$

$$M_z(x_4) = M - \frac{qa}{2} \left( \frac{1}{3}a + b + c + x_4 \right) - qb \left( \frac{1}{2}b + c + x_4 \right) - \frac{qc}{2} \left( \frac{2}{3}c + x_4 \right) + Px_4 =$$

$$= -4 + x_4,$$

при  $x_4 = 0 \text{ м}$   $M_z(0) = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,

при  $x_4 = 1 \text{ м}$   $M_z(1) = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

За отриманими значеннями, із врахуванням основних властивостей епюри та рис. 1.10 та 1.11, будемо епюри для заданої балки (рисунок 1.12)

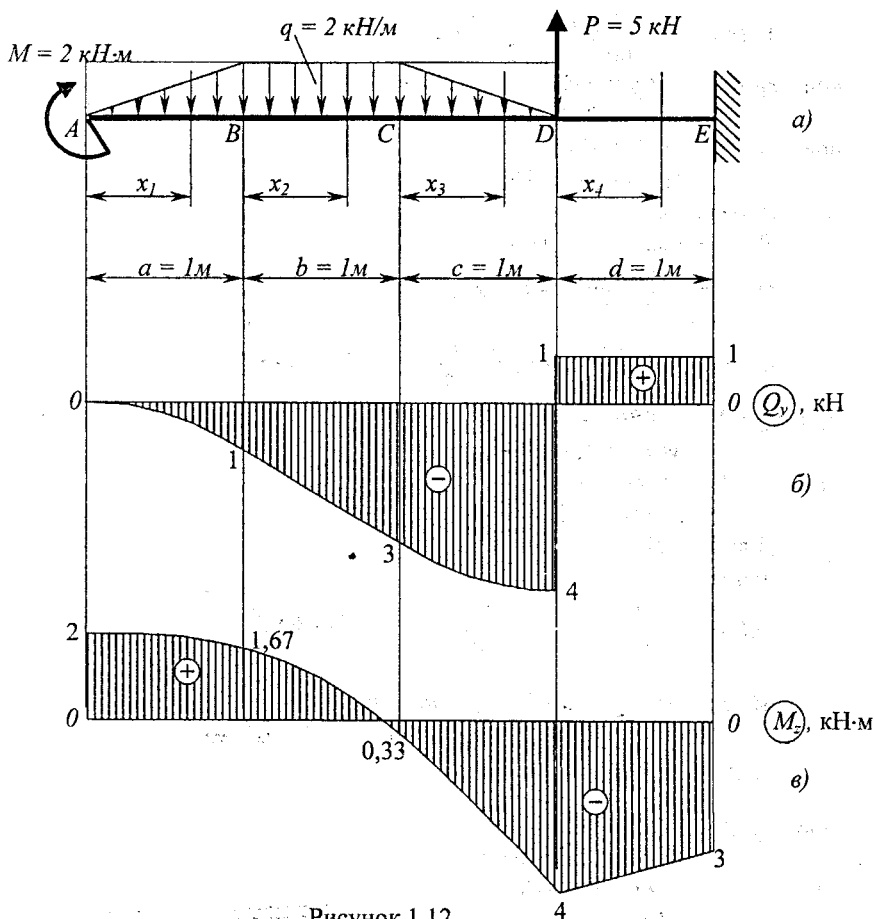


Рисунок 1.12

### 1.1.6 Побудова епюр внутрішніх зусиль для плоских рам

Рамами називають системи, що складаються з прямолінійних стержнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Вертикально розташовані стержні рами прийнято називати стояками, горизонтальні — ригелями. Жорсткість вузлів усуває можливість взаємного повороту скріплених стержнів, тобто у вузловій точці кути між їх осями залишаються незмінними.

Вісь рами являє собою ламану лінію, однак кожен прямолінійну ділянку її можна розглядати як балку. Тому, щоб побудувати будь-яку епюру для рами, потрібно побудувати її для кожної окремої балки, що входить до складу рами. На відміну від звичайних балок у перерізах стержнів рами, крім згинальних моментів  $M$  та поперечних сил  $Q$ , звичайно діють ще і поздовжні сили  $N$ . Отже, для рам потрібно будувати епюри  $N$ ,  $Q$  і  $M$ .

Для  $N$  і  $Q$  зберігаються раніше прийняті *правила знаків*:

$N > 0$ , якщо поздовжні сили викликають розтягання;

$Q > 0$ , якщо її вектори прагнуть обертати частини розсіченої рами (відносно точок, близьких до перерізу) за годинниковою стрілкою.

Для згинальних моментів спеціального правила знаків не встановлюють, а при складанні виразів для  $M(x)$  приймають за власним розсудом який-небудь момент додатним.

Вирази для  $N(x)$ ,  $Q(x)$  і  $M(x)$  можна не записувати (при певному досвіді побудови епюр) — за виключенням для тих ділянок, де діє розподілене навантаження. Найчастіше просто обчислюють значення  $N$ ,  $Q$  і  $M$  в характерних перерізах (на межах ділянок і в екстремальних точках), а потім проводять лінії епюр, з огляду на їхні властивості, відзначені в п. 1.1.3.

Ординати епюр, як і завжди, відкладаємо перпендикулярно до осі рами, причому додатні ординати  $Q$  і  $N$  із зовнішньої сторони рами, а від'ємні — з внутрішньої (якщо, звичайно, рама такої конфігурації, що можна розрізнити її зовнішню і внутрішню сторони). Епюри  $M$  умовимося для рам будувати на стиснутих волокнах.

Якщо рама має більше однієї опори, то перш ніж приступити до побудови епюр, потрібно методами статки знайти опорні реакції.

*Приклад*

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для рами, показаної на рисунку 1.13. Вихідні дані  $P_1 = 2$  кН;  $P_2 = 3$  кН;  $M = 5$  кН·м;  $q = 2$  кН/м.

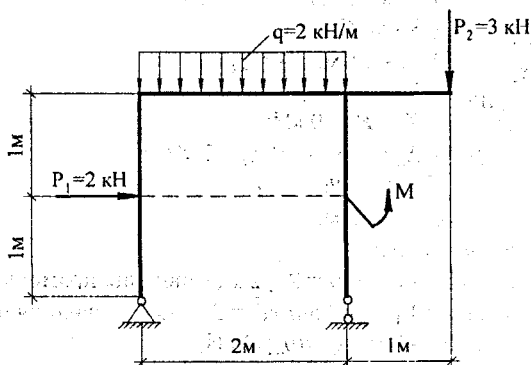


Рисунок 1.13

### Розв'язування

Визначасмо реакції опор  $Y_A$  і  $X_A$  і  $Y_B$  із рівнянь рівноваги статички (рис. 1.14, а):

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-P_1 \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot 1 - P_2 \cdot 3 + M + Y_B \cdot 2 = 0;$$

$$Y_B = 0,5[2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 5] = 5 \text{ кН};$$

$$Y_B = 5 \text{ кН},$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-Y_A \cdot 2 - P_1 \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 1 + M - P_2 \cdot 1 = 0;$$

$$Y_A = 0,5[-2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 - 3 \cdot 1] = 2 \text{ кН};$$

$$Y_A = 2 \text{ кН}.$$

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$P_1 + X_A = 0;$$

$$X_A = -2 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\Sigma F_y = Y_A - q \cdot 2 - P_2 + Y_B = 2 - 2 \cdot 2 - 3 + 5 = 0.$$

Отже, реакції розраховано правильно.

Оскільки при  $X_A$  знак “-”, то дійсний напрямок реакції  $X_A$  направлений у протилежний бік до попередньо вибраного. Змінюємо напрямок вектора  $X_A$  (рис. 1.14, а).

Розділяємо раму на шість ділянок і складаємо рівняння поперечних сил та згинальних моментів для кожної з них.

Ділянка AC

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}.$$

$$N(x_1) = -Y_A = -2 \text{ кН};$$

$$Q_y(x_1) = X_A = 2 \text{ кН};$$

$$M_z(x_1) = X_A \cdot x_1 = 2x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \text{ м } M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_1 = 1 \text{ м } M_z(1) = 2 \cdot 1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка CD

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}.$$

$$N(x_2) = -Y_A = -2 \text{ кН};$$

$$Q_y(x_2) = X_A - P_1 = 0 \text{ кН};$$

$$M_z(x_2) = X_A(1 + x_2) - P_1 x_2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка DE

$$0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}.$$

$$N(x_3) = 0 \text{ кН};$$

$$Q_y(x_3) = Y_A - q \cdot x_3 = 2 - 2 \cdot x_3, \text{ (рівняння прямої лінії);}$$

$$M_z(x_3) = Y_A x_3 - 0,5 \cdot q \cdot x_3^2 = 2x_3 - x_3^2, \text{ (рівняння параболи);}$$

$$\text{при } x_3 = 0 \text{ м } Q_y(0) = 2 \text{ кН},$$

$$M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_3 = 2 \text{ м } Q_y(2) = -2 \text{ кН},$$

$$M_z(2) = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

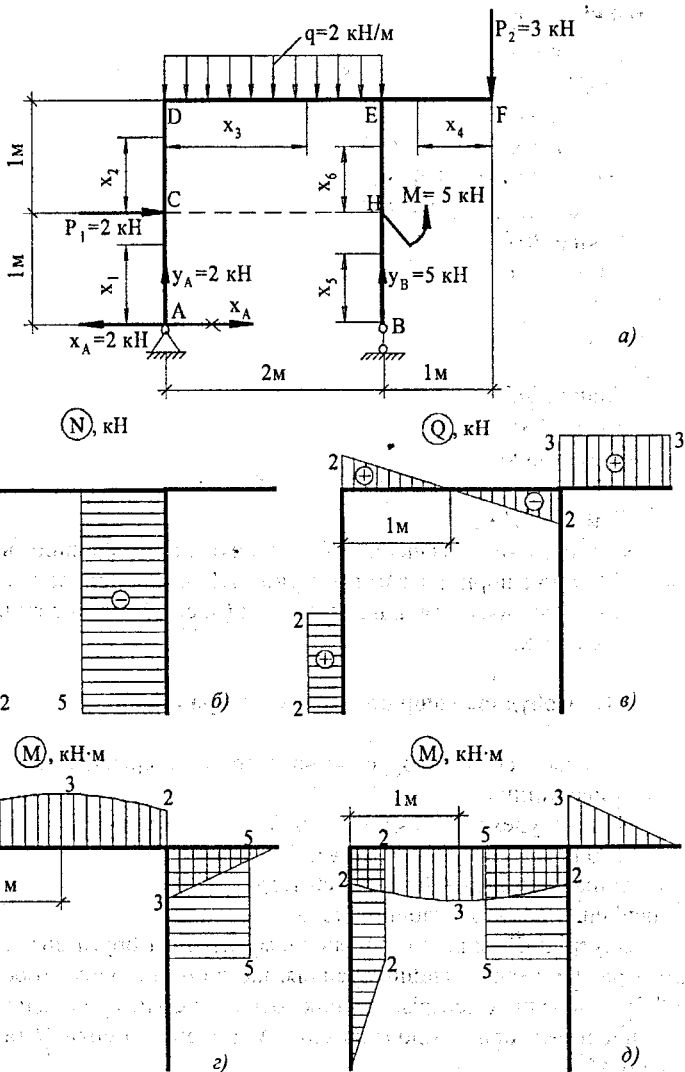


Рисунок 1.14

Епора  $Q_y(x_3)$  перетинає вісь  $x$ , (рис. 1.14, в), це означає що в точці перетину момент  $M_z$  набуде екстремального значення. Знайдемо цю точку із умови

$$Q_y(x_4) = 0, \text{ або } 2 - 2x_3 = 0, \text{ звідки } x_3 = 1 \text{ м.}$$

$$\text{Величина згинального моменту при } x_4 = 1 \text{ м: } M_z(1) = 2 - 2^2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка  $FE$

$$0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м.}$$

$$N(x_4) = 0 \text{ кН};$$

$$Q_y(x_4) = P_2 = 3 \text{ кН};$$

$$M_z(x_4) = P_2 \cdot x_3 = 3x_3;$$

$$\text{при } x_4=0 \text{ м } M_z(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_4=1 \text{ м } M_z(1) = 3 \cdot 1 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка  $BH$

$$0 \leq x_5 \leq 1 \text{ м.}$$

$$N(x_5) = -Y_B = -5 \text{ кН};$$

$$Q_y(x_5) = 0;$$

$$M_z(x_5) = 0.$$

Ділянка  $BH$

$$0 \leq x_6 \leq 1 \text{ м.}$$

$$N(x_6) = -Y_B = -5 \text{ кН};$$

$$Q_y(x_6) = 0;$$

$$M_z(x_6) = M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими значеннями, із врахуванням основних властивостей епюр, будемо епюри для рами (рисунок 1.14). Для прикладу епюра згинальних моментів побудована на стиснутих (рис. 1.14 г) та розтягнутих (рис. 1.14 д) волокнах.

### 1.1.7 Побудова епюр для кривих стержнів

Кривим стержнем (брусом) називається стержень, геометрична вісь якого криволінійна.

Надалі будемо розглядати криві стержні, в яких:

- геометрична вісь – плоска крива;
- площина кривизни – площина симетрії;
- діючі сили лежать в площині кривизни.

Внутрішні зусилля в поперечному перерізі бруса визначають методом перерізів через зовнішні зусилля, що діють по одну сторону від перерізу. В поперечних перерізах виникають в загальному випадку три внутрішні силові фактори: поздовжня сила  $N$ , поперечна сила  $Q$  та згинальний момент  $M$ .

В випадку, коли вісь кривого стержня являє собою дугу кола, положення любого перерізу зручно визначити за допомогою полярної системи координат, тоді поздовжня, поперечна сила та згинальний момент будуть функціями кута  $\varphi$  –  $N(\varphi)$ , сила  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$ .

*Правила визначення  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$ .*

Поздовжня сила  $N$  в вибраному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил, що розташовані по одну сторону від перерізу; сили проєктуються на дотичну до геометричної осі в вибраному перерізі.

**Правило знаків  $N$**  (збігається з правилом знаків для балок та рам): якщо проекція зовнішньої сили направлена від перерізу (розтяг) то вона береться зі знаком "+", якщо до перерізу (стиск), то знак "-".

Поперечна сила  $Q$  в вибраному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх зовнішніх сил, що розташовані по одну сторону від перерізу; сили проєктуються на радіус кривизни, проведений до точки перерізу.

**Правило знаків  $Q$**  (збігається з правилом знаків для балок та рам): якщо зовнішня сила намагається обертати відрізану частину стержня за годинниковою стрілкою то її проекція береться зі знаком "+", якщо проти годинникової стрілки, то знак "-".

Згинальний момент  $M$  в вибраному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил відносно центра ваги перерізу, при цьому розглядаються моменти сил, що розташовані по одну сторону від перерізу.

**Правило знаків  $M$** : якщо зовнішня сила намагається деформувати відрізану частину стержня таким чином, що його кривизна буде збільшуватись, то момент від цієї сили береться зі знаком "+".

Диференціальні співвідношення між  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$  виводяться на основі рівноваги елемента, виділеного з довільно навантаженого кривого стержня. Вони мають вид (для випадку, коли рівномірно розподілене навантаження відсутнє  $q = 0$ )

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q, \quad \frac{dQ}{d\varphi} = N, \quad \frac{dM}{d\varphi} = QR, \quad (1.7)$$

де  $R$  – радіус кривизни стержня в перерізі.

Основні правила перевірки правильності побудови епюр залишаються такими ж, як і для балок та рам із врахуванням особливостей диференціальних залежностей (1.7).

#### Приклад

Побудувати епюри внутрішніх силових факторів для криволінійного стержня, показаного на рисунку 1.15. Вихідні дані  $P_1 = 5$  кН;  $P_2 = 10$  кН;  $M = 4$  кН·м;  $R = 2$  м,  $\alpha = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 3\pi/2$ .

#### Розв'язування

Розділяємо стержень на дві ділянки і складасмо рівняння поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів для кожної з них (рис. 1.16).

#### Ділянка АВ

$$0 \leq \varphi \leq \alpha;$$

$$N(\varphi) = -P_1 \cdot \cos(\varphi).$$

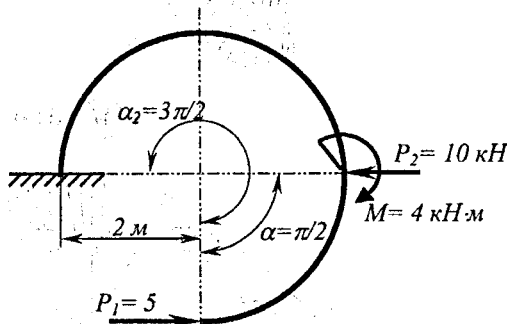
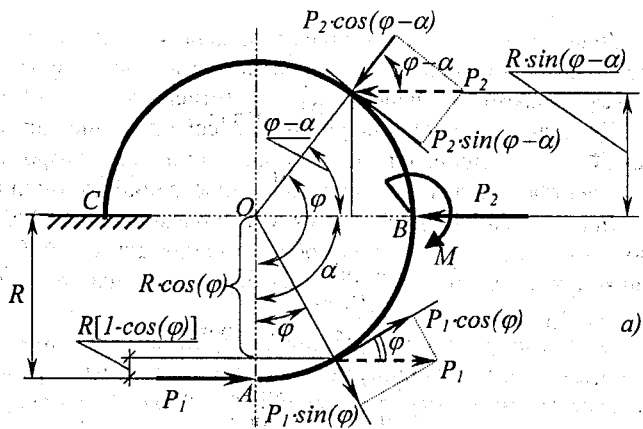
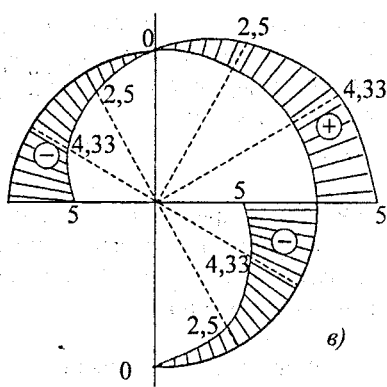
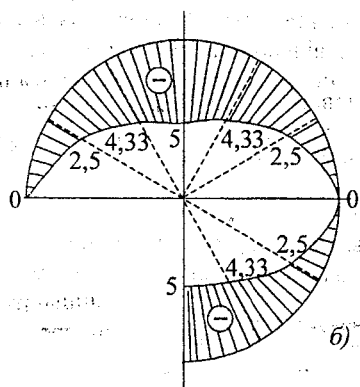


Рисунок 1.15



(N), кН

(Q), кН



(M), кН·м

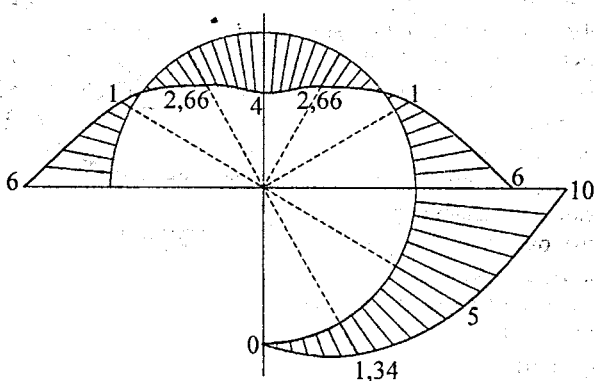


Рисунок 1.16

$$Q(\varphi) = -P_1 \cdot \sin(\varphi);$$

$$M(\varphi) = -P_1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\varphi)].$$

або  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

$$N(\varphi) = -5 \cdot \cos(\varphi);$$

$$Q(\varphi) = -5 \cdot \sin(\varphi);$$

$$M(\varphi) = -10 \cdot [1 - \cos(\varphi)].$$

Ділянка ВС

$\alpha \leq \varphi \leq \alpha_2$ .

$$N(\varphi) = -P_1 \cdot \cos(\varphi) - P_2 \cdot \sin(\varphi - \alpha);$$

$$Q(\varphi) = -P_1 \cdot \sin(\varphi) + P_2 \cdot \cos(\varphi - \alpha);$$

$$M(\varphi) = -P_1 \cdot R \cdot [1 - \cos(\varphi)] + P_2 \cdot R \cdot \sin(\varphi - \alpha) + M.$$

або  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ .

$$N(\varphi) = -5 \cdot \cos(\varphi) - 10 \cdot \sin(\varphi - \pi/2);$$

$$Q(\varphi) = -5 \cdot \sin(\varphi) + 10 \cdot \cos(\varphi - \pi/2);$$

$$M(\varphi) = -10 \cdot [1 - \cos(\varphi)] + 20 \cdot \sin(\varphi - \pi/2) + 4.$$

З інтервалом в  $\pi/6$  ( $30^\circ$ )  $0 \leq \varphi \leq 3\pi/2$  знаходимо значення внутрішніх силових факторів в перерізах (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

	Ділянка АВ $0 \leq \varphi \leq \pi/2$				Ділянка ВС $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$						
	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$
N( $\varphi$ ), кН	-5	-4,33	-2,5	0	0	-2,5	-4,33	-5	-4,33	-2,5	0
Q( $\varphi$ ), кН	0	-2,5	-4,33	-5	5	4,33	2,5	0	-2,5	-4,33	-5
M( $\varphi$ ), кН·м	0	-1,34	-5	-10	-6	-1	2,66	4	2,66	-1	-6

За отриманими значеннями будуюмо на осі криволінійного стержня епюри поздовжніх  $N(\varphi)$ , поперечних сил  $Q(\varphi)$  та згинальних моментів  $M(\varphi)$  (рисунок 1.16).

Ординати згинальних моментів відкладені в сторону стиснутих волокон без вказівки знаку. При прийнятому правилі знаків ординати зі знаком “+” до центра кривизни від осі стержня, “-” від центра кривизни від осі стержня. При побудові на розтягнутих волокнах – навпаки.

Відкладаються ординати поздовжніх  $N(\varphi)$  та поперечних сил  $Q(\varphi)$  зі знаком “+” на зовнішній стороні стержня, із обов’язковим указанням знака.

Перевірка епор.

В точці А прикладена зосереджена сила  $P_1$  по дотичній до осі стержня, в цій точці на епюрі  $N(\varphi)$  – стрибок на величину цієї сили. На епюрах  $Q(\varphi)$  та  $M(\varphi)$  в точці А стрибків немає. Графіки плавно виходять із нуля.

В точці В прикладена зосереджена сила  $P_2$ , перпендикулярно до осі стержня, та момент  $M$ . В цій точці на епюрі  $Q(\varphi)$  – стрибок на величину сили  $P_2$ , на епюрі  $M(\varphi)$  – стрибок на величину момента  $M$ . На епюрі  $N(\varphi)$  в точці В стрибків немає.

Епюра  $Q(\varphi)$  перетинає нульову лінію (вісь стержня) двічі – в точці В, та при  $\varphi = 180^\circ$ . В цих перерізах на епюрах  $N(\varphi)$  та  $M(\varphi)$  будуть екстремальні точки (або дотична до епюр паралельна дотичній до осі стержня в перерізі).

В додатку Б наведена програма, інструкція до написання програми та результати розрахунку приведеної вище задачі із застосуванням пакета програм Mathcad 2000.

## 1.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 1. Побудова епюр внутрішніх силових факторів

За заданими розрахунковими схемами побудувати епюри відповідних внутрішніх силових факторів.\*

План розв'язування задачі:

- визначити при необхідності опорні реакції (схеми б, г);
- записати для кожної ділянки рівняння, за якими будуються відповідні епюри;
- розрахувати значення внутрішніх зусиль в характерних точках та побудувати відповідні епюри.

Інші дані для розрахунків взяти з таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Варіант	$q$ , кН/м	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$M$ , кН·м	$a$ , м	$\alpha$ , $^\circ$
1	1	5	1	2	1	15
2	1,5	4	2	1	1,5	30
3	2	3	3	3	0,25	45
4	2,5	2	4	2	0,5	60
5	3	1	5	3	0,35	75
6	1,5	5	1	1	1	15
7	1,5	4	2	1	1,5	30
8	2	3	3	2	0,25	45
9	2,5	2	4	3	0,5	60
0	3	1	5	2	0,35	75

\* Користуйтесь прикладними програмами ПЕОМ для виконання завдання (додаток Б)

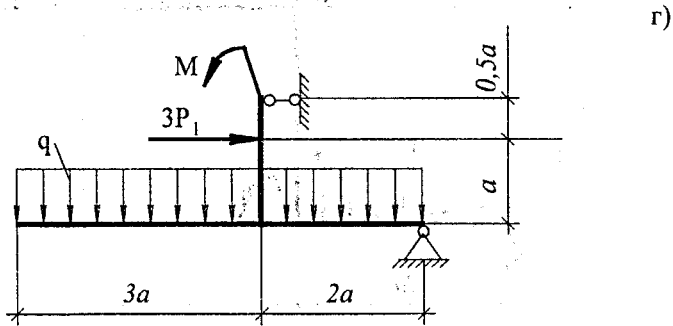
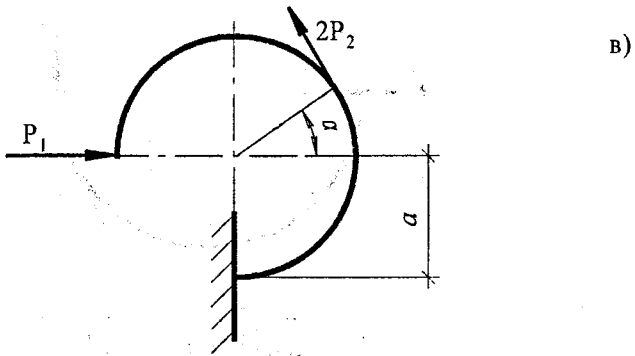
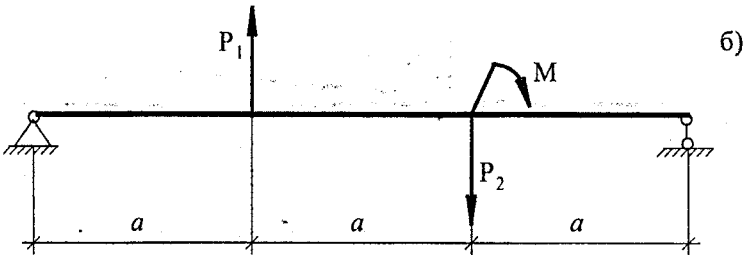
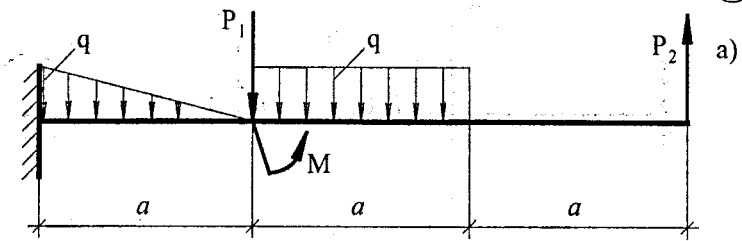


Рисунок 1.17.

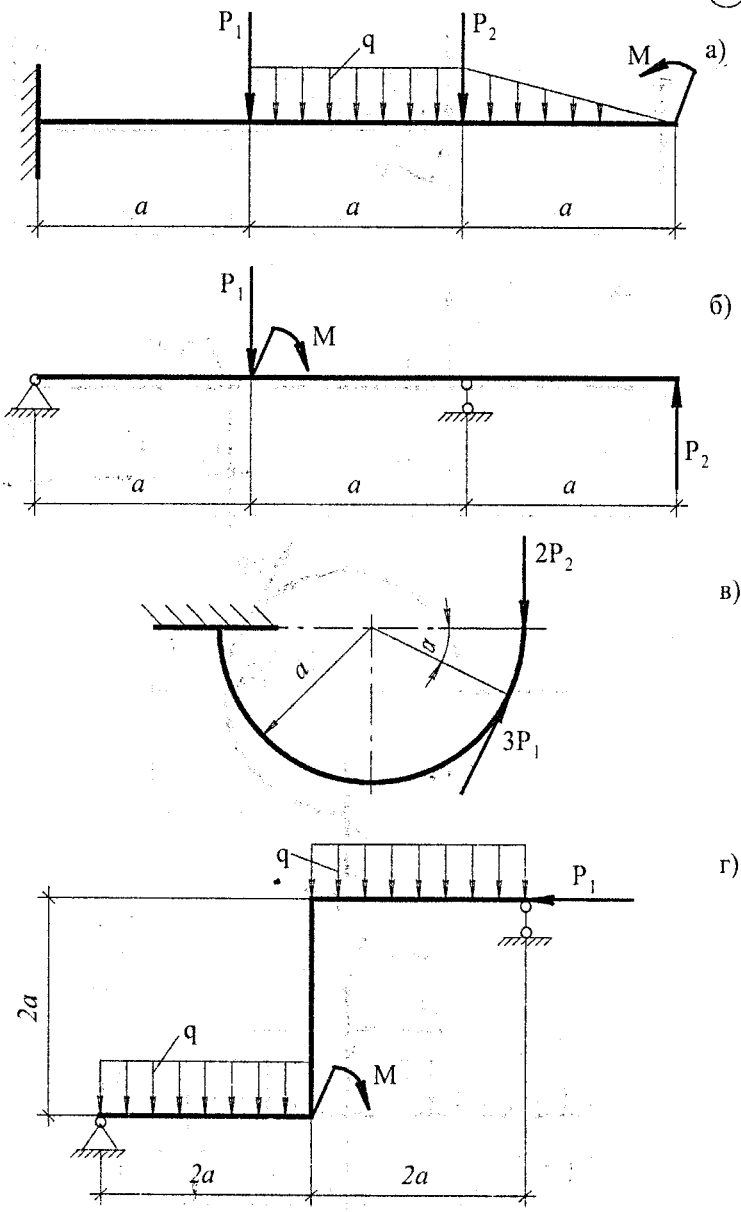
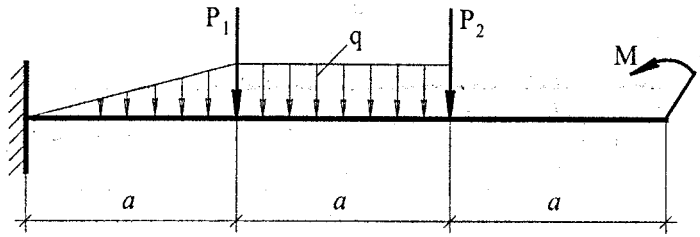
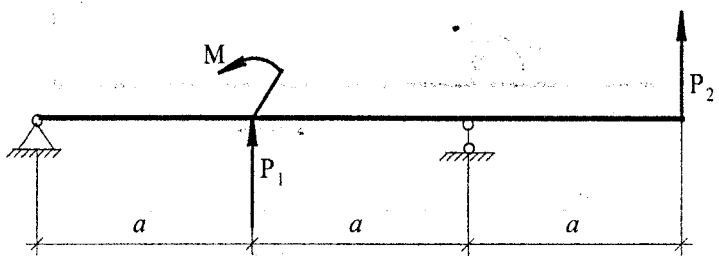


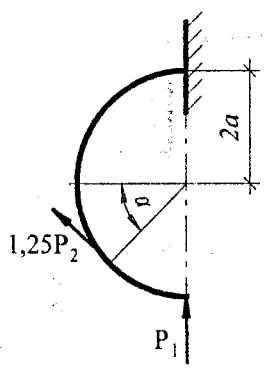
Рисунок 1.18



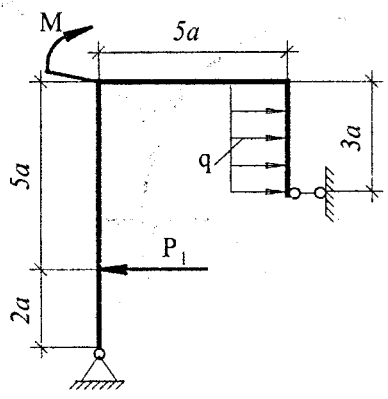
a)



б)



в)



г)

Рисунок 1.19

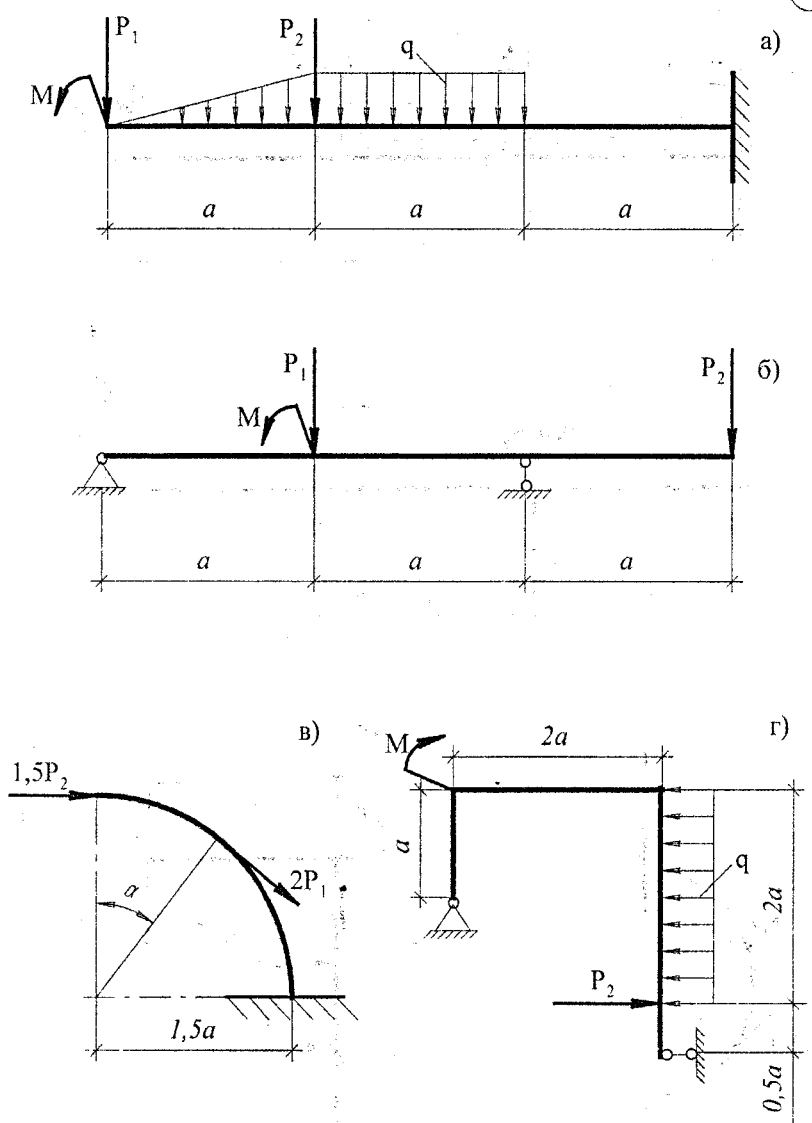


Рисунок 1.20

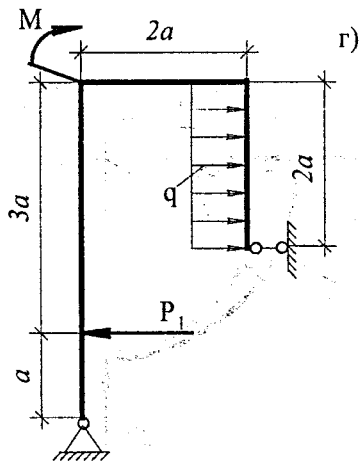
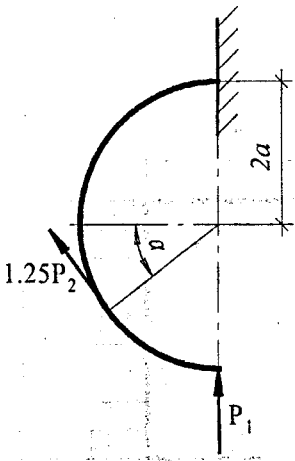
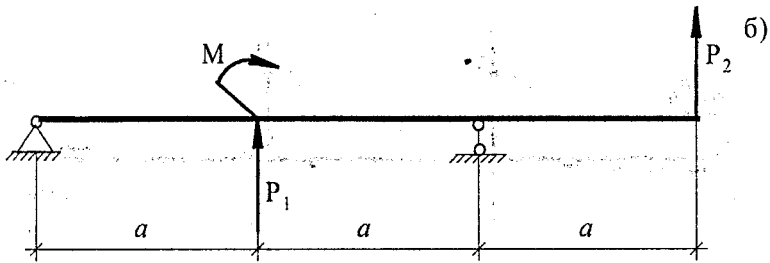
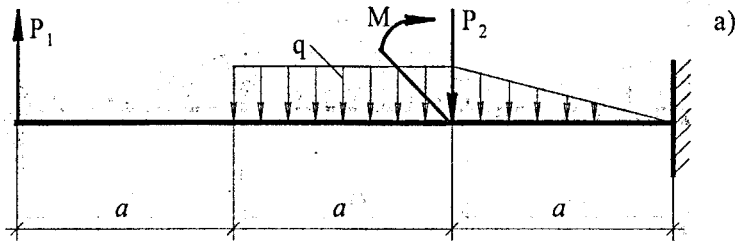


Рисунок 1.21

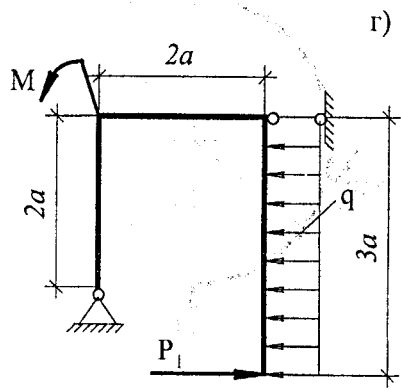
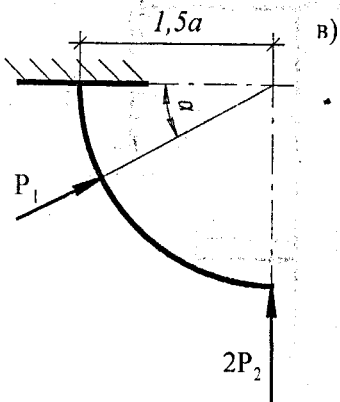
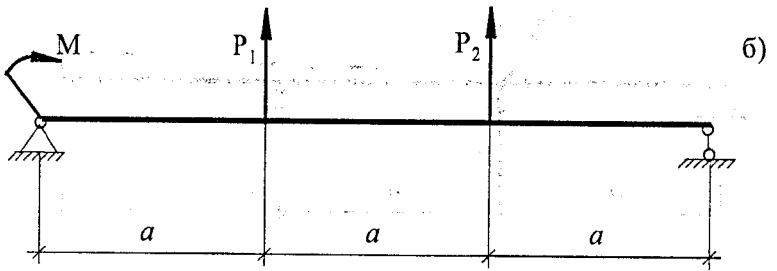
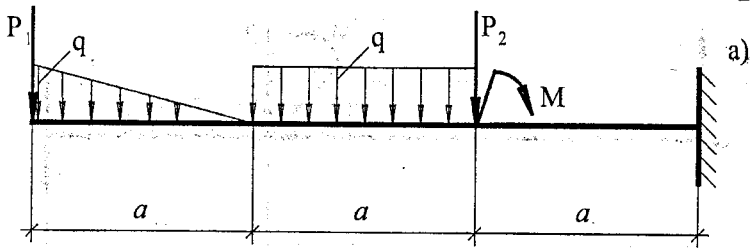
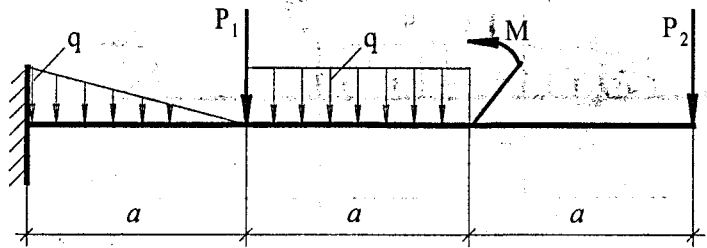
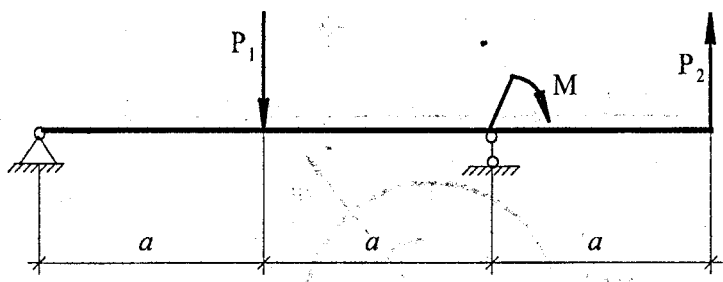


