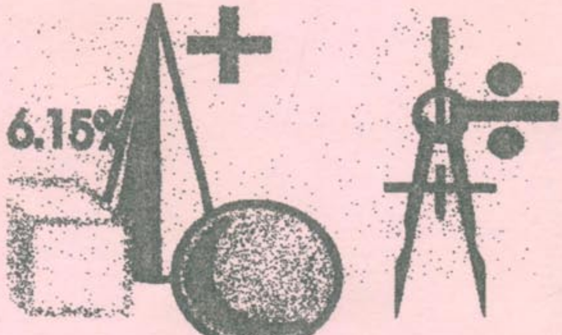
В.А.Петрук
Г.Г.Кашканова

ЙМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ТА СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА РІШЕНЬ



Міністерство освіти та науки України
Вінницький національний технічний університет

В.А. Петрук
Г.Г. Кашканова

ЙМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ТА СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА РІШЕНЬ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів

УНІВЕРСУМ-Вінниця 2006

УДК 51/077
П 31

Рецензенти:

Ю. І. Волков, *доктор фізико-математичних наук, професор (КДПУ)*
В. С. Абрамчук, *кандидат фізико-математичних наук, професор (ВДПУ)*
С. В. Юхимчук, *доктор технічних наук, професор (ВНТУ)*

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки України
Лист №14/88.2-1884 від 08.08.2005р.

Петрук В. А., Кашканова Г. Г.
П 31 Ймовірнісно-статистичні моделі та статистична оцінка рішень. Навчальний посібник - Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006.- 131с.
ISBN 966-641-186-5

В навчальному посібнику "Ймовірнісно-статистичні моделі та статистична оцінка рішень" подані методи статистичного аналізу складних систем, алгоритми визначення основних статистичних характеристик. Розглянуті методи розрахунків ілюструються конкретними прикладами. Досить докладно викладені теорії перевірки статистичних гіпотез та кореляційно - регресійного аналізу.

Даний посібник буде корисним для студентів, магістрів та аспірантів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51/077

ISBN 966-641-186-5

Зміст

ВСТУП

Статистичний розподіл параметрів складних систем і його характеристики

Основні задачі статистичної оцінки параметрів складних систем

Характерною особливістю складних систем є статистична природа параметрів оцінки цих систем, наявність між параметрами перехресних прямих і зворотних зв'язків, багатовимірність. Фахівцю зі складних систем доводиться обробляти і аналізувати велику кількість техніко-економічних показників. Важливо вміти правильно оперувати цими даними, вміти збирати і обробляти їх таким чином, щоб глибше виявити закономірність функціонування складних систем.

Розробкою методів збирання, опису та аналізом результатів спостережень займається математична статистика. Розглянемо характерні задачі й оцінки складних систем методами математичної статистики.

Визначення закону розподілу за статистичними даними

Параметри складних систем складаються із множини елементів довільної природи. Цю множину називають статистичною сукупністю. Кількість елементів в статистичній сукупності називається об'ємом сукупності. Дійсно, в складних системах мають справу з обмеженою кількістю даних, тому дані і результати їх обробки завжди містять елемент ймовірності. Виникає задача - вказати методи збору і групування статистичних даних - параметрів складних систем за можливими типовими характерними рисами досліджуваних процесів. Ця задача вирішується згладжуванням чи вирівнюванням статистичних даних простими аналітичними залежностями.

Перевірка провідних статистичних гіпотез

При розв'язуванні даної задачі спеціальними методами перевіряються статистичні гіпотези відносно виду невідомого розподілу чи величини параметрів розподілу, вид якого відомий.

Знаходження невідомих параметрів розподілу і оцінка залежності випадкової величини від однієї чи декількох випадкових величин

Часто при аналізі показників складних систем визначають найбільш характерні параметри їх розподілу. Оскільки число значень показників в статистичній сукупності обмежене, то можна ставити питання тільки про знаходження наближених "оцінок" параметрів розподілу. З задачею пошуку наближених "оцінок" параметрів (числових характеристик) розподілу тісно пов'язана задача визначення їх точності і надійності. Визначення форми і тісноти зв'язку між випадковими величинами вирішує теорія кореляції.

Стисла історична довідка

Математична статистика виникла в XVII ст. і розвивалась паралельно з теорією ймовірностей. Подальший розвиток математичної статистики (друга половина XIX ст.) пов'язаний, в першу чергу. з прізвищами П.Л. Чебишева, А.А. Маркова, А.М. Ляпунова, а також К. Раусса, А. Кетле, Ф. Гальтона, К. Пірсона та іншими.

В XX ст. найбільш вагомий внесок в математичну статистику був зроблений радянськими математиками (В.І. Романовський, Е.Е. Слуцький, А.М. Колмогоров, Н.В. Смірнов), а також англійськими (Стьюдент, Р. Філер, К. Пірсон) і американськими (Ю. Нейман, А. Вальд) науковцями.

Вибірковий метод дослідження параметрів складних систем

При дослідженні параметрів складних систем широко застосовуються методи математичної статистики, оскільки вихідні дані отримують в результаті статистичних випробувань, тобто, вибірковим методом.

В загальній формі вибірковий метод полягає в наступному. Із деякої сукупності, яка включає всі об'єкти дослідження (генеральні сукупності), беруть n об'єктів. Ці об'єкти утворюють вибірку. Число n називається об'ємом вибірки. Число об'єктів генеральної сукупності називається об'ємом генеральної сукупності. Об'єкти, які утворюють вибірку, детально досліджуються. За результатами досліджень описують властивості, характеристики та ознаки генеральної сукупності. Наприклад, на заводі, який виготовляє аналого-цифрові автомати для систем управління літальних апаратів, необхідно організувати контроль механічної міцності автоматів. З цією метою автомати встановлюють на вібростенді і вимірюють частоту коливань, яка відповідає початку руйнування приладів (поява втомленості металу, обрив амортизаторів та інше).

Однак на заводі перевіряють не всі автомати, оскільки в цьому випадку затрималось би їх надходження до літальних апаратів. Відбирають, наприклад? два автомати із ста і випробовують на вібростенді. За механічною міцністю автоматів із вибірки судять про механічну міцність всієї генеральної сукупності аналого-цифрових автоматів.

Вибірковий метод широко використовується в системах управління якістю в різних технічних, економічних, медико-біологічних та демографічних дослідженнях. На перший погляд цей метод мало чим відрізняється від звичайного методу малих проб, що його використовують при аналізі речовини. Проте різниця тут є, і дуже істотна: при аналізі речовини попередньо відомо, що досліджувана нами ознака розподілена по всій масі речовини рівномірно і, отже, будь-яка мала проба є точною копією всієї сукупності речовини.

В вибірковому методі досліджувана ознака розподілена по генеральній сукупності нерівномірно, навіть характер цієї нерівномірності невідомий. Тому далеко не кожна вибірка достатньо відображає властивості генеральної сукупності. Припустимо, що необхідно перевірити успішність студентів одного курсу, а за вибірку взято групу відмінників. Неважко зрозуміти, яким перекрученим буде висновок про успішність студентів курсу,

В математичній статистиці методи формування вибірки називаються репрезентативними, якщо відібрана група достатньо повно характеризує генеральну сукупність. Репрезентативність вибірки може бути забезпечена тільки за умови формування вибіркової сукупності випадковим методом, інші способи вибірки будуть необ'єктивними, такими, що носять сліди побічних факторів. При включенні елементів в вибірку використовують таблиці випадкових чисел.

ЧАСТИНА 1

Статистична оцінка однієї випадкової величини

1.1. Статистичний розподіл (варіаційний ряд)

Для всебічної характеристики процесів та явищ, які проходять в складних системах, виявлення зв'язків та взаємовідношень між ними потрібно мати статистичні дані.

Збирання статистичних даних (статистичне спостереження) є першим етапом статистичного дослідження. Його мета – це реєстрація елементів спостереження. Зареєстровані елементи подають у вигляді таблиці з одним входом: в першому стовпці стоїть номер i-го досліду, а в другому - зареєстроване значення випадкової величини параметра, що вивчається. Прикладом оформлення результатів статистичного спостереження є таблиця 1. В цій таблиці параметр X_i – фактичний щоденний обсяг перевезень у вибраному об'єднанні: і- порядковий номер дня місяця.

Таблиця 1

Обсяг перевезення в об'єднанні за 30 днів, тис.тон.

i	X_i	i	X_i	i	X_i
1	126,3	11	118,6	21	109,3
2	122,0	12	143,9	22	118,4
3	107,4	13	113,4	23	107,4
4	121,5	14	119,8	24	141,9
5	122,5	15	132,0	25	105,7
6	110,3	16	141,9	26	121,5
7	118,6	17	132,4	27	118,6
8	128,3	18	105,6	28	108,3
9	132,8	19	109,8	29	105,0
10	135,9	20	113,0	30	132,4

Кожне окреме значення параметра, отримане в результаті *і-го* досліду, позначається X_i. Значення i називається варіантою, а ряд, утворений варіантами, – варіаційним рядом або рядом розподілу. Число, що показує скільки разів зустрічається кожна варіанта у варіаційному ряду, називається частотою (m_i).

При аналізі параметрів складних систем реєструється 100 варіант і більше. В цих випадках характеристики розподілу простіше та зручніше розраховувати шляхом групування варіант в певному інтервалі. При побудові таких інтервальних рядів використовують правила:

1) Число інтервалів N вибирається в залежності від числа спостережень n відповідно до даних:

n	$N-1$
40 - 100	7 – 9
100 – 150	8 – 12
500– 1000	10 – 16
1000- 10000	12 - 22

Число інтервалів N може бути визначено за формулою

$$N = 3 + E(3{,}322\lg(n)), \qquad (1)$$

де E – ціла частина числа $3{,}322\ lg(n)$.

2) Інтервали, як правило, вибирають однакові. Якщо розподіл нерівномірний, то в області максимальної концентрації результатів спостережень слід вибрати більш вузькі інтервали, які визначають за формулою: $\Delta X = (X_{max} - X_{min})/(N-1)$, (2)

де X_{min}, X_{max} – відповідно, максимальна та мінімальна варіанти.

При визначенні меж інтервалів рекомендується починати ряд зі значення, яке на *1/2* інтервалу менше X_{min}, та закінчити ряд значенням, яке перевищує X_{max} також на *1/2* інтервалу. Побудову інтервального варіаційного ряду починають з складання таблиці, в яку заносять інтервали, центри інтервалів та частоту варіант.

Приклад: в АСУТП на дільниці контролю встановлено автомат для виміру опору мікромодульних резисторів. Результати контролю партії мікромодульних резисторів СКПМ – *0,25 – 1,5 кОм* – в кількості *100 шт.* виведені на друк у вигляді таблиці 2.

Знаходимо X_{max} *=1,714 кОм* та X_{min} *=1,31 кОм*.

Кількість варіант в таблиці n = *100*, тому оптимальне число *N-1* може бути рівне *7,8,9*. Приймаємо *N-1 = 7*, звідки *N=8*.

Таблиця 2

1,521	1,638	1,568	1,512	1,430	1,472	1,423
1,568	1,547	1,493	1,459	1,547	1,393	1,462
1,447	1,560	1,475	1,468	1,502	1,557	1,368
1,324	1,568	1,384	1,467	1,542	1,419	1,525
1,515	1,556	1,547	1,376	1,510	1,454	1,314
1,435	1,310	1,387	1,541	1,440	1,547	1,522
1,392	1,521	1,636	1,375	1,617	1,565	1,441
1,494	1,506	1,619	1,608	1,567	1,471	1,426
1,524	1,384	1,569	1,597	1,553	1,431	1,330
1,482	1,556	1,577	1,503	1,497	1,418	1,575
1,465	1,714	1,506	1,468	1,465	1,405	1,553
1,446	1,492	1,563	1,396	1,505	1,513	1,418
1,383	1,706	1,548	1,522	1,528	1,486	1,474
1,613	1,494	1,613	1,491	1,467	1,523	1,548
1,450	1,455					

Інтервал визначаємо за формулою: $\Delta X = \frac{1,714 - 1,31}{7} = 0,058(кОм)$

Визначимо межі інтервального ряду:

Ліву: $X_{min} - \frac{\Delta X}{2} = 1,31 - \frac{0,058}{2} = 1,281(кОм)$.

Праву: $X_{max} + \frac{\Delta X}{2} = 1,714 + \frac{0,058}{2} = 1,743(кОм)$.

Для наочності статистичний розподіл оформляється у вигляді різних графіків, один з яких – гістограма. При побудові гістограми по осі абсцис відкладають інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис з ординатами рівними *а)* $\frac{m_i}{\Delta x}$, або *б)* m_i. У випадку *а)* площа *i-го* часткового прямокутника $\frac{m_i}{\Delta x}\Delta x = m_i$, (3)

тобто, збігається з частотою варіант, які увійшли в *i-ий* інтервал. Тому площа гістограми дорівнює *n* – сумі усіх частот (об'єму вибірки). У випадку *б)* сума всіх ординат дорівнює об'єму вибірки *n*. Якщо використовується варіаційний ряд відносно частот $P_i = \frac{m_i}{n}$, площа, що відповідає цьому ряду гістограми, дорівнює одиниці. При побудові гістограми масштаб вибирають таким, щоб максимальна ордината складала *5/8* основи.

На рис. 1 зображена гістограма частот розподілу

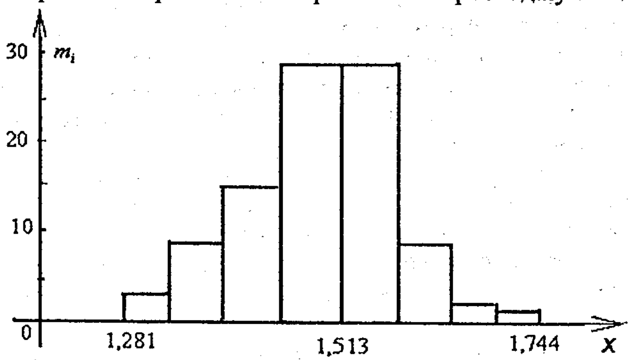


Рис. 1

За даними таблиці 2 будуємо ряд розподілу (таблиця 3).

Таблиця 3

Розподіл значень опору мікромодульних резисторів.

i	Інтервали, *(кОм)*	*Центр інтервалу*	Частота m_i
1	1,281 - 1,388	1,310	4
2	1,399 - 1,396	1,368	9
3	1,367 - 1,454	1,426	15
4	1,455 - 1,512	1,484	29
5	1,513 - 1,570	1,542	29
6	1,571 - 1,628	1,600	9
7	1,629 - 1,686	1,658	3
8	1,687 - 1,744	1,716	2

При обробці результатів контролю на гістограму рекомендують наносити номінальне значення досліджуваного параметра та межі допустимих значень.

1.2. Числові характеристики статистичного розподілу

Основними параметрами розподілу випадкової величини є такі числові характеристики, як математичне сподівання, дисперсія, початкові та центральні моменти різних порядків. Кожній числовій характеристиці випадкової величини відповідає її статичний аналог – оцінка числової характеристики. Ці оцінки використовують як наближені значення параметрів розподілу випадкової величини, що вивчається. Оцінки числових характеристик, знайдені за вибірковими даними ,– теж випадкові величини.

Для того, щоб статистичні оцінки давали "добрі" наближення параметрів, що оцінюються, вони повинні бути незсуненими, ефективними та конзистентними. Незсуненою називають статистичну оцінку, математичне сподівання якої дорівнює параметру, що оцінюється. Ефективною називають статистичну оцінку, яка при даному об'ємі вибірки n має найменш можливу дисперсію. Конзистентною називають статистичну оцінку, яка при $n \to \infty$ прямує до параметра, що оцінюється. В математичній статистиці доведено, що вимоги незсуненості, ефективності та конзистентності задовольняють такі основні вибіркові характеристики, як вибіркова середня $\overline{X}$ та вибіркова дисперсія S^2.

а) Для згрупованих даних вибіркові середні та дисперсія обчислюються за формулами:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{1}^{N} m_i x_i}{n}; \qquad (4)$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2}{n} - \overline{X}^2\right)\frac{n}{n-1}. \qquad (5)$$

б) Для незгрупованих даних:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{1}^{N} x_i}{n}; \qquad (6)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{N}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}}. \qquad (7)$$

Оцінки, розраховані за формулами (4), (5), називають точковими. Щоб спростити досить важкі розрахунки, вихідні варіанти замінюють умовними:

$$U_i = \frac{x_i - C_i}{\Delta x}, \qquad (8)$$

де C_i – умовний нуль (новий початок відліку).

Умовні варіанти завжди цілі числа. Обчислення найпростіші, якщо за умовний нуль взяти варіанту, розташовану приблизно в середині варіаційного ряду (часто така варіанта має найбільшу частоту). Вибіркову середню $\overline{X}$ та вибіркову дисперсію S^2 в умовних варіантах обчислюють за формулами:

$$\overline{X} = M_1 \Delta x + C_x; \qquad (9)$$

$$S^2 = (M_2 - M_1^2)\Delta x^2, \qquad (10)$$

де $$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i U_i}{n}; \quad M_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i U_i^2}{n}.$$

При обчисленні вибіркової середньої та дисперсії за формулами (9) і (10) доцільно користуватися розрахунковою таблицею, що складається так:

1) в перший, другий та третій стовпці записують статистичний розподіл;

2) в четвертий стовпець записують умовні варіанти, за умовний нуль вибирають варіанту, розташовану приблизно в середині варіаційного ряду; в клітинці рядка, що вміщує умовний нуль, пишуть 0; у клітинках над нулем пишуть послідовно : -1, -2, -3, і т.д., під нулем: - 1,2,3;

3) множать частоти на умовні варіанти та записують їх добутки $m_i U_i$ у п'ятий стовпець, їх суму $\sum_{i=1}^{N} m_i U_i$ поміщають в нижню клітинку стовпця;

4) множать частоти на квадрати умовних варіант та записують їх добутком $m_i U_i^2$ у шостий стовпець, їх суму $\sum_{i=1}^{N} m_i U_i^2$ поміщають в нижню клітинку стовпця;

5) множать частоти на квадрати умовних варіант, збільшених на 1, та записують добутки $m_i(U_i+1)^2$ у сьомий контрольний стовпець; їх суму $\sum_{i=1}^{N} m_i(U_i+1)^2$ поміщають в нижню клітинку стовпця.

Сьомий стовпець розрахункової таблиці служить контрольним, якщо сума $\sum_{i=1}^{N} m_i(U_i+1)^2$ дорівнює сумі $\sum_{i=1}^{N} m_i U_i^2 + 2\sum_{1}^{N} m_i U_i + n$ (як і повинно бути у відповідності з тотожністю $\sum_{i=1}^{N} m_i(U_i+1)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i U_i^2 + 2\sum_{1}^{N} m_i U_i + n$), то обчислення зроблене правильно.

Після того, як розрахункова таблиця складена і перевірена, обчислюють умовні моменти

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i U_i}{n} \quad ; \qquad M_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i U_i^2}{n},$$

а потім вибіркову середню $\overline{X}$ та дисперсію S^2 за формулами (9), (10).

Приклад: обчислити вибіркову середню і дисперсію за даними таблиці 3.

Розв'язування.

Складемо розрахункову таблицю 4.

1) в перший стовпець записуємо інтервали розподілу;

2) в другий стовпець записуємо центри інтервалів x_i

3) в третій стовпець записуємо частоти; суму частот (*n=100*) розміщуємо в нижній клітинці стовпця;

4) за умовний нуль C_x вибираємо варіанту, розміщену приблизно в центрі варіаційного ряду $m_4=29$. В клітинці четвертого стовпця, який належить рядку, що включає в себе умовний нуль, пишемо 0, над нулем записуємо послідовно -1, -2, -3, а під нулем - 1, 2,3,4.

5) добуток частот на умовні варіанти записуємо в п'ятий стовпець, їх суму (19) розміщуємо в нижню клітинку стовпця;

6) добуток частот на квадрати умовних варіант записуємо в шостий стовпець, суму чисел стовпця (211) розміщуємо в нижню клітинку стовпця;

7) добуток частот на квадрати умовних варіант, збільшених на 1, записуємо в сьомий контрольний стовпець, суму (349) чисел стовпця розміщуємо в нижню клітинку стовпця.

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{N=8} m_i U_i^2 + 2\sum_{1}^{N} m_i U_i + n = 211 + 2\cdot 19 + 100 = 349 \quad \sum_{i=1}^{N} m_i(U_i+1)^2 = 349$$

Обчислення здійснені правильно. Обчислюємо умовні моменти першого та другого порядків:

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} m_i U_i = \frac{1}{100}\cdot 19 = 0{,}19; \; M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} m_i U_i^2 = \frac{1}{100}\cdot 211 = 2{,}11$$

Обчислюємо шукані вибіркові середню та дисперсію:

$$\overline{X} = M_1\Delta x + C_v = 0{,}19\cdot 0{,}058 + 1{,}484 = 1{,}495(кОм)$$

$$S^2 = (M_2 - M_1^2)(\Delta x)^2 = (2{,}11 - (0{,}19)^2)\cdot(0{,}058)^2 = 0{,}007(кОм)$$

Середньоквадратичне відхилення $\sqrt{S^2} = \sqrt{0,007} = 0,084(кОм)$

Таблиця 4

Розрахунок числових характеристик

№	Інтервали $x_{i-1} - x_i$	Центри інтервалів x_i	m_i	U_i	m_iU_i	$m_iU_i^2$	$m_i(U_i+1)^2$
1	1,281 - 1,336	1,310	4	-3	-12	36	16
2	1,337 - 1,396	1,368	9	-2	-18	36	9
3	1,397 - 1,454	1,426	15	-1	-15	15	0
4	1,455 - 1,512	1,484	29	0	0	0	29
5	1,513 - 1,57	1,542	29	1	29	29	116
6	1,571 - 1,628	1,600	9	2	18	36	81
7	1,629 - 1,686	1,658	3	3	9	27	48
8	1,687 - 1,744	1,716	2	4	8	32	50
	Сума	—	100	---	19	211	349

Для побудови теоретичної кривої розподілу обчислюють теоретичні (вирівнюючи) частоти за формулою:

$$m_i' = nP_i\ , \tag{11}$$

де P_i – ймовірність попадання випадкової величини x в *і-ий* інтервал, обчислений за умови, що x має передбачений розподіл.

Ця ймовірність визначається як

$$P_i = P(\alpha_i < X < \beta_i) = F(\beta_i) - F(\alpha_i) \tag{12}$$

де α_i, β_i, відповідно, ліва та права межі інтервалу;

$F(\alpha_i), F(\beta_i)$ - значення функції розподілу випадкової величини в цих межах.

Якщо відома щільність ймовірності *f(x)* для теоретичного закону розподілу, ймовірність P_i може бути визначена за формулою:

$$P_i = \Delta x f(x_i)\ . \tag{13}$$

Підставивши (12), (13) в (11), отримаємо співвідношення для визначення теоретичних частот:

$$m_i' = n(P(\alpha_i < X < \beta_i)) = n(F(\beta_i) - F(\alpha_i))\ . \tag{14}$$

$$m_i' = n\Delta x f(x_i)\ . \tag{15}$$

Якщо за теоретичний розподіл взято нормальний розподіл, для співвідношень (14), (15) справедливі рівності:

$$m_i' = n(\Phi(Z_{\beta_i}) - \Phi(Z_{\alpha_i}))\ , \tag{16}$$

$$m_i' = \frac{n\Delta x}{S}\varphi(z_i)\ , \tag{17}$$

де $Z_{\alpha_i} = \frac{\alpha_i - \overline{X}}{S}$; $Z_{\beta_i} = \frac{\beta_i - \overline{X}}{S}$; $z_i = \frac{x_i - \overline{X}}{S}$ - нормовані змінні; x_i – центр *i-го* інтервалу;

$\Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - табульована функція Лапласа, значення якої наведені в таблиці додатків (1),

$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ - табульована функція, значення якої приведені в таблиці додатків (2).

Приклад: на основі даних таблиці 3, обчислити теоретичні частоти.

Розв'язування.

Складемо таблицю 5:

1) перші чотири стовпці – дані таблиці 3;

2) в п'ятому стовпці запишемо значення стандартизованої змінної: $z_i = \frac{x_i - \overline{X}}{S}$;

3) за таблицею додатків визначимо значення функції $\varphi(z_i)$ і помістимо їх в шостий стовпець;

4) обчислимо значення: $\frac{n\Delta x}{S} = \frac{100 \cdot 0{,}058}{0{,}084} = 69{,}05$;

5) обчислимо теоретичні частоти n за формулою $m_i' = \varphi(Z_i)\frac{n\Delta x}{S}$, результати запишемо в сьомий стовпець;

6) округлимо значення m_i' до цілого числа, результати запишемо в восьмий стовпець;

7) округлені значення теоретичних частот нанесемо в масштабі на гістограму і з'єднаємо плавною кривою (рис. 2)

Таблиця 5

Розрахунок теоретичних частот

i	Інтервали	Центр інтервалу	m_i	$z_i = \frac{x_i - \overline{X}}{S}$	$\varphi(z_i)$	m_i'	$m_{i,окр}'$
1	1,281 - 1,336	1,310	4	2,202	0,0355	2,45	2
2	1,337 - 1,396	1,368	9	-1,511	0,1276	8,82	9
3	1,397 - 1,454	1,426	15	-0,821	0,2850	19,68	20
4	1,455 - 1,512	1,484	29	-0,310	0,3802	27,39	27
5	1,513 - 1,570	1,542	29	0,559	0,3410	23,54	24
6	1,571 - 1,628	1,600	9	1,250	0,1826	12, 61	13
7	1,629 - 1,686	1,658	3	1,940	0,0608	4,2	4
8	1,687 - 1,744	1,716	2	2,630	0,0126	0,87	1

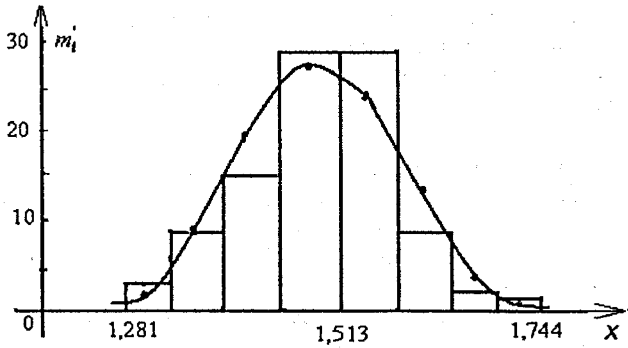


Рис. 2

При перевірці відповідності емпіричного та теоретичного розподілів параметрів складних систем використовують показники якості продукції та інші техніко-економічні показники, що включаються в нормативно-технічну документацію згідно з ДСТУ.

1.3. Перевірка правдоподібності статистичних гіпотез

При дослідженні параметрів складних систем за вибірковим методом одним із основних завдань статистичного аналізу є оцінка результатів розрахунку теоретичного розподілу. Цю оцінку отримують перевіркою гіпотез, висунутих дослідником. Наприклад, при дослідженні опору мікромодульних резисторів за даними таблиці 5 можна припустити, що значення цього параметра мають нормальний закон розподілу. В цій гіпотезі мова йде і про вигляд розподілу. Можна висунути гіпотезу про величину невідомого параметра розподілу (наприклад, математичного сподівання $M(x)$, дисперсії $D(x)$ і т.д.).

Наведені гіпотези є статистичними. Поряд з висуненою гіпотезою розглядають гіпотезу, яка суперечить їй. Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу чи про параметри відомих розподілів.

Якщо висунена гіпотеза відкидається, то справедлива гіпотеза, суперечлива їй. Висунену гіпотезу називають нульовою і позначають H_0. Гіпотезу, яка суперечить нульовій, називають конкуруючою (альтернативною) і позначають H_1. Наприклад, якщо нульова гіпотеза H_0 - математичне сподівання нормального розподілу $m(x)$ дорівнює вибірковій середній $\overline{X}$, то конкуруюча гіпотеза H_1 – математичне сподівання нормального розподілу $m(x)$ не дорівнює середній $\overline{X}$. Коротко це записується так: $H_0:\ m(x)=\overline{X};\ \ H_1: m(x)\neq\overline{X}$.

Нейман та Пірсон показали, що, приймаючи чи відхиляючи гіпотезу, можна зробити помилки двох типів. Помилка першого типу полягає в тому, що відхиляється гіпотеза H_0, яка в дійсності правильна. Ймовірність такої помилки називають ризиком постачальника і позначають α. Помилка другого типу полягає в тому, що приймається гіпотеза H_0, коли в дійсності правильна гіпотеза H_1. Ймовірність помилки другого типу позначають β.

Нульову гіпотезу перевіряють за допомогою спеціально підібраної випадкової величини, точний чи наближений розподіл якої відомий. Цю величину позначають K і називають статистичним критерієм (або критерієм). Для перевірки нульової гіпотези за даними вибірки обчислюють значення, які входять в критерій і отримують спостережуване значення критерію.

Критична область. Область прийняття гіпотези. Критичні точки.

Після підбору критерію K множина всіх його можливих значень розбивається на дві підмножини: одна з них має значення критерію, при якій нульова гіпотеза відхиляється (критична область), друга - при якій вона приймається. Сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають, називають областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень). Перевірка статистичних гіпотез полягає в тому, що: а) гіпотезу приймають, якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези; б) гіпотезу відхиляють, якщо спостережуване значення критерію належить критичній області.

Критерій K - випадкова величина, всі можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(-\infty;\infty)$ чи $(0;\infty)$. Отже, критична область і область прийняття гіпотези також є інтервалами. Існують точки $K_{кр}$, які розділяють критичну область прийняття гіпотези. Ці точки називаються критичними точками. В залежності від величини спостережуваного критерію розрізняють односторонню (правосторонню чи лівосторонню) та двосторонню критичні області (рис. 3).

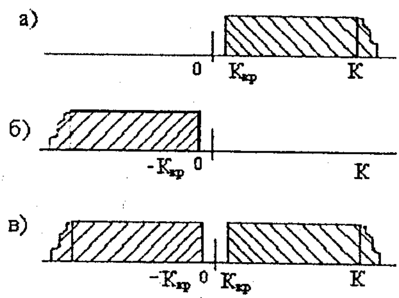


Рис. 3. Критичні області (заштриховані)

Правостороння - це критична область, яка визначається нерівністю $K > K_{kp}$, де $K_{kp}>0$ (рис. 3,а).

Лівостороння - це критична область, яка визначається нерівністю $K > K_{kp}$, де K_{kp}<0 (рис. 3,б).

Двостороння - критична область, що визначається нерівностями *K< K₁: K>K₂, де K₂>K₁*. Якщо критичні точки симетричні відносно нуля, то двостороння критична область визначається нерівностями $K < -K_{kp}$ і $K > K_{kp}$ чи рівносильною нерівністю $|K| > K_{кр}$ (рис. 3,в).

Оскільки критерій K - одновимірна випадкова величина, то нерівності, що визначають положення критичних точок, за умови справедливості нульової гіпотези виконуються з дуже малою ймовірністю. Цю ймовірність називають рівнем значущості α, тобто

$$P(K>K_{кр}) = \alpha \tag{18}$$

Критерій згоди А. М. Колмогорова

В критерії згоди А.М.Колмогорова мірою розбіжності між значеннями емпіричної $F^*(x)$ і теоретичної $F(x)$ функцій розподілу є максимум модуля їх різниць:

$$D_n = \max|F*(x) - F(x)|\sqrt{n}. \tag{19}$$

D_n випадкова величина з законом розподілу:

$$F(D_n) = P(D_n < \lambda) = \sum_{k=\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} \ .$$

Обчислення за критерієм А.М. Колмогорова рекомендується здійснювати за такою методикою:

1. Знайти значення статистичної функції розподілу, що відповідають центрам x_i інтервалів варіаційного ряду.

2. Обчислити значення теоретичної функції розподілу за відповідними значеннями x_i і z_i.

3. Знайти абсолютні значення різниць між значеннями статистичної і теоретичної функцій розподілу при однакових значеннях x_i, а потім вибрати найбільшу з них: $D_n = \max|F^*(x) - F(x)|$.

4. Обчислити наявні значення критерію згоди $(K_{kp} = \lambda), \lambda = D\sqrt{n}$, де n - об'єм вибірки.

5. Задати рівень значущості α.

6. Для вибраного рівня з таблиці квантилів розподілу А.М. Колмогорова $\lambda_{1-\alpha}$ визначити критичне значення $\lambda_{kp} = \lambda_{1-\alpha}$.

7. Порівняти λ та λ_{kp};

а) якщо обчислене в п.4 значення $\lambda < \lambda_{kp}$, нульова гіпотеза вважається справедливою;

б) якщо $\lambda \geq \lambda_{kp}$ - відхилити нульову гіпотезу

Приклад. Перевірити за критерієм згоди А.М. Колмогорова, чи відповідають дані контролю опору мікромодульних резисторів нормальному закону розподілення цього параметра. Для зручності складемо таблицю 6:

1. Перші три стовпці переносимо з таблиці 5;

2. В четвертий стовпець запишемо значення m_i' (шостий стовпець з таблиці 5);

3. Обчислимо накопичені частоти (емпіричні та теоретичні), отримані послідовним додаванням емпіричних m_i та теоретичних m_i' частот, розташованих відповідно в клітинках третього та четвертого стовпців.

4. Обчислюємо значення емпіричної $F^*(x)$ та теоретичної $F(x)$ функцій розподілу для центрів інтервалів x_i:

$$F(x) = \frac{m_{i\,накоп}}{n}\ ; \qquad F^*(x) = \frac{m'_{i\,накоп}}{n}.$$

Знаходимо $|F^*(x) - F(x)|$ та запишемо їх в сьомий стовпець;

5. Визначимо $D_n = \max|F^*(x) - F(x)| = 0{,}04$

6. Обчислимо значення спостережуваного критерію згоди, $\lambda = D\sqrt{n} = 0{,}04 \cdot 10 = 0{,}4$.

7. Задамо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$;

8. Для вибраного рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ знаходимо критичну точку $\lambda_{kp} = \lambda_{1-\alpha} = \lambda_{1-0.05} = 1{,}36$

9. Порівнюючи λ з $\lambda_{кр}$, маємо $\lambda < \lambda_{kp}$, оскільки спостережуване значення критерію згоди менше його критичного значення, що відповідає рівню значущості α=*0,05*, то гіпотезу приймаємо.

