Л.І. ПЕДОРЧЕНКО, В.А. ПЕТРУК, В.С. ПЕТРУНІН

ЗБІРНИК

ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 5

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Л.І. ПЕДОРЧЕНКО, В.А. ПЕТРУК, В.С. ПЕТРУНІН

ЗБІРНИК

ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Частина 5

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як збірник завдань для студентів усіх напрямів підготовки усіх спеціальностей. Протокол № 10 від "27" травня 2004р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 517.3 (075)
П 64

Рецензенти:

В.М. Дубовий, доктор технічних наук, професор
В.Л. Карпенко, кандидат фізико-математичних наук, професор
В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Л.І. Педорченко, В.А. Петрук, В.С. Петрунін
П 64 Збірник індивідуальних завдань з вищої математики. Диференціальні рівняння. Ч.5. Збірник завдань. – Вінниця: ВНТУ, 2005. –122 с.

У збірнику завдань наведені короткі відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь і систем, приклади розв'язання типових завдань і 100 варіантів завдань для самостійної роботи, кожний з яких містить геометричну і фізичну задачі на складання диференціальних рівнянь, приклади на інтегрування диференціальних рівнянь різних типів, а також завдання на наближене розв'язання задачі Коші за допомогою комп'ютера з використанням пакетів прикладних програм.

Призначений для студентів усіх напрямів підготовки всіх спеціальностей.

УДК 517.3 (075)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Збірник завдань містить приклади і задачі в обсязі програми нормативного курсу для студентів вищих технічних навчальних закладів усіх спеціальностей, які вивчають "Диференціальні рівняння" як розділ з курсу вищої математики або як окрему дисципліну.

Мета даного збірника допомогти студентам глибше засвоїти теоретичний матеріал та вміти застосовувати його на практиці при виконанні індивідуальних завдань.

Велика кількість різних однотипних варіантів дає можливість використовувати збірник для видачі індивідуальних завдань студентам, для методичного забезпечення практичних занять з курсу вищої математики, а також для проведення контрольних заходів з розділу "Звичайні диференціальні рівняння".

Наявність великої кількості різноманітних задач з математичного моделювання процесів природничого характеру (фізичного, хімічного тощо) і геометричних задач, які моделюються диференціальними рівняннями, є важливим для навчальної діяльності творчого спрямування.

I. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Загальні поняття та означення

Звичайним диференціальним рівнянням називають співвідношення вигляду:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

де x – незалежна змінна;

$y(x)$ – шукана функція;

$y'(x),\ y''(x),\ \dots,\ y^{(n)}(x)$ – похідні від шуканої функції відповідно 1-го, 2- го, ... , n-го порядків.

Функція $y = \varphi(x)$ називається *розв'язком* диференціального рівняння (1), якщо $F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Найвищий порядок похідної від шуканої функції, що входить у рівняння (1), називають *порядком* цього диференціального рівняння.

Приклади.

$y' = x + y$ – диференціальне рівняння 1-го порядку;

$y'' + xy = \cos x$ – диференціальне рівняння 2-го порядку;

$y^{IV} - (y')^2 = e^x$ – диференціальне рівняння 4-го порядку.

Диференціальні рівняння першого порядку

Найбільше вивчені диференціальні рівняння 1-го порядку. Загальний вигляд такого рівняння:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

У деяких окремих випадках це рівняння може бути розв'язане відносно першої похідної і подане у вигляді:

$$y' = f(x, y). \tag{2'}$$

З геометричного погляду це рівняння задає на площині поле напрямів, тобто кожній точці площини ставиться у відповідність кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в цій точці до графіка розв'язку $y(x)$. Розв'язком рівняння (2) або (2′) є однопараметрична сім'я інтегральних кривих

$$y = \varphi(x) + C.$$

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку полягає у тому, що необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$.

Умова
$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$
називається початковою умовою.

2. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку

Якщо функція $f(x, y)$ і частинна похідна $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ неперервні в точці (x_0, y_0) і в деякому її околі, то існує єдиний розв'язок задачі Коші, сформульованої попередньо.

Функція
$$y = \varphi(x, C), \tag{4}$$

де C – довільна стала, називається *загальним розв'язком* диференціального рівняння (2) або (2'), якщо:

1) $\varphi(x,C)$ – розв'язок даного диференціального рівняння при будь-яких значеннях константи C;

2) для будь-якої початкової умови з області існування і єдиності розв'язку задачі Коші знайдеться таке єдине значення константи $C = C^0$, що $y_0=\varphi(x_0,C^0)$.

Приклад. $y' = y$.

Очевидно, що функція $y = e^x$ є розв'язком цього рівняння, оскільки при підстановці $y = e^x$ рівняння перетворюється у тотожність.

Переконаємося у тому, що функція $y = Ce^x$ також є розв'язком цього рівняння.

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = y$, а $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$. Обидві ці функції неперервні на всій площині; отже, існує єдиний розв'язок задачі Коші для будь-якої початкової умови.

Нехай задано початкову умову:
$$y(x_0) = y_0.$$

Підставимо замість y функцію Ce^x, дістанемо таке рівняння для визначення константи C:
$$Ce^{x_0} = y_0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно C, матимемо:
$$C = C^0 = y_0 e^{-x_0}.$$

Очевидно, що розв'язок – єдиний. Отже, функція $y = Ce^x$ є загальним розв'язком даного диференціального рівняння.

Зауваження. У багатьох випадках в результаті відшукання розв'язку диференціального рівняння (2) дістаємо співвідношення вигляду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{4'}$$

яке задає y як неявну функцію від x або x як неявну функцію від y. Це співвідношення називають *загальним інтегралом* даного рівняння.

Будь-яка функція, яку отримуємо із загального розв'язку диференціального рівняння при певному значенні константи, називається *частинним розв'язком цього рівняння.* Таким чином, відшукання розв'язку задачі Коші зводиться до відшукання частинного розв'язку. Для відшукання частинного розв'язку потрібно:

1) знайти загальний розв'язок диференціального рівняння;

2) знайти конкретне значення константи C, використовуючи початкову умову.

З геометричного погляду розв'язати задачу Коші означає: із однопараметричної сім'ї інтегральних кривих потрібно виділити одну, яка проходить через точку (x_o, y_o).

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y, \quad y(0) = 2.$$

Розв'язання. 1) Знайдемо загальний розв'язок: $y = C\,e^x$.

2) Визначимо значення довільної сталої C, використовуючи початкову умову

$$C\,e^0 = 2 \Rightarrow C = 2.$$

Таким чином, розв'язком задачі Коші є функція $y = 2\,e^x$.

3. Рівняння першого порядку, які зводяться до квадратур

Окремі типи рівнянь першого порядку зводяться до квадратур. Деякі типи диференціальних рівнянь шляхом еквівалентних перетворень можна звести до рівності інтегралів, тобто до квадратур. До квадратур можна завжди звести такі типи диференціальних рівнянь:

1) *Рівняння з відокремленими змінними*

Загальний вигляд:

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0. \tag{5}$$

Інтегруючи почленно, отримаємо загальний інтеграл

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = \int 0\,dx$$

або

$$F(x, y) = C.$$

2) ***Рівняння з відокремлюваними змінними***

Загальний вигляд:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)\,Q_2(y)dy = 0 \tag{6}$$

або

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{6'}$$

Виключимо із розгляду точки, в яких $Q_1(y) = 0$ і $P_2(x) = 0$. Поділимо обидві частини першого рівняння на добуток $P_2(x) \cdot Q_1(y)$, отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

Зінтегрувавши це рівняння, отримаємо загальний інтеграл

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

3) ***Однорідні диференціальні рівняння***

Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x,y)$ називається однорідним, якщо його можна звести до вигляду:

$$y' = \varphi\,(y/x) \tag{7}$$

або до вигляду:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{7'}$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції одного виміру.

Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією k-го виміру відносно змінних x і y, якщо для будь-якого λ справедлива тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Приклад **1**. Функція $f(x, y) = 3xy + y^2$ є однорідною другого виміру, оскільки

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda x \lambda y + (\lambda y)^2 = \lambda^2\,(3xy + y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

Приклад 2. Функція $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ є однорідною нульового виміру, оскільки

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}=\lambda^0\frac{x+y}{x-y}=\lambda^0 f(x,y).$$

Однорідне рівняння (7) підстановкою $y/x=u\,(x)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно, якщо $u=y/x$, то $y=u\cdot x$ і $y'=u'x+u$. Підставивши ці значення y та y' в задане рівняння, отримаємо:

$$xu'+u=\varphi(u),$$

тобто

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u \quad \text{або} \quad \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, дістанемо:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C.$$

Підставивши після інтегрування y/x замість u, дістанемо загальний інтеграл даного рівняння.

4) *Лінійні диференціальні рівняння*

Рівняння вигляду:

$$y'+p\,(x)\,y=q\,(x), \tag{8}$$

де $p\,(x)$ і $q\,(x)$ – неперервні функції від x, називається лінійним.

Якщо $q\,(x)\neq 0$, то рівняння називається лінійним неоднорідним, а якщо $q\,(x)\equiv 0$, то – лінійним однорідним.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку (8) можна розв'язати методом Бернуллі або методом Лагранжа.

а) *Метод Бернуллі.* Лінійне диференціальне рівняння першого порядку (8) підстановкою $y=u\cdot v$, де $u=u\,(x)$ і $v=v\,(x)$ – дві невідомі функції, зводиться до вигляду:

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x) \quad \text{або} \quad u'v+u\,(v'+p(x)v)=q(x).$$

Оскільки одну із невідомих функцій (наприклад, v) можна вибрати довільно (тільки добуток $u\cdot v$ повинен задовольняти вихідне рівняння), то v визначимо з умови, що вираз у дужках дорівнює нулю.

Розв'язуючи рівняння

$$v' + p(x)v = 0,$$

ми беремо будь-який його частинний розв'язок. Нехай

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Тоді попереднє рівняння зводиться до рівняння

$$u'v = q(x)$$

або

$$u' = \frac{q(x)}{v} = q(x)\, e^{\int p(x)dx},$$

звідки

$$u = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння дорівнює добутку u на v, тобто

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + C\right].$$

б) *Метод Лагранжа (варіації довільної сталої).* Ідея методу Лагранжа полягає в тому, що спочатку шукаємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y' + p(x)\, y = 0. \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -p(x)\, y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -p(x)\, dx \;\Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\, dx + \ln|C| \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x) dx \;\Rightarrow$$

$$y = C e^{-\int p(x)dx}, \tag{10}$$

де C – довільна стала.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (8) будемо шукати у вигляді

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)dx}, \tag{11}$$

де $C(x)$ – деяка диференційовна функція, яка підлягає визначенню.

Для відшукання $C(x)$ підставимо розв'язок (11) у рівняння (8), попередньо знайшовши похідну y':

$$y' = C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)dx}.$$

Дістанемо рівняння:

$$C'(x) e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідки

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + C,$$

де C – довільна стала.

Тоді шуканий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння матиме вигляд

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)\; e^{\int p(x)dx}\, dx + C \right].$$

5) ***Рівняння Бернуллі***

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1) \tag{12}$$

називається рівнянням Бернуллі.

Воно зводиться до лінійного підстановкою $z = y^{1-\alpha}$.

Рівняння Бернуллі можна розв'язати методом Бернуллі або методом Лагранжа.

Приклади розв'язання цих рівнянь розглянемо далі.

Питання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається диференціальним n-го порядку?
2. Що таке порядок диференціального рівняння? Визначити порядок диференціального рівняння $y'' + 4y = \cos x$.
3. Дайте означення розв'язку диференціального рівняння.

Диференціальні рівняння першого порядку

1. Що називається задачею Коші? Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку вигляду $y' = f(x, y)$.
2. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
3. Який геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку та його розв'язку?

4. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку. Довести, що функція $y = \varphi(x, C)$, де C – довільна стала, є його загальним розв'язком.

5. Дайте означення диференціального рівняння першого порядку з відокремленими змінними та вкажіть метод його розв'язання.

6. Яке диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з відокремлюваними змінними? Як воно інтегрується?

7. Яку функцію називають однорідною виміру m? Наведіть приклади однорідних функцій.

8. Яке диференціальне рівняння першого порядку називається однорідним? Наведіть різні форми диференціальних рівнянь, які є однорідними. Якою підстановкою однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?

9. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння першого порядку? Виведіть формулу його загального розв'язку методом Бернуллі і методом Лагранжа (варіації довільної сталої).

10. Який вигляд має рівняння Бернуллі і як його можна звести до лінійного диференціального рівняння першого порядку?

4. Диференціальні рівняння вищих порядків

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку ставиться так: необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (13)$$

який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y'_0, \;\; \dots \;, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (14)$$

де x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ – деякі числа.

Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку

Якщо $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ неперервна і має неперервні частинні похідні за аргументами x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$ в точці $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ і в деякому її околі, то існує єдиний розв'язок задачі Коші, сформульованої попередньо.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку (13) називається функція $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні константи, якщо:

1) при будь-яких значеннях $C_1, C_2, \dots, C_n$ функція $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ є розв'язком даного рівняння;

2) при будь-яких початкових умовах з області існування і єдиності розв'язку знайдеться єдиний набір констант C_1°, C_2°, ..., C_n° такий, що функція $\varphi(x, C_1^\circ, C_2^\circ, ..., C_n^\circ)$ буде задовольняти ці початкові умови.

Будь-який розв'язок, який дістаємо із загального при фіксованих значеннях констант $C_1, C_2, ..., C_n$, називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння (13).

Зауваження. Якщо n=2, то диференціальні рівняння (1) і (13) є рівняннями другого порядку:

$$F(x,y,y',y'') = 0 \tag{15}$$

і

$$y'' = f(x,y,y'). \tag{15'}$$

Рівняння (15′), розв'язане відносно старшої похідної, називається диференціальним рівнянням у нормальній формі.

Початкові умови для диференціального рівняння другого порядку (15) або (15′) мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{16}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (ДР) другого порядку (15) або (15′) залежить від двох довільних сталих:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \tag{17}$$

Задача Коші для ДР другого порядку полягає у відшуканні розв'язку, що задовольняє початкові умови.

Геометрично задача Коші для ДР другого порядку полягає у відшуканні інтегральної кривої, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ площини з заданим кутовим коефіцієнтом y'_0 дотичної в цій точці.

Приклади розв'язання задачі Коші і знаходження загального розв'язку для рівняння вищих порядків наведені в [1;2].

5. Окремі випадки диференціальних рівнянь, які допускають зниження порядку

***Випадок* 1**. Рівняння типу:

$$y^{(n)} = f(x). \tag{18}$$

Зниження порядку досягається таким чином:

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

звідки

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=f(x) \;\Rightarrow\; dy^{(n-1)}=f(x)dx.$$

Інтегруючи обидві частини, матимемо:

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1.$$

Це рівняння знову допускає зниження порядку, і, продовжуючи цей процес далі, після n-кратного інтегрування дістанемо шукану функцію.

***Зауваження* 1**. Якщо $n = 2$, то отримаємо рівняння

$$y''=f(x). \tag{19}$$

Тоді

$$y'=\int f(x)\,dx+C_1,$$

а

$$y=\int\left[\int f(x)\,dx\right]dx+C_1x+C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

***Приклад* 1**. Розв'язати рівняння $y''=8\cos^2 x$.

Розв'язання. Інтегруючи задане рівняння, спочатку отримаємо

$$y'=\int 8\cos^2 x\,dx+C_1=8\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx+C_1 == 4x+2\sin 2x+C_1.$$

Зінтегрувавши отримане рівняння, дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y=\int(4x+2\sin 2x+C_1)\,dx+C_2=2x^2-\cos 2x+C_1x+C_2,$$

тобто

$$y=2x^2-\cos 2x+C_1x+C_2.$$

***Випадок* 2.** Рівняння типу:

$$F(x,\ y',\ y'',\ \dots,\ y^{(n)})=0, \tag{20}$$

тобто рівняння, яке явно не містить y. Зробимо заміну: $y'=p$, де $p=p(x)$, тоді

$$y''=p',\ \dots,\ y^{(n)}=p^{(n-1)}.$$

Таким чином, матимемо рівняння

$$F(x,\ p',\ p'',\ \dots,\ p^{(n-1)})=0,$$

яке має порядок на одиницю менший, ніж вихідне ДР.

Зауваження 2. Якщо $n = 2$, то отримаємо рівняння типу:

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{21}$$

яке не містить y.

Покладемо $y' = p$, де $p = p(x)$, тоді $y'' = p'$. Таким чином, матимемо рівняння першого порядку

$$F(x, p, p') = 0.$$

Розв'язавши його, матимемо:

$$p = \varphi(x, C_1),$$

де C_1 – довільна стала.

Оскільки $p = y'$, то $y' = \varphi(x, C_1)$. Звідки, інтегруючи ще раз, отримаємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

***Приклад* 2.** Знайти загальний розв'язок рівняння $x y'' = 2y'$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p$, де $p = p(x)$, тоді $y'' = p'$. Отримаємо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$x p' = 2p \quad \text{або} \quad x\frac{dp}{dx} = 2p.$$

Після відокремлення змінних отримаємо рівняння

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи це рівняння, матимемо:

$$\ln|p| = 2\ln|x| + \ln C_1 \quad \text{або} \quad p = C_1 x^2.$$

Але $p = y'$, тоді $y' = C_1 x^2$. Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо загальний розв'язок

$$y = C_1\frac{x^3}{3} + C_2.$$

***Випадок* 3.** Рівняння типу:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{22}$$

тобто рівняння, яке явно не містить x. Зробимо заміну: $y' = p(y) = p$, тоді

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p, \text{ тобто } \quad y''=p\cdot\frac{dp}{dy};$$

$$y'''=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2} \quad \text{і т. д.}$$

Отже, отримаємо рівняння

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0,$$

яке має порядок на одиницю менший, ніж вихідне ДР.

Зауваження 3. Якщо $n=2$, то отримаємо рівняння типу:

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{23}$$

яке явно не містить змінну x.

Покладемо $y' = p$, де $p = p(y)$, тоді $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння першого порядку

$$F\left(y, p, \ldots, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Розв'язавши його, матимемо:

$$p = \varphi(y, C_1),$$

де C_1 – довільна стала.

Оскільки $p=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \varphi(y,C_1)$. Відокремимо змінні у цьому рівнянні, отримаємо таке рівняння:

$$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, дістанемо загальний інтеграл

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = x+C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''y = (y')^2$.

Розв'язання. Покладемо $y'= p$, де $p = p(y)$, тоді $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$. Отримаємо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$p\frac{dp}{dy}y = p^2 \text{ або } p\left(\frac{dp}{dy}y - p\right) = 0.$$

1) $p = 0 \;\Rightarrow\; y' = 0 \;\Rightarrow\; y = C.$

2) $\frac{dp}{dy}y - p = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y} + \ln C_1$

$$\Rightarrow\; \ln|p| = \ln|y| + \ln C_1 \;\Rightarrow\; p = C_1 y.$$

Але $p = y'$, маємо рівняння $y' = C_1 y$ або $\frac{dy}{dx} = C_1 y$. Відокремимо змінні, отримаємо рівняння

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, дістанемо:

$$\int\frac{dy}{y} = C_1 x + \ln C_2 \;\Rightarrow\; \ln|y| = C_1 x + \ln C_2 \;\Rightarrow\; y = C_2 e^{C_1 x}$$

– загальний розв'язок..

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення диференціального рівняння другого порядку. Наведіть приклади.

2. Дайте означення розв'язку диференціального рівняння другого порядку. Наведіть приклади.

3. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку в нормальній формі.

4. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку в нормальній формі.

5. В чому полягає метод розв'язання диференціального рівняння типу $y'' = f(x)$? Наведіть приклад.

6. В чому полягає метод розв'язання диференціального рівняння типу $y'' = f(x, y')$? Наведіть приклад.

7. В чому полягає метод розв'язання диференціального рівняння типу $y'' = f(y, y')$? Наведіть приклад.

6. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x), \qquad (24)$$

де $f(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ – задані неперервні на відрізку $[a,b]$ функції від x (або константи).

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \qquad (25)$$

називають *однорідним лінійним диференціальним рівнянням* (ОЛДР) n-го порядку. Тоді рівняння (24) називається *неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням* (НЛДР) n-го порядку.

Теорема. Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ – частинні розв'язки рівняння (25), то їх лінійна комбінація, тобто

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (26)$$

також є розв'язком рівняння (25).

За яких умов (26) є загальним розв'язком рівняння (25)? Щоб відповісти на це питання, введемо поняття лінійно незалежної системи функцій.

Лінійно залежні і лінійно незалежні функції

Нехай функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ – визначені і неперервні на відрізку $[a,b]$.

Означення. Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ називаються лінійно залежними, якщо існують сталі C_1, C_2, ... , C_n, не всі рівні нулю, такі, що

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0, \qquad (27)$$

в противному випадку дані функції називаються лінійно незалежними.

Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ є розв'язками ОЛДР n-го порядку (25), то питання про лінійну залежність чи лінійну незалежність цих функцій можна виявити за допомогою визначника n-го порядку, складеного з цих функцій і з їх похідних:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x), \qquad (28)$$

який називається визначником Вронського (або вронскіаном).

Теорема *про необхідну умову лінійної залежності функцій*. Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ – лінійно залежні на проміжку X, то визначник Вронського, складений з них, дорівнює нулю на цьому проміжку.

Доведення. Оскільки функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – лінійно залежні, то існує таке число $C_i \neq 0$ ($i = \overline{1,n}$), що $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$.

Нехай $C_1 \neq 0$. Тоді

$$y_1(x) = \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x), \text{ де } \alpha_k = -\frac{C_k}{C_1} \quad (k = \overline{2,n}).$$

Підставимо це значення $y_1(x)$ у визначник Вронського (28), отримаємо:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 y_2(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ \alpha_2 y_2'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \alpha_n y_n(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ \alpha_n y_n'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Вронскіан тотожно дорівнює нулю, оскільки у кожному визначнику є пропорційні стовпці.

Наслідок. З теореми випливає достатня умова лінійної незалежності функцій. Якщо визначник Вронського (28) відмінний від нуля, то функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – *лінійно незалежні.*

Зауваження. У випадку лінійного рівняння другого порядку умова лінійної незалежності частинних розв'язків має вигляд:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const. \tag{29}$$

Якщо ж функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно залежні, то

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const. \tag{30}$$

Будь-яка система n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ОЛДР рівняння (25) називається *фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння.

Теорема про структуру загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння (ОЛДР) n-го порядку

Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ утворюють лінійно незалежну систему розв'язків ОЛДР (25), то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$\Phi\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x). \qquad (31)$$

Теорема про структуру загального розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння (НЛДР) n-го порядку

Загальний розв'язок НЛДР (24) є сумою загального розв'язку відповідного ОЛДР (25) і частинного розв'язку даного НЛДР, тобто загальний розв'язок має вигляд:

$$y\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = \Phi\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) + \psi(x), \qquad (32)$$

де $\Phi\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ - загальний розв'язок відповідного ОЛДР (25), $\psi(x)$ – частинний розв'язок даного НЛДР (24).