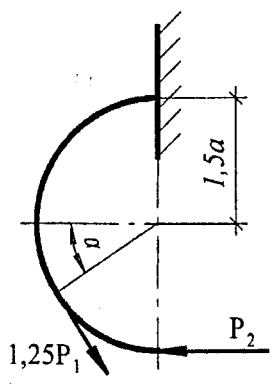
Рисунок 1.22



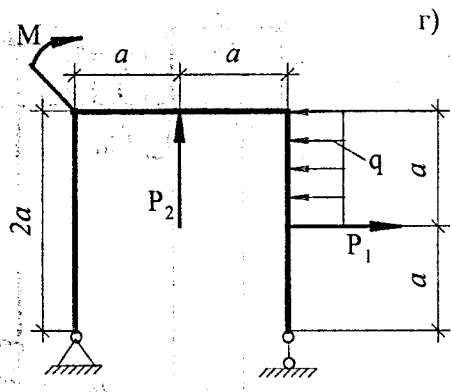
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.23

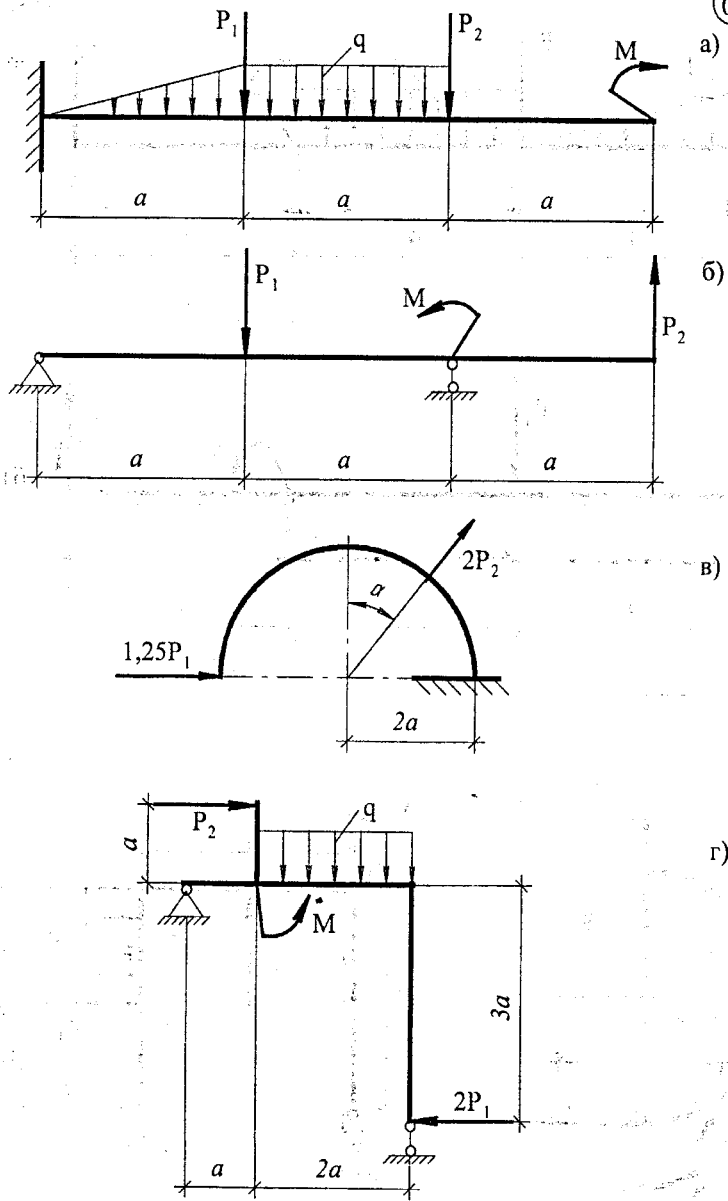


Рисунок 1.24

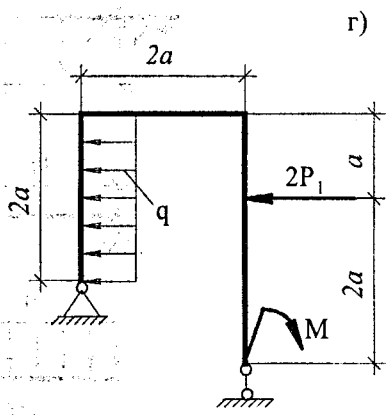
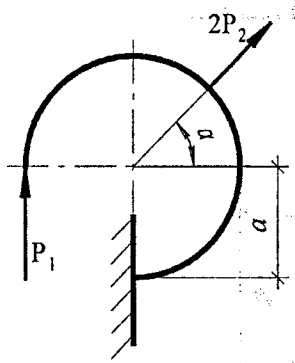
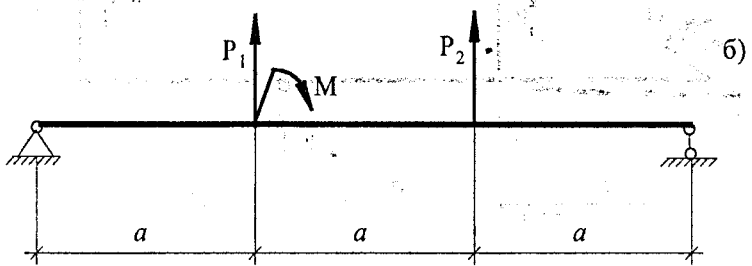
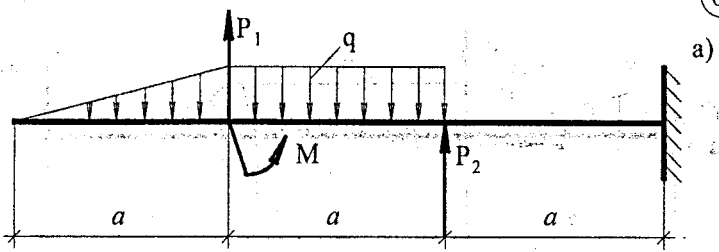


Рисунок 1.25

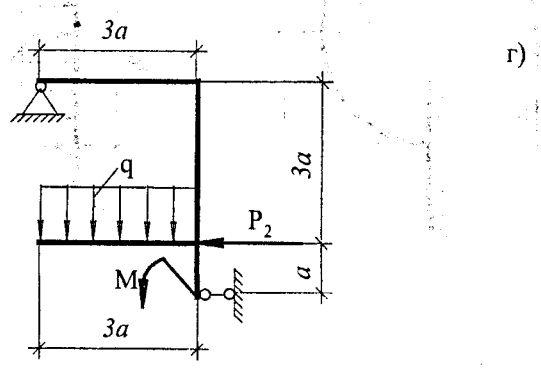
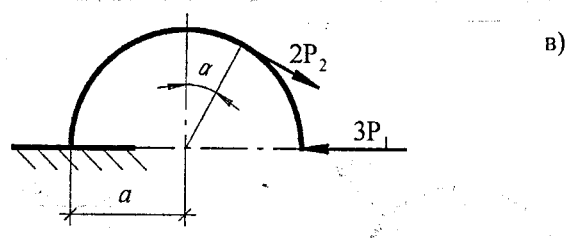
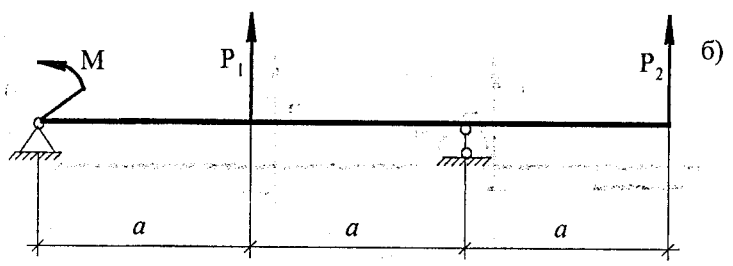
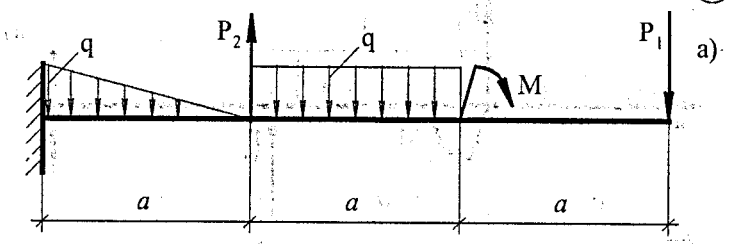


Рисунок 1.26

10

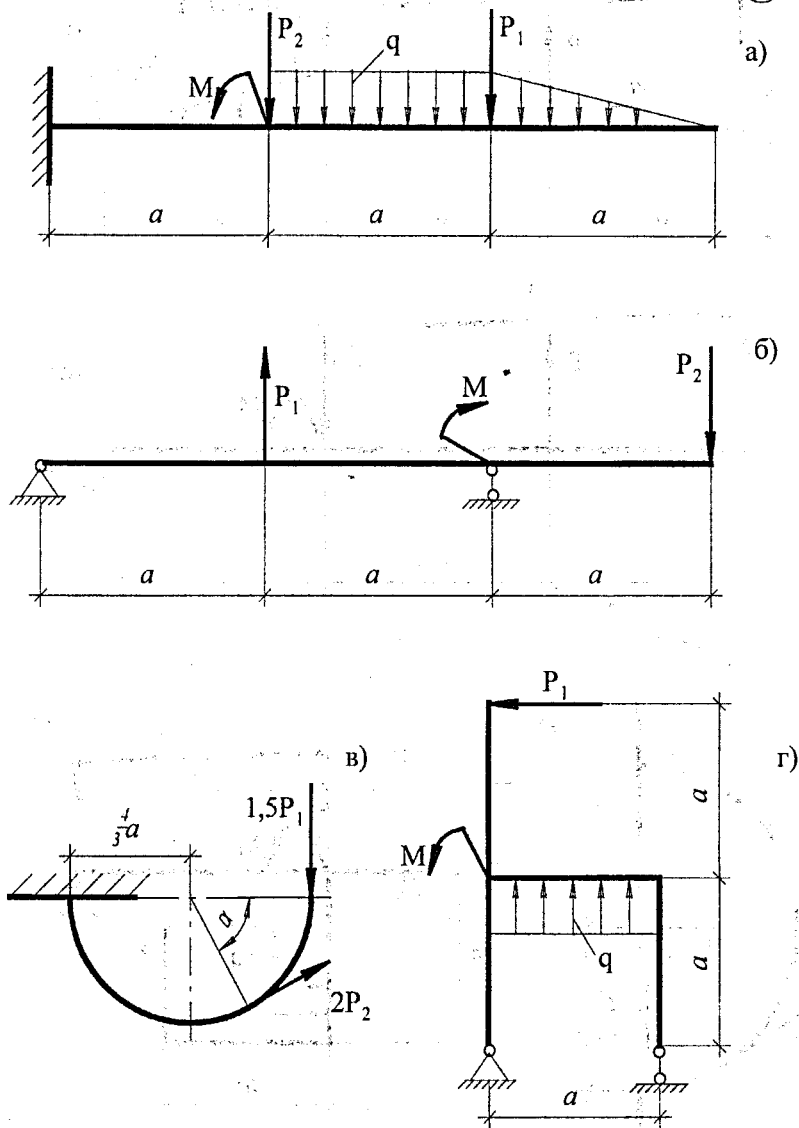


Рисунок 1.27

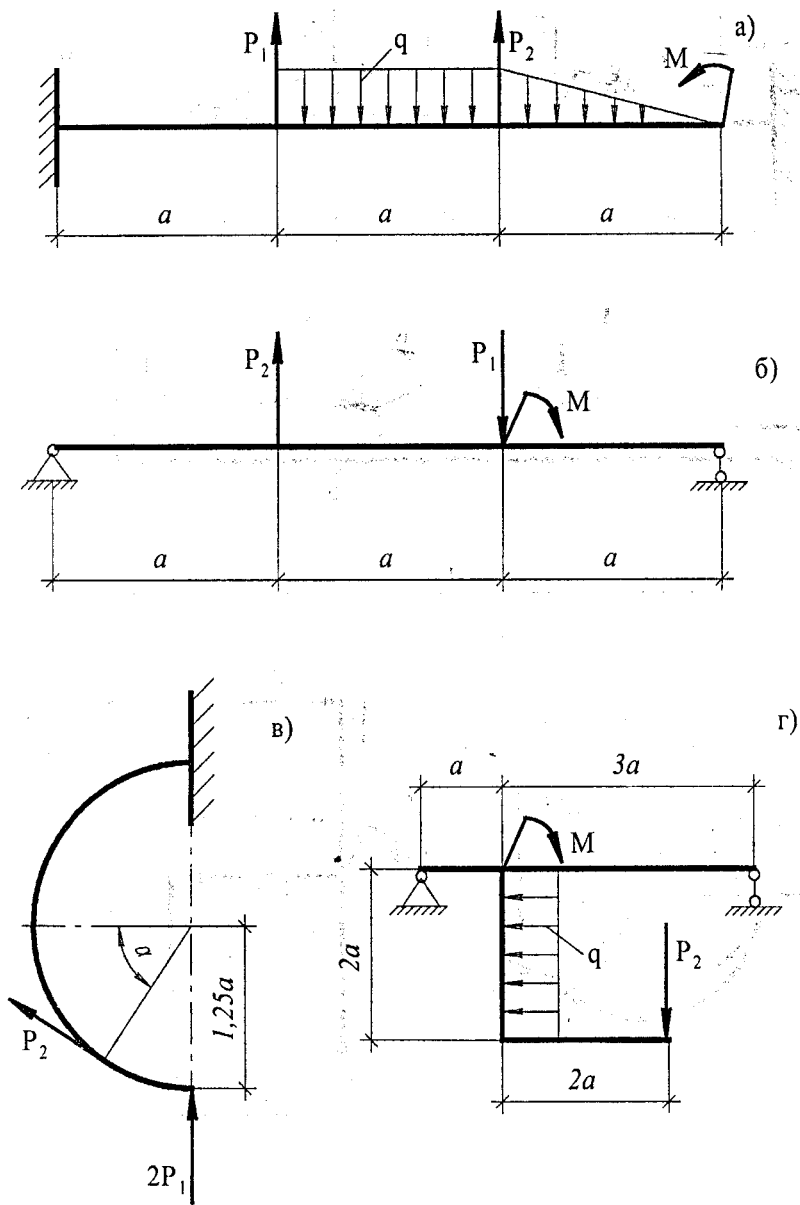
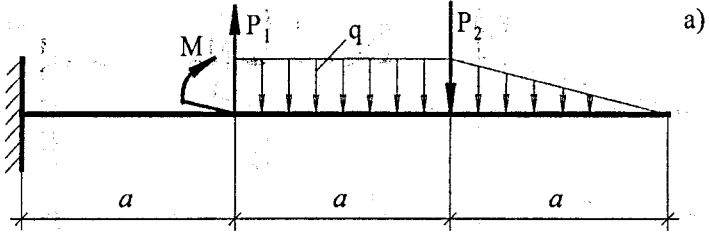
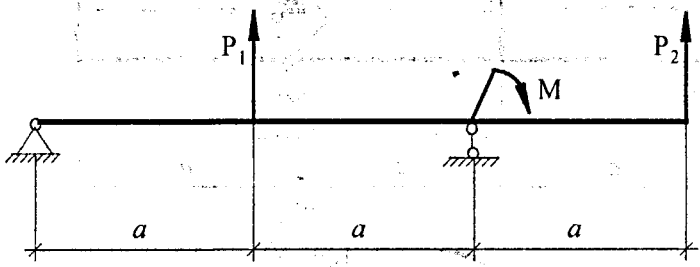


Рисунок 1.28

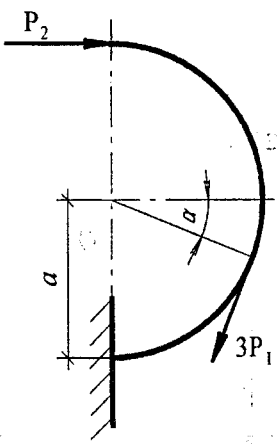


a)



б)

в)



г)

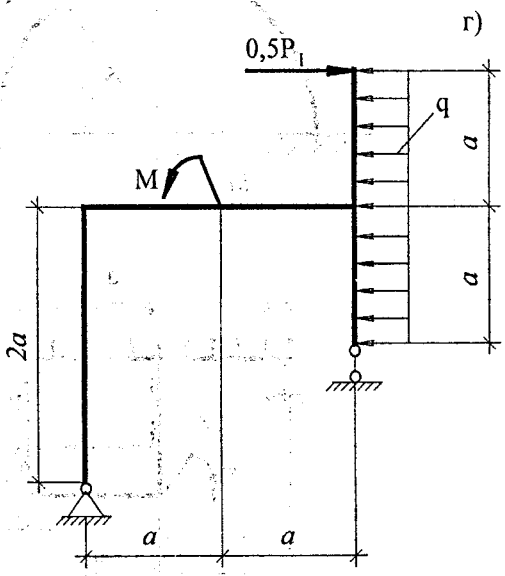


Рисунок 1.29

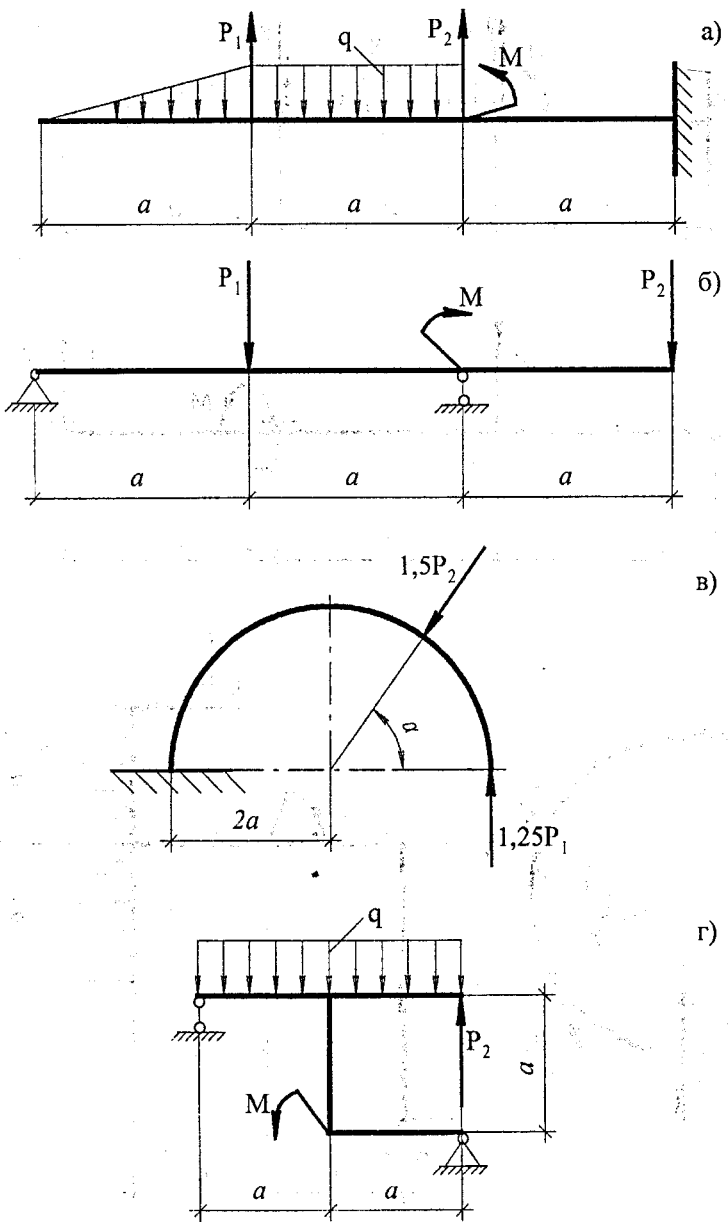


Рисунок 1.30

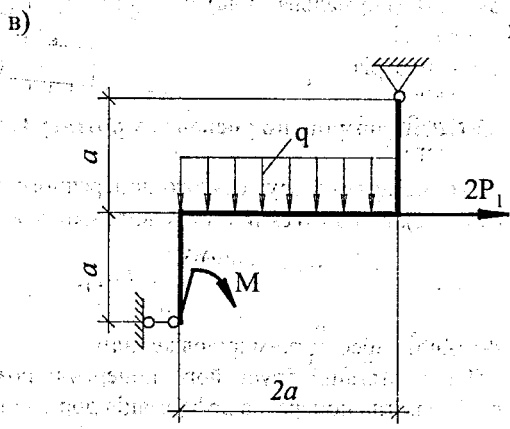
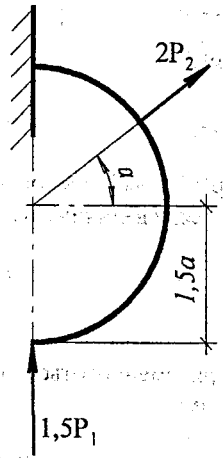
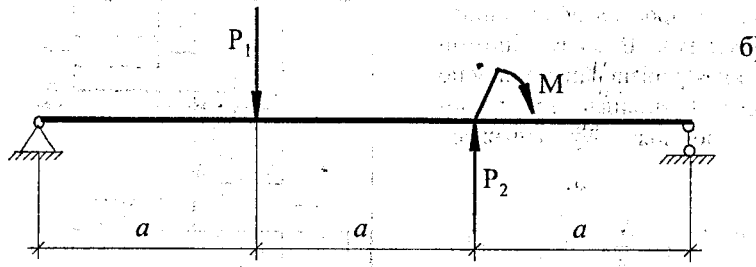
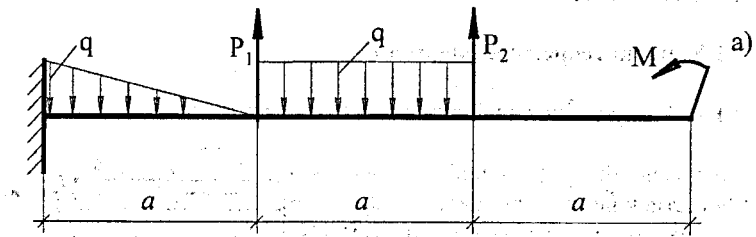


Рисунок 1.31

## 2 РОЗТЯГ (СТИСК). СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ ПРИ РОЗТЯГУ (СТИСКУ)

### 2.1 Короткі теоретичні відомості

#### 2.1.1 Напруження при осьовому розтягу (стиску)

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених до осі бруса (рисунок 2.1). Напружений стан, що спричиняється такими силами, називають простим або лінійним (одновісним). В силу гіпотези плоских перерізів напруження по перерізу розподіляються рівномірно, що може бути виражено формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де  $\sigma$  – нормальне напруження в поперечному перерізі;  
 $N$  – зусилля (нормальна сила) в цьому перерізі;  
 $A$  – площа перерізу.

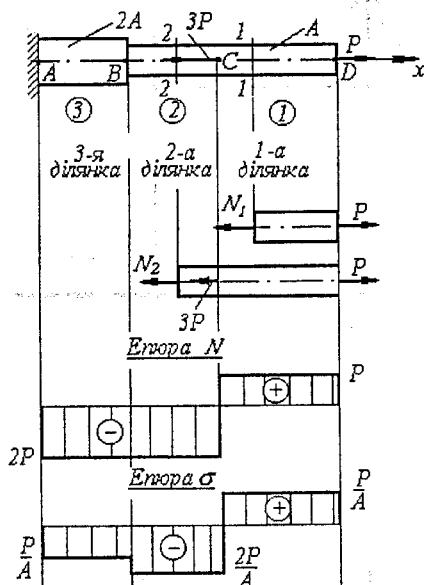


Рисунок 2.1

#### 2.1.2 Деформації при осьовому розтягу (стиску)

Уявимо прямий брус сталого поперечного перерізу  $A_0$  і довжиною  $l_0$  (рисунок 2.2). Під дією сили  $P$  брус видовжиться на деяку величину  $\Delta l$

$$\Delta l = l - l_0, \quad (2.2)$$

яку називають абсолютним видовженням.

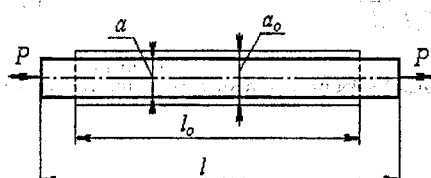
При розтяганні бруса його поперечні розміри зменшуються. При цьому абсолютна поперечна деформація дорівнюватиме

$$\Delta a = a - a_0. \quad (2.3)$$

Відношення абсолютного видовження  $\Delta l$  до початкової довжини  $l_0$  називають відносним видовженням і позначають  $\epsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.4)$$

Аналогічно, відносна поперечна деформація дорівнює



$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} \quad (2.5)$$

Зв'язок між відносною поперечною і відносною поздовжньою деформаціями виражається формулою

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon, \quad (2.6)$$

де  $\mu$  – безрозмірний коефіцієнт поперечної деформації – коефіцієнт Пуассона. Знак “мінус” у формулі (2.6) говорить про те, що деформації  $\varepsilon'$  і  $\varepsilon$  мають різні знаки, а коефіцієнт Пуассона визначається за формулою

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.7)$$

Величина  $\mu$  для різних матеріалів неоднакова: так, для сталі  $\mu=0.25-0.3$ , для каучуку  $\mu=0.47$ . Значення  $\mu$  для різних матеріалів приводяться в довідниках.

### 2.1.3 Закон Гука при розтягу (стиску)

Напруження і деформації розтягу і стиску пов'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, за ім'ям англійського фізика Роберта Гука (1635–1703), що встановив цей закон. Закон Гука справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: нормальне напруження прямо пропорційне відносному видовженню або укороченню

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (2.8)$$

Коефіцієнт пропорційності  $E$  характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску і називається модулем поздовжньої пружності, модулем пружності першого роду, модулем Юнга. Для сталі  $E = (1,8...2,2) \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = (1,8...2,2) \cdot 10^{11} \text{ Па} = (1,8...2,2) \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

З врахуванням (2.1) і (2.4) отримаємо другий закон Гука у формі

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.9)$$

За формулою (2.9) можна знайти деформацію ділянки стержня довжиною  $l$ , якщо в межах цієї ділянки  $N$  і  $A$  сталі величини.

Повна деформація стержня, який має  $n$  ділянок дорівнює

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (2.10)$$

Якщо нормальна сила  $N$  і площа перерізу  $A$  в межах ділянки  $l$  є змінними величинами, то

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x) dx}{EA(x)}. \quad (2.11)$$

Величина  $EA$  називається жорсткістю перерізу, а  $EA/l$  – жорсткістю бруса. Чим більша площа  $A$  і менша довжина  $l$  бруса, тим більша його жорсткість.

#### 2.1.4 Статично невизначувані задачі

Пружна система (конструкція) є статично невизначуваною, якщо зусилля в її елементах не можуть бути знайдені тільки із рівнянь статички. Такі конструкції найбільш широко розповсюджені як більш жорсткі, надійні і економічні в порівнянні зі статично визначуваними.

Ступінь статичної невизначуваності системи визначається надлишком загального числа невідомих реакцій зовнішніх зв'язків і внутрішніх зусиль по відношенню до числа незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи. Ці “зайві” (в розумінні забезпечення рівноваги системи і її геометричної незмінності) зв'язки накладають додаткові обмеження на переміщення тих перерізів, біля яких вони накладені.

Визначення всіх невідомих сил, тобто розкриття статичної невизначуваності, можливе тільки шляхом складання рівнянь, що доповнюють число рівнянь статички до числа невідомих. Ці додаткові рівняння відображають особливості геометричних зв'язків, накладених на деформовану систему. Вони можуть бути складені за допомогою уявлення картини переміщень в конструкції, при її деформуванні і тому їх називають рівняннями сумісності переміщень.

Методи розрахунку статично невизначуваних систем підрозділяються в залежності від того, що приймається при розв'язанні задачі за основні невідомі.

У разі, коли основними шуканими невідомими є зусилля в “зайвих” зв'язках системи, метод носить назву методу сил. Якщо основними невідомими є деформації або переміщення в системі, то розрахунок ведуть за так званим методом переміщень. Тепер існує досить великий різновид цих

основних і змішаних методів.

Розв'язуючи рівняння переміщень сумісно з рівняннями статички, можна визначити невідомі зусилля в елементах системи. Причому, якщо система з жорсткими зв'язками, то рівняння сумісності переміщень утворюють самостійну систему, а її розв'язання дає значення зайвих невідомих. Якщо система має пружні зв'язки, то необхідно розв'язувати сумісно рівняння переміщень і статички.

Розрахунки рекомендується проводити в такій послідовності:

- записати незалежні рівняння статички та встановити ступінь статичної невизначуваності;
- скласти рівняння сумісності переміщень (число рівнянь сумісності переміщень повинно дорівнювати ступеню статичної невизначуваності системи);
- замінити деформації через зусилля за законом Гюка (2.9);
- розв'язати отриману систему рівнянь, визначити внутрішні зусилля;
- розрахувати напруження або площі поперечних перерізів стержнів в залежності від виду задачі.

### 2.1.5 Розрахунки на міцність за допустимими напруженнями

При розрахунках за допустимими напруженнями міцність конструкції або її елементів буде забезпечена, якщо максимальне напруження  $\sigma_{max}$  не перевищує допустимого, тобто виконується умова

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad \sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.12)$$

Якщо матеріал по різному чинить опір розтягання і стисканню (характерно для крихких матеріалів), то найбільші розтягувальні напруження не повинні перевищувати допустимих напружень на розтягання  $[\sigma]_p$ , а найбільші стискувальні напруження – допустимих напружень на стискання  $[\sigma]_c$ . Формула (2.12) дає можливість розв'язувати низку інженерних задач.

Проектний розрахунок – підбір перерізу елементу конструкції при відомих силах, що діють на елемент

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.13)$$

Перевірний розрахунок, при якому визначають напруження і порівнюють його з допустимим

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.14)$$

При перевірному розрахунку, як правило, визначають коефіцієнт запасу міцності, з яким працює елемент.

Визначення допустимого навантаження на існуючий елемент

$$[N] = [\sigma] \cdot A. \quad (2.15)$$

Умови міцності вимагають, щоб напруження, які виникають в елементах конструкцій, не перевищували допустимих. Допустимі напруження  $[\sigma]$  становлять деяку частину від небезпечних напружень. Для пластичних матеріалів таким небезпечним напруженням є границя текучості  $\sigma_m$ , при якій деформації, що швидко зростають, перешкоджають нормальній експлуатації конструкції. Для крихких матеріалів небезпечним напруженням є границя міцності  $\sigma_g$ , при якій настає руйнування матеріалу. Допустиме напруження визначають за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n}, \quad (2.20)$$

де  $\sigma_n = \sigma_m$  – для пластичних матеріалів і  $\sigma_n = \sigma_g$  – для крихких,  $n$  – коефіцієнт запасу міцності при дії на конструкцію статичного навантаження встановлюється в межах  $n = 1,5 \dots 2$ , для крихких –  $n = 3 \dots 5$ , а іноді і вище (наприклад, для каменів природних і штучних він може бути в межах  $n = 10 \dots 30$ ). Коефіцієнт запасу міцності залежить також від умов роботи конструкції, точності розрахунків напружень, характеру навантажень.

## 2.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

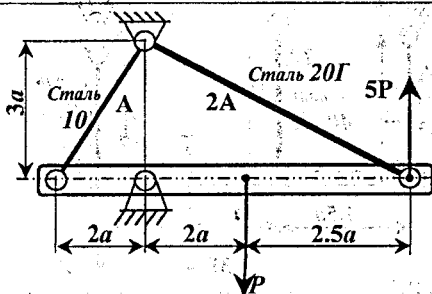
### Задача 2. Розрахунок статично невизначуваних систем при розтягу (стиску) із пружними зв'язками

Абсолютно жорстка балка підтримується в горизонтальному положенні пружними сталевими стержнями згідно схеми (рис. 2.3 – 2.6). Обчислити необхідну площу перерізів цих стержнів при заданому їх співвідношенні.

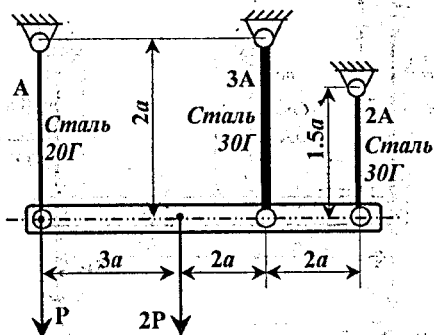
Матеріали стержнів та співвідношення площ вказані на рисунку. Інші дані для розрахунку взяти з таблиці.

Таблиця 2.1

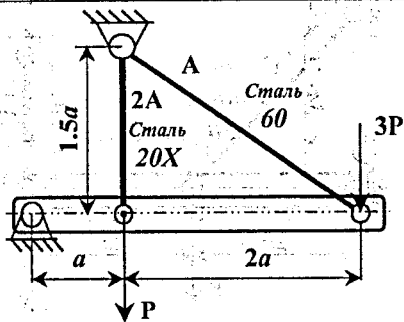
Варіант	$P_1$ , кН	$a$ , см
0	10	90
1	12	85
2	14	80
3	16	75
4	18	70
5	20	65
6	22	60
7	24	55
8	25	70
9	11	50



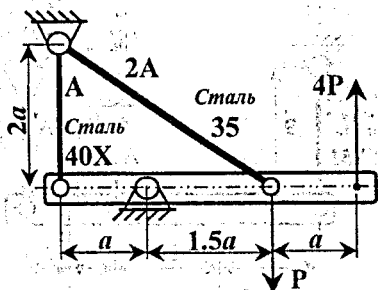
00



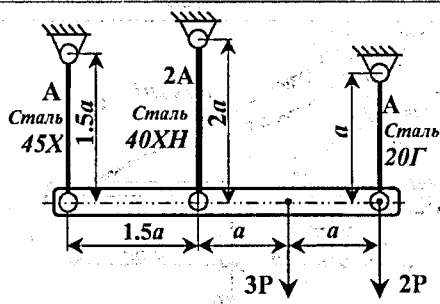
01



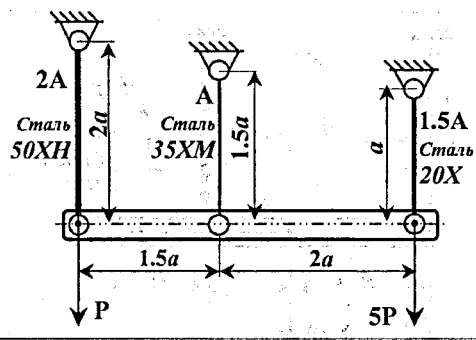
02



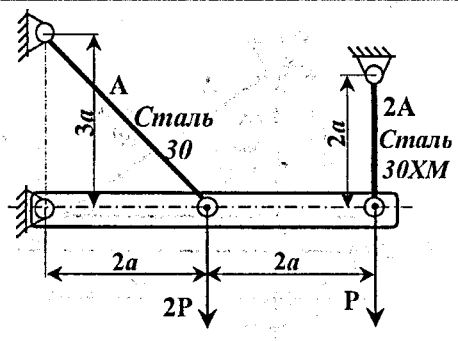
03



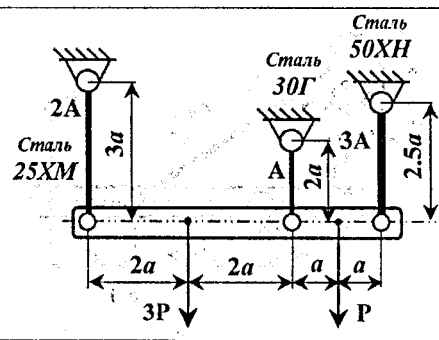
04



05

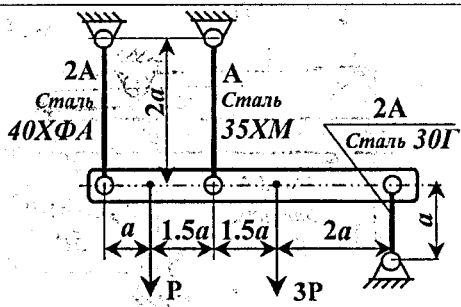


06

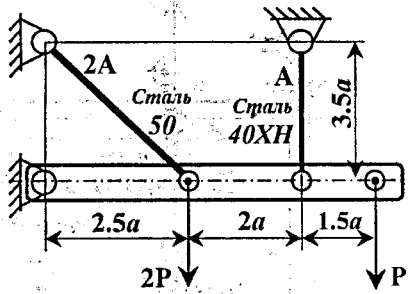


07

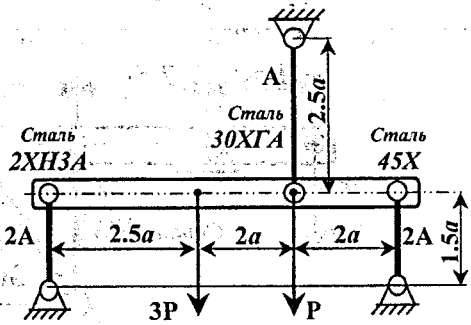
08



09



10



11

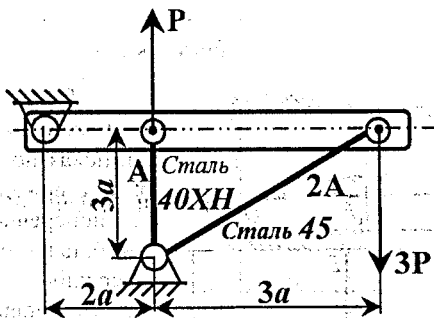
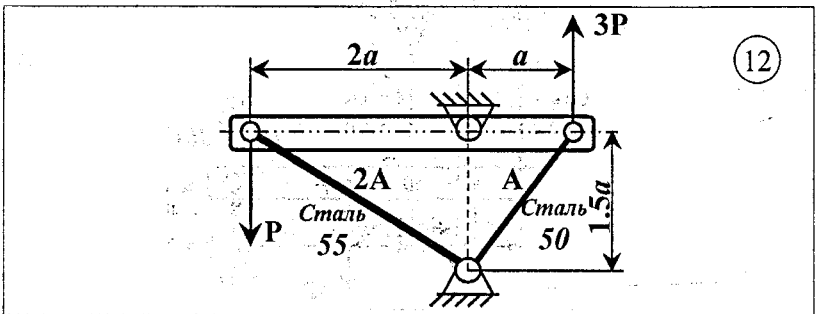
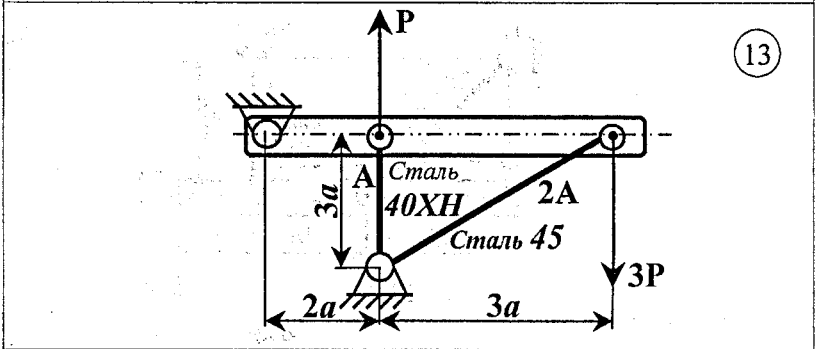


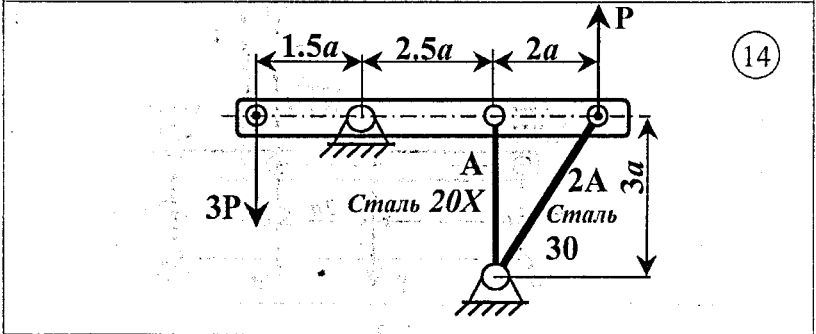
Рисунок 2.5



12



13



14

Рисунок 2.6

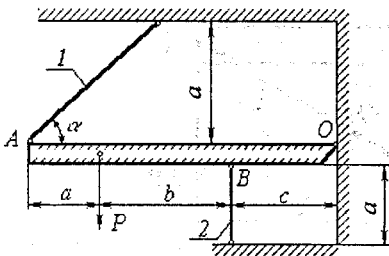


Рисунок 2.7

Приклад А. Жорстка балка підтримується двома стержнями, як показано на рисунку 2.7. Перший стержень повинен мати площу поперечного перерізу в два рази більшу ніж другий; матеріал стержнів – сталь 30Г. Визначити площу поперечного перерізу стержнів.