Таблиця 6

Перевірка гіпотез про закон розподілу за критерієм згоди А.М. Колмогорова

Інтервал	Центр інтервалу	m_i	m_i'	$m_{i\ накоп}$	$m'_{i\ накоп}$	$\vert F^*(x_i) - F(x_i)\vert$
1,281-1,336	1,310	4	2	4	2	0,02
1,337-1,396	1,368	9	9	13	11	0,02
1,397-1,454	1,426	15	20	28	31	0,03
1,455-1,512	1,484	29	27	57	58	0,01
1,513-1570	1,542	29	24	86	82	0,04
1,571-1,628	1,600	9	13	95	95	0,00
1,629-1,686	1,658	3	4	98	99	0,01
1,687-1,744	1,716	2	1	100	100	0,00

Висновок: дані контролю опору мікромодульних резисторів, наведені в табл.2, узгоджуються з нормальним законом розподілу цього параметра.

Критерій згоди Пірсона (χ^2)

В критерії згоди Пірсона за міру розбіжності статистичного та теоретичного розподілів приймається величина χ^2 (хі - квадрат):

$$\chi^2 = \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}. \qquad (20)$$

Критерій розраховується за такою методикою:

1. За результатами спостережень вибирають вид теоретичного закону розподілу і визначають його параметри.

2. За вибраним законом розподілу обчислюють вид теоретичного закону розподілу і визначають його параметри.

3. Обчислюють χ^2 за формулою (20).

4. Визначають число ступенів вільності f як число інтервалів мінус кількість накладених зв'язків l: $f = K- l$.

5. Задають рівень значущості α.

6. Для вибраного рівня і числа ступенів вільності із таблиці квантилів розподілу Пірсона знаходять критичну величину $\chi^2_{kp} = \chi^2_{1-\alpha}$.

7. Порівнюють χ^2, обчислене в п.3., з χ^2_{kp};

а) якщо $\chi^2_{kp} < \chi^2_{1-\alpha}$ - емпіричні дані узгоджуються з вибраним теоретичним законом розподілу параметра x;

б) якщо $\chi^2_{kp} > \chi^2_{1-\alpha}$ то параметри x_i мають розподіл, що відрізняється від вибраного теоретичного.

Приклад. Користуючись критерієм згоди Пірсона, визначити чи узгоджуються дані таблиці 2 з нормальним законом розподілу цього параметра.

Розв'язування. Розрахунки виконаємо за поданою нижче методикою та складемо таблицю 7.

1. Відповідні емпіричні і теоретичні частоти розміщуємо в першому і другому стовпцях. Щоб не було малочисельних груп (менше 8 - 10 спостережень), дві початкові і дві останні емпіричні і теоретичні частоти об'єднуємо в самостійні групи. Після цього буде лише 5 груп.

2. Обчислимо $m_i - m_i'$ і результат запишемо в третій стовпець.

3. Значення відношення запишемо в четвертий стовпець, внизу запишемо його суму, що дорівнює χ^2.

4. Задамось рівнем значущості α=0,05; $p=1-\alpha=0,95$.

5. Визначимо число ступенів вільності $f=K-l$. Емпіричні частоти використовують для отриманих двох параметрів теоретичного нормального розподілу - математичного сподівання та дисперсії. За перший параметр взята вибіркова середня арифметична $\overline{X}= 1,495$ *кОм*, за другий - вибіркова дисперсія $S^2=0,007$ *(кОм)*^{2}. Крім того, сума емпіричних частот дорівнює об'єму вибірки $\sum_{i=1}^{N} m_i = n$. Тоді l=3, число

ступенів вільності $f=5-3=2$.

6. За рівнем значущості $\alpha=0{,}05$ і числом ступенів вільності $f=2$ з таблиці додатків знаходимо критичне значення $\chi^2_{kp}=\chi^2_{1-\alpha}=6{,}0$.

7. Порівнюючи χ^2 з χ^2_{kp}, маємо $3{,}69<6{,}0$, тобто, спостережуване значення критерію згоди менше його критичного значення, що відповідає рівню значущості $\alpha=0{,}05, (p=0{,}95)$.

Таблиця 7

Розрахунок критерію згоди Пірсона χ^2

I	m_i	m_i'	m_i-m_i'	$\frac{(m_i-m_i')^2}{m_i'}$
1	13	11	2	0,36
2	15	20	-5	1,25
3	29	27	2	0,15
4	29	24	5	1,04
5	14	18	-4	0,89
Сума	100	100		$\chi^2=3{,}69$

Висновок: відносно нульової гіпотези: дані контролю опору мікромодульних резисторів, наведені в таблиці 2, відповідають нормальному закону розподілу.

1.4. Визначення надійних інтервалів для числових характеристик

При малому об'ємі вибірки або для прогнозування точкової оцінки $\overline{X}$ і S^2 використовують інтервальну оцінку, яка визначається двома числами - кінцями інтервалу.

Нехай x - випадкова величина з функцією розподілу $F(x,Q)$ де Q - невідомий параметр. З генеральної сукупності вибирають n значень $x_1,x_2,\dots,x_n$, за якими знаходять точкову оцінку параметра Q: $\overline{Q}_n=f\,(x_1 \dots x_n)$

Задамо $\gamma\in(0,1)$, яке наближається до 1, $p=1-\alpha$, нехай існують такі функції $\overline{Q}_n^{(1)}=f_1(x_1 \dots x_n)$ та $\overline{Q}_n^{(2)}=f_2(x_1 \dots x_n)$ що $\gamma(\overline{Q_1}<Q<\overline{Q_2})=1-\alpha$ одне і те ж для всіх значень невідомого параметра Q.

В цьому випадку $(\overline{Q}_1,\overline{Q}_2)$ називають надійним інтервалом, $\gamma=1-\alpha$ - надійною ймовірністю, α - рівнем значущості.

Надійний інтервал для генеральної середньої

Визначення надійного інтервалу для оцінки генеральної середньої здійснюється за такою методикою:

1. За даними вибірки об'єму n визначимо вибіркову середню за формулою (9).

2. Визначимо значення S^2 за формулою (10).

3. Задамо надійну ймовірність γ.

4. За заданими значеннями γ і $f=n-1$ з таблиці додатків знаходимо значення t_γ квантилів розподілу Стьюдента.

5. Надійний інтервал для генеральної середньої знайдемо за формулами:

$$a_н = \overline{X} - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}, \tag{21}$$

$$a_в = \overline{X} + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}. \tag{22}$$

Нижня $a_н$ і верхня $a_в$ надійні межі, які утворюють надійний інтервал, що покриває невідомий параметр a з надійною ймовірністю γ.

Приклад. Використовуючи дані п.1 і дані таблиці 2, знайти надійний інтервал для математичного сподівання з надійною ймовірністю $\gamma = 0,95$.

Розв'язування. Розрахунки виконаємо за наведеною нижче методикою.

1. Обчислимо вибіркову середню $\overline{X}$ = 1,495.

2. Знайдемо вибіркову характеристику S = 0,084.

3. За умовою γ = 0,95.

4. Визначаємо $f=n-1=100-1=99$.

5. Знаходимо значення $t_\gamma = t_{0.95}$=1,984 (таблиця додатків).

6. За формулами (21) і (22) знаходимо $a_н$=1,48, $a_в$=1,50. Нижня $a_н$=1,48 і верхня $a_в$=1,50 надійні межі утворюють надійний інтервал з надійною ймовірністю γ=0,95.

Надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення

Визначення надійного інтервалу для середнього квадратичного відхилення здійснюється за такою методикою:

1. Задамо надійну ймовірність γ та обчислимо вибіркове середнє квадратичне відхилення S за формулою (10).

2. За заданими значеннями γ і n з таблиць додатків 6 знайдемо q.

3. Надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення знаходимо за формулою

$$(S(1-q); S(1+q)). \tag{23}$$

Отриманий надійний інтервал покриває невідомий параметр σ з надійною ймовірністю γ.

Приклад. Для даних прикладу таблиці 2 знайти надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення S за надійною ймовірністю γ= 0,95.

Розв'язування. Обчислення виконаємо за вказаною нижче методикою:

Обчислюємо $\overline{X}$ = 1,495; обчислюємо S = 0,084; за умовою γ = 0,95 значення q визначимо за таблицею додатків q = 0,143; обчислюємо надійний інтервал: $(S(1-q);S(1+q))$, тобто (0,084(1-0,143);0,084(1+0,143)) отже, (0,0719;0,096). Таким чином, надійний інтервал покриває невідомий параметр σ з ймовірністю $\gamma = 0,95$.

ЧАСТИНА 2
Лінійна однофакторна регресійна модель

2.1. Поняття однофакторної регресії

В першій частині розглядались статистичні оцінки однієї випадкової величини. Такі випадкові величини називають скалярними. При математичному моделюванні складних систем використовують векторні випадкові величини, або випадкові вектори.

Назвемо випадковим вектором довільну впорядковану послідовність скалярних випадкових величин. Наприклад, математичним аналогом складної системи є випадковий вектор, утворений векторами вхідних сигналів X та вихідних сигналів Y. В свою чергу вектор X може мати сукупність m скалярних величин $\{X_1,...,X_n\}$. Стосовно системи управління підприємством складовими вектора X можуть бути чисельність працюючих, вартість виробничих фондів, рівень технічного оснащення та ін. Складові вектора Y у цьому випадку - економічна ефективність, продуктивність, прибуток тощо.

Складові z_1, z_2, ... z_m m- вимірного випадкового вектора Z називають його координатами.

Розглянемо в загальному вигляді проблему статистичного моделювання найпростішої системи: нехай на вхід системи надходить сигнал X - неперервна випадкова величина. Система за деяким алгоритмом A перетворює вхідний сигнал X у вихідний сигнал Y (рис. 1) - неперервну випадкову величину.

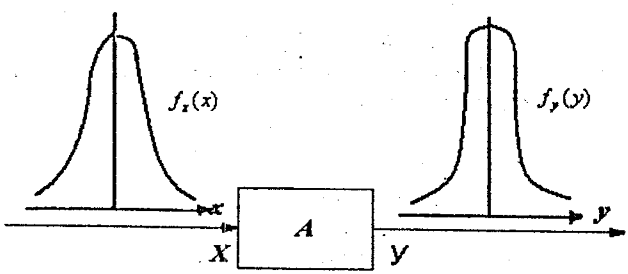


Рис. 1. Схема перетворення сигналів у складній системі

Повною характеристикою випадкових величин X і $У$ є закони розподілу ймовірностей, що їх задають для визначеності щільностями розподілу $f_x(x)$ і $f_y(y)$. Із структурної моделі системи (рис. 1) видно, що складна система перетворює щільність $f_x(x)$ у щільність $f_y(y)$ за алгоритмом: $f_y(Y) = A\{f_x(X)\}$. (1)

Математична сутність побудови математичної моделі системи: знайти формулу для алгоритму *A*, описану загальним співвідношенням (1).

З теореми добутку щільностей ймовірностей маємо:

$$f(Z) = f(X,Y) = f_x(X) f_x(Y/X) = f_y(Y) f_y(X/Y), \tag{2}$$

де $z = z\,(x,y)$, (3)

$f_x(X)$ - умовна щільність ймовірності величини *Y* при умові, що величина *X* приймає значення $X = x$;

$f_y(y)$ - умовна щільність ймовірності величини *X* при умові, що величина *Y* приймає значення $Y = y$;

$f(z)=f(x,y)$ - щільність ймовірностей випадкового вектора $Z=(X;Y)$.

Зіставляючи праву і ліву частини співвідношення (2), знаходимо

$$f_y(Y) = \frac{f_x(Y/X)}{f_y(X/Y)} f_x(X). \tag{4}$$

Формула (4) називається формулою Бейєса для щільності ймовірностей. З (1) та (4) видно, що алгоритм *A* - це добуток $f_x(X)$ щільності ймовірності величини *X* на відношення умовних щільностей ймовірності величин *Y* і *X*. Таким чином, щоб знайти щільність розподілу величини *Y*, необхідно знати крім щільності розподілу величини, ще й умовні щільності розподілу $f_x(X/Y)$ і $f_y(Y/X)$. Геометрична інтерпретація отриманого алгоритму показана на рисунку 2. На цьому рисунку зображено сукупність двох випадкових величин *X* і *Y* випадкового вектора *Z*.

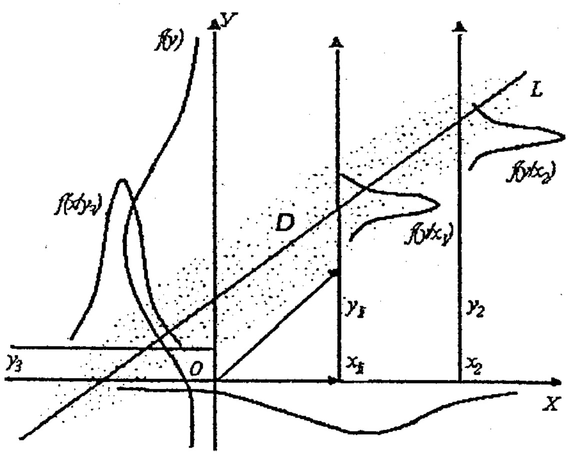


Рис. 2. Співвідношення між випадковими величинами *X* і *Y*

Область *D* (сукупність випадкових значень вектора *Z*) - це область визначення його щільності розподілу $f(Z)$, яка характеризується загальною тенденцією: точки області згруповані відносно лінії L.

Співвідношення між величинами X і Y полягає в даному випадку в тому, що кожному значенню аргументу X відповідає не одне, а нескінченна множина значень Y, яка визначається умовною щільністю розподілу ймовірностей $f_x(Y/X)$. Аналогічне співвідношення між Y і X. Умовні щільності розподілу $f_x(Y/X)$ і $f_y(X/Y)$ мають відповідні числові характеристики: умовні математичні сподівання, дисперсії та моменти вищих порядків. У зв'язку зі складністю визначення в реальних умовах умовної щільності розподілу і моментів вище другого порядку при моделюванні складних систем, в основному, застосовують умовне математичне сподівання $M[Y/X]$ величини Y, коли величина X приймає значення $X = x$, дисперсію $D\delta$; випадкове відхилення $\delta = Y - M[Y/X]$ і деякі інші числові характеристики.

Умовне математичне сподівання $M[Y/X]$, що дорівнює

$$M[Y/X] = \int_{-\infty}^{\infty} Yf_x(Y/X)dy, \tag{5}$$

є геометричним місцем точок (лінія L, рис. 2) умовних математичних сподівань величини Y за умовою $X = x$. Ця величина - функція від X

$$M[Y/X] = \varphi(X), \tag{6}$$

яка називається в теорії ймовірностей регресією Y на X. Аналогічно визначається X на Y:

$$M[Y/X] = \varphi(Y). \tag{7}$$

Регресія - менш повна характеристика випадкового вектора **Z**, однак, оскільки вона описує зміни вихідного параметра в середньому, її часто цілком досить. В той же час побудова і дослідження регресійних моделей значно простіше.

Таким чином, на першому етапі проблема побудови статистичної моделі найпростішої системи полягає в знаходженні рівняння (6) умовного математичного сподівання.

Оскільки вигляд рівняння регресії (6) невідомий, його необхідно отримати або на основі будь-яких загальних законів, які описують взаємодію величин X і Y, або скориставшись відомою із математичного аналізу теоремою Вейєрштрасса. Згідно з цією теоремою будь-яку неперервну функцію можна показати на відрізку $[a,;b]$ з заданою точністю полінома

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \tag{8}$$

де a_k - постійні коефіцієнти.

Отже, нехай вигляд рівняння регресії відомий, тобто

$$M[Y/X] = \varphi(a_k, x), \tag{9}$$

де a_k - невідомі параметри моделі - постійні величини.

Параметри a_k слід визначити так, щоб модель (9) якомога точніше описувала процес, що вивчається.

Одна з характеристик точності моделі – дисперсія $D_\delta = M[Y - \varphi(a_k, x))^2]$, відхилення $\delta = Y - \varphi(a_k, x)$.

В регресійному аналізі дисперсія D_δ використовується як основний критерій, з умови мінімуму якого знаходять параметри. Математично задача визначення коефіцієнтів формулюється так: знайти коефіцієнти математичної моделі (9), які забезпечують мінімум дисперсії

$$D_\delta = M[Y - \varphi(a_k, x))^2] \Rightarrow \min .$$

Диференціюючи останнє співвідношення за a_k і прирівнюючи до 0 частинні похідні, отримуємо в загальному вигляді систему рівнянь, розв'язок яких - шукані коефіцієнти

$$\begin{gathered}\frac{\partial D_\delta}{\partial a_k} = -2M[Y - \varphi(a_k, x)]\frac{\partial \varphi(a_k, x)}{\partial a_k} = 0 \Rightarrow \\ M\left[\frac{\partial \varphi(a_k, x)}{\partial a_k}\varphi(a_k, x)\right] = M\left[Y\frac{\partial \varphi(a_k, x)}{\partial a_k}\right] \quad .\end{gathered} \qquad (10)$$

Можна показати, що отриманий розв'язок є необхідною і достатньою умовою мінімуму дисперсії D_δ.

Якщо, крім того, відхилення δ має нормальний розподіл з постійною дисперсією, а значення $\delta(X_i), \delta(X_p)$ при $X_i \neq X_p$ - невідомі випадкові величини, розв'язання останньої системи забезпечує незміщена, конзистентна та ефективна оцінка параметрів a_k. Саме на цих припущеннях і будується сучасна теорія регресійного аналізу, яка є теоретичною базою статистичного моделювання складних систем.

2.2. Точкові оцінки лінійної однофакторної регресійної моделі

Статистичні аналоги - оцінка коефіцієнта кореляції R і коефіцієнтів регресії a_0, a_1 - визначаються за результатами спостережень параметрів X і Y складної системи. Задача оцінювання регресії полягає в наступному.

Нехай на основі вивчення природи взаємозв'язку параметрів X, Y можна припустити, що випадкова величина Y "у середньому" залежить від невипадкового аргументу, тобто

$$M[Y / X] = \alpha_0 + \alpha_1 x . \qquad (11)$$

Випадковість параметра Y пояснюється наявністю помилок спостережень і завад, впливом різних неврахованих факторів. Позначимо випадкове відхилення величини У відносно лінії регресії $M[Y / X]$ через ε. Математично це означає, що $\varepsilon = Y - M[Y / X]$ звідси, враховуючи (11), отримуємо

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon . \qquad (12)$$

Нехай отримано серію із n незалежних рівноточних спостережень, результати яких наведені у таблиці 1

Таблиця 1

Значення параметрів X, Y

Номер спостереження	X	Y
1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2
...	...	...
i	X_i	Y_i
...	...	...
n	X_n	Y_n

Потрібно знайти оцінки параметрів α_0, α_1 і оцінки числових характеристик випадкового відхилення ε.

Параметри залежать від коефіцієнта кореляції R, тому знайдемо спочатку оцінку r коефіцієнта кореляції R. Як відомо, незміщеними та консистентними оцінками математичних сподівань m_X, m_Y і дисперсій σ_X^2, σ_Y^2 є емпіричні (вибіркові) середні і дисперсії:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2; \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_1 - \bar{y})^2. \tag{13}$$

Використовуючи вибіркові характеристики (13) і дані табл. 1, складемо табл. 2 нормованих змінних

$$Z_{xi} = \frac{x_i - \bar{x}}{S_X}; \quad Z_{yi} = \frac{y_i - \bar{y}}{S_Y}. \tag{14}$$

Таблиця 2

Значення нормованих змінних Z_{xi}, Z_{yi}

Номер спостереження	Zx	Zy
1	Zx_1	Zy_{1_1}
...	...	...
i	Zx_i	Zy_i
...	...	...
n	Zx_n	Zy_n

В нормованих змінних рівняння (12) приймає вигляд:

$$Z_y = RZ_x + \varepsilon_z, \tag{15}$$

де $\varepsilon_z = \dfrac{\varepsilon - m_\varepsilon}{б_y}$, m_ε математичне сподівання випадкового відхилення ε.

Найпростіше оцінку r коефіцієнта кореляції R, а також оцінки a_0, a_1 параметрів α_0, α_1 отримують з таких припущень:

1. Математичне сподівання випадкового відхилення дорівнює нулю, тобто $m_\varepsilon = 0$.

2. Для різних x_i відхилення ε_i не залежать одне від одного і мають однакові дисперсії, тобто $D[\varepsilon_i] = M[\varepsilon_i^2] = б^2$.

3. $R(\varepsilon_i;\varepsilon_j)$ при $i \neq j$.

Одним із методів отримання оцінок за експериментальними даними є метод найменших квадратів(МНК), розроблений К. Гаусом і опублікований в 1806 р. В методі найменших квадратів критерієм точності теоретичних і емпіричних даних є сума квадратів відхилень

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_{Ti} - y)^2, \tag{16}$$

де y_{Ti} - теоретичне значення параметра Y, визначене за математичною моделлю.

Оцінки параметрів моделі згідно з МНК визначаються з умови мінімуму суми квадратів відхилень Q.

Знайдемо оцінку коефіцієнта кореляції R за методом найменших квадратів. Критерій Q у даному випадку має вигляд (див. 15,16)

$$Q = Q(R) = \sum_{i=1}^{n}(z_{yi} - Rz_{xi})^2 \Rightarrow \min. \tag{17}$$

Екстремум Q знайдемо, диференціюючи рівняння (17) за R і прирівнюючи до нуля похідну

$$\frac{\partial Q}{\partial R} = -2\sum_{i=1}^{n}(z_{yi} - Rz_{xi})z_{xi} = 0.$$

Звідси оцінка коефіцієнта кореляції r:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{xi} z_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} z_{xi}^2}. \tag{18}$$

Суму квадратів нормованих змінних $\sum_{i=1}^{n} z_{xi}^2$ у знаменнику (18) знайдемо, враховуючи (13) і (14)

$$\sum_{i=1}^{n} z_{xi}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x}\right)^2 = \frac{1}{S^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{S_x^2} = n-1. \tag{19}$$

Підставивши значення $\sum_{i=1}^{n} z_{xi}^2$ у формулу (18), отримаємо вираз для оцінки коефіцієнта кореляції

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{xi} z_{yi}}{n-1}. \qquad (20)$$

Оцінка r, яка визначена формулою (20), є незміщеною і ефективною. Із (20) можуть бути отримані такі зручні для практичних розрахунків формули:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (n-1)\overline{xy}}{(n-1)S_x S_y};$$
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n-1}}{(n-1)S_x S_y}. \qquad (21)$$

Для визначення екстремуму суми квадратів відхилень Q знайдемо другу похідну $\frac{\partial^2 Q}{\partial R^2}$ і визначимо її знак. З (17), враховуючи (19), знаходимо

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial R^2} = 2\sum_{i=1}^{n} z_{xi} = 2(n-1) > 0 \ \text{ оскільки } n > 1.$$

Виходячи з цього, оцінка коефіцієнта кореляції r, яка визначена формулою (20), забезпечує мінімум суми квадратів відхилень емпіричних і теоретичних розв'язків нормованого вихідного параметра складної системи Z_{yi} (рис. 3).

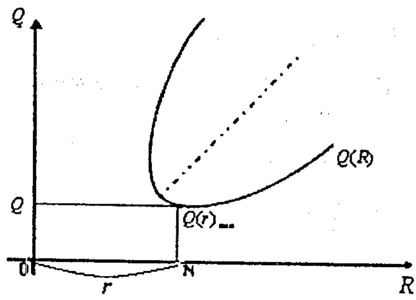


Рис. 3. Геометрична інтерпретація МНК

Геометричне $Q(R)$ являє собою параболу в площині QOR. Мінімуму цієї параболи відповідає абсциса точки N яка дорівнює оцінці коефіцієнта кореляції r.

Консистентна, незміщена і ефективна оцінка S_z^2 дисперсії нормованого відхилення ε_z визначається за формулою

$$S_z^2 = 1 - \frac{n-1}{n-2} r^2, \tag{22}$$

а дисперсія S^2 за формулою

$$S^2 = S_y^2 S_z^2. \tag{23}$$

Рівняння регресії в абсолютних змінних X, Y знайдемо, підставивши значення z_x, z_y з (14) в (15);

$$\frac{y-\bar{y}}{S_y} = r\frac{x-\bar{x}}{S_x} + \varepsilon_z.$$

З цього рівняння

$$y = \bar{y} - r\frac{S_y}{S_x}\bar{x} + r\frac{S_y}{S_x}x + S_y\varepsilon_z,$$

або

$$y = a_0 + a_1 x + \varepsilon = y_x + \varepsilon, \tag{24}$$

де $y_x = a_0 + a_1 x$ - оцінка умовного математичного сподівання $M[Y/X]$; (25)

a_0, a_1 - відповідно, оцінки коефіцієнтів регресії α_0, α_1;

$\varepsilon = S_y \varepsilon_z$ - помилка моделювання в одиницях Y.

На практиці при дослідженні складної системи для попереднього аналізу і спрощення розрахунку складають спільні статистичні розподіли параметрів *X, Y* (кореляційні таблиці). З даних кореляційних таблиць визначають математичні сподівання, середні квадратичні відхилення, коефіцієнти кореляції і регресії.

2.3. Гарантійний інтервал для коефіцієнта кореляції

При практичних розрахунках параметрів складної системи використовують вибірковий коефіцієнт кореляції r, який визначають за формулами (20), (21).

Оцінка коефіцієнта кореляції r є випадковою величиною, яка має розподіл складного виду. Гарантійні інтервали $r_н$, $r_в$ для r при довірчих ймовірностях 0,95 і 0,99 можуть бути визначені за допомогою Z-перетворення Фішера.

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}. \tag{26}$$

Фішер показав, що випадкова величина Z при $n>20$ має розподіл, близький до нормального.

Математичне сподівання m_z і дисперсія D_z визначаються відношеннями:

$$m_z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-3)}\left[1 - \frac{3-r^2}{4(n-3)} + ...\right], \tag{27}$$

$$D_z = \frac{1}{n-3}\left[1 - \frac{r^2}{2(n-3)} - \frac{2-6r^2+3r^4}{6(n-3)} + ...\right]. \tag{28}$$

Під час аналізу параметрів складної системи гарантійні інтервали $r_н$ і $r_в$ визначаються методом послідовного наближення:

$$r_н \cong thZ_H\ , \tag{29}$$

$$r_в \cong thZ_B\,. \tag{30}$$

Початкові значення $Z_H^{(0)}$ і $Z_B^{(0)}$ знаходять за формулами:

$$Z_H^{(0)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} - \frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n-3}\ , \tag{31}$$

$$Z_B^{(0)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} - \frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n-3}\ , \tag{32}$$

де $U_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль нормального розподілу, що відповідає ймовірності $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Таблиці гіперболічних тангенсів thZ і функції $Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$ наведені в додатках. Часто необхідно перевірити тільки наявність лінійного зв'язку між величинами X і Y. Нульова гіпотеза в цьому випадку H_0: $p=0$, конкуруюча - H_1: $p \neq 0$. Якщо гарантійний інтервал включає в себе 0, гіпотеза H_0 приймається. В іншому випадку приймається конкуруюча гіпотеза H_1, тобто вважають, що коефіцієнт r значущий. Ця ж нульова гіпотеза ($p=0$) перевіряється також за допомогою таблиці критичних значень коефіцієнта кореляції r_{kp}. Входами в таблицю є рівень значущості α, об'єм вибірки n.

Коефіцієнт кореляції r вважається значущим, якщо $r > r_{kp}(a,n)$ або $r > r_{kp}(\beta,n)$.

Приклад. Коефіцієнт кореляції, обчислений за вибіркою об'єму $n=20$, дорівнює 0,86.

Визначити значущості коефіцієнта кореляції за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05; (\beta = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975)$.

Розв'язування. За таблицею додатків для $n=20$ і $\alpha = 0{,}05$ знайдемо $r_{kp}(0{,}05;20)=0{,}4227$. Оскільки $r=0{,}86 > 0{,}4227$, нульова гіпотенуза $p=0$

відхиляється на користь конкуруючої гіпотези $p \neq 0$. Таким чином, вибірковий коефіцієнт кореляції r=0,86 може вважатися значущим.

2.4. Приклад статистичної оцінки параметрів складної системи

В складній системі зроблені вимірювання вхідного X і вихідного параметра Y. Результати вимірювання виведені на друк у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3

Значення параметрів X і Y

n	*X*	*Y*	*n*	*X*	*Y*	*n*	*X*	*Y*
1	17,146	185,695	**40**	19,315	195,670	**79**	21,592	202,366
2	25,488	224,007	**41**	20,344	198,227	**80**	18,871	195,399
3	20,165	199,799	**42**	17,979	193,150	**81**	21,128	198,696
4	20,430	200,512	**43**	20,333	203,286	**82**	17,687	191,419
5	22,693	179,882	**44**	18,399	194,885	**83**	20,228	197,140
6	22,664	213,202	**45**	20,603	206,188	**84**	21,985	212,706
7	20,700	202,321	**46**	18,738	198,087	**85**	18,000	184,064
8	18,247	191,280	**47**	18,187	197,757	**86**	20,998	208,815
9	18,751	192,888	**48**	16,866	189,367	**87**	18,967	191,332
10	21,309	207,730	**49**	21,746	205,413	**88**	18,750	200,510
11	19,329	192,578	**50**	19,427	199,882	**89**	17,799	194,725
12	19,726	199,490	**51**	17,444	183.458	**90**	20,220	203,432
13	19,567	194,563	**52**	21,030	205,131	**91**	17,072	182,491
14	19.346	198,371	**53**	20.820	208,018	**92**	20,838	203388
15	17,398	186,438	**54**	20,958	199,954	**93**	18,218	191,936
16	20,503	198,313	**55**	21,595	209,353	**94**	21,731	207,492
17	19,710	191,867	**56**	21,729	205,527	**95**	16,817	186,234
18	19,618	202,093	**57**	22,714	209,488	**96**	21,984	206,131
19	18,156	190,360	**58**	22,284	217,887	**97**	22,487	211,104
20	22,816	211,104	**59**	22,644	218,004	**98**	23,239	213,282
21	22,125	205,935	**60**	22,733	215,459	**99**	23,771	219,944
22	21,121	206,248	**61**	21,146	197,262	**100**	22,359	203,089
23	18,011	188,684	**62**	19315	199,495	**101**	20,288	206,873
24	19,825	196,048	**63**	17,995	181,778	**102**	17,566	196,092
25	19,979	187,827	**64**	20,267	206,766	**103**	20,339	206,554
26	19,864	201,940	**65**	18,416	193,358	**104**	19,869	199,004
27	20,256	201,693	**66**	18,577	198,433	**105**	18,637	196,377
28	18,717	193,718	**67**	17,026	189,508	**106**	20,140	190,093
29	19,384	198,645	**68**	23,490	220,543	**107**	19,959	195,205
30	19,281	193,079	**69**	22,801	212,525	**108**	19,406	192,897
31	18,337	181,183	**70**	21,451	215,261	**109**	21,385	207,938
32	20,552	202,987	**71**	16,377	187,320	**110**	17,166	188,304
33	18,914	191377	**72**	21,183	203,030	**111**	22,690	206,172
34	18,548	188,667	**73**	15,780	182,158	**112**	23,254	215,730
35	15,375	179,278	**74**	22,553	204,810	**113**	22,306	215,894
36	21,172	205,973	**75**	20,223	206,983	**114**	19,813	201,631
37	20,249	200,974	**76**	22,220	201,799	**115**	21,152	203,479
38	19,767	202,841	**77**	21326	204,660	**116**	19,296	200,393
39	20,649	204,011	**78**	22,219	210,470	**117**	17,884	184,018

Продовження табл.3

n	X	Y	n	X	Y	n	X	Y
118	18,309	188,854	129	19,963	206,805	140	17,968	194,750
119	14,800	179,207	130	24,006	223,448	141	20,823	202,947
120	20,232	195,296	131	21,663	214,542	142	20,485	201,339
121	18,285	197,262	132	18,947	203,480	143	17,528	184,748
122	17,798	195,855	133	20,528	206,862	144	20,499	206,846
123	20,041	206,142	134	16,936	186,830	145	22,531	217,238
124	20,322	203,947	135	22,744	207,020	146	21,134	206,985
125	19,933	198,204	136	20,371	202,410	147	19,218	195,423
126	21,785	203,664	137	19,400	197,015	148	21,635	204,771
127	20,300	202,831	138	20,222	198,028	149	18,377	189,243
128	17,363	181,654	139	23,198	214,694	150	21,195	202,277

Для дослідження складної системи потрібно побудувати математичну модель процесу управління у вигляді рівняння лінійної регресії $y_x = a_0 + a_1 x$, де a_0, a_1 - невідомі коефіцієнти регресії.

При побудові математичної моделі складної системи необхідно:

1) обчислити середні $\bar{x}, \bar{y}$; середні квадратичні відхилення S_x, S_y; коефіцієнт кореляції r, коефіцієнт регресії a_0 і a_1;

2) оцінити перераховані в пункті 1 числові характеристики за допомогою надійних інтервалів;

3) побудувати гістограму і функцію теоретичної щільності розподілу для параметрів X і Y;

4) перевірити гіпотези H_0 про вибраний закон розподілу.

Розв'язування. Розробку математичної моделі складної системи проводимо за алгоритмом.