Теорема про накладання частинних розв'язків НЛДР (принцип суперпозиції)

Якщо права частина НЛДР (24) $f\,(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок цього НЛДР

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \qquad (33)$$

де $\psi_1(x)$ і $\psi_2(x)$ – частинні розв'язки НЛДР, правими частинами яких є функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ відповідно, а ліві частини цих НЛДР збігаються з лівою частиною рівняння (24). Доведення сформульованих теорем викладені в [1;2].

Знаходження частинного розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння (ОЛДР) другого порядку за відомим одним його частинним розв'язком

Нехай дано ОЛДР другого порядку

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \qquad (34)$$

і $y_1(x)$ – його частинний розв'язок. Знайдемо другий частинний розв'язок $y_2(x)$.

Покладемо $y = z\,y_1(x)$, де $z = z(x)$.

Тоді

$$y' = z'\,y_1 + z\,y_1', \quad y'' = z''\,y_1 + 2z'\,y_1' + z\,y_1''.$$

Підставимо вирази для y, y', y'' в рівняння (34), матимемо:

$$z'' y_1 + 2z' y_1' + z y_1'' + a_1(x)(z' y_1 + z y_1') + a_2(x) z y_1 = 0$$

або

$$z\left[y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1\right] + \left[2z' y_1' + a_1(x) z' y_1\right] + z'' y_1 = 0.$$

Оскільки y_1 є розв'язком ОЛДР (34), то вираз у перших квадратних дужках дорівнює нулю. Тоді рівняння матиме вигляд:

$$z'' y_1 + z'\left[2\, y_1' + a_1(x)\, y_1\right] = 0.$$

Отримане рівняння не містить z. Отже, воно допускає зниження порядку. Покладемо $z' = u$, де $u = u(x)$, тоді $z'' = u'$. Підставимо значення z' і z'' в останнє рівняння, дістанемо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними відносно функції u.

$$u' y_1 + u\left[2\, y_1' + a_1(x)\, y_1\right] = 0.$$

Відокремимо змінні, матимемо:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{y_1}\left[2y_1' + a_1(x) y_1\right]dx.$$

Зінтегрувавши це рівняння, дістанемо:

$$\int\frac{du}{u} = -2\int\frac{y_1'}{y_1}dx - \int a_1(x)dx + \ln C_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln|u| = -2\ln|y_1| - \int a_1(x)dx + \ln C_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln|u| = \ln\frac{1}{y^2} + \ln e^{-\int a_1(x)dx} + \ln C_1 \;\Rightarrow\; u = C_1\frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int a_1(x)dx}.$$

Але $u = z'$, тоді $z' = C_1\dfrac{1}{y_1^2}\, e^{-\int a_1(x)dx}$. Інтегруючи ще раз, дістанемо:

$$z = C_1\int\frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int a_1(x)dx}\, dx + C_2.$$

Тоді

$$y = C_1 y_1\int\frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int a_1(x)dx}\, dx + C_2 y_1,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Отже,

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)\,dx}\, dx. \qquad (35)$$

Ми отримали формулу (35) для знаходження другого частинного розв'язку за відомим одним частинним розв'язком $y_1(x)$ ОЛДР другого порядку (34).

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x), \qquad (36)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – деякі неперервні функції на відрізку $[a,\ b]$. Рівняння (36) називається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, а функції $a_1(x)$ і $a_2(x)$ – коефіцієнти заданого рівняння.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \qquad (37)$$

називається відповідним однорідним лінійним диференціальним рівнянням (ОЛДР) другого порядку.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (36) називається неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням (НЛДР) другого порядку.

Загальний розв'язок рівняння (36) визначається за формулою

$$y = \Phi(x) + \psi(x), \qquad (38)$$

де $\Phi(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (37), а $\psi(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (36).

Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного ОЛДР (37). Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки ОЛДР (37). Тоді його загальний розв'язок має вигляд

$$\Phi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (39)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (36) шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x), \qquad (40)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції. Підберемо ці функції так, щоб функція (40) була розв'язком рівняння (36). Знайдемо похідну y'.

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) =$$

$$= \left[C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)\right] + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Накладемо на $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю, тобто

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0. \tag{41}$$

Маємо першу умову для визначення $C_1(x)$ і $C_2(x)$. Тоді при виконанні цієї умови

$$y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

Друге співвідношення дістанемо з умови, що y задовольняє дане неоднорідне рівняння (36). Знайдемо другу похідну

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставивши значення y, y', y'' в ДР (36), дістанемо

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x)+$$

$$+a_1(x)[C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)]+a_2(x)[C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)]=f(x)$$

або

$$C_1(x)[y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)]+$$

$$+C_2(x)[y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)]+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (36), то вирази у квадратних дужках дорівнюють нулю, тобто

$$y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)=0,$$

$$y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)=0.$$

Тоді останнє співвідношення матиме вигляд

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \tag{42}$$

Маємо другу умову для визначення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

Об'єднавши умови (41) і (42), дістанемо систему рівнянь, яку повинні задовольняти невідомі функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases} \tag{43}$$

У системі (43) невідомими є функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Оскільки визначник цієї системи

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

є вронскіаном фундаментальної системи розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$, то $W(x) \neq 0$ в жодній точці розглядуваного проміжку. Тому система (43) має єдиний розв'язок відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$.

Нехай $C_1'(x) = \varphi_1(x)$, $C_2'(x) = \varphi_2(x)$ – розв'язок системи (43). Тут $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – відомі функції:

$$\varphi_1(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}.$$

Отже,

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_2,$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Підставивши значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у співвідношення (40), дістанемо загальний розв'язок системи (36)

$$y = \left(\int \varphi_1(x)dx + C_1\right)y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x)dx + C_2\right)y_2(x)$$

або

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx. \qquad (44)$$

Оскільки у виразі (44) сума перших двох доданків є загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння (37), то функція

$$\psi(x) = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx \qquad (45)$$

є частинним розв'язком рівняння (36).

Зауваження. У випадку НЛДР зі сталими коефіцієнтами, коли права частина $f(x)$ має спеціальний вигляд, тобто є квазімногочленом, частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти простіше: методом невизначених коефіцієнтів.

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення лінійно залежних та лінійно незалежних функцій. Наведіть приклади.

2. Доведіть, що для лінійно залежних функцій вронскіан дорівнює нулю.

3. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння другого порядку?

4. Яка структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння (ОЛДР) другого порядку?

5. Як знайти другий лінійно незалежний розв'язок ОЛДР другого порядку за відомим його одним розв'язком ?

6. Який вигляд має неоднорідне лінійне диференціальне рівняння (НЛДР) другого порядку?

7. В чому полягає метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) відшукання частинного розв'язку НЛДР другого порядку ?

8. Сформулюйте принцип накладання розв'язків НЛДР з правою частиною $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

7. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{46}$$

де $a_k = const$, $(k = \overline{1,n})$.

Для знаходження загального розв'язку ОЛДР використовується характеристичне рівняння.

Нехай є ОЛДР зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{47}$$

характеристичним рівнянням якого називають рівняння вигляду:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{48}$$

Знаходження загального розв'язку ОЛДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Нехай маємо рівняння:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{49}$$

і k_1 та k_2 – корені його характеристичного рівняння $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

1) Якщо k_1 та k_2 – дійсні і $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок ОЛДР (49) має вигляд:

$$\Phi(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{50}$$

2) Якщо k_1 та k_2 – дійсні і $k_1 = k_2$, то загальний розв'язок ОЛДР (49) має вигляд:

$$\Phi(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{k_1 x}. \qquad (51)$$

3) Якщо k_1 та k_2 – комплексно-спряжені числа, тобто $k_1 = \alpha + \beta j$, $k_2 = \alpha - \beta j$, де $j^2 = -1$, то загальний розв'язок даного ОЛДР (49) має вигляд:

$$\Phi(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (52)$$

Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і з спеціальною правою частиною. Метод невизначених коефіцієнтів

Рівняння вигляду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (53)$$

де a_1 і a_2 – дійсні сталі, а $f(x) \neq 0$, є частинним випадком лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами.

За формулою (38) загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку $\Phi(x)$ відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку $\psi(x)$ неоднорідного рівняння.

Якщо відомий загальний розв'язок $\Phi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ відповідного однорідного рівняння, то для відшукання частинного розв'язку $\psi(x)$ рівняння (53) можна скористатися методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа) як у випадку лінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами (36), який викладений в [1; 2].

У випадку, коли права частина $f(x)$ в рівнянні (53) є квазімногочленом, частинний розв'язок $\psi(x)$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Функція $f(x)$ називається *квазімногочленом* з параметрами m, n, α, β, якщо

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos\beta x + Q_m(x) \sin\beta x), \qquad (54)$$

де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – многочлени від змінної x степеня n і m відповідно.

Якщо права частина НЛДР (53) є квазімногочленом (54) з параметрами m, n, α, β, то частинний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\psi(x) = x^r e^{\alpha x}(T_l(x) \cos\beta x + R_l(x) \sin\beta x), \qquad (55)$$

де r – кількість коренів характеристичного рівняння, які збігаються з числом $\alpha + \beta j$ квазімногочлена;

$T_l(x)$, $R_l(x)$ – многочлени l-го степеня з невідомими коефіцієнтами, які підлягають визначенню; $l = max\,\{m; n\}$.

***Зауваження* 1.** Форма (55) має місце і тоді, коли один із многочленів $P_n(x)$ або $Q_m(x)$ дорівнює нулю, тобто частинний розв'язок у формі (55) шукаємо і тоді, коли

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos\beta x \quad \text{або} \quad f(x) = e^{\alpha x} Q_m(x) \sin\beta x.$$

Якщо $\alpha = 0$, а многочлени $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ мають нульовий степінь, тобто

$$f(x) = P_0 \cos\beta x + Q_0 \sin\beta x,$$

де P_0, Q_0, β – відомі дійсні числа, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\psi(x) = x^r (A \cos\beta x + B \sin\beta x), \tag{56}$$

де A і B – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню, а r – кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють числу βj (для рівняння другого порядку $r = 1$). Якщо число βj не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$.

***Зауваження* 2.** Якщо права частина $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ $(\beta = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\psi(x) = x^r e^{\alpha x} T_n(x), \tag{57}$$

де $T_n(x)$ – многочлен n-го степеня з невідомими коефіцієнтами,

r – кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють числу α (для рівняння другого порядку $r = 1$ або $r = 2$). Якщо число α не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$.

Якщо права частина $f(x) = P_n(x)$ $(\alpha = 0,\ \beta = 0,\ m = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\psi(x) = x^r T_n(x), \tag{58}$$

де $T_n(x)$ – многочлен n-го степеня з невідомими коефіцієнтами,

r – кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють нулю (для рівняння другого порядку $r = 1$ або $r = 2$). Якщо число нуль не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$.

Приклади розв'язання наведені далі.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть формули розв'язку ОЛДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадках:

а) дійсних різних коренів характеристичного рівняння;

б) дійсних кратних коренів;

в) комплексно-спряжених коренів.

2. Яка структура загального розв'язку НЛДР другого порядку?

3. В чому полягає метод варіації довільних сталих?

4. Як знайти частинний розв'язок НЛДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами з правою частиною вигляду $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня $n \geq 0$?

5. Як знайти частинний розв'язок НЛДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами з правою частиною вигляду $f(x) = e^{\alpha x}(P_0 \cos\beta x + Q_0 \sin\beta x)$?

8. Системи диференціальних рівнянь першого порядку

Означення. Системою диференціальних рівнянь першого порядку називається сукупність рівнянь, кожне з яких містить незалежну змінну, шукані функції і їх похідні.

Система, розв'язана відносно усіх похідних, що входять до неї, називається *нормальною системою* диференціальних рівнянь першого порядку.

Загальний вигляд нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку такий:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{59}$$

Розв'язком цієї системи називається сукупність n функцій

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),$$

які перетворюють кожне рівняння системи у тотожність.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку з двома невідомими функціями вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y), \end{cases} \tag{60}$$

де x та y – шукані функції незалежної змінної t; f_1 та f_2 – відомі функції від t, x, y (задані і неперервні в деякій області D).

Означення. Розв'язком цієї системи називається сукупність двох функцій: $x = \varphi_1(t)$ і $y = \varphi_2(t)$, визначених і неперервно диференційовних на деякому проміжку X, які перетворюють кожне рівняння системи у тотожність. Крива, яка відповідає цьому розв'язку даної системи, називається інтегральною кривою.

Задача Коші для системи полягає у відшуканні розв'язку $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, який задовольняє початкові умови:

$$x(t_0) = x_0, \; y(t_0) = y_0. \tag{61}$$

***Теорема** існування та єдиності розв'язку системи диференціальних рівнянь першого порядку.* Якщо в системі (60) функції $f_1(t, x, y)$ та $f_2(t, x, y)$ – неперервні і мають неперервні частинні похідні за змінними x та y в деякій області D, що складається з точок (t, x, y), то для будь-якої точки (t_0, x_0, y_0) цієї області існує єдиний розв'язок $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, який задовольняє початкові умови $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь в області D зміни змінних t, x, y називається сукупність двох функцій

$$x = \varphi_1(t, C_1, C_2), \; y = \varphi_2(t, C_1, C_2), \tag{62}$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Для того, щоб отриманий розв'язок задовольняв початкові умови, потрібно із системи знайти відповідні значення C_1 і C_2.

Геометрично розв'язок $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ визначає деяку лінію (інтегральну криву системи) на площині $x\,O\,y$. Якщо аргумент t – час, то зазначена крива є траєкторією точки, що рухається на площині, а система задає напрям поля швидкостей в кожний момент часу t, оскільки вектор $\left\{\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}\right\}$ є вектором швидкості рухомої точки.

Розв'язання задачі Коші рівнозначно відшуканню траєкторії точки, яка рухається під дією цього поля і в початковий момент часу $t = t_0$ перебуває в положенні (x_0, y_0). Площина $x\,O\,y$, на якій розглядається рух, називається фазовою.

Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Нормальна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

Така система має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{63}$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$ – дійсні числа,

$f_i(t)$, $(i=\overline{1,n})$ – відомі неперервні функції на відрізку $[a,\ b]$.

У випадку, коли всі $f_i(t)\equiv 0$, ми отримаємо систему однорідних лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dt}=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt}=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{64}$$

Метод виключення невідомих функцій

Для розв'язання лінійної системи диференціальних рівнянь можна скористатися методом виключення невідомих функцій, який полягає у зведенні системи до одного рівняння n-го порядку відносно однієї шуканої функції. Потім послідовними перетвореннями знаходять решту функцій.

Розглянемо цей метод на прикладі системи рівнянь з двома невідомими функціями.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+f_2(t). \end{cases} \tag{65}$$

Диференціюючи за змінною t одне із рівнянь цієї системи, наприклад, перше, матимемо

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a_{11}\frac{dx}{dt}+a_{12}\frac{dy}{dt}+\frac{df_1(t)}{dt}.$$

Замінюючи похідну $\dfrac{dy}{dt}$ виразом, взятим з другого рівняння системи (65), отримаємо рівняння вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2}=b_1\,x+b_2\,y+g(t),$$

де b_1 і b_2 – сталі коефіцієнти.

Дістанемо таку систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+f_1(t), \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}=b_1\,x+b_2\,y+g(t). \end{cases} \tag{66}$$

З першого рівняння визначаємо $y\ (a_{12} \neq 0)$:

$$y = \frac{1}{a_{12}}\left(\frac{dx}{dt} - a_{11}x - f_1(t)\right). \tag{67}$$

Підставивши цей вираз в останнє рівняння системи (66), дістанемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + q\,x = f(t),$$

де p і q – сталі коефіцієнти.

Розв'язавши це рівняння, знаходимо $x(t)$, а потім – $y(t)$ з рівняння (67).

Матричний метод

Будемо шукати розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами a_{ij} ($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{68}$$

у вигляді:

$$y_1 = \alpha_1 e^{kt},\ y_2 = \alpha_2 e^{kt},\ \ldots,\ y_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{69}$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, k$ підлягають визначенню. Звичайно, нас цікавлять тільки нетривіальні розв'язки.

Підставляючи функції $y_i(t)$ і їх похідні $\dfrac{dy_i}{dt} = \alpha_i k e^{kt}$ $(i = \overline{1,n})$ в систему (68), після скорочення на e^{kt} $(e^{kt} \neq 0)$ і перенесення членів в одну сторону, отримаємо однорідну систему

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{70}$$

Для того щоб однорідна система мала нетривіальні розв'язки, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (71)$$

Отримане рівняння називається характеристичним рівнянням системи (68). З характеристичного рівняння визначаємо ті значення k, при яких отримана однорідна система (70) має нетривіальні розв'язки $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Ліва частина характеристичного рівняння (71) є многочленом n–го степеня за змінною k. З врахуванням кратності цей многочлен має рівно n коренів: k_1, k_2, ... , k_n.

Якщо всі n коренів різні, то загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1\,\alpha_1^{(1)}e^{k_1t} + C_2\,\alpha_1^{(2)}e^{k_2t} + \dots + C_n\,\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}, \\ y_2(t) = C_1\,\alpha_2^{(1)}e^{k_1t} + C_2\,\alpha_2^{(2)}e^{k_2t} + \dots + C_n\,\alpha_2^{(n)}e^{k_nt}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(t) = C_1\,\alpha_n^{(1)}e^{k_1t} + C_2\,\alpha_n^{(2)}e^{k_2t} + \dots + C_n\,\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}, \end{cases} \qquad (72)$$

де C_1, C_2, ... , C_n – довільні сталі.

Зауваження. На практиці, замість того, щоб шукати вектори

$$\overline{\alpha^{(j)}} = (\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)})$$

з лінійної системи, шукають загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} y_1(t) = a_1^{(1)}e^{k_1t} + a_1^{(2)}e^{k_2t} + \dots + a_1^{(n)}e^{k_nt}, \\ y_2(t) = a_2^{(1)}e^{k_1t} + a_2^{(2)}e^{k_2t} + \dots + a_2^{(n)}e^{k_nt}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(t) = a_n^{(1)}e^{k_1t} + a_n^{(2)}e^{k_2t} + \dots + a_n^{(n)}e^{k_nt}, \end{cases} \qquad (73)$$

де k_1, k_2, ... , k_n – корені характеристичного рівняння (різні), а числа $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(n)}$ $(i = \overline{1,n})$ підлягають визначенню. Щоб знайти ці числа, підставляємо функції $y_j(t)$ $(j = \overline{1,n})$ в задану систему (68) і прирівнюємо коефіцієнти при однакових e^{k_jt}. Числа $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(n)}$ визначаються при цьому неоднозначно.

Розглянемо різні випадки коренів характеристичного рівняння, коли $n = 2$, тобто для системи вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{74}$$

Тоді маємо таке характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{75}$$

або

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{75'}$$

Випадок **1**. Нехай корені характеристичного рівняння дійсні і різні, тобто $k_1 \neq k_2$. Виходячи із структури загального розв'язку, будемо шукати розв'язок системи у вигляді:

$$x(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \quad y(t) = a_1e^{k_1t} + a_2e^{k_2t}. \tag{76}$$

Коефіцієнти a_1, a_2 виразимо через C_1, C_2. Підставимо функції $x(t)$ та $y(t)$ в систему (74), отримаємо:

$$\begin{cases} C_1k_1e^{k_1t} + C_2k_2e^{k_2t} = a_{11}C_1e^{k_1t} + a_{11}C_2e^{k_2t} + a_{12}a_1e^{k_1t} + a_{12}a_2e^{k_2t}, \\ a_1k_1e^{k_1t} + a_2k_2e^{k_2t} = a_{21}C_1e^{k_1t} + a_{21}C_2e^{k_2t} + a_{22}a_1e^{k_1t} + a_{22}a_2e^{k_2t}, \end{cases}$$

звідки

$$C_1k_1 - a_{11}C_1 = a_{12}a_1, \quad C_2k_2 - a_{11}C_2 = a_{12}a_2,$$

тобто

$$a_1 = \frac{C_1(k_1 - a_{11})}{a_{12}}, \quad a_2 = \frac{C_2(k_2 - a_{11})}{a_{12}}. \tag{77}$$

Таким чином, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \quad y(t) = \frac{k_1 - a_{11}}{a_{12}}C_1e^{k_1t} + \frac{k_2 - a_{11}}{a_{12}}C_2e^{k_2t}. \tag{78}$$

Випадок **2.** Нехай корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$. Розв'язок системи шукаємо у вигляді:

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{kt}, \quad y(t) = (a_1 + a_2t)e^{kt}. \tag{79}$$

Підставимо функції $x(t)$ та $y(t)$ в систему (74), після скорочення на e^{kt} отримаємо:

$$\begin{cases} C_2 + (C_1 + C_2 t)k = a_{11}C_1 + a_{11}C_2 t + a_{12}a_1 + a_{12}a_2 t, \\ a_2 + (a_1 + a_2 t)k = a_{21}C_1 + a_{21}C_2 t + a_{22}a_1 + a_{22}a_2 t. \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t і вільні члени в першій рівності, дістанемо, що

$$a_1 = \frac{C_2 + (k - a_{11})C_1}{a_{12}}, \quad a_1 = \frac{C_2\,(k - a_{11})}{a_{12}}. \qquad (80)$$

(Друга рівність дає ті ж самі розв'язки.)

Таким чином, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{kt}, \quad y(t) = \left[\frac{C_2 + (k - a_{11})C_1}{a_{12}} + \frac{C_2(k - a_{11})}{a_{12}}\,t\right]e^{kt}. \qquad (81)$$

***Випадок* 3.** Нехай корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, тобто $k_1 = \alpha + \beta j$, $k_2 = \alpha - \beta j$. Розв'язок системи (74) шукаємо у вигляді:

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t), \quad y(t) = e^{\alpha t}(a_1 \cos\beta t + a_2 \sin\beta t). \qquad (82)$$

Знайдемо похідні $\frac{dx}{dt}$ та $\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) + e^{\alpha t}(-C_1\beta\sin\beta t + C_2\beta\cos\beta t),$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha e^{\alpha t}(a_1 \cos\beta t + a_2 \sin\beta t) + e^{\alpha t}(-a_1\beta\sin\beta t + a_2\beta\cos\beta t).$$

Підставимо ці функції і похідні в систему (74), після скорочення на e^{kt} матимемо:

$$\begin{cases} \alpha(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) + (-C_1\beta\sin\beta t + C_2\beta\cos\beta t) = \\ = a_{11}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) + a_{12}(a_1 \cos\beta t + a_2 \sin\beta t), \\ \alpha(a_1 \cos\beta t + a_2 \sin\beta t) + (-a_1\beta\sin\beta t + a_2\beta\cos\beta t) = \\ = a_{21}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) + a_{22}(a_1 \cos\beta t + a_2 \sin\beta t). \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos\beta t$ і $\sin\beta t$ в першій рівності, дістанемо:

$$\alpha C_1 + \beta C_2 = a_{11}C_1 + a_{12}a_1, \quad \alpha C_2 - \beta C_1 = a_{11}C_2 + a_{12}a_2,$$

звідки

$$a_1 = \frac{(\alpha - a_{11})C_1 + \beta C_2}{a_{12}}, \quad a_2 = \frac{(\alpha - a_{11})C_2 - \beta C_1}{a_{12}}. \qquad (83)$$

(Друга рівність дає ті ж самі розв'язки.)