Дано:  $a=1$  м;  $b=2$  м;  $c=1,5$  м;  $\alpha=45^\circ$ ;  $P=120$  кН;  $A_1=2A_2$ ;  $E_1=E_2=E$ .

Визначити:  $A_1$ -?;  $A_2$ -?

*Розв'язування.* В задачі потрібно визначити площі перерізів стержнів, тобто провести проектний розрахунок. Оскільки стержні системи працюють на розтягання–стискання, то проектний розрахунок виконується за формулою (2.13), а розв'язування задачі зводиться до визначення нормальних сил в поперечних перерізах стержнів 1 і 2.

### Статична сторона задачі

Використаємо метод перерізів і переріжемо стержні поперечними перерізами, відкинемо верхню частину стержня 1 і нижню частину стержня 2, замінимо їх дію нормальними силами  $N_1$  та  $N_2$ . Використовуючи формальний підхід, припустимо, що обидва стержні розтягнуті, тобто направимо  $N_1$  та  $N_2$  від перерізів. Відкинемо також шарнір і замінимо реакціями  $R_x$  та  $R_y$  (рисунок 2.8, а).

Для визначення чотирьох невідомих реакцій  $N_1, N_2, R_x, R_y$  ми можемо скласти лише 3 незалежних рівняння статички, як для плоскої непаралельної системи сил, тобто

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_O = 0.$$

Отже, система один раз статично невизначувана.

Перші два рівняння статички крім  $N_1$  та  $N_2$  містять невідомі реакції  $R_x$  та  $R_y$ , визначати які немає необхідності. Отже, відносно невідомих зусиль  $N_1$  та  $N_2$  ми маємо лише одне рівняння:

$$\sum M_m = P(b+c) - N_1(a+b+c)\sin 45^\circ + N_2 \cdot c = 0. \quad (2.21)$$

Рівняння (2.21) містить дві невідомі величини. Для однозначного розв'язання задачі необхідно знайти ще одне рівняння, що пов'язує  $N_1$  та  $N_2$ . Для цього необхідно скласти рівняння сумісності переміщень.

### Геометрична сторона задачі

Розглянемо систему в деформованому стані.

За умовою задачі балка абсолютно жорстка, стержні 1 та 2 – пружні. Нехай стержень 1 в результаті дії зовнішніх сил на систему видовжиться на величину  $\Delta l_1$ .

Методом засічок визначимо положення балки  $OB'A'$ , яке відповідає цьому видовженню (див рис. 2.8, б). Тоді стержень 2 набуде деформації стиску величиною  $-\Delta l_2$ , тобто  $BB' = -\Delta l_2$ .

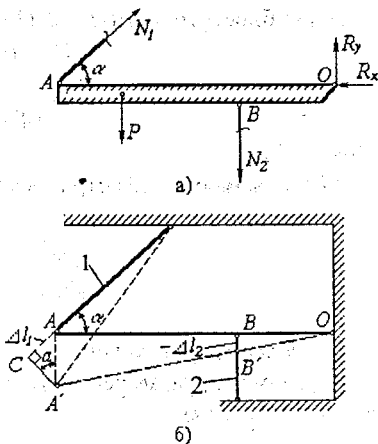


Рисунок 2.8

*Примітка.* Балка закріплена в точці О шарнірно-нерухомою опорою, тому вона може повернутись тільки за або проти годинникової стрілки відносно точки О. Кут повороту балки нескінченно малий, тому вважається, що точки А та В в процесі деформації системи рухаються по вертикалі, катет АС в прямокутному трикутнику  $\Delta ACA'$  відповідає геометрично величині  $\Delta l_1$ , а кут при вершині А' дорівнюватиме куту  $\alpha$  (див. рис. 2.8):

$$\begin{aligned} \text{Із трикутника } \Delta ACA' \text{ маємо } AC &= \Delta l_1, \\ AA' &= AC / \sin 45^\circ = \Delta l_1 / \sin 45^\circ. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Із подібності трикутників  $\Delta OBB' \sim \Delta OAA'$  випливає

$$\begin{aligned} \frac{AA'}{BB'} &= \frac{a+b+c}{c} = \frac{4,5}{1,5} = 3, \\ AA' &= 3BB', \end{aligned}$$

де  $BB' = -\Delta l_2$ .

З врахуванням (2.22) отримаємо рівняння сумісності переміщень

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ} = -3\Delta l_2. \quad (2.23)$$

*Фізична сторона задачі*

Виразимо  $\Delta l_1$  та  $\Delta l_2$  через зусилля в стержнях  $N_1$  та  $N_2$  у відповідності до закону Гука (2.9)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}$$

Враховуючи, що  $A_1 = 2A_2$ ,  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $l_1 = \frac{a}{\sin 45^\circ}$ , підставимо вирази для  $\Delta l_1$  та  $\Delta l_2$  в рівняння (2.23)

$$\begin{aligned} \frac{N_1 \cdot a \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot 2 \cdot A_2 \cdot 2} &= -\frac{N_2 \cdot a}{E \cdot A_2}, \\ N_1 &= -3N_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Сумісним розв'язуванням рівнянь (2.21) та (2.25) визначасмо  $N_1$  та  $N_2$

$$P(b+c) + 3N_2(a+b+c)\cos 45^\circ + N_2 c = 0,$$

$$P(b+c) + N_2[3(a+b+c)\cos 45^\circ + c] = 0,$$

$$N_2 = \frac{-P(b+c)}{3(a+b+c)\cos 45^\circ + c} = \frac{-120 \cdot 10^3 \cdot 3,5}{3 \cdot 4,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1,5} = -38 \cdot 10^3 \text{ Н},$$

$$N_1 = -3N_2 = 114 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Отримані знаки зусиль говорять про те, що при навантаженні системи силою  $P$  стержень 1 розтягується, а стержень 2 стискається. Порівняння величин  $N_1$  та  $N_2$  показує, що перший стержень більш навантажений.

### Проектний розрахунок стержнів

Визначаємо допустимі напруження. Допустиме напруження для сталі 30Г (пластичний матеріал) дорівнює (формула 2.20)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sigma_m}{n} = \frac{320}{2} = 160 \text{ МПа,}$$

де  $\sigma_n = \sigma_m = 320$  МПа – границя текучості сталі 30Г (див. додаток Ж),  $n$  – коефіцієнт запасу міцності при дії на конструкцію статичного навантаження  $n = 1,5 \dots 2$ , приймаємо  $n = 2$ .

Таким чином  $[\sigma]_1 = [\sigma]_2 = 160$  МПа.

Визначаємо необхідні площі  $A_1, A_2$

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]_1} = \frac{114000}{160 \cdot 10^6} = 7,12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 7,12 \text{ см}^2, \quad (2.26)$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]_2} = \frac{38000}{160 \cdot 10^6} = 2,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,38 \text{ см}^2. \quad (2.27)$$

За умовою задачі має виконуватись співвідношення  $A_1 = 2A_2$ . Нехай  $A_1 = S$ , тоді

$A_2 = S/2 \geq 2,38$ , (з нерівності 2.27),

звідки  $S \geq 4,76 \text{ см}^2$ ,

$A_1 = S \geq 7,12 \text{ см}^2$ , (з нерівності 2.26):

Остаточно приймаємо  $S = A_1 = 7,2 \text{ см}^2$ , тоді  $A_2 = \frac{A_1}{2} = 3,6 \text{ см}^2$ .

Розрахуємо робочі напруження в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{114000}{7,2 \cdot 10^{-4}} = 158 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 158 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа,}$$

стержень 1 буде працювати із коефіцієнтом запасу  $n = \frac{\sigma_m}{\sigma_1} = \frac{320}{158} = 2,03$ .

$$\sigma_2 = \frac{|N_2|}{A_2} = \frac{38000}{3,6 \cdot 10^{-4}} = 105,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 105,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

стержень 2 буде працювати із коефіцієнтом запасу  $n = \frac{\sigma_m}{\sigma_2} = \frac{320}{105,5} = 3,03$ .

Таким чином, стержень 2 буде недовантажений при прийнятому коефіцієнті запасу, що є нерационально з точки зору економії матеріалу. Але надійність та жорсткість конструкції в цілому неодмінно збільшиться.

Відповідь:  $A_1 = 7,2 \text{ см}^2, A_2 = 3,6 \text{ см}^2$ .

Приклад Б. Скласти рівняння сумісності деформацій для статично невизначуваної системи, приведеної на рис. 2.9.  $a = 1$  м,  $b = 2$  м.

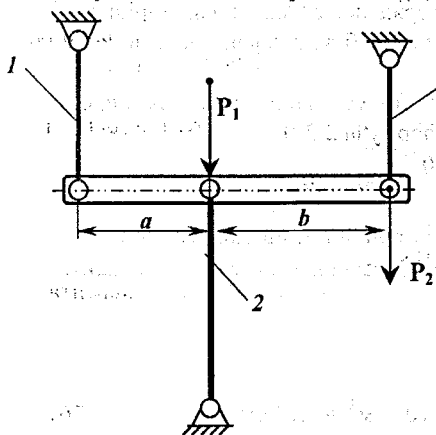


Рисунок 2.9

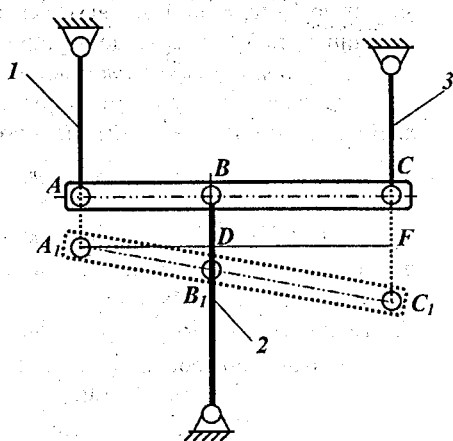


Рисунок 2.10

*Розв'язування.*

Система, показана на рис. 2.9 один раз статично невизначувана. На балку діють зовнішні сили  $P_1$  та  $P_2$  та сили реакцій стержнів  $N_1$ ,  $N_2$  та  $N_3$ . Балка знаходиться під дією системи плоскопаралельних сил, тому статична сторона задачі вичерпується записом двох рівнянь, наприклад

$$\sum Y = 0, \sum M_A = 0.$$

Отже, необхідно скласти лише одне рівняння сумісності деформацій.

Розглянемо систему в деформованому стані, що відповідає кінематично можливому переміщенню (рис. 2.10).

За умовою задачі балка абсолютно жорстка, стержні 1, 2 та 3 – пружні. Нехай стержень 1 в результаті дії зовнішніх сил на систему видовжиться на величину  $\Delta l_1$ , а стержень 3 – видовжиться на величину  $\Delta l_3$ .

Методом засічок визначимо положення балки  $OB_1A_1$ , яке відповідає цьому видовженню (див рис. 2.8, б). Тоді стержень 2 набуде деформації стиску величиною  $-\Delta l_2$ , тобто  $BB_1 = -\Delta l_2$ .

*Примітка.* Кінематично можливе переміщення балки складатиметься із двох переміщень: балка може опуститись (піднятись) на деяку відстань та повернутись на певний кут. Обидва переміщення можна вважати нескінченно малими в порівнянні із вихідними розмірами стержнів та балки. Тому вважається, що точки А, В та С в процесі деформації системи рухаються по вертикалі.

Опустимо перпендикуляр із точки  $A_1$  на відрізок  $CC_1$ . В результаті побудови отримаємо два прямокутні трикутники  $\Delta A_1DB_1$  та  $\Delta A_1FC_1$ .

Із подібності трикутників  $\Delta A_1DB_1 \sim \Delta A_1FC_1$  випливає

$$\frac{FC_1}{DB_1} = \frac{AC}{AD} = \frac{a+b}{a} = \frac{3}{1} = 3. \quad (2.28)$$

Виразимо катети трикутників через фізичні величини, яким вони відповідають

$$DB_1 = BB_1 - BD = BB_1 - AA_1 = -\Delta l_2 - \Delta l_1,$$

$$FC_1 = CC_1 - CF = CC_1 - AA_1 = \Delta l_3 - \Delta l_1,$$

$$\text{де } AA_1 = \Delta l_1, BB_1 = -\Delta l_2, CC_1 = \Delta l_3.$$

З врахуванням (2.28) отримаємо рівняння сумісності переміщень

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{-\Delta l_2 - \Delta l_1} = 3,$$

остаточно маємо

$$2\Delta l_1 + 3\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0. \quad (2.29)$$

**Відповідь:**  $2\Delta l_1 + 3\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$ .



Рис. 2.10

## 3 НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН В ТОЧЦІ

### 3.1 Короткі теоретичні відомості

#### 3.1.1 Поняття про напружений стан

Розглянемо напруження в будь-якій точці  $K$  тіла, що деформується (рисунок 3.1, а). Величина повного напруження, яке діє на довільній площадці, проведеній через точку  $K$ , залежить від орієнтації площадки. Напруження, які діють на незліченній кількості по-різному орієнтованих площадок, що проходять через розглядувану точку, характеризують напружений стан у точці. Метод вивчення напруженого стану в точці такий: вирізають елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рисунок 3.1, б) і визначають напруження на його гранях. Враховуючи малість розмірів паралелепіпеда і те, що всі його грані є площадками, які проходять через точку  $K$ , то напруження по гранях паралелепіпеда можуть розглядатися як напруження, що діють у точці  $K$ .

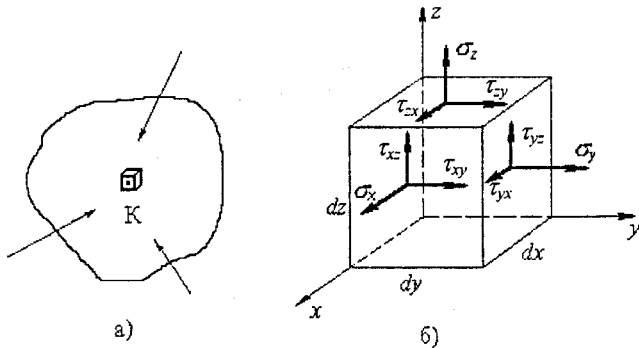


Рисунок 3.1

Повні напруження, які діють по кожній грані, розкладаємо на три складові – на нормальне напруження  $\sigma$  і дотичні  $\tau$ , як показано на рисунку 3.1, б. На невидимих гранях елемента виникають відповідно такі самі за величиною, але протилежного напрямку напруження. Перший індекс у дотичного напруження вказує напрямок напруження, а другий – напрямок нормалі до площини перерізу. Нормальні напруження будемо позначати індексом осі, перпендикулярної до площадки.

Оскільки вирізаний елемент знаходиться в рівновазі, то склавши суму моментів усіх сил відносно осі, яка геометрично збігається з напруженням  $\sigma_x$ , маємо

$$\sum M_{\sigma_x} = \tau_{yz} dx \cdot dy \cdot dz - \tau_{zy} dx \cdot dy \cdot dz = 0,$$

звідки отримуємо  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ . З рівнянь моментів відносно осей  $y$  і  $z$  маємо

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}. \quad (3.1)$$

Отже, у двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження перпендикулярні до спільного ребра і рівні за величиною. У цьому полягає закон парності дотичних напружень.

Таким чином, напружений стан в будь-якій точці напруженого тіла, яке деформується, визначається шістьма складовими  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , які діють на трьох взаємно перпендикулярних площадках. Знаючи ці складові, можна знайти напруження в будь-якій площадці, проведеної через дану точку.

В курсі теорії пружності доводиться, що через незліченну кількість площадок, які можна провести через довільну точку напруженого тіла, завжди можна знайти такі три взаємно перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Такі площадки називаються головними площадками, а діючі на них нормальні напруження – головними напруженнями. Головні напруження позначають  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , при цьому повинна виконуватись умова  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (за алгебраїчною величиною).

Якщо в будь-якій точці навантаженого тіла усі три напруження відрізняються від нуля, то такий напружений стан називають об'ємним або триосним. Якщо з трьох головних напружень одне дорівнює нулю, то такий напружений стан називається плоским або двоосним. Напружений стан, при якому два головних (з трьох) напруження дорівнюють нулю, називається лінійним або одноосним. Прикладом лінійного напруженого стану є звичайний центральний розтяг (стиск) стержня.

Аналіз напруженого стану в точці необхідний в першу чергу для розрахунків на міцність в загальному випадку навантаження.

### 3.1.2 Плоский напружений стан

Оскільки при плоскому напруженому стані дві грані елементарного паралелепіпеда вільні від напружень, то для спрощення міркувань сумістимо ці грані з площиною рисунку (рисунок 3.2).

Якщо напруження  $\sigma_x, \sigma_y$  і  $\tau_{xy}$  відомі, то можна визначити напруження на довільній площадці, повернутій на кут  $\alpha$  відносно площадки, на якій діє напруження  $\sigma_x$  (рисунок 3.2)

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (3.3)$$

$$\tau_{x_1y_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3.4)$$

Із (3.2) і (3.3) випливає, що

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1},$$

тобто сума нормальних напружень, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках величина стала.

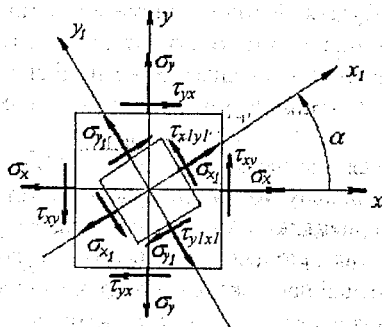


Рисунок 3.2

*Правила знаків.* Кут  $\alpha$  вважається додатним, якщо він відкладається проти руху годинникової стрілки. Розтягувальні нормальні напруження  $\sigma$  будемо вважати додатними, а стискувальні – від’ємними.

Дотичні напруження вважатимемо додатними  $\tau > 0$ , коли вони будуть намагатись обертати елемент відносно його центра за годинниковою стрілкою, а від’ємними – проти. Тоді закон парності дотич-

них напружень набуде вигляду

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy}. \quad (3.5)$$

### 3.1.3 Головні площадки і головні напруження

Знайдемо положення головних площадок. На головних площадках дотичні напруження дорівнюють нулю, тому прирівнявши вираз (3.3) до нуля, знайдемо

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

звідки

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.6)$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}.$$

Формула (3.6) дає два значення кута  $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}$  і  $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ , які і визначають положення двох головних площадок. Якщо  $\sigma_x > \sigma_y$  і  $\tau_{xy} > 0$  то  $\alpha_0$  буде додатним (рисунок 3.3).

Головні напруження можна визначити за формулами (3.2) і (3.4) якщо замість  $\alpha$  підставити  $\alpha_0$  і  $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ , знайдені за формулою (3.6). Після нескладних перетворень одержимо

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$
(3.7)

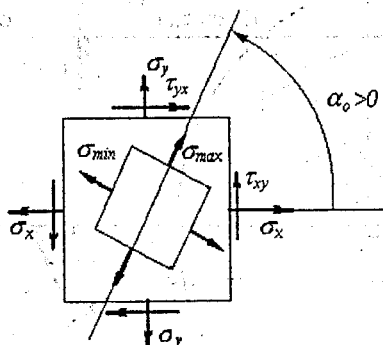


Рисунок 3.3

Нормальні напруження на цих площадках

Легко показати, що головні напруження мають екстремальні значення: одне з них є найбільшим з усіх нормальних напружень, які діють на численних площадках, що проходять через дану точку, а друге напруження – найменшим.

На площадках, нахилених під кутом  $45^\circ$  до головних, діють екстремальні дотичні напруження, які рівні

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (3.8)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (3.9)$$

### 3.1.4 Круг напружень

Залежності між складовими напружень та головними напруженнями в даній точці можна виразити графічно за допомогою круга напружень, яке також називається кругом Мора. Теоретичні передумови графічного розв'язування ґрунтуються на залежностях (3.2 – 3.4), які являють собою узагальнені параметричні рівняння кола в системі координат  $\sigma$ - $\tau$ . Роль параметра відіграє кут  $\alpha$ , що встановлює відповідність між точкою кола та січною площадкою.

Круг Мора можна побудувати при відомих напруженнях на гранях елемента (рис. 3.4). Нехай  $D_x$  – точка, положення якої в системі координат  $\sigma$ - $\tau$  визначає напруження на площадці, перпендикулярній осі  $x$ , тоді  $D_x(\sigma_x; \tau_{xy})$ , а  $D_y(\sigma_y; \tau_{yx})$ . З врахуванням закону парності дотичних напружень у вигляді (3.5) ці точки лежать на однаковій відстані від осі  $\sigma$  по різні сторони. Центр круга Мора завжди лежить на осі  $\sigma$ , тому, для його побудови, з'єднаємо точки  $D_x(\sigma_x; \tau_{xy})$ , а  $D_y(\sigma_y; \tau_{yx})$ . Точка перетину відрізка  $D_x D_y$  з віссю  $\sigma$  є центром круга Мора. Проводимо коло, що проходить через точки  $D_x$  та  $D_y$ .

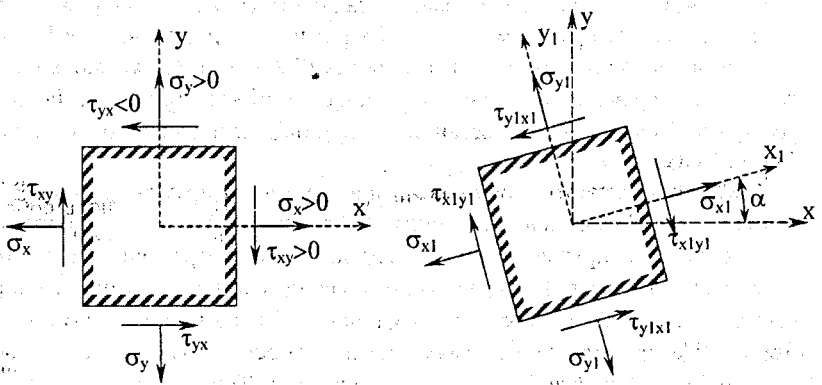
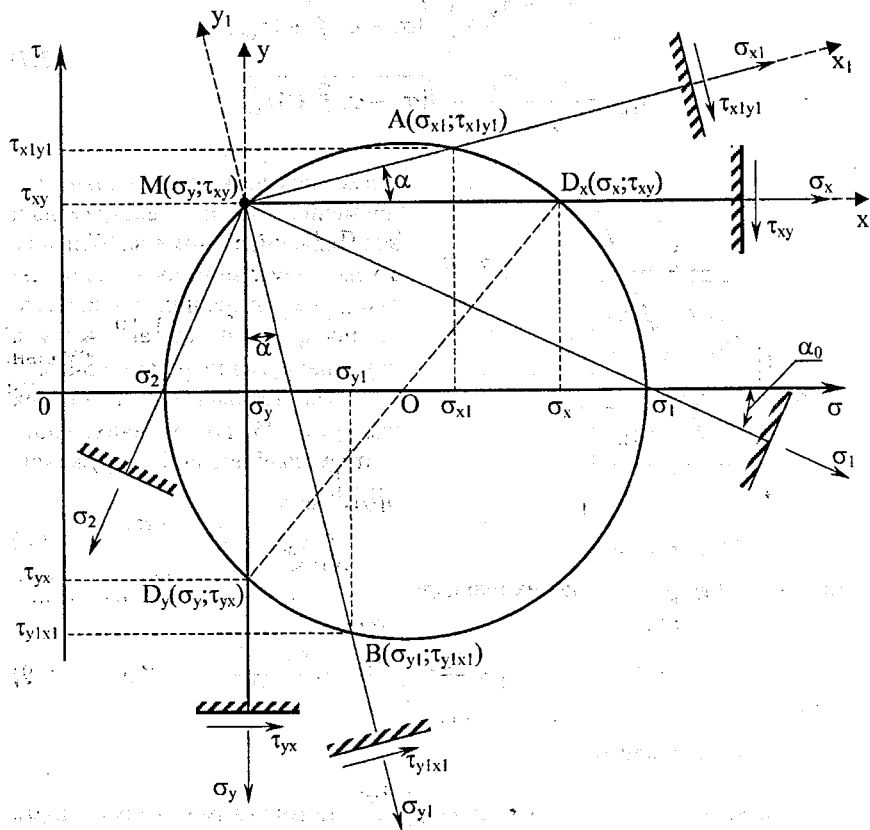


Рисунок 3.4

Поліс круга Мора визначає початкове положення елемента  $\alpha = 0$ . Поліс при прийнятих позначеннях відповідає точці з координатами  $M(\sigma_y; \tau_{xy})$ . Проведемо промені з точки  $M$  в точки  $D_x$  та  $D_y$ . Площинки, перпендикулярні цим променям (заштриховані), утворюють початкове положення елемента.

Визначення головних напружень за допомогою круга Мора.

Головні напруження набувають екстремальних значень, тобто одне з них алгебраїчно найбільше, інше – найменше. Напружений стан в точці визначають тільки точки круга Мора, тому найбільше нормальне напруження відповідає крайній правій точці ( $\sigma_1$ ), а найменше – крайній лівій ( $\sigma_2$  або  $\sigma_3$ ). Це – діаметрально протилежні точки, що лежать на осі  $\sigma$ . Положення першої головної площинки визначається кутом, утвореним променем, що проходить через точку ( $\sigma_1$ ) та віссю  $\sigma$ . Аналогічно визначається положення другої головної площинки, яка завжди повернута на  $90^\circ$  відносно першої.

Визначення напружень при повороті площинки за допомогою круга Мора.

Проведемо через поліс  $M$  пряму, що утворює кут  $\alpha$  з віссю  $\sigma$ . Кут  $\alpha$  вважається додатним, якщо він відкладається проти руху годинникової стрілки. Ця пряма перетинає круг в деякій точці  $A$ . Координати точки  $A$  ( $\sigma_{x1}; \tau_{x1y1}$ ) визначають напруження на площинці при повороті на кут  $\alpha$  до заданої, на якій діють напруження  $D_x(\sigma_x; \tau_{xy})$ .

Проведемо через поліс  $M$  пряму, що перпендикулярна прямій, яка утворює кут  $\alpha$  з віссю  $\sigma$ . Перетин прямої з колом дасть координати точки  $B$  ( $\sigma_{y1}; \tau_{y1x1}$ ), які визначають напруження на площинці при повороті на кут  $\alpha$  до заданої, на якій діють напруження  $D_y(\sigma_y; \tau_{yx})$ .

### 3.1.5 Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації і розглядаючи питання міцності при об'ємному та плоскому напружених станах, будемо в відповідності з основними гіпотезами і припущеннями вважати, що матеріал поводить згідно з законом Гука, а деформації малі.

Зв'язок між відносними деформаціями і напруженнями при об'ємному напруженому стані має вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль зсуву.

Співвідношення (3.10) є аналітичним виразом узагальненого закону Гука для ізотропного тіла.

В головних напруженнях формули (3.10) мають вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\quad (3.11)$$

Відносна зміна об'єму елемента з точністю до величин другого порядку малості

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]. \quad (3.12)$$

### 3.1.6 Потенціальна енергія деформації

Потенціальною енергією деформації називається енергія, яка накопичується в тілі при його пружній деформації. Коли під дією зовнішнього статичного навантаження тіло деформується, точки прикладання зовнішніх сил переміщуються і потенціальна енергія положення вантажу зменшується на величину, яка чисельно дорівнює роботі, виконаній зовнішніми силами. Енергія, витрачена зовнішніми силами, не зникає, а перетворюється, в основному, в потенціальну енергію деформації тіла. Решта, незначна частина розсіюється, головним чином, в вигляді тепла за рахунок різних процесів, що проходять в матеріалі при його деформації.

Величину потенціальної енергії деформації, що припадає на одиницю об'єму тіла, називають питомою потенціальною енергією деформації і визначають за формулою

$$u = \frac{P\Delta l}{2Al} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \quad (3.13)$$

Маючи на увазі, що  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ , одержимо для питомої потенціальної енергії деформації вираз

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (3.14)$$

Для загального випадку визначення питомої потенціальної енергії деформації при об'ємному напруженому стані, якщо задані головні напруження формула має вигляд

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right], \quad (3.15)$$

При деформації елемента змінюється, як його об'єм, так і форма (із куба він перетворюється на паралелограм). В зв'язку з цим можна вважати, що повна питома потенціальна енергія деформації

$$u = u_V + u_\phi. \quad (3.16)$$

де  $u_V$  – питома потенціальна енергія зміни об'єму, тобто енергія, яка накопичується за рахунок зміни об'єму;

$u_\phi$  – питома потенціальна енергія формозміни, тобто енергія, яка накопичується внаслідок зміни форми елемента.

Безпосередньо визначити  $u_\phi$  важко, тому спочатку визначимо  $u_V$ .

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (3.17)$$

Тепер, згідно з формулою (3.16),

$$u_\phi = u - u_V.$$

Підставляючи сюди значення  $u$  і  $u_V$  із (3.15) і (3.17), після елементарних перетворень отримаємо, що

$$\begin{aligned} u_\phi &= \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Це і є шуканий вираз для питомої потенціальної енергії формозміни. В теорії пластичності часто використовують величину, від якої залежить перехід матеріалу в стан текучості, це – інтенсивність нормальних напружень, яка збігається з еквівалентним напруженням за четвертою теорією міцності

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.19)$$

тоді  $u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_i^2.$

### 3.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

#### Задача 3. Дослідження плоского напружено-деформованого стану в точці

Для заданого прямокутного елемента, що знаходиться в умовах плоского напруженого стану та навантаженого згідно з схемою (рис. 3.5 – 3.7), необхідно:

- обчислити величину і напрямок головних напружень;
- показати положення головних площин з головними напруженнями;
- обчислити величину і напрям найбільших (найменших) дотичних напружень і відповідних їм нормальних напружень, показати їх на рисунку;
- обчислити і показати на рисунку напруги на гранях елемента при послідовному повороті заданого елемента на  $30^\circ$  та  $60^\circ$  в напрямі кута  $\gamma$ ;
- обчислити коефіцієнт запасу міцності в точці, використовуючи IV (енергетичну) теорію міцності;
- обчислити величини питомої потенціальної енергії зміни форми та об'єму елемента і повну питому потенціальну енергію деформації;
- обчислити головні видовження і відносну зміну об'єму елемента;
- обчислити відносне видовження ребра АВ елемента, повернутого на кут  $\gamma$ .

На окремому аркуші А4 побудувати круг Мора та графічно перевірити розв'язок пунктів а), б), в), г).

Таблиця 3.1

Варіант	$ \sigma_x $ , МПа	$ \sigma_y $ , МПа	$ \tau $ , МПа	$\gamma$ , $^\circ$	Матеріал (сталь)
0	80	20	40	60	30
1	50	50	30	-30	45
2	20	40	50	80	20Г
3	20	60	50	45	40Х
4	30	40	60	30	30ХГСА
5	40	60	80	-60	50ХН
6	50	30	50	120	10
7	60	40	20	90	30ХН3А
8	60	30	40	20	12ХН3А
9	70	20	30	50	35ХМ

В варіантах схем, де деякі вектори напружень відсутні, вважати їх рівними нулю незалежно від приведених в таблиці значень.

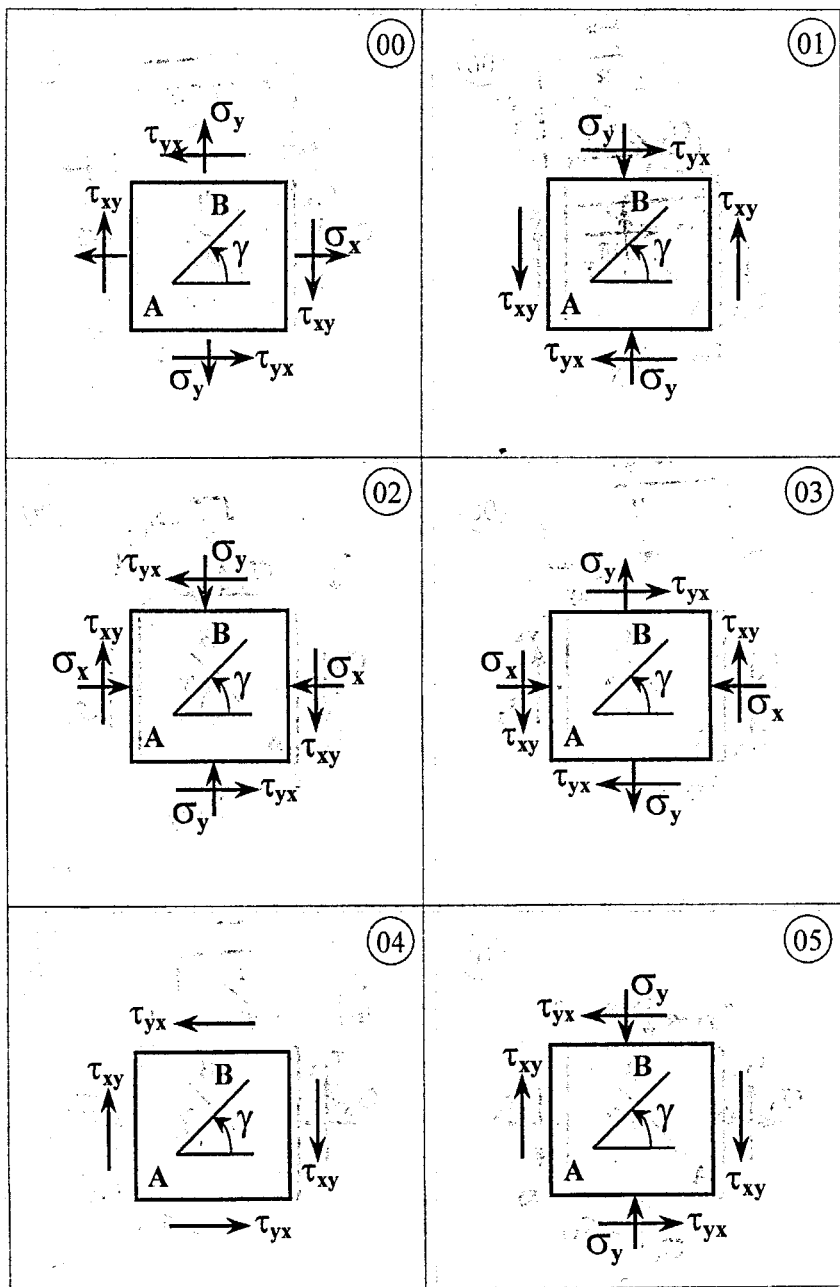
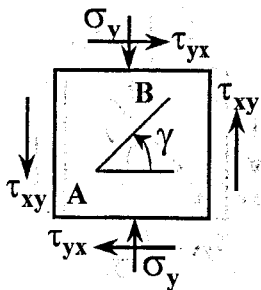
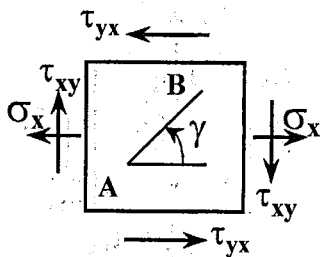


Рисунок 3.5

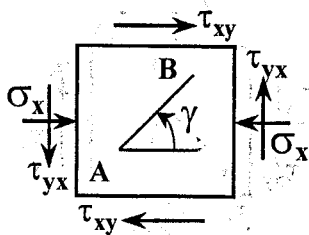
06



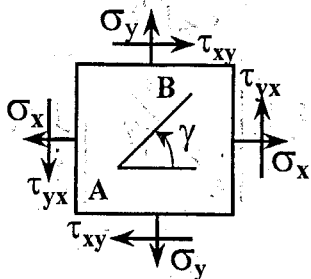
07



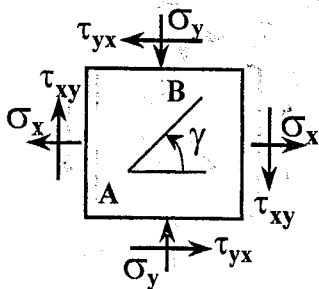
08



09



10



11

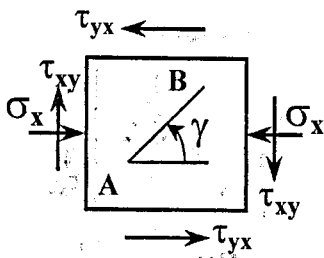
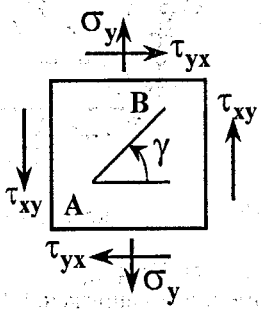
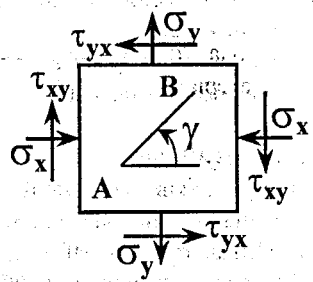


Рисунок 3.6

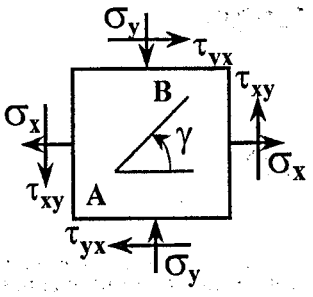
12



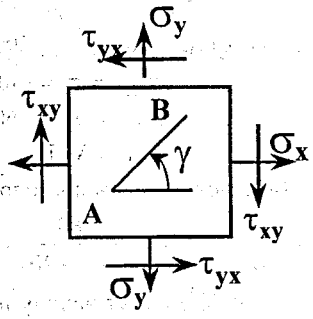
13



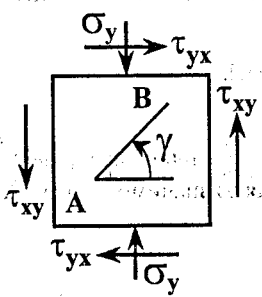
14



15



16



17

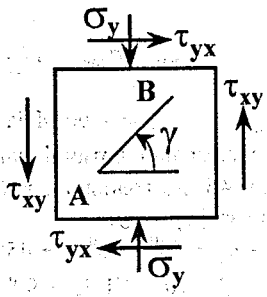


Рисунок 3.7

*Приклад.* Дослідити плоский напружений стан прямокутного елемента в точці згідно з приведеним в задачі 3 порядком виконання. Елемент навантажений згідно схеми, приведеної на рисунку 3.8.

$\sigma_x = 100$  МПа,  $\sigma_y = -20$  МПа,  $\tau_{xy} = 80$  МПа,  
 $\gamma = 45^\circ$ , матеріал – сталь 20.

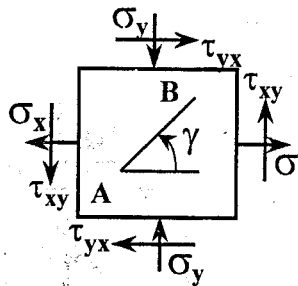


Рисунок 3.8

### Розв'язування

Вибір знаків напружень (користуємось правилом знаків – див рис. 3.2, 3.4)

$\sigma_x = +100$  МПа,  $\sigma_y = -20$  МПа,  $\tau_{yx} = 80$  МПа,  $\tau_{xy} = -80$  МПа.