Побудова статистичного розподілу

1. Визначимо число інтервалів:

$$N = 2 + E(3{,}322 \lg n),$$

де E- ціла частина числа,

n - кількість значень вимірюваного параметра.

$$N = 2 + E(3{,}322 \lg 150) = 2 + E(7{,}229) = 9.$$

2. Знайдемо величину інтервалу $\Delta X = \frac{X_{max} - X_{min}}{N-1}$,

де X_{max}, X_{min} - відносно максимальна і мінімальна варіанти таблиці 3,

$$\Delta X = \frac{25{,}488 - 14{,}800}{9-1} = \frac{10{,}688}{8} = 1{,}336.$$

Аналогічно визначаємо величину інтервалу ΔY:

$$\Delta Y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{9-1} = \frac{224{,}097 - 179{,}207}{9-1} = 5{,}611.$$

3. Знаходимо X_x, Y_x, X_n, Y_n:

$$X_л = X_{min} - \frac{\Delta X}{2} = 14{,}800 - \frac{1{,}336}{2} = 14{,}132; \quad Y_л = Y_{min} - \frac{\Delta Y}{2} = 179{,}207 - \frac{5{,}611}{2} = 176{,}401;$$

$$X_п = X_{max} - \frac{\Delta X}{2} = 25{,}488 + \frac{1{,}336}{2} = 26{,}156; \quad Y_п = Y_{max} + \frac{\Delta Y}{2} = 224{,}007 + 2{,}805 = 226{,}812.$$

4. Знаходимо межі інтервалів: $X_{лi} = X_л + (i-1)\Delta X Y_{лj} = Y_л + (j-1)\Delta Y$;

де $i = \overline{1,n}$ - номер інтервалу дня параметра X;

$X_{лi}$ - ліва межа i-го інтервалу,

$j = \overline{1,n}$ - номер інтервалу для параметра Y;

$Y_{лi}$ - ліва межа j-го інтервалу.

Результати розрахунків за цими формулами заносимо в табл. 4.

Таблиця 4

Значення меж інтервалів розподілу параметрів X та Y

i	Межі інтервалів		j	Межі інтервалів	
	$X_{лi}$	$X_{пi}$		$Y_{лj}$	$Y_{пj}$
1.	14,132	15,467	1.	176,401	182,011
2.	15,468	16,803	2.	182,012	187,622
3.	16,804	18,139	3.	187,623	193,233
4.	18,140	19,475	4.	193,234	198,844
5.	19,476	20,811	5.	198,845	204,455
6.	20,812	22,147	6.	204,456	210,066
7.	22,148	23,483	7.	210,067	215,677
8.	23,484	24,819	8.	215,678	221,288
9.	24,820	26,155	9.	221,289	226,902

5. Знайдемо середини інтервалів X_i, Y_j за формулами:

$$x_i = x_л + (i - \frac{1}{2})\Delta x, \quad (i = \overline{1,.n}); \; y_j = y_л + (j - \frac{1}{2})\Delta y, \quad (j = \overline{1,.n});$$

Складемо кореляційну таблицю параметрів X,У.

6. Перенесемо середини інтервалів X і Y у відповідні стовпці і рядки таблиці 5.

7. Підрахуємо частоти сумісної появи n_{ij} значень X_i, Y_j і запишемо їх у відповідні ij клітинки таблиці.

В результаті отримаємо спільний статистичний розподіл параметрів X, Y (кореляційну таблицю абсолютних варіантів).

Зауваження. Для зручності підрахунку частот у відповідних клітинках таблиці 5 кожна пара значень X_i, Y_j відмічається штрихом або точкою. Після занесення всіх значень в кожній клітинці підраховується число штрихів або точок.

8. Підрахуємо сумарні частоти по стовпцях n_i і по рядках n_j.

Результати поміщаємо в останній рядок табл.5. Ці частоти характеризують розподіл параметрів X, Y.

Таблиця 5

	Y_j		Інтервали X_i									
j	інтерва-ли	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N_j
		Середина інтервалу	14,132 15,467	15,468 16,803	16,804 18,139	18,140 19,474	19,475 20,811	20,812 22,147	22,148 23,483	23,484 24,819	24,820 26,155	
		y_j	Середина інтервалу x_i									
			14,800	16,136	17,472	18,808	20,144	21,480	22,816	24,152	25,488	
1	176,401 182,011	179,207	2	1	2	1						6
2	182,012 187,622	184,818		2	9							11
3	187,623 193,233	190,429			6	12	2					20
4	193,234 198,844	196,040			4	14	9	2				29
5	198,845 204,455	201,651				5	20	8	1			34
6	204,456 210,066	207,261					9	16	4			29
7	210,067 215,677	212.873						3	9			12
8	215,678 221,288	218,484							6	2		7
9	221,289 226,902	234,095								1	1	2
N_i			2	3	21	32	40	29	19	3	1	150

Розрахунок точкових оцінок числових характеристик

9. Для обчислення точкових оцінок числових характеристик параметрів X і Y перейдемо до умовних варіантів:

$U_i = \dfrac{X_i - C_x}{\Delta X}$; $V_j = \dfrac{Y_j - C_y}{\Delta Y}$; де Cx=20,144 і Cy=201,651- умовні нулі, які відповідають клітинкам кореляційної таблиці 5 з координатами $i = 5, j = 5$.

10. В стовпці i=5 пишемо 0 замість варіанти 20,144. В стовпцях зліва умовного нуля послідовно записуємо умовні варіанти -1, -2 ,-3 ,-4.

В стовпцях праворуч від умовного нуля послідовно записуємо умовні варіанти 1, 2, 3, 4. Для змінної Y умовні варіанти записуємо аналогічно в рядках кореляційної табл. 5. В результаті отримаємо кореляційну таблицю 6 в умовних варіантах.

11. Точкові оцінки математичних сподівань і дисперсій параметрів U і V знайдемо за формулами:

$$\overline{U}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i U_i}{n};\overline{V}=\frac{\sum_{j=1}^{n} n_j V_j}{n};\ S_U^2=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i U_i^2}{n}-\overline{U^2}\right)\frac{n}{n-1};S_V^2=\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} n_j V_j^2}{n}-\overline{V^2}\right)\frac{n}{n-1}.$$

Величини $\sum_{i=1}^{n} n_i U_i$, $\sum_{j=1}^{n} n_j V_j$, $\sum_{i=1}^{n} n_i U_i^2$, $\sum_{j=1}^{n} n_j V_j^2$ отримаємо додаванням відповідних добутків, наведених в табл. 6. В результаті отримаємо

$$\overline{U}=-\frac{11}{150}=-0{,}073;\ \overline{V}=-\frac{48}{150}=-0{,}32; S_U=\sqrt{\left[\frac{329}{150}-(-0{,}073)^2\right]\frac{150}{149}}=1{,}484;$$

$$S_V=\sqrt{\left[\frac{472}{150}-(-0{,}32)^2\right]\frac{150}{149}}=1{,}750.$$

Таблиця 6

V_j	U_i									n_j	$n_j V_j$	$n_j V_j^2$
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4			
-4	2	1	2	1						6	-24	96
-3		2	9							11	-33	99
-2			6	12	2					20	-40	80
-1			4	14	9	2				29	-29	29
0				5	20	8	1			34	0	0
1					9	16	4			29	25	25
2						3	9			12	24	48
3							5	2		7	21	63
4								1	1	2	8	32
n_i	2	3	21	32	40	29	19	3	1	150	$\sum$=-48	$\sum$=472
$n_i U_i$	-8	-9	-42	-32	0	29	38	9	4	$\sum$= -11		
$n_i U_i^2$	32	27	84	32	0	29	76	27	16	$\sum$=329		

12. Точкові оцінки математичних сподівань і дисперсій параметрів X і Y знаходимо за формулами

$$\breve{X}=C_x+\overline{U}\Delta x=20{,}144+(-0{,}073)\cdot 1{,}336=20{,}046;$$

$$\breve{Y}=C_y+\overline{V}\Delta y=201{,}651+(-0{,}32)\cdot 5{,}611=199{,}855;;$$

$$S_x=S_U\Delta x=1{,}484\cdot 1{,}336=1{,}982;$$

$$S_y=S_V\Delta y=1{,}750\cdot 5{,}611=9{,}819.$$

Результати розрахунків оцінок числових характеристик зведемо в табл.7.

Таблиця 7

Оцінки числових характеристик

$\bar{X}$	S_x	$\bar{Y}$	S_y
20,46	1,982	199,855	9,819

13. Визначимо точкову оцінку коефіцієнта кореляції

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n_{ij}U_iV_j-n\overline{UV}}{(n-1)S_US_V}.$$

Обчислення $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n_{ij}U_iV_j-n\overline{UV}$ проведемо за алгоритмом :

1) В кожній клітинці кореляційної таблиці з частотою $n_{ij}\neq 0$ в правому верхньому кутку записуємо добутки частоти n_{ij} на варіанту U_i. Наприклад, в правих верхніх кутках клітинок першого рядка записуємо добутки 2(-4)=-8; 1(-3)=-3; 2(-2)=-4; 1(-1)=-1, другого рядка - 2(-3)=-6; 9(-2)=-18 і т.д.

2) Додаємо всі числа, розміщені в правих верхніх кутах клітинок одного рядка, суму записуємо в клітинку V_j цього ж рядка. Наприклад, для першого рядка V_1=-16, для другого V_2=-24.

3) Множимо варіанту v на V і отриманий добуток записуємо в клітинку стовпця vV. Наприклад, в першому рядку таблиці 8 v_1=-4, V_1=-16, виходячи з цього, $vV=64$.

4) Додаючи всі числа стовпця UV, отримуємо суму $\sum_{j=1}^{n}v_jV_j$, яка рівна шуканій сумі $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n_{ij}U_iV_j$. Наприклад, для таблиці 8 маємо $\sum_{j=1}^{n}v_jV_j=346$, виходячи з цього, шукана функція $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n_{ij}U_iV_j=346$.

5) Для контролю проводимо аналогічні розрахунки по стовпцях, добуток $n_{ij}v_j$ записуємо в лівий нижній куток клітинки, що має в своєму складі частоту $n_{ij}\neq 0$, всі числа, розміщені в лівих нижніх кутках клітинок одного стовпця підсумуємо, суму записуємо в рядок U, множимо кожну варіанту u_i на U_i і результат записуємо в рядок uU, отримуємо суму $\sum_{i=1}^{n}u_iU_i$, рівну шуканій сумі $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n_{ij}U_iV_j$. Наприклад, для таблиці 8 $\sum_{i=1}^{n}u_iU_i=346$, що збігається з результатом, отриманим в пункті 4, і підтверджує правильність обчислень.

6) Обраховуємо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{346 - 150(-0{,}073)(-0{,}32)}{149 \cdot 1{,}484 \cdot 1{,}75} = 0{,}8851.$$

Таблиця 8

V_j	j	U_i									$V_j = \sum n_{ij} U_i$	$v_j V_j$
		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*		
-4	*1*	-8 **2** -8	-3 **1** -4	-4 **2** -8	-1 **1** -4						-16	64
-3	*2*		-6 **2** -6	-18 **9** -27							-24	72
-2	*3*			-12 **6** -12	-12 **12** -24	0 **2** -4					-24	48
-1	*4*			-8 **4** -4	-14 **14** -14	0 **9** -9	2 **2** -2				-20	20
0	*5*				-5 **5** 0	0 **20** 0	8 **8** 1	2 **1** 0			0	0
1	*6*					0 **9** 9	16 **16** 16	8 **4** 4			24	24
2	*7*						3 **3** 6	18 **9** 18			21	42
3	*8*							10 **5** 15	6 **2** 6		16	48
4	*9*								3 **1** 4	4 **1** 4	7	28
$U = \sum n_{ij} U_i$		-8	-10	-51	-42	-4	20	37	10	4		$\sum = 346$
$u_i U_i$		32	30	102	42	0	20	74	30	6	$\sum = 346$	

Визначення оцінок коефіцієнтів регресії

Обчислимо оцінку коефіцієнтів регресії:

$$a_1 = r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}8851 \cdot \frac{9{,}819}{1{,}982} = 4{,}385,$$

$$a_0 = \overline{Y} - a_1 X = 199{,}855 - 4{,}385 \cdot 20{,}043 = 111{,}966.$$

Запишемо рівняння регресії і значення оцінок коефіцієнтів кореляції і регресії в таблицю 9.

Таблиця 9

Оцінка коефіцієнтів кореляції і регресії

r	a_0	a_1
0,885	111,966	4,385
$Y_x = 111{,}966 + 4{,}385x$		

Побудова емпіричних і теоретичних законів розподілу для параметрів X і Y

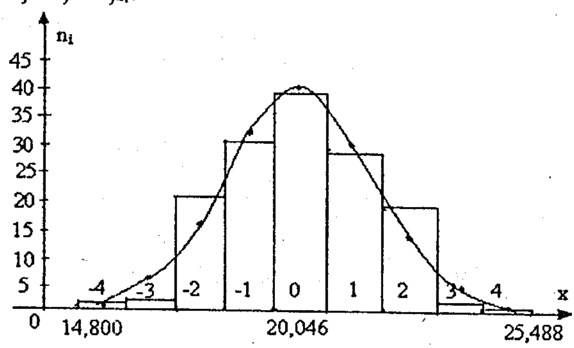
14. Побудуємо гістограму частот, для чого перенесемо значення i, j, x_i, y_j, n_i, n_j з таблиці 5 в перший, другий і третій стовпці табл. 10,11. Нанесемо на графіки (рис. 7, 8) залежності $n_i = n_i(x_i); n_j = n_j(y_j)$;

15. За виглядом гістограми (рис. 7, 8) припустимо, що параметри X і Y мають нормальний розподіл.

1) Обчислимо накопичені емпіричні частоти:

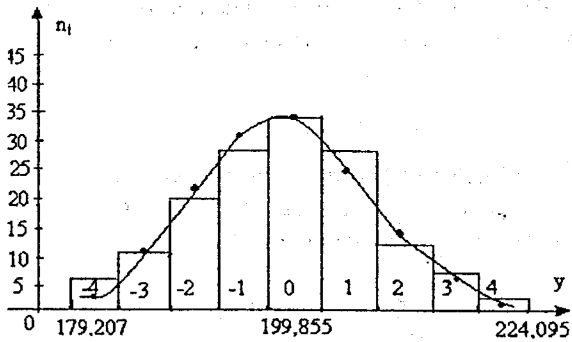
$M_i = M_{i-1} + n_i; M_i = n_{i=1}$;

$M_j = M_{j-1} + n_j; M_j = n_{j=1}$;



$\overline{X} = 20{,}046; \ Sx = 1{,}982; \ n = 150$

Рис. 7. Гістограма та щільність нормального розподілу параметра X



$\overline{Y} = 199{,}855$; $S_Y = 9{,}819$; $n = 150$

Рис. 8. Гістограма та щільність нормального розподілу параметра Y

Результати розрахунків помістимо в стовпець 8 табл. 10, 11

2) Обчислимо емпіричні функції розподілу

$$F_i^* = \frac{M_i}{n}; F_j^* = \frac{M_j}{n}.$$

Результати обчислень помістимо в стовпець 10 табл. 10,11.

15. Обчислюємо теоретичну щільність нормального розподілу параметрів X і Y з табл. 10, 11.

1) Знаходимо нормовані змінні Z_i, Z_j, які записуємо в стовпці 4 табл. 10, 11.

2) За значенням Z_i, Z_j із таблиці щільності нормального розподілу (таблиця додатків) знаходимо значення функцій $\varphi(Z_i)$, $\varphi(Z_j)$, які записуємо в стовпець 5 табл. 10, 11.

3) Обчислюємо теоретичні частоти (стовпець 6) табл. 10, 11.

$$n_i' = \frac{n\Delta x}{Sx}\varphi(Z_i); n_j' = \frac{n\Delta y}{Sy}\varphi(Z_j);$$

які округлюємо до цілих значень і записуємо в стовпець 7 табл. 10, 11.

4) Наносимо значення теоретичних частот $n_i'(Z_i)$, $n_j'(Z_j)$ на графік (рис. 7, 8). Теоретичні точки з'єднуємо плавною кривою.

Перевірка правдоподібності статистичних гіпотез

За виглядом теоретичних функцій щільності розподілів параметрів X і $У$ (графіки на рис. 7, 8) висунемо гіпотезу H_0 - параметри $X, У$ розподілені за нормальним законом.

16. Розраховуємо теоретичні функції розподілу $F(Z_i)$, $F(Z_j)$:

1) Обчислюємо накопичені теоретичні частоти:

$$M_i^{'} = M_{i+1}^{'} + n_{iOKP}^{'};\quad M_{i-1}^{'} = n_{(i-1)OKP}^{'};$$

$$M_j^{'} = M_{j+1}^{'} + n_{jOKP}^{'};\quad M_{j-1}^{'} = n_{(j-1)OKP}^{'};$$

де $n_{iOKP}^{'}$, $n_{jOKP}^{'}$ - округлені значення теоретичних частот.

Отримані результати записуємо в стовпець 9 табл. 10, 11.

2) Знаходимо значення теоретичних функцій розподілу:

$$F_i = \frac{M_i^{'}}{\sum_{i=1}^{N} n_{iOKP}^{'}};\quad F_j = \frac{M_j^{'}}{\sum_{j=1}^{N} n_{jOKP}^{'}},$$

які записуємо в стовпець 11 табл. 10, 11.

17. *Перевірка гіпотези за критерієм Колмогорова А.М.*

1) Обчислюємо за табл. 10, 11 абсолютні різниці теоретичних і емпіричних розподілів $|F^{*} - F|$, які розміщені в стовпцях 12 табл. 10, 11.

2) Знаходимо максимальне значення різниць $D_n = max|F^{*} - F|$. Для параметра X - $D_n = 0{,}0137$; для параметра $У$ - $D_n = 0{,}0200$.

3) Знаходимо спостережувані значення різниць: для параметра X: $\lambda = 0{,}0137 \cdot \sqrt{150} = 0{,}1678$; для параметра $У$: $\lambda = 0{,}0200 \cdot \sqrt{150} = 0{,}2449$.

4) Задамось рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і за таблицями квантилів розподілу Колмогорова (додатки) знаходимо критичний квантиль $\lambda_{кр} = 1{,}36$, який відповідає надійній ймовірності $\beta = 0{,}95$ та $n = 150$.

5) Порівнюємо значення $\lambda_{кр}$ і λ: для параметра X - $\lambda < \lambda_{кр}$ *(0,1678<1,36)*; для параметра $У$ - $\lambda < \lambda_{кр}$ *(0,2449<1,36)*. Отже, за критерієм Колмогорова нульова гіпотеза H_0 (параметри $X, У$ розподілені за нормальним законом) узгоджується з дослідними даними при гарантованій ймовірності $\beta = 0{,}95$.

18. *Перевірка за критерієм Пірсона* (χ^2).

1) Передивляємося стовпець 7 табл. 10, 11 і знаходимо клітинки з частотами, меншими 10. Це клітинки i=1,2,3 та 7,8,9 для табл. 10 і клітинки j=1,2 та 7,8,9 для табл. 11. Об'єднуємо їх відповідно в один інтервал. Інтервали, які об'єднали, відмічаємо фігурними дужками. Для цих інтервалів знаходимо теоретичні і емпіричні частоти.

2) Визначаємо число ступенів вільності

$$f = N_1 - k,$$

де k= 3 - число накладених зв'язків:

N_1 - число інтервалів в табл. 10, 11 після їх об'єднання: для табл. 10 - $f = N_1 - k$=*5-3=2*, для табл. 11- $f = N_1 - k$=*6-3=3*.

3) Задамось рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$.

4) Обчислюємо спостережувані значення критерію $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n'_{iюок})^2}{n'_{iюок}}$ для параметра X_i, аналогічно - для параметра $У_j$.

Дані для обчислення беремо із стовпців 13, 14 табл.10, 11. В результаті отримуємо: для параметра $X: \chi^2 = 0{,}6668$; для параметра $У$: $\chi^2 = 1{,}076$.

5) Знаходимо критичний квантиль $\chi^2_{кр}$ за таблицями квантилів розподілу Пірсона (додатки). Для параметра X - $\chi^2_{кр}=6{,}0$. Для параметра $У$- $\chi^2_{кр}=7{,}8$.

6) Перевіряємо нерівність $\chi^2 < \chi^2_{кр}$. Маємо для параметра X: *0,6668<6,0*. Для параметра $У$: *1,076<7,8*. Таким чином, згідно з критерієм χ^2 нульова гіпотеза H_0 (параметри $X,У$ розподілені за нормальним законом) узгоджується з дослідними даними при надійній ймовірності $\beta = 0{,}95$.

Таким чином, гіпотеза про нормальний розподіл параметрів X і $У$ підтверджується за критеріями Колмогорова і Пірсона.

Таблиця 10

Розрахунок розподілу параметрів X

i	x_i	n_i	$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}$	$\varphi(Z_i)$	n'_i	$n'_{юкр}$	M_i	$M'_{юкр}$	F^*_i	F_i	$\lvert F^*_i - F_i \rvert$	$n_i - n'_{юкр}$	$\frac{(n_i - n'_{юкр})^2}{n'_{юкр}}$
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	14,800	2	-2,680	0,011	1,126	1	2	1	0,1133	0,0066	0,0067	0	0,1667
2	16,136	3	-1,997	0,0543	5,560	6	5	7	0,0333	0,0470	0,0137	2	
3	17,472	21	-1,315	0,1680	17,20	17	26	24	0,1733	0,1600	0,0133	0	
4	18,808	32	-0,632	0,3267	33,45	33	58	57	0,3867	0,3800	0,0067	-1	0,0903
5	20,144	40	0,050	0,3894	40,8	41	98	98	0,6533	0,6533	0,0000	-1	0,0903
6	21,480	29	0,732	0,3052	31,25	31	127	129	0,8466	0,8600	0,0134	-2	0,1290
7	22,816	19	1,415	0,1466	15,01	15	146	144	0,9733	0,9600	0,0133	0	0,1905
8	24,152	3	2,098	0,0447	4,81	5	149	149	0,9933	0,9933	0,0000	2	
9	25,488	1	2,780	0,0024	0,86	1	150	150	1,0000	1,0000	0,0000	0	
Σ		150				150						χ^2	= 0,6668

Таблиця 11

Розрахунок розподілу параметрів Y

	Y_j	n_j	$z_j=\frac{Y_j-\bar{y}}{S_y}$	$\varphi(Z_j)$	n'_j	$n'_{jокр}$	M_j	$M'_{jокр}$	F^*_j	F_j	$/F^*_j-F_j/$	$n_j-n'_{jокр}$	$\frac{(n_j-n'_{jокр})^2}{n'_{jокр}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	179,207	6	-2.110	0,0431	3,707	4	6	4	0,0400	0,0267	0,0133		
2	184,818	11	-1,573	0,1225	10,537	11	17	15	0,1133	0,1000	0.0133	2	0,2667
3	190.040	20	-0,963	0,2509	21,581	22	37	37	0,2467	0,2467	0,0000	-2	0,1818
4	196,040	29	-0,390	0,3697	31,799	32	66	69	0,4400	0,4600	0,0200	3	0,2813
5	201,651	34	0,184	0,3922	33,735	34	100	103	0,6667	0,6867	0,0200	0	0
6	207,262	29	0,757	0,2996	25,769	26	129	129	0.8600	0,8600	0,0000	3	0,3462
7	212.873	12	1,330	0,1647	14,167	14	141	143	0,9400	0,9533	0,0133		
8	218,484	7	1,904	0,0651	5,599	6	148	149	0,9867	0,9933	0,0066	0	0
9	224,095	2	2,565	0,0149	1,282	1	150	150	1,0000	1,0000	0,0000		
Σ	—	150				150						χ^2 = 1,076	

19. *Інформаційний критерій ефективності моделі*

Оскільки дані розподілені за нормальним законом, розрахуємо залежність параметра *У* від параметра *X*, тобто, який відсоток пояснює лінійна модель $Y_x = 111{,}966 + 4{,}385x$.

Використаємо для цього інформаційний критерій ефективності моделі складної системи Кузьміна І.В.

$$K_i = 1 - \frac{\ln\left[\ (2\cdot K_e)\sqrt{\frac{(n-1)}{(n-2)}\cdot(1-r^2)}\ \right]}{\ln(2\cdot K_{ey})},$$

де K_e, K_{ey} - ентропійні коефіцієнти, відповідно, розподілу помилок моделювання параметра *У*. Для нормального закону розподілення $K_e = K_{ey} = 2{,}07$.

Для нашого прикладу

$$K_i = 1 - \frac{\ln[(2\cdot 2{,}07)\sqrt{(\frac{149}{148})(1-0{,}8851^2)}]}{\ln(2\cdot 2.07)} = 0{,}5351.$$

Таким чином, лінійна модель $Y_x = 111{,}966 + 4{,}385x$ пояснює *53,51%* змін параметра *Y* під впливом параметра *X*. Інші *46,49 %* варіацій параметра *Y* визначаються або лінійністю чисел моделі, або неврахованими факторами.

20. *Оцінка числових характеристик моделі за допомогою гарантованих меж.*

1) Гарантовані межі математичних сподівань.

$$\overline{x_H} = x - t_\beta \frac{S_x}{\sqrt{n}}; \overline{x_B} = x + t_\beta \frac{S_x}{\sqrt{n}};$$

$$\overline{y_H} = y - t_\beta \frac{S_Y}{\sqrt{n}}; \overline{y_B} = y + t_\beta \frac{S_Y}{\sqrt{n}},$$

де індекси *н,в* означають нижню і верхню межі:

t_β - квантиль розподілу Стьюдента, що відповідає надійній ймовірності і числу ступеней вільності $f = n - 1; \beta = 0.95; f = 150 - 1 = 149$.

За цими даними з таблиці квантилів розподілу Стьюдента знаходимо $t_\beta = 1{,}96$.

Обчислимо гарантійні межі:

$$\overline{x_H} = 20{,}046 - 1{,}96\frac{1{,}982}{\sqrt{150}} = 19{,}729; \overline{x_B} = 20{,}046 + 1{,}96\frac{1{,}982}{\sqrt{150}} = 20{,}363.$$

$$\overline{y_H} = 199{,}855 - 1{,}96\frac{9{,}819}{\sqrt{150}} = 198{,}284; \overline{y_B} = 199{,}855 + 1{,}96\frac{9{,}819}{\sqrt{150}} = 201{,}121.$$

2) Гарантійні межі для середнього квадратичного відхилення.

$$S_н = S(1-q); S_в = S(1+q),$$

де $q = q(\beta, n)$ - табульована величина, яка визначається надійною ймовірністю $\beta = 0{,}95$ і числом спостережень $n=150$.

Для параметрів X, Y отримуємо:

$$S_{X_н} = 1{,}982(1 - 0{,}115) = 1{,}754; S_{X_в} = 1{,}982(1 + 0{,}115) = 2{,}210.$$

$$S_{Y_н} = 9{,}819(1 - 0{,}115) = 8{,}690; S_{Y_в} = 9{,}819(1 + 0{,}115) = 10{,}948.$$

3) Гарантійні межі для коефіцієнта кореляції:

$$r_H = thZ_H; r_B = thZ_B; Z_H = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} - \frac{U_\beta}{\sqrt{n-3}}; Z_B = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} + \frac{U_\beta}{\sqrt{n-3}},$$

де U_β - квантиль нормального розподілу, який відповідає надійній ймовірності β.

1. Задаємось надійною ймовірністю $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$ і за таблицею додатків знаходимо $U_\beta = 1{,}96$.

2. За таблицею додатків для $r = 0{,}885$ знаходимо:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = 1{,}4219$$

3. Обчислимо нижню Z_H і верхню Z_B межі Z - перетворень Фішера:

$$Z_H = 1{,}4219 - \frac{1{,}96}{\sqrt{150-3}} = 1{,}2602; Z_B = 1{,}4219 + \frac{1{,}96}{\sqrt{150-3}} = 1{,}5836.$$

4. Знаходимо нижню r_H і верхню r_B гарантійні межі для

коефіцієнта кореляції за додатком:

$r_Н = th1{,}2602 = 0{,}8511 \qquad r_В = th1{,}5836 = 0{,}9186$.

Висновки

1. Розроблена математична модель складної системи у вигляді рівняння прямолінійної регресії Y та X.

2. Модель характеризує *53,51%* змін вихідного параметра системи. Інші *46,49%* варіації параметра $У$ визначаються лінійністю чисел моделі або неврахованими факторами.

3. Параметри X, Y мають нормальний розподіл.

4. Отримані точкові і *95%* інтервальних оцінок математичних сподівань, середніх квадратичних відхилень параметрів X і Y, коефіцієнта кореляції.

5. Розроблена математична модель може використовуватись для дослідження ефективності складеної системи.

Зауваження. Варіанти завдань для самостійного розв'язування подані нижче.

ЧАСТИНА 3

Статистична оцінка рішень

3.1. Постановка задачі

В процесі виробництва промислових виробів систематично приймаються рішення, спрямовані на підвищення якості. Реалізація цих рішень приводить до зміни техніко-економічних показників виробів, що випускаються, і технології їх виготовлення. Оскільки ці показники x_j(j - індекс виробничого параметра, $j = \overline{1,l}$) - випадкові величини, то під впливом різних виробничих факторів змінюються закони розподілу виробничих параметрів і, зокрема, їх числові характеристики: математичні сподівання m_j і дисперсії σ_j^2. Результати спостереження за ходом виробництва звичайно обчислюють за оцінкою цих характеристик: вибіркової середньої $\overline{X}_j$(оцінка математичного сподівання m_j) та вибіркової дисперсії S_j^2(оцінка дисперсії σ_j^2). Зміна середньої, при здійсненні комплексів виробничих заходів, визначає характер тенденції виробничого процесу, а зміна дисперсії – його стабільність. Більш стабільний виробничий процес характеризується меншим розсіюванням параметрів одержаних виробів, тобто, меншою дисперсією цих параметрів.

Таким чином, при управлінні виробництвом виникають задачі порівняння середніх і дисперсій для різних моментів виробничої діяльності і корегування на цій основі ходу виробничого процесу. При цьому будь-які судження про характер зміни числових характеристик через вплив механізму випадкового відбору або обмеженого об'єму вибірки будуть супроводжуватись випадковою похибкою. В математичній статистиці подібні задачі порівняння розв'язуються методами перевірки статистичних гіпотез відносно параметрів розподілу середніх і дисперсій. Сформулюємо задачу перевірки статистичних гіпотез стосовно задачі розпізнавання різниць між числовими характеристиками виробничих параметрів. Нехай протягом деякого періоду виробничої діяльності $t = \overline{1,l}$ у певний момент часу $t_k = k;\ k = 1,2,...,l$ проведені виміри виробничого параметра $x_j^k = (x_{1j}^k,...,x_{nj}^k)^T$, де $i^k = \overline{1,n_j^k}$ - номер виміру, n_j^k - число вимірів у k-тий момент часу. За результатами вимірювання обчислені середні

$$\overline{X_j^k} = \frac{1}{n_j^k}\sum_{i=1}^{n_j^k} X_{ij}^k \tag{1}$$

і вибіркові дисперсії

$$S_j^{k2} = [\ \overline{X}_j^{k2} - (\overline{X}_j^k)^2\ ]\frac{n_j^k}{n_j^k - 1}, \tag{2}$$

де $\overline{X_j^{k2}} = \frac{1}{n_j^k}\sum_{i=1}^{n_j^k} X_{ij}^{k2}$.

Кожному моменту виробничої діяльності відповідає комплекс керувальних впливів $M_k = (M_1^k,...,M_p^k)^T$. Потрібно перевірити гіпотезу про відсутність систематичних розходжень (нульових розходжень) між середніми $\overline{X_j^k}$, а також між дисперсіями S_j^{k2}, тобто, $H_0 : \overline{X_j^k} = \overline{X_j^p}; S_j^{k2} = S_j^{p2}; k \neq p; k,p = \overline{1,l}$. Гіпотеза H_0 називається нульовою, альтернативна їй гіпотеза – конкуруючою - $H_1 : \overline{X_j^k} = \overline{X_j^p}; S_j^{k2} = S_j^{p2}$.

3.2. Статистичний критерій перевірки гіпотези про суттєвість відмінностей виробничих параметрів

При перевірці статистичних гіпотез для оцінювання розходжень між параметрами законів розподілу чи самими законами використовують статистичні критерії, які є певними мірами близькості, ці міри близькості складаються із значень досліджуваних числових характеристик або законів розподілу випадкових величин і самі є випадковими величинами. Позначимо статистичний критерій через *К*, а його закони розподілу через

$$P(K) = \frac{df(K)}{dK}, \tag{3}$$

де *Р(к)* – щільність розподілу критерію К;

F(K) – функція розподілу цього критерію.

Суть методики перевірки нульової гіпотези H_0 така. Нехай для перевірки нульової гіпотези відносно числових характеристик виробничого параметра X_j вибрано критерій *К*; щільність розподілу цього критерію за умови справедливості гіпотези H_0 дорівнює $f(K / H_0)$, а математичне сподівання

$M[K]$, ймовірність потрапляння випадкової величини K в інтервал $[K_{1-\frac{\alpha}{2}}, K_{\frac{\alpha}{2}}]$ (рис.1.)

$$P(K_{1-\frac{\alpha}{2}} < K < K_{\frac{\alpha}{2}}) = \int_{K_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{K_{\frac{\alpha}{2}}} p(K/H_0)dK. \qquad (4)$$

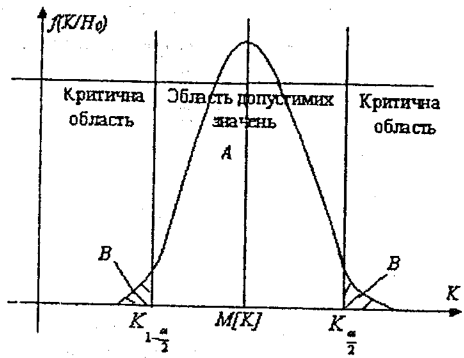


Рис.1. Схема розподілу значень статистичного критерію

Область $A = (K_{1-\frac{\alpha}{2}}, K_{\frac{\alpha}{2}})$ можливих значень випадкової величини K називається областю допустимих значень, а ймовірність потрапляння K в область A, яка дорівнює $1-\alpha$, - довірча ймовірність. Область $B(-\infty, K_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (K_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$ називається критичною областю, а ймовірність потрапляння величини K в область B, яка дорівнює α, – рівнем значущості. Ймовірність α дослідник приймає настільки малою ($\alpha < 0.2$), щоб потрапляння величини K у критичну область можна було вважати практично неможливою подією. Нульову гіпотезу перевіряють таким чином. За вибірковими даними обчислюють значення критерію K, яке спостерігають.