Таким чином, загальний розв'язок системи (74) має вигляд:

$$x(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t),$$
$$y(t)=e^{\alpha t}\left[\frac{(\alpha-a_{11})C_1+\beta C_2}{a_{12}}\cos\beta t+\frac{(\alpha-a_{11})C_2-\beta C_1}{a_{12}}\sin\beta t)\right]. \qquad (84)$$

Матрична форма запису системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь і її розв'язку

Введемо позначення:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \dots\\ y_n(t)\end{pmatrix},\quad \frac{dY}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dy_2}{dt}\\ \dots\\ \frac{dy_n}{dt}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Тоді система (73) в матричній формі запишеться так:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dy_2}{dt}\\ \dots\\ \frac{dy_n}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \dots\\ y_n(t)\end{pmatrix} \qquad (85)$$

або символічно так:

$$\frac{dY}{dt}=A\cdot Y. \qquad (86)$$

***Зауваження* 1**. Якщо $n=2$, то система (74) в матричній формі матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dy_2}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\\ a_{21}\ a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}, \qquad (87)$$

де

$$Y=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix},\quad \frac{dY}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dy_2}{dt}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\\ a_{21}\ a_{22}\end{pmatrix}.$$

Запишемо розв'язок (72) у матричній формі. Введемо матриці

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad Y = \alpha e^{kt}. \tag{88}$$

Підставивши (88) в систему (85), матимемо умову (70) в скороченій формі, записану так:

$$\det(A - kE) = 0, \tag{89}$$

де A – матриця системи (73), E – одинична матриця того самого порядку, що й матриця A.

Нехай розв'язками (89) є числа k_1, k_2, …, k_n, тоді кожному k відповідно до рівняння

$$(A - kE)\alpha = 0 \tag{90}$$

буде відповідати матриця

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(j)} \\ \alpha_2^{(j)} \\ \ldots \\ \alpha_n^{(j)} \end{pmatrix}, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Загальний розв'язок системи (73) в матричній формі можна подати у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}\,\alpha_1^{(2)} \ldots \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)}\,\alpha_2^{(2)} \ldots \alpha_2^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n^{(1)}\,\alpha_n^{(2)} \ldots \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \\ \ldots\ldots \\ C_n e^{k_n t} \end{pmatrix} \tag{91}$$

або

$$Y = \alpha C e^{kt}. \tag{92}$$

Зауваження 2. Загальний розв'язок системи (74) в матричній формі у випадку дійсних і різних коренів характеристичного рівняння матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}\,\alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(1)}\,\alpha_2^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається нормальною системою диференціальних рівнянь першого порядку?

2. В чому полягає метод виключення для знаходження загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку?

3. В чому полягає матричний метод знаходження загального розв'язку нормальної системи двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку простих коренів характеристичного рівняння? Наведіть приклади.

4. Запишіть у матричній формі нормальну систему і її розв'язок у випадку дійсних і різних коренів характеристичного рівняння.

II. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

1. Інтегрування диференціальних рівнянь першого та другого порядків

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

***Завдання* 1.1.** Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

$$y' = \frac{3y-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Це рівняння з *відокремлюваними змінними*, оскільки праву частину його можна подати у вигляді добутку двох функцій

$$g(y) = 3y\text{-}1, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Для розв`язання диференціального рівняння y' запишемо у вигляді відношення диференціалів: $y' = \frac{dy}{dx}$.

Внаслідок цього дістанемо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Шляхом елементарних перетворень відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{3y-1} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Інтегруємо обидві частини цієї рівності:

$$\int \frac{dy}{3y-1} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Обчислимо інтеграли, дістанемо:

$$\frac{1}{3}\ln|3y-1| = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \ln C.$$

За властивостями логарифмічних функцій матимемо:

$$|3y-1|^{\frac{1}{3}} = C\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|.$$

Отриманий вираз є загальним інтегралом даного рівняння. Розв`язавши це рівняння відносно $y$, дістанемо загальний розв`язок.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

***Завдання* 1.2.** Знайти загальний розв`язок (загальний інтеграл) ДР:

$$y' = \frac{y}{x} + 4.$$

Дане рівняння – однорідне, оскільки його права частина є функцією відношення $\frac{y}{x}$. Рівняння зводиться до квадратур заміною $\frac{y}{x} = u$, де $u = u(x)$.

Виконавши цю заміну, матимемо:

$$y = ux, \quad y' = u'x + u,$$

$$u'x + u = u + 4 \quad \text{або} \quad u'x = 4,$$

тобто

$$u' = \frac{4}{x}.$$

Це рівняння – з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{dx} = \frac{4}{x} \Rightarrow du = \frac{4}{x}dx.$$

Інтегруємо:

$$\int du = 4\int\frac{dx}{x} \Rightarrow u = 4\ln|x| + \ln C \Rightarrow u = \ln(Cx^4).$$

Враховуючи, що $u = \frac{y}{x}$, матимемо: $y = (\ln(Cx^4))x$.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

***Завдання* 1.3.** Знайти загальний розв`язок рівняння:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2.$$

Це рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)$ є лінійним, де $p(x) = \dfrac{1}{x}$; $q(x) = x^2$. Для інтегрування рівняння скористаємося методом Бернуллі. Згідно з цим методом невідома функція y шукається у вигляді:

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

де $u(x)$ і $v(x)$ підлягають визначенню.
Тоді:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставимо y та y' у вихідне рівняння, отримаємо:

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x^2$$

або

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = x^2.$$

Накладемо додаткову умову (згідно з методом Бернуллі):

$$v' + \frac{1}{x}v = 0.$$

Враховуючи накладену умову, замість отриманого рівняння дістанемо систему двох ДР 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{1}{x}v = 0, \\ u'v = x^2. \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння, знайдемо функцію v:

$$v' = -\frac{1}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

Зауваження. При відшуканні першої функції константу інтегрування не враховуємо. Підставивши знайдене значення v у друге рівняння системи, дістанемо:

$$u'\cdot\frac{1}{x}=x^2 \quad \text{або} \quad u'=x^3.$$

Відокремивши змінні, матимемо:

$$\frac{du}{dx}=x^3 \Rightarrow du=x^3dx.$$

Інтегруючи, дістанемо:

$$u=\frac{x^4}{4}+C.$$

Зауваження. При знаходженні другої невідомої функції обов'язково потрібно врахувати константу інтегрування. Обчисливши добуток знайдених функцій u і v, дістанемо загальний розв'язок даного рівняння:

$$y=uv=\frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}+C\right)=\frac{C}{x}+\frac{x^3}{4}.$$

Рівняння Бернуллі

***Завдання* 1.4.** Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) ДР

$$y'+2y=xy^2.$$

Це рівняння вигляду: $y'+p(x)\,y=q(x)\,y^{\alpha}$ є рівнянням Бернуллі. В даному випадку $p(x)=2$, $q(x)=x$, $\alpha=2$. Для інтегрування рівняння Бернуллі можна застосувати той же метод Бернуллі, що й для розв'язування лінійних рівнянь 1-го порядку:

$$y=uv,\ y'=u'v+uv',$$

$$u'v+uv'+2uv=xu^2v^2,$$

$$uv'+2uv=0.$$

$$\begin{cases} v'+2v=0 \\ u'v=xu^2v^2 \end{cases}$$

$$v'+2v=0 \Rightarrow v'=-2v \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-2v \Rightarrow \frac{dv}{v}=-2dx,$$

$$\frac{dv}{v}=-2\int dx \Rightarrow \ln|v|=-2x \Rightarrow v=e^{-2x}.$$

$$u'e^{-2x} = xu^2e^{-4x} \Rightarrow u' = xu^2e^{-2x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = xu^2e^{-2x} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = xe^{-2x}dx,$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int xe^{-2x}dx + C_1.$$

Обчислимо окремо інтеграл у правій частині:

$$\int xe^{-2x}dx = \left| u = x, du = dx, dv = e^{-2x}dx, v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \right| = x\frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1).$$

Тоді матимемо:

$$-\frac{1}{u} = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1) + C_1$$

або

$$u = \frac{4}{e^{-2x}(2x+1) + C}, \quad C = -4C_1.$$

Отже,

$$y = uv = e^{-2x}\cdot\frac{4}{e^{-2x}(2x+1) + C}$$

або

$$y = \frac{4}{Ce^{2x} + 2x + 1}$$

Окремі випадки диференціальних рівнянь другого порядку, які допускають зниження порядку

***Завдання* 1.5.** Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' = e^{3x}.$$

Розв'язання. Зробимо заміну: $y' = p$. Тоді $y'' = p'$.
Отримаємо:

$$p' = e^{3x} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = e^{3x} \Rightarrow dp = e^{3x}dx,$$

$$\int dp = \int e^{3x}dx + C_1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1.$$

Враховуючи, що $y' = p$, матимемо:

$$y'=\frac{1}{3}e^{3x}+C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}e^{3x}+C_1 \Rightarrow dy=\left(\frac{1}{3}e^{3x}+C_1\right)dx,$$

$$\int dy=\int\left(\frac{1}{3}e^{3x}+C_1\right)dx+C_2 \Rightarrow y=\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{3x}}{3}+C_1x+C_2.$$

Отже,

$$y=\frac{1}{9}e^{3x}+C_1x+C_2 -$$ загальний розв'язок даного рівняння.

***Завдання* 1.6.** а) Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$x\,y''+y'=0.$$

Це рівняння допускає зниження порядку, оскільки воно явно не містить y.

Замінимо $y'=p$, тоді $y''=p'$. Отримаємо:

$$x\frac{dp}{dx}+p=0 \quad \text{або} \quad \frac{dp}{dx}=-\frac{p}{x},$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Відокремимо змінні, матимемо:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо:

$$\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{x}+\ln C_1 \Rightarrow \ln|p|=-\ln|x|+\ln C_1,\ (C_1>0)$$

або

$$p=\frac{C_1}{x}.$$

Враховуючи, що $p=y'$, отримаємо

$$y'=\frac{C_1}{x}$$

– рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруємо його:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x} \Rightarrow dy=\frac{C_1}{x}dx,$$

$$\int dy=C_1\int\frac{dx}{x}+C_2,\ (C_2>0).$$

Остання рівність $y = C_1 \ln|x| + C_2$ є загальним розв'язком даного рівняння.

б) Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Це рівняння допускає зниження порядку, оскільки не містить x.

Замінимо $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Підставивши y' і y'' в дане рівняння, дістанемо:

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0, \text{ або } p\left(y\frac{dp}{dy} + p\right) = 0.$$

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = const;$$

$$p \neq 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} + p = 0$$

або

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y}$$

- рівняння з відокремлюваними змінними.
Розв'язуємо це рівняння:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y},$$

$$\int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dy}{y} + \ln C_1,$$

$$\ln|p| = -\ln|y| + \ln C_1$$

або

$$p = \frac{C_1}{y}.$$

Враховуючи, що $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, матимемо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}$$

– рівняння з відокремлюваними змінними.
Розв'язуємо його:

$$dy = \frac{C_1}{y}dx \Rightarrow ydy = C_1dx,$$

$$\int ydy = C_1\int dx + C_2,$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1x + C_2 \Rightarrow y^2 = 2C_1x + 2C_2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2C_1x + 2C_2}$$

– загальний розв'язок даного рівняння.

2. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

***Завдання* 2.1.** Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє дані початкові умови.

$$y'' - 3y' = 1 - x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

1) Складемо відповідне ОЛДР:

$$y'' - 3y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k = 0 \text{ або } k(k-3) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, \ k_2 = 3$$

– корені характеристичного рівняння.

Оскільки обидва корені дійсні і різні, то загальний розв'язок ОЛДР матиме вигляд:

$$\Phi(x) = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

2) $f(x) = 1 - x$ – квазімногочлен з параметрами: $n = 1$, $m = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\alpha + \beta j = 0$ – збігається з одним із коренів характеристичного рівняння.

Частинний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді:

$$\psi(x) = x(Ax + B).$$

Для знаходження констант A і B підставимо $\psi(x)$ замість y в дане рівняння, знайшовши попередньо: $\psi'(x) = 2A + B$, $\psi''(x) = 2A$. Дістанемо:

$$2A - 3(2Ax + B) = 1 - x$$

або

$$-6Ax + (2A - 3B) = -x + 1.$$

Звідки:

$$\begin{array}{c|c} x & -6A = -1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{6}, \\ x^0 & 2A - B = 1 \Rightarrow B = -\dfrac{2}{9}. \end{array}$$

Таким чином,

$$\psi(x)=x\left(\frac{1}{6}x-\frac{2}{9}\right).$$

3) За теоремою про структуру загального розв'язку НЛДР дістанемо загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння ($y_{з.н.}$):

$$y_{з.н.}=\Phi(x)+\psi(x)$$

або

$$y_{з.н.}(x)=C_1+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{9}x. \qquad (*)$$

4) Визначимо константи C_1 і C_2, використовуючи початкові умови. Для цього знайдемо

$$y'_{з.н.}(x)=3C_2e^{3x}+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}. \qquad (**)$$

Підставивши у вирази (*) і (**) $x=0$, $y_{з.н.}=1$, $y'_{з.н.}=0$, матимемо:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2,\\ 0=3C_2-\dfrac{2}{9}.\end{cases}$$

Звідки

$$C_1=\frac{25}{27},\quad C_2=\frac{2}{27}.$$

5) Підставимо знайдені значення C_1 і C_2 в (*), дістанемо шуканий розв'язок:

$$y(x)=\frac{25}{27}+\frac{2}{27}e^{3x}+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{9}x.$$

***Завдання* 2.2.** Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє дані початкові умови.

$$y''-2y'+y=e^x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

1) Складемо відповідне ОЛДР:

$$y''-2y'+y=0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2-2k+1=0 \text{ або } (k-1)^2=0.$$

Звідки $k_1 = k_2 = 1$.

Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні. Тоді загальний розв'язок ОЛДР матиме вигляд:

$$\Phi(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^x.$$

2) $f(x) = e^x$ – квазімногочлен з параметрами: $n = 0$, $m = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Число $\alpha + j\beta = 1$ – збігається з двома коренями характеристичного рівняння, отже, y = 2. Тоді розв'язок $\psi(x)$ матиме вигляд:

$$\psi(x) = Ax^2 e^x.$$

Для знаходження константи A підставимо $\psi(x)$ в дане рівняння замість y, попередньо знайшовши $\psi'(x)$ та $\psi''(x)$.

$$\psi'(x) = 2Ax\, e^x + Ax^2 e^x = Ae^x (2x + x^2),$$

$$\psi''(x) = Ae^x (2x + x^2) + Ae^x (2 + 2x) = Ae^x (x^2 + 4x + 2).$$

Дістанемо:

$$Ae^x (x^2 + 4x + 2) - 2\, Ae^x (2x + x^2) + Ax^2 e^x = e^x.$$

Після зведення подібних членів і скорочення на e^x дістанемо:

$$2A = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, частинний розв'язок

$$\psi(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

3) За теоремою про структуру загального розв'язку НЛДР знайдемо

$$y_{з.н.} \doteq \Phi(x) + \psi(x)$$

або

$$y_{з.н.} = (C_1 + C_2 x)\, e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x. \qquad (*)$$

4) Визначимо константи C_1 і C_2, використовуючи початкові умови. Для цього знайдемо

$$y'_{з.н.} = (C_1 + C_2 x)\, e^x + C_2 e^x + x\, e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x. \qquad (**)$$

Підставивши у вирази (*) і (**) $x = 0$, $y_{з.н.} = 1$, $y'_{з.н.} = 1$, матимемо:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \Rightarrow \ C_1 = 1, \\ 1 = C_1 + C_2 \ \Rightarrow \ C_2 = 0. \end{cases}$$

5) Підставимо знайдені значення C_1 і C_2 в (*), дістанемо шуканий розв'язок:

$$y(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2e^x \text{ або } y = e^x(1 + \frac{1}{2}x^2).$$

***Завдання* 2.3.** Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє дані початкові умови.

$$y'' + y' + y = cos2x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$$

1) Складемо відповідне ОЛДР:

$$y'' + y' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + k + 1 = 0,$$

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j \ \Rightarrow \ k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \ k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \ (\alpha = -\frac{1}{2}, \ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Корені характеристичного рівняння – комплексно-спряжені числа, тоді загальний розв'язок ОЛДР має вигляд:

$$\Phi(x) = e^{\frac{-x}{2}}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

2) $f(x) = \cos 2x$ – квазімногочлен з параметрами: $n = 0, \ m = 0, \ \alpha = 0,$ $\beta = 2.$

Число $\alpha + \beta j = 2j$ – не збігається ні з жодним із коренів характеристичного рівняння. Частинний розв'язок має вигляд:

$$\psi(x) = A\cos 2x + B\sin 2x. \qquad (1)$$

Для знаходження A і B підставимо $\psi(x)$ замість y в дане рівняння, знайшовши попередньо $\psi'(x)$ та $\psi''(x)$:

$$\psi'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad \psi''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Дістанемо:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = \cos 2x.$$

Після зведення подібних членів у лівій частині дістанемо:

$$(-3A + 2B)\cos 2x + (-3B - 2A)\sin 2x = \cos 2x$$

Звідки:

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & -3A + 2B = 1, \\ \sin 2x & -3B - 2A = 0. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему, матимемо:

$$A = -\frac{3}{13}, \quad B = \frac{2}{13}.$$

Підставивши знайдені значення A і B в (1), дістанемо:

$$\psi(x) = -\frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x.$$

3) Загальний розв'язок вихідного рівняння $y_{з.н.}$ знайдемо за теоремою про структуру загального розв'язку НЛДР:

$$y_{з.н.} = \Phi(x) + \psi(x)$$

тобто

$$y_{з.н.} = e^{\frac{-x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{13}(-3\cos 2x + 2\sin 2x) \qquad (*)$$

4) Для визначення C_1 і C_2 скористаємося початковими умовами. Для цього знайдемо

$$y'_{з.н.} = -\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{\frac{-x}{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{13}(6\sin 2x + 4\cos 2x) \qquad (**)$$

Підставимо у вирази (*) і (**) $x = 0$, $y_{з.н.} = 1$, $y'_{з.н.} = 1$, дістанемо:

$$\begin{cases} 0 = C_1 - \dfrac{3}{13}, \\ 1 = -\dfrac{1}{2}C_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \dfrac{4}{13}. \end{cases}$$

Звідки:

$$C_1 = \frac{3}{13}, \qquad C_2 = \frac{7\sqrt{3}}{13}.$$

5) Підставимо знайдені значення C_1 і C_2 в (*), дістанемо шуканий розв'язок:

$$y(x) = \frac{1}{13}e^{\frac{-x}{2}}(3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + 7\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{13}(-3\cos 2x + 2\sin 2x).$$

***Завдання* 2.4**. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє дані початкові умови.

$$y'' + 4y = sin2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

1) Складемо відповідне ОЛДР:

$$y'' + 4y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 4 = 0.$$

Звідки

$$k_{1,2} = \pm 2j \quad (\alpha = 0, \beta = 2).$$

Корені характеристичного рівняння – комплексно-спряжені числа, тому загальний розв'язок ОЛДР має вигляд:

$$\Phi(x) = C_1 cos2x + C_2 sin2x.$$

2) $f(x) = sin2x$ – квазімногочлен з параметрами: $n = 0$, $m = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Число $\alpha + \beta j = 2j$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому $r = 1$. Отже, частинний розв'язок НЛДР має вигляд:

$$\psi(x) = x\,(A\, cos2x + B\, sin2x).$$

Для знаходження A і B підставимо $\psi(x)$ замість y в дане рівняння, попередньо знайшовши $\psi'(x)$ і $\psi''(x)$.

$$\psi'(x) = Acos2x + Bsin2x + x\,(-2Asin2x + 2Bcos2x),$$

$$\psi''(x) = -2Asin2x + 2Bcos2x - 2Asin2x + 2Bcos2x + x\,(-4Acos2x - 4Bsin2x).$$

Дістанемо:.

$$-4Asin2x + 4Bcos2x - 4x\,(Acos2x + Bsin2x) + 4x\,(Acos2x + Bsin2x) = sin2x \Rightarrow$$

$$-4Asin2x + 4Bcos2x = sin2x.$$

Звідки:

$$\begin{array}{l|l} Cos2x & 4B = 0 \;\Rightarrow\; B = 0, \\ Sin2x & -4A = 1 \;\Rightarrow\; A = -\dfrac{1}{4}. \end{array}$$

Підставивши знайдені значення A і B у вираз для $\psi(x)$, дістанемо:

$$\psi(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

3) За теоремою про структуру загального розв'язку НЛДР дістанемо:

$$y_{з.н.} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x, \qquad (*)$$

де $y_{з.н.}$ – загальний розв'язок НЛДР.

4) Знайдемо константи C_1 і C_2, використовуючи початкові умови. Для цього знайдемо $y'_{з.н.}$:

$$y'_{з.н.} = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x \qquad (**)$$

Підставимо у вирази (*) і (**) $x = 0$, $y_{з.н.} = 0$, $y'_{з.н.} = 0$. Матимемо:

$$0 = C_1, \quad 0 = 2C_2 - \frac{1}{4}.$$

Звідки

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{8}.$$

5) Підставимо знайдені значення C_1 і C_2 в (*), дістанемо шуканий розв'язок $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

3. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

***Завдання* 3.1**. Знайти загальний розв'язок однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$$

Метод виключення

Диференціюємо перше рівняння системи за змінною t. Дістанемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}.$$

Підставимо замість $\frac{dy}{dt}$ його вираз із другого рівняння системи, матимемо:

$$\frac{d^2x}{du^2} = 2\frac{dx}{dt} + x - 3y. \qquad (*)$$

Виразимо y через x і $\frac{dx}{dt}$, використовуючи перше рівняння системи. Отримаємо:

$$y = 2x - \frac{dx}{dt}. \qquad (**)$$

Підставивши (**) в (*), дістанемо:

$$\frac{d^2x}{du^2} = 2\frac{dx}{dt} + x - 3\left(2x - \frac{dx}{dt}\right).$$

Таким чином, ми виключили одну невідому функцію й дістали рівняння, яке містить тільки $x(t)$. Після зведення подібних членів це рівняння матиме вигляд:

$$\frac{d^2x}{du^2} - 5\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$k^2 - 5k + 5 = 0$, звідки $k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Корені характеристичного рівняння дійсні і різні. Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$x(t) = C_1 e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot t} + C_2 e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot t}.$$

Функцію $y(t)$ дістанемо із (**). Знайдемо $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{C_1}{2}(5+\sqrt{5})e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot t} + \frac{C_2}{2}(5-\sqrt{5})e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot t}.$$

Підставивши значення похідної в (**), матимемо:

$$y(t) = 2C_1 e^{\frac{5+\sqrt{3}}{2} \cdot t} + 2C_2 e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot t} - \frac{C_1}{2}(5+\sqrt{5})e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot t} - \frac{C_2}{2}(5-\sqrt{5})e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot t},$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} t} + C_2 e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2} t}, \\ y(t) = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} t} + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} C_2 e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2} t}. \end{cases}$$

Матричний метод

Запишемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь у матричній формі. Введемо позначення:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тоді матимемо таку матричну форму запису системи:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ або } \frac{dX}{dt} = A \cdot X.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$Det\,(A - kE) = 0,$$

де A – матриця системи,

E – одинична матриця того самого порядку, що й матриця A.