Визначення головних (найбільших та найменших напружень) (3.7)

$$\begin{aligned} \sigma_{\max/\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{100 + (-20)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(100 - (-20))^2 + 4(-80)^2} = 40 \pm 100 (\text{МПа}), \end{aligned}$$

Звідки знаходимо, з урахуванням умови  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 140 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = -60 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ МПа}.$$

Визначення положень головних площадок

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = -\frac{-80}{140 - (-20)} = 0,5,$$

звідки  $\alpha_0 = 26^\circ 33'$  (кут нахилу площадки, на якій діє  $\sigma_1$  до площадки, на якій діє  $\sigma_x$ ).

Положення другої головної площадки  $\alpha_0' = \alpha_0 + 90^\circ = 26^\circ 33' + 90^\circ = 116^\circ 33'$ .

Визначення максимальних та мінімальних дотичних напружень (3.8)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{140 - (-60)}{2} = 100 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\min} = -\tau_{\max} = -100 \text{ МПа}.$$

Максимальні дотичні напруження діють на площадках, нахилених під кутом  $45^\circ$  до головних, тому їх положення визначимо кутом  $\beta$ , який знайдемо за формулою

$$\beta = \alpha_0 + 45^\circ = 26^\circ 33' + 45^\circ = 71^\circ 33';$$

$$\beta' = \beta + 90^\circ = 71^\circ 33' + 90^\circ = 161^\circ 33'.$$

$\beta$  – кут нахилу площадки, на якій діє  $\tau_{\max}$  до площадки, на якій діє  $\sigma_x$ ,

$\beta'$  – кут нахилу площадки, на якій діє  $\tau_{\min}$  до площадки, на якій діє  $\sigma_x$ .

Нормальні напруження на цих площадках, де діють  $\tau_{\max}$  ( $\tau_{\min}$ ) рівні між собою, а їхня величина дорівнює гідростатичному тиску в точці

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{140 + (-60)}{2} = 40 \text{ МПа.}$$

Обчислення напружень на гранях елемента при послідовному повороті заданого елемента на  $30^\circ$  та  $60^\circ$  в напрямі кута  $\gamma$  (3.2 – 3.4)

$$\alpha_1 = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \sigma_x \cos^2 \alpha_1 + \sigma_y \sin^2 \alpha_1 - \tau_{xy} \sin 2\alpha_1 = \\ &= 100 \cos^2 30^\circ + (-20) \sin^2 30^\circ + (-80) \sin(2 \cdot 30^\circ) = 139,3 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= \sigma_x \sin^2 \alpha_1 + \sigma_y \cos^2 \alpha_1 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_1 = \\ &= 100 \sin^2 30^\circ + (-20) \cos^2 30^\circ + (-80) \sin(2 \cdot 30^\circ) = -59,3 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_1 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_1 =$$

$$= \frac{100 - (-20)}{2} \sin(2 \cdot 30^\circ) + (-80) \cos(2 \cdot 30^\circ) = 11,96 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{y_1 x_1} = -\tau_{x_1 y_1} = -11,96 \text{ МПа.}$$

$$\alpha_2 = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_2} &= \sigma_x \cos^2 \alpha_2 + \sigma_y \sin^2 \alpha_2 - \tau_{xy} \sin 2\alpha_2 = \\ &= 100 \cos^2 60^\circ + (-20) \sin^2 60^\circ - (-80) \sin(2 \cdot 60^\circ) = 79,28 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y_2} &= \sigma_x \sin^2 \alpha_2 + \sigma_y \cos^2 \alpha_2 + \tau_{xy} \sin 2\alpha_2 = \\ &= 100 \sin^2 60^\circ + (-20) \cos^2 60^\circ + (-80) \sin(2 \cdot 60^\circ) = 0,72 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

$$\tau_{x_2 y_2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_2 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_2 =$$

$$= \frac{100 - (-20)}{2} \sin(2 \cdot 60^\circ) + (-80) \cos(2 \cdot 60^\circ) = 91,96 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{y_2 x_2} = -\tau_{x_2 y_2} = -91,96 \text{ МПа.}$$

Перевірка

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_{x_2} + \sigma_{y_2};$$

$$100 + (-20) = 140 + (-60) = 139,3 + (-59,3) = 79,28 + 0,72 = 80,$$

розрахунки нормальних напружень виконані вірно.

Коефіцієнт запасу міцності в точці за IV (енергетичною) теорію міцності.

Інтенсивність нормальних напружень (еквівалентне напруження за четвертою теорією міцності) (3.19)

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(140-0)^2 + (0-(-60))^2 + ((-60)-140)^2} = 177,76 \text{ МПа.}$$

Коефіцієнт запасу

$$n = \frac{\sigma_m}{\sigma_i} = \frac{250}{177,76} = 1,41.$$

де  $\sigma_m = 250$  МПа – границя текучості сталі 20 (див. додаток Ж),

Обчислення величин питомої потенціальної енергії зміни форми та об'єму елемента і повна питома потенціальну енергія деформації.

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_i^2 =$$

$$\frac{1+0,25}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} 177,76^2 = 6,583 \cdot 10^{-2} \text{ (МПа)} = 65830 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 =$$

$$= \frac{1-2 \cdot 0,25}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} (140 + (-60))^2 = 2,667 \cdot 10^{-3} \text{ (МПа)} = 2667 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

$$u = u_V + u_\phi = 65830 + 2667 = 68497 \text{ (Дж/м}^3\text{)},$$

де  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па =  $2 \cdot 10^5$  МПа – модуль пружності I роду,

$\mu = 0,25$  – коефіцієнт Пуассона (для сталі).

Головні видовження (3.11)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [140 - 0,25(0 + (-60))] = 7,75 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,25(140 + (-60))] = -1 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-60 - 0,25(140 + 0)] = -4,75 \cdot 10^{-4}.$$

Відносна зміна об'єму елемента з точністю до величин другого порядку малості (3.12)

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 7,75 \cdot 10^{-4} + (-1 \cdot 10^{-4}) + (-4,75 \cdot 10^{-4}) = 2,75 \cdot 10^{-4}.$$

Обчислення відносного видовження ребра АВ елемента, повернутого на кут  $\gamma$ . Знаходимо нормальні напруження, що діють на площадках, повернутих на кут  $\gamma$  ( $\sigma_\gamma$ ) та кут  $\gamma + 90^\circ$  ( $\sigma_{\gamma+90^\circ}$ ).

$$\gamma = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= \sigma_x \cos^2 \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma - \tau_{xy} \sin 2\gamma = \\ &= 100 \cos^2 45^\circ + (-20) \sin^2 45^\circ - (-80) \sin(2 \cdot 45^\circ) = 120 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma+90^\circ} &= \sigma_x \sin^2 \gamma + \sigma_y \cos^2 \gamma + \tau_{xy} \sin 2\gamma = \\ &= 100 \sin^2 45^\circ + (-20) \cos^2 45^\circ + (-80) \sin(2 \cdot 45^\circ) = -40 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Відносне видовження ребра АВ визначаємо за узагальненим законом Гука (3.10) при плоскому напруженому стані

$$\varepsilon_{\gamma} = \frac{1}{E} [\sigma_{\gamma} - \mu \sigma_{\gamma+90^{\circ}}] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [120 - 0,25(-40)] = 6,5 \cdot 10^{-4}$$

Будуємо круг Мора (користуйтесь прикладними програмами для побудови круга Мора, наприклад, КОМПАС 5.11) та показуємо на рисунку всі величини, що розраховуються графічно (методика побудови див. п. 3.1.4), а також положення площадок і відповідних їм напружень (рис. 3.9).

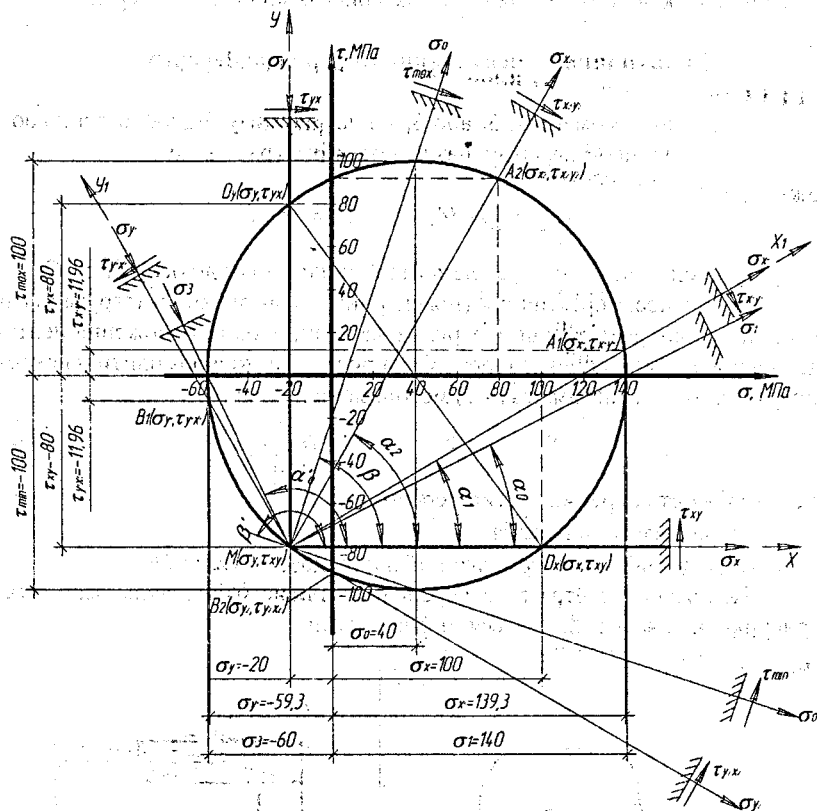


Рисунок 3.9

## 4.1 Короткі теоретичні відомості

Опір стержня різним видам деформації залежить не тільки від його матеріалу і площі поперечного перерізу, а і від форми поперечного перерізу, і його розміщення по відношенню до діючих навантажень. Досі вивчалися деформації, у яких напруження залежали тільки від площі поперечного перерізу. Для вивчення деформацій згину і кручення потрібно знати й інші, більш складні геометричні характеристики плоских перерізів.

### 4.1.1 Статичний момент площі. Центр ваги перерізу

Статичним моментом  $S_z$  або  $S_y$  площі перерізу відносно осі  $z$  або  $y$ , які лежать у площині перерізу, називаються інтеграли виду

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA, \quad (4.1)$$

де  $z$  та  $y$  – відстані від центра елементарної площадки до осей  $Oz$  та  $Oy$ .

У більшості практичних (інженерних) задач можна інтегрування замінити сумою, розділивши переріз на частини, площі і положення центрів ваги яких відомі, наприклад, переріз на рис. 4.2 можна розділити на окремі прямокутники. Тоді замість (4.1) можна записати

$$S_z = \sum_{i=1}^n A_i y_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i z_i, \quad (4.2)$$

де  $n$  – кількість окремих частин перерізу,

$A_i$  – площа частини перерізу,

$z_i, y_i$  – відстані від центра ваги цієї площі до осей  $Oz$  та  $Oy$ .

Положення центра ваги перерізу  $C$  відносно будь-яких осей  $z$  та  $y$  (рисунки 4.1 і 4.2) визначається за формулами

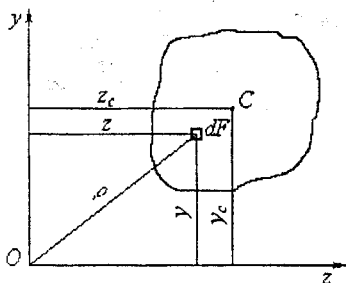


Рисунок 4.1

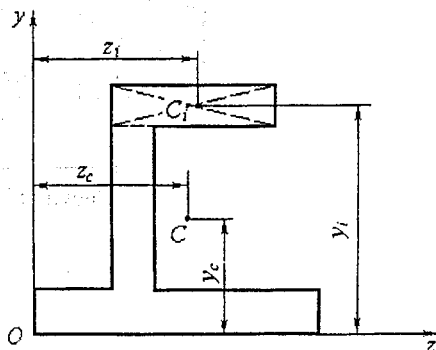


Рисунок 4.2

$$z_C = \frac{S_y}{A}, \quad y_C = \frac{S_z}{A}, \quad (4.3)$$

де  $A$  – площа перерізу,

$S_z$  та  $S_y$  – статичні моменти площі перерізу відносно осей  $z$  та  $y$ .

Статичний момент площі може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Статичний момент відносно осі, яка проходить через центр ваги фігури (центральної осі) дорівнює нулю.

#### 4.1.2 Моменти інерції перерізу

Осьовими моментами інерції  $I_z$  та  $I_y$  перерізу відносно будь-яких осей  $z$  та  $y$ , що лежать у площині перерізу (рисунок 4.1) називають інтеграли виду

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad (4.4)$$

де  $y$  та  $z$  – відстані від елементарної площадки  $dA$  до осей  $Oz$  та  $Oy$ .

Відцентровим моментом інерції  $I_{zy}$  перерізу відносно осей  $Oz$  та  $Oy$ , які лежать у площині перерізу, називається інтеграл виду

$$I_{zy} = \int_A zy \cdot dA. \quad (4.5)$$

Інтеграл від добутків елементарних площадок на квадрати їх відстаней до даної точки (полюса)  $O$  (рисунок 4.1) називається полярним моментом інерції

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (4.6)$$

Осьові і полярний моменти інерції завжди додатні, відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним і рівним нулю.

Якщо полюс  $O$  збігається з початком координатних осей  $z, y$ , то

$$I_p = I_z + I_y. \quad (4.7)$$

Із (4.7) випливає, що при повороті осей координат сума осьових моментів інерції залишається незмінною.

За формулами (4.4 – 4.6) легко підрахувати моменти інерції для перерізів, які часто зустрічаються на практиці. Наприклад, для прямокутника (рисунок 4.3)

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (4.8)$$

Для круга

$$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \quad (4.9)$$

для трикутника відносно центральної осі паралельної основи

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{36}. \quad (4.10)$$

Полярний момент інерції круга відносно полюса, розміщеного в центрі ваги

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (4.11)$$

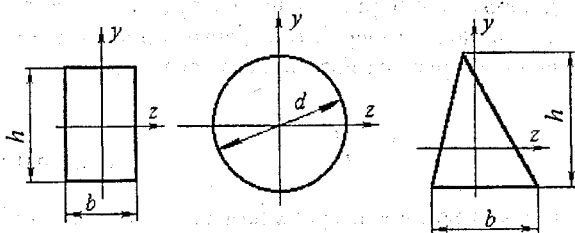


Рисунок 4.3

### 4.1.3 Формули переходу до паралельних або повернутих осей

Нехай система координат  $z_c y_c$  проходить через центр ваги  $C$  перерізу (рисунок 4.4), а друга система  $yz$ , що має початок у точці  $O$ , паралельна їй. Відстані між осями цих систем позначимо через  $a$  і  $b$ . Якщо відомі моменти інерції площі  $A$  відносно центральних осей  $z_c$  і  $y_c$  —  $I_{z_c}$ ,  $I_{y_c}$  і  $I_{z_c y_c}$ , то відносно осей  $z$ ,  $y$ , паралельних центральним осям (рисунок 4.4) моменти інерції знаходять за формулами

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z_c} + a^2 A, \\ I_y &= I_{y_c} + b^2 A, \\ I_{zy} &= I_{z_c y_c} + abA. \end{aligned} \quad (4.12)$$

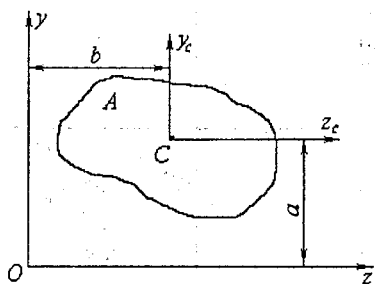


Рисунок 4.4

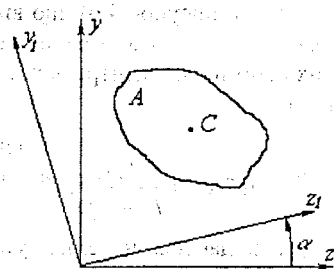


Рисунок 4.5

При повороті координатних осей на кут  $\alpha$  (рисунок 4.5) залежність між моментами інерції така:

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha, \quad (4.13)$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha.$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha \quad (4.14)$$

Кут  $\alpha > 0$  при повороті осей проти стрілки годинника.

Момент інерції складної фігури (рисунок 4.2) дорівнює сумі моментів інерції простих фігур

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i}; \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}; \quad I_{zy} = \sum_{i=1}^n I_{z_i y_i}. \quad (4.15)$$

де  $n$  – кількість окремих частин перерізу,

$I_{z_i}, I_{y_i}, I_{z_i y_i}$  – момент інерції  $i$ -тої частини відносно довільно вибраних осей  $z, y$ . Тобто, для кожної частини вони взяті відносно одних і тих же осей.

#### 4.1.4 Головні осі інерції та головні моменти інерції перерізу

Головними називають осі, відносно яких відцентровий момент інерції перерізу дорівнює нулю. Найбільший практичний інтерес мають головні центральні осі, на відміну від інших позначимо їх через  $u$  і  $v$  (рисунок 4.6). В розрахункових формулах їх часто позначають також через  $y$  і  $z$ .

Для визначення положення головних центральних осей  $u$  та  $v$  використаємо формулу (4.14) переходу до повернутих осей (у даному випадку до головних осей  $uv$ ), підпорядкувавши її умові  $I_{uv} = 0$ . Тоді для знахо-

дження кута  $\alpha_0$  (рисунок 4.6), що визначає положення головних осей відносно будь-яких допоміжних центральних осей  $zy$ , отримуємо

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (4.16)$$

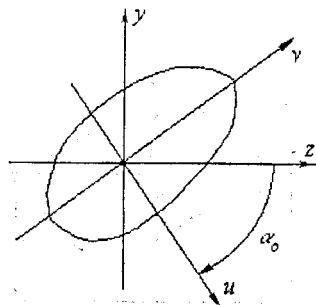


Рисунок 4.6

Формула дає два значення кута  $\alpha_0$ , що відрізняються на  $\frac{\pi}{2}$  і визначають положення двох взаємно перпендикулярних головних осей інерції.

Моменти інерції відносно головних осей називаються головними моментами інерції. Головні моменти інерції мають екстремальні значення, тобто один має найбільше, а другий найменше значення із всіх отриманих при повороті осей координат. Сума осьових моментів інерції при повороті осей координат величина стала

$$I_z + I_y = I_{z_1} + I_{y_1} = I_u + I_v \quad (4.17)$$

Головні моменти інерції позначимо  $I_u, I_v$  або  $I_{\max}, I_{\min}$ . Їх можна підрахувати за формулами (4.13) з врахуванням того, що  $\alpha = \alpha_0$ , або

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{I_z - I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}, \\ I_{\min} &= \frac{I_z - I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Із залежності (4.17) випливає, що при повороті допоміжних осей  $zy$  до збігу з головними осями  $uv$  більший з моментів інерції відносно допоміжних осей повинен збільшитися і досягти величини  $I_{\max}$ , тоді як менший повинен зменшитися на ту саму величину й досягти  $I_{\min}$ . Отже віссю максимального моменту завжди буде вісь, суміжна з тією допоміжною віссю ( $z$  або  $y$ ), відносно якої момент інерції більший. Якщо, наприклад,  $I_z > I_y$ , то вісь  $u$ , що з віссю  $z$  становить гострий кут (рисунок 4.5), буде віссю  $I_{\max}$ . У випадку, коли  $J_{zc} < J_{yc}$   $J_u = J_{\min}$ ,  $J_v = J_{\max}$  та навпаки  $J_u = J_{\max}$ ,  $J_v = J_{\min}$  коли  $J_{zc} > J_{yc}$ .

Потрібно відмітити, що отримані за формулою (4.16) значення  $\alpha_0$  потрібно відкладати проти стрілки годинника, якщо вони додатні, і за стрілкою годинника, якщо вони від'ємні.

Якщо відомі значення головних моментів інерції  $I_{\max}, I_{\min}$  та осьових

$I_{z_c} J_{y_c}$ , то відцентровий момент інерції відносно осей  $x_c$  та  $y_c$  можна визначити за одною з нижченаведених формул:

$$J_{z_c y_c} = \pm \sqrt{J_{z_c} J_{y_c} - J_{\max} J_{\min}}; \quad (4.19)$$

$$J_{z_c y_c} = \pm \sqrt{(J_{\max} - J_{\min})^2 - (J_{z_c} - J_{y_c})^2}; \quad (4.20)$$

$$J_{z_c y_c} = \pm \sqrt{(J_{z_c} - J_{\min})(J_{y_c} - J_{\min})}; \quad (4.21)$$

$$J_{z_c y_c} = \pm \sqrt{(J_{\max} - J_{z_c})(J_{\max} - J_{y_c})}; \quad (4.22)$$

Знак в формулах (4.19) – (4.22) вибирається в залежності від положення перерізу (наприклад, для нерівнобокого кутика він показаний на рис. 4.7. Для схем а, г –  $J_{z_c y_c} > 0$ ; б, в –  $J_{z_c y_c} < 0$ ).

#### 4.1.5 Радіуси інерції. Моменти опору

Радіусом інерції перерізу називають величину виду

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (4.23)$$

Головні радіуси інерції перерізу отримаємо, якщо у формулу (4.23) підставимо головні моменти інерції:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}. \quad (4.24)$$

Осьовим моментом опору називається частка від ділення головного моменту інерції на відстань від осі до найбільш віддаленої від неї точки перерізу

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (4.25)$$

де  $I_z, I_y$  – головні моменти інерції.

Частка від ділення полярного моменту інерції на відстань від центру до найбільш віддаленої точки перерізу називається полярним моментом опору

$$W_{P_i} = \frac{I_z}{\rho_{\max}}. \quad (4.26)$$

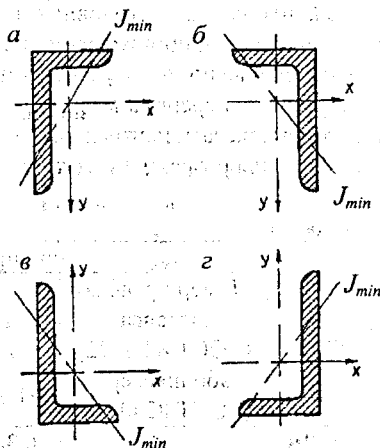


Рисунок 4.7

$$\text{Для прямокутника} \quad W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}. \quad (4.27)$$

$$\text{Для круга} \quad W_z = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (4.28)$$

## 4.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 4. Обчислення геометричних характеристик складного перерізу\*

Для заданого поперечного перерізу бруса, що складений із двотавру (швелера), кутика нерівнобокого та штаби (рис. 4.8, 4.9) необхідно:

- визначити положення центра ваги;
- обчислити величини осьових та відцентрових моментів інерції перерізу в системі координат центральних горизонтальної та вертикальної осей;
- визначити напрямки головних центральних осей;
- обчислити величини головних центральних моментів інерції;
- обчислити величини моментів опору перерізу;
- накреслити переріз в масштабі (1:1 або 1:2), нанести всі розрахункові розміри та показати центральні, головні та допоміжні осі.

Дані для розрахунку взяти із таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Варіант	Розміри елементів перерізу				
	Номер профілю двотавра (ГОСТ 8239-72) або швелера (ГОСТ 8240-72)	Куттик нерівнобокий (ГОСТ 8510-86)		Штаба	
		Номер	Товщина полки	товщина, мм	ширина, мм
0	10	6,3/4,0	5	4	40
1	12	7/4,5	5	6	60
2	14	7,5/5	8	8	100
3	16	8/5	5	10	80
4	18	9/5,6	8	12	100
5	20	10/6,3	8	14	40
6	22	11/7	8	16	160
7	24	12,5/8	10	18	60
8	27	14/9	10	20	180
9	30	16/10	10	25	200

\* Користуйтеся прикладними програмами ПЕОМ для виконання завдання (додаток В)

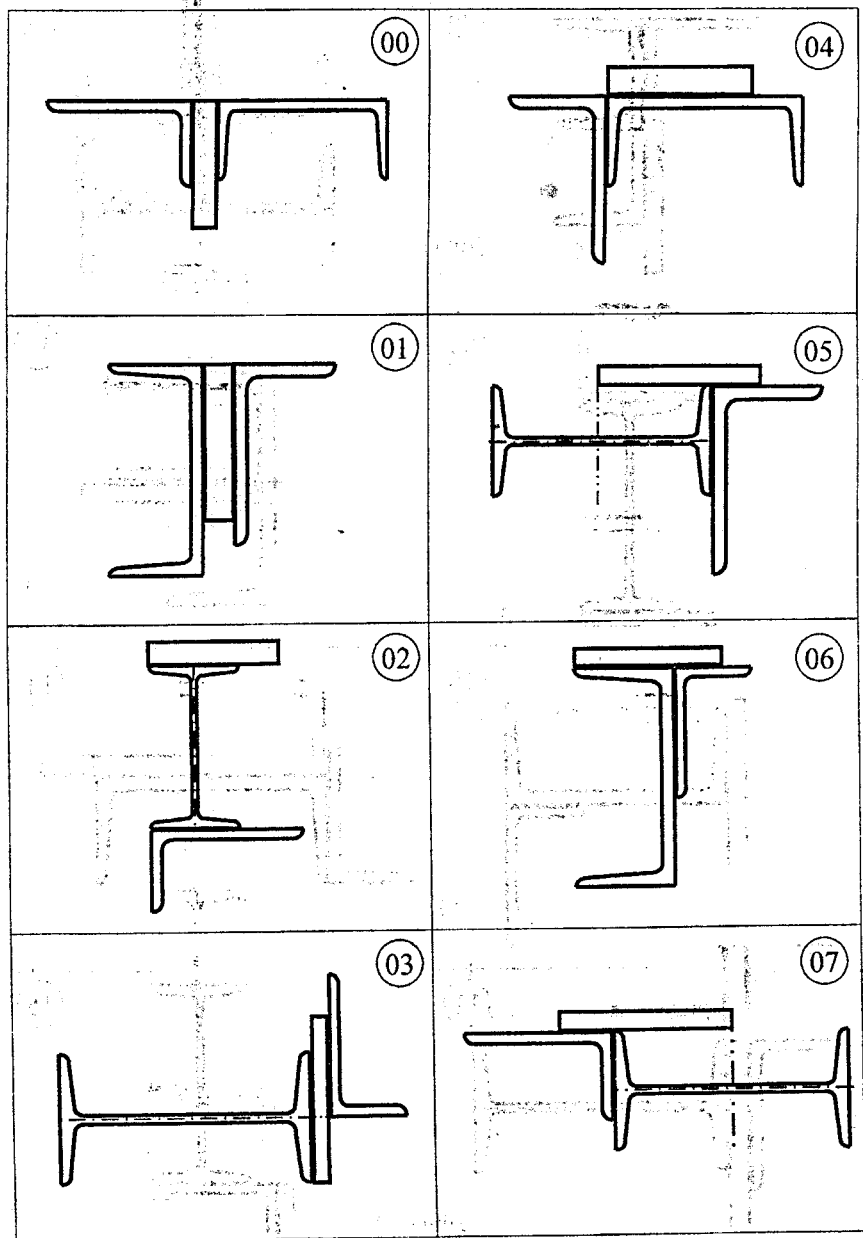


Рисунок 4.8

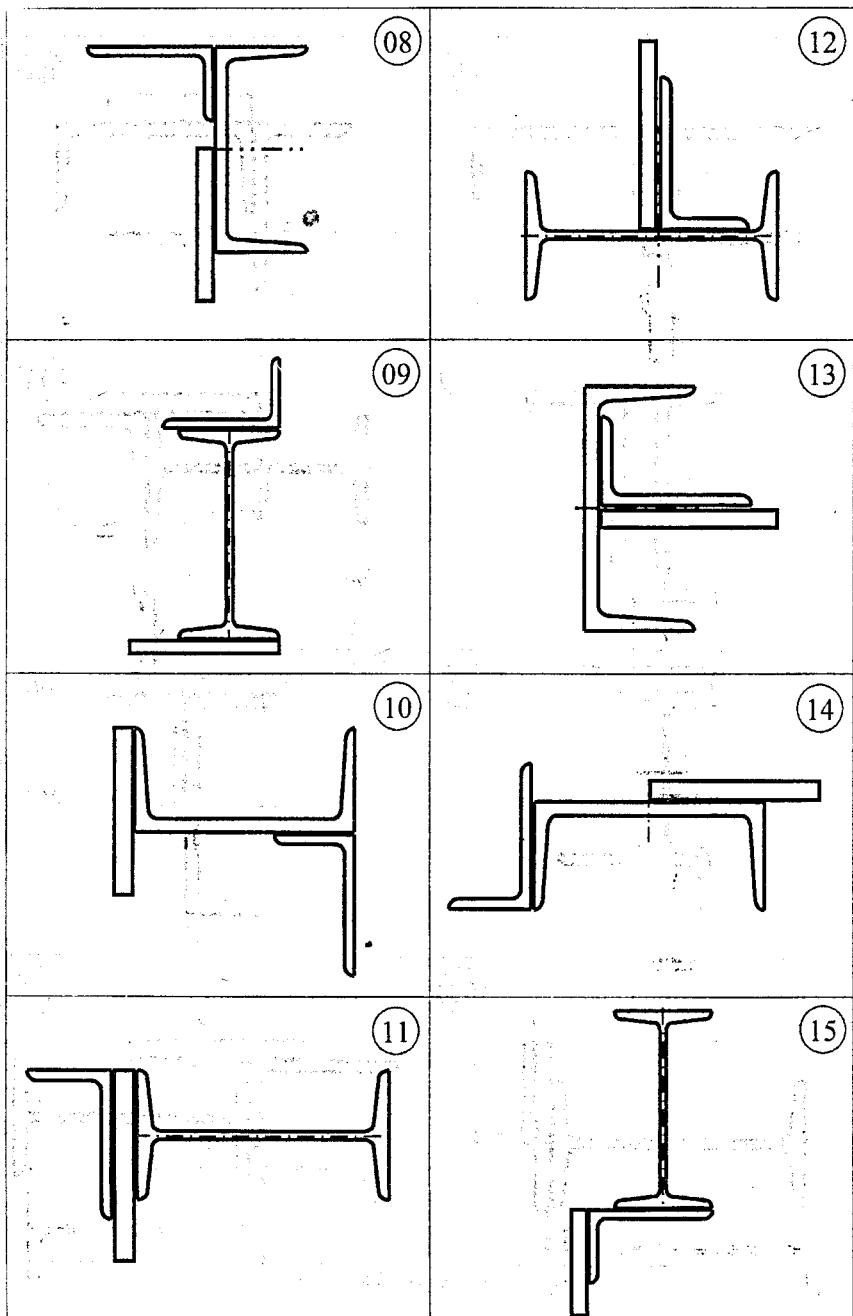


Рисунок 4.9

*Приклад.* Для заданого поперечного перерізу бруса, що складений із двотавра №18а, кутика нерівнобокого №11х7 ( $t = 8$  мм) та штаби 10х100 мм визначити положення центра ваги; обчислити величини осьових та відцентрових моментів інерції перерізу в системі координат центральних горизонтальної та вертикальної осей; визначити напрямки головних центральних осей; обчислити величини головних центральних моментів інерції; обчислити величини моментів опору перерізу; накреслити переріз в масштабі (1:1 або 1:2), нанести всі розрахункові розміри та показати центральні, головні та допоміжні осі.

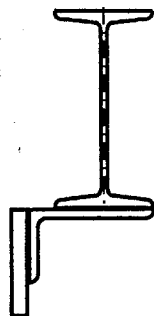


Рисунок 4.10

## Розв'язування

### *Вибір та обґрунтування вихідних даних*

Креслимо переріз в масштабі 1:1 або 1:2 – рис.4.11, користуючись розмірами, наведеними в таблицях сортаменту (додаток Д). Вибираємо довільно допоміжні осі  $x$  та  $y$  (одна із осей паралельна осі двотавра). Для кожної складової складного перерізу позначаємо центральні осі, що паралельні вибраним осям.

*Вказівка.* На кресленні проставляються всі розміри, що використовуються в розрахунках поруч із їхніми буквеними позначеннями. Рекомендується для зручності розрахунку розміри проставляти у сантиметрах.

Із таблиць сортаменту (додаток Д) виписуємо необхідні для розрахунків геометричні характеристики двотавра (індекс 1) та кутика (індекс 2) відповідно до вибраних центральних осей.

Для двотавра №18а

Площа  $A_1 = 25,4$  см<sup>2</sup>; центральні осьові моменти інерції  $J_{y1} = 114,0$  см<sup>4</sup>;  $J_{z1} = 1430$  см<sup>4</sup>; відцентровий момент інерції  $J_{z1y1} = 0$ . Центр ваги перерізу  $C_1$  лежить на осі симетрії посередині стояка.

Для кутика нерівнобокого № 11х7 ( $t = 8$  мм)

Площа  $A_2 = 13,9$  см<sup>2</sup>; центральні осьові моменти інерції  $J_{y2} = 172,0$  см<sup>4</sup>;  $J_{z2} = 54,6$  см<sup>4</sup>; відцентровий момент інерції  $J_{z2y2} = +55,9$  см<sup>4</sup> (знак при  $J_{z2y2}$  вибираємо за рис. 4.7.); положення центру ваги перерізу  $C_2$  визначається величинами  $y_{c2} = 1,64$  см,  $z_{c2} = 3,61$  см.

Для штаби 10х100 мм

Позначимо сторони штаби  $b = 1$  см,  $h = 10$  см.

Площа  $A_3 = h \cdot b = 1 \cdot 10 = 10$  см<sup>2</sup>;

центральні осьові моменти інерції прямокутного перерізу (4.8)

$$J_{y3} = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \cdot 1^3}{12} = 0,83 \text{ см}^4;$$

$$J_{z3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 10^3}{12} = 83,33 \text{ см}^4;$$

відцентровий момент інерції  $J_{z3y3} = 0$  см<sup>4</sup>;

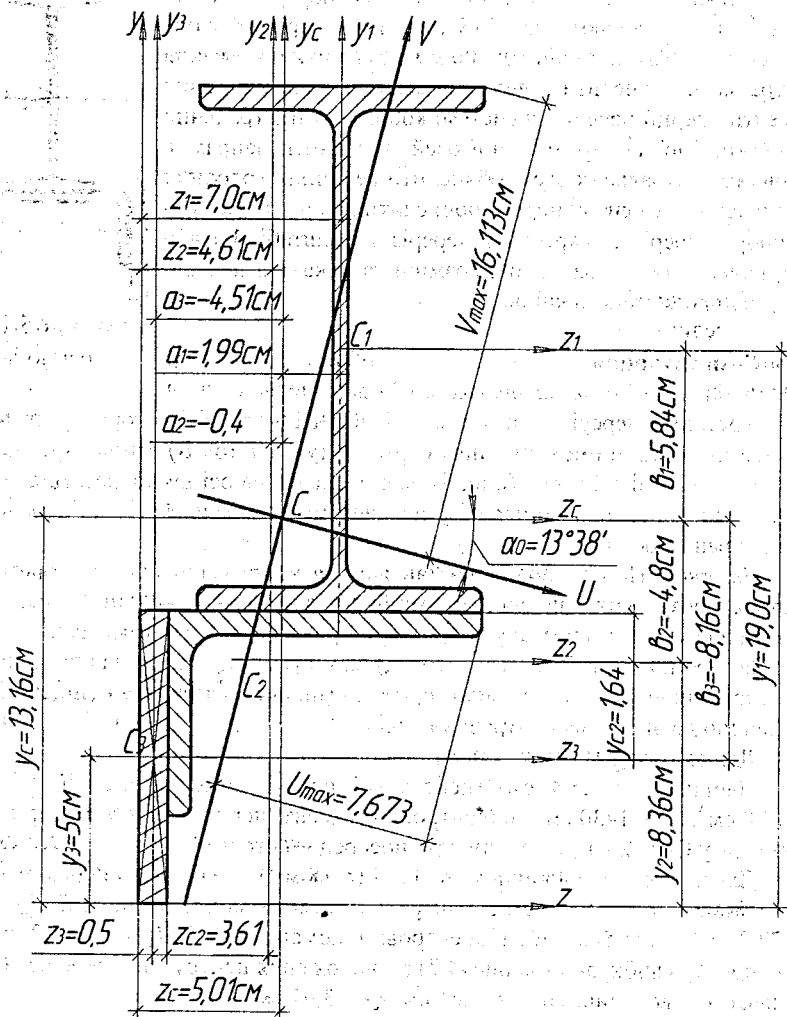


Рисунок 4.11

Центр ваги перерізу  $C_3$  лежить на перетині осей симетрії (або діагоналей) перерізу.

Визначення центру ваги перерізу (формули 4.2, 4.3)

$$z_c = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{25.4 \cdot 7 + 13.9 \cdot 4.61 + 10 \cdot 0.5}{25.4 + 13.9 + 10} = 5.01 \text{ (см)};$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{25.4 \cdot 19.0 + 13.9 \cdot 8.36 + 10 \cdot 5.0}{25.4 + 13.9 + 10} = 13,16 \text{ (см).}$$

На рис. 4.11 вказуємо центральні осі  $z_c - y_c$  та позначаємо центр ваги  $C$  складного перерізу.

*Визначення моментів інерції перерізу.*

Знаходимо координати центрів ваги  $C_1(a_1; b_1)$ ,  $C_2(a_2; b_2)$  та  $C_3(a_3; b_3)$  в системі центральних осей  $z_c - y_c$ .

$$a_1 = z_1 - z_c = 7,0 - 5,01 = 1,99 \text{ (см),}$$

$$a_2 = z_2 - z_c = 4,61 - 5,01 = -0,4 \text{ (см),}$$

$$a_3 = z_3 - z_c = 0,5 - 5,01 = -4,51 \text{ (см),}$$

$$b_1 = y_1 - y_c = 19,0 - 13,16 = 5,84 \text{ (см),}$$

$$b_2 = y_2 - y_c = 8,36 - 13,16 = -4,8 \text{ (см),}$$

$$b_3 = y_3 - y_c = 5,0 - 13,16 = -8,16 \text{ (см).}$$

Центральні осьові моменти інерції перерізу (формули 4.12)

$$J_{z_c} = J_{z_1} + b_1^2 \cdot A_1 + J_{z_2} + b_2^2 \cdot A_2 + J_{z_3} + b_3^2 \cdot A_3 =$$

$$= 1430 + 5,84^2 \cdot 25,4 + 54,6 + (-4,8)^2 \cdot 13,9 + 83,33 + (-8,16)^2 \cdot 10 = 3420,3 \text{ (см}^4\text{);}$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2 + J_{y_3} + a_3^2 \cdot A_3 =$$

$$= 114 + 1,99^2 \cdot 25,4 + 172 + (-0,4)^2 \cdot 13,9 + 0,83 + (-4,51)^2 \cdot 10 = 593,0 \text{ (см}^4\text{).}$$

Відцентровий момент інерції складного перерізу

$$J_{z_c y_c} = J_{z_1 y_1} + a_1 b_1 \cdot A_1 + J_{z_2 y_2} + a_2 b_2 \cdot A_2 + J_{z_3 y_3} + a_3 b_3 \cdot A_3 =$$

$$= 0 + 1,99 \cdot 5,84 \cdot 24,0 + 55,9 + (-0,4)(-4,8) \cdot 13,9 + 0 + (-4,51)(-8,16) \cdot 10 =$$

$$= 729,52 \text{ (см}^4\text{).}$$

Визначення напрямку головних центральних осей та головних моментів інерції перерізу

Кут нахилу головних центральних осей інерції перерізу (формула 4.16)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = \frac{2 \cdot 729,5}{593 - 3420,3} = -0,4856,$$

звідки знаходимо  $\alpha_0 = -13^\circ 38'$ .

Головні центральні моменти інерції перерізу (формула 4.18)

$$J_{u/v} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c} \pm \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2}}{2} =$$

$$= \frac{3420,3 + 593,0 \pm \sqrt{(3420,3 - 593,0)^2 + 4 \cdot 729,5^2}}{2} = 2006,7 \pm 1590,8 \text{ (см}^4\text{).}$$

Звідки знаходимо  $J_u = J_{\max} = 3597,4 \text{ см}^4$ ;  $J_v = J_{\min} = 415,9 \text{ см}^4$ .