З умов

$$P(K \le K_{1-\frac{\alpha}{2}}) = F(K_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\infty}^{K_{1-\frac{\alpha}{2}}} p(K/H_0)dK = \frac{\alpha}{2}; \qquad (5)$$

$$P(K \ge K_{\frac{\alpha}{2}}) = \int_{K_{\frac{\alpha}{2}}}^{+\infty} P(K/H_0)dK = 1 - F(K_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \qquad (6)$$

знаходять межі $K_{1-\frac{\alpha}{2}}, K_{\frac{\alpha}{2}}$ області допустимих значень *А*, які є оберненими функціями відносно функції розподілу,

$$K_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}(K_{1-\frac{\alpha}{2}}) \; ; \tag{7}$$

$$K_{\frac{\alpha}{2}} = (1 - F(K_{\frac{\alpha}{2}}))^{-1} \; , \tag{8}$$

де $K_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $K_{\frac{\alpha}{2}}$ - критичні квантилі *К*-розподілу, які залежать від рівня значущості і числа спостережень *n* [2].

Область, в яку потрапило значення спостережуваного критерію *К*, визначається умовою

$$K_{1-\frac{\alpha}{2}} \le K \le K_{\frac{\alpha}{2}} \; . \tag{9}$$

Якщо умова (9) виконується, то розходження між параметрами розподілу випадкової величини *X*, визначеними за різними вибірками, можна пояснити випадковими похибками експериментів. В цьому випадку нульова гіпотеза H_0 вважається узгодженою з випробуванням. В іншому випадку вона відхиляється на користь конкуруючої H_1.

Статистична перевірка гіпотез, заснована на вибіркових даних, пов'язана з ризиком прийняття хибних рішень. При цьому можливі помилки двох родів:

- помилка першого роду, яка складається з відхилення вірної нульової гіпотези H_0;

- помилка другого роду, яка складається з прийняття хибної гіпотези H_0.

При прийнятті виробничих управлінських рішень помилки першого роду можуть призвести до бракування придатних виробів, що призведе, в свою чергу, до додаткових витрат на повторну перевірку, демонтаж, збирання та інші технологічні й організаційні заходи, чи до пошуку недоліків у правильному управлінському рішенні.

Помилки другого роду обумовлюють, наприклад, визнання бракованих виробів придатними виробами і прийняття управлінських рішень, які не забезпечують досягнення певної виробничої мети. Між помилками першого та другого роду існує певний взаємозв'язок. Нехай перевіряється нульова гіпотеза $H_0 : \theta^k = \theta^p$, де θ^k, θ^p - відповідно, числові характеристики виробничого параметра X_j, визначені за виробничими даними для *К*-го та *Р*-го моментів часу. Альтернативна гіпотеза $H_1 : \theta^k \neq \theta^p$. Густина розподілу статистичного критерію *К* для нульової і конкуруючої H_1 гіпотез показана на рис. 2.

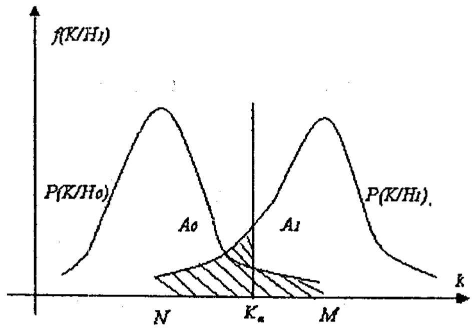


Рис. 2. Ймовірність помилок першого та другого роду

Якщо криві $P(K/H_0)$ та $P(K/H_1)$ не перетинаються, то перевірка гіпотез однозначна: потрапляння спостережуваного критерію K в область A_0 свідчить про правильність H_0, а в область A_1 - про правильність конкуруючої.

Якщо криві $P(K/H_0)$ та $P(K/H_1)$ перетинаються, то однозначність прийняття чи відхилення гіпотез H_0, H_1 порушується. Дійсно, якщо значення K виявиться в точці M, то гіпотеза H_0 відхиляється з ймовірністю помилки першого роду, яка дорівнює $\frac{\alpha}{2}$. Якщо значення K виявиться в точці N, то гіпотеза H_0 не буде відхилена, хоча може бути вірною і гіпотеза H_1. В цьому випадку припускаються помилки другого роду. Ймовірність цієї помилки β дорівнює ймовірності потрапляння критерію K ліворуч від точки $K_{\frac{\alpha}{2}}$ (рис.2.) за умови справедливості альтернативної гіпотези H_1, тобто

$$\beta = \int_{-\infty}^{K_{\frac{\alpha}{2}}} P(K / H_1) dK. \tag{10}$$

Ймовірність нездійснення помилки другого роду називається потужністю критерію K, який дорівнює $1-\beta$.

На рис. 2 бачимо, що ймовірності помилок першого та другого роду залежать одна від одної, зменшуючи ймовірність помилки першого роду α, тобто пересуваючи квантиль $K_{\frac{\alpha}{2}}$ праворуч, ми тим самим збільшуємо ймовірність помилки другого роду β. Залежність між помилками першого та другого роду розглянемо спочатку на прикладі.

Нехай виробничий параметр X має нормальний розподіл з відомою дисперсією σ^2 і з невідомим математичним сподіванням m. Для розділу оцінки $\overline{X}$ математичного сподівання зроблені вимірювання параметра X і отримані значення $(x_1, \dots, x_n)^T$. Відносно m висувається дві гіпотези

$H_0 : m = m_0$ і $H_1 : m = m_1; m_0 < m_1$

За критерій для перевірки гіпотези використовуємо оцінку $\overline{X}$. Ця оцінка є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням $m_{\bar{x}} = m$ і дисперсією $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$. Математичне сподівання $m_{\bar{x}}$ залежить від гіпотез $(H_0$ або $H_1)$. Вибираємо рівень значущості α і визначимо критичний квантиль $\overline{X}_\alpha$, $m_0 < \overline{X}_\alpha < m_1$. Правило перевірки гіпотези сформулюємо таким чином: якщо $\overline{X} < \overline{X}_\alpha$, то приймаємо H_0, а якщо $\overline{X} \geq \overline{X}_\alpha$ то приймається H_1. Це показано на рис. 3.

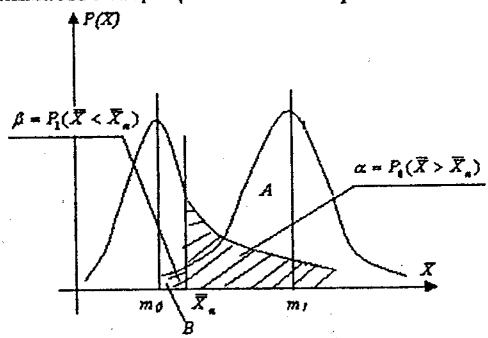


Рис.3. Співвідношення між α і β при перевірці гіпотез H_0 і H_1

Із (8) і рис. 3 для рівня значущості α у випадку односторонньої критичної області A маємо

$$\alpha = P_0(\overline{X} > \overline{X}_\alpha) = P_0(U_{\overline{X}}^0 > U_{1-\alpha}) \tag{11}$$

де

$$U_{\overline{X}}^0 = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{(\overline{X} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma};$$

$$U_{1-\alpha} = \frac{\overline{X}_\alpha - m_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{(\overline{X}_\alpha - m_0)\sqrt{n}}{\sigma};$$

$U_{1-\alpha}$ - визначається як рішення рівняння $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{U_{1-\alpha}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha$.

З останньої рівності знайдемо критичний квантиль нормального розподілу

$$\overline{X}_\alpha = m_0 + U_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = m_0 - U_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

Імовірність помилки другого роду β, тобто ймовірність відхилити правильну гіпотезу H_1, визначимо як імовірність влучення $\overline{X}$ в область $B(\overline{X} < \overline{X}_\alpha)$(див. рис. 3)

$$\beta = P_1(\overline{X} < \overline{X}_\alpha) = P_1(U^1_{\overline{X}} < U_\beta), \qquad (13)$$

де

$$U^1_{\overline{X}} = \frac{\overline{X} - m_1}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{(\overline{X} - m_1)\sqrt{n}}{\sigma};$$

$$U_\beta = \frac{\overline{X}_\alpha - m_1}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{(\overline{X}_\alpha - m_1)\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (14)$$

Підставимо в (14) $\overline{X}_\alpha$ з (12), отримаємо

$$U_\alpha + U_\beta = \frac{m_0 - m_1}{\sigma}\sqrt{n}\ . \qquad (15)$$

При заданих α і n потужність критерію з (15) визначається однозначно за формулою

$$1 - \beta = 1 - F(U_\beta), \qquad (16)$$

де

$$F(U_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{U_\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,; U_\beta = -(U_\Delta + U_\alpha); U_\Delta = \frac{m_1 - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\ . \qquad (17)$$

З (16), (17) випливає, що потужність критерію $\overline{X}$ для $H_0 : m = m_0$ збільшується при зростанні відстані між m_1 і m_0 чи при збільшенні числа спостережень n. Крива потужності зображена на рис. 4.

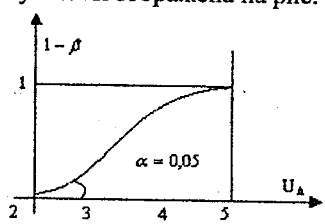


Рис. 4. Крива потужності для $H_0 : m = m_0$

При контролі виробів у процесі виробництва величини α і β можна вибирати в залежності від розміру втрат, пов'язаних з помилковими рішеннями. Нехай, наприклад, номінальне значення параметра X дорівнює m_0. Вироби контролюються за величиною середньої $\overline{X}$, яка визначається з вибірки об'ємом n. Вартість повторного запуску у виробництво бракованого виробу складає Q грн. Вартість гарантійного ремонту у споживача дорівнює P грн. Середні втрати при контролі цієї партії

$$\overline{C} = n(\alpha Q + \beta P) \qquad (18)$$

Оптимальне значення α і β знайдемо з умови мінімуму середніх втрат $\overline{C}$ при обмеженні (15).

3.3. Побудова статистичного критерію за принципом відношення правдоподібності

В загальному випадку критична область S_C для вибраного критерію K визначається умовами максимуму потужності цього критерію відносно альтернативної гіпотези H_1 при заданому рівні α. Нехай гіпотези H_0 і H_1 – прості, а критерій K – неперервна випадкова величина. Будемо називати гіпотезу H простою, якщо вона однозначно визначає розподіл критерію K, в інших випадках гіпотеза H називається складною. Задача формулюється таким чином: потрібно так вибрати критичну область S_C, щоб для заданого рівня значущості

$$\int_{S_C} P(K/H_0)dk = \alpha \tag{19}$$

досягалось максимальне значення величини

$$\int_{S_C} P(K/H_1)dk \ . \tag{20}$$

Ця задача розв'язується на підставі теореми Неймана - Пірсона.

Теорема. Серед усіх критеріїв, які розрізняють гіпотези H_0 і H_1 з заданою помилкою першого роду a, найбільш потужним є критерій, для якого критична область S_C визначається з відношення правдоподібності

$$\lambda = \frac{P(K/H_1)}{P(K/H_0)} > C(>0), \tag{21}$$

де C - число, яке вибирається так, щоб задовольнялась умова (19).

Доведення. Нехай S_D- будь-яка інша критична область, яка задовольняє умову (3.1), тобто $\int_{S_D} P(K/H_0)dk = a$. Тоді

$$\int_{Sc} P(K/H_0)dk - \int_{S_D} P(K/H_0)dk = 0 \,. \tag{22}$$

Величина лівої частини (22) не зміниться, якщо видалити з областей Sc і S_D загальну для них частину $S_DS_C = K_DK_C$, тобто

$$\int_{S_C \setminus S_C S_D} P(K/H_0)dk \ - \int_{S_D \setminus S_D S_C} P(K/H_0)dk = 0 \,. \tag{23}$$

Область $S_C \setminus S_DS_C$ належить області S_C, тому, враховуючи (21), знаходимо

$$\int_{S_C \setminus S_C S_D} P(K/H_0)dk \le C^{-1} \cdot \int_{S_C \setminus S_C S_D} P(K/H_1)dk \ . \tag{24}$$

Область $S \setminus S_DS_C$ знаходиться поза критичною областю S_C. Для області $S \setminus S_DS_C$ відношення правдоподібності $\frac{P(K/H_1)}{P(K/H_0)} \le C$ звідки

$$\int_{S \setminus S_D S_C} P(K/H_0)dk \ge C \int_{S \setminus S_D S_C} P(K/H_1)dk \ . \tag{25}$$

Підставляючи ці нерівності в рівняння (22), додаючи і віднімаючи величину C^{1} $\int\limits_{S_0 S_C} P(K/H_1)dk$, отримуємо

$$C^{-1}\int\limits_{S_C}\left(P(K/H_1)dk-\int\limits_{S}P(K/H_1)dk\right)\geq 0,\text{ звідки випливає }\int\limits_{S_C}P(K/H_1)dk\geq\int\limits_{S}P(K/H_1)dk,$$

що й потрібно було довести.

Таким чином, при перевірці двох простих гіпотез відмова від критерію, який побудований за допомогою відношення правдоподібності (21), на користь будь-якого іншого критерію, який забезпечує заданий рівень значущості α, призводить до втрати потужності.

Критерії, які побудовані на відношенні правдоподібності (21), називаються критеріями відношення правдоподібності. Вони широко застосовуються при перевірці статистичних гіпотез.

Побудуємо правило перевірки гіпотези H_0 про рівність середнього значення $\overline{X}$ вибірки: $(X_1,...,X_n)^T$, яка має нормальний розподіл з відомою дисперсією σ^2, математичному сподіванню m_0.

Нульову H_0 і альтернативну H_1 гіпотези можна записати у вигляді

$$H_0:\overline{X}=m_0,\qquad H_1:\overline{X}=m_1(>m_0).$$

Складемо відношення правдоподібності:

$$\lambda=\frac{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_{\overline{X}}\right)^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{\overline{X}}^{-2}\left(\overline{X}-m_1\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_{\overline{X}}\right)^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{\overline{X}}^{-2}\left(\overline{X}-m_0\right)^2\right)}>C.$$

Прологарифмуємо цю нерівність, отримаємо еквівалентну нерівність: $\ln\lambda>\ln C$ або $\left(\overline{X}-m_0\right)^2-\left(\overline{X}-m_1\right)^2>2\sigma_{\overline{X}}^2\ln C$. (26)

Дисперсія середнього значення $\overline{X}$ буде $\sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$. Підставивши ці значення в (26) після перетворень знайдемо $\overline{X}>\frac{m_1+m_0}{2}+\frac{\sigma^2}{n}(m_1-m_0)\ln C$.

Позначивши праву частину цієї нерівності через C', отримаємо, що область неможливих значень $\overline{X}$ визначається нерівністю $\overline{X}>C'$.

Величину C' знайдемо з умови забезпечення заданого рівня значущості α, тобто $P(\overline{X}>C'/H_0)=\alpha$.

Величина $\overline{X}$ має нормальний розподіл $N\left(m_0,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, якщо справедлива нульова гіпотеза H_0, тому рівень значущості $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{Z_c}^{\infty}e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ$, де $Z_{c'}=\frac{C'-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$. Звідси $C'_\alpha=m_0+\frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\sigma$, (27)

а правило перевірки нульової гіпотези $H_0:\overline{X}=m_0$ альтернативи $H_1:\overline{X}=m_1$

формулюється так: при $\overline{X}(n) \geq m_0 + \frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\sigma$ (28)

нульова гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної H_1.

В іншому випадку нульова гіпотеза узгоджується з дослідними даними. Потужність $1-\beta$ критерію (28) дорівнює ймовірності того, що при гіпотезі $H_1 : \overline{X} = m_1$ середнє $\overline{X}$ потрапляє в критичну область $S_C = [C'_a, \infty)$:

$$1-\beta = P(\overline{X} > C'_a / H_1) = 1 - P(\overline{X} > C'_a / H_1) = 1 - F_0(Z'_{C'_a}),$$

де $\quad Z'_{C'_a} = \frac{C'_a - m_1}{\sigma}\sqrt{n}; \qquad F_0(Z'_{C'_a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{Z'_{C'_a}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ.$

Підставимо в цю рівність C'_a з формули (27) і отримаємо вираз для потужності критерію (28):

$$1-\beta = 1 - F_0\left(\frac{m_0 + Z_{1-\alpha}\sigma / n^{\frac{1}{2}} - m_1}{\sigma} n^{\frac{1}{2}}\right) = F_0(Z_\alpha + \delta), \tag{29}$$

де $\delta = \sqrt{n}(m_1 - m_0)/\sigma$.

У (29) використані властивості функції стандартного розподілу, за яким $1 - F_0(Z) = F_0(-Z)$; $Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$ На підставі цих властивостей з (29) випливає співвідношення (15) і співвідношення між квантилями Z_α і Z_β:

$Z_\alpha + Z_\beta = -\delta.$ (30)

З формули (29) можна зробити висновок, що функція потужності зростаюча функція за δ.

Наприклад, визначимо число спостережень, яке потрібно для забезпечення потужності $1-\beta$=0,95, якщо перевіряється визначена раніше гіпотеза H_0 проти H_1, причому $\alpha = 0{,}05$; $m_1 - m_0 = 0{,}1; \sigma = 10$.

Обчислення за формулою (15) з використанням таблиць квантилів нормального розподілу дають

$$U_\alpha = -U_{1-\alpha} = -1{,}96; U_\beta = -U_{1-\beta} = -1{,}96; 2 \cdot 1{,}96 = \frac{0{,}1}{12} n, \text{ звідки } n \approx 471.$$

В даному випадку при перевірці нульової гіпотези H_0 як критерій K використовувалось стандартизоване відхилення $U = \frac{\overline{X} - m_i}{\sigma_{\overline{X}}}, i = 0{,}1.$

3.4. Схема статистичної оцінки зміни числових характеристик виробничих параметрів

В математичній статистиці розроблено велике число критеріїв, які призначені для перевірки статичних гіпотез. При оцінюванні виробничих управлінських рішень в основному застосовуються гіпотези про числові характеристики виробничих параметрів. Найбільш повно розроблена теорія перевірки гіпотез відносно числових характеристик нормального закону розподілу. Схема перевірки статистичної гіпотези.

1. Вимірюють виробничі параметри, в результаті чого формується матриця стану виробничої системи:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & \dots & X_{nm} \end{pmatrix}, \qquad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,m}; \tag{31}$$

2. Для кожного параметра X_j перевіряють гіпотезу про нормальність. Методика перевірки викладена у пункті 9. Якщо параметр X_j має розподіл, відмінний від нормального, то він перетворюється в параметр V_j з нормальним законом розподілу. Перетворення здійснюється таким чином. Елементи *j-го* стовпця матриці (31) впорядковуються за зростанням:

$$X_1 \le X_2 \le \dots \le X_n \ , \tag{32}$$

для статистичного ряду підраховуються частоти m_k, які відповідають значенням X_K, обчислюються накопичені частоти

$$M_K = M_{K-1} + m_K, \quad K = \overline{2,l}, \tag{33}$$

$M_1 = m_1$ і значення функції розподілу $F(X_k) = \dfrac{M_K}{n}$. (34)

Значення Z_{kj} нормально розподіленої випадкової величини $Z_j = V_j - m_{vj}$ з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією, які відповідають значенням X_{kj} випадкової величини X_j з довільним законом розподілу, знаходять із співвідношення

$$F(X_{kj}) = \mathrm{P}(X_j < X_{kj}) = \mathrm{P}(Z_j < Z_{kj}) = F_0(Z_{kj}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z_{kj}} e^{\frac{Z^2}{2}} dZ, \tag{35}$$

звідки Z_{kj} знаходять як функцію, обернену інтегралу ймовірностей

$$Z_{kj} = F_0^{-1}(Z_{kj}) \ . \tag{36}$$

Рівняння (35) з заданою точністю розв'язується багатьма методами. Наближені значення Z_{kj} з різним ступенем точності знаходяться за формулами. Одна з них:

$$Z_{kj} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(-\ln\left(1 - 4\left(F(X_K) - \frac{1}{2} \right) \right)^2 \right)^i}. \tag{37}$$

Відрізок ряду з першими чотирма членами забезпечує необхідну в інженерних розрахунках точність в інтервалі $0{,}03 < F(X_K) \le 0{,}97$, коефіцієнти a_j дорівнюють: $a_1 = \frac{\pi}{2}$; $a_2 = 0{,}37068870 \cdot 10^{-1}$; $a_3 = 0{,}83209445 \cdot 10^{-3}$;

$a_4 = -0{,}2323240 \cdot 10^{-3}$.

Друга, більш точна формула має вигляд: $$Z_{kj} = t - \frac{\sum_{i=0}^{2} C_i \cdot t^i}{\sum_{i=0}^{3} d_i t^i} + \varepsilon(F(X_K)), \tag{38}$$

де $t=\sqrt{-2\ln(1-F(X_k))}$; $0{,}5\le F(X_K)<1$;

$|\varepsilon|<4{,}5\cdot10^{-4}; C_0=2{,}515517; C_1=0{,}802853; C_2=0{,}010328; d_0=1;$
$d_1=1{,}432788; d_2=0{,}189269; d_3=0{,}001308.$

При $0\le F(X_K)<0{,}5$ використовується властивість функції, оберненої інтегралу ймовірностей, $\forall F(X)\in[0{,}1)$, $Z(F(Z))+Z(1-F(Z))=0$, звідки

$$Z_{kj}(F(X_k))=Z_{kj}(1-F(X_k)). \tag{39}$$

Значення Z_{kj}, обчислені за наближеними формулами (37) і (38), можна використовувати і як початкові при розв'язанні рівняння (35). Оцінки математичного сподівання $\overline{V_j}$ дисперсії S_{vj} випадкової величини V_j з нормальним законом розподілу можна знайти, розв'язавши системи рівнянь.

$$\begin{cases} Z_{kj}=\dfrac{V_{kj}-\overline{V_j}}{S_{vj}}; \\ Z_{mj}=\dfrac{V_{mj}-\overline{V_j}}{S_{vj}}, \end{cases} \tag{40}$$

де $V_{kj}=X_{kj}$; $V_{mj}=X_{mj}$; $k\neq m$; (41)

$$S_{vj}=\frac{X_{kj}-X_{mj}}{Z_{kj}-Z_{mj}};\quad \overline{V_j}=X_{kj}-S_{vj}Z_{kj}.$$

3. Формулюють гіпотезу H_0 і альтернативну гіпотезу H_1. Якщо гіпотеза H_0 проста, наприклад H_0: $\bar{x}=a$, то її завжди можна звести до вигляду H_0: $\bar{x}-a=0$.

4. Вибирають критерій K_n (критична статистика), який є деякою функцією від результатів спостережень, $K_n=K(X_1,\dots,X_n)$. Критерій K_n за умови справедливості гіпотези H_0 є випадковою величиною з добре вивченим законом розподілу, який задається таблично у вигляді наближених формул чи програм для ЕОМ. Критична статистика базується за принципом відношення з використанням теореми Неймана - Пірсона й є найбільш потужною.

5. Задаються рівнем значущості a за таблицями критичних квантилів чи за наближеними формулами знаходять критичні квантилі $K_{1-\frac{a}{2}}, K_{\frac{a}{2}}$.

У випадках, коли гіпотеза H_0 пов'язана лише з односторонніми відхиленнями критерію K_n, тобто, коли нас цікавлять тільки "надто великі" чи "надто малі" значення критерію K_n, знаходять один з K_a чи K_{1-a} критичних квантилів.

6. За даними спостережень $\{X_1,\dots,X_n\}$ обчислюють значення критерію K_n. Якщо це значення потрапляє в критичну область, то гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_1. Якщо значення K_n потрапляє в допустиму область, то гіпотеза H_0 може вважатись такою, що не суперечить дослідним даним. З допомогою перевірки гіпотез

в управлінні виробництвом можуть розв'язуватись перш за все задачі порівняння вибіркових числових характеристик (середньої, дисперсії) з відповідними заданими величинами; числових характеристик двох чи кількох вибірок між собою (перевірка гіпотези про належність цих вибірок одній сукупності).

Задачі порівняння - основа оцінювання ефективності управлінських рішень. Найбільш загальними є задачі перевірки гіпотез про відповідність емпіричного розподілу з певною теоретичною моделлю чи гіпотези про значимість розбіжності між емпіричними законами розподілу. Якщо при розв'язанні конкретних виробничих задач досліджувані параметри з довільним законом розподілу перетворюються у параметри, які розподілені за нормальним законом, то немає потреби перевіряти гіпотези у вигляді закону розподілу, оскільки нормальний закон повністю визначається своїм математичним очікуванням і дисперсією.

3.5. Перевірка гіпотез відносно середніх для нормальних розподілів

Порівняння середньої з нормативом

Нехай випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням m_0 і середньоквадратичним відхиленням σ, тобто $X \in N(m,\sigma)$. За результатами випробувань отримана вибірка $(X_1,\ldots,X_n)^T$ і обчислені точкові оцінки: математичного сподівання та середньої

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{42}$$

і дисперсії - вибіркова дисперсія

$$S^2=\frac{N}{N-1}\left(\overline{X^2}-(\overline{X})^2\right), \tag{43}$$

де $\overline{X^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$, $i=\overline{1,n}$.

Потрібно перевірити гіпотезу про те, що математичне сподівання випадкової величини X дорівнює деякому заданому значенню m_0. Оскільки відома лише оцінка математичного сподівання $\overline{X}$, то перевірка гіпотези полягає у встановленні значимої чи незначимої відмінності між середньою $\overline{X}$ і заданою величинами. У відповідності зі схемою перевірки гіпотези виконаємо такі операції.

Характеристика початкових даних: $X \in N(m,\sigma)$, відомі $X=(X_1,\ldots,X_n)^T$ оцінки $\overline{X}$ і S^2. Гіпотеза H_0: $m=m_0$. Альтернативна гіпотеза H_1: $m\neq m_0$. Рівень значущості: α. Критерій (критична статистика):

$$t=\frac{\overline{X}-m_0}{S_{\overline{X}}}=\frac{\overline{X}-m_0}{S}\sqrt{n}\,. \tag{44}$$

Цей критерій є мірою близькості середньої $\overline{X}$ і математичного сподівання m. Критерій (44) може бути отриманий методом максимальної вірогідності аналогічно критерію Z, який застосовується при відомій дисперсії σ^2 (29). Щільність розподілу випадкової величини t має вигляд

$$f(t,v)=\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad -\infty<t<+\infty \tag{45}$$

і називається розподілом Стьюдента. Цей розподіл отримав в 1908р. англійський вчений В. Госсет (який писав під псевдонімом Student). В (45) $v = n-1$ - число ступенів вільності. $\Gamma(\bullet)$ - гамма-функція. Значення t–критерію затабульовані для v і α.

Розв'язування: Якщо $|t|\geq t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}$, то нульова гіпотеза H_0 відхиляється, в іншому випадку H_0 узгоджується з дослідними даними.

Порівняння середніх двох вибірок

Однією з основних задач оцінювання ефективності управлінських рішень на виробництві є оцінювання вагомості зміни математичних сподівань виробничих параметрів, які відображають траєкторії центрів їх групування. В найпростішому випадку робиться порівняння середніх в двох вибірках, які відповідають двом видам управлінських розв'язків. Задача порівняння формулюється таким чином. Досліджуються випадкові величини X_1, X_2, які мають нормальні розподіли $X_1 \in N(m_1\sigma_1)$, $X_2 \in N(m_2\sigma_2)$. За результатами дослідів отримані незалежні вибірки $(X_{11},...,X_{1n1})^T$, $(X_{21},...,X_{2n2})^T$. Для цих даних за формулами (42), (43) обчислені точкові оцінки $\overline{X}_1(n_1)$, $S_1(n_1)$ для першої вибірки й $\overline{X}_2(n_2)$, $S_2(n_2)$ - для другої. Потрібно перевірити гіпотезу про рівність математичних сподівань $m_1=m_2$ випадкових величин X_1,X_2 проти альтернативи $m_1\neq m_2$. Дана задача порівняння математичного сподівання з заданою величиною. Для цього розглянемо випадкову величину $Y=X_1-X_2$. Вона дорівнює різниці двох незалежних випадкових величин, які мають нормальний розподіл, математичні сподівання m_1,m_2 і дисперсії σ_1^2 і σ_2^2. За теоремою додавання числових характеристик незалежних випадкових величин маємо

$$m_y = m_{X_1} - m_{X_2}; \quad \sigma_y^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2.$$

Оцінкою математичного сподівання випадкової величини Y є середня

$$\overline{Y}=\overline{X}_1-\overline{X}_2=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_{i_1}-\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}X_{i_2}, \tag{46}$$

а оцінкою дисперсії цієї статистики є вибіркова дисперсія

$$S_{\bar{y}}^2=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{1}{n_1+n_2-2}\left((n_1-1)S_1^2+(n_{2-1})S_2^2\right). \tag{47}$$

Отже, задача порівняння середніх двох вибірок може бути сформульована таким чином. Характеристика вихідних даних:

$Y\in N(0,\sigma_y)$, $Y=X_1 - X_2$; $X_1(n)=(X_{11},...,X_{1n1})^T$; $X_2(n)=(X_{21},...,X_{2n2})^T$, відомі оцінки $\overline{X}_1$, S_1^2, $\overline{X}_2$, S_2^2, $\overline{Y}=\overline{X_1}-\overline{X_2}$; $S_y^2=\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-2}$.

Гіпотеза H_0: $m_y=0$. Альтернативна гіпотеза H_1: $m_y\neq 0$. Рівень значущості α. Критерій (критична статистика): $t=\frac{\left|\overline{Y}-0\right|}{S_{\bar{y}}}=\frac{\left|\overline{X_1}-\overline{X_2}\right|}{S_{\bar{y}}}$, (48)

де $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, S_1, S_2 визначаються за формулами (42), (43), а $S_{\bar{y}}$ - за (47). *Розв'язування.* Якщо дисперсії порівнюваних вибірок однакові $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ і

$$|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)}, \qquad (48)'$$

то нульова гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної, в іншому випадку H_0 узгоджується з дослідними даними. Для реалізації на ЕОМ алгоритмів порівняння середніх двох вибірок, отриманих на основі виробничих досліджень, критичну статистику $t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)\right)}$ розподілу Стьюдента доцільно обчислювати за наближеними формулами:

$$t_{\beta',n}\approx\sum_{i=0}^{4}q_i\left(Z_{\beta'}\right)/v^i, \qquad (49)$$

де $\beta'=1-\frac{a}{2}$; $n=n_1+n_2-2$; $q_0\left(Z_{\beta'}\right)=Z_{\beta'}\approx\sum a_i\left(-\ln(1-2(1-a))^2\right)$;

$$a_1=\frac{\pi}{2};a_2=0{,}37068870\cdot10^{-1};a_3=0{,}8320945\cdot10^{-2};a_4=-0{,}23232430\cdot10^{-3};$$

$$q_1\left(Z_{\beta'}\right)=\frac{1}{4}\left(Z_{\beta'}^3+Z_{\beta'}\right);q_2\left(Z_{\beta'}\right)=\frac{1}{96}\left(5Z_{\beta'}^5+16Z_{\beta'}^3+3Z_{\beta'}\right);$$

$$q_3\left(Z_{\beta'}\right)=\frac{1}{384}\left(3Z_{\beta'}^7+19Z_{\beta'}^5+17Z_{\beta'}^3-15Z_{\beta'}\right);$$

$$q_4\left(Z_{\beta'}\right)=\frac{1}{92160}\left(79Z_{\beta'}^9+776Z_{\beta'}^7+1482Z_{\beta'}^5-1920Z_{\beta'}^3-945Z_{\beta'}\right);$$

$v=n-1$ – число ступенів вільності.

Приклад: Відділом головного технолога розроблені технологічні заходи, які повинні підвищити надійність відеотерміналів при технологічному напрацюванні. Проведено 30 вимірів відеотермінала, виготовленого за старою технологією, й 25 вимірів цього параметра відеотермінала, виготовленого за вдосконаленою технологією. Встановлено, що напрацювання до відмови в умовах виробництва розподілено за нормальним законом, а оцінки числових характеристик напрацювань для відеотерміналів, виготовлених за старою технологією, складають $\overline{X_1}=36$ год, $S_1^2=2704$ год^2, а за вдосконаленою технологією $\overline{X_2}=54$ год, $S_2^2=2200$ год^2. Відомо, що $\sigma_1^2=\sigma_2^2$. Перевірити гіпотезу про ефективність впроваджуваних вдосконалень технології.

Розв'язування. Згідно з умовою, нульова гіпотеза H_0 має вигляд $H_0: m_1=m_2$ (середнє напрацювання до першої відмови за старою технологією дорівнює середньому напрацюванню до першої відмови за вдосконаленою технологією), а альтернативна гіпотеза H_1 виражається співвідношенням $H_1: m_1 \neq m_2$ (вдосконалена технологія на рівні значущості α = 0,05 збільшує середнє напрацювання до першої відмови в процесі технологічного прогону). За умовою $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, тому обчислюємо критерій Стьюдента за (48).

$$t = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{\left(\left(\frac{1}{n_1}\right)+\left(\frac{1}{n_2}\right)\right)\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} = \frac{|36-54|}{\sqrt{\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{25}\right)\frac{(30-1)2740+(25-1)2200}{30+25-2}}} = 0{,}6.$$

Для заданого рівня значущості α=*0,05* і числа ступенів вільності $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 30 + 25 - 2 = 53$ за таблицею квантилів розподілу Стьюдента знаходимо $t_{0,025;53} = 2{,}0$. Оскільки *t=0,60<2,00*, то для відхилення гіпотези H_0 немає підстав. Це означає, що різниця в середніх напрацюваннях до першої відмови $\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|$ = 18 год на користь вдосконаленої технології є випадковою чи статистично незначною, ефективність нової технології, якщо вона дійсно є, може бути доведена при великій кількості досліджень відеотерміналів. Особливу обережність при відхиленні H_0 слід проявляти у випадку "надто великих" значень критерію $t(n_1 + n_2 - 2)$, які призводять до посилення нерівності $(48)'$. Причинами цього можуть бути як значимі розходження середніх, тобто невиконання гіпотези H_0, так і значні розходження дисперсій досліджуваних вибірок. Тому при дослідженні причин неоднорідності розглядуваних вибірок виробничих даних необхідно ще й перевірити гіпотези про рівність дисперсій $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проти альтернативи $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Методика такої перевірки викладена в наступному розділі. Якщо в процесі перевірки гіпотези H_0 про рівність середніх виявлена значна відмінність дисперсій, то як критерій використовується статистика:

$$t = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{50}$$

Значення критичної статистики $\tilde{t}_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2, c)$ подані в таблиці додатків.