Дістанемо

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

Розкривши детермінант, матимемо:

$$(2 - k)(3 - k) - 1 = 0 \;\Rightarrow\; k^2 - 5k + 5 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні і різні. Тоді:

$$x(t) = C_1 e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} t} + C_2 e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2} t}.$$

Функцію $y(t)$ дістанемо із першого рівняння системи:

$$y(t)=2C_1e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t}+2C_2e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2}t}-\frac{C_1}{2}(5+\sqrt{5})e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t}-\frac{C_2}{2}(5-\sqrt{5})e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2}t}.$$

Запишемо загальний розв'язок системи у матричній формі:

$$X=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t}\\ C_2e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2}t}\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Можна було б після розв'язання характеристичного рівняння записати:

$$y(t)=C_1e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t}+C_2e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t},$$

а функцію $x(t)$ знайти з другого рівняння системи. У цьому випадку відповідь відрізнятиметься від попередньої тільки позначенням константи.

Завдання 3.2. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x+y+26t,\\ \dfrac{dy}{dt}=-5x+3y+(20t-2)\cdot e^{2t}+4.\end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння системи за змінною t. Дістанемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=7\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+26.$$

Підставимо замість $\dfrac{dy}{dt}$ його вираз із другого рівняння системи, матимемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=7\frac{dx}{dt}-5x+3y+(20t-2)e^{2t}+4+2t.$$

Виразимо y через x і $\dfrac{dx}{dt}$, використовуючи перше рівняння системи. Отримаємо:

$$y=\frac{dx}{dt}-7x-26t.$$

Підставимо це значення y в попереднє рівняння, матимемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=7\frac{dx}{dt}-5x+3\left(\frac{dx}{dt}-7x-26t\right)+(20t-2)e^{2t}+30.$$

Після зведення подібних членів це рівняння матиме вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-10\frac{dx}{dt}+26x=(20t-2)\,e^{2t}-78t+30.$$

Ми отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з спеціальною правою частиною, яка є сумою двох функцій:

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t),$$

де $f_1(t)=(20t-2)e^{2t}$, $f_2(t)=-78t+30.$

Загальний розв'язок отриманого рівняння шукаємо у вигляді суми двох функцій, тобто

$$x(t)=\Phi(t)+\psi(t),$$

де $\Phi(t)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння,

$\psi(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Складемо відповідне ОЛДР

$$\frac{d^2x}{dt^2}-10\frac{dx}{dt}+26x=0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2-10k+26=0,$$

Звідки

$$k_1=5+j,\ k_2=5-j\ \ (\alpha=5,\ \beta=1).$$

Корені характеристичного рівняння – комплексно–спряжені, тому загальний розв'язок ОЛДР матиме вигляд:

$$\Phi(t)=e^{5t}(C_1\cos t+C_2\sin t).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t),$$

де $\psi_1(t)$ – частинний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{du^2}-10\frac{dx}{dt}+26x=(20t-2)\,e^{2t},$$

а $\psi_2(t)$ – частинний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{du^2}-10\frac{dx}{dt}+26x=-78t+30.$$

Розглянемо перше рівняння, права частина якого $f_1(t) = (20t-2)e^{2t}$ – квазімногочлен з параметрами: $n=1$, $m=0$, $\alpha=5$, $\beta=1$. Число $\alpha+\beta j=2$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\psi_1(t) = (At+B)e^{2t}.$$

Для знаходження коефіцієнтів A і B підставимо $\psi_1(t)$ замість x у перше рівняння, попередньо знайшовши $\frac{d\psi_1(t)}{dt}$ і $\frac{d^2\psi_1(t)}{dt^2}$.

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = Ae^{2t} + 2(At+B)e^{2t},$$

$$\frac{d^2\psi_1(t)}{dt^2} = 4Ae^{2t} + 4(At+B)e^{2t}.$$

Дістанемо:

$$4Ae^{2t} + 4(At+B)e^{2t} - 10Ae^{2t} - 20(At+B)e^{2t} +$$
$$+ 26(At+B)e^{2t} \equiv (20t+2)e^{2t}.$$

Після зведення подібних членів і скорочення на e^{2t} матимемо:

$$10At + (10B-6A) \equiv 20t-2.$$

Звідки

$$\begin{array}{c|l} t & 10A = 20 \Rightarrow A = 2, \\ t^0 & 10B-6A=-2 \Rightarrow 10B-6A=-2 \Rightarrow \mathrm{B}=1. \end{array}$$

Отже,

$$\psi_1(t) = (2t+1)e^{2t}.$$

Розглянемо друге рівняння, права частина якого $f_2(t) = -78t+30$ – многочлен першого степеня, причому число 0 не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок $\psi_2(t)$ шукаємо у вигляді многочлена першого степеня з невідомими коефіцієнтами:

$$\psi_2(t) = A_1t + B_1.$$

Для знаходження коефіцієнтів A_1 і B_1 підставимо $\psi_2(t)$ замість x у друге рівняння, попередньо знайшовши $\frac{d\psi_2(t)}{dt} = A_1$ і $\frac{d^2\psi_2(t)}{dt^2} = 0$.

Дістанемо:

$$-10A_1 + 26(A_1t+B_1) \equiv -78t+30 \Rightarrow 26A_1t + (-10A_1+26B_1) \equiv -78t+30.$$

Звідки

$$\begin{array}{c|l} t & 26A_1 = -78 \;\Rightarrow A_1 = -3, \\ t^0 & -10A_1 + 26B_1 = 30 \;\Rightarrow 30 + 26B_1 = 30 \;\Rightarrow B_1 = 0. \end{array}$$

Отже,

$$\psi_2(t) = -3t.$$

Тоді

$$x(t) = e^{5t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + (2t+1)e^{2t} - 3t.$$

Функцію $y(t)$ дістанемо із

$$y = \frac{dx}{dt} - 7x - 26t,$$

попередньо знайшовши

$$\frac{dx}{dt} = 5\,e^{5t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{5t}(-C_1\sin t + C_2\cos t) +$$

$$+ 2e^{2t} + 2(2t+1)\,e^{2t} - 3.$$

Тоді

$$y(t) = 5\,e^{5t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{5t}(-C_1\sin t + C_2\cos t) + 2e^{2t} +$$
$$+ 2(2t+1)\,e^{2t} - 3 - 7e^{5t}(C_1\cos t + C_2\sin t) - 7(2t+1)\,e^{2t} + 21t - 26t.$$

Після зведення подібних членів дістанемо:

$$y(t) = e^{5t}\left[(-2C_1 + C_2)\cos t + (-C_1 - 2C_2)\sin t\right] + (-10e - 3)e^{2t} - 47e - 3.$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = e^{5t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + (2t+1)\,e^{2t} - 3t, \\ y(t) = e^{5t}\left[(-2C_1 + C_2)\cos t + (-C_1 + 2C_2)\sin t\right] + + (2t+1)e^{2t} - 4t - 3. \end{cases}$$

4. Розв'язання геометричних і фізичних задач

***Завдання* 4.1**. Знайти рівняння кривої, в якій відрізок, що його відтинає дотична на осі ординат, пропорційний квадрату абсциси точки дотику.

Розв'язання. Для складання диференціального рівняння , яке описує шукану криву, використаємо рівняння дотичної до кривої. Нехай (x, y) – координати довільної точки дотику (рис.1), $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої, (X,Y) – координати довільної точки дотичної, проведеної до кривої в точці дотику. Як відомо, рівняння дотичної має вигляд:

$$Y - y = y'(x,y)(X - x).$$

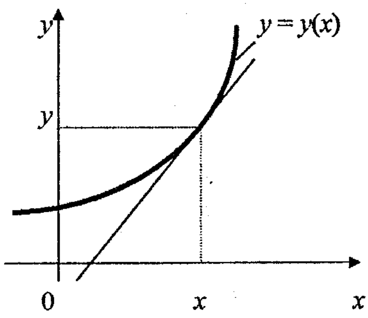

Рис. 1

Для визначення довжини відрізка, що його відтинає дотична на осі ординат, знайдемо координати точки перетину. Оскільки точка А лежить на дотичній, маємо:

$$У_A - y = y'(x,y)(X_A - x).$$

З другого боку, $X_A = 0$, оскільки точка A лежить на осі Oy.

$$У_A - y = y'(x,y)(-x), \text{ звідки } У_A = y - x y'.$$

Довжина відрізка $OA = |У_A|$. Але за умовою задачі $|OA| = kx^2$. Таким чином, матимемо:

$$|y - x y'| = kx^2, \quad (k>0).$$

Загальний розв'язок цього рівняння з геометричної точки зору – однопараметрична сім'я кривих, кожна з яких має властивість, зазначену в умові задачі.

Оскільки y^2 завжди додатне, необхідно розглянути два випадки:

1) $y - x y' > 0$,

2) $y - x y' < 0$.

Для випадку 1) рівняння матиме вигляд:

$$kx^2 = y - x y' \text{ або } y' - \frac{1}{x} y = -kx.$$

Це – лінійне рівняння першого порядку. Для його розв'язання скористаємося методом Бернуллі:

$$y = uv, \; y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = -kx$$

$$v' - v\frac{1}{x} = 0,$$
$$u'v = -kx.$$
$$v' = v\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$
$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow |v| = |x|.$$

а) $v = x$

$$u'x = -kx \Rightarrow u' = -k, \quad u = -kx + C,$$
$$\frac{y}{x} = (-kx + C) \Rightarrow y = (-kx + C)x,$$
$$y = Cx - kx^2.$$

б) $v = -x.$

$$-u'x = -kx \Rightarrow u' = k, \quad u = kx + C.$$

Отже,

$$y = -Cx - kx^2.$$

Враховуючи, що C – довільна константа, обидві відповіді можна об'єднати в одну:

$$y = Cx - kx^2.$$

Для випадку 2) $y - xy' < 0$ рівняння матиме вигляд:

$$xy' - y = kx^2 \text{ або } y' - \frac{1}{x}y = kx$$

– лінійне рівняння. Розв'яжемо його:

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv',$$
$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = kx,$$
$$v' - \frac{1}{x}v = 0,$$
$$u'v = kx.$$

$$v' - \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow |v| = |x|.$$

а) $v = x, \; u'x = kx \Rightarrow u' = k,$

$$u = kx + C,$$
$$y = (kx + C)\,x = kx^2 + Cx.$$

$$\text{б) } v = -x, \ -u'x = -kx \Rightarrow u' = k,$$
$$u = -kx + C,$$
$$y = (-kx + C)(-x) = kx^2 - Cx.$$

Враховуючи, що C – довільна стала, обидві відповіді об'єднаємо в одну:

$$y = kx^2 + Cx.$$

Об'єднуючи відповіді для випадків 1) і 2), матимемо:

$$y = \pm\, kx^2 + Cx.$$

***Завдання* 4.2.** Знайти залежність температури T від часу t, якщо тіло, нагріте до$T°$, внесене в приміщення, температура якого стала і дорівнює $a°$.

Розв'язання. Для складання диференціального рівняння, яке характеризує закон зміни температури від часу, скористаємося законом Ньютона, за яким швидкість зміни температури пропорціональна різниці температур. Дістанемо:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - a), \quad (k > 0),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Це – диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його, дістанемо:

$$\frac{dT}{T - a} = -kdt,$$
$$\int \frac{dT}{T - a} = -k\int dt + \ln C,$$
$$\ln|T - a| = -kt + \ln C.$$

Враховуючи те, що температура тіла вища від температури приміщення, дістанемо:

$$T - a = e^{-kt + \ln C} \quad \text{або} \quad T = a + Ce^{-kt}.$$

Для визначення константи C скористаємося умовою задачі, згідно з якою в момент часу $t = 0$ температура $T = T_0$:

$$T_0 = a + C \Rightarrow C = T_0 - a..$$

Підставимо знайдене значення C у вираз для T, дістанемо:

$$T = a + (T_0 - a)e^{-kT}.$$

Це і є шукана залежність температури T від часу t.

5. Наближене розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

Завдання 5. Використовуючи метод Ейлера, знайти наближений розв'язок ДР $y' = x^2 + y^2$, якщо $y(0) = 1$ на відрізку [0;1], розбивши його на 10 рівних частин.

Детальне викладення методу Ейлера приведено в [1]. Для обчислення значень функції $y(x)$ в точках розбиття використовується рекурентна формула

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h,$$

де h – крок розбиття (тут $h = 0{,}1$). Значення шуканої функції в k-тій точці розбиття

$$y_k = y(x_k),$$

$$y_k' = y'(x_k),$$

а $x_k = x_0 + kh$, де x_0–початкова точка відрізка інтегрування. У нашому випадку $x_0 = 0$, $y(x_0) = 1$; $y'(x_0)$ можна визначити, використовуючи рівняння, тобто:

$$y'(x_0) = x_0^2 + y^2(x_0).$$

Для розрахунків доцільно скласти таблицю:

x_k	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_k	1,0	1,1	1,222	1,375	1,575	1,875	2,2	2,719	3,508	4,802	7,19

Обчислення значень y_k можна виконати за допомогою комп'ютера з використанням пакета прикладних програм Math Cad.

ІІІ. ВАРІАНТИ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок

1. 1) $\mathrm{tg}x\sin^2 y dx = -\cos^2 x\,\mathrm{ctg}y dy$, 2) $y' = -\dfrac{x+y}{x}$,

3) $xy' + y - e^x = 0$, 4) $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$,

5) $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$, 6) $x^2 y'' + xy' = 1$.

2. 1) $xy' = e^y + 2y'$, 2) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$,

3) $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x$, 4) $y' + xy = y^2 e^{\frac{x^2}{2}}$,

5) $y'' = e^{-x}$, 6) $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

3. 1) $xydx + (x+1)dy = 0$, 2) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$,

3) $(xy' - 1)\ln x = 2y$, 4) $y' - \dfrac{y}{x} = y^2$,

5) $y'' = \sin 3x$, 6) $x^2 y'' = (y')^2$.

4. 1) $e^{-y}(1 + y') = 1$, 2) $2x^3 y' = y(2x^2 - xy)$,

3) $y' + y\mathrm{tg}x = \sec x$, 4) $2xy + y' = 2x^3 y^3$,

5) $y'' = x + \sin x$, 6) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

5. 1) $xy' + y = y^2$, 2) $(x^2 + y^2)y' = xy$,

3) $y' - \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$, 4) $y' - \dfrac{y}{x} = y^3$,

5) $y'' = \mathrm{arctg}x$, 6) $yy'' - (y')^2 = 3y'$.

6. 1) $y' - xy^2 = 2xy$, 2) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$,

3) $xy' - 2y = 2x^4$, 4) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$,

5) $y'' = \ln x$, 6) $y'' - 2\mathrm{ctg}x \cdot y' = 0$.

7. 1) $y'\mathrm{ctg}x + y = 2$, 2) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$,

3) $(xy' - 1)\ln x = 2y,$ 4) $y' + \dfrac{y}{1+x} = 3y^2,$

5) $y'' = \sin^3 x,$ 6) $2yy'' - 3(y')^2 = 0.$

8. 1) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy,$ 2) $y' = -\dfrac{x+y}{y},$

3) $xy' + y = 3x^2 e^{-x},$ 4) $xy' + y = y^2 \ln x,$

5) $y'' = \cos 5x,$ 6) $y(1-\ln y)y'' = -(1+\ln y)(y')^2.$

9. 1) $2xy' + y^2 = 1,$ 2) $y' = \dfrac{y}{x} - 4,$

3) $y = x(y' - x\cos x),$ 4) $xy' - y = \sqrt{y} \cdot \ln x,$

5) $y'' = \ln x + \dfrac{1}{x},$ 6) $y^3 y'' = 1.$

10. 1) $(1-x^2)dy + xydx = 0,$ 2) $(x-y)ydx - x^2 dy = 0,$

3) $2x(x^2 + y) = y',$ 4) $y' - y\mathrm{tg}x + y^2 \cos x = 0,$

5) $y'' = x + 3^x,$ 6) $y'' = 2yy'.$

11. 1) $x^2 y' - 2xy = 3y,$ 2) $x \ln\dfrac{x}{y} dy - ydx = 0,$

3) $y' + xy = x^3 e^{\frac{x^2}{2}},$ 4) $y' - y - y^2 \cos x = 0,$

5) $y'' = x^2 \ln x,$ 6) $(1+x)y'' - x(y')^2 = y'.$

12. 1) $xy' - y = y^3,$ 2) $xy' = y \ln\dfrac{y}{x},$

3) $y' = y\mathrm{tg}x - 4\cos x,$ 4) $xy' - 4y - x^2 y^2 = 0,$

5) $y'' = \dfrac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x},$ 6) $yy'' = (y')^2 - (y')^3.$

13. 1) $xyy' = 1 - x^2,$ 2) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$

3) $xy' + y = \ln x,$ 4) $y' - y - y^2 \cdot e^{2x} = 0,$

5) $y'' = (1+x)^{\frac{3}{2}},$ 6) $y' = xy''.$

14. 1) $y - xy' = 1 - x^2 y',$ 2) $(x^2 + y^2)y' = 2xy,$

3) $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0,$ 4) $y - y'\cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x),$

5) $y'' = x3^x$,

6) $\frac{y''}{y'} + 3y = y'$,

15. 1) $3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{1-e^x}{\cos^2 y} dy = 0$,

2) $(x = 2y)dx - xdy = 0$,

3) $y' - \frac{y}{x} = x^3$,

4) $y' + 2y = y^2 e^{2x}$,

5) $y'' = \frac{1}{x^3}$,

6) $y' = x(y'')^2 + (y'')^2$.

16. 1) $y' \operatorname{tg} x = y$,

2) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$,

3) $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$,

4) $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = y^3$,

5) $y'' = x \cdot 2^x$,

6) $\cos y \cdot y'' + (y')^2 \sin y = 0$.

17. 1) $y' \sin x = y \ln y$,

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$,

3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,

4) $y' - \frac{x}{x^2+1} y = y^3$,

5) $y'' = \cos 5x$,

6) $y''(x^2+1) = 2xy'$.

18. 1) $y' = xe^y$,

2) $(2x - 4y)dx + (x + y)dy = 0$,

3) $y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2$,

4) $y' - \frac{e^x}{1+e^x} y = y^2$,

5) $y'' = x \sin x$,

6) $y'' = e^{2y}$.

19. 1) $xy' + y = xy \ln x$,

2) $x \ln \frac{x}{y} dy - ydx = 0$,

3) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$,

4) $y' + y\frac{x}{1+x^2} y = y^3$,

5) $y'' = \sqrt{x}$,

6) $y^2 - y'' = 1$.

20. 1) $x^2(y+1) + (x^3 - 1)(y-1)y' = 0$,

2) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$,

3) $xy' + 2y = e^{3x}$,

4) $y' + y\frac{x}{x+1} = y^2$,

5) $y'' = \frac{1}{x}$,

6) $y'' = \frac{y'(x+1)}{x}$.

21. 1) $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$, 2) $xy'-y=x\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$,

3) $y'=y\,\mathrm{ctg}3x+3\cos 3x$, 4) $y'=y\mathrm{ctg}x+\dfrac{y^3}{\sin x}$,

5) $y''=x\sin x$, 6) $(1+x^2)y''=2x(y')^2$.

22. 1) $y'=e^{x+y}$, 2) $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$,

3) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$, 4) $3y'=(1-3y^3)y\sin x$,

5) $y''=x\sin x$, 6) $y''\cos y+(y')^2\sin y=y'$.

23. 1) $y'=-\dfrac{x\sin x}{y\cos y}$, 2) $xyy'=x\sqrt{x^2+y^2}+y^2$,

3) $y'-y\dfrac{2x-1}{x^2-x}=1$, 4) $y'+xy=x^3y,^2$

5) $y''=\sin^2 x$, 6) $y''=15y'\sqrt{x}$.

24. 1) $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$, 2) $(x+3y)dy+xdx=0$,

3) $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$, 4) $xy'=-y+x^3y^2$,

5) $y''=\mathrm{tg}x\cdot\sec^2 x$, 6) $y''=3yy'$.

25. 1) $xydx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$, 2) $y'-\dfrac{y}{x}=\cos\dfrac{y}{x}$,

3) $xy'-\dfrac{y}{x+1}-x=0$, 4) $y'=y^4\cos x+y\mathrm{tg}x$,

5) $y''=xe^x$, 6) $y''y=2(y')^2$.

26. 1) $ye^{2x}dx-(1-e^{2x})dy=0$, 2) $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$,

3) $y'-\dfrac{y}{1-x^2}-1-x=0$, 4) $2xy'-y=xy^3$,

5) $y''=x+\sin x$, 6) $y\dfrac{y''}{y'}=y^2+y'$.

27. 1) $2^x\mathrm{tg}ydx+(1+2^x)\sec^2 ydy=0$, 2) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$,

3) $xy'+y-e^x=0$, 4) $y'+2y=y^2e^x$,

5) $y''=(1+e^{2x})e^x$, 6) $yy''=(y')^2$.

28. 1) $3x\sqrt{1-y^2}=y'(1+x^2)$, 2) $(y^2+2xy)dy-x^2dy=0$,

3) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^2\cos 3x$, 4) $y'-2xy=y^2e^{-x^2}$,

5) $y''=e^{3x-1}$, 6) $y''(1+y)^2=y'$.

29. 1) $e^x\sin^3 y+(1+e^{2x})\cos y y'=0$, 2) $5x^3y'=y^2(2x-y)$,

3) $y'+3y\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$, 4) $(xy'-y^2)\ln x=2y$,

5) $y''=\sqrt{(1-5x)^5}$, 6) $(x+1)y''=(y')^2$.

30. 1) $y\sin^2 x dx+\cos x\cdot\ln y dy=0$, 2) $xy'+xe^{-\frac{y}{x}}=y$,

3) $xy'-2y=x^3+1$, 4) $y'-\dfrac{x}{x^2+1}y=y^2$,

5) $y''=\cos(5-2x)$, 6) $y''+y'y=\dfrac{1}{y}(y')^2$.

31. 1) $y'=\sin(x-y)$, 2) $y+(2\sqrt[3]{x^2y}-x)y'=0$,

3) $y'=\dfrac{3x^2}{1+x^3}y+(1+x^3)$, 4) $y'+x(3y-y^2)=0$,

5) $y'''=\dfrac{1}{x}$, 6) $y^3y'''=1$.

32. 1) $(a^2+y^2)dx+2x\sqrt{ax-x^2}dy=0$, 2) $(y-x)xdy=y^2dx$,

3) $y'-3y\mathrm{ctg}3x=\dfrac{1}{\sin 3x}$, 4) $y'-\dfrac{y}{x-1}=y^2(x-1)$,

5) $y''=\cos(1-3x)$, 6) $yy''+(y')^2=1$.

33. 1) $x^2y'\cos y+1=0$, 2) $\left(y'-\dfrac{y}{x}\right)\cos\dfrac{y}{x}=1$,

3) $y'+y\mathrm{ctg}2x=\cos 2x$, 4) $y'+\dfrac{y}{x+3}=4y^2(x+3)^2$,

5) $y''=e^{7x}$, 6) $y''=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

34. 1) $x^2y'+\cos 3y=1$, 2) $y'+3xy^2=4xy$,

3) $y' + \frac{y}{x+1} = e^x$, 4) $y' = \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2 \cos x}$,

5) $y'' = x^2 + e^{5x}$, 6) $yy'' = (y')^2$.