$J_u = J_{\max}$ ,  $J_v = J_{\min}$ , оскільки  $J_{z_c} > J_{y_c}$ .

(У випадку, коли  $J_{z_c} < J_{y_c}$   $J_u = J_{\min}$ ,  $J_v = J_{\max}$ ).

Перевірка

$$J_{z_c} + J_{y_c} = 3420,3 + 593,0 = 4013,3 \text{ (см}^4\text{);}$$

$$J_v + J_u = 415,9 + 3597,4 = 4013,3 \text{ (см}^4\text{).}$$

$$J_{z_c} + J_{y_c} = J_v + J_u$$

$$J_u = J_{z_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{z_c y_c} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 3420,3 \cdot \cos^2(-13^\circ 38') + 593,0 \cdot \sin^2(-13^\circ 38') - 729,5 \cdot \sin 2 \cdot (-13^\circ 38') = 3597,4 \text{ (см}^4\text{)};$$

$$J_v = J_{yc} \cos^2 \alpha_0 + J_{zc} \sin^2 \alpha_0 + J_{zyc} \sin 2 \alpha_0 = 593,0 \cdot \cos^2(-13^\circ 38') + 3420,3 \cdot \sin^2(-13^\circ 38') + 729,5 \cdot \sin 2 \cdot (-13^\circ 38') = 415,9 \text{ (см}^4\text{)};$$

$$J_u \equiv J_w; J_v \equiv J_v$$

Отже, розрахунки виконані правильно.

Визначення осьових моментів опору та головних радіусів інерції перерізу

Моменти опору (формули 4.25)

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}} = \frac{3597,4}{16,11} = 223,3 \text{ см}^3;$$

$$W_v = \frac{I_v}{u_{\max}} = \frac{415,9}{7,67} = 54,2 \text{ см}^3,$$

де  $v_{\max}$  ( $u_{\max}$ ) – відстань від головної осі  $v$  ( $u$ ) до найбільш віддаленої від неї точки перерізу за модулем.

Вказівка. Для визначення  $v_{\max}$  та  $u_{\max}$  необхідно провести через точки перерізу прямі таким чином, щоб вони торкались перерізу і були паралельні відповідній осі.  $v_{\max}$  та  $u_{\max}$  визначаються вимірюванням відповідного відрізка на кресленні.

Головні радіуси інерції (формула 4.24)

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{J_u}{A_1 + A_2 + A_3}} = \sqrt{\frac{3597,4}{24,5 + 13,9 + 10}} = 8,62 \text{ см};$$

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{J_v}{A_1 + A_2 + A_3}} = \sqrt{\frac{415,9}{24,5 + 13,9 + 10}} = 2,93 \text{ см}.$$

В додатку В приведена інструкція до розрахунку геометричних характеристик плоских перерізів в середовищі "КОМПАС 5.11". Розбіжності між аналітичним розрахунком та за допомогою ЕОМ зазвичай не перевищують 2%.

Приклад (скопійовані в буфер обміну та вставлені в документ результати розрахунків).

Площадь	$S = 49.4514 \text{ см}^2$
В центральной системе координат:	
Осевые моменты инерции	$J_x = 3442.67 \text{ см}^4$
	$J_y = 615.166 \text{ см}^4$
Центробежный момент инерции	$J_{xy} = 746.913 \text{ см}^4$

В главной центральной системе координат:

Осевые моменты инерции	$J_x = 3627.84 \text{ см}^4$
	$J_y = 429.989 \text{ см}^4$
Угол наклона главных осей	$A = -13.9242^\circ$

## 5 КРУЧЕННЯ

### 5.1 Короткі теоретичні відомості

#### 5.1.1 Напруження і деформації при крученні стержнів круглого поперечного перерізу

Деформація кручення бруса має місце тоді, коли на них діють пари сил, розташованих у площинах, перпендикулярних до осі бруса.

Деформація при крученні виявляється у взаємному повороті перерізів бруса і вимірюється у кутових одиницях (радіанах). Кут повороту двох крайніх перерізів, розташованих на відстані  $l$  один від одного, називають повним кутом закручування  $\varphi$  або просто  $\varphi$  (рис. 5.1). Кут закручування, віднесений до одиниці довжини бруса, називається відносним кутом закручування

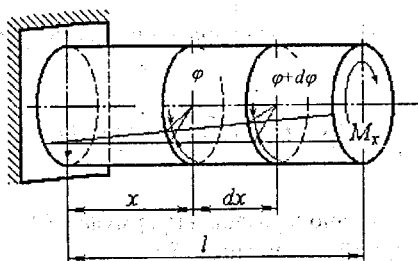


Рисунок 5.1

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.1)$$

Зовнішній момент, що прикладений до будь-якого перерізу бруса і викликає деформацію бруса, називають скручувальним моментом  $M_x$ , а внутрішній силовий фактор називається крутним моментом  $M_x$ .

У розглядуваному брусі (рисунок 5.1) в будь-якому поперечному перерізі крутний момент  $M_x$  дорівнює скручувальному моменту  $M_x$ . Початкова твірна після деформації набуде вигляду  $E, A, B, C$ . На відстані  $x$  від закріпленого кінця бруса виділимо елемент завдовжки  $dx$  (рис. 5.1, 5.2). Як видно із рисунка 5.2

$$\gamma_{\max} = \frac{r d\varphi}{dx} \quad (5.2)$$

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx} \quad (5.3)$$

де  $\rho$  – відстань від точки перерізу до осі бруса,  $r = d/2$  – радіус перерізу,  $d$  – діаметр бруса,  $\gamma_{\max}$ ,  $\gamma$  – відносний зсув на поверхні і на віддалі  $\rho$  від осі бруса, відповідно.

Використовуючи закон Гука при зсуві, для дотичних напружень при крученні отримасмо вираз

$$\tau = \gamma \cdot G = \rho \frac{d\varphi}{dx} G = \rho \cdot G \cdot \theta \quad (5.4)$$

У площині поперечного перерізу на відстані  $\rho$  від осі бруса виділимо елементарну площадку  $dA$ . Зусилля, що припадає на цю площадку, дорівнює  $\tau \cdot dA$ , а момент цього зусилля відносно осі бруса дорівнює  $\tau \cdot \rho \cdot dA$ . Склавши суму зусиль отримаємо величину крутного моменту

$$M_x = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA. \quad (5.5)$$

Підставивши значення  $\tau$  із (5.4), матимемо

$$M_x = \int_A \rho^2 \cdot G \cdot \theta \cdot dA = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA. \quad (5.6)$$

Як показано в розділі 4 (формула 4.6) полярний момент інерції

$$I_p = \int_A \rho^2 dA,$$

тому (5.6) запишемо у вигляді

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot I_p}. \quad (5.7)$$

Підставивши це значення  $\theta$  у вираз (5.4) матимемо

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \cdot \rho. \quad (5.8)$$

Для круглого поперечного перерізу  $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ .

Користуючись цією формулою, легко визначити величину напружень в будь-якій точці перерізу, розташованій на відстані  $\rho$  від осі бруса. Максимальні напруження діють у точках, які розташовані на контурі поперечного перерізу бруса (рисунок 5.2), для яких  $\rho_{\max} = r$ . Величина максимальних напружень

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p} \cdot r.$$

Замінемо величину  $I_p/r$  полярним моментом опору. Тоді для круглого поперечного перерізу

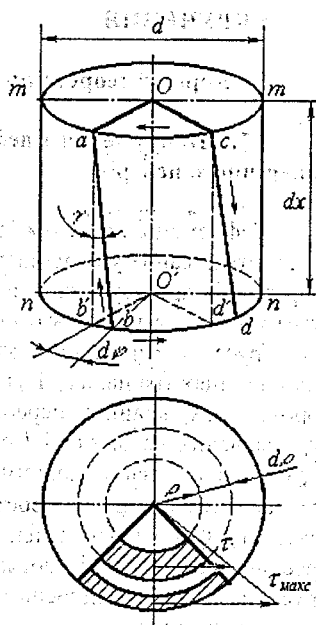


Рисунок 5.2

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \quad (5.9)$$

З формули (5.8) видно, що напруження  $\tau$  змінюються прямо пропорційно відстані  $\rho$  від осі бруса. Розподіл дотичних напружень по перерізу бруса наведено на рисунку 5.3. Згідно з законом парності дотичних напружень, такі самі напруження діятимуть і в поздовжніх перерізах бруса (рисунок 5.3).

Таким чином при крученні бруса виникає плоский напружений стан – чистий зсув (рисунок 5.3). Для елемента біля поверхні бруса взаємне положення головних площадок і площадок, на яких діють максимальні дотичні напруження, показано на рисунку 5.3.

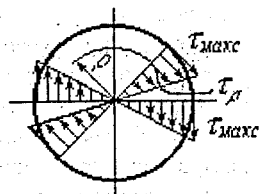


Рисунок 5.3

Характер руйнування при крученні визначається напруженим станом і особливостями опору матеріалу бруса лінійним і кутовим деформаціям. Так, стержні із пластичних матеріалів будуть руйнуватися по поперечному перерізу від дотичних напружень. Дерев'яний стержень буде руйнуватися по поздовжніх перерізах, оскільки дерево погано чинить опір зсуву вздовж волокон. Стержень із крихкого матеріалу буде руйнуватися по площадках, розміщених під кутом  $45^\circ$  до осі, тобто перпендикулярних головному напруженню  $\sigma_{\max}$ .

Кут закручування ділянки стержня довжиною  $l$  знайдемо за формулою (5.7) з врахуванням (5.1)

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x dx}{I_p G} \quad (5.10)$$

Якщо крутний момент  $M_x$  і жорсткість перерізу  $GI_p$  величини сталі на ділянці довжиною  $l$ , то

$$\varphi = \frac{M_x l}{I_p G} \quad (5.11)$$

Кут закручування стержня, який має  $n$  ділянок

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} l_i}{I_p G} \quad (5.12)$$

### 5.1.2 Епюри крутних моментів

Для розрахунку бруса на кручення (формули 5.7–5.12) необхідно знати величину крутного моменту  $M_x$  в будь-якому поперечному перерізі

бруса. Закон зміни крутних моментів по довжині бруса  $M_x(x)$  називають епюрою крутних моментів. Епюра дає наочне зображення розподілу крутних моментів вздовж осі бруса. Величину  $M_x$  знаходять із умови рівноваги будь-якої частини бруса, розміщеної з одного боку від перерізу. Із рівнянь рівноваги випливає, що крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених до бруса справа або зліва від перерізу.

Епюри крутних моментів дають змогу визначити небезпечні перерізи, зокрема, якщо брус має сталий поперечний переріз, то небезпечними будуть перерізи на ділянці, де виникає найбільший крутний момент.

Крутний момент вважають додатним, якщо результуючий момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса буде напрямлений за стрілкою годинника, коли дивитися в торець перерізу, і навпаки. Користуючись принципом пом'якшених граничних умов, вважатимемо, що у поперечному перерізі, де прикладений скручувальний момент, значення крутного моменту змінюється стрибкоподібно.

При побудові епюри крутних моментів їх величини відкладають перпендикулярно прямій, паралельній осі бруса (базі епюри). На рисунку 5.4 приведений приклад побудови епюри крутних моментів.

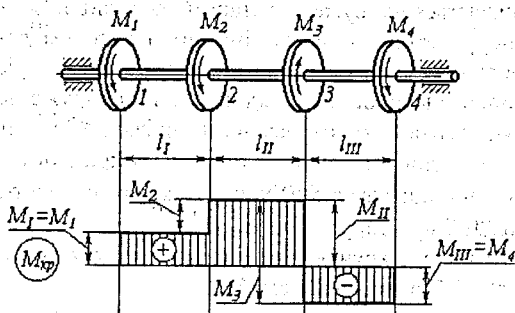


Рисунок 5.4

### 5.1.3 Розрахунки на міцність і жорсткість

Для нормальної роботи стержнів на кручення необхідно задовольняти:

а) умову міцності

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau], \quad (5.13)$$

б) умову жорсткості

$$\theta_{\max} = \frac{M_x}{I_p G} \leq [\theta], \quad (5.14)$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження кручення, яке вибирають залежно від допу-

стимого напруження на розтяг, умов роботи конструкції та інші. Наприклад:

для сталей  $[\tau] = (0,55 \dots 0,60)[\sigma]_p$ ,

для чавунів  $[\tau] = (1,0 \dots 1,2)[\sigma]_p$ .

В формулі (5.14)  $[\theta]$  – допустимий кут закручування, нормований технічними умовами.

Для вала суцільного поперечного перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_x}{[\tau]}, \text{ звідки} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi[\tau]}}$$

Для трубчастого вала

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{M_x}{[\tau]}, \text{ звідки} \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}}$$

де  $\alpha = d/D$ .

При розрахунках на жорсткість, враховуючи (5.14) і значення  $I_p$  для

суцільного вала  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , для трубчастого вала  $I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$

знаходимо:

$$\text{для суцільного вала} \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{G\pi[\theta]}}$$

$$\text{для трубчастого вала} \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_x}{G\pi[\theta](1 - \alpha^4)}}$$

Таким чином діаметр вала визначають з умови міцності (5.13) та умови жорсткості (5.14). За кінцевий розмір беруть більший діаметр.

Часто скручувальні моменти визначають за потужністю  $N$ , що передається на вал або знімається з нього і за його кутовою швидкістю  $\omega$ . У такому випадку скручувальний момент визначають за формулою

$$M_k = \frac{N}{\omega} \quad (5.15)$$

Якщо  $N$  взяти в ватах, а  $\omega$  – у радіанах за секунду, то  $M_k$  буде в Н·м.

## 5.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 5. Розрахунок вала на кручення

Для вала, який навантажений тільки крутними моментами (рис. 5.5-5.8):

- обчислити величину та напрямок моменту  $T_0$ ;
- побудувати епюру крутних моментів;
- обчислити діаметри ділянок вала із умов міцності і жорсткості, якщо  $[\theta] = 0,5 \text{ } ^\circ/\text{м}$ ;

Для однієї із ділянок розрахунок зробити для двох випадків: суцільний переріз вала і кільцевий при відношенні внутрішнього діаметра до зовнішнього  $\alpha = d/D = 0,8$ ; порівняти вагу валів суцільного та кільцевого перерізу, зробити висновок щодо раціонального перерізу.

- побудувати епюру кутів повороту перерізів вала (в градусах).

Таблиця 5.1

Варіант	$T_1$ , Н·м	$T_2$ , Н·м	$T_3$ , Н·м	$a$ , м	Матеріал (сталь)
0	1000	3100	2200	0,1	Ст5
1	2500	1200	2500	0,5	20
2	4000	1500	1800	0,2	30
3	1500	2200	2800	0,4	45
4	3000	2300	1600	0,1	60Г
5	2000	1500	1700	0,3	40Х
6	3500	1400	3100	0,5	20Х
7	1000	3100	2700	0,2	45Х
8	2000	1700	1400	0,4	12ХНЗА
9	1500	2100	2300	0,1	30ХСГА

*Приклад.* Розрахувати вал, зображений на рис. 5.9 на кручення, згідно з приведеним в задачі 5 порядку розрахунку.

Вихідні дані.  $T_1 = 1000 \text{ Н·м}$ ;  $T_2 = 3000 \text{ Н·м}$ ;  $T_3 = 2000 \text{ Н·м}$ ;  $[\theta] = 1 \text{ } ^\circ/\text{м}$ ;  $\alpha = d/D = 0,7$ , сталь 40Х.

Знайти:  $T_0$ ,  $M_{кр}(x)$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $\varphi(x)$ .

*Розв'язування*

Знаходимо невідомий крутний момент  $T_0$ , користуючись рівнянням рівноваги у вигляді

$$\Sigma T_i = 0;$$

Нехай  $T_0$  має такий самий напрямок, як і  $T_1$ , (правило знаків приймаємо довільно) тоді

$$T_1 + T_0 - T_2 - T_3 = 0, \text{ звідки}$$

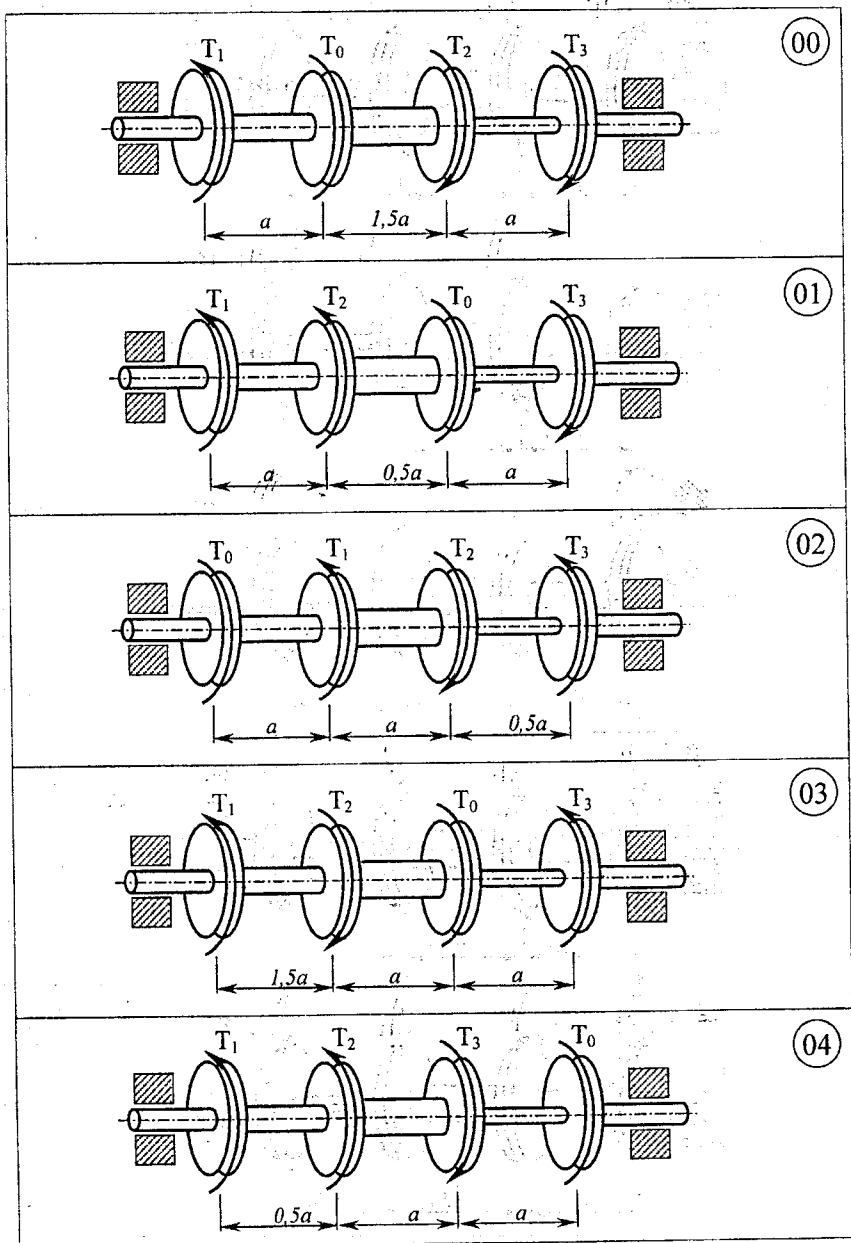


Рисунок 5.5

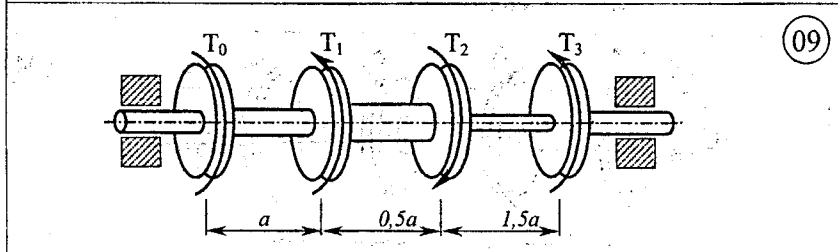
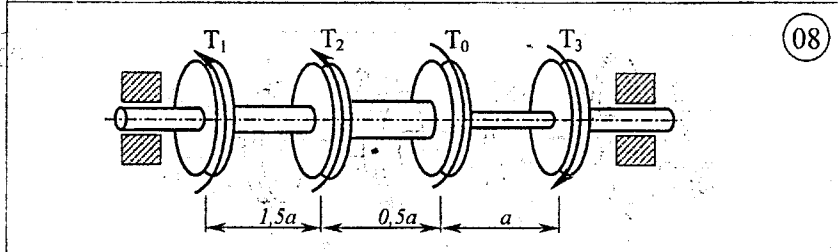
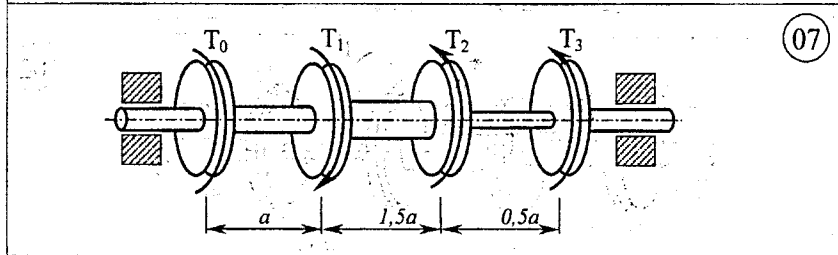
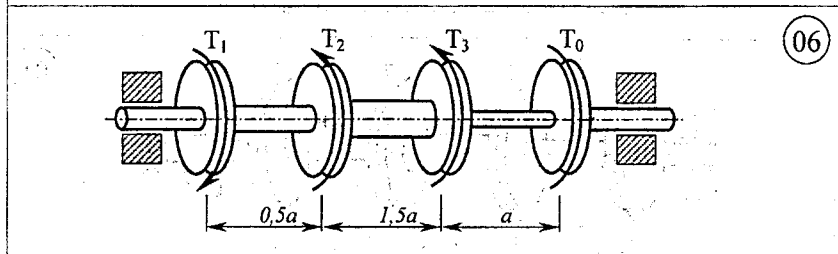
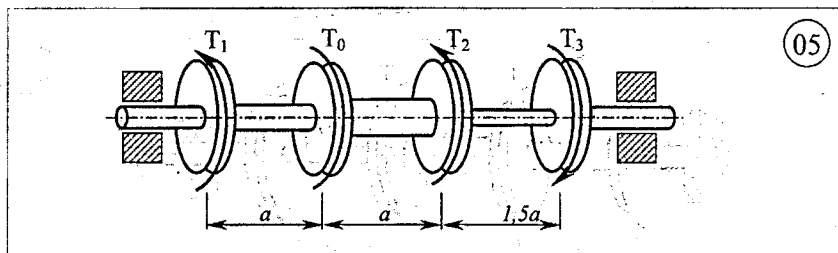


Рисунок 5.6

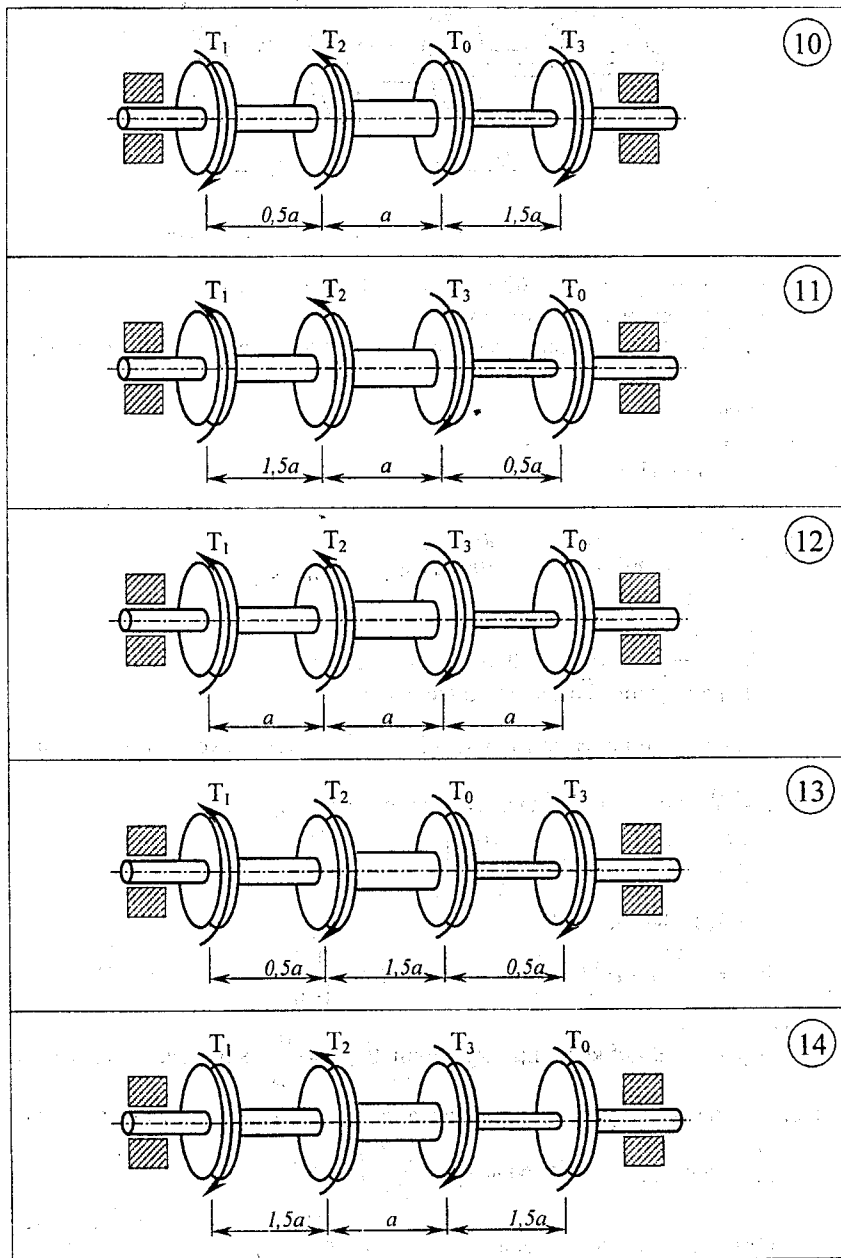


Рисунок 5.7

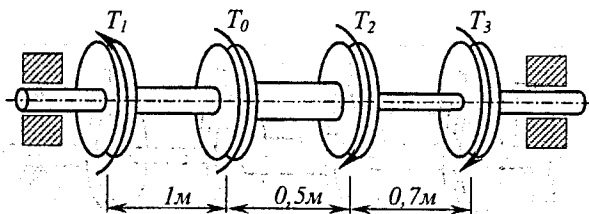


Рисунок 5.8

$$T_0 = -T_1 + T_2 + T_3 = -1000 + 3000 + 2000 = 4000 \text{ Н·м.}$$

Будуємо епюру крутних моментів.

Знаходимо внутрішні крутні моменти, використовуючи метод перерізів.

Ділянка АВ

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м,}$$

$$M_I = -T_1 = -1000 \text{ Н·м.}$$

Ділянка ВС

$$0 \leq x_2 \leq 0,5 \text{ м,}$$

$$M_{II} = -T_1 - T_0 = -1000 - 4000 = -5000 \text{ Н·м.}$$

Ділянка CD

$$0 \leq x_3 \leq 0,7 \text{ м,}$$

$$M_{III} = -T_1 - T_0 + T_2 = -1000 - 4000 + 3000 = -2000 \text{ Н·м.}$$

Епюра крутних моментів приведена на рис. 5.10.

Із умови міцності при крученні  $\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]$  знаходимо мінімальне

значення діаметра ділянок вала суцільного перерізу

$$\frac{16M_{кр}}{\pi d^3} = [\tau], \text{ звідки } d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}}$$

Для трубчастого вала

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) = \frac{M_{кр}}{[\tau]}, \text{ звідки } D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}}, \text{ де } \alpha = d/D.$$

Із умови жорсткості при крученні  $\theta_{\max} = \frac{M_x}{I_p G} \leq [\theta]$  знаходимо міні-

мальне значення діаметра ділянок вала, де значення  $I_p$  для суцільного вала

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \text{ для трубчастого вала } I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4).$$

Отже, для суцільного вала

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{кр}}{G\pi^2[\theta^0]}}$$

для трубчастого вала

$$D \geq 4 \sqrt{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{кр}}{G \pi^2 [\theta^0] (1 - \alpha^4)}}$$

Визначення допустимих напружень

Допустимі напруження для сталі 40Х (пластичний матеріал) дорівнюють (формула 2.20)

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sigma_m}{n} = \frac{800}{2} = 400 \text{ МПа,}$$

$$[\tau] = (0,55 \dots 0,60) [\sigma]_p = 0,6 \cdot 400 = 240 \text{ МПа.}$$

де  $\sigma_n = \sigma_m = 800 \text{ МПа}$  – границя текучості сталі 40Х (див. додаток Ж),

$n$  – коефіцієнт запасу міцності при дії на вал статичного навантаження

$n = 1,5 \dots 2$ , приймаємо  $n = 2$ .

$$T_1 = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad T_0 = 4000 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad T_2 = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad T_3 = 2000 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

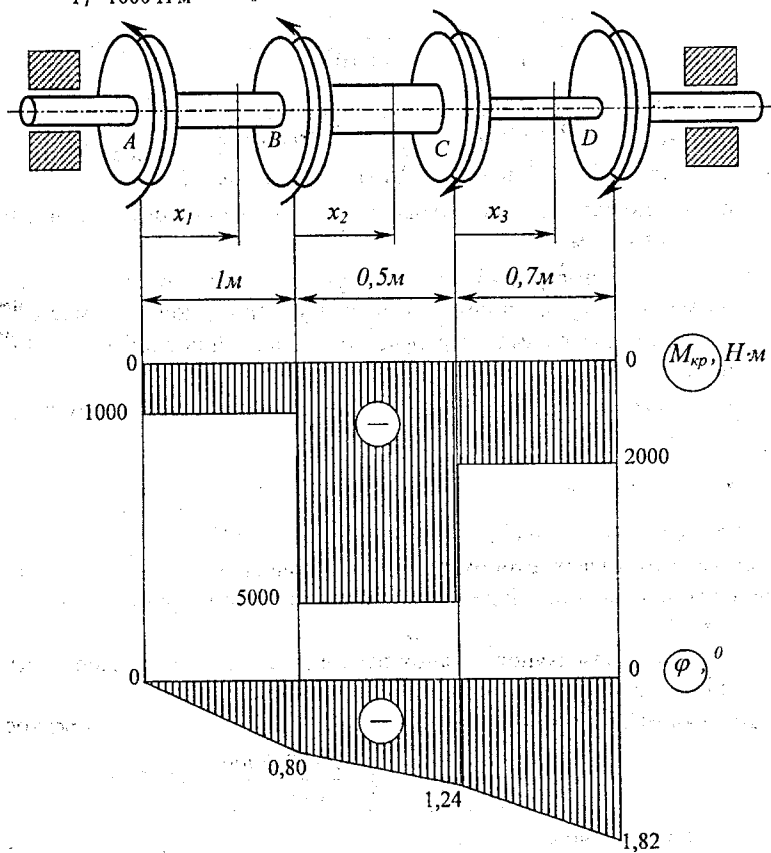


Рисунок 5.10

Ділянка АВ.  $M_I = -1000$  Н·м.

Суцільний переріз

умова міцності

$$d_I = \sqrt[3]{\frac{16M_I}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000}{\pi \cdot 240 \cdot 10^6}} = 0,0277 \text{ (м)},$$

умова жорсткості

$$d_I \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_I}{G\pi^2[\theta^0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 1000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1}} = 0,052 \text{ (м)},$$

Приймаємо більший з розрахованих та округляємо його до стандартного числа  $d_I = 55$  мм.

Для трубчастого вала

умова міцності

$$D_I = \sqrt[3]{\frac{16M_I}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1000}{\pi \cdot 240 \cdot 10^6 (1-0,7^4)}} = 0,0303 \text{ (м)},$$

умова жорсткості

$$D_I \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_I}{G\pi^2[\theta^0](1-\alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 1000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1(1-0,7^4)}} = 0,0557 \text{ (м)}.$$

Приймаємо більший з розрахованих та округляємо його до стандартного числа  $D_I = 60$  мм.

Внутрішній діаметр трубчастого перерізу  $d_m = D_I \alpha = 60 \cdot 0,7 = 42$  мм.

Порівняємо вагу валів кожного перерізу. Співвідношення мас валів прямо пропорційне площам їх перерізів при однаковій густині матеріалу р та довжині вала:

$$\frac{m_c}{m_m} = \frac{V_c \rho}{V_m \rho} = \frac{A_c l}{A_m l} = \frac{A_c}{A_m},$$

$$\frac{A_c}{A_m} = \frac{(\pi/4)d_c^2}{(\pi/4)(D_m^2 - d_m^2)} = \frac{d_c^2}{D_m^2 - d_m^2} = \frac{55^2}{60^2 - 42^2} = 1,65.$$

Отже, с точки зору економії матеріалу кільцевий переріз вала є раціональнішим, оскільки вал буде мати меншу масу в 1,65 рази при заданій величині  $\alpha = 0,7$ .

Подальший розрахунок ділянок вала ведемо за умовою жорсткості, виходячи із аналізу результатів для першої ділянки.

Ділянка ВС.  $M_{II} = -5000$  Н·м.

$$d_{II} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{II}}{G\pi^2[\theta^0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 5000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1}} = 0,0778 \text{ (м)}.$$

Приймаємо  $d_{II} = 80$  мм.

Ділянка CD.  $M_{III} = -2000$  Н·м.

$$d_{III} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{III}}{G \pi^2 [\theta^0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 2000}{8 \cdot 10^{10} \pi^2 \cdot 1}} = 0,0618 \text{ (м)}.$$

Приймаємо  $d_{III} = 65 \text{ мм}$ .

Будуємо епюру кутів закручування

Кут закручування знаходимо із виразу

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p},$$

де  $l$  – довжина відрізка вала;  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярний момент інерції.

Визначимо кут закручування граничних перерізів на кожній ділянці відносно перерізу в точці А.

Ділянка АВ.  $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$ ,  $M_I = -1000 \text{ Н·м}$ ,  $d_I = 55 \text{ мм}$ .

$$I_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,055^4}{32} = 8,98 \cdot 10^{-7} \text{ (м}^4\text{)},$$

$$\varphi_{BA} = \frac{M_I \cdot l}{G \cdot I_{p1}} = \frac{-1000 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 8,98 \cdot 10^{-7}} = -0,0139 \text{ рад} = 0,80^\circ.$$

Ділянка ВС.  $0 \leq x_2 \leq 0,5 \text{ м}$ ,  $M_{II} = -5000 \text{ Н·м}$ ,  $d_{II} = 80 \text{ мм}$ .

$$I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,08^4}{32} = 4,02 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^4\text{)},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{CA} &= \varphi_{BA} + \frac{M_{II} \cdot 0,5}{G \cdot I_{p2}} = -0,0139 + \frac{-5000 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,02 \cdot 10^{-6}} = \\ &= -0,0139 - 0,0078 = -0,0217 \text{ рад} = -1,24^\circ, \end{aligned}$$

Ділянка CD.  $0 \leq x_3 \leq 0,7 \text{ м}$ ,  $M_{III} = -2000 \text{ Н·м}$ ,  $d_{III} = 65 \text{ мм}$ .

$$I_{p3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,065^4}{32} = 1,75 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^4\text{)},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{DA} &= \varphi_{CA} + \frac{M_{III} \cdot 0,7}{G \cdot I_{p3}} = -0,0217 + \frac{-2000 \cdot 0,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-6}} = \\ &= -0,0217 - 0,0100 = -0,0317 \text{ рад} = -1,82^\circ. \end{aligned}$$

Виходячи із отриманих значень  $\varphi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), будуємо епюру кутів закручування вала (рис 5.10), враховуючи лінійний вид графіка.

## 6 ЗГИН

### 6.1 Короткі теоретичні відомості

#### 6.1.1 Основні поняття

Розглянемо призматичний брус з прямою віссю, на який діє ряд зрівноважених сил, розташованих в одній площині, що проходить через вісь бруса (рисунки 6.1). У такому випадку брус зазнаватиме деформації згину. Площину, в якій розташовані сили, що викликають згинання бруса, називають площиною дії згинальних сил. Площину, що проходить через вісь бруса і головні осі інерції поперечних перерізів, називають головною площиною бруса.

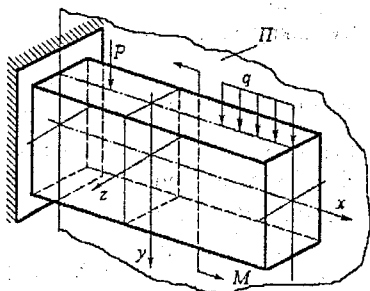


Рисунок 6.1

Якщо площина дії згинальних сил збігається з головною площиною, то і згин буде відбуватися в цій же площині. Такий згин називається прямим або плоским згином.

Будь-який брус з прямолінійною віссю, що зазнає деформації згину, називають балкою. Балка, жорстко закріплена одним кінцем (рисунки 6.2, а), або ділянка балки, один кінець якої без опори (рисунки 6.2, б, ділянка  $l_3$ ) називається консоллю. На рисунку 6.2, б зображено балку на трьох опорах, навантажену зосередженими силами  $P_1$ ,  $P_2$ , рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$  і парою сил  $M$ . Відстань між двома суміжними опорами балок називають прогоном. Кінець балки, який звисає називають консольним кінцем.

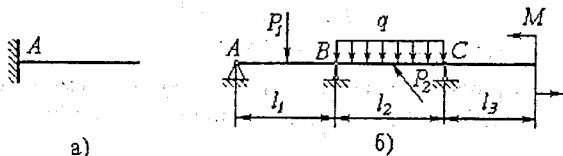


Рисунок 6.2

#### 6.1.2 Напруження при чистому згині

Згин балки, при якому згинальний момент сталий по довжині бруса, а поперечна сила дорівнює нулю, називається чистим згином. Чистий згин

можна отримати, якщо прикласти до бруса в кінцевих перерізах рівні за величиною і протилежного напрямку пари сил, які діють в площині симетрії бруса (рисунк 6.3, а) або навантажити брус силами (рисунк 6.3, б). Дослід показує, що при чистому згині поздовжні лінії  $ab$  і  $a_0b_0$ , нанесені на поверхню бруса, викривляються, а поперечні  $a_0a$  і  $b_0b$  повертаються, залишаючись прямими і перпендикулярними зігнутим лініям (рисунки 6.4, а, б). Поздовжні волокна бруса зазнають простого розтягу або стиску, не спричинюючи взаємного бокового стиску.

По висоті перерізу бруса деформація розтягання і стискання змінюється безперервно. Отже, в середині бруса існує шар, який відділяє зону розтягання від зони стискання. Волокна цього шару не зазнають ніякої деформації. Такий шар називають нейтральним. Лінія перерізу нейтрального шару з площиною поперечного перерізу бруса називається нейтральною лінією.

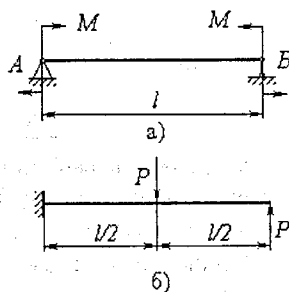


Рисунок 6.3

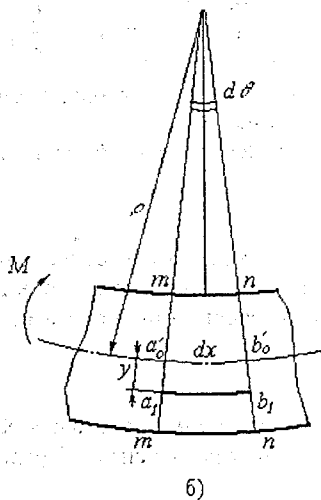
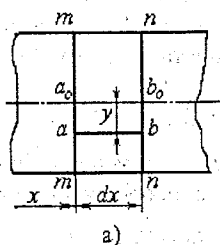


Рисунок 6.4

Визначимо величину нормальних напружень (рисунк 6.4, б), які виникають при чистому згині. Для цього розглянемо деформацію ділянки бруса, вирізаної двома перерізами, розташованими на відстані  $dx$  один від одного (рисунк 6.4, а). Нейтральний шар на цьому рисунку зображений лінією  $a_0b_0 = dx$ .