В цій таблиці $\tilde{t}_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2, c)$ позначено як $V(\nu_1, \nu_2, C, Q)$,

$$\text{де } \nu_j = n_j - 1; j = 1{,}2; Q = \frac{\alpha}{2}; \alpha = 2{,}5\%; 5\%, C = \frac{S_1^2 / n_1}{S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2}. \tag{50$'$}$$

Відомо, що статистика (50) має розподіл, який близький до *t*-розподілу Стьюдента з числом ступенів вільності

$$\tilde{v} = \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} \qquad (51)$$

Величина $\tilde{v}$ знаходиться між найменшими з $(n_1 - 1)$ і $(n_2 - 1)$ і їх сумою $(n_1 + n_2 - 2)$. Отже, рішення про рівність середніх приймається в залежності від результатів перевірки гіпотези про рівність дисперсій в досліджуваних вибірках. При рівності дисперсій застосовується правило, яке базується на нерівності $(48)'$. Якщо дисперсії, що порівнюються, виявляються різними $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, то нульова гіпотеза $H_0 : m_1 = m_2$ відхиляється на користь альтернативної гіпотези $H_1 : m_1 \neq m_2$, якщо виконані такі нерівності

$$|\tilde{t}| > t_{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{v}) \text{ чи } |\tilde{t}| > \tilde{t}_{\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2, C). \qquad (52)$$

Наближене значення критичного квантиля $t_{\frac{\alpha}{2}}(v)$ може бути отримане розкладанням в ряд за від'ємними степенями v за (49).

3.6. Перевірка гіпотез відносно дисперсій двох вибірок

Дисперсія виробничого показника характеризує стабільність технологічного процесу, точність контрольно-вимірювальних засобів, ритмічність виробництва, стійкість роботи автоматизованих систем.

Будь-які управлінські рішення спрямовані на зменшення дисперсії. Тому перевірка гіпотези про значущість зміни дисперсії - важлива прикладна задача, яка формулюється таким чином: є дві нормально розподілені випадкові величини $X_j \in N(m_j, \sigma_j), j = 1,2$, для яких відомі вибіркові дисперсії $S_1^2 \neq S_2^2$ і об'єми вибірок n_1, n_2. Потрібно прийняти рішення про значущість відмінностей між дисперсіями σ_1^2 і σ_2^2. Це рішення може бути прийнятим за результатами перевірки нульової гіпотези $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проти альтернативи $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Гіпотеза H_0 перевіряється за схемою. Характеристика вихідних даних: $X_j \in N(m_j, \sigma_j), j = 1,2$, відомі вибіркові дисперсії σ_j^2, об'єми вибірок n_j.

1. Гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
2. Альтернативна гіпотеза $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
3. Рівень значущості α.
4. Критерій (критична статистика): $F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$, (53)

де S_A^2, S_B^2 - відповідно, більша та менша з порівнянних дисперсій S_j^2.

Ця статистика має F-розподіл Фішера із щільністю:

$$P(F)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{V_A+V_B}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{V_A}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{V_B}{2}\right)}\left(\dfrac{V_A}{V_B}\right)^{\frac{V_A}{2}}\dfrac{F^{\frac{V_A}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{V_A}{V_B}F\right)^{\frac{V_A+V_B}{2}}}, \text{якщо } F\ge 0\\ 0, \qquad \text{якщо } F<0\end{cases},$$

де $V_A=n_A-1$-число степенів чисельника; $V_B=n_B-1$ – число степенів знаменника (53).

Розв'язування: Якщо

$$F_{(v_A,v_B),1-\frac{a}{2}}\le F\le F_{(v_A,v_B),\frac{a}{2}}, \qquad (54)$$

то гіпотеза H_0 про рівність дисперсій не відхиляється в протилежному випадку H_0 - відхиляється. Критерій F (53) є найбільш потужним.

Приклад. Для умов прикладу, який розглядається в п. 3.5, визначити вплив вдосконаленої технології на стабілізацію якості відеотерміналів.

Розв'язування. Стабілізація якості може бути оцінена дисперсією напрацювання до першої відмови при технологічному прогоні. Зменшення дисперсії цього показника свідчить про ефективність технологічних рішень, які реалізуються. Тому нульова гіпотеза H_0 має вигляд $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (обидві технології забезпечують однакову стабільність якості), а альтернативна гіпотеза - $H_1:\sigma_2^2<\sigma_1^2$ (вдосконалена технологія покращує стабільність якості). Обчислимо спостережуване значення F-критерію

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{2704}{2200}=1{,}23.$$

В даному випадку критична область є одностороння, тому критичний квантиль знаходимо для рівня значущості α=0,05 і числа ступенів вільності $v_1=n_1-1=30-1=29,\ v_2=n_2-1=25-1=24$ з таблиці квантилів розподілу Фішера $F_{(29,24,0.05)}=1{,}93$. Оскільки F=1,23<1,93, то підстав для відхилення нульової гіпотези немає. Тому розбіжність між дисперсіями $\sigma_1^2-\sigma_2^2=2704-2200=504$ є статистично незначною й не дає підстав прийняти рішення про те, що вдосконалена технологія покращує стабільність якості відеотерміналів. При реалізації алгоритму перевірки гіпотези H_0 на ЕОМ для розрахунку критичної статистики $F_{v_A,v_B,\frac{a}{2}}$ можна використати наближену формулу:

$$F_{(v_A,v_B),\frac{a}{2}}\approx e^{2W}, \qquad (55)$$

де

$$W=\frac{Z_p(h+\lambda)^{\frac{1}{2}}}{n}-\left(\frac{1}{2b-1}-\frac{1}{2a-1}\right)\left(\lambda+\frac{5}{6}-\frac{2}{3h}\right);$$

$$h=2\left(\frac{1}{2a-1}-\frac{1}{2b-1}\right);\ \lambda=\frac{Z_p^2-3}{6};\ b=\frac{v_A}{2};\ a=\frac{v_B}{2},$$

Z_p визначається за однією з формул (48), (49) при $P=1-\frac{\alpha}{2}=F(X_K)$ для двосторонньої, $P=1-\alpha=F(X_K)$ - для односторонньої довірчої області. В таблицях звичайно наводяться значення $F_{(v_A,v_B),\frac{\alpha}{2}}$. Друга межа критичної області визначається співвідношенням $F_{(v_A,v_B),1-\frac{\alpha}{2}}=\left(F_{(v_A,v_B),\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1}$ (56)

і використовується при знаходженні надійних меж середньоквадратичного відхилення.

3.7. Порівняння часток ознаки в двох вибірках

Задача порівняння двох часток виникає при оцінюванні якості продукції, що випускається, при дослідженні властивостей систем, коли реєструється тільки наявність чи відсутність будь-якої ознаки. Нехай $P_1^*=\frac{m_1}{n_1}$ і $P_2^*=\frac{m_2}{n_2}$ частоти, m_1, m_2 - частоти однієї і тієї ж ознаки A в двох вибірках, n_1, n_2 - об'єми цих вибірок. Нульова гіпотеза H_0 означає припущення, що обидві вибірки належать одній генеральній сукупності, в якій частка ознаки A дорівнює P. Гіпотеза H_0 записується у вигляді $H_0: P_1=P_2 \Rightarrow P_1-P_2=0$, де $P_1 \geq P_2$. Для задач контролю якості, коли в основному застосовуються безповоротні вибірки, частота m має біноміальний розподіл. Побудова точних критеріїв перевірки гіпотез при порівнянні часток, основаних на біноміальному розподілі, пов'язана з обчислювальними труднощами. Тому для практичних розрахунків при оцінюванні якості будемо використовувати наближені методи, які розроблені для великих і малих вибірок.

1. *Великі вибірки.* До них належать вибірки, для яких $n_j>10, j=1,2$. Перевірка гіпотези H_0 зводиться до перевірки гіпотези про порівняння середніх двох вибірок з нормальних сукупностей. Для цього використовується перетворення $\tilde{\varphi}=\frac{\left(2\arcsin\sqrt{P_1^*}-2\arcsin\sqrt{P}\right)}{\sqrt{n}}$.

Величина $\tilde{\varphi}$ при достатньо великому n має приблизно нормальний розподіл $\tilde{\varphi}\in N(0,1)$. Критична статистика має вигляд $V=\frac{|\varphi_1-\varphi_2|}{S_{\varphi_1-\varphi_2}}$. (57)

Формальний запис зазначених положень, складається з:

а)характеристик вихідних даних: $P_1^*=\frac{m_1}{n_1}$; $P_2^*=\frac{m_2}{n_2}$; $\varphi_j=2\arcsin\sqrt{P_j^*}$, $j=1,2; \varphi_j\in N\left(0,\frac{1}{\sqrt{n_j}}\right)$;

б) гіпотези $H_0: P_1=P_2 \Rightarrow P_1-P_2=0$ і альтернативної гіпотези $H_1: P_1 \neq P_2$;

в) рівня значущості α;

г) критерію (критична статистика) $V = \dfrac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$. (58)

Розв'язування. H_0 відхиляється при $V > U_{1-\alpha}$, в протилежному випадку приймається H_1.

Приклад. Число бракованих виробів в серійній партії склало 6 з 60, а в партії, яка піддається форсованим випробуванням, - 4 з 30. Оцінити на рівні значущості 0,05 вплив режиму форсування на надійність виробів.

Розв'язування. За умовою задачі маємо $m_1 = 6$, $n_1 = 60$, $m_2 = 4$, $n_2 = 30$.

Знаходимо величини $\varphi_1 = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{6}{60}} = 0{,}633$; $\varphi_2 = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{4}{30}} = 0{,}731$.

За формулою (58) обчислюємо спостережувані значення критерію

$$V = \frac{|0{,}633 - 0{,}731|}{\sqrt{\dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{30}}} = 0{,}438.$$

За величиною $\alpha = 0{,}05$ знаходимо табличне значення $U_{1-\alpha} = 1{,}64$. Спостережуване значення критерію $V = 0{,}438 < 1{,}64$, тому немає підстав для відхилення нульової гіпотези. Таким чином, отримана розбіжність між частками браку в серійній і контрольній партіях несуттєва, тобто, прийнятий режим форсування не сприяє "випаданню" виробів.

2. *Малі вибірки.* Якщо n_1 і n_2 - малі числа, то наближена перевірка гіпотези про рівність двох ймовірностей може здійснюватись за методикою:

З початкових даних формується таблиця спряженості ознак 2×2 (табл.1).

Таблиця 1

Таблиця спряжених ознак 2×2

Сукупність	Частоти				
	Емпіричні			Теоретичні	
	A	$\bar{A}$	Всього	A	$\bar{A}$
Вибірка 1 Вибірка 2	m_1 m_2	n_1-m_1 n_2-m_2	n_1 n_2	$P \cdot n_1$ $P \cdot n_2$	$(1-P)n_1$ $(1-P)n_2$
Всього	m_1+m_2	n_1+n_2- $-(m_1+m_2)$	n_1+n_2	—	—

Якщо обидві вибірки належать одній і тій же генеральній сукупності з часткою ознаки P, то теоретичні частоти будуть виражатись співвідношеннями, які наведені в двох останніх стовпцях табл. 1.

Оцінкою ймовірності P є величина $P=\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$. В табл. 1 наведені емпіричні і відповідні їм теоретичні частоти. Для перевірки їх відповідності (гіпотеза H_0) використовується критерій, який визначається за модифікованою формулою:

$$\chi^2=\frac{1}{P(1-P)}\left(\frac{(m_1-pn_1)^2}{n_1}+\frac{(m_2-pn_2)^2}{n_2}\right). \tag{59}$$

Критична статистика $\chi^2_{\alpha,\nu}$ визначається для заданого рівня значущості α і числа ступенів вільності $\nu = 1$ з таблиці процентних точок розподілу X^2 при $Q=\alpha$. Область застосування розглядуваної методики для перевірки нульової гіпотези обмежується величиною частоти, розглядуваної в кожній клітинці табл. 1, $m_{i,j}\geq 10, i,j=1,2$.

Коротко методику можна виразити так. Характеристики вихідних даних наведені з табл. 1. Гіпотеза H_0: $P_1=P_2 \Rightarrow P_1 - P_2 = 0$. Альтернативна гіпотеза $P_1>P_2$. Рівень значущості α. Критерій: $\chi^2=\frac{1}{P(1-P)}\sum_{i=1}^{2}\frac{(m_i-pn_i)^2}{n_i}$.

Розв'язування. H_0 відхиляється при $\chi^2>\chi^2_{\alpha,1}$ на користь альтернативи H_1, в іншому випадку приймається.

Приклад. В процесі розробки нового зразка відеотермінала досліджується вплив на надійність двох типів блоків живлення. На досліджування було поставлено 24 відеотермінали з блоками живлення типу *K* (група 1) і 35 відеотерміналів з блоками живлення типу *M* (група 2). На кінець випробувань в першій групі залишилось 10 справних відеотерміналів, а в другій - 31. Необхідно перевірити на рівні значущості 0,05 чи впливає блок живлення типу *M* на надійність відеотерміналів.

Розв'язування. За умовою задачі складемо таблицю сполученості, позначивши через подію A справжнє функціонування під час випробовувань, а через $\bar{A}$ - відмову. В табл. 2 оцінкою теоретичної ймовірності P є величина $P=\frac{10+28}{19}=0,64$.

Таблиця 2

Значення емпіричних і теоретичних частот

Випробувальні групи	Частоти				
	Емпіричні			Теоретичні	
	A	$\bar{A}$	Всього	A	$\bar{A}$
1	10	14	24	15	9
2	28	7	35	22	13
Всього	38	21	59	—	—

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$\chi^2 = \frac{1}{0{,}64 \cdot 0{,}36}\left(\frac{(10-15)^2}{24} + \frac{(28-22)^2}{35}\right) = 8{,}99.$$

При α=0,05 і ν=1 з табл. додатків знаходимо критичну статистику $\chi^2_{0,05;1} = 3{,}84$. Оскільки $\chi^2 = 8{,}99 > \chi^2_{0,05;1} = 3{,}84$, то відзначена розбіжність часток справних і тих відеотерміналів, що відмовили, є вагомою, тобто блоки живлення типу M (група 2) підвищують надійність відеотерміналів.

3.8. Оцінювання однорідності кількох вибірок

При розв'язуванні виробничих задач характерна ситуація коли, з метою вивчення впливу певного виробничого фактора A на надійність чи на будь-яку іншу властивість виробів, дослідження проводяться на l вибірках (l >2); в результаті отримується сукупність емпіричних значень $\left(\chi_1^k,...,\chi_{nk}^k\right)\left(i=\overline{1,n_k};k=\overline{1,l}\right)$, де i - номер результату вимірювань в K-й вибірці; K-номер вибірки, яка відповідає певному значенню фактора A. Виробничий параметр X у кожній вибірці має нормальний розподіл $\chi^k \in N$. За результатами вимірювань обчислені середні $\overline{X}_k$ і вибіркові дисперсії S_k^2. Потрібно вияснити, чи істотно впливає здійснена в експерименті зміна фактора A на зміну параметра. Розв'язування цієї задачі при нормальному розподілі досліджуваного параметра зводиться до задачі порівняння кількох дисперсій $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 ... = \sigma_l^2$ і декількох математичних сподівань m_1=m_2=...=m_l Напрошується думка попарно порівняти усі вибірки, використовуючи P і t-критерій. При такому способі порівняння використовується тільки та інформація, яка міститься в двох вибірках, а особливості змін, зафіксовані в інших вибірках, залишаються поза дослідженням. Однак, що неможливо на двох випадкових сукупностях виробничих даних, може стати досить можливим на більшій їх кількості, тому що при цьому, по-перше, можуть відбутися більш рідкісні події, а по-друге, можливе накопичення відмінностей від пари до пари. Тому повний вплив відмінностей між кількома вибірками результатів виробничих вимірів може здійснюватися на основі їх одночасного порівняння за середніми і дисперсіями.

Нульова гіпотеза H_0 в даному випадку формулюється так:

$H_0 : m_1 = m_2 = ... = m_l ; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 ... = \sigma_l^2$.

Альтернативна гіпотеза має вигляд H_1: не всі математичні сподівання або не усі дисперсії рівні між собою.

Процедура перевірки нульової гіпотези H_0 включає в себе перевірку спочатку гіпотези $H_0\left(\sigma^2\right): \sigma_1^2 = \sigma_2^2 ... = \sigma_l^2$. Якщо ця гіпотеза підтверджується, то перевіряється гіпотеза $H_0(m): m_1 = m_2 = ... = m_l$. Для перевірки гіпотези $H_0\left(\sigma^2\right)$ про рівність дисперсій можна застосувати критерій Бартлетта:

$$\lambda = q\sum_{k=1}^{l}(n_k - 1)\ln\left(\frac{S^2}{S_k^2}\right), \tag{60}$$

де
$$S^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{l}(n_k - l)}\sum_{k=1}^{l}(n_k - 1)S_k^2 , \tag{61}$$

S_k^2 визначається за формулою (43), $q = \left(1 + \frac{1}{3(l-1)}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{l} n_k - l}\right)\right)^{-1}$. (62)

Статистика λ при $l > 3$ і справедливості гіпотези $H_0(\sigma^2)$ розподілена приблизно як χ^2 - випадкова величина з v=l-1 ступенями вільності. Для перевірки гіпотези $H_0(\sigma^2)$ за формулою (60) обчислюють спостережувані значення критерію χ^2, а за заданим рівнем значущості α і числом ступенів вільності v=l-1 знаходять критичний квантиль $\chi^2_{a,v}$, використовуючи таблиці квантилів χ^2 - розподілу або наближену формулу:

$$\chi^2_{a,v} = v\left(1 - \frac{2}{9v} + Z_{1-a}\sqrt{\frac{2}{9v}}\right), \tag{63}$$

де Z_{1-a} квантиль нормального розподілу, який відповідає ймовірності $1-\alpha$, наближено визначається за формулою (37) або (38). Якщо виявиться, що $\lambda \geq \chi^2_{a,v}$, то гіпотеза про рівність вибіркових дисперсій $H_0(\sigma^2)$ відхиляється на користь альтернативної гіпотези $H_1(\sigma^2)$. В протилежному випадку нульова гіпотеза $H_0(\sigma^2)$ приймається і перевіряється нульова гіпотеза $H_0(m)$ про рівність середніх. При цьому як критерій належності усіх вибірок до спільної генеральної сукупності використовується статистика

$$F = \frac{\frac{1}{l-1}\sum_{k=1}^{l}\left(\overline{x_k} - \overline{x}\right)^2}{S^2} , \tag{64}$$

де
$$\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{l} n_k - \overline{x_k}}{\sum_{k=1}^{l} n_k} \tag{65}$$

спільне середнє арифметичне, обчислене за об'єднанням всіх вибірок. Якщо нульова гіпотеза $H_0(m)$ вірогідна, то вибіркова статистика (64) підпорядковується F- розподілу з v_l=l-1 і v_2=n-l ступенями вільності, і тому правило перевірки гіпотези $H_0(m)$ в перевірці умови $F > F_{vl,v2,a}$. (66)

Якщо ця умова виконується, то гіпотеза $H_0(m)$ про рівність середніх відхиляється, а в протилежному випадку приймається.

3.9. Оцінка нормального характеру розподілу виробничих параметрів

У математичній статистиці розроблені критерії перевірки нормальності розподілу випадкових величин. З цих критеріїв найбільш придатні для застосування в методиці оцінювання виробничих рішень критерії, основані на характерних властивостях коефіцієнта асиметрії β_1 і середнього абсолютного відхилення $\theta = M|x-m|$. Ці критерії просто реалізуються на ЕОМ різних типів, забезпечуючи більшу в порівнянні з іншими критеріями швидкодію.

У випадку нормального розподілу коефіцієнт асиметрії $\beta_1 = 0$, а середнє абсолютне відхилення θ виражається через середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{M(x-m)^2}$ відношенням $\frac{\theta}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Для оцінки цих характеристик в умовах виробництва можна використати їх оцінки

$$\beta_1(n) = \frac{1}{n(S^*)^3}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3, \tag{67}$$

$$d_n = \frac{1}{nS^*}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3; \tag{68}$$

де $S^* = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Статистика $\hat{\beta}(n)$, d_n розподілена асимптотично з параметрами:

$$M\left(\hat{\beta}(n)\right) = 0, \quad D\left(\hat{\beta}(n)\right) = \frac{G(n-2)}{(n+1)(n+3)}; \tag{69}$$

$$M(d_n) = \frac{2}{\sqrt{\pi(n-1)}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + \frac{2}{8n-9} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right);$$

$$D(d_n) = \frac{1}{n}\left\{1 + \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{n(n-2)} + \arcsin\frac{1}{n-1}\right)\right\} - \frac{n-1}{\pi}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right) = \frac{1}{n}\left(\left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \frac{1}{4\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{70}$$

Критичні квантилі для критеріїв $\hat{\beta}_1(n)$, d_n затабульовані в таблицях додатків.

При реалізації на ЕОМ процедури перевірки нормальності виробничих параметрів можна використовувати наближені формули, отримані із (69), (70):

$$\beta_1(n,Q) \approx Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{G(n-2)}{(n+1)(n+3)}}; \tag{71}$$

$$d_{n,Q} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 + \frac{2}{8n-9}) + Z_{1-Q}((1 - \frac{3}{\pi}) - \frac{1}{4\pi n}) ; \tag{72}$$

$$d_{n,Q} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+\frac{2}{8n-9}) - Z_{1-Q}((1-\frac{3}{\pi}) - \frac{1}{4\pi n}) \ , \qquad (73)$$

де Z_{1-Q} визначається за формулою (37) або (38). Методика перевірки нормальності розподілу виробничих параметрів наведена нижче:

1. За даними вимірювань $X=(X_1, X_2, ..., X_n)^T$ обчислюють спостережувані значення критеріїв $\hat{\beta}(n)$ (67) і d_n (68).

2. Вибравши значення Q=0,01;0,05 і використовуючи об'єм вибірки n, з таблиць додатків або за формулою (71) знаходять величину 100Q% - ї точки $\hat{\beta}_1(n,Q)$

3. За величинами Q і n за табл. або за формулами (72), (73) знаходять величини 100 Q %-ї точки і 100 $(1-Q)$ %-ї точки $d_{n,1-Q}$

4. Перевіряють умови.

$$\begin{cases} \left|\hat{\beta}_1(n)\right| < \hat{\beta}_1(n,Q) \\ d_{n,1-Q} < d_n < d_{n,Q} \end{cases} \qquad (74)$$

Якщо ці умови виконуються, то гіпотеза H_0: параметр X розподілений за $(X \in N(m,\sigma))$ приймається. Якщо хоча б одна з нерівностей (74) виявиться порушеною, то гіпотеза H_0 відхиляється з рівнем значущості: $Q<\alpha<2\text{-}Q^2$.

Варіанти завдань для самостійного розв'язування

Варіант 1

№	1	2	3	4	9	6	7	8
X	20,006	17,146	25,488	20,165	20,430	16,693	22,664	20,700
У	193,806	199,116	25,055	201,681	194,729	190,923	213,513	199,332

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	18,247	18,751	21,309	19,329	19,726	19,567	19,346	17,598
У	189,391	197,233	204,429	196,384	197,822	196,627	191,822	190,286

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	20,503	19,710	19,618	19,315	20,844	17,979	20,333	18,399
У	201,633	197,864	196,788	198,758	199,393	191,631	198,009	194,109

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	20,603	18,738	18,187	16,866	21,749	19,427	17,444	21,030
У	199,960	190,368	185,012	189,711	206,625	191,853	19,743	206,423

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	20,820	20,958	21,595	21,729	22,714	21,592	18,871	21,128
У	205,780	207,789	210,945	213,694	215,683	204,703	197,379	200,036

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	17,687	20,228	21,985	18,000	20,988	18,967	18,750	17,799
У	190,089	205,351	204,575	193,176	202,240	192,626	189,576	190,573

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	20,220	17,072	20,838	18,218	21,731	16,817	21,984	18,156
У	194,608	188,652	199,887	195,753	200,852	190,001	204,908	197,839

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	22,816	22,125	21,121	18,011	19,825	19,979	19,864	20,256
У	217,302	212,004	200,711	190,667	199,165	199,610	199,994	198,354

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	18,717	19,384	19,281	18,337	20.552	18,914	18,548	15,375
У	192,885	195,662	193,139	193,717	200,116	191,950	1.83,386	181,741

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	21,172	20,249	19,767	20,649	18,309	14,800	20,232	18,285
У	205,814	200,612	200,365	199,238	181,060	177,106	197,304	87,484

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	17,798	20,041	20,322	19,933	21,785	20,500	18,377	21,195
У	190,183	200,888	201,302	203,589	209.123	198,711	195,301	199,633

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	17,363	22,284	22,644	22,733	21,146	19,315	17,995	20,267
У	193,114	216,043	217,855	214,795	203,665	192,546	191,559	197,750

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	18,416	18,577	17,026	23,490	22,801	21,451	16,377	21,183
У	189,770	187,113	194,225	221,811	215,767	198,633	186,275	196,127

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	15,780	22,553	20,223	22,220	21,326	22,219	19,963	24,006
У	186,572	211,973	205,841	212,880	210,804	209,906	208,566	221,651

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	21,663	18,947	20,528	16,936	22,744	20,371	19,400	20,222
У	205,187	196,412	195,697	192,194	213,157	200,363	197,784	207,968

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	23,198	22,487	23,239	23,771	22,059	20,283	17,556	20,339
У	219,811	218,253	222,796	221,456	209,882	195,947	189,740	201,242

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	19,869	18,637	20,140	19,959	19,406	21,365	17,166	22,569
У	196,440	194,171	200,539	198,520	200,300	199,967	192,846	218,652

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	23,254	22,306	19,813	21,152	19,296	17,884	17,968	20,823
У	219,669	209,972	201,671	203,649	192,219	186,051	192,651	204,762

№	145	146	147	148	149	150
X	20,485	17,528	20,499	22,531	21,134	19,218
У	196,794	189,963	207,762	213,859	203,396	193,780

Варіант 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	21,006	18,131	26,515	21,166	21,433	17,676	23,677	21,704
У	203,220	208,95	237,590	211,85	204,240	199,97	224,87	209,290

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	19,238	19,745	22,315	20,326	20,724	20,565	20,343	18,586
У	198,34	206,940	214,89	206,021	207,61	206,3	201,03	199,300

№	17	18	19	20	21	22	23	24
Х	21,506	20,709	20,616	20,312	21,848	18,969	21,335	19,391
У	211,8	207,65	206,47	208,62	209,36	200,78	207,83	203,5

№	25	26	27	28	29	30	31	32
Х	21,606	19,731	19,178	17,851	22,758	20,424	18,431	22,035
У	209,970	199,42	193,541	198,65	217,300	201,06	199,79	217,063

№	33	34	35	36	37	38	39	40
Х	21,824	21,963	22,603	22,737	23,728	22,6	19,866	22,134
У	216,35	218,56	222,03	225,04	227,25	215,2	207,1	210,07

№	41	42	43	44	45	46	47	48
Х	18,676	21,229	22,995	18,99	22,003	19,962	19,743	18,788
У	199,08	215,86	215,07	202,47	212,48	201,9	198,55	199,62

№	49	50	51	52	53	54	55	56
Х	21,221	18,058	21,842	19,209	22,74	17,801	22,994	19,147
У	204,1	197,49	209,9	205,3	210,98	198,96	215,43	207,58

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	23,83	23,135	22,127	19,001	20,824	20,979	20,863	21,257
У	229,02	223,2	210,81	199,73	209,08	209,57	209,93	208,21

№	65	66	67	68	66	70	71	72
Х	19,711	20,381	20,277	19,328	21,554	19,909	19,541	16,352
У	202,17	205,23	202,47	203,07	210,14	201,16	191,77	189,88

№	73	74	75	76	77	78	79	80
Х	22,177	21,25	20,765	21,653	19,301	15,774	21,233	19,276
У	216,4	210,68	210,39	209,18	189,22	184,79	207,06	196,25

№	81	82	83	84	85	86	87	88
Х	18,787	21,042	21,323	20,932	22,794	21,502	19,369	22,201
У	199,19	210,97	211,43	213,93	220,04	208,6	204,81	209,63

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	18,35	23,296	23,658	23,746	22,152	20,311	18,985	21,269
У	202,39	227,63	229,62	226,28	214,05	201,82	200,78	207,55

№	97	98	99	100	101	102	103	104
Х	19,408	19,569	18,011	24,508	23,815	22,458	17,359	22,189
У	198,76	195,85	203,59	233,98	227,34	208,55	194,87	205,79

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	16,758	23,566	21,224	23,231	22,333	23,23	20,963	25,026
У	195,18	223,18	216,4	224,17	221,87	220,92	219,38	233,82

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	22,671	19,942	21,531	17,921	23,758	21,373	20,397	21,223
У	215,733	206,045	205,310	201,370	224,480	210,410	207,560	218,73

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	24,214	23,533	24,256	24,79	23,069	21,285	18,543	21,341
У	231,78	230,062	235,053	233,6	220,88	205,570	198,721	211,37

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	20,868	19,633	21,143	20,959	20,403	22,372	18,152	23,582
У	206,134	203,584	210,593	208,380	210,310	210,231	202,090	230,490

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	24,273	23,318	20,812	22,158	20,292	18,874	18,958	21,827
У	231,632	220,980	211,820	214,030	201,460	194,670	201,900	215,240

№	145	146	147	148	149	150
X	21,487	18,515	21,502	23,543	22,139	20,214
У	206,510	198,942	218,510	225,252	213,75	203,18

Варіант 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	22,006	19,117	27,543	22,167	22,435	18,660	24,690	22,707
У	212,640	218,770	250,130	222,010	213,760	209,001	236,232	219,252

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	20,23	20,739	23,322	21,323	21,723	21,563	21,34	I 19,574
У	207,28	216,63	225,353	215,662	217,392	215,961	210,242	208,332

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	22,508	21,708	21,614	21,308	22,852	19,959	22,336	20,383
У	221,970	217,440	216,160	218,480	219,330	209,930	217,651	212,923

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	22,609	20,725	20,169	18,835	23,767	21,422	19,419	23,041
У	219,992	208,47	202,073	207,572	227,993	210,284	208,842	227,721

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	22,829	22,968	23,611	23,746	24,741	23,608	20,863	23,139
У	226,921	229,322	233,112	236,393	238,812	225,692	216,812	220,112

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	19,664	22,232	24,005	19,982	23,008	20,957	20,737	19,777
У	208,07	226,371	225,563	211,763	222,733	211,173	207,332	208,663

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	22,222	19,043	22,846	20,223	23,748	18,785	24,004	20,138
У	213,613	206,334	219,923	214,844	221,123	207,913	225,963	217,322

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	24,844	24,146	23,133	19,991	21,823	21,979	21,862	22,258
У	240,743	234,440	220,920	208,789	219,675	219,540	219,920	218,060

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	20,704	21,378	21,274	20,322	22,557	20,904	20,533	17,329
У	211,469	214,810	211,809	212,439	220,170	210,360	200,160	198,601

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	23,183	22,251	21,764	22,656	20,292	16,748	22,234	20,268
У	226,99	220,744	220,425	219,145	197,384	192,465	216,814	205,025

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	19,776	22,042	22,325	21,932	23,803	22,505	20,361	23,207
У	208,19	221,063	221,572	224,263	230,963	218,545	214,31	219,64

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	19,337	24,307	24,671	24,760	23,158	21,308	19,975	22,270
У	211,650	239,210	241,390	237,760	224,430	211,100	209,840	217,340

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	20,420	20,562	18,996	25,525	24,829	23,466	18,341	23,195
У	207,74	204,59	212,95	246,150	238,920	218,470	203,460	215,470

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	17,737	24,578	22,225	24,242	23,339	24,241	21,963	26,046
У	203,770	234,390	226,960	235,450	232,930	231,920	230,180	245,990

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	23,679	20,937	22,533	18,906	24,771	22,375	21,394	22,224
У	226,270	215,670	214,920	210,537	235,81	220,465	217,335	229,494

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	25,234	24,512	25,272	25,809	24,084	22,286	19,531	22,343
У	243,753	241,854	247,343	245,743	231,884	215,235	207,655	221,543

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	21,868	20,623	22,141	21,959	21,443	23,379	19,138	24,595
У	215,763	212,995	220,654	218,243	220,322	220,052	211,323	242,332

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	25,286	24,329	21,812	23,163	21,288	19,863	19,948	22,832
У	243,592	232,423	221,974	224,413	210,713	203,294	211,140	225,710

№	145	146	147	148	149	150
X	22,49	19,503	22,504	24,556	23,145	21,210
У	216,220	207,910	229,260	236,630	224,110	212,590

Варіант 4

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	23,006	20,103	28,57	23,167	23,437	19,643	25,704	23,711
У	222,06	228,57	262,67	232,17	223,29	218,03	247,59	229,22

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	21,221	21,732	24,329	22,319	22,721	22,561	22,336	20,561
У	216,23	226,33	235,81	225,30	227,18	225,63	219,45	217,30

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	23,511	22,706	22,612	22,305	23,857	20,949	23,338	21,375
У	232,15	227,23	225,85	228,34	229,31	219,07	227,48	222,29

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	23,612	21,719	21,16	19,819	24,776	22,419	20,406	24,045
У	230,01	217,53	210,61	216,49	238,67	219,5	217,87	238,34

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	23,833	23,973	24,619	24,754	25,755	24,616	21,854	24,145
У	237,49	240,08	244,19	247,73	250,38	236,19	226,53	230,16

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	20,653	23,231	25,015	20,97	24,013	21,951	21,731	20,766
У	217,06	236,88	236,07	221,05	232,97	220,44	216,51	217,69

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	223,11	215,16	229,94	224,37	231,27	216,86	236,49	227,04
У	213,61	206,33	219,92	214,84	221,12	207,91	225,96	217,32