35. 1) $x^3 y' - \sin y = 1$, 2) $xy' = y + x\mathrm{tg}\frac{y}{x}$,

3) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$, 4) $xy' + y + 5y^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0$,

5) $y'' = e^{3x} - 2x$, 6) $xy'' = (y')^3$.

36. 1) $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$, 2) $2x^2 y' = x^2 + y^2$,

3) $y' - y\mathrm{ctg}x = \sin x$, 4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2\ln x + 1}{x^2} y^2$,

5) $y'' = \sqrt{4-2x}$, 6) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

37. 1) $e^y = y'(x+1)$, 2) $xy' = y(\ln y - \ln x)$,

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 1$, 4) $((x-1)y' - y^2)\ln(x-1) = y$,

5) $y' = \frac{1}{x+3}$, 6) $y'' = y' + 3x$.

38. 1) $y' = 2x(\pi + y)$, 2) $y' - yx^2 = 2xy$,

3) $y' + 4y\mathrm{ctg}4x = \frac{1}{\sin 4x}$, 4) $y' + \frac{y}{x+1} = 3y^2(x+1)$,

5) $y'' = e^{4x} + x^2$, 6) $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

39. 1) $x^2 y' + \sin 2y = 1$, 2) $y' + (3\sqrt[3]{x^2 y} + 2x)/y = 0$,

3) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{tg}x}{x}$, 4) $y' - \frac{3y}{x^2} = y^2 e^{\frac{3}{x}}$,

5) $y'' = \sin 7x$, 6) $1 + (y')^2 = 2yy''$.

40. 1) $y'\sin^2 y = 2 + x$, 2) $y' - \frac{y}{x} = \sec^2\frac{y}{x}$,

3) $2xy + y' = 2x^3$, 4) $y' - \frac{y}{x} = \cos 2x \cdot y^2$,

5) $y'' = \sqrt[3]{1-x}$, 6) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

41. 1) $y'\mathrm{tg}3x + y = 2$, 2) $y' + xy^3 = 5xy$,
3) $x^2y' + xy = \ln x$, 4) $y' - \dfrac{y}{x} = (3\ln x + x^2)y^2$,
5) $y'' = x\ln 2x$, 6) $2y'' = 3yy'$.

42. 1) $(x+3)y' + y = y\ln(x+3)$, 2) $xy' = y + x\mathrm{ctg}\dfrac{y}{x}$,
3) $xy' - 4y = x^2$, 4) $y' + xy = xe^{-\frac{x^2}{2}}$,
5) $y'' = \dfrac{\mathrm{ctg}x}{\sin^2 x}$, 6) $y'' = \dfrac{1}{3x}(y')^2$.

43. 1) $2yy' + x^2 = 1$, 2) $y\ln\dfrac{y}{x}dx = xdy$,
3) $y' + 3\mathrm{tg}3x \cdot y = \dfrac{1}{\cos 3x}$, 4) $x^2y' + xy = x^2y^2\ln x$,
5) $y'' = \sqrt{x+4}$, 6) $yy' + (y')^2 + yy'' = 0$.

44. 1) $x^3y' - 2x^2y = 5y$, 2) $y + (\sqrt[4]{x^3y} - 2x)y' = 0$,
3) $xy' - 2y + x^5e^x = 0$, 4) $y' - y + y^2\sin 3x = 0$,
5) $y'' = 3^{5x}$, 6) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$.

45. 1) $y'\mathrm{tg}(x+2) = y^2 + 1$, 2) $(y+2x)dy - ydx = 0$,
3) $y + \dfrac{y}{x} = 3xe^x$, 4) $y' = 3y + e^xy^2$,
5) $y''' = e^{x-4}$, 6) $3y'' = (y')^4 - yy'$.

46. 1) $5xyy' = 1 - y^2$, 2) $4y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 4$,
3) $y' + \dfrac{y}{x} = e^x$, 4) $xy' - y + 3y^2e^x = 0$,
5) $y'' = \sqrt[3]{3-x}$, 6) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$.

47. 1) $y'\mathrm{tg}5x + y^2 = 4$, 2) $x\cos^2\frac{y}{x}y' = y\cos^2\frac{y}{x} + x$,

3) $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$, 4) $y' + y\cos x = y^2\sin 2x$,

5) $y'' = \sqrt[3]{(1-x)^2}$, 6) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$.

48. 1) $2y^2y' + x^4 = x$, 2) $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y+2x}{x}}$,

3) $y' + 2y\mathrm{tg}(x-1) = \frac{1}{\cos(x-1)}$, 4) $xy' - y + e^{-x}y^2 = 0$,

5) $y'' = \frac{1}{x+2}$, 6) $2xy'' + ((y')^2 - 64)y' = 0$.

49. 1) $yx^2y' = (y^2+1)e^{\frac{1}{x}}$, 2) $ydx + (\sqrt[4]{x^3y} + x)dy = 0$,

3) $y' - \frac{y}{x} = 3\ln x + x^2$, 4) $xy' - 2y = x^3e^{3x}$,

5) $y'' = \sin(5x-1)$, 6) $yy'' - yy'\ln y = (y')^2$.

50. 1) $x^2yy' = \sqrt{y^2-1}\,e^{\frac{1}{x}}$, 2) $ydx = (x+y)dy$,

3) $2xy - y' = x^2\sin x$, 4) $y' + \frac{2x-2}{x^2-1}y = y^2$,

5) $y'' = \frac{1}{x-1}$, 6) $y^3y'' = -1$.

51. 1) $(y+3)e^{-2x}dx - (1-e^{-2x})dy = 0$, 2) $y' = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\ln\frac{5y}{x}$,

3) $y' + \frac{y}{1-x^2} + 2 + x = 0$, 4) $y' + \frac{y}{x} = xy^2\cos x$,

5) $y'' = 2x + \sin x$, 6) $y'' = -3(y')^2$.

52. 1) $xy' = e^{-y} - 3y'$, 2) $xyy' = x^2 - y^2$,

3) $y' - y\mathrm{tg}(x-3) = \frac{1}{\sin(3-x)}$, 4) $y' + \frac{y}{x} = xy^2\sin x$,

5) $y'' = x + e^{3x-1}$, 6) $(x+3)y'' = (y')^2$.

53. 1) $4x\sqrt{1-y^2} = y'(1-x^2)$, 2) $(y^2 - 3xy)dx + x^2dy = 0$,

3) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}$, 4) $y' - xy = y^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$,

5) $y'' = (x+1)^3$, 6) $y''\sqrt{y} = \frac{1}{8}$.

54. 1) $y'(x+1) = x + 3xy$, 2) $2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$,

3) $y' - 3y\,\mathrm{tg}x = \cos x$, 4) $xy' + y - y^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$,

5) $y'' = \cos(3x-1)$, 6) $y'' = x(y')^2$.

55. 1) $y'\,\mathrm{ctg}(x-2) + \frac{1}{y} = 1$, 2) $y' - \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$,

3) $y' - \frac{y}{x} = xe^x$, 4) $xy' - y^2 = \frac{3y}{\ln x}$,

5) $y'' = \sqrt{(x-4)^3}$, 6) $xy'y'' = (y')^2 + 4$.

56. 1) $xy' + y\sqrt{x^2+4} = 0$, 2) $xy' - y = \sqrt{4x^2 + y^2}$,

3) $y' + 2\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}y = e^{-2x}$, 4) $(xy' - y^2)\ln x = 2y$,

5) $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$, 6) $2y'' - 3(y')^2 = 0$.

57. 1) $3yy' + x^3 = x$, 2) $xdy = y\left(1 + \sqrt{1 - \frac{y}{x}}\right)dx$,

3) $y' - 2\frac{y}{x}y = x^2 \cos x$, 4) $y' + y = y^2 \sin 2x$,

5) $y'' = \ln(1+x)$, 6) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

58. 1) $y'\,\mathrm{tg}(y-1) = \frac{1}{x}$, 2) $y' = \frac{y}{x} + \sin(2\frac{y}{x} - 1)$,

3) $y' - y - \cos x = 0$, 4) $x^2 y' - xy = y^2 \ln x$,

5) $y'' = \sin 3x - 2x$, 6) $xy'' = 3y'$.

59. 1) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dy = xydx$, 2) $\sqrt[3]{x}y' = \frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x-y}$,

3) $y' - \frac{y}{x} = x(e^x + \cos x)$, 4) $y' - \frac{y}{x} = x^3 y^2$,

5) $y'' = 2^{3x-2}$,

6) $y''\sqrt[3]{y+1} = y'$.

60. 1) $(y^3+3)x + y^3(x+2)y' = 0$,

2) $xy' = y(\ln y - \ln x)$,

3) $y' = \dfrac{y}{x-1} - \dfrac{2-3x}{x-1}$,

4) $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}y + (1+x^2)y^2$,

5) $y'' = 3x^2 + e^{2x}$,

6) $(5x-1)y'' = (y')^2$.

61. 1) $y' = y^2 \sin 5x$,

2) $\dfrac{y-x}{x}dy = \dfrac{y^2}{x^2}dx$,

3) $y' = \dfrac{2y}{x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

4) $y' = y\operatorname{tg}x + 2\sin x \cdot y^2$,

5) $y'' = \ln(3-x)$,

6) $y'' - y'x = e^x$.

62. 1) $y' = (y+2)\cos^3 x$

2) $(y+4x)xdy + y^2dx = 0$,

3) $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$,

4) $y' = \dfrac{x^2}{1+x^3}y + (1+x^3)y^2$,

5) $y'' = \dfrac{1}{x+4}$,

6) $\dfrac{y''}{y'} = (y')^2 + y$.

63. 1) $y' = \operatorname{th}3y\ln x$,

2) $y' = \dfrac{4x+y}{3x-y}$,

3) $y' - \dfrac{y}{x-1} = (x-1)^2$,

4) $y' = y\operatorname{tg}x - y^2\cos x$,

5) $y'' = \sin(x+y)$,

6) $x^2y'' - 3xy' = \dfrac{6(y')^2}{x^2}$.

64. 1) $y'\operatorname{tg}(x+3) + \dfrac{y^2+1}{y} = 0$,

2) $xy' - y = \sqrt{4x^2+y^2}$,

3) $2xy + y' = x^2e^{-x^2}$,

4) $y' - y + y^2\cos 2x = 0$,

5) $y'' = e^{5x-4}$,

6) $xy''' - x(y')^2 = 3y'$.

65. 1) $y'\cos^2 x = ye^{-y^2}$,

2) $x\sin^2\dfrac{y}{x}y' = y\sin^2\dfrac{y}{x} + 1$,

3) $y' - \dfrac{3y}{x^2} = e^{3/x}$,

4) $xy' + \dfrac{y}{x+1} = xy^2$,

5) $y'' = \sqrt[3]{2x-5}$,

6) $y'' = 1 - \dfrac{y'}{x}$.

66. 1) $\sqrt{x^2+3}dy = xydx,$ 2) $xy'\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)-y=0,$

3) $y'+3y\mathrm{tg}x=\cos x,$ 4) $3y'=(1-y)y\sin x,$

5) $y'=\ln(3x+2),$ 6) $y'y''=\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$

67. 1) $xy'(\ln x-1)-y^3=0,$ 2) $xy'-y=\sqrt{4x^2+y^2},$

3) $y'-\frac{y}{x}=x^2e^x,$ 4) $y'+y\mathrm{ctg}x=\frac{y^3}{\sin^2 x},$

5) $y''=x^2+e^{1-x},$ 6) $\cos 3y\cdot y''-\sin 3y(y')^2=0.$

68. 1) $xy'+3y=y^2,$ 2) $xy'=y-x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right),$

3) $y'-y\sin x=\sin 2x,$ 4) $xy'-2y=\frac{e^x}{x^2}y^2,$

5) $y''=\frac{1}{\cos^2(x-1)},$ 6) $y''-y'\mathrm{tg}x=0.$

69. 1) $x^2y'+\cos xy=5y,$ 2) $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{2y}{x},$

3) $2xy-y'=x^3,$ 4) $y'-\frac{3x^2}{x^3-1}y=y^2,$

5) $y''=\cos^2(5x-1),$ 6) $y''=\sqrt[3]{y-2}.$

70. 1) $x^3y^2y'=1-x^2,$ 2) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}},$

3) $xy'-2y=e^{\frac{1}{x}},$ 4) $y'+y\sin x=\frac{1}{2}y^2\sin 2x,$

5) $y''=\sqrt[3]{5-4x},$ 6) $(y')^5y''=1.$

71. 1) $xy'+y=y^2,$ 2) $y'-\frac{y}{x}+\mathrm{ch}\frac{y}{x}=0,$

3) $y'-\frac{y}{x}=x^2e^{-x},$ 4) $y'+xy=xy^3e^{x^2},$

5) $y''=4^x+x^3,$ 6) $y''=3yy'.$

72. 1) $yy'=\frac{\cos^2 y}{x-1},$ 2) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y,$

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2 \sin x,$ 4) $xy' - 2y = 2x^4 y^2,$

5) $y'' = \cos(3x-1) + x,$ 6) $y''\left(x^2+1\right) = 2x\left(y'\right)^2.$

73. 1) $xy' + \frac{1}{\cos^2 x} y = y,$ 2) $(xy' - y)\sin^2 \frac{3y}{x} = x,$

3) $2xy + y' = 2x^3 + 3x,$ 4) $y' + y \operatorname{tg} x = y^4 \sec^2 x,$

5) $y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{5x-4}},$ 6) $y'' \sin x = (y')^2 \cos y.$

74. 1) $y' = (x-1)^2 e^{x+y},$ 2) $y' = \frac{y}{x} + \sin^2(1 - \frac{y}{x})$

3) $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x,$ 4) $y' + \frac{x}{x^2+4} y = y^3,$

5) $y'' = \frac{1}{\sin^2(3x-2)},$ 6) $xy'' = y'(x^2+1).$

75. 1) $y' = e^y \cos 5x,$ 2) $y' = \frac{y}{x} + (x+1)^2,$

3) $xy' - 2y = x^3 e^x,$ 4) $y' - y \operatorname{ctg} x = 4y^2,$

5) $y'' = \ln(x-1),$ 6) $yy'' = (y')^2 + 6.$

76. 1) $(y-1)e^{2x}dx = (1+e^{2x})dy,$ 2) $y' = 1 + \frac{y}{x} + \sin\frac{3y}{x},$

3) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 3x,$ 4) $xy' + y = xy^3,$

5) $y'' = x - \sin x,$ 6) $y'' = 1 + (y')^2.$

77. 1) $yy' = e^x + 2y',$ 2) $(x+3y)dx - (5x+y)dy = 0,$

3) $y' - \frac{y}{x} = 5,$ 4) $(y' + xy^2)x = y,$

5) $y''(x+2)^5 = 1,$ 6) $xy'' = y'(x^2+1).$

78. 1) $5x\sqrt{1+y^2} = y'(1+x^2),$ 2) $(y^2 - 4xy)dx + 2x^2 dy = 0,$

3) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos 2x}{x},$ 4) $y' + 2xy = y^2 e^{x^2},$

5) $y'' = xe^{-x},$ 6) $y''\sqrt{y+1} = y'.$

79. 1) $e^{-3y}(2+y')=1$, 2) $x^2y'=y(x-y)$,

3) $y'-5y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$, 4) $((x+1)y'-y^2)\ln(x+1)=2y$,

5) $y''=2x\ln x$, 6) $y^2y''=5(y')^3$.

80. 1) $xy'=y(\ln^2 x+x)$, 2) $xy'=y+y(\ln 3y-\ln x)$,

3) $y'-\dfrac{y}{x}=x^2+4$, 4) $xy'-2y=2x^4y^2$,

5) $y'''=\sqrt{(x+1)^3}$, 6) $y''\sqrt[3]{y-1}=y'$.

81. 1) $xe^{2y}dy-(1-e^{2y})dx=0$, 2) $xdy=y-x\sin\left(\dfrac{y}{x}-1\right)dx$,

3) $xy'-y=\ln x$, 4) $y=x(y'-xy^2\cos x)$,

5) $y''=5^x+x$, 6) $y''+5\mathrm{tg}5x\cdot y'=0$.

82. 1) $x^2\sqrt{4-y^2}=y'(1+x^2)$ 2) $xy'=\sqrt{9x^2-y^2}+y$,

3) $y'-y\mathrm{ctg}x=\dfrac{1}{\sin x}$, 4) $y'+xy=x^3y^2$,

5) $y''=\dfrac{1}{x+6}$, 6) $y''(x^5+1)=5x^4y$.

83. 1) $y'\sqrt{1+x^2}=x\sec 2y$, 2) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1\right)^{-2}$,

3) $y'+\dfrac{y}{x+5}=(x+5)e^x$, 4) $y'+xy=y^2e^{x^2/2}$,

5) $y''=\cos(7-x)$, 6) $y''-\mathrm{ctg}xy'=0$.

84. 1) $x\mathrm{tg}5ydx=e^{2x^2}dy$, 2) $y'=\dfrac{y}{x}\left(1-2\dfrac{y^2}{x^2}\right)$,

3) $y'=2\dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$, 4) $\dfrac{1}{2}y'+xy=xy^4$,

5) $y''=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$, 6) $y''\sqrt{y+4}=\dfrac{1}{2}y'$.

85. 1) $5x^3y^3+y'(1-y)=0$, 2) $(x+5y)ydx-x^2dy=0$,

3) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$, 4) $xy'+(x+1)y=3x^2y^2e^{-x}$,

5) $y'' = \sqrt[3]{5-2x}$, 6) $y'' + 2y'\operatorname{ctg}(2x-3) = 0$.

86. 1) $ye^{3x}dy = (1-e^{3x})dx$, 2) $y' - \dfrac{y}{x} = \cos\dfrac{y}{x}$,

3) $y' = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{\sin^2 3x}$, 4) $3y' = (1-y)y\cos x$,

5) $y'' = \ln(4-5x)$, 6) $2xy' = y''(x^2+1)$.

87. 1) $2^x \operatorname{tg}3y dy = \sec^2 3y dx$, 2) $(x^2+2xy)dy = y^2 dx$,

3) $y' + 2y\operatorname{ctg}x = \dfrac{1}{\cos x}$, 4) $y' - \dfrac{y}{x+3} = \dfrac{y^2}{(x+3)^2}$,

5) $y'' = x + 2^{x-1}$, 6) $(y^2+1)y'' = 2y(y')^2$.

88. 1) $xe^{y-1}y' = \ln x$, 2) $x^2 y' = 2xy + y^2$,

3) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 + 1$, 4) $y' + y\operatorname{ctg}x = \dfrac{1}{\sin x}y^2$,

5) $y'' = \sqrt{7-x}$, 6) $y'' - \dfrac{e^x}{1-e^x}y' = 0$.

89. 1) $3^x \sin^2 y + (1+3^{2x})y' = 0$, 2) $x^3 y' = y(x^2+2xy)$,

3) $y' + xy = 2x$, 4) $y' = y^4\cos 3x + y\operatorname{ctg}3x$,

5) $y'' = \dfrac{1}{x+3} + e^x$, 6) $(5+x)y'' = y'$.

90. 1) $(1+x)^2\sqrt{1-y^2} = y'$, 2) $xdy = \left(y + x\cos\dfrac{3y}{x}\right)dx$,

3) $y' = \dfrac{2y}{x} - \dfrac{x^2}{\sin^2 2x}$, 4) $y' - xy = y^3 e^{-x^2}$,

5) $y'' = \sin^2(x-5)$, 6) $xy'' = y' + 1$.

91. 1) $y^2 - xy' = y - x^2 y'$, 2) $y' = \dfrac{2x+y}{x-3y}$,

3) $y' + y\operatorname{ctg}(x+3) = \dfrac{1}{\cos(x+3)}$, 4) $y' + \dfrac{2x}{x^2+4}y = y^2$,

5) $y'' = x^2 - e^{x-1}$, 6) $y''(1+\cos x) + y'\sin x = 0$.

92. 1) $e^y \operatorname{tg}x dy + (1-e^y)\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$, 2) $xdy + ydx = xe^{\frac{y}{x}-4}dx$,

3) $(x+1)y' = \frac{2}{\ln(x+1)}$, 4) $y' + y\,\text{tg}5x = \frac{1}{\cos 5x}y^2$,

5) $y'' = \cos^2(x-2)$, 6) $y''\sqrt{1+x^2} + xy' = 0$.

93. 1) $x^2y' + y\sin^2 x = y$, 2) $xy' - y = \frac{x^2}{y}\ln\frac{x}{y}$,

3) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^2}$, 4) $y' - y\text{tg}x = y^2\cos x$,

5) $y'' = \sin^3 x$, 6) $\sqrt{1-y^2}\,y'' + y(y')^2 = 0$.

94. 1) $y'\sqrt{1-x^2} + xy = 0$, 2) $xy' = y\ln\frac{y}{x} - y$,

3) $y' + 3y\text{tg}x = \sin x$, 4) $y' - \frac{y}{x} = y^4$,

5) $y'' = \frac{1}{(x-4)^2}$, 6) $(1+\cos y)y'' + (y')^2\sin y = 0$.

95. 1) $y'\ln y = y(1-x^2)$, 2) $yy' = \sqrt{x^2-y^2}$,

3) $y - y'\cos x = \cos x(1-\sin x)$, 4) $y' + y\text{tg}x = \frac{y^3}{\cos^2 x}$,

5) $y'' = \sqrt[3]{7-x}$, 6) $(3-x)y'' = y'$.

96. 1) $5xy' + y^2 = 9$, 2) $xy' - y = \sqrt{3x^2+y^2}$,

3) $y'x - 2y = x^4\cos x)$, 4) $y' - \frac{2x}{x^2+9}y = y^3$,

5) $y'' = -\sqrt{(2x-4)^3}$, 6) $y''\cos y + (y')^2\sin y = 0$.

97. 1) $\sqrt{y^2+5}dx = 3xydy$, 2) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}}$,

3) $y' - 5y\text{tg}x = \sin x$, 4) $y' - 2xy = 2x^3y^2$,

5) $y'' = \frac{\text{ctg}2x}{\sin^2 2x}$, 6) $y''\left(\frac{1}{4}x^3+2\right) = x^2y'$.

98. 1) $y - xy' = y^2 - x^2y'$, 2) $(3x-y)y' = x+y$,

3) $y' - \frac{y}{x} = x^2e^{-x}$, 4) $y' = y\,\text{ctg}2x + y^3\cos 2x$,

5) $y'' = \dfrac{\text{tg}3x}{\cos^2 3x}$,   6) $(4+3x)y'' = 3y'$.

99. 1) $3e^x dx + (1-e^x)y dy = 0$,   2) $xy' = \sqrt{9x^2 - y^2} + y$,

3) $y' + 3y\,\text{ctg}x = \cos x$,   4) $y' - y\,\text{ctg}x = y^2 \sin x$,

5) $y'' = 3x + e^{-2x}$,   6) $y'' - y'\text{ctg}x = 0$.

100. 1) $y'\,\text{tg}(2x-1) = y^2$,   2) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}} + 1$,

3) $y' + \dfrac{y}{x+1} = 4$,   4) $y' = y\,\text{tg}x + 2y^3 \sin x$,

5) $y'' = \sin^2(5x-3)$,   6) $y'' - y'\,\text{ctg}(2x-3) = 0$.

Завдання 2. Знайти розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початкові умови.