Позначимо радіус кривизни нейтрального шару через  $\rho$ , а кут повороту перерізу n-n відносно перерізу m-m – через  $d\theta$ . Розглянемо відносне видовження довільного волокна  $ab$ , розташованого на відстані  $y$  від нейтрального шару (рисунк 6.4, б).

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (6.1)$$

За законом Гука нормальне напруження в волокні  $ab$  буде рівне

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (6.2)$$

Розглянемо переріз  $m$ - $m$  (рисунок 6.4, б). Візьмемо на площині перерізу елементарну площадку  $dA$  з координатами  $y$  і  $z$ . На цю площадку діє нормальне зусилля  $dN = \sigma_x dA$ . Сума моментів елементарних внутрішніх сил  $dN$  відносно осі  $z$  дає величину внутрішнього згинального моменту, який діє в цьому перерізі

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA. \quad (6.3)$$

Підставимо значення  $\sigma_x$  із (6.2)

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \quad \text{або} \quad M_z = \frac{E}{\rho} \cdot I_z,$$

де  $I_z = \int_A y^2 dA$  – осьовий момент інерції бруса відносно осі  $z$ .

Перепишемо (6.3) у вигляді

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (6.4)$$

Вираз (6.4) – це залежність між згинальним моментом і кривизною осі бруса при чистому згині. Добуток  $EI_z$  називається жорсткістю поперечного перерізу бруса при згині. Підставивши (6.4) в (6.2) знайдемо

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y. \quad (6.5)$$

Вияснимо положення осі  $z$  – нейтральної лінії перерізу. При чистому згині нормальна сила в перерізі дорівнює нулю, тобто

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0.$$

Оскільки  $E/\rho \neq 0$ , то  $\int_A y \cdot dA = 0$ . Цей інтеграл являє собою статичний момент площі перерізу бруса відносно осі  $z$ , оскільки  $\int_A y \cdot dA = 0$ , то вісь  $z$  проходить через центр ваги перерізу.

При чистому згині дорівнює нулю згинальний момент відносно осі  $y$ , тобто

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot z \cdot dA = 0.$$

Оскільки відцентровий момент  $I_{zy} = \int_A zy dA = 0$ , то вісь  $z$  є головною.

Отже нейтральна лінія при згині збігається з головною віссю перерізу.

Як видно із (6.5) нормальні напруження змінюються по висоті перерізу за лінійним законом. На рисунку 6.5 показані епюри нормальних напружень. Найбільші напруження виникають у точках найбільш віддалених від нейтральної лінії, для яких  $y = y_{\max}$ . Величину найбільших напружень у перерізі визначають за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max} \quad (6.6)$$

Величина

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

називається осевим моментом опору перерізу. Поняття моменту опору вводиться, як правило, для перерізів, симетричних відносно нейтральної осі (рисунок 6.5, а, б). Для таких перерізів формула (6.6) записується у вигляді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (6.7)$$

Якщо переріз несиметричний відносно нейтральної лінії, то

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_A, \quad \sigma_{\min} = \frac{M_z}{I_z} y_B, \quad (6.8)$$

де  $y_A, y_B$  – координати найбільш віддалених точок перерізу.

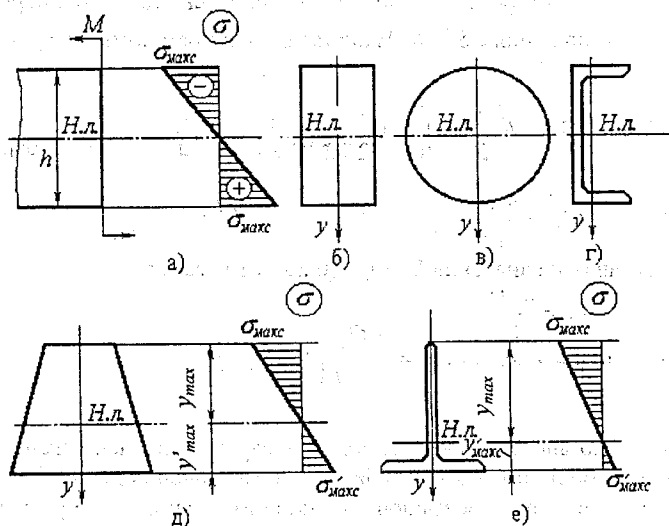


Рисунок 6.5

### 6.1.3 Поперечний згин. Дотичні напруження

При поперечному згині бруса в його перерізах, крім згинального моменту діє поперечна сила. У цьому випадку, крім нормальних напружень від згинального моменту, у перерізах виникають також дотичні напруження від поперечної сили. Їх розраховують за формулою Журавського

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{b \cdot I_z}, \quad (6.9)$$

де  $Q_y$  – поперечна сила в перерізі,  $b$  – ширина перерізу в тому місці, де треба обчислити дотичні напруження,  $S_z^*$  – абсолютна величина статичного моменту площі відносно осі  $z$  тієї частини площі перерізу  $A^*$ , яка відсікається прямою, паралельною нейтральній осі  $z$ , проведеної через точку, в якій визначається дотичне напруження,  $I_z$  – момент інерції перерізу відносно осі  $z$  (рисунки 6.6, а).

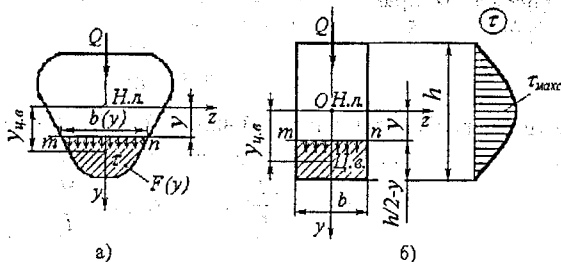


Рисунок 6.6.

Оскільки для перерізу  $Q_y$  і  $I_z$  величини сталі, то закон розподілу дотичних напружень по висоті перерізу визначається відношенням  $S_z^* / b$ . Наприклад, для прямокутного перерізу

$$S_z^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Підставивши значення  $S_z^*$  і  $I_z$  в (6.25), отримаємо

$$\tau_{yx} = \frac{3 Q_y}{2 b \cdot h} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right).$$

Отже, по висоті прямокутного перерізу дотичні напруження змінюються за параболічним законом. Найбільшого значення дотичні напруження досягають в точках, розташованих на нейтральній лінії при  $y=0$  (рисунок 6.6).

## 6.1.4 Аналіз напруженого стану при згині.

### Розрахунки на міцність

Як видно із рисунка 6.5 і рисунка 6.6 в точках, які лежать на верхній і нижній границях поперечного перерізу, мають місце тільки нормальні напруження і в цих точках вони набувають найбільшого значення. Таким чином для цих точок умову міцності можна записати у вигляді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (6.10)$$

Якщо матеріал крихкий і по різному чинить опір розтяганням і стиску, то балки із такого матеріалу мають несиметричний по відношенню до нейтральної лінії переріз (рис. 6.5, г). Такі балки розміщують так, щоб більші за абсолютною величиною напруження були стискувальні, а менші – розтягуювальні (рисунк 6.5, д). Умови міцності для таких випадків приймають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_A &= \frac{M_z}{I_z} \cdot y_A \leq [\sigma]_p, \\ \sigma_{\min} = \sigma_B &= \frac{M_z}{I_z} \cdot y_B \leq [\sigma]_{cm}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

де  $[\sigma]_p$  – допустиме напруження при розтягу, а  $[\sigma]_{cm}$  – допустиме напруження при стиску.

Таким чином для балок із пластичних матеріалів, які однаково працюють на розтяг і стиск, доцільно вибирати перерізи, симетричні відносно їх нейтральних осей. При цьому забезпечується однаковий запас міцності по стиснутих і розтягнених волокнах. Якщо крім умови міцності виходить ще із вимоги мінімальної маси балки, то найбільш раціональним буде переріз, який при заданій величині моменту опору  $W_z$  має найменшу площу перерізу  $A$  або при заданій площі  $A$  – найбільший момент опору  $W_z$ . Порівнюючи з цих позицій, наприклад, прямокутний переріз з двотавровим, неважко переконатись в перевазі останнього.

У балки прямокутного перерізу матеріал в області нейтральної лінії повністю не використовується, оскільки знаходиться в зоні з малими напруженнями. У двотаврової балки більша частина матеріалу розміщена в найбільш напруженій зоні. Тому при однаковій міцності двотаврова балка в 2...3 рази легша прямокутної. В точках перерізу, розміщених на нейтральній осі, діють тільки дотичні напруження (рисунках 6.5 і 6.6), тому умова міцності для цих точок буде така:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\max}}{b \cdot I_z} \leq [\tau]. \quad (6.12)$$

В решті точок перерізу при поперечному згині має місце плоский напружений стан, тобто одночасно діють дотичні і нормальні напруження (рисунок 6.7). Умова міцності записується у вигляді

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma]. \quad (6.13)$$

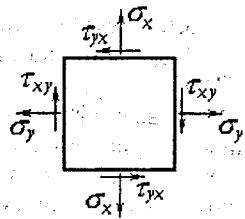


Рисунок 6.7

Головні напруження в цих точках визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

Еквівалентне напруження  $\sigma_{екв}$  вибирається в залежності від прийнятої теорії міцності.

Для пластичних матеріалів – за третьою теорією міцності.

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}. \quad (6.15)$$

Для крихких матеріалів за теорією Мора

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - m\sigma_3 = \frac{1-m}{2} \sigma_x + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2}, \quad (6.16)$$

де  $m = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]}$ .

Більшість розрахунків на міцність при згині роблять за формулою (6.10). Для цього необхідно побудувати епюру згинальних моментів  $M_z$  і по ній визначити небезпечний переріз, тобто той переріз, в якому  $M_z$  має найбільше значення.

Можливі випадки, коли при великих поперечних силах в перерізах балки діють незначні згинальні моменти (короткі балки). В цьому випадку підбирають переріз за (6.10) і обов'язково перевіряють чи виконується умова міцності (6.12) для точок, які лежать на нейтральній лінії. Перерізи, в яких діють найбільша поперечна сила і найбільший згинальний момент можуть збігатися.

В балках з тонкостінним перерізом небезпечною може бути точка перерізу, розміщена в місці переходу стінки в полицю (рисунок 6.5, г). Тут має місце плоский напружений стан, тобто  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\tau_{yx} \neq 0$ ,  $\sigma_y = 0$ .

Для перевірки міцності таких балок необхідно:

- визначити переріз, в якому діє найбільший згинальний момент і за (6.10) підібрати переріз;
- знайти переріз балки, в якому одночасно  $M_z$  і  $Q_y$  мають найбільші значення. Такий вибір не завжди однозначний, тому бувають випадки, коли таких перерізів більше одного;
- перевірити за формулами (6.15) або (6.16), залежно від матеріалу балки, чи виконуються ці умови міцності для небезпечної точки. Якщо умови міцності не виконуються, то збільшують розміри перерізу або вибирають за сортаментом більший номер профілю.

### 6.1.5 Рівняння пружної лінії зігнутої балки

В інженерній практиці розраховують балки не тільки на міцність, але й на жорсткість. При згині жорсткість характеризується здатністю балки чинити опір викривленню. При деформації в межах пружності зігнуту вісь балки називають пружною лінією. Відхилення будь-якої точки осі балки від первісної прямої називають прогином. Кут повороту будь-якого перерізу балки відносно його початкового положення називають кутом повороту перерізу.

В п. 6.1.2 встановлено, що кривизна пружної лінії прямо пропорційна згинальному моменту (6.4)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

З курсу вищої математики відомо, що

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

таким чином

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_z}{EI_z} \quad (6.17)$$

Рівняння (6.17) називають диференціальним рівнянням пружної лінії і інтегрування цього рівняння пов'язане з великими труднощами. Тому в тих випадках, коли прогини невеликі, величиною  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  порівняно з оди-

ницею можна знехтувати. Тоді дістанемо наближене диференціальне рівняння пружної лінії у вигляді

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M_z}{EI_z}. \quad (6.18)$$

Знак кривизни може не збігатися зі знаком згинального моменту і залежить від напрямку координатних осей. Якщо вісь  $y$  направити вгору а вісь  $x$  вправо, то знаки  $y''$  і  $M_z$  збігаються, тому в (6.18) запишемо знак "плюс"

$$y'' = \frac{M_z}{EI_z} \quad (6.19)$$

Інтегруючи це рівняння один раз, дістанемо рівняння кутів повороту

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1. \quad (6.20)$$

Інтегруючи вдруге, знайдемо

$$y = \int dx \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1 x + C_2, \quad (6.21)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування, які можна знайти із граничних умов.

### 6.1.6 Визначення кутових та лінійних переміщень методом початкових параметрів

Визначення переміщень методом безпосереднього інтегрування диференційного рівняння пружної лінії в випадку балок з великою кількістю ділянок ускладнено. Ці труднощі пов'язані не з інтегруванням диференціальних рівнянь, а з технікою визначення довільних сталих інтегрування – складанні і розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Так, якщо балка має  $n$  ділянок, то інтегрування диференціального рівняння (6.19) необхідно виконувати для кожної ділянки. В такому випадку буде  $2n$  сталих інтегрування, які визначають із умов на межах ділянок. Тому на практиці часто використовують метод початкових параметрів, який базується на диференціальних залежностях, справедливих для будь-якого перерізу балки між кутом повороту  $\theta$  та моментом  $M_z$  і дозволяє при будь-якій кількості ділянок звести розв'язання до визначення всього двох сталих – прогину і кута повороту перерізу в початку координат.

$$\frac{M_z}{EI_z} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (6.22)$$

між прогином  $y$  та кутом повороту  $\theta$  є залежність

$$\theta = \frac{dy}{dx}. \quad (6.23)$$

При використанні цього методу початок координат розміщують в крайньому лівому перерізі і він є загальним для всіх ділянок балки.

Згинальний момент визначають як алгебраїчну суму моментів всіх сил розміщених зліва від перерізу. При цьому зовнішній зосереджений момент  $M_1$  (рисунок 6.8), прикладений на відстані  $a$  від початку координат, множать на величину  $(x-a)^0$ , яка дорівнює 1, а розподілене навантаження, у випадку його обриву (наприклад при  $x = d$ ) продовжують до перерізу, в якому визначають переміщення і починаючи з перерізу  $x = d$  вводять розподілене навантаження протилежного напрямку. Інтегрування диференціального рівняння виконують не розкриваючи дужок.

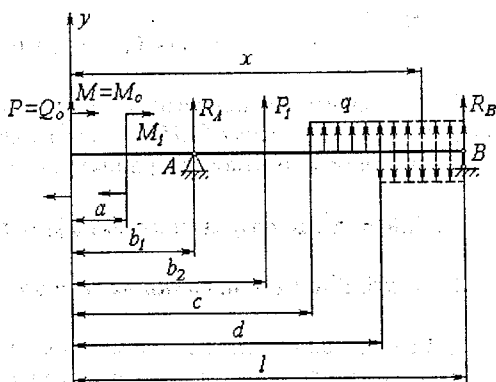


Рисунок 6.8

Напишемо вираз для згинального моменту в перерізі з координатою "x" (рисунок 6.8)

$$M_z = M_0 + Q_0 x + M_1 (x - a)^0 + R_A (x - b_1) + P_1 (x - b_2) + \frac{q(x - c)^2}{2} - \frac{q(x - d)^2}{2} \quad (6.24)$$

Проінтегруємо (6.24) з врахуванням (6.22) один раз, одержимо рівняння кутів повороту для балки сталої жорсткості

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI_z} \left( M_0 x + \frac{Q_0 x^2}{2} + \sum_{i=1}^n M_i (x - a_i) + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(x - b_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - c_i)^3}{3!} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - d_i)^3}{3!} \right) \quad (6.25)$$

Інтегруючи вдруге, одержимо рівняння прогинів

$$y = y_0 + \frac{1}{EI_z} \left( \frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} + \sum_{i=1}^n M_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(x - b_i)^3}{3!} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - c_i)^4}{4!} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x - d_i)^4}{4!} \right) \quad (6.26)$$

В перерізі балки, де взято початок координат, в загальному випадку будуть діяти поперечна сила, згинальний момент, а також будуть мати місце кут повороту і прогин, які ми позначили відповідно  $Q_0$ ,  $M_0$ ,  $\theta_0$ ,  $y_0$  і називатимемо їх далі початковими параметрами (рисунок 6.8). Для балки,

показаної на рисунку 6.8,  $Q_0=P$ ,  $M_0=M$ , а значення  $\theta_0$  і  $y_0$  можна визначити із умов закріплення

$$y(b_1) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Слід відмітити, що при визначенні кута повороту і прогину в перерізі з координатою  $x$  в рівняння (6.25) і (6.26) входять тільки ті навантаження, які знаходяться між початком координат і перерізом.

## 6.2 Завдання до розрахунково-графічної роботи

### Задача 6. Розрахунок балки на міцність і жорсткість

Для балки, що навантажена за заданою схемою (рис. 6.9 – 6.11):

- побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів і визначити небезпечні поперечні перерізи;
- підібрати круглий, прямокутний із співвідношенням сторін  $h:b=2$  і двотавровий переріз за умовою міцності при чистому згині;
- порівняти вагу балок кожного перерізу, зробити висновок щодо раціонального перерізу;
- перевірити міцність двотаврової балки за максимальними дотичними напруженнями;
- побудувати епюри нормальних та дотичних напружень в небезпечному поперечному перерізі балки та провести повну перевірку міцності за третьою теорією міцності, уточнити номер двотавра;
- із використанням методу початкових параметрів за допомогою ЕОМ побудувати пружну лінію балки та графік кутів повороту перерізу (додаток Г);
- перевірити балку на жорсткість та підібрати необхідний за умовою жорсткості переріз.

Матеріал балки – сталь Ст3, допустимий прогин  $[f] = l/400$ , де  $l$  – довжина балки. Інші дані для розрахунків взяти з таблиці.

Таблиця 6.1

Варіант	$q$ , кН/м	$P$ , кН	$M$ , кН·м
0	30	15	12
1	26	20	16
2	20	10	20
3	14	25	10
4	30	20	14
5	20	16	10
6	10	30	15
7	24	24	18
8	16	28	25
9	30	20	10

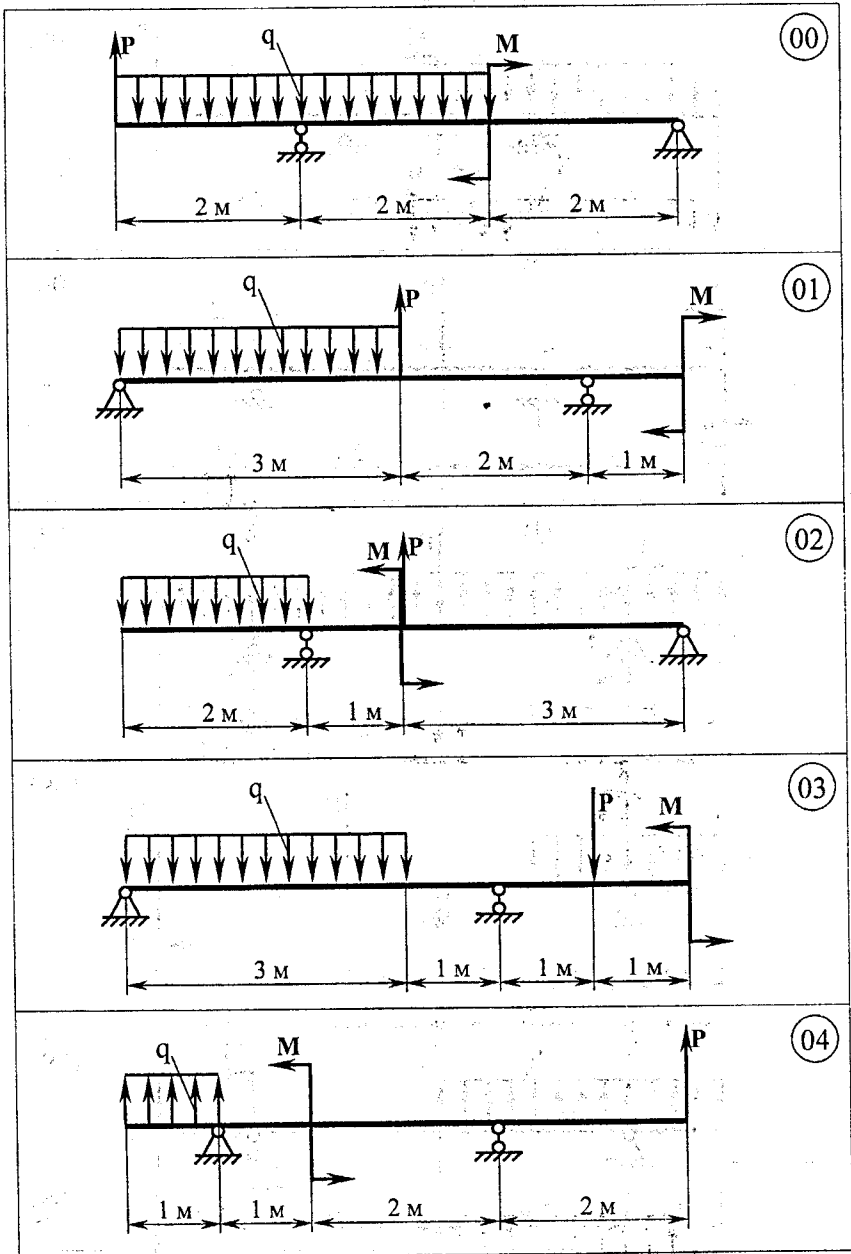


Рисунок 6.9

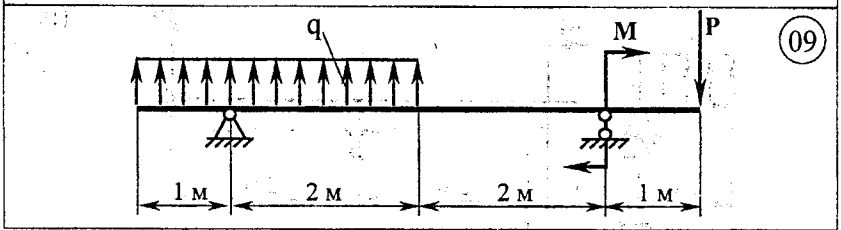
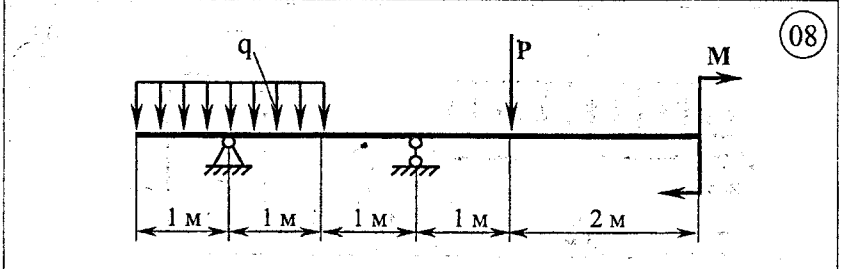
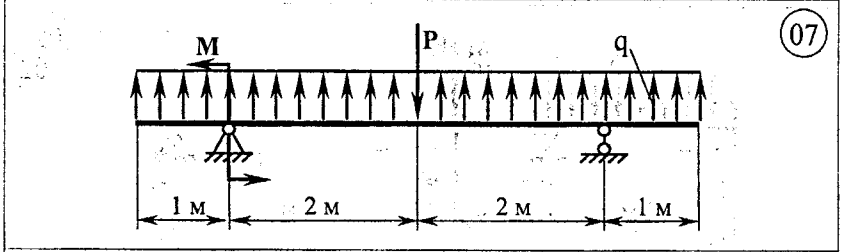
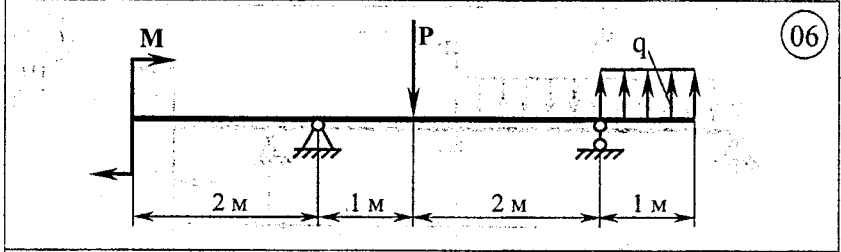
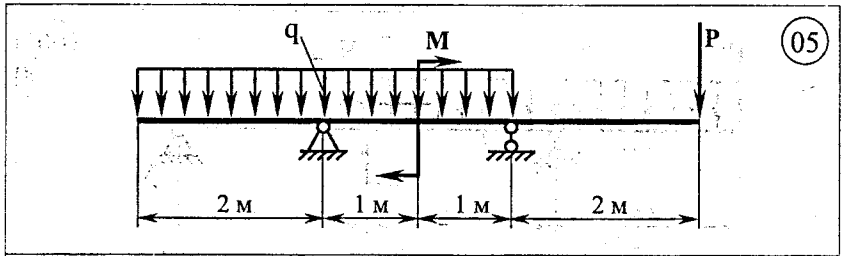


Рисунок 6.10

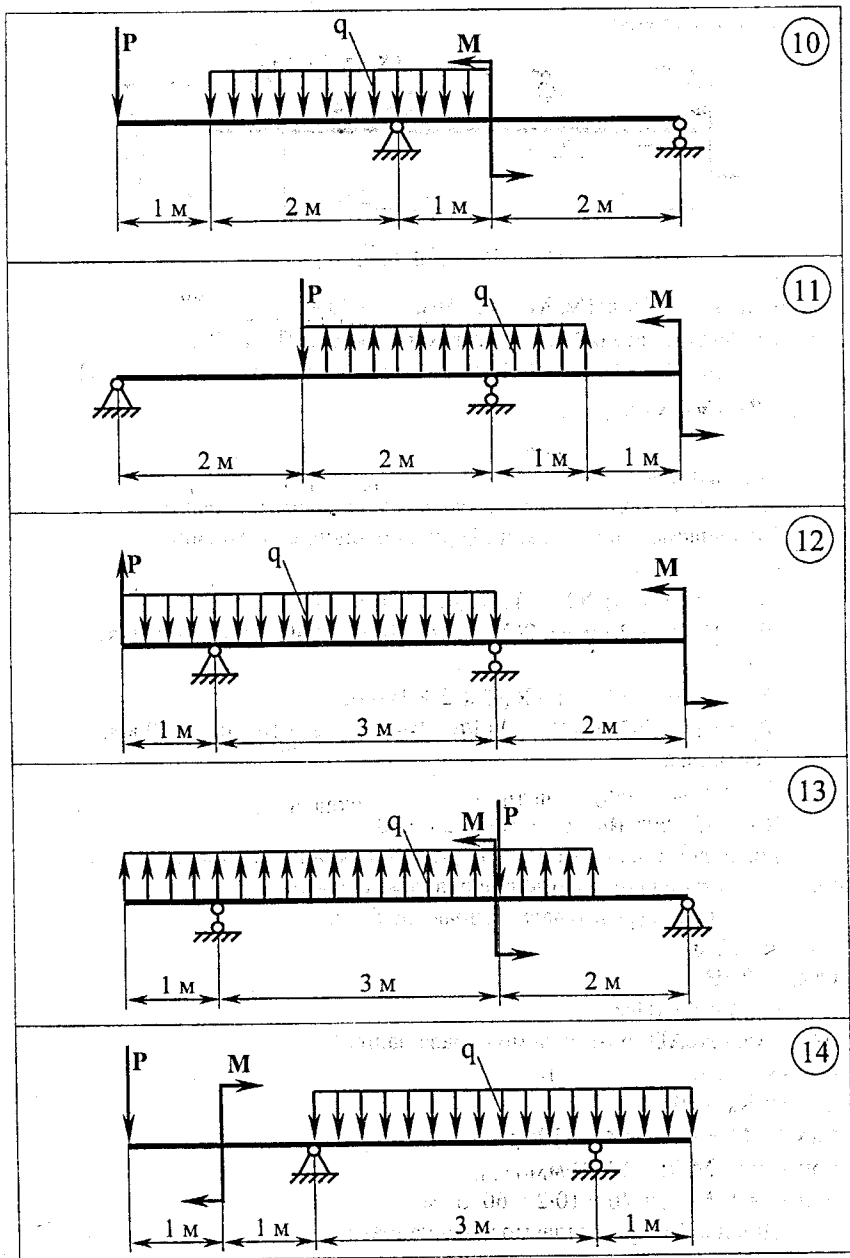


Рисунок 6.11

*Приклад.* Розрахувати балку на згин, згідно з приведеним в умові задачі 6 порядком розрахунку.

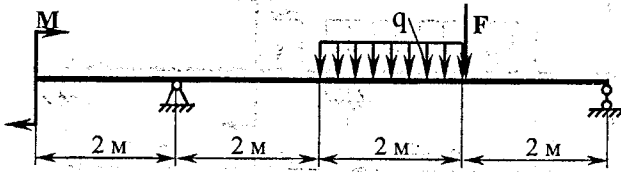


Рисунок 6.12

Вихідні дані:  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $F = 20 \text{ кН}$ .

Матеріал балки – сталь Ст5, допустимий прогин  $[f] = l/400$ ,

Знайти:  $M(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $b$ ; № двотавра,  $m_1:m_2:m_3$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\tau(y)$ ,  $\sigma(y)$ ,

$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}$ ,  $u(x)$ ,  $\theta(x)$ ,  $u_{\max}$  – ?

*Розв'язування*

*Побудова епоюр поперечних сил та згинальних моментів*

Визначаємо опорні реакції із рівнянь рівноваги статички.

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-M - F \cdot (2+2) - q \cdot 2(2+1) + R_B(2+2+2) = 0;$$

$$R_B = [M + F \cdot (2+2) + q \cdot 2(2+1)]/6 = [40 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 6]/6 = 30 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-M + F \cdot 2 + q \cdot 2(2+1) - R_A(2+2+2) = 0;$$

$$R_A = [-M + F \cdot 2 + q \cdot 2(2+1)]/6 = [-40 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 6]/6 = 10 \text{ кН.}$$

Перевірка.

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$R_A - q \cdot 2 - F + R_B = 10 - 10 \cdot 2 - 20 + 30 = 0.$$

Розділяємо балку на чотири ділянки і складаємо рівняння поперечних сил та згинальних моментів для кожної з них.

Ділянка EA (розглядаємо справа наліво).

$$0 \text{ м} \leq x_1 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q(x_1) = 0 \text{ кН;}$$

$$M(x_1) = M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка AD (розглядаємо справа наліво).

$$0 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q(x_2) = R_A = 10 \text{ кН;}$$

$$M(x_2) = M + R_A \cdot x_2 = 40 + 10x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad M(0) = 40 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

$$\text{при } x_2 = 2 \quad M(2) = 40 + 10 \cdot 2 = 60 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Ділянка BC (розглядаємо зліва направо).

$$0 \text{ м} \leq x_3 \leq 2 \text{ м.}$$

$$Q(x_3) = -R_B = -30 \text{ кН;}$$

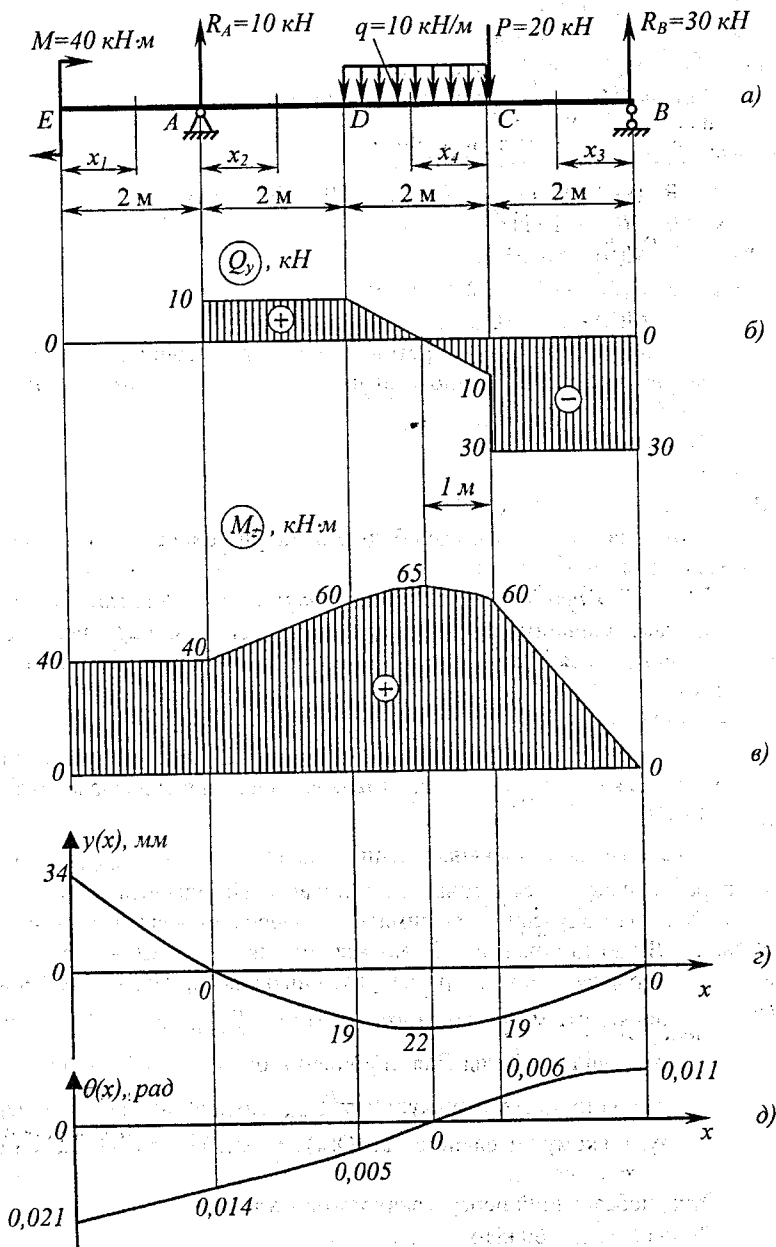


Рисунок 6.13

$$M(x_3) = R_B \cdot x_3 = 30x_3;$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad M(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_3 = 2 \quad M(2) = 30 \cdot 2 = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ділянка CD (розглядаємо зліва направо).

$$0 \text{ м} \leq x_4 \leq 2 \text{ м}.$$

$$Q(x_4) = -R_B + F + q \cdot x_4 = -10 + 10 \cdot x_4;$$

$$M(x_4) = R_B \cdot (x_3 + 2) - F \cdot x_4 - q \cdot (x_4)^2 / 2 = 60 + 10x_4 - 5 \cdot (x_4)^2;$$

$$\text{при } x_4 = 0 \quad Q(0) = -10 \text{ кН};$$

$$M(0) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{при } x_4 = 2 \quad Q(2) = -10 + 10 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$M(2) = 60 + 10 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки епора  $Q(x_4)$  перетинає вісь  $x$ , то в точці перетину епора  $M(x_4)$  набуває екстремального значення.

$$Q(x_4) = 0;$$

$$-10 + 10 \cdot x_4 = 0,$$

$$\text{звідки } x_4 = 1 \text{ м};$$

$$M(1) = 60 + 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 65 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За отриманими значеннями будуюмо епори поперечних сил  $Q(x)$  та згинальних моментів  $M(x)$ .

*Визначення небезпечних поперечних перерізів по довжині балки*

За максимальними нормальними напруженнями  $\sigma_{\max}$  небезпечний переріз знаходиться в точці, де діє максимальний згинальний момент (за модулем)

$$M_{\max} = 65 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

За максимальними дотичними напруженнями  $\tau_{\max}$  небезпечний переріз знаходиться в точці, де діє максимальна поперечна сила (за модулем)

$$Q_{\max} = 30 \text{ кН}.$$

За максимальними еквівалентними напруженнями  $\sigma_{\text{екв max}}^{\text{III}}$  небезпечний переріз знаходиться в точці, де одночасно діє максимальний згинальний момент (за модулем) та максимальна поперечна сила (за модулем).

*Вказівка.* Якщо ці точки не збігаються, то для визначення небезпечного перерізу необхідно розрахувати низку перерізів, в яких ймовірно досягають максимального значення  $\sigma_{\text{екв max}}^{\text{III}}$  або будувати епору розподілу  $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}(x)$ . Для спрощення оптимального пошуку в навчальних цілях розрахунок  $\sigma_{\text{екв max}}^{\text{III}}$  можна виконати для перерізу, в якому чисельно сума  $|Q(x)| + |M(x)|$  набуває максимального значення.

Отже небезпечний переріз знаходиться в т. С, де

$$Q(x) = 30 \text{ кН}, \quad M(x) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$|Q(x)| + |M(x)| = 30 + 60 = 90 \rightarrow \text{max}.$$

Проектний розрахунок перерізів за умовою міцності при чистому згині

$$M_{\max} = 65 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Визначаємо допустимі напруження.

Допустиме нормальне напруження для сталі Ст5 (пластичний матеріал) дорівнює (формула 2.20)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sigma_m}{n} = \frac{320}{2} = 160 \text{ МПа,}$$

де  $\sigma_n = \sigma_m = 320 \text{ МПа}$  – границя текучості сталі 5 (див. додаток Ж),  
 $n$  – коефіцієнт запасу міцності при дії на конструкцію статичного навантаження  $n = 1,5 \dots 2$ , приймаємо  $n = 2$ .

Таким чином  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Допустиме дотичне напруження для сталі (пластичний матеріал) приймаємо

$$[\tau] = 0,5 \dots 0,6 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа.}$$

За формулою (6.10) знаходимо необхідний момент опору

$$W_{zn} \geq \frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{65 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 406,25 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3) = 406,3 \text{ см}^3. \quad (6.27)$$

За сортаментом підбираємо двотавр №27а (додаток Д), для якого  $W_z = 407 \text{ см}^3$ ,  $S_z^{\max} = 229 \text{ см}^3$ ,  $I_z = 5500 \text{ см}^4$ ,  $A = 43,2 \text{ см}^2$ ,  $h = 27 \text{ см}$ ,  $b = 135 \text{ мм}$ ,  $d = 6 \text{ мм}$ ,  $t = 10,2 \text{ мм}$ .

Для круглого перерізу момент опору

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ звідки } d = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}}.$$

Необхідний діаметр з урахуванням (6.27)

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{32W_{zn}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 406,3}{\pi}} = 16,06 \text{ см.}$$

Округляємо діаметр до стандартного числа та приймаємо  $d = 165 \text{ мм}$ .

Для прямокутного перерізу момент опору (розміщуємо переріз раціонально)

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \text{ звідки при умові } h = 2b$$

$$W_z = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{3W_z}{2}}.$$

Необхідний діаметр з урахуванням (6.27)

$$b_n \geq \sqrt[3]{\frac{3W_{zn}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 406,3}{2}} = 8,49 \text{ см.}$$

Округляємо ширину  $b$  та приймаємо  $b = 85 \text{ мм}$ . Висота прямокутника  $h = 2b = 170 \text{ мм}$ .

### Вибір раціонального перерізу

Порівняємо вагу балок кожного перерізу. Співвідношення мас балок прямо пропорційне площам їх перерізів при однаковій густині матеріалу  $\rho$  та довжині балки:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1 \rho}{V_2 \rho} = \frac{A_1 l}{A_2 l} = \frac{A_1}{A_2};$$
$$\frac{m_{\text{кругл}}}{m_{\text{двотавр}}} = \frac{A_{\text{к}}}{A_{\text{д}}} = \frac{(\pi/4)d^2}{A_{\text{д}}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4A_{\text{д}}} = \frac{\pi \cdot 16,5^2}{4 \cdot 43,2} = 4,95;$$
$$\frac{m_{\text{прямок}}}{m_{\text{двотавр}}} = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{д}}} = \frac{bh}{A_{\text{д}}} = \frac{b \cdot h}{A_{\text{д}}} = \frac{8,5 \cdot 17}{43,2} = 3,34.$$

Отже, с точки зору економії матеріалу двотавровий переріз балки є раціональнішим, оскільки балка буде мати найменшу масу. Круглий переріз із розрахованих матиме найбільшу масу (майже в 5 разів ніж двотавровий).