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	25,858	25,156	24,138	20,981	22,822	22,979	22,862	23,259
У	252,46	245,60	231,03	217,84	228,91	229,50	229,91	227,92

№	65	66	67	68	69	70	71	72
Х	21,698	22,375	22,27	21,312	23,56	21.898	21,526	18,306
У	220,75	228,38	221,13	221,78	230,21	219,57	208,56	206,13

№	73	74	75	76	77	78	79	80
Х	24,189	23,253	22,763	28,659	21,284	17,722	23,235	21,259
У	237,57	230,81	230,44	220,09	205,56	200,13	226,57	213,79

№	81	82	83	84	85	86	87	88
Х	20,765	23,042	23,327	22,932	24,812	23,507	21,352	24,213
У	217,19	231,14	231,7	234,59	241,88	228,4	223,81	229,65

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	20,324	25,319	25,684	25,774	24,163	22,304	20,965	23,271
У	220,90	250,79	253,15	249,24	234,81	220,38	218,98	227,15

№	97	98	99	100	101	102	103	104
Х	21,392	21,555	19,982	26,543	25,843	24,473	19,323	24,201
У	216,73	213,34	222,29	258,31	250,49	228,4	212,04	225,16

№	105	106	107	108	109	110	111	112
Х	18,716	25,591	23,226	25,253	24,346	25,252	2,963	27,066
У	212,36	245,61	237,51	246,73	243,98	242,92	240,97	258,16

№	113	114	115	116	117	118	119	120
Х	24,688	21,931	23,536	25,89	25,785	23,377	22,391	23,225
У	236,82	225,29	224,54	219,68	247,14	230,5	227,10	240,23

№	121	122	123	124	125	126	127	128
Х	26,246	25,525	26,288	26,827	25,09	23,287	20,519	23,345
У	255,72	253,65	259,54	257,88	242,88	224,84	216,6	231,63

№	129	130	131	132	133	134	135	136
Х	22,867	21,617	23,142	22,958	22,397	24,386	20,124	25,607
У	225,43	222,39	230,71	228,1	230,32	230,1	220,54	254,17

№	137	138	139	140	141	142	143	144
Х	26,303	25,341	22,811	24,169	22,285	20,852	20,938	23,836
У	255,54	243,02	232,12	234,79	219,96	211,91	220,37	236,19

№	145	146	147	148	149	150
X	23,492	20,491	23,507	25,569	24,151	22,206
У	225,94	216,88	240,87	248,02	234,47	222,90

Варіант 5

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	24,006	21,089	29,598	24,168	24,439	20,827	26,717	24,714
У	231,50	238,36	275,22	242,33	323,83	227,04	258,95	239,19

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	22,212	22,726	25,335	23,316	23,72	23,559	23,333	21,549
У	225,17	236,02	246,28	234,94	236,97	235,30	228,67	226,30

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	24,513	23,705	23,61	23,301	24,861	21,939	24,34	22,367
У	242,32	237,02	235,53	238,19	239,29	228,21	237,32	231,67

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	24,615	22,712	22,151	20,804	25,784	23,416	21,393	25,051
У	240,04	226,59	219,15	225,41	249,36	228,73	226,91	248,97

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	24,837	24,978	25,627	25,763	26,768	25,624	22,849	25,151
У	248,06	250,84	255,27	259,06	261,94	246,70	236,23	240,22

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	21,641	24,232	26,025	21,96	25,018	22,946	22,725	21,755
У	226,05	247,38	246,58	230,33	243,23	229,72	225,5	226,73

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	24,224	21,014	24,855	22,182	25,766	20,753	26,023	22,119
У	232,63	223,98	239,97	233,90	241,43	225,80	247,04	236,76

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	26,872	26,167	25,144	21,871	23,821	23,979	23,861	24,261
У	264,18	256,8	241,14	226,89	238,83	239,46	239,90	237,78

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	22,691	23,372	23,266	22,303	24,563	22,893	22,519	19,283
У	230,04	233,95	230,47	231,13	240,24	228,79	216,97	214,24

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	25,195	24,254	23,762	24,662	22,275	18,696	24,236	22,251
У	248,16	240,88	240,47	239,05	213,74	207,79	236,33	222,56

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	21,754	24,042	24,328	23,931	25,821	24,51	22,344	25,219
У	226,19	241,23	241,84	244,92	252,79	238,3	233,31	239,67

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	21,311	26,33	26,697	26,787	25,169	23,301	21,955	24,273
У	230,15	262,37	264,91	260,72	245,20	229,66	228,11	236,95

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	22,384	22,548	20,967	27,56	26,857	25,48	20,304	25,207
У	225,72	222,09	231,63	270,47	262,07	238,34	220,61	234,86

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	19,695	26,604	24,227	26,264	25,353	26,264	23,963	28,086
У	220,93	256,82	248,05	258,02	255,03	253,93	251,76	270,33

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	25,696	22,926	24,538	20,875	26,799	24,379	23,388	24,226
У	247,37	234,92	234,17	228,83	258,48	240,55	236,87	250,97

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	27,262	26,537	27,304	27,846	26,156	24,289	21,507	24,346
У	267,68	265,44	271,78	270,02	253,88	234,48	225,55	241,76

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	23,866	22,61	24,142	23,958	23,394	25,392	21,109	26,62
У	235,09	231,79	240,76	237,96	240,32	240,16	229,76	265,99

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	27,319	26,352	23,81	25,175	23,281	21,842	21,928	24,84
У	267,49	254,04	242,27	245,18	229,21	220,53	229,61	246,66

№	145	146	147	148	149	150
X	24,495	21,478	24,509	26,581	25,156	23,202
У	235,67	225,85	250,73	259,41	244,83	231,42

Варіант 6

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	25,006	22,074	30,625	25,169	25,441	21,61	27,73	25,718
У	240,93	248,14	287,78	252,49	242,37	236,05	270,31	249,16

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	23,203	23,72	26,342	24,313	24,719	24,556	24,33	22,537
У	234,12	245,7	256,75	244,57	246,76	244,98	237,90	235,30

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	25,516	24,703	24,608	24,298	25,865	22,928	25,341	23,359
У	252,49	246,82	245,22	248,04	249,28	237,35	247,15	241,06

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	25,618	23,706	23,142	21,788	26,793	24,413	22,38	26,056
У	250,06	235,65	227,70	234,31	260,05	237,96	235,94	259,61

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	25,841	25,982	26,635	26,772	27,782	26,632	23,843	26,156
У	258,63	261,59	266,34	270,39	273,50	257,20	245,94	250,28

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	22,629	25,233	27,035	22,95	26,023	23,941	23,718	22,744
У	235,03	257,88	257,09	239,61	253,48	239,76	234,49	235,76

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	25,225	21,999	25,859	23,173	26,774	21,738	27,033	23.11
У	242,15	232,8	250	243,43	251,59	234,73	257,59	246,47

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	27,886	27,178	26,149	22,961	24,82	24,979	24,86	25,262
У	275,89	268,87	251,27	235,94	248,74	249,43	249,89	247,64

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	23,685	24,369	24,263	23,295	25,565	23,887	23,512	20,259
У	239,33	243,53	239,81	240,47	250,28	238,53	225,39	222,35

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	26,201	25,255	24,761	25,666	23,267	19,67	25,237	23,242
У	258,75	250,95	250,49	249,01	221,94	215,45	246,10	231,34

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	22,743	25,042	25,33	24,931	26,83	25,512	23,336	26,225
У	235,19	251,31	251,97	255,24	263,71	248,21	242,80	249,70

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	22,297	27,342	27,71	27,801	26,175	24,298	22,945	25,274
У	239,39	273,94	276,67	272,21	255,59	238,95	237,24	246,76

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	23,376	23,541	21,952	28,578	27,871	26,487	21,286	26,213
У	234,71	230,85	240,95	282,63	273,64	248,29	229,18	244,57

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	20,674	27,617	25,228	27,275	26,359	27,275	24,962	29,106
У	229,50	268,04	258,60	269,30	266,08	264,95	262,53	282,5

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	26,704	23,921	25,541	Г21,86	27,813	25,38	24,385	25,227
У	257,93	24,537	243,81	237,96	269,81	250,61	246,64	261,71

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	28,278	27,55	28,32	28,865	27,11	25,29	22,494	25,348
У	279,64	277,22	284,02	282,16	264,88	244,12	234,49	251,89

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	24,866	23,603	25,143	24,958	24,391	26,399	22,095	27,633
У	244,76	241,19	250,82	247,83	250,32	250,22	238,96	277,82

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	28,335	27,364	24,809	26,181	24,278	22,831	22,917	25,844
У	279,44	265,06	252,41	255,57	238,47	229,16	238,84	257,14

№	145	146	147	148	149	150
X	25,497	22,466	25,512	27,594	26,162	24,198
У	245,40	234,81	261,46	270,79	255,20	240,83

Варіант 7

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	26,006	23,060	31,652	26,170	26,443	22,594	28,743	26,721
У	250,377	257,896	300,334	262,653	251,921	245,049	281,677	259,142

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	24,195	24,714	27,348	25,309	25,717	25,554	25,327	23,525
У	243,067	255,381	267,217	254,211	256,545	254,649	247,126	244,29

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	26,518	25,702	25,606	25,395	26,869	23,218	26,343	24,351
У	262,677	256,607	254,912	257,894	259,273	246,479	256,291	250,437

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	26,621	24,700	24,133	22,772	27,802	25,410	23,367	27,061
У	260,093	244,711	236,248	243,210	270,741	247,195	244,962	270,243

№	33	34	35	36	37	38	39	40
Х	26,845	26,987	27,643	27,780	28,796	27,640	24,837	27,162
У	269,191	272,348	277,414	281,719	285,062	267,615	255,639	260,344

№	41	42	43	44	45	46	47	48
Х	23,618	26,234	28,045	23,940	27,028	24,936	24,712	23,733
У	244,008	268,372	267,717	248,885	263,736	748,278	243,483	244,790

№	49	50	51	52	53	54	55	56
Х	26,226	22,985	26,863	24,164	27,783	22,722	28,043	24,101
У	251,678	241,618	260,039	252,945	261,768	243,648	268,134	256,170

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	28,900	28,188	27,155	23,951	25,819	25,979	25,860	26,263
У	287,604	279,196	261,392	244,990	258,658	259,388	259,877	257,509

№	65	66	67	68	69	70	71	72
Х	24,679	25,366	25,259	24,287	26,568	24,882	24,504	21,236
У	248,617	253,103	249,155	249,812	260,322	247,214	233,814	230,446

№	73	74	75	76	77	78	79	80
Х	27,207	26,256	25,760	26,669	24,259	20,644	26,239	24,234
У	269,334	261,014	260,508	258,982	230,139	223,067	255,871	240,11

№	81	82	83	84	85	86	87	88
Х	23,732	26,043	26,331	25,931	27,839	26,515	24,328	27,231
У	244,182	261,390	262,105	265,558	274,632	258,125	252,283	259,736

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	23,284	28,353	28,724	28,815	27,181	25,294	23,935	26,275
У	248,625	285,512	288,419	283,687	265,988	248,242	246,371	256,573

№	97	98	99	100	101	102	103	104
Х	24,369	24,534	22,937	22,595	28,885	27,495	22,268	27,219
У	243,700	258,321	250,265	294,782	285,215	258,249	237,747	254,285

№	I05	106	107	108	109	110	111	112
Х	21,653	28,629	26,229	28.286	27,366	28,286	25,962	30,126
У	238,055	279,257	269,132	280,581	277,127	275,960	273,300	294,66

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	27,712	24,915	26,543	22,844	28,826	26,382	256,403	26,229
У	268,485	254,155	253,450	247,086	281,155	260,659	256,403	272,437

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	29,294	28,562	29,337	29,884	28,121	26,292	23,482	26,350
У	291,600	288,998	296,248	294,303	275,882	253,775	243,432	262,017

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	25,865	24,596	26,144	25,958	25,388	27,406	23,081	28,646
У	254,436	250,594	260,873	257,690	260,314	260,298	248,15	289,637

№	137	138	139	140	141	142	143	141
X	29,352	28,376	25,808	27,187	25,274	23,821	23,907	26,848
У	291,394	276,084	262,548	265,964	247,729	237,785	248,061	267,609

№	145	146	147	148	149	150
X	26,500	23,454	26,514	28,600	27,168	25,194
У	255,144	243,772	272,188	282,182	265,568	250,258

Варіант 8

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	27,006	24,046	32,680	27,171	27,446	23,577	29,757	27,725
У	259,828	267,640	312,899	272,813	261,480	254,038	293,042	262,126

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	25,186	25,707	28,355	26,306	26,716	26,552	26,323	24,513
У	252,017	265,058	277,691	263,848	266,334	264,323	256,360	263,280

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	27,521	26,700	26,605	26,291	27,874	24,908	27,345	25,343
У	272,843	266,400	264,603	267,741	269,272	255,611	266,835	259,814

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	27,624	25,693	25,124	23,757	28,811	26,407	24,355	28,066
У	270,127	253,778	244,805	252,102	281,438	256,436	253,982	280,877

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	27,849	27,992	28,651	28,789	29,809	28,648	25,832	28,167
У	279,755	283,098	288,484	293,042	296,622	278,231	265,336	270,418

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	24,606	27,231	29,055	24,930	28,033	25,931	25,706	24,722
У	252,985	278,860	278,146	258,155	273,997	257,560	252,481	253,816

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	27,227	23,970	27,867	25,156	28,792	23,706	29,053	25,091
У	261,213	250,429	270,081	262,457	271,951	252,563	278,693	265,864

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	29,915	29,199	28,161	24,941	26,818	26,979	26,859	27,265
У	299,315	290,393	271,525	254,038	268,573	269,352	269,864	267,378

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	25,672	26,363	16,256	25,278	27,571	25,876	25,497	22,213
У	257,906	262,679	258,501	289,151	270,366	256,433	242,250	238,538

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	28,213	27,258	26,758	27,692	25,250	21,618	27,240	25,225
У	279,923	271,084	270,526	268,955	238,353	230,743	265,646	248,897

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	24,721	27,043	27,333	26,930	28,848	27,517	25,320	28,237
У	253,174	271,471	252,240	275,873	285,553	268,041	261,765	269,778

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	24,271	29,364	29,737	29,828	28,186	26,291	24,925	27,277
У	257,850	297,077	300,167	295,170	,276,384	257,538	255,497	266,390

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	25,361	25,527	23,922	30,612	29,899	28,502	23,150	28,225
У	252,693	248,381	259,567	306,935	296,788	262,218	246,303	264,015

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	22,632	29,642	27,231	29,298	28,373	29,297	2.6,962	31,146
У	246,601	290,478	279,664	291,862	288,168	286,977	284,058	306,836

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	28,721	25,910	27,546	23,829	29,840	27,384	26,379	27,230
У	279,049	263,771	263,101	256,203	292,483	270,714	266,169	283,157

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	30,310	29,574	30,353	30,903	29,131	27,293	24,470	27,351
У	303,556	300,772	308,472	306,441	286,887	263,433	252,370	272,148

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	26,864	25,589	27,144	26,958	26,385	28,413	24,067	29,659
У	264,112	259,992	270,929	267,557	270,304	270,380	257,347	301,452

№	137	138	139	140	141	142	143	144
Х	30,368	29,387	26,807	28,192	26,271	24,810	24,897	27,852
У	303,342	287,113	272,685	276,359	256,995	246,415	257,282	278,083

№	145	146	147	148	149	150
Х	27,502	24,441	27,517	29,619	28,173	26,191
У	264,890	252,727	282,907	293,569	275,939	259,687

Варіант 9

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Х	28,006	25,32I	33,707	28,172	28,448	24,561	30,770	28,728
У	269,258	277,368	325,469	282,971	271,047	263,018	304,408	279,115

№	9	10	11	12	13	14	15	16
Х	26,177	26,701	29,361	27,303	27,715	27,550	27,320	25,501
У	260,968	274,730	288,183	273,485	276,125	273,998	265,598	262,264

№	17	18	19	20	21	22	23	24
Х	28,523	27,699	27,603	27,288	28,878	25,898	28,346	26,335
У	283,020	276,093	274,295	277,586	279,276	264,740	276,684	269,189

№	25	26	27	28	29	30	31	32
Х	28,627	26,687	26,115	24,741	29,819	27,404	25,342	29,071
У	280,164	262,878	253,368	260,987	292,137	265,683	262,997	291,510

№	33	34	35	36	37	38	39	40
Х	28,853	28,997	29,659	29,798	30,823	29,655	26,826	29,173
У	290,318	293,846	299,555	304,350	308,182	288,752	275,030	280,497

№	41	42	43	44	45	46	47	48
Х	25,595	28,237	30,065	25,920	29,038	26,926	26,700	25,711
У	261,958	289,345	288,682	267,421	284,261	266,843	261,481	262,840

№	49	50	51	52	53	54	55	56
Х	28,228	24,955	28,871	26,147	29,800	24,690	30,063	26,082
У	270,755	259,235	280,127	271,964	282,144	261,480	289,258	275,549

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	30,929	30,210	29,166	25,931	27,818	27,978	27,858	28,266
У	311,023	310,590	281,664	263,084	288,488	279,317	279,850	277,251

№	65	66	67	68	69	70	71	72
Х	26,666	27,360	27,252	26,280	28,574	26,871	26,490	23,190
У	267,195	272,257	267,851	268,487	280,414	265,653	250,694	246,623

№	73	74	75	76	77	78	79	80
Х	29,218	28,259	27,757	28,675	26,242	22,592	28,241	26,216
У	290,512	281,154	280,542	278,932	246,577	238,382	275,426	257,683

№	81	82	83	84	85	86	87	88
Х	25,710	28,043	28,335	27,930	29,857	28,520	26,312	29,243
У	262,164	281,552	282,376	286,183	296,474	277,962	271,342	279,826

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	25,258	30,376	30,750	30,842	29,192	27,287	25,915	28,278
У	267,067	308,639	311,913	306,653	286,783	266,838	264,620	276,211

№	97	98	99	100	101	102	103	104
Х	26,353	26,520	24,907	31,630	30,913	29,509	24,232	29,231
У	261,689	257,154	268,859	319,084	308,361	278,196	254,854	273,756

№	105	106	107	108	109	110	111	112
Х	23,611	30,655	28,232	30,309	29,379	30,308	27,962	32,166
У	255,137	301,701	290,191	303,142	299,202	297,997	294,807	319,007

№	113	114	115	116	117	118	119	120
Х	29,729	26,905	28,549	24,814	30,854	28,386	27,376	28,231
У	289,617	273,385	272,759	265,310	303,823	280,771	275,934	293,871

№	121	122	123	124	125	126	127	128
Х	31,326	30,587	31,369	31,922	30,141	28,294	25,458	28,353
У	315,510	312,542	320,691	318,579	297,893	273,096	261,304	282,280

№	129	130	131	132	133	134	135	136
Х	27,864	26,583	28,145	27,954	27,382	29,420	25,053	30,672
У	273,791	269,388	280,986	277,424	280,290	280,470	266,528	313,262

№	137	138	139	140	141	142	143	144
Х	31,384	30,399	27,806	29,198	27,267	25,800	25,887	28,856
У	315,288	298,144	282,819	286.758	266,265	255,048	266,500	288,557

№	145	146	147	148	149	150
Х	28,504	25,429	28,519	30,632	29,179	27,187
У	274,641	261,679	293,622	304,956	286,314	269,119

Варіант10

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Х	29,006	26,017	34,735	29,172	29,450	25,544	31,783	29,732
У	278,749	287,082	338,043	293,129	280,622	271,988	315,775	289,109

№	9	10	11	12	13	14	15	16
Х	27,168	27,695	30,368	28,299	28,713	28,548	28,317	26,489
У	269,919	284,399	298,648	283,123	285,916	283,674	274,842	271,246

№	17	18	19	20	21	22	23	24
Х	29,526	28,697	28,601	28,284	29,882	26,888	29,348	27,327
У	293,199	285,986	283,989	287,428	289,286	273,866	286,535	278,561

№	25	26	27	28	29	30	31	32
Х	29,630	27,681	27,105	25,725	30,828	28,402	26,329	30,076
У	290,205	270,920	261,936	269,865	302,840	274,935	272,007	302,143

№	33	34	35	36	37	38	39	40
Х	29,857	30,002	30,667	30,806	31,836	30,663	27,820	30,179
У	300,879	304,592	310,618	315,673	319,740	299,277	284,719	290,583

№	41	42	43	44	45	46	47	48
Х	26,583	29,238	31,075	26,910	30,043	27,920	27,693	26,700
У	270,929	299,825	299,225	276,682	294,529	276,128	270,486	271,861

№	49	50	51	52	53	54	55	56
Х	29,229	25,941	29,876	27,138	30,809	25,674	31,073	27,073
У	280,304	268,037	290,179	281,465	292,349	270,369	299,830	285,226

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	31,943	31,220	30,172	26,922	28,817	28,978	28,857	29,267
У	322,729	312,786	291,808	272,129	288,403	289,281	289,834	287,128

№	65	66	67	68	69	70	71	72
Х	27,659	28,357	28,248	27,262	29,576	27,866	27,483	24,167
У	276,484	281,836	277,203	277,821	290,465	274,875	259,148	254,70

№	73	74	75	76	77	78	79	80
Х	30,224	29,260	28,756	29,679	27,233	23,566	29,242	27,208
У	301,102	291,226	290,556	288,914	254,812	246,016	285,209	266,472

№	81	82	83	84	85	86	87	88
Х	26,699	29,043	29,336	28,930	30,866	29,522	27,304	30,249
У	271,151	291,632	292,513	296,489	307,396	287,887	280,716	289,883

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	26,245	31,387	31,763	31,856	30,198	28,284	26,904	29,279
У	278,277	320,198	323,655	318,136	297,185	276,142	273,741	286,036

№	97	98	98	100	101	102	103	104
X	27,345	27,513	25,892	32,647	31 ,927	30,516	25,214	30,237
У	270,686	265,933	278,139	331,231	319,933	288,185	263,398	285,507

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	24,590	31,668	29,233	31,320	30,386	31,319	28,962	33,186
У	263,663	312,927	300,714	314,421	310,239	309,019	305,546	331,178

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	30,737	27,900	29,551	25,798	31,867	29,388	28,373	29,232
У	300,188	282,996	282,425	274,408	315,165	290,830	285,698	304,578

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	32,242	31,599	32,385	32,941	31,152	29,296	26,446	29,355
У	327,462	624,306	332,905	330,716	308,901	282,766	270,235	292,413

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	28,863	27,576	29,146	28,257	28,379	30,427	26,039	31,684
У	283,472	278,782	291,043	287,293	290,272	290,568	275,699	325,067

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	32,400	31,410	28,805	30,204	28,264	26,789	26,877	29,860
У	327,231	309,177	292,950	297,158	275,539	263,684	275,714	299,030

№	145	146	147	148	149	150
X	29,507	26,417	29,522	31,645	30,185	29,183
У	284,399	270,628	304,331	316,343	296,692	278,577

Варіант 11

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	30,006	27,003	35,762	30,173	30,452	26,527	32,797	30,735
У	288,219	296,780	350,623	303,286	290,205	280,948	327,143	299,107

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	28,160	28,689	31,374	29,296	29,712	29,546	9,31 4	27,477
У	278,872	294,063	309,131	292,760	295,708	293,351	284,090	280,224

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	30,528	29,696	29,599	29,281	30,886	27,878	30,350	28,319
У	303,379	295,781	293,683	297,267	299,301	282,989	296,392	287,930

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	30,633	28,675	28,096	26,710	31,837	29,399	27,316	31,081
У	300,250	280,996	270,509	278,736	313,546	284,192	281,011	312,774

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	30,861	31,006	31,675	31,815	32,850	31,671	28,815	31,184
У	311,439	315,334	321,681	326,983	331,298	309,806	294,406	300,676

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	27,572	30,239	32,084	27,900	31,048	28,915	28,687	27,689
У	279,897	310,302	309,774	285,940	304,800	285,415	279,495	280,880

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	30,231	26,926	30,880	28,129	31,818	26,628	32,083	28,064
У	289,860	276,833	300,236	290,960	302,555	279,261	310,407	294,895

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	32,957	32,231	31,177	27,912	29,816	29,978	29,857	30,268
У	334,434	323,982	301 ,985	281,173	298,318	299,246	299,819	297,007

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	28,653	29,354	29,245	28,254	30,579	29,860	28,475	25,144
У	285,773	291,416	286,559	287,151	300,518	284,100	267,611	262,771

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	31,230	30,260	29,755	30,682	28,225	24,540	30,243	28,199
У	311,693	301,298	300,569	298,900	263,057	253,644	294,997	975,265

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	27,688	30,043	30,338	29,929	31,875	30,525	28,296	31,255
У	280,136	301,711	302,650	306,791	318,319	297,817	290,185	299,946

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	27,232	32,399	32,776	32,869	31,204	29,280	27,894	30,281
У	285,478	331,752	335,392	329,619	307,590	285,449	282,860	295,864

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	28,337	28,505	26,577	33,665	32,941	31,524	26,196	31,242
У	279,685	274,717	284,409	343,375	331,505	298,183	271,936	293,270

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	25,5 6 9	32,680	30,234	32,331	31,392	32,330	29,962	34,206
У	272,178	324,154	311,231	325,699	321,269	320,042	316,277	343,349

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	31,746	28,894	30,554	26,783	32,881	30,390	29,370	30,233
У	310,764	292,606	292,099	283,497	326,509	300,890	295,461	315,278

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	33,358	32,612	33,401	33,959	32,162	30,297	27,433	30,356
У	339,412	336,066	345,113	342,851	319,910	292,442	279,163	302,546

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	29,863	28,569	30,147	29,257	29,376	31,433	27,024	32,697
У	293,157	288,176	301,100	297,163	300,250	300,673	284,86	336,86

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	33,417	32,422	29,804	31,210	29,260	27,778	27,867	30,864
У	339,173	320,214	303,078	307,562	284,817	272,322	284,92	309,50

№	145	146	147	148	149	150
X	30,509	27,404	30,524	32,657	31,190	29,179
У	294,164	279,573	315,035	327,730	307,073	287,998

Варіант 12

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	31,006	27,989	36,790	31,074	31,454	27,511	33,810	31,739
У	297,696	306,462	363,208	313,442	299,797	289,899	338,511	309,110

№	9	10	11	12	13	14	15	I 16
X	29,151	29,683	32,381	30,293	30,710	30,543	30,310	28,465
У	287,826	303,723	319,617	302,397	305,500	303,029	293,343	289,198

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	31,531	30,694	30,597	30,277	31,890	28,868	31,351	29,311
У	313,560	305,575	303,379	307,104	309,322	292,109	306,252	297,296

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	31,636	29,668	29,087	27,694	32,846	30,396	28,304	32,087
У	310,298	290,074	279,088	287,599	324,255	293,455	290,011	323,405

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	31,865	32,011	32,683	32,824	33,863	32,679	29,809	32,190
У	391,997	326,074	332,742	338,287	342,855	320,339	304,088	310,775

№	41	42	43	44	45	46	47	48
Х	28,560	31,240	33,094	28,890	32,053	29,910	29,681	18,678
У	288,863	320,773	320,330	295,193	315,074	294,704	288,507	289,896

№	49	50	51	52	53	54	55	56
Х	31,232	27,911	31,884	29,120	32,826	27,642	33,093	29,055
У	299,423	285,625	310,298	300,449	312,775	288,144	320,991	304,555

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	33,971	33,241	32,183	28,902	30,815	30,978	30,856	31,270
У	346,136	335,178	312,113	290,215	308,232	309,212	309,802	306,890

№	65	66	67	68	69	70	71	72
Х	29,647	30,351	30,241	29,245	31,582	29,855	29,468	26,121
У	295,063	300,997	295,918	296,478	310,575	293,328	276,083	270,833

№	73	74	75	76	77	78	79	80
Х	32,236	31,263	30,754	31,685	29,216	25,514	31,244	29,191
У	322,284	311,371	310,580	308,891	271,312	261,266	304,789	284,061

№	81	82	83	84	85	86	87	88
Х	28,677	31 ,044	31,340	30,929	32,884	31,527	29,287	32,261
У	289,119	311,790	312,787	317,088	329,242	307,750	299,649	310,017

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	28,218	33,410	33,790	33,883	32,209	30,277	28,884	31 ,282
У	294, 671	343,302	347,127	341,02	317,997	294,761	291,979	28,625

№	97	98	99	100	101	102	103	104
Х	29,329	29,498	27,863	34,682	33,955	32,531	27,178	32,248
У	288,685	283,506	296,667	355,515	343,076	308,191	280,467	303,043

№	105	106	107	108	109	110	111	112
Х	26,547	33,693	31,235	33,342	32,399	33,341	30,961	35,226
У	280,684	335,384	321,744	336,977	332,295	331 ,069	326,997	355,520

№	113	114	115	116	117	118	119	120
Х	32,754	29,889	31,554	27,768	33,895	31,392	30,367	31,234
У	321,343	302,213	301,780	292,576	337,855	310,953	305,222	325,970

№	121	122	123	124	125	126	127	128
Х	34,374	33,624	34,418	34,978	33,172	33,299	28,421	31,358
У	351,358	347,820	357,315	354,986	330,921	302,123	288,087	312,680

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	30,862	29,562	31,147	30,957	30,373	32,440	28,010	33,710
У	302,845	297,567	311;158	307,034	310,225	310,787	294,016	348,662

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	34,433	33,433	30,803	32,215	30,257	28,768	28,856	31,869
У	351,112	331,253	313,203	317,969	294,099	280,963	294,129	319,975

№	145	146	147	148	149	150
X	31,512	28,392	31,527	33,670	32,196	30,175
У	303,934	288,514	325,733	339,117	317,456	297,445

Варіант 13

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	32,006	28,975	37,817	32,175	32,456	28,494	34,893	32,742
У	307,180	316,128	375,798	323,597	309,396	298,843	349,881	319,118

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	30,142	30,676	33,387	31 ,289	31,709	31 ,541	31,307	29,453
У	296,782	313,378	330,105	312,03	315,293	312,708	302,601	298,169

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	32,533	31 ,693	31,529	31,274	32,895	29,858	32,353	30,303
У	323,741	315,371	313,077	316,93	319,348	308,227	316,116	306,658

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	32,639	30,662	30,078	38,678	33,854	31 ,393	29,291	33,092
У	320,349	299,156	287,672	296,45	334,967	302,723	299,006	334,034

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	32,870	33,016	33,691	33,832	34,877	33,687	30,804	33,196
У	332,554	336,812	343,801	349,58	354,410	330,876	313,766	320,881

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	29,549	32,241	34,104	28,880	33,058	30,905	30,675	29,667
У	297,823	331,240	330,892	304,44	325,352	303,994	297,524	298,909

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	32,233	28,897	32,888	30,111	33,835	28,626	34,103	30,045
У	308,993	294,411	320,365	309,93	324,004	297,020	331,581	314,207

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	34,985	34,252	33,189	29,892	31,814	31 ,978	31,855	32,271
У	357,836	346,373	322,275	299,255	313,147	319,177	319,785	316,776

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	30,640	31,347	31,238	30,237	32,585	30849	30,461	27,098
У	304,352	310,579	305,280	305,802	320,635	302,557	284,564	278,889

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	33,242	32,264	31,753	32,688	30,208	26,488	32,245	30,182
У	332,876	321,444	320,589	318,887	279,578	268,882	314,585	292,861

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	29,666	32,044	32,341	31,929	33,893	32,530	30,279	33,267
У	298,099	321,868	322,925	327,38	340,166	317,688	309,109	320,095

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	29,205	34,422	34,803	34,897	33,215	31,274	29,874	32,283
У	303,854	354,849	358,857	352,585	328,407	304,077	301,089	315,512

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	30,321	30,491	28,848	35,700	34,969	33,538	28,159	33,254
У	297,688	292,302	305,915	367,653	354,647	318,209	288,992	312,828

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	27,526	34,706	32,236	34,353	33,406	34,352	3,1,961	36,246
У	289,179	346,615	332,252	348,254	343,317	342,097	337,709	367,691

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	33,762	30,884	32,559	28,752	34,909	32,393	31,364	32,235
У	331 ,928	311,818	311,469	301 ,646	349,202	321,017	314,983	336,655

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	35,390	34,637	35,434	35,997	34,182	32,300	29,409	32,360
У	363,302	359,570	369,512	367,119	341,933	311,811	297,009	322,815

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	31,861	30,555	32,148	31,957	31,370	33,447	28,996	34,723
У	312,536	306,956	321,216	316,907	320,512	320,908	303,161	360,452

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	35,449	34,445	31,802	33,221	31,253	29,757	29,846	32,873
У	363,050	342,295	323,325	328,378	303,386	289,606	303,331	330,448

№	145	146	147	148	149	150
X	32,514	29,379	32,529	34,683	33,202	31,171
У	313,711	297,451	336,427	350,504	327,843	306,895

Варіант 14

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	33,006	29,960	38,845	33,176	33,458	29,478	35,837	33,746
У	316,671	325,778	388,394	333,752	319,004	307,773	361,252	329,131

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	31,133	31, 670	34,394	32,286	32,708	32,539	32,304	30,441
У	305,738	323,029	340,597	321,672	325,087	322,388	311,865	307,136

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	33,536	32,692	32,593	32,271	33,899	30,848	33,355	31,295
У	333,925	325,167	322,775	326,769	329,380	310,342	325,984	316,018

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	33,642	31,656	31,069	29,663	34,863	32,390	30,278	34,097
У	330,404	308,240	296,262	305,304	345,682	311,996	307,996	344,663

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	33,874	34,021	34,699	34,841	35,891	34,695	31,798	34,201
У	343,110	347,546	354,856	360,882	365,965	341,418	323,441	330,993

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	30,537	33,242	35,114	30,870	34,063	31,900	31,668	30,656
У	306,785	341,703	341,461	313,685	335,633	313,287	306,544	307,919

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	33,234	29,882	33,892	31,102	34,843	29,610	35,113	31,036
У	318,571	303,193	330,437	319,410	333,242	305,888	342,178	323,850

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	35,999	35,263	34,194	30,882	32,813	32,978	32,855	33,272
У	369,533	357,567	332,442	308,923	328,061	392,143	329,768	326,665