1. 1) $y'' - 3y' = x + 2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.   2) $y'' + 2y' + y = e^x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

3) $y'' - y' + y = \cos 2x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.   4) $y'' + 9y = \sin 3x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

2. 1) $y'' - 3y' + 2y = x^2$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.   2) $y'' - 2y' + y = e^{4x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

3) $y'' + 9y = x\cos x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.   4) $y'' - y = 4\sin x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

3. 1) $y'' - 6y' + 8y = 1 - 3x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.   2) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

3) $y'' + y' + 3y = 2\cos x$, $y(0) = -2,\ y'(0) = 1$.   4) $y'' + 9y = \sin x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

4. 1) $y'' + 6y' = x^2 + 2$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.   2) $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 1$.

3) $y'' + 2y' + y = \sin 5x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.   4) $y'' + 16y = \cos 4x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

5. 1) $y'' - 4y' = x,$
$y(0) = 3,\ \ y'(0) = 1.$

2) $y'' - y' + \dfrac{1}{4}y = e^{x-1},$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

3) $4y'' + 4y' + y = 4\cos 3x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

4) $y'' + \dfrac{1}{25}y' = x\cos x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

6. 1) $y'' + 2y' - 3y = x^2,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

2) $y'' + 2y' + y = (3x+2)e^{-x},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

3) $5y'' + 3y' - 8y = \cos\dfrac{x}{4},$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 4y = 9\sin x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

7. 1) $y'' - 2y' - 3y = x + 5,$
$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 2y' + y = (x+7)e^{\frac{x}{2}},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

3) $3y'' + 10y' + 8y = \sin\dfrac{x}{2},$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

4) $4y'' + 9y = 5\sin 3x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

8. 1) $y'' - y' - 6y = 1 - 4x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1.$

2) $y'' + 2y' + 5y = xe^{-\frac{x}{2}},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$

3) $2y'' + 2y' + 5y = 3\cos\dfrac{x}{3},$
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0$

4) $y'' + 9y = 6\sin 3x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

9. 1) $y'' - 3y' = x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1.$

2) $y'' - y' + \dfrac{1}{4}y = 2e^{\frac{x}{2}},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

3) $y'' + y' - 6y = \sin 2x,$
$y(0) = -1\ \ y'(0) = 0.$

4) $4y'' + 9y = (1-4x)\cos x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

10. 1) $y'' - y' = (x-1)^2,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

2) $y'' - 4y' + 8y = 4e^{-4x},$
$y(0) = 1, y'\ \ (0) = 0.$

3) $y'' + 3y' - 10y = \sin x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

4) $16y'' + y = \cos\dfrac{x}{4},$
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 1.$

11. 1) $y'' + 3y' - 4y = 8x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$ 2) $y'' + 6y' + 9y = e^{-\frac{x}{3}},$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 6y' + 10y = \sin 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$ 4) $y'' + y = e^{-2x}\cos x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

12. 1) $y'' + 3y' - 4y = x^2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$ 2) $y'' + 3y' - 4y = x^2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' - 4y' + 5y = \sin 6x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$ 4) $y'' + 25y = 8\cos x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

13. 1) $y'' - 3y' + 2y = 5x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$ 2) $5y'' - 2y' + \frac{1}{5}y = 2e^x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

3) $y'' + 2y' + y = x\sin 4x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 4) $y'' + y = 3\sin 2x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

14. 1) $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$ 2) $y'' + 2y' + 5y = (x-1)e^{-x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 2y' + y = x\cos 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 4) $y'' + 25y = 10\sin 5x,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

15. 1) $y'' + 2y' - 3y = 3 - x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 2) $\frac{1}{2}y'' - 2y' + 2y = e^{\frac{3}{2}x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $8y'' + 14y' + 3y = (x+1)\cos x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 4) $y'' + y' = \sin 2x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

16. 1) $y'' - 3y' - 4y = (x-1)^2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 2) $16y'' - 4y' + \frac{1}{4}y = e^{-5x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 9y' - 10y = \sin 3x,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$ 4) $y'' + y = x\cos 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

17. 1) $y'' + y' - 6y = 3x + 2,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$ 2) $y'' - 4y' + 4y = e^{-\frac{x}{5}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 2y' + 5y = x\sin 7x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$ 4) $y'' + 9y = 4\cos 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

18. 1) $y'' - 2y' - 3y = 5x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

2) $y'' - 2y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{3}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 6y' + 9y = (x+2)\sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $4y'' + y = 4\cos 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

19. 1) $y'' + 2y' - 15y = x + 12,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

2) $y'' - 3y' + 2y = e^{1-x},$ $y(0) = 1\ , y'(0) = 0.$

3) $y'' + 4y' + 5y = x\sin 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $9y'' + y = \cos 4x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

20. 1) $y'' - 3y' - 4y = 12x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

2) $\frac{y''}{5} + 2y' + 5y = xe^{-3x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 2y' + 10y = (1+x)\sin 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 9y = \cos 4x,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

21. 1) $y'' + 3y' - 4y = 4x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

2) $y'' + 4y' + 4y = (1-x)e^{\frac{x}{2}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $4y'' + 8y' + 5y = (5-x)\sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 3y' = \cos 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

22. 1) $y'' - 4y' + 4y = x^2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $3y'' + 2y' + \frac{1}{4}y = xe^{\frac{x}{4}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' - 4y' + 5y = 4\sin 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

4) $y'' + 3y' = \cos\frac{x}{2},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

23. 1) $y'' - 4y = 5x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 3y' + 2y = (x+4)e^{-x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - 3y' - 4y = (6-x)\sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $16y'' + y = \cos 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

24. 1) $y'' - y' - 6y = 1 - 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

2) $y'' + 2y' + 2y = (x-3)e^{\frac{x}{3}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $2y'' + 7y' + 6y = 4\sin 2x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' - 7y' = 3\cos x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

25. 1) $y'' + y' - 2y = 10x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

2) $y'' + 3y' - 10y = e^{5x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 2y' + 10y = (7 - 2x)\sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' - 5y' = \cos 5x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

26. 1) $y'' - 5y' - 6y = 4x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

2) $9y'' + 3y' + \frac{1}{4}y = (3x - 5)e^{-x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 6y' + 13y = 8x\sin 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 4y = 8\cos 4x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

27. 1) $y'' + 5y' + 4y = 12x - 3,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = xe^{3x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - 5y' - 6y = (4 - 3x)\sin 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 9y = 2\cos 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

28. 1) $y'' - 5y' = 1,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

2) $\frac{1}{2}y'' - 6y' + 18y = e^{-2x},$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

3) $3y'' + 5y' + 2y = e^{x}\sin 4x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 16y = 9\cos 5x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

29. 1) $y'' + 5y' - 6y = 5x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = e^{\frac{x}{3}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

3) $4y'' + 4y' + 5y = (x + 2)\sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $4y'' + y = 2\cos 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

30. 1) $y'' + 2y' - 3y = 7x + 2,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

2) $16y'' - 8y' + y = xe^{-7x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $2y'' + 2y' + 5y = \sin 7x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

4) $y'' + y' = \cos 3x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

31. 1) $y''-4y'-5y=4,$
$y(0)=1,\ y'(0)=2.$

2) $2y''-6y'+\frac{9}{2}y=(x+2)e^{-\frac{x}{2}},$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

3) $y''+4y'+3y=e^{2x}\sin x,$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

4) $y''+3y'=2\cos 3x,$
$y(0)=1, y'(0)=0.$

32. 1) $y''+6y'-7y=x-3,$
$y(0)=1,\ y'(0)=-1.$

2) $y''+5y'+\frac{25}{4}y=e^{-\frac{4}{5}x},$
$y(0)=0,\ y'(0)=1.$

3) $y''+4y'+5y=e^{2x}\sin x,$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

4) $y''+9y=x\sin x,$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

33. 1) $y''-2y'+5y=2x,$
$y(0)=1,\ y'(0)=2.$

2) $\frac{1}{5}y''-2y'+5y=e^{2x},$
$y(0)=0,\ y'(0)=1.$

3) $4y''+y'-3y=\sin x,$
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

4) $y''+5y'=x\cos 3x,$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

34. 1) $y''+2y'+10y=(x-1)^2,$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

2) $y''+3y'+\frac{9}{4}y=(x+1)e^{x},$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

3) $5y''-3y'-2y=\cos 2x,$
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

4) $y''+16y=3\sin x,$
$y(0)=0,\ y'(0)=1.$

35. 1) $y''-5y'-6y=4x,$
$y(0)=1,\ y'(0)=2.$

2) $2y''-4y'+2y=x\,e^{-\frac{3}{2}x},$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

3) $y''+4y'+13y=\sin x,$
$y(0)=0,\ y'(0)=1.$

4) $4y''+9y=3\cos 4x,$
$y(0)=-1\ \ , y'(0)=0.$

36. 1) $y''-3y'=x^2+4,$
$y(0)=2,\ y'(0)=0$

2) $y''-3y'+\frac{9}{4}y=e^{3x},$
$y(0)=1,\ y'(0)=1.$

3) $y''-3y'+\frac{9}{4}y=e^{3x},$
$y(0)=1,\ y'(0)=1.$

4) $3y''+12y=2\cos x,$
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

37. 1) $y''+3y'=(1-x)^2,$
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

2) $\frac{1}{4}y''+y'+y=e^{7-x},$
$y(0)=-1,\ \ y'(0)=0.$

3) $y'' + 2y' + 5y = \sin\frac{x}{2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4) $4y'' + y = 5\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

38. 1) $y'' + 4y' + 3y = 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2) $9y'' + 6y' + y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3) $y'' + 2y' + 5y = 6\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4) $y'' + 25y = 9\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

39. 1) $y'' - 5y' = 7x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2) $16y'' + 8y' + y = 3e^{-4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3) $2y'' + 6y' + 3y = \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4) $8y'' + \frac{1}{2}y = x\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

40. 1) $y'' - 3y' = 4x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2) $y'' + 4y' + 4y = xe^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3) $5y'' + 14y' + 8y = (1 - x)\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4) $2y'' + \frac{1}{2}y = \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

41. 1) $y'' - 5y' = x^2 + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

2) $y'' + 2y' - 8y = 3e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3) $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4) $\frac{1}{2}y'' + 2y = x\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

42. 1) $y'' - 4y' - 5y = 3x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2) $3y'' + 4y' + \frac{4}{3}y = e^{7x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3) $y'' + 7y' + 12y = \sin 5x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4) $4y'' + 9y = x\cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

43. 1) $y'' + 4y' - 5y = x - 7$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = (x - 3)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3) $y'' + y' - 12y = x\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4) $y'' + 16y = 3\cos 5x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

44. 1) $y'' - 5y' + 4y = x + 2,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

2) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = (4 - 2x)e^{-2x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - y' + 6y = x\sin 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $3y'' + \frac{1}{3}y = \cos 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

45. 1) $y'' + 5y' + 4y = x^2 + 1,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $\frac{1}{2}y'' - 2y' + 2y = xe^{1-x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 4y' + 13y = \sin 5x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 2y' = 6\cos 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

46. 1) $y'' + 5y' - 6y = 3x,$ $y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

2) $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = (x + 3)e^{x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 2y' + 5y = (2x - 3)\cos x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 16y = 5\sin 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

47. 1) $y'' + 5y' + 4y = 4,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 4y' + 4y = xe^{-3x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}\cos x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 2y' = 5\sin 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

48. 1) $y'' - 5y' = 6 - x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

2) $y'' + 4y' + 4y = (1 + x)e^{-\frac{x}{2}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - y' + 20y = \sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

4) $y'' + y = 15\cos\frac{x}{4},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

49. 1) $y'' - 6y' + 5y = x^2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

2) $y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = (4 - 2x)e^{x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 3y = \sin\frac{x}{3},$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

4) $3y'' + 4y = \cos 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

50. 1) $y'' - 25y = 7 - x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' + 6y' + 9y = e^{-5x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $\begin{array}{l} y''+9y=5\sin 7x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} y''+5y'=\cos 2x, \\ y(0)=-1,\ y'(0)=0. \end{array}$

51. 1) $\begin{array}{l} y''+5y'-14y=x, \\ y(0)=2,\ y'(0)=-1. \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} y''+7y'+\frac{49}{4}y=xe^{2x}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 5y''+8y'+5y=7\sin x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=3. \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} \frac{1}{2}y''+2y=4\cos 3x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{array}$

52. 1) $\begin{array}{l} y''+6y'+10y=x+3, \\ y(0)=1,\ y'(0)=-2. \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \frac{1}{4}y''+2y'+1y=e^{-7x}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} y''+3y'-4y=(1-x)\cos x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} y''+7y'=\sin 3x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{array}$

53. 1) $\begin{array}{l} y''+y'-6y=12x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=2. \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} y''+8y'+16y=xe^{x}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 2y''+2y'+5y=5\cos 2x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} y''+16y=\sin x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{array}$

54. 1) $\begin{array}{l} y''-y'-6y=1, \\ y(0)=3,\ y'(0)=5. \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 4y''-8y'+y=e^{x+3}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} y''-4y'+13y=e^{x}\cos 2x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} 9y''+y=4\sin 3x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{array}$

55. 1) $\begin{array}{l} y''-6y'=4x, \\ y(0)=2,\ y'(0)=1. \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 2y''-2y'+\frac{1}{2}y=3e^{-2x}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=3. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} y''+4y'+5y=4\cos 7x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} 12y''+3y=x\sin 4x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{array}$

56. 1) $\begin{array}{l} y''+6y'=5x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 25y''-10y'+y=8e^{x}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=2. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 5y''-6y'+5y=\sin\frac{x}{2}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} y''+4y=6\sin x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{array}$

57. 1) $y'' + 6y' - 7y = x^2 + 2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $\dfrac{y''}{2} - 4y' + 8y = xe^{2x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 2y' + 5y = 2\sin\dfrac{x}{2},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

4) $4y'' + 9y = 7\cos 2x,$ $y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

58. 1) $y'' - 2y' - 15y = x - 1,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

2) $y'' - 10y' + 25y = 8e^{5x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $5y'' - 8y' + 5y = (4 - 5x)\sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 4y = \cos 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

59. 1) $y'' + 2y' = 3x + 2,$ $y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$

2) $\dfrac{1}{4}y'' - 2y' + 4y = 3xe^{-\frac{x}{5}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 9y' + 8y = 5\sin 2x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + \dfrac{1}{9}y = \cos\dfrac{x}{2},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

60. 1) $y'' - 6y' = x^2,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $\dfrac{1}{3}y'' + 2y' + 3y = e^{3x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $2y'' + 6y' + 5y = \sin x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

4) $4y'' + y = \cos 3x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

61. 1) $y'' - 6y' + 8y = 12x,$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

2) $\dfrac{1}{2}y'' + 4y' + 8y = e^{-\frac{x}{3}},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 2y' + 10y = x\cos 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $3y'' + 12y' = 45\sin 3x,$ $y(0) = 4,\ y'(0) = 0.$

62. 1) $y'' + 6y' - 16y = 7 - x,$ $y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$

2) $\dfrac{1}{3}y'' - 2y' + 3y = 2e^{-x},$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - 4y' + 5y = x\sin 2x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 4y = -\cos 3x,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

63. 1) $y'' + 3y' = 3x,$ $y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' + 10y' + 25y = xe^{-\frac{3}{2}x},$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - y = (x+4)\sin\frac{x}{2}$,
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

4) $y'' + 9y = \cos\frac{x}{5}$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

64. 1) $3y'' - 3y' - 6y = x^2$,
$y(0)=0,\ y'(0)=2.$

2) $25y'' + 10y' + y = 32xe^{3x}$,
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

3) $y'' - 2y' + 5y = \sin\frac{x}{4}$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

4) $y'' - 2y' = 39\cos 3x$,
$y(0)=0,\ y'(0)=2.$

65. 1) $y'' + 3y' - 4y = 1 - x^2$,
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

2) $4y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{64}y = e^{x-1}$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

3) $y'' + 2y' + 5y = \sin\frac{x}{3}$,
$y(0)=3,\ y'(0)=0.$

4) $y'' - 9y = \cos 6x$,
$y(0)=0,\ y'(0)=\frac{1}{6}.$

66. 1) $y'' - 6y' + 5y = 5x$,
$y(0)=2,\ y'(0)=3.$

2) $4y'' - 10y' + \frac{25}{4}y = e^{-5x}$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

3) $y'' + 3y' = \cos 3x$,
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

4) $y'' + 4y = e^{x}\cos 2x$,
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

67. 1) $y'' - 6y' - 16y = 4x + 2$,
$y(0)=1,\ y'(0)=2.$

2) $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = xe^{3x}$,
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

3) $y'' + 3y' + 2y = 5x\cos 2x$,
$y(0)=0,\ y'(0)=0.$

4) $\frac{1}{2}y'' + y = \sin x$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

68. 1) $y'' + 6y' - 7y = x^2$,
$y(0)=0, y'(0)=0.$

2) $\frac{1}{2}y'' - 6y' + 18y = 25e^{x}$,
$y(0)=2,\ y'(0)=0.$

3) $y'' - 3y' + 2y = \sin 3x$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0.$

4) $y'' + 16y = \cos 7x$,
$y(0)=0,\ y'(0)=-1.$

69. 1) $y'' + 5y' - 14y = 5x + 1$,
$y(0)=1,\ y'(0)=-3.$

2) $4y'' + 6y' + \frac{9}{4}y = e^{-7x}$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1.$

3) $$\begin{gathered} y'' - 3y' = x\sin 4x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} y'' + 9y = \cos 8x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1. \end{gathered}$$

70\. 1) $$\begin{gathered} y'' - 6y' = 3x + 2, \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3. \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = (3x+2)e^{-3x}, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

3) $$\begin{gathered} y'' + 2y' + 17y = x\sin x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} 9y'' + 4y = 4\cos 5x, \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

71\. 1) $$\begin{gathered} y'' + 5y' - 6y = x + 2, \\ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} 16y'' + 4y' + \frac{1}{4}y = xe^{3x}, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1. \end{gathered}$$

3) $$\begin{gathered} y'' - 2y' + 5y = \cos 2x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} 2y'' - 8y = 17\sin\frac{x}{2}, \\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

72\. 1) $$\begin{gathered} y'' - 6y' - 7y = x, \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2. \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} 9y'' - 6y' + y = (1-x)e^{x}, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1. \end{gathered}$$

3) $$\begin{gathered} 2y'' + 6y' + 5y = (4-x)\sin x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} y'' + 5y' = 2\cos 3x, \\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

73\. 1) $$\begin{gathered} y'' + 6y' - 16y = 4, \\ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 4. \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} \frac{1}{4}y'' + y' + y = (x+3)e^{5x}, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1. \end{gathered}$$

3) $$\begin{gathered} 5y'' + 2y' + 2y = e^{-2x}\cos 3x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} y'' + 16y = 8\sin x, \\ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

74\. 1) $$\begin{gathered} y'' - 6y' + 5y = x^2, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} y'' - 7y' + \frac{49}{4}y = e^{-3x}, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -2. \end{gathered}$$

3) $$\begin{gathered} y'' + 6y' + 10y = \sin x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1. \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} 6y'' + y' = \cos 2x, \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

75\. 1) $$\begin{gathered} y'' + 4y' = -1, \\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1. \end{gathered}$$

2) $$\begin{gathered} y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^{2x}, \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

3) $$\begin{gathered} 2y'' + 5y' + 2y = e^{-3x}\cos x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0. \end{gathered}$$

4) $$\begin{gathered} y'' + 25y = \sin 2x, \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1. \end{gathered}$$

76. 1) $y'' + 5y' - 6y = 12x + 3,\quad y(0) = -\frac{1}{4},\ y'(0) = 1.$

2) $3y'' + 10y' + \frac{25}{3}y = e^{-5x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 2y' + 5y = (2 - x)\sin 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 9y = \cos 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

77. 1) $y'' - 5y' - 6y = 7x,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

2) $\frac{1}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-3x},\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $2y'' + 5y' + 2y = x\sin 5x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 4y = \cos 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

78. 1) $y'' - 6y' + 5y = (4 - x)^2,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $4y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{64}y = xe^{-3x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 2y' + 5y = \sin 3x,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 36y = 5\cos 4x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

79. 1) $y'' - 6y' - 27y = 9x - 7,\quad y(0) = 4,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = (6 - x)e^{x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $5y'' + 2y' + 2y = 3x\sin 3x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 4y = 5\cos 6x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

80. 1) $y'' + 6y' + 5y = 8,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

2) $\frac{1}{4}y'' - 3y' + 9y = xe^{-2x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $5y'' + 8y' + 5y = e^{x}\sin x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 2y' = 10\cos x,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

81. 1) $y'' + 6y' + 5y = 3x - 2,\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

2) $3y''' + 2y' + \frac{1}{3}y = e^{x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

3) $2y'' - 5y' + 3y = \cos 3x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 25y = 5\sin 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

82. 1) $y'' - 6y' = 4x,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

2) $5y'' + 2y' + \frac{1}{5}y = xe^{5x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $2y'' - 2y' + 5y = \sin 2x,\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' - 9y = \sin x,\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

83. 1) $y'' + 9y = 18x^2 + 1,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$

2) $\frac{1}{5}y'' + 2y' + 5y = e^{3x},\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - 2y' + 2y = e^{-3x}\sin\frac{x}{2},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' - 25y = \cos 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

84. 1) $y'' + 2y' = x^2,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = xe^{-3x},\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $3y'' + 10y' + 3y = \sin 3x,\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 25y = \cos 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

85. 1) $y'' + 6y' + 6y = (x - 2)^2,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $2y'' + 4y' + 2y = e^{-x},\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $2y'' + 6y' + 5y = \sin x,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + y = 4\cos 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

86. 1) $y'' - y' - 12y = 5x + 4,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$

2) $\frac{1}{2}y'' + 6y' + 18y = e^{-\frac{4}{3}x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' - 4y' + 5y = 3x\cos x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $1y'' + 3y = e^{x}\cos 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

87. 1) $y'' - 7y' = 1 - x,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$

2) $y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = e^{-2x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

3) $y'' - 4y' + 5y = x\sin x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $3y'' + \frac{4}{3}y = \cos x + 3\sin x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

88. 1) $y'' - 7y' + 6y = x + 2,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -3.$

2) $3y'' - 2y' + \frac{1}{3}y = 8e^{3x},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

3) $y'' - 4y' + 8y = \cos x,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

4) $5y'' + \frac{9}{5}y = e^{2x}\sin x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

89. 1) $y'' + 7y' = x - 3,$
$y(0) = -2,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 4y' + 4y = 5e^{7x},$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - 6y' + 8y = x\cos x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $\frac{1}{9}y'' + y = -7\sin 4x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

90. 1) $y'' - 7y' - 12y = 2x,$
$y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

2) $18y'' + 3y' + \frac{1}{8}y = (11x - 2)e^{-x},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 2y' + 2y = e^{x}\sin x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $25y'' - y = 26\sin x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

91. 1) $y'' + 7y' + 6y = 3x,$
$y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = e^{3x},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' - y' + 4y = (1 - x)\sin 2x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 6y' = \cos 3x,$
$y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

92. 1) $y'' - 7y' + 2y = 4x^2 + x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

2) $\frac{1}{4}y'' + 3y' + 9y = xe^{-2x},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' + 2y' + 17y = 20\sin 3x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + 3y' = \cos 4x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

93. 1) $y'' + y' - 2y = 3x^2,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

2) $3y'' - 2y' + \frac{1}{3}y = (1 - x)e^{3x},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) $y'' - 2y' + 10y = \sin 7x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

4) $y'' + 9y = 3\cos 2x,$
$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

94. 1) $3y'' + 7y' + 2y = x - 1,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

2) $y'' - 2y' + y = 4e^{x},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' + 2y' + 5y = (2x - 1)\sin x,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

4) $y'' + y = 8\cos 3x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

95. 1) $y'' + 7y' - 12y = 5x,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

2) $2y'' - 6y' + \frac{9}{2}y = 3e^{-3x},$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y'' - 3y' - 4y = (1-5x)\sin 4x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

4) $\frac{1}{2}y'' + 2y = 3\cos x,$
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0.$

96. 1) $y'' + 7y' + 6y = 4,$
$y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1.$

2) $4y'' - 8y' + y = (3+x)e^{x},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

3) $7y'' + 5y' + 4y = e^{-x}\cos 3x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

4) $3y'' + 27y = 5\sin 2x,$
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0.$

97. 1) $y'' - 7y' = 3x^2,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

2) $\frac{1}{4}y'' + 2y' + 1 = e^{-5x},$
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0.$

3) $y'' + y' - 6y = 10\cos x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

4) $\frac{1}{5}y'' + 5y = 21\cos 2x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

98. 1) $y'' + 7y' = x - 2,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

2) $y'' - 8y' + 16y = xe^{2x},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

3) $8y'' + 10y' - 7y = -25x\sin x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

4) $\frac{1}{3}y'' + 3y = 5\cos 2x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1.$

99. 1) $y'' - 4y' - 5y = 5x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

2) $y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = xe^{\frac{3x}{2}},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

3) $y'' - 6y' + 10y = (4-3x)\cos x,$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

4) $4y'' + 9y = \sin 2x,$
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0.$

100. 1) $y'' + 4y' - 5y = 4 - x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

2) $y'' - 6y' + 9 = (2x^2 - 1)e^{-3x},$
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

3) $5y'' + 6y' + 5y = \sin 2x,$
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

4) $4y'' + y = \cos x,$
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0.$

Завдання 3. 1) Знайти загальний розв'язок однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами..