*Перевірка міцності двотаврової балки за максимальними дотичними напруженнями*

$Q_{\text{max}} = 30$  кН.

Максимальні дотичні напруження згідно з формулою Журавського рівні

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} S_z^{\text{max}}}{I_z d} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 20,8 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Перевіримо виконання умови міцності

$$\tau_{\text{max}} = 20,8 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа.}$$

Таким чином, міцність балки за максимальними дотичними напруженнями забезпечена.

*Вказівка.* При невиконанні умови міцності.

Якщо максимальне дотичне напруження  $\tau_{\text{max}}$  не перевищує допустиме  $[\tau]$  більше ніж на 5% ( $\tau_{\text{max}} < 1,05[\tau]$ ), то розміри перерізу (№ двотавра) залишають без змін з відповідним обґрунтуванням. Якщо  $\tau_{\text{max}}$  перевищує допустиме  $[\tau]$  більше ніж на 5% ( $\tau_{\text{max}} > 1,05[\tau]$ ), то необхідно збільшити розміри перерізу (№ двотавра) та виконати перевірку для нового перерізу.

*Побудова епюр нормальних та дотичних напружень в небезпечному поперечному перерізі та повна перевірка міцності двотаврової балки*

Небезпечний переріз знаходиться в т. С, де

$$Q(x) = 30 \text{ кН}, M(x) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Знайдемо значення нормальних та дотичних напружень для характерних точок двотаврового перерізу (рис. 6.14), використовуючи відомі формули

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad \tau = \frac{Q_y S_z(y)}{I_z b}$$

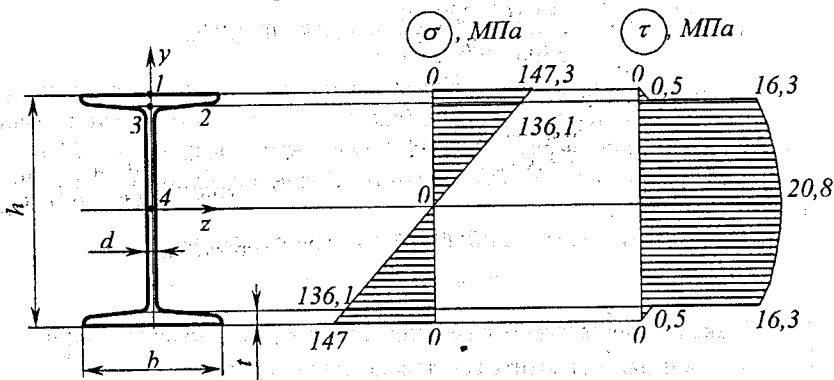


Рисунок 6.14

Точка 1 належить граничній поверхні полиці “зверху”

$$y_1 = h/2 = 0,135 \text{ м}, S_z(y_1) = 0, b = 0,135 \text{ м.}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_z}{I_z} y_1 = \frac{60 \cdot 10^3}{5500 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,135 = 147,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 147,3 \text{ МПа},$$

$$\tau_1 = \frac{Q_y S_z(y_1)}{I_z b} = 0 \text{ МПа.}$$

Точка 2 належить полиці “знизу”

$$y_2 = \frac{h}{2} - t = 0,135 - 0,0102 = 0,1248 \text{ м}, b = 0,135 \text{ м},$$

$$S_z(y_2) = b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 0,135 \cdot 0,0102 \left( \frac{0,27}{2} - \frac{0,0102}{2} \right) = 178,9 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)}.$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z}{I_z} y_2 = \frac{60 \cdot 10^3}{5500 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,1248 = 136,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{Q_y S_z(y_2)}{I_z b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 178,9 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 135 \cdot 10^{-3}} = 0,50 \text{ МПа.}$$

Точка 3 належить стінці в місці переходу стінки до полиці

$$y_3 = y_2 = 0,1248 \text{ м}, S_z(y_3) = S_z(y_2) = 178,9 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)}, b = d = 0,006 \text{ м.}$$

$$\sigma_3 = \sigma_2 = 136,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{Q_y S_z(y_3)}{I_z b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 178,9 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 16,3 \text{ МПа.}$$

Точка 4 належить нейтральній лінії

$$y_4 = \theta_M, S_z(y_4) = S_{z \max} = 229 \text{ см}^3, b = d = 0,006 \text{ м.}$$

$$\sigma_4 = 0 \text{ МПа,}$$

$$\tau_4 = \frac{Q_y S_{z \max}}{I_z b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^{-6}}{5500 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 20,8 \cdot 10^6 \text{ МПа.}$$

За отриманими значеннями нормальних та дотичних напружень будемо відповідні епюри в перерізі (рис. 6.14), враховуючи розташування стиснутих волокон зверху (нормальні напруження в цьому місці будуть мати знак “-”), а також симетричність обох епюр відносно нейтральної лінії (осі z).

Еквівалентне напруження за третьою теорією міцності

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}.$$

Максимальне еквівалентне напруження  $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III max}}$  буде спостерігатись в точці 3 (за наявності досить великих дотичних напружень), тому

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III max}} = \sqrt{\sigma_3^2 + 4 \cdot \tau_3^2} = \sqrt{136,1^2 + 4 \cdot 16,3^2} = 139,9 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Умова міцності для точки “3” за третьою теорією міцності (для пластичних матеріалів) також виконується.

*Вказівка.* При невиконанні умови міцності.

Якщо максимальне еквівалентне напруження  $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}$  не перевищує допустиме  $[\sigma]$  більше ніж на 5% ( $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III max}} < 1,05[\sigma]$ ), то розміри перерізу (№ двотавра) залишають без змін з відповідним обґрунтуванням. Якщо  $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}}$  перевищує допустиме  $[\sigma]$  більше ніж на 5% ( $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III max}} > 1,05[\sigma]$ ), то необхідно збільшити № двотавра та виконати перевірку для нового перерізу тільки в точці 3.

*Розрахунок балки на жорсткість*

Рівняння кутів повороту і прогинів для балки (див. рис. 6.13 а) за методом початкових параметрів (див. рівняння 6.25, 6.26, рис. 6.8)

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI_z} \left[ Mx + \frac{R_A(x-2)^2}{2} - \frac{q(x-4)^3}{6} + \frac{q(x-6)^3}{6} - \frac{F(x-6)^2}{2} \right],$$

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{M(x)^2}{2} + \frac{R_A(x-2)^3}{6} - \frac{q(x-4)^4}{24} + \frac{q(x-6)^4}{24} - \frac{F(x-6)^3}{6} \right].$$

Ділянка EA

$$0 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м.}$$

$$y(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI_z} \frac{M(x)^2}{2}.$$

(6.28)

Ділянка AD

$$2 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м.}$$

$$y(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{M(x)^2}{2} + \frac{R_A(x-2)^3}{6} \right],$$

(6.29)

Ділянка BC

$$4 \text{ м} \leq x \leq 6 \text{ м.}$$

$$y(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{M(x)^2}{2} + \frac{R_A(x-2)^3}{6} - \frac{q(x-4)^4}{24} \right]. \quad (6.30)$$

Ділянка CD

$$6 \text{ м} \leq x \leq 8 \text{ м.}$$

$$y(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{M(x)^2}{2} + \frac{R_A(x-2)^3}{6} - \frac{q(x-4)^4}{24} + \frac{q(x-6)^4}{24} - \frac{F(x-6)^3}{6} \right].$$

Початкові параметри  $y_0$  та  $\theta_0$  визначимо із умов закріплення балки при  $x = 2 \text{ м}$ ,  $y(2) = 0$ ;  
при  $x = 8 \text{ м}$ ,  $y(8) = 0$ .

$$\begin{cases} y(8) = y_0 + 8\theta_0 + \frac{10^3}{EI_z} \left[ \frac{40 \cdot 8^2}{2} + \frac{10(8-2)^3}{6} - \frac{10(8-4)^4}{24} + \frac{10(8-6)^4}{24} - \frac{20(8-6)^3}{6} \right] = 0; \\ y(2) = y_0 + 2\theta_0 + \frac{10^3}{EI_z} \left[ \frac{40 \cdot 2^2}{2} \right] = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 + 8\theta_0 + \frac{1513 \cdot 10^3}{EI_z} = 0; \\ y_0 + 2\theta_0 + \frac{80 \cdot 10^3}{EI_z} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи рівнянь

$$\theta_0 = \frac{-239 \cdot 10^3}{EI_z} = \frac{-239 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = -0,021 \text{ (рад)},$$

$$y_0 = \frac{398 \cdot 10^3}{EI_z} = \frac{398 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 0,034 \text{ (м)}.$$

Вказівка. В загальному вигляді система типових рівнянь має розв'язок

$$\begin{cases} y_0 + x_1 \theta_0 + \frac{\alpha}{EI_z} = 0; \\ y_0 + x_2 \theta_0 + \frac{\beta}{EI_z} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_0 = \frac{1}{EI_z} \frac{\beta - \alpha}{x_1 - x_2}; \\ y_0 = \frac{1}{EI_z} \frac{\alpha \cdot x_2 - \beta \cdot x_1}{x_1 - x_2}. \end{cases}$$

Кінцеве загальне рівняння пружної лінії та кутів повороту перерізу

$$y(x) = 0,034 - 0,021x + \frac{10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} \times \left[ \frac{40 \cdot x^2}{2} + \frac{10(x-2)^3}{6} - \frac{10(x-4)^4}{24} + \frac{10(x-6)^4}{24} - \frac{20(x-6)^3}{6} \right]$$

$$\theta(x) = -0,021 + \frac{10^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} \times \left[ 40 \cdot x + \frac{10(x-2)^2}{2} - \frac{10(x-4)^3}{6} + \frac{10(x-6)^3}{6} - \frac{20(x-6)^2}{2} \right]$$

Розраховані прогини та кути повороту перерізу для низки значень  $x$  приведені в таблиці 6.2.

*Вказівка.* Для побудови пружної лінії необхідно обов'язково розрахувати прогини посередині між точками опор та в крайніх точках консольних ділянок, якщо такі є. З незначною похибкою можна вважати, що в одній з цих точок прогин буде мати максимальне значення. Для наочності графіка необхідно взяти також проміжні точки з певним інтервалом (наприклад, 1 м).

Таблиця 6.2

$x, \text{ м}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(x), \text{ мм}$	34	15	0	-12	-19	-22	-19	-11	0
$\theta(x), \text{ рад}$	-0,021	-0,017	-0,014	-0,010	-0,005	0	0,006	0,010	0,011

Знак "мінус" при  $y(x)$  та  $\theta(x)$  вказує, що балка в цій точці прогинається вниз, а переріз повертається вправо.

За отриманими значеннями будуюмо відповідні графіки пружної лінії та кутів повороту перерізу (див. рис. 6.13 г, д).

*Підбираємо необхідний за умовою жорсткості переріз*

Допустимий прогин

$$[f] = l/400 = 8/400 = 0,02 \text{ (м)} = 20 \text{ мм.}$$

Максимальний прогин (див табл. 6.2) за модулем  $y_{\max} = 34 \text{ мм.}$

Умова жорсткості балки

$$y_{\max} \leq [f]$$

не виконується  $y_{\max} = 34 \text{ мм} > [f] = 20 \text{ мм}$ , тому необхідно підібрати більш жорсткий переріз (збільшити розміри або підвищити номер двотавра).

Необхідний мінімальний момент інерції перерізу має бути

$$I_{z \min} = I_z \frac{y_{\max}}{[f]} = 5500 \frac{34}{20} = 9350 \text{ (см}^4\text{)}.$$

За сортаментом підбираємо двотавр №33, в якого  $I_z = 9840 \text{ (см}^4\text{)}.$

В додатку Г приведена програма-інструкція розрахунку на міцність та жорсткість двоопорних балок. Контроль машинного розрахунку та вручну виконується на всіх етапах розв'язування задачі.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Огородніков В.А., Сивак І.О., Бабак М.В. Опір матеріалів з елементами теорії пластичності. Частина 1. Навчальний посібник. — Вінниця: ВДТУ, 2001 — 100 с.
2. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. — К.: Вища школа, 1995.
3. Нахайчук В.Г., Матвійчук В.А., Чернілевський О.В. Технічна механіка. Кн. 2. Опір матеріалів. — К.: НМКВО, 1992 р.
5. Сборник задач по сопротивлению материалов. / Под ред. Качурина В.К. М., 1972.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов / Уманский А.А., Афанасьев А.М., Вольмир А.С. и др. М., 1973.
7. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М., 1975.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
10. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / под общ. ред. Г.С. Писаренко. — Киев: Вища школа, 1979 — 696 с.
11. Н.М. Беляев. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1976 — 608 с.
12. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров, М.К. Балькин, И.А. Голубев и др. — Мн.: Наука и техника, 1988 — 464 с.
13. Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наукова думка, 1975 — 704 с.

Додаток А

Оформлення розрахунково-графічної роботи

Титульний лист

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

Інститут МТ

Кафедра ОМПМ  
Секція опору матеріалів

Розрахунково-графічна робота №1

з дисципліни "Опір матеріалів"

Задача 1. Побудова епюр внутрішніх силових факторів (а, б, в, г)

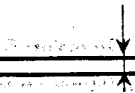
Задача 2. Розрахунок статично невизначуваних систем при розтягу  
(стиску) із пружними зв'язками

Варіант 108

Викладач: доцент, к.т.н. \_\_\_\_\_ О.І. Іванов  
(підпис)  
" " \_\_\_\_\_ 2003 р.

Виконав: ст. гр. 1Б-01 \_\_\_\_\_ І.О. Петров  
(підпис)  
" " \_\_\_\_\_ 2003 р.

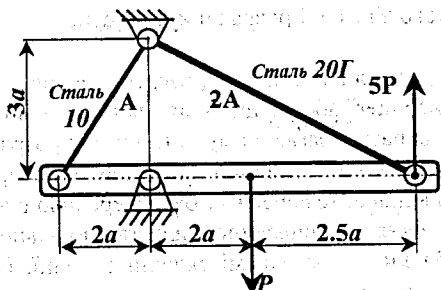
ВНТУ 2003



Задача 2

Розрахунок статично невизначуваних систем при розтягу (стиску) із пружними зв'язками

Абсолютно жорстка балка підтримується в горизонтальному положенні пружними сталевими стержнями за схемою. Обчислити необхідну площу перерізів цих стержнів при заданому їх співвідношенні.



297

20

Дано:  $a = \dots$  м;  $P = \dots$  кН; ...

Визначити:  $A_1 = ?$ ;  $A_2 = ?$

Розв'язування.

Відповідь:  $A_1 = \dots$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = \dots$  см<sup>2</sup>.

7	10	23	15	10	110	10
	Петров			101		Лист
	Іванов				ОМ.1Б-01.31:108	2
Зм.	Арк.	№ докум	Ідентс	Дата		

210

5

## Додаток Б

### Інструкції написання програм та приклади побудови епюр для балки та криволінійного стержня

#### Інструкція зі складання програми на Mathcad 2000 для побудови епюр внутрішніх силових факторів для балок

1. Створіть та збережіть на диску новий документ Mathcad.
2. Введіть всі змінні, що використовуються в розрахунку: сили, момент, розподілене навантаження, змінні, що визначають межі ділянок (початок координат має бути спільним для всіх ділянок на відміну від приведеного в п. 1.1.4 розрахунку) (рисунок 1.6).

##### *Приклад*

Введіть  $P$ , натисніть "Shift+ж", введіть числове значення  $P$ .

Натисніть "Enter" або клацніть мишкою на вільному полі.

3. Запишіть вирази в загальному вигляді для розрахунку опорних реакцій відносно невідомих величин (тільки для двоопорної балки). Розрахуйте реакції та виконайте перевірку безпосередньо в документі Mathcad.
4. Запишіть рівняння поперечної сили та згинального моменту для кожної ділянки балки як дві окремі складні функції. Початок координат має бути спільним для всіх ділянок та розташований в крайній лівій точці балки.

##### *Приклад*

Введіть  $Q(x)$ , натисніть "Shift+ж".

Натисніть "J" стільки раз, скільки ділянок має балка, мінус 1.

В кожній комірці натисніть "Shift+J".

Після оператора "if" двічі натисніть "Ctrl+9" в кожному рядку.

Заповніть порожні комірки.

Перший рядок.

Перша зліва комірка: рівняння поперечної сили на першій ділянці.

Друга зліва комірка: "0".

Третя зліва комірка: змінний аргумент "x".

Четверта зліва комірка: граничне значення  $x$  на першій ділянці.

Аналогічно заповніть другий рядок.

5. Створіть декартовий графік "Shift+2".

6. В вільну комірку ліворуч станьте курсором та введіть назви графіків через кому " $Q(x)$ ,  $M(x)$ ".

В вільну комірку під графіком станьте курсором та введіть через кому змінний аргумент " $x$ ,  $x$ ".

Справа та зліва від " $x$ ,  $x$ " з'являться дві пусті комірки. В ліву введіть "0" в праву – довжину балки.

Аналогічно можна ввести граничні значення функцій  $Q(x)$ ,  $M(x)$  по осі ординат (якщо ці поля не заповнювати, то Mathcad це зробить автоматично).

Натисніть “Enter” або клацніть мишкою на вільному полі.

Mathcad побудує графіки – епюри. Епюри будуть побудовані на одній площині для зручності аналізу та компактності.

7. При необхідності відформатуйте отримані графіки. Для цього двічі клацніть мишкою на побудованому графіку. В діалоговому вікні вкажіть необхідні параметри графіка: “Пересечение”, “Вспом. линии”, “Нумерация”, “Автомасштаб”, зніміть галочку “Авто сетка” та введіть кількість допоміжних ліній по кожній осі. Бажано підібрати таку кількість ліній, щоб на осі абсцис графіка були кратні 0,1; 0,2 ... 1. По осі ординат інтервал має бути теж кратний 0,1; 0,2 ... 1 із розрахунком, щоб граничні точки ділянок були показані на графіку.

При бажанні змінити вид, колір, товщину ліній графіків, натисніть на вкладку “След” у відкритому діалоговому вікні та виберіть необхідні параметри.

Натисніть “Применить”, щоб подивитись на вигляд графіка без виходу із діалогу форматування графіка.

Натисніть “OK”.

8. Зробіть перевірку правильності побудови епюр із використанням диференціальних залежностей між внутрішніми силовими факторами. (перевірка є необхідною але недостатньою умовою правильності написання рівнянь  $M(x)$ ,  $Q(x)$ )

Перевірка рівнянь  $M(x)$ ,  $Q(x)$  (сумісна).

Натисніть “Shift+7”. З’явиться знак визначеного інтегралу.

Змінна інтегрування –  $x$ .

Границі інтегрування – від 0 до граничного значення  $x$  – довжини балки.

Підінтегральний вираз:  $dM(x)/dx - Q(x)$

Для введення похідної  $d/dx$  натисніть “Shift+7”.

Введіть знак “=”.

При правильному розрахунку отримане число має порядок менше  $10^{-5}$  ( $\approx 0$ ).

В протилежному випадку рівняння  $M(x)$ ,  $Q(x)$  або одне з них записано неправильно.

## Побудова епюр для двоопорної балки (рис. 1.6)

Введення початкових даних

$$a := 1, b := 1, c := 1, d := 2$$

$$P1 := 1, P2 := 3, M1 := 4, M2 := 3, q := 2$$

Розрахунок опорних реакцій

$$R_k := \frac{-1}{5} \left[ M1 - P1 \cdot a + P2 \cdot (b+c) - q \cdot (c+d) \cdot \left[ a+b + \frac{(c+d)}{2} \right] - M2 \right] \quad R_k = 3$$

$$R_a := \frac{1}{5} \left[ M1 + P1 \cdot (b+c+d) + P2 \cdot (c+d) - q \cdot (c+d) \cdot \left[ \frac{(c+d)}{2} \right] - M2 \right] \quad R_a = 1$$

Перевірка розрахунку реакцій

$$R_a + R_k - P1 + P2 - q \cdot (c+d) = 0$$

Формування функцій поперечних сил та згинальних моментів

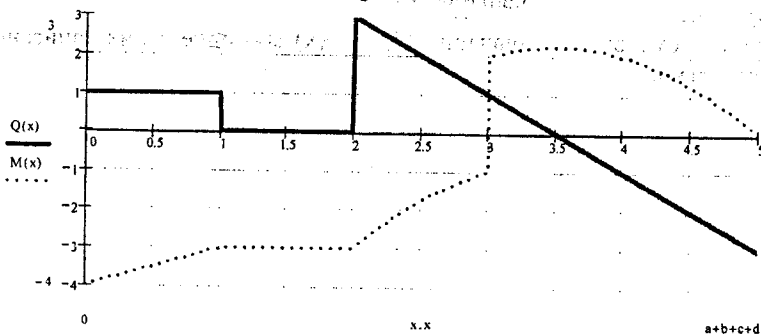
$$Q(x) := \begin{cases} R_a & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ R_a - P1 & \text{if } a \leq x \leq a+b \\ R_a - P1 + P2 - q \cdot [x - (a+b)] & \text{if } a+b \leq x \leq a+b+c \\ R_a - P1 + P2 - q \cdot [x - (a+b)] & \text{if } a+b+c \leq x \leq a+b+c+d \end{cases}$$

$$M(x) := \begin{cases} R_a \cdot x - M1 & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ R_a \cdot x - M1 - P1 \cdot (x-a) & \text{if } a \leq x \leq a+b \\ R_a \cdot x - M1 - P1 \cdot (x-a) + P2 \cdot [x - (a+b)] - q \cdot \frac{[x - (a+b)]^2}{2} & \text{if } a+b \leq x \leq a+b+c \\ R_a \cdot x - M1 - P1 \cdot (x-a) + P2 \cdot [x - (a+b)] - q \cdot \frac{[x - (a+b)]^2}{2} + M2 & \text{if } a+b+c \leq x \leq a+b+c+d \end{cases}$$

Перевірка рівнянь епюр

$$\int_0^{a+b+c+d} \frac{d}{dx} M(x) - Q(x) dx = 3.303 \times 10^{-12}$$

Графіки епюр



## Побудова епоур для консольної балки (рис. 1.12)

Введення початкових даних

$$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1 \quad d := 1 \quad P := 5 \quad M := 2 \quad q := 2$$

Формування функцій поперечних сил та згинальних моментів

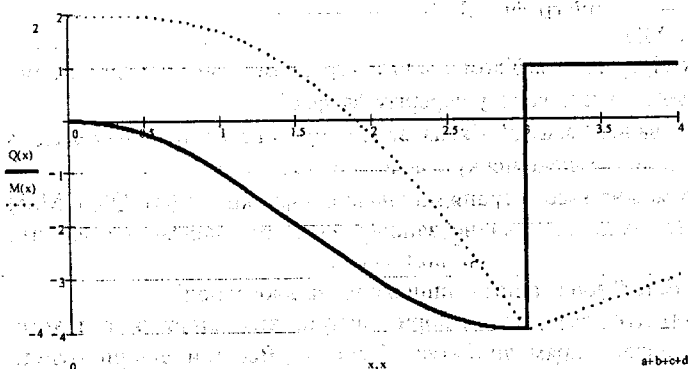
$$Q(x) := \begin{cases} -\frac{q \cdot x^2}{2a} & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ -\frac{q \cdot a}{2} - q \cdot (x - a) & \text{if } a \leq x \leq a + b \\ -\frac{q \cdot a}{2} - q \cdot b - q \cdot [x - (a + b)] + \frac{q}{2 \cdot c} \cdot [x - (a + b)]^2 & \text{if } a + b \leq x \leq a + b + c \\ -q \cdot \frac{a}{2} - q \cdot b - q \cdot \frac{c}{2} + P & \text{if } a + b + c \leq x \leq a + b + c + d \end{cases}$$

$$M(x) := \begin{cases} \frac{q \cdot x^3}{6a} + M & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ -\frac{q \cdot a}{2} \left[ \frac{a}{3} + (x - a) \right] - \frac{q}{2} \cdot (x - a)^2 + M & \text{if } a \leq x \leq a + b \\ -\frac{q \cdot a}{2} \left( x - \frac{2 \cdot a}{3} \right) - q \cdot b \cdot \left[ x - \left( a + \frac{b}{2} \right) \right] - \frac{q}{2} \cdot [x - (a + b)]^2 + \frac{q}{6 \cdot c} \cdot [x - (a + b)]^3 + M & \text{if } a + b \leq x \leq a + b + c \\ -\frac{q \cdot a}{2} \left( x - \frac{2 \cdot a}{3} \right) - q \cdot b \cdot \left[ x - \left( a + \frac{b}{2} \right) \right] - \frac{q \cdot c}{2} \cdot \left[ x - \left( a + b + \frac{c}{3} \right) \right] + P \cdot [x - (a + b + c)] + M & \text{if } a + b + c \leq x \leq a + b + c + d \end{cases}$$

Перевірка рівнянь епоур

$$\int_0^{a+b+c+d} \frac{d}{dx} M(x) - Q(x) dx = 2.206 \times 10^{-7}$$

Графіки епоур



**Інструкція зі складання програми на Mathcad 2000  
для побудови епіор внутрішніх силових факторів  
для криволінійних стержнів**

9. Створіть та збережіть на диску новий документ Mathcad.
10. Введіть всі змінні, що використовуються в розрахунку: сили, момент, радіус кривизни, змінні, що визначають межі ділянок (початок координат має бути спільним для всіх ділянок) (рисунк 1.16, а)

*Приклад*

Введіть  $P$ , натисніть "Shift+ж", введіть числове значення  $P$ .

Натисніть "Enter" або клацніть мишкою на вільному полі.

11. Запишіть рівняння поздовжньої, поперечної сили та згинального моменту для кожної ділянки криволінійного стержня як три окремі складні функції. Початок координат має бути спільним для всіх ділянок.

*Приклад*

Введіть  $N(\varphi)$ , натисніть "Shift+ж", натисніть "J".

В кожній пусті комірці натисніть "Shift+J".

Після оператора "if" двічі натисніть "Ctrl+9" в кожному рядку.

Заповніть порожні комірки.

Перший рядок.

Перша зліва комірка: рівняння поздовжньої сили на першій ділянці.

Друга зліва комірка: "0".

Третя зліва комірка: змінний аргумент " $\varphi$ ".

Четверта зліва комірка: граничне значення кута  $\varphi$  на першій ділянці.

Аналогічно заповніть другий рядок.

12. Створіть декартовий графік "Shift+2".

13. В вільну комірку ліворуч станьте курсором та введіть назви графіків через кому

" $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$ ".

В вільну комірку під графіком станьте курсором та введіть через кому змінний аргумент – кут повороту перерізу " $\varphi$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi$ ".

Справа та зліва від " $\varphi$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi$ " з'являться дві пусті комірки. В ліву введіть "0" в праву – граничне значення кута  $\varphi$ , в радіанах.

Аналогічно можна ввести граничні значення функцій  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$  по осі ординат (якщо ці поля не заповнювати, то Mathcad це зробить автоматично).

Натисніть "Enter" або клацніть мишкою на вільному полі.

Mathcad побудує графіки – епюри (зігнута вісь стержня в такому вигляді представлена прямолінійною віссю  $\varphi$ ). Всі три епюри будуть побудовані на одній площині для зручності аналізу та компактності.

14. При необхідності відформатуйте отримані графіки. Для цього двічі клацніть мишкою на побудованому графіку. В діалоговому вікні вкажіть необхідні параметри графіка: "Пересечение", "Вспом. линии",

“Нумерация”, “Автомасштаб”, зніміть галочку “Авто сетка” та введіть кількість допоміжних ліній по кожній осі. Бажано підібрати таку кількість ліній, щоб на осі абсцис графіка були кратні 0,1; 0,2 ... 1. По осі ординат інтервал має бути  $10^0$ ,  $15^0$ ,  $20^0$  або  $30^0$  із розрахунком, щоб граничні точки ділянок були показані на графіку.

При бажанні змінити вид, колір, товщину ліній графіків натисніть на вкладку “След” у відкритому діалоговому вікні та виберіть необхідні параметри.

Натисніть “Применить”, щоб подивитись на вигляд графіка без виходу із діалогу форматування графіка.

Натисніть “ОК”.

7. Зробіть перевірку правильності побудови епюр із використанням диференціальних залежностей між внутрішніми силовими факторами.

Перевірка рівнянь  $M(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  (сумісна).

Натисніть “Shift+7”. З’явиться знак визначеного інтегралу.

Змінна інтегрування –  $\varphi$ .

Границі інтегрування – від 0 до граничного значення кута  $\varphi$  на останній ділянці.

Підінтегральний вираз:  $dM(\varphi)/d\varphi - Q(\varphi) \cdot R$

Для введення похідної  $d/d\varphi$  натисніть “Shift+7”.

Введіть знак “=”.

При правильному розрахунку отримане число має порядок менше  $10^{-10}$  ( $\approx 0$ ).

В протилежному випадку рівняння  $M(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  або одне з них записано неправильно.

Перевірка рівнянь  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  (сумісна).

Скопіюйте в буфер обміну попередній інтеграл та вставте нижче його копію.

Змініть підінтегральний вираз на:  $dQ(\varphi)/d\varphi - N(\varphi)$ .

Переконайтесь в правильності розв’язку.

## Побудова епюр для криволінійного стержня (рис. 1.16)

Введення початкових даних

$$P1 := 5 \quad P2 := 10 \quad M := 4 \quad R := 2 \quad \alpha := \frac{\pi}{2} \quad \alpha2 := \frac{3\pi}{2}$$

Формування функцій поперечних сил та згинальних моментів

$$N(\phi) := \begin{cases} -P1 \cdot \cos(\phi) & \text{if } 0 \leq \phi \leq \alpha \\ -P1 \cdot \cos(\phi) - P2 \cdot \sin(\phi - \alpha) & \text{if } \alpha \leq \phi \leq \alpha2 \end{cases}$$

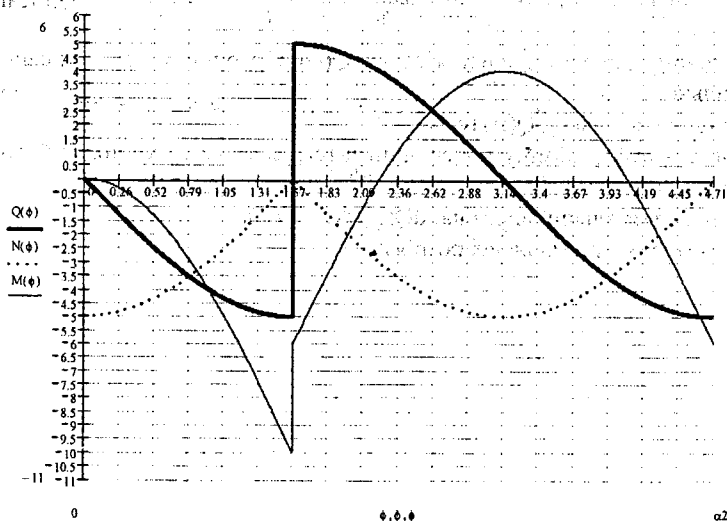
$$Q(\phi) := \begin{cases} -P1 \cdot \sin(\phi) & \text{if } 0 \leq \phi \leq \alpha \\ -P1 \cdot \sin(\phi) + P2 \cdot \cos(\phi - \alpha) & \text{if } \alpha \leq \phi \leq \alpha2 \end{cases}$$

$$M(\phi) := \begin{cases} -P1 \cdot R \cdot (1 - \cos(\phi)) & \text{if } 0 \leq \phi \leq \alpha \\ -P1 \cdot R \cdot (1 - \cos(\phi)) + P2 \cdot R \cdot \sin(\phi - \alpha) + M & \text{if } \alpha \leq \phi \leq \alpha2 \end{cases}$$

Перевірка рівнянь епюр

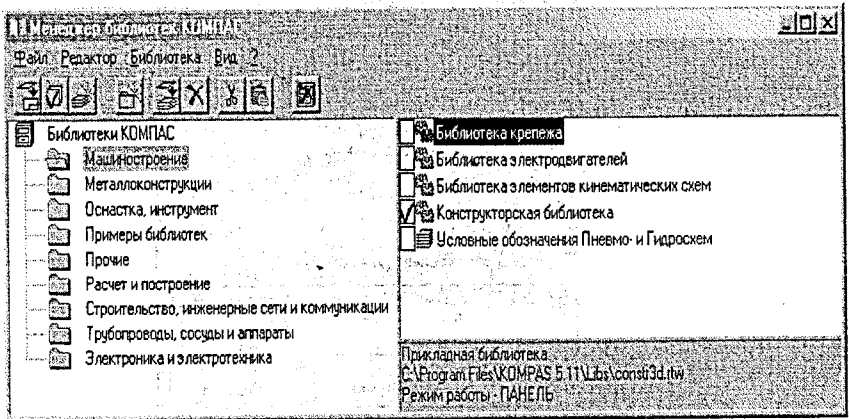
$$\int_0^{\alpha2} \frac{d}{d\phi} M(\phi) - Q(\phi) \cdot R d\phi = 6.491 \times 10^{-12} \quad \int_0^{\alpha2} \frac{d}{d\phi} Q(\phi) - N(\phi) d\phi = 1.461 \times 10^{-11}$$

Графіки епюр

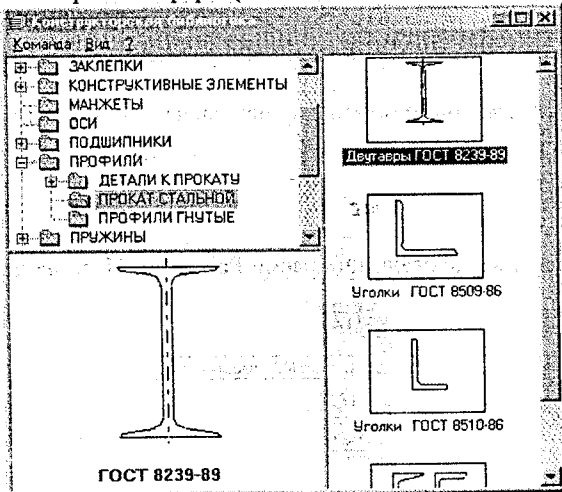


**Додаток В**  
**Розрахунок геометричних характеристик перерізу**  
**в середовищі КОМПАС 5.11**

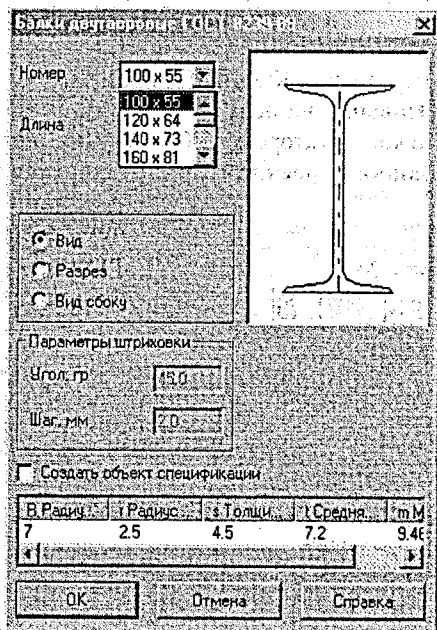
1. Заходимо в середовище КОМПАС 5.11.
2. Створюємо **Новий фрагмент**
3. Підключаємо конструкторську бібліотеку. **Сервіс – Менеджер бібліотек – Машиностроение - Конструкторская библиотека...**



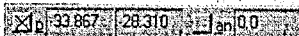
4. Завантажуємо дану бібліотеку. **Сервіс – Конструкторская библиотека...**
5. В даній бібліотеці знаходимо переріз, що нас цікавить.  
Завантажуємо вибраний переріз (подвійний натиск на ньому).



6. Попередньо вказавши розміри перерізу (його №) наносимо на лист вибраний переріз: **Ок**.



Перше натискання лівої кнопки мишки закріпить лівий нижній кут перерізу (для більш точного розташування можна ввести координати даної точки та кут повороту)



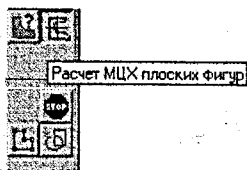
відносно горизонтальної осі.



Друге натискання лівої кнопки мишки розташує переріз на листі.

7. Перемикаємо інструментальну панель на панель вимірювань.



8. На панелі вимірювань вибираємо **Расчет МЦХ плоских фигур**.

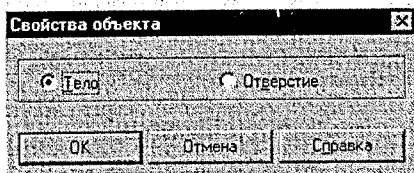


9. Вказуємо переріз , що нас цікавить, в режимі Ручного рисования границь  (пряму ділянку достатньо вказати її початком та кінцем, а криву необхідно вказувати через деякий інтервал, причому зменшення інтервалу збільшить точність вимірювань) або в режимі Обход границы по стрелке .

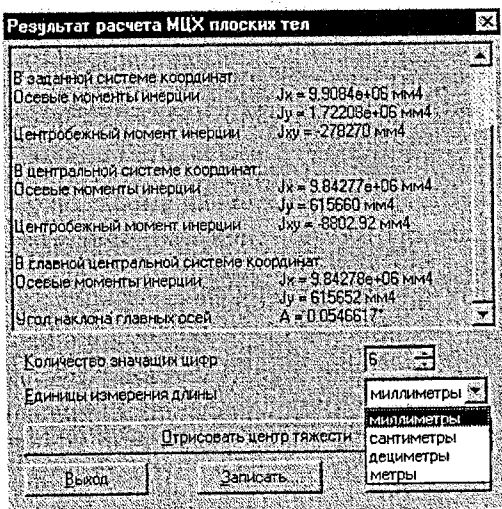
Вказавши переріз по контуру натискаємо Создать объект.



10. В меню Свойства объекта вказуємо чи даний переріз являється тілом, чи отвором.



11. В меню Результат расчета можливий вибір одиниць вимірювання довжини та кількості значущих цифр.



12. Дані розрахунку можна записати у вигляді текстового файлу (\*.txt) на диск HDD або на дискету FDD Записать.

## Додаток Г

**Програма для побудови епюр поперечних сил, згинальних моментів; ліній пружного прогину балки і кутів повороту поперечного перерізу двоопорної балки при довільному розташуванні опор і зовнішніх силових факторів (Mathcad 2000)**

Приклад для рис. 6.13

Введення початкових даних

Початок координат розташований у крайній лівій точці балки

P - сила, кН; (знак "+", якщо направлена вгору)

a - координата точки прикладення сили, м;

M - згинальний момент, кН\*м; (знак "+", якщо направлений проти годинникової стрілки);

b - координата точки прикладення моменту, м;

q - рівномірно розподілене навантаження, кН/м (знак "+", якщо направлений вгору);

c - координата точки початку прикладення розподіленого навантаження, м;

d - координата точки кінця прикладення розподіленого навантаження, м;

$$A := \begin{pmatrix} P & a & M & b & q & c & d \\ -20 & 6 & -40 & 0 & -10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

z := 2      z - координата точки, у якій розташована ліва опора, м;

v := 8      v - координата точки, у якій розташована права опора, м;

L := 8      L - повна довжина балки, м.

I := 5500      I - момент інерції перетину балки (табличний), см<sup>4</sup>.

t := 10.2      t - товщина полки балки чи двотавра швелера (таблична), мм

bb := 135      bb - ширина полки балки чи двотавра швелера (таблична), мм

H := 270      H - висота перетину балки чи двотавра швелера (таблична), мм

dd := 6      dd - товщина стінки балки двотавра чи швелера (таблична), мм

SS := 229      SS - статичний момент півперерізу балки (табличний), см<sup>3</sup>.

E := 2.1 · 10<sup>11</sup>      E - модуль пружності матеріалу балки, Па.

σd := 160 · 10<sup>6</sup>      σd - допустиме нормальне напруження при згині, Па.

τd := 100 · 10<sup>6</sup>      τd - допустиме дотичне напруження, Па.