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	31,634	32,344	32,234	31,229	33,587	31,844	31,454	28,074
У	313,642	320,162	314,645	315,124	330,698	611,789	293,056	286,937

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	34,248	33,265	32,751	33,692	31,199	27,462	33,247	31,174
У	343,468	331,519	330,597	328,887	287,854	276,493	324,386	301 ,664

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	30,655	33,044	33,343	32,928	34,901	33,532	31,271	34,273
У	307,077	331,945	333,063	337,670	351,090	327,630	318,565	330,181

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	30,192	35,433	35,816	35,910	34,221	32,270	30,864	33,285
У	313,034	366,391	370,583	364,069	1338,820	313,396	310,863	32,265

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	31,313	31,484	29,833	36,717	35,983	34,545	29,141	34,260
У	306,691	301,103	315,151	379,787	366,217	328,237	297,510	322,624

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	28,505	35,719	33,237	35,364	34,312	35,363	32,961	37,266
У	297,664	357,848	342,754	359,530	354,335	353,128	348,410	379,862

№	113	114	I 115	116	117	118	119	120
X	34,771	31,879	33,562	29,737	35,922	33,395	32,961	33,936
У	342,517	321,420	321,166	310,706	360,552	331,083	324,742	347,332

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	36,406	35,649	36,450	37,016	35,193	33,302	30,397	33,362
У	375,244	371,314	381,703	379,251	352,946	321,505	305,927	332,950

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	32,861	31,548	33,149	32,956	32,367	34,454	29,982	35,736
У	322,231	316,344	331,273	326,781	330,163	331,038	312,297	372,237

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	36,465	35,456	32,801	34,227	32,250	30,747	30,836	33,877
У	374,985	353,340	333,445	338,790	312,677	298,253	312,529	340,919

№	145	146	147	148	149	150
X	33,517	30,397	33,532	35,596	34,207	32,167
У	323,494	306,385	347,114	361,890	338,232	316,350

Варіант 15

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	34,006	30,946	39,872	34,177	34,461	30,461	36,850	34,749
У	326,668	335,413	400,994	343,905	328,620	316,695	372,624	339,149

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	32,125	32,664	35,401	33,283	33,706	33,537	33,300	31,429
У	314,696	332,676	351,092	331,309	334,882	332,070	321,133	316,100

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	34,538	33,690	33,591	33,267	34,903	31,838	34,356	32,287
У	344,109	334,963	332,475	336,597	339,417	319,454	335,857	325,375

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	34,645	32,649	32,060	30,647	35,872	33,387	31,265	35,102
У	340,463	317,328	304,858	314,146	356,400	321,276	316,981	355,291

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	34,878	35,025	35,707	35,850	36,904	35,703	32,792	35,207
У	353,664	358,277	365,910	372,172	377,518	351,964	333,112	341,112

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	31,525	34,243	36,124	31,860	35,068	32,895	32,662	31,645
У	315,742	352,161	352,037	322,925	345,918	322,582	315,569	316,927

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	34,235	30,867	34,897	32,093	35,852	30,594	36,123	32,027
У	328,155	311,969	340,514	328,882	343,489	314,748	352,781	333,484

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	37,013	36,273	35,200	31,872	33,812	33,978	33,854	34,274
У	381,229	368,761	342,615	317,331	337,975	339,109	339,749	336,558

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	32,627	33,341	33,230	32,220	34,590	32,838	32,446	29,051
У	322,932	329,747	324,014	324,442	340,764	321,023	301,557	294,978

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	35,254	34,266	33,750	34,695	32,191	28,436	34,248	32,165
У	354,061	341,594	340,602	338,892	296,142	284,098	334,191	310,471

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	31,644	34,044	34,344	33,928	35,910	34,535	32,263	35,279
У	316,053	342,021	343,202	347,955	362,015	337,577	328,016	325,274

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	31,179	36,444	36,829	36924	35,227	33,267	31,354	34,286
У	322,203	377,930	382,306	375,552	349,236	322, 720	319,307	305,239

№	97	98	99	100	101	102	103	104
Х	32,305	32,477	30,818	37,735	36,997	35,553	30,123	35,266
У	315,698	309,909	324,376	391,918	377,786	338,276	306,022	332,431

№	105	106	107	108	109	110	111	112
Х	29,484	36,731	34,238	36,375	35,419	36,374	33,961	38,286
У	306,139	369,084	353,251	370,804	365,350	364,161	359,103	392,033

№	113	114	115	116	117	118	I19	120
Х	35,779	32,873	34,565	30,722	36,936	34,397	33,358	34,237
У	353,109	331,020	330,871	319,756	351,903	341,150	334,500	358,002

№	121	122	123	124	125	126	127	128
Х	37,422	26,661	37,466	38,035	36,203	34,303	31,384	34,363
У	384,182	383,052	393,889	391,383	363,961	331,205	314,842	343,086

№	129	130	131	132	133	134	135	136
Х	33,860	35,542	34,149	33,956	33,364	35,461	30,968	36,749
У	331,928	325,730	341,332	336,657	340,126	341,176	321,424	384,017

№	137	138	139	140	141	142	143	144
Х	37,482	36,468	33,800	35,233	33,246	31,736	31 ,826	34,881
У	386,917	364,387	343,562	349,205	321,972	306,902	321,723	351,391

№	145	146	147	148	149	150
Х	34,519	31,355	34,534	36,708	35,213	33,163
У	333,283	315,315	357,796	373,277	348,625	325,810

Варіант 16

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Х	35,006	31,932	40,899	35,177	35,463	31,445	37,863	35,753
У	335,672	345,031	413,599	354,058	338,245	325,607	383,997	349,172

№	9	10	11	12	13	14	15	16
Х	33,166	33,658	36,407	34,279	34,705	34,535	34,297	32,417
У	323,655	342,318	361,589	340,947	344,678	341,752	330,406	325,060

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	35,541	34,689	34,589	34,264	35,907	32,827	35,358	33,279
У	354,295	344,761	342,176	346,423	349,460	328,563	345,733	334,728

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	35,648	33,643	33,051	31,631	36,881	34,384	32,252	36,107
У	350,526	326,419	313,460	322,980	367,122	330,561	325,961	365,917

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	35,882	36,030	36,715	36,858	37,918	36,711	33,787	36,213
У	364,216	369,006	376,960	383,458	389,070	362,514	342,779	351,238

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	32,514	35,245	37,134	32,850	36,063	33,889	33,656	32,634
У	324,696	362,614	362,620	332,160	356,206	331,878	324,597	325,932

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	35,236	31,853	35,901	33,084	36,861	31 ,578	37,133	33,018
У	337,747	320,741	350,596	338,347	353,746	323,600	363,390	343,110

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	38,027	37,284	36,205	32,862	34,811	34,978	34,853	35,275
У	392,922	379,954	352,794	326,366	347,889	349,076	349,729	346,454

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	33,621	34,338	34,227	33,212	35,593	33,833	33,439	30,028
У	332,222	339,332	333,386	333,758	350,834	330,260	310,067	303,01 1

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	36,259	35,268	34,749	35,698	33,183	29,410	25,249	33,156
У	364,655	351,670	350,606	348,902	304,440	291,697	344,000	319,281

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	32,633	35,045	35,346	34,928	36,919	35,537	33,255	36,285
У	325,027	352,097	353,342	358,235	372,940	347,528	337,463	350,375

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	33,297	33,470	31, 803	38,752	38,011	36,560	31,105	36,272
У	324,705	318,722	333,589	404,046	389,354	348,324	314,528	342,250

№	105	106	107	108	109	110	111	112
Х	30,463	37,744	35,240	37,386	36,426	37,386	34,961	39,307
У	314,603	380,321	363,744	382,078	376,360	375,197	369,785	404,205

№	113	114	115	116	117	118	119	120
Х	36,787	33,868	35,567	31,707	37,950	35,399	34,355	35,239
У	363,706	340,618	340,583	328,797	383,256	351 ,220	344,257	368,665

№	121	122	123	124	125	126	127	128
Х	38,438	37,674	38,482	39,054	37,213	35,304	32,372	35,365
У	399,118	394,786	406,068	403,512	374,977	340,911	323,753	353,222

№	129	130	131	132	133	134	135	136
Х	34,859	33,535	33,150	34,956	34,361	36,468	31,954	37,761
У	341,628	335,115	351,390	346,534	350,086	351,322	330,542	395,791

№	137	138	139	140	141	142	143	144
Х	38,498	37,479	34,799	36,238	34,243	32,726	32,816	35,885
У	398,848	375,438	353,675	359,623	331,272	315,554	330,913	361,862

№	145	146	147	148	149	150
Х	35,521	32,342	35,537	37,721	36,219	34,159
У	343,079	324,241	368,472	384,663	359,021	335,274

Варіант 17

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Х	36,006	32,917	41 ,927	36,178	36,465	32,428	38,877	36,757
У	345,184	354,633	426,210	364,210	347,878	334,510	395,371	359,200

№	9	10	11	Г 12	13	14	15	16
Х	34,107	34,651	37,414	35,276	35,704	35,533	35,294	33,405
У	332,615	351,956	372,090	350,584	354,474	351,436	339,685	334,016

№	17	18	19	20	21	22	23	24
Х	36,543	35,687	35,587	35,260	36,911	33,817	36,359	34,271
У	364,482	254,559	351,878	356,246	359,510	337,670	355,615	344,079

№	25	26	27	28	29	30	31	32
Х	36,651	34,637	34,042	32,615	37,889	35,382	33,240	37,112
У	360,592	335,513	322,068	331,807	377,846	339,851	334,936	376,543

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	36,886	37,035	37,723	37,867	38,931	37,719	34,781	37,218
У	374,767	379,731	388,008	394,738	400,691	373,069	352,442	361,371

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	33,502	36,246	38,144	33,840	37,078	34,884	34,650	33,623
У	333,646	373,063	373,210	341,391	366,498	341,177	333,630	334,934

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	36,237	32,838	36,905	34,075	37,869	32,562	38,143	34,008
У	347,346	329,508	360,684	348,807	364,013	332,444	374,006	352,728

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	39,041	38,294	37,211	33,852	35,811	35,978	35,853	36,276
У	404,613	391,147	362,980	335,400	357,803	359,042	359,709	356,353

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	34,614	35,335	35,223	34,204	36,596	34,828	34,432	31,005
У	341,513	348,919	342,761	343,070	360,906	339,500	318,588	311,036

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	37,265	36,269	35,748	36,701	34,174	30,384	36,250	34,148
У	375,249	361,747	360,608	358,916	312,750	299,291	353,814	328,095

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	33,622	36,045	36,348	35,927	37,928	36,5401	34,247	37,291
У	333,998	362,172	363,482	368,511	383,866	357,484	346,905	360,483

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	33,152	38,467	38,856	38,951	37,238	35,260	33,834	36,289
У	340,517	400,994	405,739	398,518	370,076	341,381	337,515	354,921

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	34,289	34,463	32,788	39,770	39,025	37,567	32,087	37,278
У	333,715	327,540	342,791	416,171	400,922	358,383	323,027	352,080

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	31,442	38,757	36,241	38,397	37,432	38,397	35,960	40,327
У	323,057	391,561	374,231	393,351	387,366	386,235	380,457	416,376

№	113	114	115	116	117	118	119	120
Х	37,796	34,863	36,570	32,691	38,963	36,401	35,352	36,240
У	374,307	350,213	350,304	337,828	394,611	361,291	354,013	379,320

№	121	122	123	124	125	126	127	128
Х	39,453	38,686	39,499	40,072	38,224	36,306	33,360	36,367
У	411,050	406,514	418,241	415,641	385,995	350,623	332,662	363,359

№	129	130	131	132	133	134	135	136
Х	35,859	34,528	36,151	35,956	35,358	37,474	32,939	38,774
У	351,332	344,298	361,449	356,413	360,041	361,477	339,651	407,560

№	137	138	139	140	141	142	143	144
Х	39,514	38,491	35,798	37,244	35,239	33,715	33,806	36,889
У	410,776	386,491	363,785	370,044	340,576	324,208	340,098	372,333

№	145	146	147	148	149	150
Х	36,524	33,330	36,536	38,733	37,224	35,155
У	352,882	333,164	379,143	396,049	369,419	344,743

Варіант 18

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Х	37,006	33,903	42,954	37,179	37,467	33,412	39,890	37,760
У	354,702	364,218	438,825	374,360	357,520	343,402	406,746	369,233

№	9	10	11	12	13	14	15	16
Х	35,098	35,645	38,420	36,272	36,702	36,530	36,291	I34,393
У	341,577	361,589	382,593	360,221	364,271	361,121	348,969	342,969

№	17	18	19	20	21	22	23	24
Х	37,546	36,686	36,585	36,257	37,916	34,807	37,361	35,263
У	374,670	364,657	361,582	366,067	369,565	346,773	365,500	353,426

№	25	26	27	28	29	30	31	32
Х	37,654	35,630	35,033	33,600	38,898	36,379	34,227	38,118
У	370,662	344,610	330,681	340,626	388,574	349,147	343,905	387,168

№	33	34	35	36	37	38	39	40
Х	37,890	38,040	38,731	38,875	39,945	38,721	35,775	38,224
У	385,316	390,454	399,054	406,014	412,171	383,627	362,101	371,510

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	34,491	37,247	39,154	34,830	38,083	35,879	35,643	34,612
У	342,595	383,507	383,807	350,618	376,793	350,478	342,667	343,933

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	37,238	33,824	37,909	35,066	38,878	33,547	39,152	34,999
У	356,953	338,270	370,776	357,260	374,289	341,280	384,629	362,336

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	40,055	39,305	38,217	34,842	36,810	36,978	36,852	37,277
У	416,301	402,339	373,171	344,432	367,717	369,010	369,688	366,256

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	35,608	36,332	36,220	35,195	37,598	35,822	35,424	31,982
У	350,803	358,506	352,140	352,379	370,982	348,741	327,119	319,035

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	38,271	37,270	36,247	37,705	35,166	31,358	37,251	35,139
У	385,843	371,825	370,608	368,936	321,070	306,878	363,632	336,913

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	34,611	37,045	37,349	36,927	38,937	37,542	32,239	38,297
У	342,967	372,246	373,622	378,782	394,793	367,444	356,342	370,600

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	34,139	39,479	39,869	39,965	38,244	36,256	34,824	37,290
у	348,661	412,520,	417,450	410,001	380,500	350,717	346,615	364,778

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	35,281	35,456	33,773	40,787	40,039	38,574	33,069	38,284
У	342,727	336,364	351,980	428,292	412,489	368,453	331,520	361,922

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	32,421	39,770	37,242	39,409	38,439	39,408	36,960	41,347
У	331,500	402,802	384,712	404,623	398,367	397,275	391,120	428,547

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	38,804	35,858	37,572	33,676	39,977	37,403	36,349	37,241
У	384,912	359,806	360,033	346,849	405,968	371,365	363,768	389,967

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	40,469	39,699	40,515	41,091	39,234	37,307	34,348	37,368
У	422,980	418,236	430,408	427,768	397,013	360,342	341,567	373,497

№	129	130	131	132	133	134	135 I	136
X	36,858	35,521	37,151	36,956	36,355	38,481	33,925	39,787
У	361,039	353,879	371,508	366,292	369,992	361,639	368,751	419,423

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	40,530	39,502	36,798	38,250	36,236	34,704	34,795	37,893
У	422,701	397,546	373,893	380,467	349,885	332,866	349,280	382,803

№	145	146	147	148	149	150
X	37,526	34,318	37,542	39,746	38,230	36,151
У	362,691	342,083	389,807	407,434	379,821	354,216

Варіант 19

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	38,00	34,889	43,982	38,180	38,469	34,395	40,903	38,764
У	364,223	373,787	451,446	364,510	367,170	352,285	418,121	379,271

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	36,090	36,639	39,427	37,269	37,701	37,528	37,287	35,381
У	350,540	371,218	393,099	369,858	374,069	370,807	358,259	351,917

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	38,549	37,684	37,584	37,254	38,920	35,797	38,363	36,546
У	384,859	374,157	371,287	375,884	379,626	355,874	375,389	362,771

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	38,657	36,624	36,024	34,584	39,907	37,376	35,214	39,123
У	380,736	353,710	339,301	349,438	399,305	358,450	352,870	397,792

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	38,894	39,894	39,045	39,739	40,958	39,735	36,770	39,230
У	395,864	401,173	410,096	417,284	423,719	394,191	371,757	381,656

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	35,475	38,248	40,164	35,820	39,088	36,874	36,637	I 35,601
У	351,540	393,947	394,410	359,840	387,092	359,781	351,708	352,930

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	38,235	34,809	38,913	36,058	39,887	34,531	40,162	35,990
У	366,563	347,027	380,874	366,707	384,575	350,108	395,258	371,935

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	41,065	40,316	39,222	35,832	37,809	37,977	37,851	38,279
У	457,987	413,530	383,368	353,463	377,630	378,977	379,667	376,163

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	36,602	27,329	37,216	36,187	38,601	36,817	36,417	32,277
У	360,243	368,095	361,522	361,686	381,062	357,986	335,659	327,065

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	39,277	38,271	37,746	33,708	36,157	32,332	38,252	36,131
У	396,439	381,904	380,607	378,960	329,402	314,460	373,455	345,735

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	35,600	38,045	38,351	37,927	39,946	38,545	36,231	39,303
У	351,934	382,319	383,763	389,049	405,720	377,409	365,775	380,724

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	35,126	40,490	40,882	40,978	39,249	36,712	35,814	38,291
У	358, 798	424,041	429,156	421,483	390,927	360,058	355,710	374,640

№	97	98	98	100	101	102	103	104
X	36,274	36,448	34,759	41,804	41,053	39,582	34,051	39,290
У	351,740	345,195	361,159	440,409	424,055	378,533	340,005	371,776

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	33,400	40,783	38,243	40,420	39,446	40,419	37,960	42,367
У	339,933	414,045	395,189	415,893	409,365	408,317	401,772	440,717

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	39,812	36,852	38,575	34,661	40,991	38,405	37,346	38,242
У	395,522	369,397	369,771	355,860	417,326	381,439	373,522	400,606

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	41,485	40,711	41,531	42,110	40,244	38,309	35,336	38,370
У	434,907	429,953	442,569	439,894	408,033	370,067	350,469	383,636

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	37,857	36,514	38,152	37,955	37,352	39,488	34,911	40,800
У	370,750	363,258	381,567	376,174	379,940	381,811	357,841	431,081

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	41,547	40,514	37,797	39,256	37,232	35,694	35,785	38,897
У	434,624	408,605	383,997	390,894	359,199	341,527	358,458	393,273

№	145	146	147	148	149	150
X	38,529	35,305	38,544	40,759	39,236	37,147
У	372,507	350,999	400,466	418,819	390,226	363,693

Варіант 20

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	39,006	34,889	43,009	39,181	39,471	35,379	41, 117	39,767
У	373,761	383,338	464,072	394,659	376,830	361,157	429,498	389,314

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	37,081	37,633	40,433	38,266	38,699	38,526	38,284	36,369
У	359,505	380,842	403,609	379,496	383,868	380,495	367,554	360,863

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	39,551	38,683	38,582	38,250	39,924	36,787	39,365	37,247
У	375,050	383,957	380,993	385,699	389,693	364,972	385,284	372,112

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	39,660	37,618	37,015	35,568	40,916	38,373	36,201	40,128
У	390,813	362,814	347,926	358,242	410,039	367,758	361,829	408,415

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	39,898	40,049	40,747	40,893	41,942	40,743	37,764	40,235
У	406,410	411,889	421,136	428,550	435,267	404,759	381,408	391,810

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	36,468	39,249	41,174	36,810	40,093	37,869	37,631	36,590
У	360,482	404,381	405,021	369,057	397,395	369,086	360,754	361,924

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	39,240	35,794	39,917	37,049	40,895	35,515	41,172	36,981
У	376,190	355,779	390,978	376,148	394,870	358,927	405,894	381,526

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	42,083	41,326	40,228	36,822	380,808	38,977	38,851	39,280
У	340,049	349,747	390,893	392,493	387,544	388,945	389,644	386,072

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	37,595	38,326	38,212	37,179	39,604	37,811	37,410	33,936
У	369,385	377,685	370,908	370,989	391,144	367,232	344,210	335,068

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	40,283	39,273	38,744	39,711	37,149	33,306	39,254	37,122
У	407,034	391,983	390,603	388,989	337,746	322,036	383,282	354,561

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	36,589	39,045	39,352	38,926	40,955	39,547	37,223	40,309
У	360,898	392,392	393,904	399,311	416,641	387,873	375,203	390,856

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	36,113	41,501	41,895	41,992	40,255	38,250	36,804	39,293
У	367,925	435,558	440,858	432,966	401,357	369,404	389,806	384,505

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	37,266	37,441	35,744	42,822	42,067	40,589	35,033	40,296
У	360,756	354,031	370,323	452,522	435,20	388,624	348,485	381,641

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	34,379	41,795	39,244	41,431	40,452	41,430	38,960	43,387
У	348,355	425,291	405,660	427,163	420,358	419,362	412,414	452,888

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	40,821	37,847	39,878	35,645	42,005	39,406	38,343	39,243
У	406,136	378,85	359,516	364,861	428,687	391,517	383,274	411,238

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	42,501	41,724	42,547	43,129	41,255	39,310	36,323	39,372
У	446,830	441,664	454,724	452,019	419,055	379,799	359,367	393,775

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	38,857	37,508	39,153	38,955	38,349	40,495	35,897	41,813
У	380,463	372,635	391,626	386,057	389,883	391,991	366,922	442,833

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	42,563	41,525	38,796	40,261	38,229	36,683	36,775	39,901
У	446,545	419,666	394,099	401,323	368,517	350,190	367,631	403,743

№	145	146	147	148	149	150
X	39,531	36,293	39,547	41,771	40,241	38,144
У	382,330	359,910	411,119	430,204	400,634	373,176

Варіант 21

№	1	2	3	4	9	6	7	8
X	17,687	20,228	21,985	18,000	20,988	18,967	18,750	17,799
У	190,089	205,351	204,575	193,176	202,240	192,626	189,576	190,573

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	18,247	18,751	21,309	19,329	19,726	19,567	19,346	17,598
У	189,391	197,233	204,429	196,384	197,822	196,627	191,822	190,286

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	20,503	19,710	19,618	19,315	20,844	17,979	20,333	18,399
У	201,633	197,864	196,788	198,758	199,393	191,631	198,009	194,109

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	20,603	18,738	18,187	16,866	21,749	19,427	17,444	21,030
У	199,960	190,368	185,012	189,711	206,625	191,853	19,743	206,423

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	20,820	20,958	21,595	21,729	22,714	21,592	18,871	21,128
У	205,780	207,789	210,945	213,694	215,683	204,703	197,379	200,036

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	20,006	17,146	25,488	20,165	20,430	16,693	22,664	20,700
У	193,806	199,116	225,055	201,681	194,729	190,923	213,513	199,332

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	20,220	17,072	20,838	18,218	21,731	16,817	21,984	18,156
У	194,608	188,652	199,887	195,753	200,852	190,001	204,908	197,839

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	22,816	22,125	21,121	18,011	19,825	19,979	19,864	20,256
У	217,302	212,004	200,711	190,667	199,165	199,610	199,994	198,354

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	18,717	19,384	19,281	18,337	20,552	18,914	18,548	15,375
У	192,885	195,662	193,139	193,717	200,116	191,950	183,386	181,741

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	21,172	20,249	19,767	20,649	18,309	14,800	20,232	18,285
У	205,814	200,612	200,365	199,238	181,060	177,106	197,304	187,484

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	17,798	20,041	20,322	19,933	21,785	20,500	18,377	21,195
У	190,183	200,888	201,302	203,589	209,123	198,711	195,301	199,633

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	17,363	22,284	22,644	22,733	21,146	19,315	17,995	20,267
У	193,114	216,043	217,855	214,795	203,665	192,546	191,559	197,750

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	18,416	18,577	17,026	23,490	22,801	21,451	16,377	21,183
У	189,770	187,113	194,225	221,811	215,767	198,633	186,275	196,127

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	15,780	22,553	20,223	22,220	21,326	22,219	19,963	24,006
У	186,572	211,973	205,841	212,880	210,804	209,906	208,566	221,651

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	21,663	18,947	20,528	16,936	22,744	20,371	19,400	20,222
Y	205,187	196,412	195,697	192,194	213,157	200,363	197,784	207,968

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	23,198	22,487	23,239	23,771	22,059	20,283	17,556	20,339
У	219,811	218,253	222,796	221,456	209,882	195,947	189,740	201,242

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	19,869	18,637	20,140	19,959	19,406	21,365	17,166	22,569
У	196,440	194,171	200,539	198,520	200,300	199,967	192,846	218,652

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	23,254	22,306	19,813	21,152	19,296	17,884	17,968	20,823
У	219,669	209,972	201,671	203,649	192,219	186,051	192,651	204,762

№	145	146	147	148	149	150
Х	20,485	17,528	20,499	22,531	21,134	19,218
У	196,794	189,963	207,762	213,859	203,396	193,780

Варіант 22

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Х	18,676	21,229	22,995	18,99	22,003	19,962	19,743	18,788
У	199,082	215,864	215,066	202,471	212,481	201,897	198,552	199,616

№	9	10	11	12	13	14	15	16
Х	19,238	19,745	22,315	20,326	20,724	20,565	20,343	18,586
У	198,335	206,935	214,887	206,022	207,607	206,295	201,028	199,295

№	17	18	19	20	21	22	23	24
Х	21,506	20,709	20,616	20,312	21,848	18,969	21,335	19,391
У	211,803	207,653	206,472	208,62	209,36	200,779	207,83	203,504

№	25	26	27	28	29	30	31	32
Х	21,606	19,731	19,178	17,851	22,758	20,424	18,431	22,035
У	209,974	199,419	193,539	198,645	217,303	201,064	199,792	217,061

№	33	34	35	36	37	38	39	40
Х	21,824	21,963	22,603	22,737	23,728	22,601	19,866	22,134
У	216,352	218,555	222,028	225,042	227,248	215,195	207,098	210,072

№	41	42	43	44	45	46	47	48
Х	21,006	18,131	26,515	21,166	21,433	17,676	23,677	21,704
У	203,219	208,95	237,589	211,845	204,242	199,967	224,871	209,289

№	49	50	51	52	53	54	55	56
Х	21,221	18,058	21,842	19,209	22,74	17,801	22,994	19,147
У	204,103	197,492	209,9	205,299	210,984	198,961	215,431	207,581

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	23,83	23,135	22,127	19,001	20,824	20,979	20,863	21,257
У	229,024	223,204	210,811	199,725	209,081	209,572	209,934	208,206

№	65	66	67	68	69	70	71	72
Х	19,711	20,381	20,277	19,328	21,554	19,909	19,541	16,352
У	202,170	205,231	202,467	203,070	210,143	201,161	191,170	189,880

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	22,177	21,25	20,765	21,653	19,301	15,774	21,233	19,276
У	216,399	210,677	210,393	209,184	189,215	184,786	207,056	196,248

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	18,787	21,042	21,323	20,932	22,794	21,502	19,369	22,201
У	199,188	210,973	211,434	213,927	220,04	208,603	204,808	209,633

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	18,35	23,296	23,658	23,746	22,152	20,311	18,985	21,269
У	202,385	227,63	229,624	226,276	214,045	201,819	200,7	207,545

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	19,408	19,569	18,011	24,508	23,815	22,458	17,359	22,189
У	198,755	195,851	203,591	233,979	227,343	208,546	194,869	205,794

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	16,758	23,566	21,224	23,231	22,333	23,23	20,963	25,026
У	195,177	223,182	216,401	224,165	221,867	220,92	219,377	233,819

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	22,671	19,942	21,53	17,921	23,758	21,373	20,397	21,223
У	215,727	206,041	205,305	201,365	224,483	210,408	207,557	218,73

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	24,214	23,5	24,256	24,79	23,069	21,285	18,543	21,341
У	231,781	230,055	235,05	233,599	220,879	205,571	198,696	211,37

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	20,868	19,63	21,14	20,959	20,403	22,372	18,152	23,582
У	206,099	203,579	210,594	208,379	210,312	210,003	202,086	230,494

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	24,27	23,318	20,812	22,158	20,292	18,874	18,958	21,827
У	231,628	220,984	211,824	214,028	201,461	194,667	201,896	215,237

№	145	146	147	148	149	150
X	21,487	18,515	21,502	23,543	22,139	20,214
У	206,505	198,94	218,512	225,246	213,751	203,182

Варіант 23

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	19,664	22,23	24,005	19,98	23,008	20,957	20,737	19,777
У	208,073	226,374	225,563	211,762	222,726	211,17	207,331	208,656

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	20,23	20,739	23,322	21,323	21,723	21,563	21,34	19,574
У	207,279	216,632	225,347	215,66	217,393	215,964	210,238	208,301

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	22,508	21,708	21,614	21,308	22,852	19,959	22,336	20,383
У	221,973	217,443	216,158	218,48	219,332	209,925	217,654	212,897

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	22,609	20,725	20,169	18,835	23,767	21,422	19,419	23,04
У	219,991	208,472	202,07	207,572	227,985	210,28	208,835	227,699

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	22,829	22,968	23,611	23,746	24,741	23,608	20,86	23,139
У	226,922	229,319	233,11	236,386	238,812	225,691	216,813	220,114

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	22,006	19,117	27,543	22,167	22,435	18,660	24,690	22,707
У	212,638	218,769	250,128	222,008	213,763	209,001	236,23	219,251

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	22,222	19,043	22,846	20,207	23,748	18,785	24,004	20,138
У	213,605	206,326	219,918	214,839	221,123	207,913	225,96	217,315

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	24,844	24,146	23,133	19,991	21,823	21,979	21,862	22,258
У	240,743	234,403	220,916	208,781	218,997	219,535	219,924	218,065

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	20,704	21,378	21,274	20,32	22,557	20,904	20,533	17,329
У	211,462	214,805	211,799	212,427	220,173	210,363	200,161	198,005

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	23,183	22,251	21,764	22,656	20,292	16,748	22,234	20,268
У	226,985	220,743	220,419	219,135	197,381	192,46	216,811	205,015

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	19,776	22,042	22,325	21,932	23,803	22,505	20,361	23,207
У	208,192	221,058	221,568	224,261	230,957	218,499	214,312	219,639

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	19,337	24,307	24,671	24,76	23,158	21,308	19,975	22,27
У	211,648	239,213	241,389	237,758	224,428	211,096	209,84	217,343

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	20,4	20,562	18,996	25,525	24,829	23,466	18,341	23,195
У	207,741	204,593	212,947	246,145	238,918	218,468	203,457	215,471

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	17,737	24,578	22,225	24,242	23,339	24,241	21,963	26,046
У	203,772	234,393	226,956	235,45	232,926	231,915	230,179	245,988

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	23,679	20,937	22,533	18,906	24,771	22,375	21,394	22,224
У	226,271	215,668	214,919	210,527	235,812	220,455	217,328	229,485

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	25,23	24,512	25,272	25,809	24,08	22,286	19,531	22,343
У	243,749	241,853	247,3	245,741	231,877	215,2	207,65	221,498

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	21,868	20,623	22,141	21,959	21,443	23,379	19,138	24,595
У	215,761	212,985	220,649	218,239	220,319	220,047	211,317	242,332

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	25,286	24,329	21,812	23,163	21,288	19,863	19,948	22,832
У	243,585	231,999	221,974	224,41	210,707	203,286	211,136	225,712

№	145	146	147	148	149	150
X	22,49	19,503	22,504	24,556	23,145	21,21
У	216,221	207,914	229,257	236,633	224,109	212,589

Варіант 24

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	20,653	23,231	25,015	20,97	24,013	21,951	21,731	20,766
У	217,061	236,88	236,067	221,049	232,974	220,444	216,514	217,694

№	9	10	11	12	13	14	15	16
X	21,221	21,732	24,329	22,319	22,721	22,561	22,336	20,561
У	216,225	226,326	235,81	225,298	227,18	225,634	219,454	217,304

№	17	18	19	20	21	22	23	24
X	23,511	22,706	22,612	22,305	23,857	20,949	23,338	21,375
У	232,145	227,233	225,845	228,337	229,31	219,067	227,483	222,286

№	25	26	27	28	29	30	31	32
X	23,612	21,719	21,16	19,819	24,776	22,419	20,406	24,045
У	230,012	217,528	210,607	216,492	238,669	219,501	217,874	238,336

№	33	34	35	36	37	38	39	40
X	23,833	23,973	24,619	24,754	25,755	24,616	21,854	24,145
У	237,492	240,08	244,189	247,725	250,376	236,191	226,525	230,162

№	41	42	43	44	45	46	47	48
X	23,006	20,103	28,57	23,167	23,437	19,643	25,704	23,711
У	222,063	228,573	262,672	232,171	223,291	218,027	247,59	229,217

№	49	50	51	52	53	54	55	56
X	223,113	215,157	229,941	224,374	231,271	216,858	236,494	227,041
У	213,605	206,326	219,918	214,839	221,123	207,913	225,96	217,315

№	57	58	59	60	61	62	63	64
X	25,858	25,156	24,138	20,981	22,822	22,979	22,862	23,259
У	252,461	245,601	231,027	217,836	228,913	229,498	229,914	227,918

№	65	66	67	68	69	70	71	72
X	21,698	22,375	22,27	21,312	23,56	21,898	21,526	18,306
У	220,751	228,378	221,134	221,778	230,206	219,573	208,561	206,126

№	73	74	75	76	77	78	79	80
Х	24,189	23,253	22,763	28,659	21,284	17,722	23,235	21,259
У	237,571	230,809	230,444	220,09	205,556	200,128	226,57	213,785

№	81	82	83	84	85	86	87	88
Х	20,765	23,042	23,327	22,932	24,812	23,507	21,352	24,213
У	217,193	231,142	231,701	234,591	241,875	228,4	223,811	229,653

№	89	90	91	92	93	94	95	96
Х	20,324	25,319	25,684	25,774	24,163	22,304	20,965	23,271
У	220,904	250,793	253,152	249,24	234,814	220,377	218,976	227,145