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 4y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 5y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 2y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 7y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 6y, \\ \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 94y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 5y. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 7y. \end{cases}$

41. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 3y. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 7y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5y. \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

51. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

52. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$

53. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + y. \end{cases}$

54. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 5y. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

57. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 5y. \end{cases}$

58. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + y. \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

60. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 7y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

61. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$

62. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

63. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -8x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x + 3y. \end{cases}$

64. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x + 4y. \end{cases}$

66. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$

68. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

69. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 7y. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 8y. \end{cases}$

71. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$

72. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 7y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 6y. \end{cases}$

73. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 7y. \end{cases}$

74. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 2y. \end{cases}$

75. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$

76. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 4y. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

78. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

79. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

80. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + y. \end{cases}$

81. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + y. \end{cases}$

82. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y. \end{cases}$

85. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 5y. \end{cases}$

86. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y. \end{cases}$

87. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

88. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 8y. \end{cases}$

89. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 4y. \end{cases}$

90. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - y. \end{cases}$

91. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 6y. \end{cases}$

92. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

93. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$

94. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 2y. \end{cases}$

95. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

96. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$

97. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

98. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 5y. \end{cases}$

99. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$

100. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

Завдання 3. 2) Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 8y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + 4e^{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - 2\cos t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + 5t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 5\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y. \end{cases}$

7. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 5\sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 7y + 4t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 6y. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 3y - 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y + 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 1. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 2y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + y - 2t. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 4e^{2t}. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - 4\sin 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 3e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 3y. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y + e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 2y. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y + 5\cos 2t. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 3y - 24, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + y + 13t^2. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 10\cos 2t. \end{cases}$$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + t^2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 7e^{-2t}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y + 5\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 10\cos t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y + 4t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - 4e^{2t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 7, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y - 6t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 5e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 9y - 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y, \\ \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 13\sin 2t. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y + 3e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y - 7. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x + 7y - 37\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 8, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 6y - 13e\ . \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + 4t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 5y + 2t. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y - 8e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y + 5. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - 5\cos t. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 6y + 4, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + 5t. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y - 10e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y + 2. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2y + 6. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - y + 3t^2. \end{cases}$

41. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 8e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + 5t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y - 4. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y + 10e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 5y - 8. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + 4\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + y + 26t. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^{-t}. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 2y + 8, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + y + 9e^{2t}. \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y - 9\cos 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 5y. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y + e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + 10e^{-t}. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y - 3e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 5y - 6. \end{cases}$

51. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - 8t + 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 4t^2. \end{cases}$$

52. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 10\sin 2t. \end{cases}$$

53. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y - 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + 4e^t. \end{cases}$$

54. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -9x + 5y - 16t^2 + 2. \end{cases}$$

55. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -8x + 4y + 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x + 3y. \end{cases}$$

56. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + y - 4\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y - 6\sin t. \end{cases}$$

57. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y + 4, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + 8e^{2t} + 4. \end{cases}$$

58. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + 9t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - y - 8e^{-t}. \end{cases}$$

59. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y - 9e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y - 10. \end{cases}$$

60. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 6, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 7y + 5t. \end{cases}$$

61. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y - 4\sin 2t; \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 2y + 2\cos 2t. \end{cases}$$

62. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y - 20t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y + 2. \end{cases}$$

63. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y - 4\cos 3t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y - 4\sin 3t. \end{cases}$$

64. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y + 7, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y + 16t^2. \end{cases}$$

65. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y - 4e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y + e^{-t}. \end{cases}$

66. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 13, \\ \dfrac{dy}{dt} = -9x - 5y + 25e^{2t}. \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y - 6e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$

68. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 2y + 4t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y + 7t + 3. \end{cases}$

69. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y - 5e^{-3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + 10. \end{cases}$

71. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y - 6t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y + 1. \end{cases}$

72. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 3y + e^{t} + 4. \end{cases}$

73. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 3y + 3t + 6. \end{cases}$

74. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 5y - 5\cos t. \end{cases}$

75. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - 10\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y - 9. \end{cases}$

76. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y + 9e^{4t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y - 5. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + 5\cos\dfrac{t}{2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y - 5\sin\dfrac{t}{2}. \end{cases}$

78. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y - 6t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + t - 1. \end{cases}$

79. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 3y - 12e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 5t - 1. \end{cases}$

80. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y - 4, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + 8e^{-4t}. \end{cases}$

81. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 4y - e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + 3t + 1. \end{cases}$

82. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2y + 4e^{2t}. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + 12t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - y + 4t^2 - 2. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 4y + 9e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y. \end{cases}$

85. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y - 20\cos 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

86. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 10\sin t. \end{cases}$

87. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y + 18t + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y. \end{cases}$

88. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y + 2e^{t} - 7, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 8y - 2e^{t}. \end{cases}$

89. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y + 5e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y - 17. \end{cases}$

90. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 2y - 4e^{-3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y + 5. \end{cases}$

91. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y - 6t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y + 10t + 7. \end{cases}$

92. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 2y + 9 - 2e^{3t}. \end{cases}$

93. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y - te^{t}. \end{cases}$

94. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y - 4. \end{cases}$

95. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y - 8e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + y + 12te^{2t}. \end{cases}$

96. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y + 4te^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y + e^{-t}. \end{cases}$

97. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 4y + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + 8t + \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

98. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 5y + 5t - 1. \end{cases}$

99. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y - 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y - \cos t. \end{cases}$

100. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y - 6e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y + 10te^{3t}. \end{cases}$

Завдання 4. 1) *Застосування диференціальних рівнянь до розв'язування геометричних задач*

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,; y_o)$, для якої площа трикутника, утвореного будь-якою дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала, рівна a^2:

1. $M_o(3,\ 2)$, $a = 4$;
2. $M_o(-1,\ 2)$, $a = 3$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,; y_o)$, для якої точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат:

3. $M_o(1,\ 1)$;
4. $M_o(4,\ 2)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,; y_o)$, для якої відстань будь-якої дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику:

5. $M_o(2,\ 3)$;
6. $M_o(-1,2)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,; y_o)$, для якої площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є величина стала, рівна a:

7. $M_o(1,-1)$, $a = 1$;
8. $M_o(3,\ 2)$, $a = 4$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,; y_o)$, для якої площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величина стала, рівна a^2:

9. $M_o(2,\ 2)$, $a = 2$;
10. $M_o(3,\ 4)$, $a = 1$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої радіус кривини обернено пропорційний косинусу кута між дотичною і віссю абсцис:

11. $M_o(1, 3)$;

12. $M_o(3, 4)$.

13. Знайти криві, для яких у будь-якій точці радіус кривини вдвічі більший від відрізка нормалі, що міститься між цією точкою кривої і віссю абсцис (крива розміщена випуклістю вниз).

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, якщо її піддотична вдвічі більша від абсциси точки дотику:

14. $M_o(3, 1)$;

15. $M_o(2, 5)$.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, якщо довжина відрізка півосі абсцис, який відтинає її дотична, дорівнює квадрату абсциси точки дотику:

16. $M_o(2, 3)$;

17. $M_o(4, 5)$.

18. Знайти рівняння кривих, для яких піднормаль має сталу довжину, рівну a.

19. Знайти рівняння кривих, для яких довжина відрізка нормалі стала і дорівнює a.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, якщо довжина відрізка осі абсцис, який відтинає його нормаль, на 2 більше від абсциси точки дотику:

20. $M_o(4, 1)$;

21. $M_o(1, 3)$.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, якщо довжина відрізка, що його відтинає будь-яка її дотична на осі ординат, дорівнює піднормалі:

22. $M_o(-1,3)$;

23. $M_o(4, 2)$.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, якщо довжина відрізка абсцис, який відтинає будь-яка її дотична на осі ординат, дорівнює довжині цієї дотичної:

24. $M_o(1, 2)$;

25. $M_o(3, 2)$.

26. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(1,0)$, якщо площа трапеції, утвореної дотичною, осями координат і ординатою точки дотику, стала і дорівнює 3/2.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, якщо площа трикутника, утвореного віссю абсцис, дотичною і радіус-вектором точки дотику, стала і дорівнює 1:

27. $M_o(0, 4)$;

28. $M_o(0, 1)$.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, якщо добуток абсциси точки дотику на абсцису точки перетину нормалі з віссю Ox дорівнює подвоєному квадрату відстані від початку координат до точки дотику:

29. $M_o(1, 2)$;

30. $M_o(2, 4)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$ і яка має ту властивість, що відрізок будь-якої її дотичної, що міститься між осями координат, ділиться навпіл у точці дотику:

31. $M_o(2, 3)$;

32. $M_o(1,-3)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$ і для якої відрізок дотичної між точкою дотику і віссю Ox ділиться навпіл у точці перетину з віссю Oy:

33. $M_o(1, 3)$;

34. $M_o(2, 2)$.

Знайти таку криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, щоб кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнював ординаті цієї точки, зменшеній на дві одиниці:

35. $M_o(0, 4)$;

36. $M_o(2, 3)$.

37. Знайти криву, всі нормалі якої проходять через постійну точку.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$ і має ту властивість, що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину, рівну 2:

38. $M_o(2, 0)$;

39. $M_o(3, 5)$.

40. Знайти криві, у яких відстань будь-якої дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

41. Знайти криві, у яких площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною та ординатою точки дотику, є величина стала, рівна $3a^2$.

42. Знайти криві, у яких радіус кривини обернено пропорційний косинусу кута між дотичною і віссю абсцис.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$ і для якої піднормаль має сталу довжину, рівну a:

43. $M_o(1,-1)$, $a = 3$;

44. $M_o(2, 2)$, $a = 1$.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через $M_o(x_o\,;y_o)$ і для якої піднормаль має сталу довжину, рівну a:

45. $M_o(3, 5)$, $a = 1$;

46. $M_o(1, 4)$, $a = 3$.

47. Знайти рівняння кривих, для яких довжина відрізка осі абсцис, який відтинає будь-яка їх дотична, дорівнює довжині цієї дотичної.

48. Довести, що крива, кутовий коефіцієнт дотичної якої в будь-якій точці пропорційний абсцисі точки дотику, є параболою.

Знайти криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної будь-якої її точки в κ разів більший від кутового коефіцієнта прямої, яка з'єднує ту ж саму точку з початком координат:

49. $\kappa=4$;

50. $\kappa=6$.

51. Знайти криві, які мають ту властивість, що перпендикуляр, опущений з початку координат на дотичну, дорівнює абсцисі точки дотику.

52. Знайти криві, для яких відношення відрізка, що його відтинає дотична на осі Oy, до радіус-вектора, є величина стала, рівна a.

53. Знайти криві, для яких довжина відрізка, що його відтинає на осі ординат нормаль, проведена в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат.

54. Знайти криву, для якої добуток абсциси будь-якої точки на довжину відрізка, що його відтинає нормаль на осі Oy, дорівнює подвоєному квадрату відстані від цієї точки до початку координат.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$ і яка має ту властивість, що відрізок дотичної до кривої, який міститься між осями координат, ділиться у точці дотику навпіл:

55. $M_o(1,\ 5)$;

56. $M_o(3,\ 4)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$ і яка має ту властивість, що перпендикуляр, опущений від початку координат на дотичну, дорівнює абсцисі точки дотику:

57. $M_o(2,\ 1)$;

58. $M_o(3,\ 3)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої відношення відрізка, що його відтинає дотична на осі Oy, до радіус-вектора, дорівнює a:

59. $M_o(1,\ 5)$, $a = 1$;

60. $M_o(2,\ 5)$, $a = 3$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої довжина відрізка, що його відтинає на осі ординат нормаль, проведена в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат:

61. $M_o(1,\ 1)$;

62. $M_o(3,\ 3)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої добуток будь-якої точки на довжину відрізка, що його відтинає нормаль на осі Oy, дорівнює подвоєному квадрату відстані від цієї точки до початку координат:

63. $M_o\,(3,4)$;

64. $M_o\,(-2,3)$.

65. Знайти криві, для яких довжина відрізка, що його відтинає будь-яка її дотична на осі ординат, дорівнює піднормалі.

66. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю абсцис, дотичною і радіус-вектором точки дотику, стала і дорівнює a.

67. Знайти криві, для яких добуток абсциси точки дотику на абсцису точки перетину нормалі з віссю Ox дорівнює квадрату відстані від початку координат до точки дотику.

68. Знайти криві, для яких відрізок будь-якої її дотичної, який розміщений між осями координат, ділиться навпіл у точці дотику.

69. Знайти криві, для яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю Ox ділиться навпіл у точці перетину з віссю Oy.

70. Знайти криві, для яких кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки, зменшеній на дві одиниці.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться навпіл у точці перетину з віссю ординат:

71. $M_o(5,\ 1)$;

72. $M_o(2,\ 3)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої довжина піднормалі (відрізок її від точки кривої до осі абсцис) дорівнює a:

73. $M_o(1,-1)$, $a = 4$;

74. $M_o(2,\ 6)$, $a = 1$;

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої сума довжин дотичної і піддотичної в будь-якій її точці пропорційна добутку координат точки дотику.

75. $M_o(3,-4)$;

76. $M_o(1,4)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої початкова ордината будь-якої дотичної дорівнює відповідній піднормалі:

77. $M_o\ (2,2)$;

78. $M_o(3,\ 5)$.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o\,;y_o)$, для якої дотична в будь-якій точці кривої відтинає на осі Oy відрізок, рівний квадрату абсциси точки дотику:

79. $M_o(4,\ 1)$;

80. $M_o(2,5)$.

81. Знайти всі лінії, для яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться навпіл у точці перетину з віссю ординат.

82. Знайти лінії, для яких довжина нормалі (відрізок її від точки на лінії до осі абсцис) є стала величина, рівна a.

83. Знайти лінію, для якої сума довжин дотичної і піддотичної в будь-якій її точці пропорційна добутку координат точки дотику.

84. Знайти лінію, для якої початкова ордината будь-якої дотичної дорівнює відповідній піднормалі.

85. Знайти лінію, для якої квадрат довжини відрізка, що його відтинає будь-яка дотична від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.

86. Знайти лінію, для якої початкова ордината будь-якої дотичної на дві одиниці масштабу менша від абсциси точки дотику.

Знайти таку криву, яка проходить через точку $M_o(x_o ;y_o)$, щоб кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеній в 3 рази.

87. $M_o(0, 2)$;

88. $M_o(2,-1)$.

89. Знайти криву, для якої відрізок, шо його відтинає дотична на осі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику.

90. Знайти плоскі криві, для яких радіус кривини пропорційний кубу нормалі.

Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_o(x_o ;y_o)$, для якої піднормаль має сталу довжину a:

91. $M_o(3,2)$, $a = 1$;

92. $M_o(1,4)$, $a = 1$.

93. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного будь-якою дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала і дорівнює a^2.

94. Знайти криві, для яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

95. Знайти криві, для яких кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній в 3 рази.

Знайти криву, яка проходить через точку $M_o(x_o ;y_o)$, для якої радіус кривини пропорційний кубу нормалі.

96. $M_o(1, 3)$;

97. $M_o(2, 4)$..

98. Знайти криві, для яких площа трапеції, утвореної дотичною, осями координат і ординатою точки дотику дотичної, є величина стала і дорівнює 3/2.

99. Знайти криві, для яких відрізок, що його відтинає в будь-якій точці крива на осі Oy, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

100. Знайти рівняння кривої, яка проходить через початок координат, якщо для будь-якого відрізка $[a, x]$ площа криволійної трапеції, обмеженої відповідною дугою цієї кривої, дорівнює кубу ординати кінцевої точки дуги.

2) *Застосування диференціальних рівнянь до розв'язування фізичних задач*

Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційної часу, відлічуваного від $t = 0$, та обернено пропорційної швидкості руху точки. В момент $t = t_0$ швидкість дорівнювала v_0, а сила – $4\cdot10^{-5}$ Н. Якою буде швидкість через хвилину після початку руху?

1. $m = 1$ г, $t_0 = 10$ с, $v_0 = 0{,}5$ м /с;
2. $m = 10$ г, $t_0 = 5$ с, $v_0 = 1$ м /с.

3. Матеріальна точка рухається прямолінійно, причому так, що її кінетична енергія в момент t прямо пропорційна середній швидкості руху в інтервалі часу від нуля до t. Відомо, що при $t = 0$ $s = 0$. Показати, що рух – рівномірний.

Моторний човен рухається в спокійній воді зі швидкістю v. На повному ходу його двигун був вимкнутий, і через час t швидкість човна зменшилася до швидкості v_1. Вважаючи, що сила опору води руху човна пропорційна його швидкості, знайти швидкість човна через час T після зупинки двигуна; знайти також відстань, яку пройшов човен протягом однієї хвилини після зупинки двигуна.

4. $v = 10$ км /год., $v_1 = 6$ км /год., $t = 20$ с, $T = 2$ хв.;
5. $v = 15$ км /год., $v_1 = 3$ км /год., $t = 40$ с, $T = 1$ хв.

6. Точка масою m рухається прямолінійно, на неї діє сила, пропорційна часові (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Крім того, точка зазнає опору середовища, пропорційного добутку швидкості і часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k_1). Знайти залежність швидкості від часу.

7. Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та оточуючого його середовища (закон Ньютона). Знайти залежність температури T від часу t, якщо тіло, нагріте до T_0, внесене до приміщення, температура якого стала і дорівнює a градусів.

8. $T_0 = 200°C$, $a = 20°C$;
9. $T_0 = 100°C$, $a = 25°C$;
10. $T_0 = 150°C$, $a = 15°C$.

Через скільки часу температура тіла, нагрітого до T, знизиться до T_1, якщо температура приміщення дорівнює 20°C, і за перші 20 хв. тіло охолоне до T_2:

11. $T = 100°C$, $T_1 = 30°C$, $T_2 = 60°C$;
12. $T = 250°C$, $T_1 = 50°C$, $T_2 = 150°C$.

Сповільнююча дія тертя на диск, який обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Знайти залежність цієї кутової швидкості від часу, якщо відомо, що диск, який почав обертатися зі швидкістю v, через проміжок часу t обертається зі швидкістю v_1 об./хв.

13. $v = 100$ об./хв., $t = 1$хв., $v_1 = 60$ об./хв.;
14. $v = 150$ об./хв., $t =$ Iхв., $v_1 = 60$ об./хв.

Швидкість витікання води з отвору на відстані h по вертикалі від вільної поверхні визначають за формулою $v = C\sqrt{2gh}$, де $C = 0{,}6$.

За який час вода, яка заповнює півсферичний котел діаметром D, витече з нього через круглий отвір у дні радіуса r м.

15. $D = 2$ м, $r = 0{,}1$ м;

16. $D = 3$ м, $r = 0{,}05$ м.

Кількість світла, що поглинається при проходженні через тонкий шар води, пропорційна кількості падаючого світла і товщині шару води. Якщо при проходженні шару води товщиною H поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина від цієї кількості дійде до глибини h?

17. $H = 3$м, $h = 30$м;

18. $H = 2$м, $h = 25$м.

19. Електрорушійна сила e у колі, сила струму в якому – i, опір – R та індуктивність – L, складається із спаду напруги Ri та ЕРС самоіндукції $L\frac{di}{dt}$. Визначити струм i в момент часу t, якщо $e = E\sin wt$ (E та w – сталі та $i = 0$ при $t = 0$).

20. Силу опору повітря під час падіння тіла можна вважати пропорційною квадратові швидкості. Знайти закон руху, якщо початкова швидкість дорівнює нулю.

Моторний човен вагою P рухається прямолінійно з початковою швидкістю v_o. Опір води пропорційний швидкості і дорівнює 10 кгс при швидкості 1 м /с. Через скільки часу швидкість буде дорівнювати v_1 м /с?

21. $P = 300$ кгс, $v_o = 60$ м /с, $v_1 = 8$ м /с;

22. $P = 150$ кгс, $v_o = 55$ м /с, $v_1 = 6$ м /с.

Сила натягу пружини пропорційна її видовженню і дорівнює 1 кгс, коли довжина збільшується на 1 см. До пружини підвішано тягар вагою P. Знайти період коливального руху, якого набуває цей тягар, якщо його злегка відтягнути донизу, а потім відпустити.

23. $P = 2$ кгс;

24. $P = 5$ кгс.

Вантаж вагою P, підвішений на пружині, збільшує її довжину на L см. Знайти закон руху вантажу, якщо верхній кінець пружини здійснює вертикальні гармонічні коливання за законом $y = 2\sin 30t$, і в початковий момент вантаж перебуває у спокої (опором середовища знехтувати).

25. $P = 4$ кгс, $L = 1$ см;

26. $P = 6$ кгс, $L = 1{,}5$ см.

Матеріальна точка масою m притягується кожним із двох центрів з силою, пропорційною відстані (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Знайти закон руху точки, якщо відомо, що відстань між центрами – $2b$, в початковий момент точка знаходилася на відрізку, який з'єднує центри, на відстані c від його середини і мала швидкість, рівну нулю.

27. $m = 20$ г, $b = 4$ см, $c = 1$ см;

28. $m = 100$ г, $b = 5$ см, $c = 2$ см.

29. Ланцюг завдовжки 10 м сповзає донизу з підставки без тертя. Якщо рух почався тоді , коли звисало 1,5 м ланцюга, то за який час зповзне весь ланцюг?