## Розрахунок

### Допоміжні перетворення

```

j := rows(A) - 2
i := 0..j
EI := E · I · 10-8
Pi := 1000 · Ai+1,0
t := t · 0.001
di := Ai+1,6
bb := bb · 0.001
ci := Ai+1,5
qi := 1000 · Ai+1,4
H := H · 0.001
bi := Ai+1,3
dd := dd · 0.001
Mi := 1000 · Ai+1,2
SS := SS · 10-6
ai := Ai+1,1

```

### Блок обчислення опорних реакцій балки

$$RB := \frac{-1}{v-z} \cdot \sum_i \left[ P_i \cdot (a_i - z) + M_i + q_i \cdot (d_i - c_i) \cdot \left( c_i - z + \frac{d_i - c_i}{2} \right) \right]$$

$$RA := \frac{-1}{v-z} \cdot \sum_i \left[ P_i \cdot (v - a_i) - M_i + q_i \cdot (d_i - c_i) \cdot \left( v - d_i + \frac{d_i - c_i}{2} \right) \right]$$

### Перевірка правильності обчислення реакцій

$$RA + RB + \sum_i P_i + \sum_i q_i \cdot (d_i - c_i) = 0$$

### Блок формування функції поперечної сили

$$Qra(x) := \text{if}(z \leq x \leq L, RA, 0)$$

$$Qrb(x) := \text{if}(v \leq x \leq L, RB, 0)$$

$$Qp(x) := \sum_i \text{if}(a_i \leq x \leq L, P_i, 0)$$

$$Qqq(x) := \sum_i \text{if}(c_i \leq x \leq d_i, q_i \cdot (x - c_i), 0)$$

$$QQQ(x) := \sum_i \text{if}(d_i < x \leq L, q_i \cdot (d_i - c_i), 0)$$

$$Q(x) := Qra(x) + Qrb(x) + Qp(x) + Qqq(x) + QQQ(x)$$

## Блок формування функції згинального моменту

$$Mra(x) := \text{if}[z \leq x \leq L, RA \cdot (x - z), 0]$$

$$Mrb(x) := \text{if}[v \leq x \leq L, RB \cdot (x - v), 0]$$

$$Mp(x) := \sum_i \text{if}[a_i \leq x \leq L, P_i \cdot (x - a_i), 0]$$

$$Mm(x) := \sum_i \text{if}[b_i \leq x \leq L, -M_i, 0]$$

$$Mqq(x) := \sum_i \text{if}\left[c_i \leq x \leq d_i, q_i \cdot \frac{(x - c_i)^2}{2}, 0\right]$$

$$MQQ(x) := \sum_i \text{if}\left[d_i < x \leq L, q_i \cdot \left(x - \frac{d_i + c_i}{2}\right), 0\right]$$

$$MM(x) := Mra(x) + Mrb(x) + Mp(x) + Mqq(x) + MQQ(x) + Mm(x)$$

## Блок формування функції пружної лінії балки

$$yra(x) := \text{if}\left[z \leq x \leq L, RA \cdot \frac{(x - z)^3}{6}, 0\right]$$

$$yrb(x) := \text{if}\left[v \leq x \leq L, RB \cdot \frac{(x - v)^3}{6}, 0\right]$$

$$yp(x) := \sum_i \text{if}\left[a_i \leq x \leq L, P_i \cdot \frac{(x - a_i)^3}{6}, 0\right]$$

$$ym(x) := \sum_i \text{if}\left[b_i \leq x \leq L, -1 M_i \cdot \frac{(x - b_i)^2}{2}, 0\right]$$

$$yq(x) := \sum_i \text{if}\left[c_i \leq x \leq L, q_i \cdot \frac{(x - c_i)^4}{24}, 0\right]$$

$$yqq(x) := \sum_i \text{if}\left[d_i \leq x \leq L, q_i \cdot \frac{(x - d_i)^4}{24}, 0\right]$$

$$\alpha(x) := yra(x) + yrb(x) + yp(x) + ym(x) + yq(x) - yqq(x)$$

## Блок обчислення початкових параметрів

$$\theta EI := \frac{-\alpha(v) + \alpha(z)}{v - z}$$

$$y0EI := \frac{\alpha(v) - \alpha(z)}{v - z} \cdot z - \alpha(z)$$

$$yEI(x) := y0EI + \theta EI \cdot x + \alpha(x)$$

$$y(x) := \frac{yEI(x)}{EI}$$

$$\theta_0 := \frac{\theta_0 EI}{1 \cdot E \cdot 10^{-8}}$$

$$y_0 := \frac{y_0 EI}{1 \cdot E \cdot 10^{-8}}$$

Блок формування функції кутів повороту поперечного перерізу балки

$$\theta_{ra}(x) := \text{if} \left[ z \leq x \leq L, RA \cdot \frac{(x-z)^2}{2}, 0 \right]$$

$$\theta_{rb}(x) := \text{if} \left[ v \leq x \leq L, RB \cdot \frac{(x-v)^2}{2}, 0 \right]$$

$$\theta_p(x) := \sum_i \text{if} \left[ a_i \leq x \leq L, P_i \cdot \frac{(x-a_i)^2}{2}, 0 \right]$$

$$\theta_{m}(x) := \sum_i \text{if} \left[ b_i \leq x \leq L, M_i \cdot (-x + b_i), 0 \right]$$

$$\theta_q(x) := \sum_i \text{if} \left[ c_i \leq x \leq L, q_i \cdot \frac{(x-c_i)^3}{6}, 0 \right]$$

$$\theta_{qq}(x) := \sum_i \text{if} \left[ d_i \leq x \leq L, q_i \cdot \frac{(x-d_i)^3}{6}, 0 \right]$$

$$\beta(x) := (\theta_{ra}(x) + \theta_{rb}(x) + \theta_p(x) + \theta_m(x) + \theta_q(x)) - \theta_{qq}(x)$$

$$\theta EI(x) := \theta_0 EI + \beta(x)$$

$$\theta(x) := \frac{\theta EI(x)}{EI}$$

Обчислення координати точки максимального прогину балки

$$xx := 1$$

Given

$$0 \leq xx \leq L$$

$$x_{\max} := \text{Maximize}(yEI, xx)$$

$$x_{\max} = 0$$

$$I_{\min} := \frac{yEI(x_{\max}) \cdot 10^8 \cdot 400}{L \cdot 2.1 \cdot 10^{11}}$$

$$y_{\max} := y(x_{\max})$$

Блок розрахунків повної перевірки міцності балки

$$\sigma_{ekv}(x) := \sqrt{\left( MM(x) \cdot \frac{H}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-8}} \right)^2 + 4 \cdot \left[ \frac{Q(x)}{dd \cdot 1 \cdot 10^{-8}} \cdot bb \cdot t \cdot \frac{(H-t)}{2} \right]^2}$$

$$e := 0..100$$

$$\sigma_e := \sigma kv \left( \frac{e}{L} \right)$$

$$QQ_e := \left| Q \left( \frac{e}{L} \right) \right|$$

$$M_e := \left| MM \left( \frac{e}{L} \right) \right|$$

$$\tau_{max} := \frac{\max(QQ)}{dd \cdot I \cdot 10^{-8}}$$

$$M_{max} := \max(M)$$

$$Q_{max} := \max(QQ)$$

$$\sigma_{max} := \frac{M_{max} \cdot H}{2 \cdot I \cdot 10^{-8}}$$

$$\sigma_{maxIII} := \max(\sigma)$$

$$W_{min} := \frac{M_{max} \cdot 10^6}{\sigma d}$$

$$M(x) := MM(x)$$

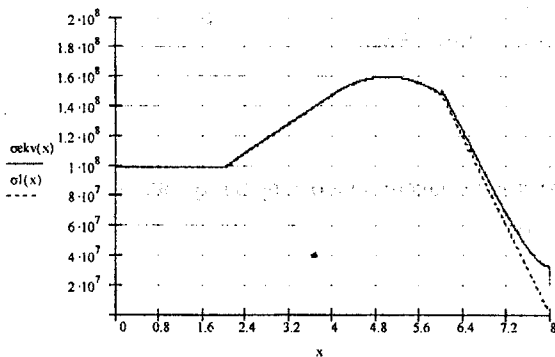
$$MM := A_{1,2}$$

$$xx := 6$$

$$\sigma I(x) := \frac{M(x) \cdot H}{I \cdot 2 \cdot 10^{-8}}$$

Given

$$0 \leq xx \leq L$$



$$\sigma kv(xx) = \max(\sigma)$$

$$xx := \text{Minerr}(xx)$$

$$xx = 6$$

$$\max(\sigma) = 1.595 \times 10^8$$

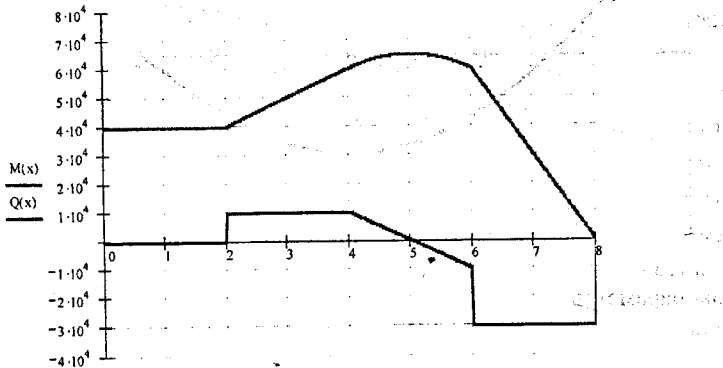
$$\tau_{max} = 2.082 \times 10^7$$

## Результати розрахунку

Початкові дані

$$P = (-2 \times 10^4) \quad a = (6) \quad MM = -40 \quad b = (0) \quad q = (-1 \times 10^4) \quad c = (4) \quad d = (6) \quad z = 2 \quad y = 8$$
$$L = 8$$

Епюри поперечних сил та згинальних моментів



Опорні реакції

$$R_A = 1 \times 10^4 \quad R_B = 3 \times 10^4$$

Небезпечні перерізи

$$M_{\max} = 6.5 \times 10^4$$

$$Q_{\max} = 3 \times 10^4$$

Перевірка епюр

$$\int_0^L \frac{d}{dx} M(x) - Q(x) dx = 4.14 \times 10^{-10} \quad \sigma_{\max} = 1.595 \times 10^8$$

Максимальні дотичні та еквівалентні напруження

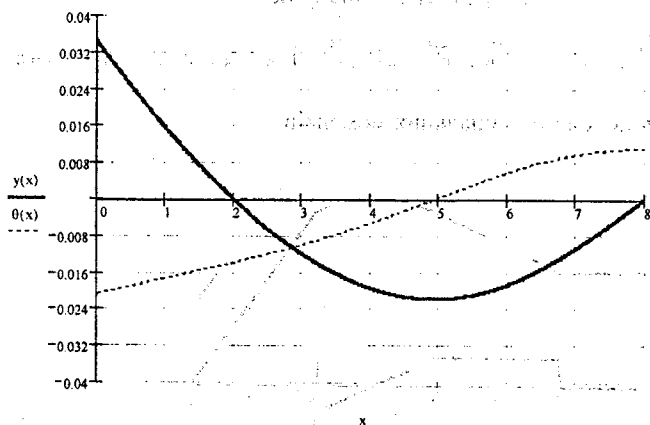
$$\tau_{\max} = 2.082 \times 10^7$$

$$\sigma_{\max III} = 1.595 \times 10^8$$

Мінімальний момент опору балки згину, см<sup>3</sup>

$$W_{\min} = 406.25$$

## Пружна лінія та графік кутів повороту перерізів



### Початкові параметри

$$\theta_0 = -0.021 \text{ rad}$$

$$y_0 = 0.034$$

### Мінімальний момент інерції балки за жорсткістю, $\text{см}^4$

$$I_{\min} = 9.471 \times 10^3$$

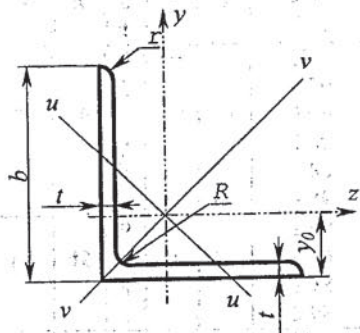
### Максимальний прогин при заданому моменті інерції балки

$$l = 5.5 \times 10^3$$

$$u_{\max} = 0.034$$

Додаток Д  
Сортамент прокатної сталі

Таблиця Д.1 – Кутики сталеві гарячекатані рівнобокі. Сортамент (ГОСТ 8509 – 86)



Но- мер ку- тика	Розміри, мм				Площа попереч- ного пере- різу, см <sup>2</sup>	Довідникові величини для осей										Маса 1 м кг
	b	t	R	r		z			v-v		u-u			I <sub>zy</sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	
						I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	I <sub>v max</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>v max</sub> , см	I <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>u min</sub> , см			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
		5			2,27	1,22	0,72	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27

Продовження таблиці Д.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	30	3	4	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4			2,27	1,84	0,87	0,90	2,29	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
		5			2,78	2,20	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4			2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5			3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
		6			4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3	5	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	2,04	1,38	10,5	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	2,51	1,37	12,7	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
		6			5,08	9,35	2,95	1,36	14,8	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,3	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,6	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,8	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6			5,69	13,07	3,69	1,52	20,7	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
		7			6,56	14,84	4,23	1,50	23,5	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
8	7,41	16,51	4,76	1,49	26,0	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82				
5,6	56	4	6	2	4,38	13,10	3,21	1,73	20,8	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,4	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6	60	4	7,0	2,3	4,72	16,21	3,70	1,85	25,7	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71
		5			5,83	19,79	4,56	1,84	31,4	2,32	8,18	3,49	1,18	11,6	1,66	4,58

Продовження таблиці Д.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
12	60	6	7	2,3	6,92	23,21	5,40	1,83	36,8	2,31	9,60	3,99	1,18	13,6	1,70	5,43
		8			9,04	29,55	7,00	1,81	46,8	2,27	12,34	4,90	1,17	17,2	1,78	7,10
		10			11,08	35,32	8,52	1,79	55,6	2,24	15,00	5,70	1,16	20,3	1,85	8,70
6,3	63	4	7	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,9	2,45	7,81	3,26	1,25	11,0	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	5,05	1,94	36,6	2,44	9,52	3,87	1,25	13,7	1,74	4,81
		6			7,28	27,06	5,98	1,93	42,9	2,43	11,2	4,44	1,24	15,9	1,78	5,72
7	70	4,5	8	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,0	2,72	12,0	4,53	1,39	17,0	1,88	4,87
		5			6,86	31,94	6,27	2,16	50,7	2,72	13,2	4,92	1,39	18,7	1,90	5,38
		6			8,15	37,58	7,43	2,15	59,6	2,71	15,5	5,66	1,38	22,1	1,94	6,39
		7			9,42	42,98	8,57	2,14	68,2	2,69	17,8	6,31	1,37	25,2	1,99	7,39
		8			10,67	48,16	9,68	2,12	76,4	2,68	20,0	6,99	1,37	28,2	2,02	8,37
10	13,11	57,90	11,8	2,10	91,5	2,64	24,3	8,17	1,36	33,6	2,10	10,3				
7,5	75	5	9	3	7,39	39,53	7,21	2,31	62,6	2,91	16,4	5,74	1,49	23,1	2,02	5,80
		6			8,78	46,57	8,57	2,30	73,9	2,90	19,3	6,62	1,48	27,3	2,06	6,89
		7			10,10	53,34	9,89	2,29	84,6	2,89	22,1	7,43	1,48	31,2	2,10	7,96
		8			11,50	59,84	11,2	2,28	94,9	2,87	24,8	8,16	1,47	35,0	2,15	9,02
		9			12,80	66,10	12,4	2,27	105	2,86	27,5	8,91	1,46	38,6	2,18	10,10
8	80	5,5	9	3	8,63	52,68	9,03	2,47	83,6	3,11	21,8	7,10	1,59	30,9	2,17	6,78
		6			9,38	56,97	9,80	2,47	90,4	3,11	23,5	7,60	1,58	33,4	2,19	7,36
		7			10,85	65,31	11,3	2,45	104	3,09	27,0	8,55	1,58	38,3	2,23	8,51
		8			12,30	73,36	12,8	2,44	116	3,08	30,3	9,44	1,57	43,0	2,27	9,65
		10			15,14	88,58	15,7	2,42	140	3,04	36,9	11,1	1,56	56,7	2,35	11,9
12	17,90	102,7	18,4	2,40	162	3,01	43,2	12,6	1,55	59,5	2,42	14,1				
9	90	6	10	3,3	10,61	82,10	12,5	2,78	130	3,50	34,0	9,88	1,79	48,1	2,43	8,33
		7			12,28	94,30	14,5	2,77	150	3,49	38,9	11,2	1,78	55,4	2,47	9,64
		8			13,93	106,1	16,4	2,76	168	3,48	43,8	12,3	1,77	62,3	2,51	10,9
		9			15,60	118,0	18,3	2,75	186	3,46	48,6	13,5	1,77	68,0	2,55	12,2
		10			17,17	128,6	20,1	2,74	204	3,45	53,3	14,5	1,76	75,3	2,59	13,5

## Продовження таблиці Д.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	90	12	10	3,3	20,33	149,7	23,9	2,71	236	3,41	62,4	16,5	1,75	86,2	2,67	16,0
10	100	6,5	12	4	12,82	122,1	16,7	3,09	193	3,88	50,7	13,4	1,99	71,4	2,68	10,1
		7			13,75	130,6	17,9	3,08	207	3,88	54,2	14,1	1,98	76,4	2,71	10,8
		8			15,60	147,2	20,3	3,07	233	3,87	60,9	15,7	1,98	86,3	2,75	12,2
		10			19,24	178,9	25,0	3,05	284	3,84	74,1	18,5	1,96	110	2,83	15,1
		12			22,80	208,9	29,5	3,03	331	3,81	86,8	21,1	1,95	122	2,91	17,9
		14			26,28	237,2	33,8	3,00	375	3,78	99,3	23,5	1,94	138	2,99	20,6
11	110	15	12	4	27,99	250,7	36,0	2,99	396	3,76	105	24,6	1,94	145	3,03	22,0
		16			29,68	263,8	38,0	2,98	416	3,74	112	25,8	1,94	152	3,06	23,3
12	120	7	12	4,0	15,2	175,6	21,8	3,40	279	4,29	72,7	17,4	2,19	106	2,96	11,9
		8			17,2	198,2	24,8	3,39	315	4,28	81,8	19,3	2,18	116	3,00	13,5
		10			23,24	317	36,6	3,69	504	4,66	131	27,7	2,37	187	3,33	18,24
		12			27,60	372	43,3	3,67	590	4,62	153	31,8	2,36	218	3,41	21,67
12,5	125	15	14	4,6	33,99	449	53,0	3,63	711	4,57	186	37,4	2,34	262	3,53	26,68
		8			19,7	294	32,2	3,87	467	4,87	122	25,7	2,49	172	3,36	15,5
		9			22,0	327	36,0	3,86	520	4,86	135	28,3	2,48	192	3,40	17,3
		10			24,3	360	39,7	3,85	571	4,84	149	30,5	2,47	211	3,45	19,1
		12			28,9	422	47,1	3,82	670	4,82	174	34,9	2,46	248	3,53	22,7
		14			33,4	482	54,2	3,80	764	4,78	200	39,1	2,45	282	3,61	26,2
14	140	16	14	4,6	37,8	539	61,1	3,78	853	4,75	224	43,1	2,44	315	3,68	29,6
		9			24,7	466	45,6	4,34	739	5,47	192	35,9	2,79	274	3,78	19,4
		10			27,3	512	50,3	4,33	814	5,46	211	39,1	2,78	301	3,82	21,5
15	150	12	14	4,6	32,5	602	59,7	4,31	957	5,43	248	45,0	2,76	354	3,90	25,5
		10			29,33	635	58,1	4,65	1009	5,86	261	45,3	2,98	374	4,07	23,02
		12			34,89	747	68,9	4,63	1188	5,83	307	52,3	2,97	440	4,15	27,39
		15			43,08	908	84,7	4,59	1443	5,79	374	62,0	2,95	534	4,27	33,82
		18			51,09	1060	99,9	4,56	1681	5,74	439	70,9	2,93	621	4,38	40,11

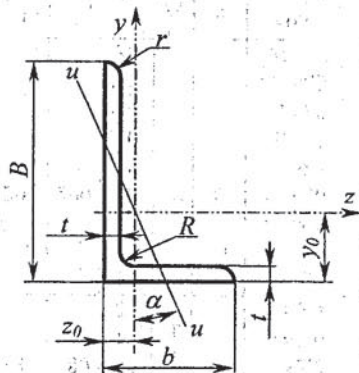
## Продовження таблиці Д.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
16	160	10	16	5,3	31,4	774	66,2	4,96	1229	6,25	319	52,5	3,19	455	4,30	24,7
		11			34,4	844	72,4	4,95	1341	6,24	348	56,5	3,18	496	4,35	27,0
		12			37,4	913	78,6	4,94	1450	6,23	376	60,5	3,17	537	4,39	29,4
		14			43,3	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,2	3,16	615	4,47	34,0
		16			49,1	1175	103	4,89	1866	6,17	485	75,9	3,14	690	4,55	38,5
		18			54,8	1290	114	4,87	2061	6,13	537	82,1	3,13	771	4,63	43,0
		20			60,4	1419	126	4,85	2248	6,10	589	90,0	3,12	830	4,70	47,4
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	92,5	5,60	1933	7,06	500	72,9	3,59	716	4,85	30,5
		12			42,2	1317	100	5,59	2093	7,04	540	78,2	3,58	776	4,89	33,1
		15			52,2	1607	124	5,55	2555	7,00	660	93,1	3,56	948	5,01	41,0
		18			62,0	1884	146	5,51	2993	6,95	775	107	3,54	1108	5,13	48,7
		20			68,4	2061	161	5,49	3271	6,91	851	116	3,53	1210	5,20	53,7
20	200	12	18	6	47,1	1823	125	6,22	2896	7,84	749	98,7	3,99	1073	5,37	37,0
		13			50,9	1961	134	6,21	3116	7,83	805	105	3,98	1156	5,42	39,9
		14			54,6	2097	144	6,20	3333	7,81	861	112	3,97	1236	5,46	42,8
		16			62,0	2363	163	6,17	3755	7,78	970	124	3,96	1393	5,54	48,7
		18			69,3	2621	182	6,15	4165	7,75	1077	136	3,94	1544	5,62	54,4
		20			76,5	2871	201	6,12	4560	7,72	1182	147	3,93	1689	5,70	60,1
		24			90,8	3351	237	6,08	5314	7,65	1388	168	3,91	1963	5,85	71,2
		25			94,3	3466	246	6,06	5494	7,63	1438	173	3,91	2028	5,89	74,0
		30			111,5	4020	289	6,00	6351	7,55	1698	193	3,86	2332	6,07	87,6
		22			220	14	21	7	60,4	2814	175	6,83	4470	8,60	1159	139
16	68,6		3175	199		6,81			5045	8,58	1306	153	4,36	1862	6,92	53,8
25	250	16	24	8	78,4	4717	258	7,76	7492	9,78	1942	203	4,98	2775	6,75	61,5
		18			87,7	5247	289	7,73	8337	9,75	2158	223	4,96	3089	6,83	68,9
		20			97,0	5765	319	7,71	9160	9,72	2370	243	4,94	3395	6,91	76,1
		22			106,1	6270	348	7,69	9961	9,69	2579	261	4,93	3691	7,00	83,3
		25			119,7	7006	392	7,65	11125	9,64	2887	287	4,91	4119	7,11	94,0

Продовження таблиці Д.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
25	250	28 30	24	8	113,1 142,0	7717 8177	435 462	7,61 7,59	12244 12965	9,59 9,56	3190 3389	312 328	4,89 4,89	4527 4788	7,23 7,31	104,5 111,4

Таблиця Д.2 – Кутики сталіні гарячекатані нерівнобокі. Сортамент (ГОСТ 8510 – 86)



Но- мер кути- ка	мм					Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Довідникові дані для осей												Кут нахи- лу осі tg α	Маса 1 м кути- ка, кг
	B	b	t	R	r		z			y			u – u (min)			z <sub>0</sub> см	y <sub>0</sub> см	I <sub>z</sub> <sup>4</sup> см <sup>4</sup>		
							I <sub>z</sub> <sup>4</sup> см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> <sup>3</sup> см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> см	I <sub>y</sub> <sup>4</sup> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> <sup>3</sup> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>u</sub> <sup>4</sup> см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> <sup>3</sup> см <sup>3</sup>	i <sub>u</sub> см					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,39	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43	0,42	1,12
			4	1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,42	1,46		
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,38	1,17
			4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,37	1,52		

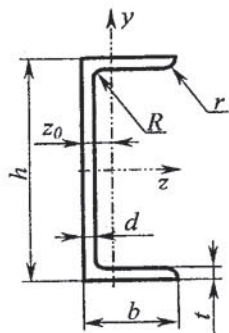
Продовження таблиці Д.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,38	1,48
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,38	1,94
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,37	2,38
4/3	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,54	2,09
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,53	2,57
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,38	1,68
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,37	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,40	1,90
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,40	2,49
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,4	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,40	2,81
			5			4,41	13,8	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,40	3,46
6,3/4	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,3	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,39	3,17
			5			4,98	19,9	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,39	3,91
			6			5,90	23,3	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,39	4,63
			8			7,68	29,6	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,38	6,03
6,5/5	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,4	5,20	2,05	12,1	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,57	4,36
			6			6,60	27,5	6,16	2,04	14,1	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,5	0,57	5,18
			7			7,62	31,3	7,08	2,03	16,1	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,9	0,57	5,98
			8			8,62	35,0	7,99	2,02	18,9	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,6	0,57	6,77
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,8	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,40	4,39
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,8	6,81	2,39	12,5	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,0	0,43	4,79
			6			7,25	40,9	8,08	2,38	14,6	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,1	0,43	5,69
			7			8,37	46,8	9,31	2,36	16,6	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,2	0,43	6,57
			8			9,47	52,4	10,5	2,35	18,5	4,88	1,40	10,9	4,14	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43	7,43
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	41,6	7,71	2,56	12,7	3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,2	0,38	4,99
			6			7,55	49,0	9,15	2,55	14,9	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,5	0,38	5,92
8/6	80	60	6	8,0	2,7	8,15	52,1	9,42	2,53	25,2	5,58	1,76	13,6	4,66	1,29	1,49	2,47	21,0	0,54	6,39
			7			9,42	59,6	10,9	2,52	28,7	6,43	1,75	15,6	5,34	1,29	1,53	2,52	24,0	0,54	7,39
			8			10,7	66,9	12,4	2,50	32,2	7,26	1,74	17,5	5,99	1,28	1,57	2,56	26,8	0,54	8,37

## Продовження таблиці Д.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,3	10,7	2,88	19,7	4,53	1,58	11,8	3,81	1,22	1,26	2,92	20,5	0,38	6,17
			6			8,54	70,6	11,7	2,88	21,2	4,91	1,58	12,7	4,12	1,22	1,28	2,95	22,2	0,38	6,70
			8			11,2	90,9	15,2	2,85	27,1	6,39	1,56	16,3	5,32	1,21	1,36	3,04	28,3	0,38	8,77
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	98,3	14,5	3,20	30,6	6,27	1,79	18,2	5,27	1,38	1,42	3,23	31,5	0,39	7,53
			7			11,1	113	16,8	3,19	35,0	7,23	1,78	20,8	6,06	1,37	1,46	3,28	36,1	0,39	8,70
			8			12,6	127	19,0	3,18	39,2	8,17	1,77	23,4	6,82	1,36	1,50	3,32	40,5	0,39	9,87
			10			15,5	154	23,3	3,15	47,2	9,99	1,75	28,3	8,31	1,35	1,58	3,40	48,6	0,38	12,1
10/6,5	100	65	7	10	3,3	11,2	114	16,9	3,19	38,3	7,70	1,85	22,8	6,43	1,41	1,52	3,24	38,0	0,41	8,81
			8			12,7	138	19,1	3,18	43,0	8,70	1,84	25,2	7,26	1,41	1,56	3,28	42,6	0,41	9,99
			10			15,7	156	23,5	3,15	51,7	10,6	1,82	30,6	8,83	1,40	1,64	3,37	51,2	0,41	12,3
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,5	142	19,1	3,53	45,6	8,42	2,00	26,9	7,05	1,53	1,58	3,55	46,8	0,40	8,98
			8			13,9	172	23,2	3,51	54,6	10,2	1,98	32,3	8,50	1,52	1,64	3,61	55,9	0,40	10,9
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	227	26,7	4,01	73,7	11,9	2,29	43,4	9,96	1,76	1,80	4,01	74,7	0,40	11,0
			8			16,0	256	30,3	4,00	81,0	13,5	2,28	48,8	11,3	1,75	1,84	4,04	84,1	0,40	12,9
			10			19,7	312	37,3	3,98	101	16,5	2,26	59,3	13,7	1,74	1,92	4,14	102	0,40	15,5
			12			23,4	365	44,1	3,95	117	19,5	2,24	69,5	16,1	1,72	2,00	4,22	118	0,40	18,3
14/9	140	90	8	12	4,0	18,0	364	38,3	4,49	120	17,2	2,58	70,3	14,4	1,98	2,03	4,49	121	0,41	14,1
			10			22,2	444	47,2	4,47	146	21,1	2,56	85,5	17,6	1,96	2,12	4,58	147	0,40	17,5
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	606	56,0	5,15	186	24,0	2,85	110	20,0	2,20	2,24	5,19	194	0,39	18,0
			10			25,3	667	61,9	5,13	204	26,4	2,84	121	22,0	2,19	2,28	5,23	213	0,39	19,9
			12			30,0	784	73,4	5,11	239	31,2	2,82	142	25,9	2,18	2,36	5,32	249	0,38	23,6
			14			34,7	897	84,7	5,08	272	35,9	2,80	162	29,8	2,16	2,43	5,40	282	0,38	27,3
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	952	78,6	5,80	276	32,3	3,12	165	27,0	2,42	2,44	5,88	295	0,37	22,2
			12			33,7	1123	93,3	5,77	324	38,2	3,10	194	31,8	2,40	2,52	5,97	348	0,37	26,5
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	1449	107	6,45	446	46,0	3,58	264	38,3	2,75	2,79	6,50	465	0,39	27,4
			12			37,9	1568	117	6,43	482	49,9	3,57	285	41,5	2,74	2,83	6,54	503	0,39	29,7
			14			43,9	1801	135	6,41	551	57,4	3,54	327	47,6	2,73	2,91	6,62	575	0,39	34,4
			16			49,8	2026	152	6,38	617	64,8	3,52	367	53,6	2,72	2,99	6,71	643	0,38	39,1

Таблиця Д.3 – Сталь гарячекатана. Швелери з паралельними гранями полиць (ГОСТ 8240 – 72)

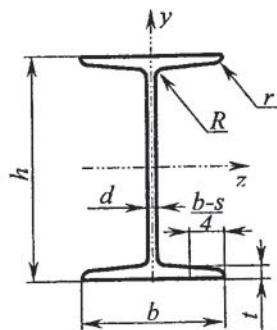


Номер швелера	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Маса l, кг	Довідникові дані для осей							z <sub>0</sub> , см
									z				y-y			
									I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	S <sub>zmax</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,5	3,16	13,3	13,9	5,31	1,240	1,38
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,9	8,59	175	34,9	3,99	20,5	22,6	7,37	1,440	1,53
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,3	10,4	305	50,8	4,79	29,7	34,9	9,84	1,620	1,66
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,6	12,3	493	70,4	5,61	40,9	51,5	12,9	1,810	1,82
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,0	13,3	547	78,2	5,68	45,2	65,2	15,7	1,960	2,04
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,1	14,2	750	93,8	6,44	54,3	72,8	16,4	2,000	1,97
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,5	15,3	827	103	6,51	59,5	90,5	19,6	2,150	2,19
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,7	16,3	1090	121	7,26	70,0	100	20,6	2,200	2,14
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,2	17,4	1200	133	7,34	76,3	123	24,3	2,350	2,36

Продовження таблиці Д.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,4	18,4	1530	153	8,08	88,0	134	25,2	2,390	2,30
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,2	19,8	1680	168	8,17	96,2	162	29,7	2,540	2,53
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,7	21,0	2120	193	8,90	111	178	31,0	2,580	2,47
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,8	22,6	2340	212	9,01	121	220	37,0	2,770	2,75
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,6	24,0	2910	243	9,75	139	248	39,5	2,850	2,72
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,9	25,8	3200	266	9,86	152	302	46,5	3,030	3,01
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,2	27,7	4180	310	10,9	178	314	46,7	2,990	2,78
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,5	31,8	5830	389	12,0	224	393	54,8	3,120	2,83
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,5	36,5	8010	486	13,1	281	491	64,6	3,250	2,90
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,4	41,9	10850	603	14,3	350	611	76,3	3,380	2,99
40	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,5	48,3	15260	763	15,8	445	760	89,9	3,510	3,05

Таблиця Д.4 – Сталь гарячекатана. Балки двотаврові. Сортамент (ГОСТ 8239 – 72)



Номер двотавра	h	b	d	t	R	r	Площа перерізу, см <sup>2</sup>	Маса l, кг	Довідникові дані для осей						
									z				y-y		
									I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	S <sub>zmax</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163	198	34,5	2,37

Продовження таблиці Д.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24а	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407	11,3	229	337	50	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

**Додаток Е**  
**Програма мінімум зі складання іспиту**  
**Частина І**

Незнання хоча б одного з цих теоретичних розділів та формул або невміння їх використовувати для розв'язування найпростіших практичних задач оцінюється незадовільною оцінкою.

**Механічні характеристики матеріалів**

Основні характеристики міцності  $\sigma = \frac{P}{A_0}$  :

- границя текучості  $\sigma_m$ ;
- умовна границя текучості  $\sigma_{0,2}$ ;
- границя міцності  $\sigma_B$ .

Допустиме напруження  $[\sigma] = \frac{\sigma_n}{n}$ ,

$\sigma_n = \sigma_m$  - для пластичних матеріалів  $n = 1,5 \dots 2$ ;

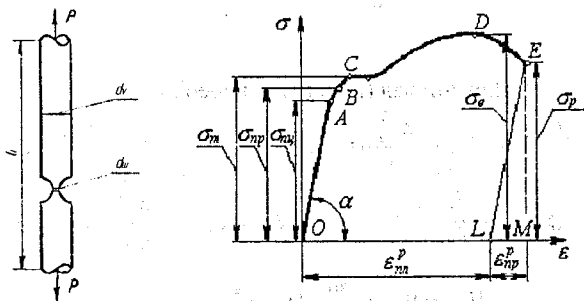
$\sigma_n = \sigma_e$  - для крихких,  $n = 3 \dots 5$ ,  $n$  - коефіцієнт запасу міцності.

*Характеристики пластичності:*

відносне залишкове видовження  $\delta = \frac{l_{розр} - l_0}{l_0} \cdot 100\%$ ,

відносне залишкове звуження  $\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \cdot 100\%$ ,

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} \quad A_{ш} = \frac{\pi d_{ш}^2}{4}$$



*Характеристики пружності для сталі :*

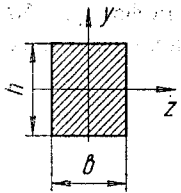
$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;

$\mu = 0.25 - 0.3$ ;

$G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ .

## Геометричні характеристики плоских перерізів

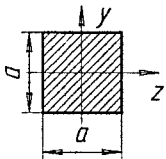
### Прямокутник



$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{b^3h}{12};$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6}.$$

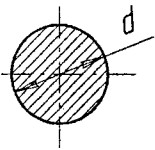
### Квадрат



$$I_z = \frac{a^4}{12}; \quad I_y = \frac{a^4}{12};$$

$$W_z = \frac{a^3}{6}; \quad W_y = \frac{a^3}{6}.$$

### Круг

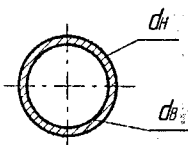


$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

### Порожній вал (кільцевий переріз)



$$W_p = \frac{\pi d_H^3}{16} (1 - \alpha^4); \quad I_p = \frac{\pi d_H^4}{32} (1 - \alpha^4);$$

$$\alpha = \frac{d_B}{d_H}; \quad I_z = I_y = \frac{4\pi d_H^4}{64} (1 - \alpha^4);$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi d_H^3}{32} (1 - \alpha^4).$$

## Умови міцності і жорсткості при найпростіших видах деформації

### Розтяг – стиск

Закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Умова жорсткості

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)} \leq [\Delta l].$$

Умова міцності  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ ,  $\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ , коефіцієнт запасу  $n = \frac{\sigma_m}{\sigma}$ .

Проектний розрахунок  $A \geq \frac{N}{[\sigma]}$ .

Допустиме навантаження  $[N] = [\sigma] \cdot A$ .

### Зсув

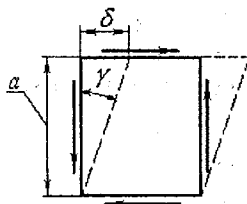
закон Гука при зсуві

$$\tau = G\gamma.$$

Умова жорсткості  $\delta = \frac{Qa}{GA} \leq [\delta]$ .

Умова міцності  $\tau_{\max} = \frac{Q}{A} \leq [\tau]$ ,

$A$  – площа зрізу.



### Кручення

Умова міцності

$$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau].$$

Жорсткість при крученні:

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p} \leq [\varphi].$$

### Згин

Умова міцності

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{зг}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Умова жорсткості балки

$$y_{max} \leq [f].$$

## Теорія напруженого стану

Напруження – інтенсивність внутрішніх сил (внутрішня сила що приходить на одиницю площі).

$\bar{\sigma} = \frac{N}{F}$  - інтенсивність нормальних внутрішніх зусиль;

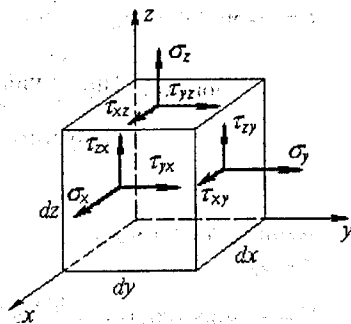
$\tau = \frac{Q}{F}$  - інтенсивність зсувних внутрішніх зусиль.

Питома потенційна енергія при розтягу

$$u = \frac{P\Delta l}{2Al} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Тензор напружень у декартовій системі координат

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$



Тензор напруг у головних осях

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

Головні напруження  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

## Формули перетворення

Лінійний напружений стан

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

## Теорії міцності

$$\sigma_{\text{зкв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_T,$$

$$\sigma_{\text{зкв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_T,$$

$$\sigma_{\text{зкв}}^{\text{Мора}} = \sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq \sigma_T.$$

Додаток Ж

Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	Границя міцності при розтягу	Границя текучості при розтягу	Границя текучості при крученні	Відносне видовження $\delta$ , %, при $l=10d$	Ударна в'язкість $a_k \times 10^{-5}$ (Нм)/м <sup>2</sup>
	$\sigma_s$	$\sigma_m$	$\tau_m$		
	не менше МПа				
10	340	210	140	31	24
20	420	250	160	25	—
25	460	280	—	23	9
30	500	300	170	21	8
35	540	320	190	20	7
40	580	340	—	19	6
45	610	360	220	16	5
50	640	380	—	14	4
55	660	390	—	13	—
60	690	410	—	12	—
20Г	460	280	—	24	—
30Г	550	320	—	20	8
50Г	660	400	—	13	4
20Х	800	650	—	11	6
40Х	1000	800	—	10	6
45Х	1050	850	—	9	5
30ХМ	950	750	—	11	8
35ХМ	1000	850	—	12	8
40ХН	1000	800	390	11	7
50ХН	1100	900	—	9	5
40ХФА	900	750	—	10	9
38ХМЮА	1000	850	—	14	9
12ХНЗА	950	700	400	11	9
20ХНЗА	950	750	—	12	10
30ХНЗА	1000	800	—	10	8
40ХНМА	1000	950	—	12	10
30ХГСА	1100	850	—	10	5

Навчальне видання

Віталій Антонович Огородніков,  
Олександр Володимирович Грушко,  
Михайло Іванович Побережний

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ  
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ  
З ПРИКЛАДАМИ РОЗРАХУНКІВ  
Частина 1**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено О.В. Грушком

Редактор О.Д. Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВНТУ  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку *29 09 2003*  
Формат 29,7 x 42 <sup>1</sup>/<sub>4</sub>  
Друк різнографічний  
Тираж *125* прим.  
Зам № *2 13 147*

Гарнітура Times New Roman  
Папір офсетний  
Ум. друк. арк. *6.56*

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК № 746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95