№	97	98	99	100	101	102	103	104
Х	21,392	21,555	19,982	26,543	25,843	24,473	19,323	24,201
У	216,728	213,34	222,292	258,309	250,493	228,399	212,039	225,159

№	105	106	107	108	109	110	111	112
Х	18,716	25,591	23,226	25,253	24,346	25,252	22,963	27,066
У	212,357	245,606	237,507	246,733	243,981	242,923	240,973	258,157

№	113	114	115	116	117	118	119	120
Х	24,688	21,931	23,536	19,89	25,785	23,377	22,391	23,225
У	236,818	225,293	224,541	219,681	247,142	230,503	227,098	240,233

№	121	122	123	124	125	126	127	128
Х	26,246	25,525	26,288	26,827	25,09	23,287	20,519	23,345
У	255,715	253,646	259,544	257,883	242,876	224,835	216,6	231,627

№	129	130	131	132	133	134	135	136
Х	22,867	21,617	23,142	22,958	22,397	24,386	20,124	25,607
У	225,425	222,39	230,705	228,1	230,323	230,099	220,54	254,165

№	137	138	139	140	141	142	143	144
Х	26,303	25,341	22,811	24,169	22,285	20,852	20,938	23,836
У	255,54	243,016	232,122	234,794	219,956	211,907	220,373	236,187

№	145	146	147	148	149	150
Х	23,492	20,491	23,507	25,569	24,151	22,206
У	225,943	216,883	239,997	248,02	234,469	221,999

Варіант 25

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Х	21,641	24,232	26,025	21,96	25,018	22,946	22,725	21,755
У	226,046	247,381	246,577	230,332	243,225	229,721	225,5	226,728

№	9	10	11	12	13	14	15	16
Х	22,212	22,726	25,335	23,316	23,72	23,559	23,333	21,549
У	225,171	236,015	246,276	234,936	236,968	235,304	228,673	226,303

№	17	18	19	20	21	22	23	24
Х	24,513	23,705	23,61	23,301	24,861	21,939	24,34	22,367
У	242,318	237,024	235,533	238,192	239,292	228,207	237,315	231,673

№	25	26	27	28	29	30	31	32
Х	24,615	22,712	22,151	20,804	25,784	23,416	21,393	25,051
У	240,035	226,586	219,149	225,405	249,357	228,727	226,909	248,973

№	33	34	35	36	37	38	39	40
Х	24,837	24,978	25,627	25,763	26,768	25,624	22,849	25,151
У	248,059	250,838	255,266	259,061	261,939	246,695	236,233	240,217

№	41	42	43	44	45	46	47	48
Х	24,006	21,089	29,598	24,168	24,439	20,627	26,717	24,714
У	231,495	238,362	275,221	242,332	323,827	227,044	258,951	239,187

№	49	50	51	52	53	54	55	56
Х	24,224	21,014	24,855	22,182	25,766	20,753	26,023	22,119
У	232,628	223,982	239,969	233,903	241,428	225,796	247,035	236,758

№	57	58	59	60	61	62	63	64
Х	26,872	26,167	25,144	21,971	23,821	23,979	23,861	24,261
У	264,177	256,8	241,143	226,889	238,828	239,461	239,902	237,778

№	65	66	67	68	69	70	71	72
Х	22,691	23,372	23,266	22,303	24,563	22,893	22,519	19,283
У	230,04	233,952	230,471	231,125	240,242	228,785	216,97	214,24

№	73	74	75	76	77	78	79	80
X	25,195	24,254	23,762	24,662	22,275	18,696	24,236	22,251
У	248,158	240,877	240,467	239,05	213,74	207,79	236,333	222,559

№	81	82	83	84	85	86	87	88
X	21,754	24,042	24,328	23,931	25,821	24,51	22,344	25,219
У	226,192	241,225	241,835	244,918	252,793	238,304	233,306	239,674

№	89	90	91	92	93	94	95	96
X	21,311	26,33	26,697	26,787	25,169	23,301	21,955	24,273
У	230,152	262,37	264,911	260,722	245,203	229,662	228,11	236,951

№	97	98	99	100	101	102	103	104
X	22,384	22,548	20,967	27,56	26,857	25,48	20,304	25,207
У	225,717	222,093	231,627	270,469	262,067	238,339	220,614	234,857

№	105	106	107	108	109	110	111	112
X	19,695	26,604	24,227	26,264	25,353	26,264	23,963	28,086
У	220,933	256,821	248,054	258,016	255,033	253,933	251,758	270,326

№	113	114	115	116	117	118	119	120
X	25,696	22,926	24,538	20,875	26,799	24,379	23,388	24,226
У	247,37	234,916	234,17	228,825	258,475	240,553	236,868	250,974

№	121	122	123	124	125	126	127	128
X	27,262	26,537	27,304	27,846	26,134	24,289	21,507	24,346
У	267,679	265,435	271,784	270,024	253,876	234,476	225,547	241,756

№	129	130	131	132	133	134	135	136
X	23,866	22,610	24,142	23,958	23,394	25,392	21,109	26,620
У	235,092	231,793	240,761	237,962	240,324	240,158	229,755	265,994

№	137	138	139	140	141	142	143	144
X	27,319	26,352	23,81	25,175	23,281	21,842	21,928	24,84
У	267,493	254,036	242,267	245,181	229,21	220,531	229,606	246,661

№	145	146	147	148	149	150
X	24,495	21,478	24,509	26,581	25,156	23,202
У	235,67	225,85	250,733	259,407	244,833	231,415

Додаток 1

Значення функції Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \ell^{\frac{-z^2}{2}}dz$$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	**0,06**	0,239	**0,12**	0,0478	**0,18**	0,0714
0,01	0,0040	**0,07**	0,0279	**0,13**	0,0517	**0,19**	0,0753
0,02	0,0080	**0,08**	0,0319	**0,14**	0,0557	**0,20**	0,0793
0,03	0,120	**0,09**	0,0359	**0,15**	0,0596	**0,21**	0,0832
0,04	0,0160	**0,10**	0,0398	**0,16**	0,0636	**0,22**	0,0871
0,05	0,0199	**0,11**	0,0438	**0,17**	0,0675	**0,23**	0,0910
0,24	0,0943	**0,74**	0,2703	**1,23**	0,3907	**1,75**	0,4599
0,25	0,0937	**0,75**	0,2734	**1,24**	0,3925	**1,76**	0,4608
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,25**	0,3944	**1,77**	0,4616
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,78**	0,4625
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,79**	0,4633
0,29	0,1141	**0,79**	0,2353	**1,29**	0,4015	**1,80**	0,4641
0,30	0,1178	**0,80**	0,2331	**1,30**	0,4032	**1,81**	0,4649
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,33**	0,4049	**1,82**	0,4656
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,34**	0,4066	**1,83**	0,4664
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,35**	0,4082	**1,84**	0,4671
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,36**	0,4131	**1,85**	0,4678
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,37**	0,4147	**1,86**	0,4686
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,38**	0,4162	**1,87**	0,4693
0,37	0,1430	**0,87**	0,3078	**1,39**	0,4177	**1,88**	0,4699
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,40**	0,4192	**1,89**	0,4706
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,41**	0,4207	**1,90**	0,4713
0,40	0,1554	**0,90**	0,3190	**1,42**	0,4222	**1,91**	0,4719
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,43**	0,4326	**1,92**	0,4726
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,44**	0,4251	**1,93**	0,4732
0,43	0,1164	**0,93**	0,3238	**1,45**	0,4265	**1,94**	0,4738
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,46**	0,4279	**1,95**	0,4744
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,47**	0,4292	**1,96**	0,4750
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,48**	0,4306	**1,97**	0,4756
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,49**	0,4319	**1,98**	0,4761
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,50**	0,4332	**1,99**	0,4767
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,51**	0,4345	**2,00**	0,4772
0,50	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,52**	0,4357	**2,02**	0,4783

1	2	3	4	5	6	7	8
0,51	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,53**	0,4370	**2,04**	0,4793
0,52	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,54**	0,4382	**2,06**	0,4807
0,53	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,55**	0,4394	**2,08**	0,4812
0,54	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,56**	0,4406	**2,10**	0,4821
0,55	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,57**	0,4448	**2,12**	0,4830
0,56	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,58**	0,4429	**2,14**	0,4838
0,57	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,59**	0,4441	**2,16**	0,4846
0,58	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,60**	0,4452	**2,18**	0,4854
0,59	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,61**	0,4463	**2,20**	0,4861
0,60	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,62**	0,4474	**2,22**	0,4868
0,61	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,63**	0,4484	**2,24**	0,4875
0,62	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,64**	0,4495	**2,26**	0,4881
0,63	0,2357	**1,13**	0.3708	**1,65**	0.4505	**2,28**	0,4837
0,64	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,66**	0,4515	**2,30**	0,4893
0,65	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,67**	0,4525	**2,32**	0,4798
0,66	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,68**	0,4535	**2,34**	0,4904
0,67	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,69**	0,4545	**2,36**	0,4909
0,68	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,70**	0,4554	**2,38**	0,4913
0,69	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,71**	0,4564	**2,40**	0,4918
0,70	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,72**	0,4573	**2,42**	0.4922
0,71	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,73**	0,4582	**2,44**	0,4906
0,72	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,74**	0.4591	**2,46**	0,4931
0,73	0,2673						
2,48	0,4934	**2,64**	0,4959	**2,80**	0,4974	**2,98**	0,49856
2,50	0,4938	**2,66**	0,4961	**2,82**	0,4976	**3,00**	0,49865
2,52	0,4941	**2,68**	0,4963	**2,84**	0,4977	**3,20**	0,49931
2,54	0,4945	**2,70**	0,4965	**2,86**	0,4979	**3,40**	0,49966
2,56	0,4948	**2,72**	0,4967	**2,88**	0,4980	**3,60**	0,49984
2,58	0,4951	**2,74**	0,4969	**2,90**	0,4981	**3,80**	0,499928
2,60	0,4953	**2,76**	0,4971	**2,92**	0,4982	**4,00**	0,499968
2,62	0,4956	**2,78**	0 4973	**2,94**	0,4984	**5,00**	0,499997

Значення функції

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3816	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,00	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,00	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0043	0047	0046
3,00	0044	0043	0042	0040	0049	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 3

Квантилі розподілу Колмогорова $D_n\sqrt{n}$

n \ β	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	2	3	4	5	6
10	0.323	0.369	0.409	0.457	0.489
11	0.308	0.352	0.391	0.437	0.468
12	0.296	0.338	0.375	0.419	0.449
13	0.285	0.325	0.361	0.404	0.432
14	0.275	0.314	0.349	0.390	0.418
15	0.266	0.304	0.338	0.377	0.404
16	0.258	0.295	0.327	0.366	0.392
17	0.250	0.286	0.318	0.355	0.381
18	0.244	0.279	0.309	0.346	0.371
19	0.237	0.271	0.301	0.337	0.361
20	0.232	0.265	0.294	0.329	0.352
21	0.226	0.259	0.287	0.321	0.344
22	0.221	0.253	0.281	0.314	0.337
23	0.216	0.247	0.275	0.307	0.330
24	0.212	0.242	0.269	0.301	0.323
25	0.208	0.238	0.264	0.295	0.317
26	0.204	0.233	0.259	0.290	0.311
27	0.200	0.229	0.254	0.284	0.305
28	0.197	0.225	0.250	0.279	0.300
29	0.193	0.221	0.246	0.275	0.295
30	0.190	0.218	0.242	0.270	0.290
31	0.184	0.211	0.234	0.262	0.281
32	0.179	0.205	0.227	0.254	0.273
34	0.174	0.199	0.221	0.247	0.265
36	0.170	0.194	0.215	0.241	0.258
38	0.165	0.189	0.210	0.235	0.252
40	0.162	0.185	0.205	0.229	0.246
42	0.158	0.181	0.201	0.224	0.241
44	0.155	0.177	0.196	0.219	0.235
46	0.151	0.173	0.192	0.215	0.231
48	0.148	0.170	0.188	0.211	0.226
50	0.146	0.166	0.185	0.207	0.222
52	0.143	0.163	0.181	0.203	0.218
54	0.140	0.160	0.178	0.199	0.214
56	0.138	0.158	0.175	0.196	0.210
58	0.136	0.155	0.172	0.193	0.207

1	2	3	4	5	6
60	0.134	0.153	0.170	0.190	0.203
62	0.132	0.150	0.167	0.187	0.200
64	0.323	0.369	0.409	0.457	0.489
66	0.130	0.148	0.164	0.184	0.197
68	0.128	0.146	0.163	0.181	0.194
70	0.126	0.144	0.160	0.179	0.192
72	0.124	0.142	0.158	0.176	0.189
74	0.122	0.140	0.155	0.174	0.187
76	0.121	0.138	0.153	0.172	0.184
78	0.119	0.136	0.151	0.169	0.182
80	0.118	0.135	0.150	0.167	0.179
82	0.116	0.133	0.148	0.165	0.177
84	0.115	0.131	0.146	0.163	0.175
86	0.114	0.130	0.144	0.161	0.173
88	0.112	0.128	0.143	0.160	0.171
90	0.111	0.127	0.141	0.158	0.169
92	0.110	0.126	0.140	0.156	0.168
94	0.109	0.124	0.138	0.154	0.166
96	0.108	0.123	0.137	0.153	0.164
98	0.107	0.122	0.135	0.151	0.162
100	0.106	0.121	0.134	0.150	0.161
n>100	1.07	1.22	1.36	1.52	1.63

Додаток 4

Квантилі розподілу Пірсона (χ^2)

Число k ст.вільності	Рівень значущості α						
	0,95	0,975	0,99	k	0,95	0,975	0,99
1	0.0039	0.00098	0.00016	**16**	7.96	6.91	5.81
2	0.103	0.051	0.020	**17**	8.67	7.56	6.41
3	0.352	0.216	0.115	**18**	9.39	8.23	7.01
4	0.711	0.484	0.297	**19**	10.1	8.91	7.63
5	1.15	0.831	0.554	**20**	10.9	9.59	8.26
6	1.64	1.24	0.872	**21**	11.6	10.3	8.90
7	2.17	1.69	1.24	**22**	12.3	11.0	9.51
8	2.73	2.18	1.65	**23**	13.1	11.7	10.2
9	3.33	2.70	2.09	**24**	13.8	12.4	10.9
10	3.94	3.25	2.56	**25**	14.6	13.1	11.5
11	4.57	3.82	3.05	**26**	15.4	13.8	12.2
12	5.23	4.40	3.57	**27**	16.2	14.6	12.9
13	5.89	5.01	4.11	**28**	16.9	15.3	13.6
14	6.57	5.63	4.66	**29**	17.7	16.0	14.3
15	7.26	6.26	5.23	**30**	18.5	16.8	15.0

Додаток 5

Таблиця значень $q = q(\beta, n)$

n	β			n	β		
	0.95	0.99	0.999		0.95	0.99	0.999
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Додаток 6

Квантилі розподілу Стьюдента t_γ

Число ступенів вільності f=n-1	Рівні значущості $\gamma = 1 - \frac{\alpha}{2}$				
	0,900	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	1,86	2,92	4,30	6,97	9,93
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,37	1,81	2,32	2,76	3,17
11	1,36	1,80	2,02	2,72	3,11
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,33	1,74	2, 11	2,57	2,90
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,32	1.71	2,07	2,50	2,81
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80.
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78
∞	1,28	1,65	1,96	2,32	2,58

Додаток 7

Квантиль нормального розподілу U_β

β		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,50	0,0	0,000	0,251	0,501	0,752	1,002	1,253	1,504	1,755	2,005	2,256
0,55	0,0	1,257	1,282	1,307	1,332	1,358	1,383	1,408	1,434	1,459	1,484
0,60	0,0	2,533	2,559	2,585	2,611	2,637	2,663	2,689	2,715	2,741	2,767
0,65	0,0	3,853	3,880	3,907	3,934	3,961	3,989	4,016	4,043	4,070	4,097
0,70	0,0	5,244	5,273	5,302	5,330	5,359	5,388	5,417	5,446	5,476	5,505
0,75	0,0	6,745	6,776	6,808	6,840	6,871	6,903	6,935	6,967	6,999	7,031
0,80	0,0	8,415	8,452	8,488	8,524	8,560	8,596	8,633	8,669	8,705	8,742
0,85	-	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	1,058	1,063	1,067	1,071	1,076
0,90	-	1,282	1,287	1,293	1,299	1,305	1,311	1,317	1,323	1,329	1,335
0,95	-	1,645	1,655	1,665	1,675	1,685	1,695	1,706	1,717	1,728	1,739
0,96	-	1,751	1,762	1,774	1,787	1,799	1,812	1,825	1,838	1,852	1,866
0,97	-	1,881	1,896	1,911	1,927	1,943	1,960	1,977	1,995	2,014	2,034
0,98	-	2,054	2,075	2,097	2,120	2,144	2,170	2,197	2,226	2,257	2,290
0,99	-	2,326	2,366	2,409	2,457	2,512	2,576	2,652	2,748	2,878	3,090

Додаток 8

Значення змінної $Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$;

r	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	00000	00100	00200	00300	00400	00501	00601	00701	00802	00902
1	01003	01105	01206	01308	01409	01511	0161	01717	01620	01923
2	02027	02132	02237	02342	02448	02554	02661	02769	02877	02986
3	03095	03266	03317	03428	03541	03651	03769	03881	04001	04118
4	04236	04556	04477	04599	04722	04847	04973	05101	05230	05381
5	05493	05627	05763	05901	06442	06184	06328	06475	06625	06777
6	06931	07039	07250	07414	07582	07753	07928	08107	08291	08480
7	08673	08872	09076	09287	09505	19730	09962	10203	10454	10714
8	10986	11270	11567	11881	12212	12562	12933	13331	13758	14219
9	14722	15275	15890	15584	17380	18318	19459	20923	22976	26467

Додаток 9

Значення *th z*

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898
1	0997	1096	1194	1293	1391	1489	1586	1684	1781	1877
2	1874	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821
3	2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714
4	3800	3885	3969	4053	4136	4219	4301	4382	4462	4542
5	4621	4699	4777	4854	4930	5005	5080	8154	5227	5299
6	5360	5441	5511	5580	5649	5717	5784	58500	5915	5980
7	6044	6107	6169	6231	6291	6351	6411	6469	6527	6584
8	6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114
9	7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574
1.0	7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969
1	8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306
2	8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591
3	8617	8643	8668	8692	8721	8741	8754	8787	8810	8832
4	8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033
5	9051	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9201
6	9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9341
7	9354	9366	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458
8	9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9547	9554
9	9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9618	9626	9633
2.0	9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9686	9693	9699
1	9704	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753
2	9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797
3	9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834
4	9837	9840	9843	9846	9849	9852	9855	9858	9861	9864
2.5	9866	9869	9871	9874	9876	9879	9881	9884	9886	9888
6	9890	9892	9894	9897	9899	9901	9903	9904	9906	9908
7	9910	9912	9914	9915	9917	9919	9920	9922	9923	9925
8	9926	9928	9929	9931	9932	9933	9935	9936	9937	9938
9	9940	9941	9942	9942	9944	9945	9946	9947	9948	9949

Додаток 10

Критичні значення коефіцієнта кореляції r

n / β	0.95	0.975	0.995	0.9995
1	0.9877	0.9969	0.9999	0.10000
2	0.9000	0.9500	0.9900	0.9990
3	0.8054	0.8783	0.9587	0.9911
4	0.7293	0.8114	0.9172	0.9741
5	0.6694	0.7545	0.8745	0.9509
6	0.6215	0.7067	0.8346	0.9249
7	0.5822	0.6664	0.7977	0.8983
8	0.5494	0.6319	0.7646	0.8721
9	0.5214	0.6021	0.7348	0.8471
10	0.4973	0.5760	0.7079	0.8233
11	0.4762	0.5529	0.6835	0.8010
12	0.4762	0.5324	0.6614	0.7800
13	0.4409	0.5139	0.6411	0.7604
14	0.4459	0.4973	0.6226	0.7419
15	0.4124	0.4821	0.6055	0.7247
16	0.4000	0.4683	0.5897	0.7084
17	0.3887	0.4555	0.5751	0.6932
18	0.3783	0.4438	0.5614	0.6788
19	0.3687	0.4329	0.5487	0.6652
20	0.3598	0.4227	0.5368	0.6452
21	0.3515	0.4132	0.5256	0.6402
22	0.3438	0.4044	0.5151	0.6287
23	0.3365	0.3961	0.5052	0.6177
24	0.3297	0.3882	0.4958	0.6073
25	0.3233	0.3809	0.4869	0.5974
26	0.3172	0.3739	0.4785	0.5880
27	0.3115	0.3673	0.4705	0.5790
28	0.3061	0.3610	0.4629	0.5703
29	0.3009	0.3550	0.4556	0.5620
30	0.2960	0.3494	0.4487	0.5541
31	0.2913	0.3440	0.4421	0.5465
32	0.2869	0.3388	0.5357	0.5392
33	0.2826	0.3338	0.4297	0.5322
34	0.2785	0.3291	0.4238	0.5255
35	0.2746	0.3246	0.4182	0.5189

Додаток 11

Кватилі розподілу Фішера $F=(v_1,v_2)$ Q=2,5%

v_1/v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28
2	38,506	39,000	39,165	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,387
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473
4	12,218	10649	9,9792	9,6045	9,3645	9,1973	9,0741	8,9796	8,9047
5	10,007	8,4336	7,7636	7,3879	7,1464	6,9777	6,8531	6,7572	6,6810
6	8,8131	7,2598	6,5988	6,3372	5,9876	5,8197	5,6955	5,5996	5,5234
7	8,0727	6,5415	5,8898	5,5226	5,2852	5,1186	4,9949	4,8994	4,8232
8	7,57,9	6,0595	5,4160	5,0526	4,8173	4,6517	4,5286	4,4332	4,3572
9	7,2093	5,7147	5,0781	4,7181	4,4844	4,3197	4,1971	4,1020	4,0260
10	6,9367	5,4564	4,8256	4,4683	4,2361	4,0721	3,9498	3,8549	3,7790
11	6,7241	5,2559	4,6300	4,2751	4,0440	3,8807	3,7586	3,6638	3,5879
12	6,5538	5,0959	4,4742	4,1212	3,8911	3,7283	3,6065	3,5118	3,4358
13	6,4143	4,9653	4,3472	3,9959	3,7667	3,6,43	3,4827	3,3880	3,3120
14	6,2979	4,8567	4,2417	3,8919	3,6634	3,5014	3,3799	3,2853	3,2093
15	6,1995	4,7650	4,1528	3,8043	3,5764	3,4147	3,2934	3,1987	3,1227
16	6,1151	4,6867	4,0768	3,7294	3,5021	3,3406	3,2194	3,1248	3,0488
17	6,0420	4,6189	4,0112	3,6648	3,4379	3,2767	3,1556	3,0610	2,9849
18	5,9781	4,5597	3,9539	3,6083	3,3820	3,2209	3,0999	3,0053	2,9291
19	5,9216	4,5075	3,9034	3,5587	3,3327	3,1718	3,0509	2,9563	2,8800
20	5,8715	4,4613	3,8587	3,5147	3,2891	3,1283	3,0074	2,9128	2,8365
21	5,8266	4,4199	3,8188	3,4754	3,2501	3,0895	2,9686	2,8740	2,8365
22	5,7863	4,3828	3,7829	3,4401	3,2151	3,0546	2,9338	2,8392	2,7628
23	5,7498	4,3492	3,7505	3,4083	3,1835	3,0232	2,9024	2,8077	2,7313
24	7,5167	4,3187	3,7211	3,3794	3,1548	2,9946	2,8738	2,7791	2,7027
25	5,6854	4,2909	3,6943	3,3530	3,1287	2,9685	2,8478	2,7531	2,6766
26	5,6586	4,2655	3,6697	3,3289	3,1048	2,9447	2,8240	2,7293	2,6528
27	5,6331	4,2421	3,6472	3,3067	3,0828	2,9228	2,8021	2,7074	2,6309
28	5,6096	4,2205	3,6264	3,2863	3,0625	2,9027	2,7820	2,6782	2,6106
29	5,5878	4,2006	3,672	3,2674	3,0438	2,8840	2,7633	2,6686	2,5919
30	5,5675	4,1821	3,5894	3,2499	3,0265	2,8667	2,7460	2,6513	2,5746
40	5,4239	4,0510	3,4633	3,1261	2,9037	2,7444	2,6238	2,5289	2,4519
60	5,2857	3,9253	3,425	3,0077	2,7863	2,6274	2,5068	2,4117	2,3344
120	5,1524	3,8046	3,2270	2,8943	2,6740	2,5154	2,3948	2,2994	2,2217
∞	5,0239	3,6889	3,1161	2,7858	2,5665	2,4082	2,2875	2,1918	2,1136

Q=2,5%

ν_1/ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	968.63	976.71	984.87	993.10	997.25	1001.4	1005.6	1009.9	1014.0	1018.3
2	39.398	39.415	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	14.419	14.337	14.253	14.167	14.124	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.4613	8.4111	8.3604	8.3092	8.2573
5	6.6192	6.5246	6.4227	6.3285	6.2780	6.2269	6.1751	6.1225	6.0693	6.0153
6	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.0652	5.0125	4.9589	4.9045	4.8491
7	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.3624	4.3089	4.2544	4.1989	4.1423
8	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.894.	3.8398	3.7844	3.7279	3.6702
9	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.5604	3.5055	3.4493	3.3918	3.3329
10	3.7168	3.6209	3.5217	3.4186	3.3654	3.3110	3.2554	3.1984	3.1399	3.0798
11	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.1176	3.0613	3.0035	2.9441	2.8828
12	3.3736	3.2772	3.1772	3.0728	3.0187	2.9633	2.9063	2.8478	2.7884	2.7249
13	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.873	2.7797	2.7204	2.6590	2.5955
14	3.1469	3.0501	2.9493	2.8437	2.7888	2.7324	2.6742	2.6142	2.5519	2.4872
15	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.637	2.5850	2.5242	2.4611	2.3953
16	2.9862	2.8890	2.7875	2.68.8	2.6252	2.5678	2.5085	2.4471	2.3831	2.3163
17	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.5021	2.4422	2.3801	2.3153	2.2474
18	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.4445	2.3842	2.3214	2.2558	2.1869
19	2.8173	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.3937	2.3329	2.2695	22032	2.1339
20	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.3486	2.2873	2.2234	2.1562	2.0853
21	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.3082	2.2465	2.1819	2.1141	2.0422
22	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.2718	2.2097	2.1446	2.0760	2.0032
23	2.6682	25699	2.4665	2.3567	2.2989	2.2389	2.1763	2.1107	2.0415	1.9677
24	2.6396	2.5412	2.4374	2.3273	2.2693	2.2090	2.1460	2.0799	2.0099	1.9353
25	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.1816	2.1183	2.0517	1.9811	1.9055
26	2.5895	2.4909	2.3867	2.2759	2.2174	2.1565	2.0928	2.0257	1.9545	1.8781
27	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.1334	2.0693	2.0018	1.9299	1.8527
28	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.1121	2.0477	1.9796	1.9072	18291
29	2.5286	2.4295	2.348	2.2131	2.1540	2.0923	2.0276	1.9591	1.8861	1.8072
30	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.0739	2.0089	1.9400	1.8664	1.7867
40	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.9429	1.8752	1.8028	1.7242	1.6371
60	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.8152	1.7440	1.6668	1.5810	1.4822
120	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.597	1.6899	1.6141	1.5299	1.4327	1.3104
∞	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.5660	1.4835	1.3883	1.2684	1.0000

$Q=5\%$

ν_1/ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.247	19.164	19.296	19.330	19353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8452	8.8123
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3883	6.2560	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	7.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2539	4.2066	4.168	4.990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7557	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	38626	36331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	38056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.32448	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.4587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.541	2.9604	2.7278	2.719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.7709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4459	2.3359	2.2490	2.2802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	309201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
∞	3.8401	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Q=5%

ν_1/ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.09	251.14	252.20	253.25	254.32
2	19396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19496
3	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5265
4	5.9644	6.9117	5.8578	5.8025	5.8025	5.7744	5.7449	5.7170	5.6878	5.6581
5	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3984	4.3650
6	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6688
7	3.6365	3.5747	3.5108	3.445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	3.3472	3.2840	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.475	2.7067
10	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.401	2.4480	2.4045
12	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	25055	2.4663	2.459	2.3842	2.3410	2.2962
13	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	2.6021	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2230	2.1778	2.1307
15	2.5437	2.4753	2.4035	2.327	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	20589	2.0096
17	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	21497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9796	1.9302	1.8780
20	2.3479	2.2776	2.033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8895	1.8380	1.7831
23	2.2747	2.2036	2.182	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8649	1.8128	17570
24	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7897	1.7331
25	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.853	1.8027	1.7488	1.6906
27	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7307	1.6717
28	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8201	1.7689	1.7138	1.6541
29	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	16377
30	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	16835	16223
40	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	16373	1.5766	15089
60	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.319	1.2539
∞	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

Додаток 12

Відсоткові точки розподілу статистики $\alpha = \sum|\xi_1 - \xi_2|/ns$

Об'єм вибірки	Q						Md	$\sqrt{Dd}$
n	1%	5%	10%	90%	95%	99%		
11	0.9359	0.9073	0.8899	0.7409	0.7153	0.6655	0.81805	0.05784
16	0.9137	0.8884	0.8733	0.7452	0.7536	0.6829	0.81128	0.04976
21	0.9001	0.8768	0.8631	0.7495	0.7304	0.6950	0.80792	0.04419
26	0.8901	0.8686	0.8570	0.7530	0.7360	0.7040	0.80590	0.04011
31	0.8827	0.8625	0.8511	0.7559	0.7404	0.7110	0.80456	0.03697
36	0.8769	0.8578	0.8468	0.7583	0.7440	0.7167	0.80360	0.03447
41	0.8722	0.8540	0.8436	0.7604	0.7470	0.7216	0.80289	0.03241
46	0.8682	0.8508	0.8409	0.7621	0.7496	0.7256	0.80233	0.03068
51	0.8648	0.8481	0.8385	0.7336	0.7518	0.7291	0.80188	0.02919
61	0.8592	0.8434	0.8349	0.7662	0.7554	0.7347	0.80122	0.02678
71	0.8549	0.8403	0.8321	0.7683	0.7583	0.7393	0.80074	0.02487
81	0.8515	0.8376	0.8298	0.7700	0.7607	0.7430	0.80038	0.02332
91	0.8484	0.8353	0.8279	0.7714	0.7626	0.7460	0.80010	0.02203
101	0.8460	0.8344	0.8264	0.7726	0.7644	0.7487	0.79988	0.02094
201	0.8322	0.8229	0.8178	0.7796	0.7738	0.7629	0.79888	0.01491
301	0.8260	0.8183	0.8140	0.7828	0.7781	0.7693	0.79855	0.01220
401	0.8223	0.8155	0.8118	0.7847	0.7807	0.7731	0.79838	0.01058
501	0.8198	0.8136	0.8103	0.7861	0.7825	0.7757	0.79828	0.00947
601	0.8179	0.8123	0.8092	0.7873	0.7838	0.7776	0.79822	0.00865
701	0.8164	0.8112	0.8084	0.7878	0.7848	0.7791	0.79817	0.00801
801	0.8152	0.8103	0.8077	0.7885	0.7857	0.7803	0.79813	0.00749
901	0.8142	0.8096	0.8071	0.7890	0.7864	0.7814	0.79811	0.00707
1001	0.8134	0.8090	0.8066	0.7894	0.7869	0.7822	0.79808	0.00670

Додаток 13

Відсоткові точки розподілу вибіркового коефіцієнта асиметрії g_1

Об'єм вибірки n	Q		$\sqrt{Dg_1}$	Об'єм вибірки n	Q		$\sqrt{Dg_1}$
	5%	1%			5%	1%	
25	0.711	1.061	0.4354	550	0.171	0.243	0.1039
30	0.661	0.982	0.4052	600	0.163	0.233	0.0995
35	0.621	0.921	0.3804	650	0.147	0.224	0.0956
40	0.587	0.869	0.3596	700	0.151	0.215	0.0922
45	0.558	0.825	0.3418	750	0.146	0.208	0.0891
50	0.533	0.787	0.3264	800	0.142	0.202	0.0863
60	0.492	0.723	0.3039	850	0.138	0.196	0.0837
70	0.459	0.673	0.2806	900	0.134	0.190	0.814
80	0.432	0.631	0.2638	950	0.130	0.185	0.0792
90	0.309	0.596	0.2498	1000	0.127	0.180	0.0772
100	0.389	0.567	0.2377	1200	0.116	0.165	0.0705
125	0.350	0.508	0.2139	1400	0.107	0.152	0.0653
150	0.321	0.464	0.1961	1600	0.100	0.142	0.0611
175	0.298	0.430	0.1820	1800	0.095	0.134	0.576
200	0.280	0.403	0.1706	2090	0.090	0.127	0.0547
250	0.251	0.360	0.1531	2500	0.080	0.114	0.0489
300	0.230	0.329	0.1400	3000	0.073	0.104	0.0447
350	0.213	0.305	0.1298	3500	0.068	0.096	0.0414
400	0.200	0.285	0.1216	4000	0.064	0.090	0.0387
450	0.188	0.269	0.1147	4500	0.060	0.085	0.0365
500	0.179	0.255	0.1089				

Література

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1988.
2. Вентцель Е.С. Теорія вероятностей. – М.: Наука, 1964.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1977.
4. Шор Я.Б., Кузьмин Ф.И. Таблицы для анализа и контроля надежности. – М.: Советское радио, 1968.
5. Пустыльник Б.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968.
6. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1969.
7. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971.
8. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачи/ Посібник. – К: Академія, 2003.

Навчальне видання

Віра Андріївна Петрук
Галина Григорівна Кашканова

ЙМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ТА СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА РІШЕНЬ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено В. А. Петрук

Редактор В.О. Дружиніна

Видавництво ВНТУ «УНІВЕРСУМ-Вінниця»
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ
Тел.(0432) 59-85-32

Підписано до друку 31. 08. 2006р.
Формат 29,7x42 ¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний Ум. друк. арк. 7,32
Тираж 100 прим. Зам. № 2006-143

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
Тел.(0432) 59-81-59