Вузенька довга трубка обертається із сталою кутовою швидкістю ω навколо перпендикулярної до неї вертикальної осі. Кулька, яка міститься всередині трубки, ковзає по ній без тертя. Знайти закон руху кульки відносно трубки, вважаючи, що:

30. в початковий момент кулька була на відстані a від осі обертання і початкова швидкість кульки дорівнювала нулю;

31. в початковий момент кулька була на осі обертання і мала початкову швидкість v_o.

Снаряд вилітає із гармати з початковою швидкістю v_o і під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху снаряда, якщо вважати, що опір повітря пропорційний швидкості:

32. $v_o = 50$ км/год., $\alpha = 45°$;

33. $v_o = 120$ км/год., $\alpha = 30°$.

Матеріальна точка М притягується центром O з силою, пропорційною відстані. Рух починається з точки A на відстані a від центра з початковою швидкістю v_o, перпендикулярною до відрізка OA. Знайти траєкторію точки М.

34. $a = 10$ см, $v_o = 10$ м/с;

35. $a = 5$ см, $v_o = 15$ м/с.

Матеріальна точка масою m відштовхується вздовж прямої від деякого центра з силою, пропорційною її відстані від цього центра (коефіцієнт пропорційності дорівнює 4). Опір середовища пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 3). На початку руху відстань від центра дорівнювала l см, а швидкість – нулю. Знайти закон руху.

36. $m = 1$г, $l = 1$ см;

37. $m = 10$г, $l = 3$ см.

Матеріальна точка масою m рухається по прямій від A до B під дією сталої сили F. Опір середовища пропорційний відстані тіла від B і в початковий момент (в точці A) дорівнював f $(f < F)$. Початкова швидкість точки дорівнює нулю. Скільки часу точка буде рухатися від A до B?

38. $m = 1$г, $F = 3$Н, $f = 1$Н;

39. $m = 10$г, $F = 5$Н, $f = 2$Н.

Дерев'яний циліндр з параметрами s, h, γ повністю занурений у воду і відпущений без початкової швидкості. Якщо вважати, що сила тертя пропорційна висоті зануреної частини, вияснити, яким повинен бути коефіцієнт пропорційності k, щоб в результаті першого підйому над поверхнею води показалася рівно половина циліндра.

40. $S = 100$ см^2, $h = 20$ см, $\gamma = 0{,}5$ г/см^3;

41. $S = 50$ см^2, $h = 15$ см, $\gamma = 0{,}5$ г/см^3.

42. Куля входить у дошку товщиною $h = 0{,}1$ м зі швидкістю $v_o = 200$ м/с, а вилітає із дошки, пробивши її, зі швидкістю $v_1 = 60$ м/с. Вважаючи, що сила опору дошки рухові тіла пропорційна квадратові швидкості руху, знайти, скільки часу продовжувався рух кулі через дошку.

Різниця потенціалів на затискачах котушок рівномірно падає від $E_о$ до E_1 протягом t. Який буде струм в кінці 10-ої секунди, якщо на початку досліду він був $16\frac{2}{3}$А? Опір котушки – R, коефіцієнт індуктивності – 0,1Гн.

43. $E_о = 2$ В, $E_1 = 1$ В, $t = 10$ с, $R = 120$ м;

44. $E_о = 5$ В, $E_1 = 2$ В, $t = 5$ с, $R = 150$ м.

Знайти струм у котушці в момент часу t, якщо опір її – R, коефіцієнт індуктивності – L, початковий струм – $I_о$. ЕРС змінюється за законом $E = E_о\sin\omega t$.

45. $t = 5$ с, $R = 15$ Ом, $L = 0{,}1$Гн;

46. $t = 10$с, $R = 25$ Ом, $L = 0{,}2$Гн.

Крапля води, яка має початкову масу $M_о$ і рівномірно випаровується зі швидкістю m г /с, рухається за інерцією з початковою швидкістю $v_о$. Сила опору середовища пропорційна швидкості руху краплі і її радіусу. В початковий момент ($t = 0$) вона дорівнювала $f_о$ дин. Знайти залежність швидкості краплі від часу.

47. $M_о = 5$ г, $m = 0{,}2$ г /с, $v_о = 50$ см /с, $f_о = 5$ дин;

48. $M_о = 3$ г, $m = 0{,}1$ г /с, $v_о = 25$ см /с, $f_о = 6$ дин.

Корабель сповільнює свій рух під дією сили опору води, яка пропорційна швидкості корабля. Початкова швидкість корабля - $v_о$, швидкість його через t с стане v_1. Коли швидкість зміниться до v_2?

49. $v_о = 10$ м/с, $t = 5$ с, $v_1 = 8$ м/с, $v_2 = 1$ м/с;

50. $v_о = 15$ м/с, $t = 3$ с, $v_1 = 7$ м/с, $v_2 = 2$ м/с.

51. За законом Ньютона швидкість охолодження будь-якого тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою T тіла і температурою повітря $T_о$. Якщо температура повітря дорівнює 20°C і тіло протягом 20 хв. охолоджується від 100° до 60°C, то через скільки часу його температура знизиться до 30°C?

Визначити шлях s, пройдений тілом за час t, якщо його швидкість пропорційна пройденому шляху, і якщо тіло проходить відстань L_1 м за 10 с і L_2 м за 15 с.

52. $L_1 = 100$м, $L_2 = 200$м;

53. $L_1 = 150$ м, $L_2 = 400$ м.

Дно резервуару, місткість якого V, покрите сіллю. Припускаючи, що швидкість розчинення солі пропорційна різниці між концентрацією в даний момент і концентрацією насиченого розчину {1 кг солі на 3 л води), і що дана кількість чистої води розчиняє $\frac{1}{3}$ кг солі за хвилину, знайти вміст солі у розчині через час t.

54. $V = 300$ л, $t = 1$год.;

55. $V = 500$ л, $t = 2$ год.

На деяку кількість нерозчинної речовини, що містить у своїх шарах P кг солі, діємо V л води. Через t хв. розчиняється 1 кг солі. Через скільки часу розчиниться 99% початкової кількості солі?

56. $P = 2$ кг, $V = 30$ л, $t = 5$хв.;

57. $P = 1{,}5$ кг, $V = 25$л, $t = 3$хв.

Цегляна стінка має товщину H см. Знайти залежність температури від відстані точки до зовнішнього краю стіни, якщо із зовнішнього боку її температура дорівнює $T_{зн}$, а з внутрішнього – $T_{вн}$. Знайти також кількість теплоти, що її стіна (1 см^2) віддає назовні протягом доби.

58. $H = 30$ см, $T_{вн} = 20°С$, $T_{зн} = 0°С$;

59. $H = 40$ см, $T_{вн} = 20°С$, $T_{зн} = -20°С$.

Конденсатор, ємність якого Q, вмикається в коло з напругою E та опором R. Визначити заряд конденсатора в момент t після ввімкнення.

60. $Q = 20$ мкф, $E = 220$ В, $R = 40$ Ом;

61. $Q = 40$ мкф, $E = 120$ В, $R = 10$ Ом.

62. Знайти час, який потрібен для того, щоб впасти на Землю з висоти 400000 км, якщо ця висота обчислюється від центра Землі, і якщо радіус Землі дорівнює приблизно 6400 км.

63. Знайти закон руху матеріальної точки масою m по прямій OA під дією відштовхуючої сили, обернено пропорційної кубові відстані точки $x = 0$ м від нерухомого центра.

Тіло масою m падає з деякої висоти зі швидкістю v. Під час падіння тіло зазнає опору, пропорційного квадратові швидкості. Знайти закон руху падаючого тіла.

64. $m = 10$ кг, $v = 10$ м/с;

65. $m = 60$ кг, $v = 25$ м/с.

66. Знайти рівняння руху точки, якщо прискорення в залежності від часу визначається формулою $a = 1{,}2\,t$ і якщо при $t = 0$ відстань $s = 0$, а при $t = 5$ відстань $s = 20$.

67. Тіло масою m ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, який дає початкову швидкість v_0. На тіло діє сила тертя, яка дорівнює $-km$. Знайти відстань, яку тіло здатне пройти.

В посудину, в якій міститься вода масою M кг, температура якої 20°С, опущений алюмінієвий предмет масою m кг, питома теплоємність якого 0,2 Дж/(кг К) і температура T. Через скільки хвилин вода нагріється на 2°С? Коли температури води і предмета відрізнятимуться одна від одної на 1°С? Втратами теплоти на нагрівання посудини та іншими знехтувати.

68. $M = 1$ кг, $T = 75°С$;

69. $M = 3$ кг, $T = 250°С$.

70. Кусок металу температурою a°С, поміщений у піч, температура якої протягом 1 год. рівномірно підвищується від a до b°С. При різниці температур печі і металу T°С метал нагрівається зі швидкістю kT. Знайти температуру металу через 1 год.

71. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна, яка дорівнює 1,5 м/с, через 4 с дорівнюватиме 1 м/с. Коли швидкість зменшиться до 1 см/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

72. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Через скільки часу залишиться 1% від її початкової кількості?

73. Протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

Парашутист стрибнув з висоти H км, а розкрив парашут на висоті h. Скільки часу він падав до розкриття парашуту, якщо гранична швидкість падіння людини у повітрі нормальної густини складає 50 м/с, а опір повітря пропорційний квадратові швидкості. Зміною густини повітря з висотою знехтувати.

74. $H = 1{,}5$ км, $h = 0{,}5$ км;

75. $H = 3$ км, $h = 0{,}8$ км.

Футбольний м'яч вагою P кинуто вертикально вгору зі швидкістю v. Опір повітря пропорційний квадратові швидкості і дорівнює 0,48 гс при швидкості 1 м/с. Обчислити час підйому м'яча і найбільшу висоту підйому.

76. $P = 0{,}4$ кгс, $v = 20$ м/с;

77. $P = 0{,}5$ кгс, $v = 25$ м/с.

За який час витече вся вода з циліндра (циліндричного бака), діаметр якого $2R = 1{,}8$ м і висота $H = 2{,}45$ м, через отвір у дні діаметром $2r = 6$ см ?

78. Вісь циліндра – вертикальна.

79. Вісь циліндра розміщена горизонтально, а отвір міститься в найнижчій частині циліндра.

80. Циліндричний бак поставлений вертикально і має отвір у дні. Половина води з повного бака витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?

Лійка має форму конуса, радіус якого R і висота H. Конус розміщений вершиною вниз. За який час витече вся вода із лійки через круглий отвір діаметром d, зроблений у вершині конуса.

81. $R = 6$ см, $H = 10$ см, $d = 0{,}5$ см;

82. $R = 15$ см, $H = 25$ см, $d = 0{,}3$ см.

В прямокутний бак, ширина якого *a см*, довжина *b см* і висота *h см*, надходить V літрів води за 1 секунду. У дні є отвір, площа якого дорівнює 5см^2. За який час наповниться бак?

83. $a = 60$ см, $b = 75$см, $h = 80$ см, $V = 1{,}8$л, $S = 25$ см^2;

84. $a = 100$ см, $b = 130$см, $h = 60$ см, $V = 2$л, $S = 15$ см^2.

85. Гумовий шнур довжиною 1 м під дією сили f кгс видовжується на kf метрів. На скільки видовжиться такий самий шнур довжиною l і вагою P під дією своєї ваги, якщо його підвісити за один кінець.

Знайти атмосферний тиск на висоті h км, якщо на поверхні Землі тиск дорівнює 1 кгс/см^2, а густина повітря - 0,0012 г/см^3.

86. $H = 1$ км;

87. $H = 3$ км.

88. Маса ракети з повним запасом палива дорівнює M, без палива - m. Швидкість витікання продуктів горіння із ракети дорівнює v, а початкова швидкість ракети дорівнює нулю. Знайти швидкість ракети після згоряння палива, нехтуючи при цьому силою тяжіння та опором повітря (формула Ціолковського).

Електричне коло складається із послідовно з'єднаних джерела постійного струму, що дає напругу V, опору R, індуктивності L і вимикача, який вмикається при $t = 0$. Знайти залежність сили струму від часу (при $t>0$).

89. $V = 100$ В, $R = 30$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн;

90. $V = 50$ В, $R = 50$ Ом, $L = 0{,}2$ Гн.

Електричне коло складається із послідовно з'єднаних джерела постійного струму, що дає напругу V, опору R, конденсатора ємності C і вимикача, який вмикається при $t = 0$. Конденсатор до замикання кола заряджений. Знайти залежність сили струму від часу (при $t >0$).

91. $V = 120$ В, $R = 50$ Ом, $C = 30$ мкф;

92. $V = 70$ В, $R = 150$ Ом, $C = 50$ мкф.

Послідовно з'єднані опір R і конденсатор ємності C, заряд якого при $t = 0$ дорівнює q. Коло замикається при $t = 0$. Знайти силу струму у колі при $t >0$.

93. $R = 50$ Ом, $C = 2$ мкор, $q = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл;

94. $R = 100$ Ом, $C = 5$ мкор, $q = 3 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Послідовно з'єднані індуктивність L, опір R і конденсатор ємності C, заряд якого при $t = 0$ дорівнює q. Коло замикається при $t = 0$. Знайти силу струму у колі та частоту коливань у тому випадку, коли заряд має коливальний характер.

95. $R = 25$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 1{,}5$ мкф;

96. $R = 50$ Ом, $L = 0{,}5$ Гн, $C = 1{,}0$ мкф.

Послідовно з'єднані джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E = V\sin\omega t$, опір R і індуктивність L. Знайти силу струму у колі (стаціонарний режим).

97. $R = 100$ Ом, $L = 1$ Гн, $\omega = 314$ с$^{-1}$;

98. $R = 70$ Ом, $L = 1{,}5$ Гн, $\omega = 314$ с$^{-1}$.

Послідовно з'єднані джерело струму, напруга якого змінюється за законом $E = V\sin\omega t$, опір R, індуктивність L і ємність C. Знайти силу струму у колі (стаціонарний режим).

99. $R = 120$ Ом, $L = 2$ Гн, $C = 0{,}5$ мкф, $\omega = 314$ с$^{-1}$;

100. $R = 50$ Ом, $L = 1$ Гн, $C = 1{,}5$ мкф, $\omega = 314$ с$^{-1}$.

Завдання 5. Використовуючи метод Ейлера, знайти наближений розв'язок диференціального рівняння на відрізку [0; 1], розбивши його на 10 частин.

1. $y' = \dfrac{-2 + x^2 + y^2}{1 + y^2}, \quad y(0) = 0.$

2. $y' = e^x + y^2, \quad y(0) = 4.$

3. $y' = \dfrac{0.5(1 - y^2)}{2x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 1.$

4. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{y^2 + 0.5x + 1}, \quad y(0) = -1.$

5. $y' = 3x^2 - 2y, \quad y(0) = 5.$

6. $y' = \cos x + xy, \quad y(0) = 0.$

7. $y' = 5x^2 - 2xy, \quad y(0) = 7.$

8. $y' = x^2 - 5y^2 + 3, \quad y(0) = 2.$

9. $y' = \dfrac{e^x + y}{x + 1}, \quad y(0) = 1.$

10. $y' = 3x^2 - 7y, \quad y(0) = 5.$

11. $y' = 3x + \sqrt{x^2 + y}, \quad y(0) = 4.$

12. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{1.5x + y^2 + 1}, \quad y(0) = -2.$

13. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x + y^2 + 1}, \quad y(0) = -3.$

14. $y' = \dfrac{4xy}{x^2 + 1}, \quad y(0) = 1.$

15. $y' = x^2 e^{-y} + 2, \quad y(0) = 1.$

16. $y' = 1 - e^{x-y}, \quad y(0) = -1.$

17. $y' = 27x(y^2 - x^2), \quad y(0) = 1.$

18. $y' = \dfrac{x^2}{x^3 + y + 1}, \quad y(0) = -3.$

19. $y' = 2x - 4x^2 \cos y, \quad y(0) = 0.$

20. $y' = \left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)^2, \quad y(0) = 3.$

21. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{1.5x + y^2 + 1}, \quad y(0) = -2.$

22. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 0.5}{0.5x + y^2 + 1}, \quad y(0) = 2.$

23. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1.5}{x + y^2 + 1}, \quad y(0) = -5.$

24. $y' = \dfrac{0.5(1 - y^2)}{3x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 4.$

25. $y' = x^2 + 3y^2 - e^x, \quad y(0) = 0.$

26. $y' = x\sqrt{y - x^2} + 2y, \quad y(0) = 4.$

27. $y' = (4x + y - 3)^2, \quad y(0) = 7.$

28. $y' = x\sqrt[3]{y} + 3y, \quad y(0) = 1.$

29. $y' = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}, \quad y(0) = 9.$

30. $y' = 2yx\ln(4 + x) - 1, \quad y(0) = 1.$

31. $y' = 2\sqrt{y}\cos x - 2y, \quad y(0) = 1.$

32. $y' = \dfrac{1 - x^2 y}{y - x}, \quad y(0) = 3.$

33. $y' = \dfrac{0.9(1 - y^2)}{3x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 4.$

34. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{2x + y^2 + 1}, \quad y(0) = -4.$

35. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2, \quad y(0) = 0.$

36. $y' = \sqrt{1 + x^4 y^2}, \quad y(0) = 1.$

37. $y' = y^2(e^x - 1), \quad y(0) = 1.$

38. $y' = e^{xy} - 4y^2, \quad y(0) = 0.$

39. $y' = x - \sqrt[3]{1 + y^2}, \quad y(0) = 4.$

40. $y' = \dfrac{4x + 6y - 5}{2x + 3y - 1}, \quad y(0) = 1.$

41. $y' = 2x^2 y - x^4, \quad y(0) = -1.$

42. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{1.5x + y^2 + 1}, \quad y(0) = 5.$

43. $y' = e^y(x + 2), \quad y(0) = 3.$

44. $y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 4}, \quad y(0) = 2.$

45. $y' = e^x\sqrt{1 + y^2}, \quad y(0) = \sqrt{3}.$

46. $y' = \dfrac{2x^2 + y^2 - 1}{x + y^2 + 1}, \quad y(0) = -1.$

47. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{0.5x + y^2 + 1}, \quad y(0) = -4.$

48. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1.5}{y^2 + 1}, \quad y(0) = 2.$

49. $y' = x^2 + 3\ln(y + 2), \quad y(0) = 0.$

50. $y' = (1 + xy)e^x, \quad y(0) = 1.$

51. $y' = \dfrac{0.9(1 - y^2)}{2x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = -3.$

52. $y' = \dfrac{1 - x + y^2}{y^2 + 1}, \quad y(0) = 2.$

53. $y' = x^2 - \sin^2 y, \quad y(0) = 0.$

54. $y' = x^3 y^2 - x, \quad y(0) = -2.$

55. $y' = 2xy + xe^{-y}$, $y(0) = -1$.

56. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 0.5}{1 + x + y^2}$, $y(0) = 4$.

57. $y' = y^3 \ln(x+3)$, $y(0) = -2$.

58. $y' = x(1 + \sqrt{x^2 + y})$, $y(0) = 4$.

59. $y' = 2y - \dfrac{x^3}{1+y}$, $y(0) = 3$.

60. $y' = \sqrt[3]{1 - xy^2 + y}$, $y(0) = 1$.

61. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - 4}$, $y(0) = 1$.

62. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 0.5}{1 + y^2}$, $y(0) = -7$.

63. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{1 + 2x + y^2}$, $y(0) = 5$.

64. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1.5}{1 + 2x + y^2}$, $y(0) = 4$.

65. $y' = 2y - x^5 y^3$, $y(0) = -3$.

66. $y' = \dfrac{3x^2 + y^2}{1 + y^2}$, $y(0) = 10$.

67. $y' = xy + e^x$, $y(0) = -2$.

68. $y' = \cos(y - x)$, $y(0) = 0$.

69. $y' = \sqrt{4x + 2y + 1})$, $y(0) = 2$.

70. $y' = y^2 - 2ye^x + e^{2x}$, $y(0) = 0$.

71. $y' = 3\sqrt[3]{y^2} + x$, $y(0) = -3$.

72. $y' = 3^x + 2^y$, $y(0) = 0$.

73. $y' = y + \sqrt[3]{y + x}$, $y(0) = -1$.

74. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$, $y(0) = 3$.

75. $y' = \sqrt[3]{3x - y} + 4$, $y(0) = 0$.

76. $y' = x^2 + 2x + y$, $y(0) = 4$.

77. $y' = 4 + \sqrt{x^2 + y^4 + 1}$, $y(0) = 3$.

78. $y' = \sqrt{1 + y^4} + e^{2x}$, $y(0) = 1$.

79. $y' = \dfrac{3x - 7y^2 + 3}{3x - 7y + 7}$, $y(0) = 1$.

80. $y' = \dfrac{x^2 + y}{x + y - 1}$, $y(0) = 2$.

81. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 0.5}{1.5x + y^2 + 1}$, $y(0) = 1$.

82. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 1.5}{1 + 0.5x + y^2}$, $y(0) = -4$.

83. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, $y(0) = 2$.

84. $y' = \dfrac{1.1(1 - y^2)}{3x^2 + y^2 + 1}$, $y(0) = 4$.

85. $y' = x^3 + e^{3y}$, $y(0) = 7$.

86. $y' = \dfrac{2x^2 + y^2}{1 + 2x + y^2}$, $y(0) = -6$.

87. $y' = \dfrac{2x^2 + y^2 + 1}{1 + 0.5x + y^2}$, $y(0) = 1$.

88. $y' = y \sin x + x^2$, $y(0) = 0$.

89. $y' = e^{7x} - 3xy^2$, $y(0) = -2$.

90. $y' = \sqrt{x + y} - \sqrt[3]{y^2}$, $y(0) = -2$.

91. $y' = \sqrt[3]{x^2 - 3xy}$, $y(0) = 1$.

92. $y' = (1 + xy)2^{3x}$, $y(0) = -1$.

93. $y' = \dfrac{0.5(1 - y^2)}{2x^2 + y^2 + 1}$, $y(0) = -5$.

94. $y' = e^{3x} - \sin y$, $y(0) = 0$.

95. $y' = 5x^2 + y^3 - 4$, $y(0) = 6$.

96. $y' = \sqrt{x^2 + 2xy^3}$, $y(0) = 1$.

97. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 0.5}{2x + y^2 + 1}$, $y(0) = 4$.

98. $y' = (5x^2 + y)10^y$, $y(0) = -1$.

99. $y' = ye^x + \cos xy$, $y(0) = 0$.

100. $y' = y^4 \ln(1 + x) - x^2$, $y(0) = 0$.

Список літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.- Т 1, 2. – М.: Наука, 1985.

2. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды.Функции комплексной переменной.- М.: Наука, 1984.

3. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994.

4. Шестаков А.А., Малышева Н.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики: Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Векторный анализ. – М.: Высшая школа, 1987.

5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1972.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа - М.: Наука, 1972.

7. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа. Учебное пособие для втузов. / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

Навчальне видання

Лідія Іванівна Педорченко, Віра Андріївна Петрук
Віктор Семенович Петрунін

ЗБІРНИК
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
Частина 5

Збірник завдань

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор В.О. Дружиніна

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідотство Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 16.09.2005 р.
Формат 29,7×42 ¼
Друк різографічний
Тираж 75 прим.
Зам. № 2005-168

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 6.81

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідотство Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