

Н.І. Заболотна, С.В.Павлов, В.В. Шолота

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ
ЛАЗЕРНОЇ ТА ОПТОЕЛЕКТРОННОЇ ТЕХНІКИ**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н.І. Заболотна, С.В.Павлов, В.В. Шолота

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЛАЗЕРНОЇ ТА
ОПТОЕЛЕКТРОННОЇ ТЕХНІКИ**

Затверджено Вченою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальності 7.091101 – „Лазерна та оптоелектронна техніка”.
Протокол № 7 від “ 6 ” березня 2003 р.

Вінниця ВНТУ 2003

Рецензенти:

Р.Н.Квстний, доктор технічних наук, професор

І.В.Кузьмін, доктор технічних наук, професор

В.М.Дубчак, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

3 12 **Заболотна Н.І., Павлов С.В., Шолота В.В.**
Комп'ютерне моделювання задач лазерної та оптоелектронної техніки. Навчальний посібник.– Вінниця: ВНТУ, 2003.– 151 с.

Навчальний посібник присвячений загальним питанням математичного моделювання, технології аналітичного та імітаційного моделювання складних систем, до складу яких належать і оптоелектронні системи. В той же час розглянуто приклади моделювання оптико-електронних систем оброблення біомедичної інформації та інформаційних оптоелектронних систем для паралельних спецобчислень.

Навчальний посібник призначено для студентів спеціальності 7.091101 – “Лазерна та оптоелектронна техніка” і може бути корисним для аспірантів і спеціалістів, що займаються проектуванням оптоелектронних і лазерних систем.

УДК 681.3.06 (075)

© Н.І.Заболотна, С.В.Павлов,
В.В.Шолота, 2003

ЗМІСТ

Передмова.....	6
Методичні рекомендації	7
Вступ	8
1 Загальні питання теорії моделювання	9
1.1 Предмет теорії моделювання	9
1.2 Принципи системного підходу в моделюванні.....	10
1.3 Етапи моделювання.....	12
1.4 Класифікація видів моделювання системи.....	13
1.5 Аналітичні моделі	16
1.5.1 Моделі фізичних явищ	16
1.5.2 Моделі математичного програмування.....	17
1.5.3 Мережеві моделі	18
1.5.4 Моделі масового обслуговування	19
1.5.5 Моделі теорії ігор	20
1.5.6 Сутність моделювання на аналітичних моделях.....	22
1.6 Імітаційні моделі	23
1.6.1 Приклад імітаційної моделі	23
1.6.2 Сутність моделювання на імітаційних моделях.....	24
1.6.3 Умови використання імітаційних моделей	24
Контрольні питання	26
2 Технологія моделювання складних систем	28
2.1 Створення концептуальної моделі	28
2.2 Підготовка початкових даних	33
2.3 Розробка математичної моделі.....	35
2.4 Вибір методу моделювання.....	38
2.4.1 Аналітичні методи	38
2.4.2 Імітаційні методи	39
2.5 Вибір засобів моделювання.....	44
2.6 Перевірка адекватності та корекції моделі.....	47
2.7 Планування експериментів з моделлю	49
2.8 Аналіз результатів моделювання.....	52
Контрольні питання	55

3	Математичні основи статистичного моделювання складних систем	58
3.1	Використання методу статистичних досліджень при імітації.....	58
3.1.1	Сутність методу статистичних досліджень	58
3.1.2	Розрахунок необхідного числа реалізацій.....	60
3.1.3	Імітація рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел ...	61
3.1.4	Алгоритми імітації різних випадкових впливів	63
3.2	Статистичні методи обробки результатів моделювання.....	67
3.2.1	Фіксація і накопичення статистики моделювання	67
3.2.2	Визначення довірчих інтервалів	69
3.2.3	Правила автоматичної зупинки.....	70
3.2.4	Апроксимація результатів моделювання	71
3.2.5	Ідентифікація закону розподілу за гістограмою.....	73
3.3	Аналіз результатів моделювання.....	75
3.3.1	Оцінювання точності імітаційного експерименту	75
3.3.2	Зменшення числа параметрів моделі	77
3.3.3	Визначення інтервалів зміни параметрів	81
3.3.4	Визначення джерел помилок	82
3.3.5	Виключення значень, які різко відхиляються.....	83
3.3.6	Вибір системи координат.....	83
3.3.7	Аналіз функції відклику.....	84
	Контрольні питання	85
4	Сучасні напрямки в моделюванні оптоелектронних технологій.....	88
4.1	Основні напрямки застосування комп'ютерного моделювання в оптоелектронних дослідженнях.....	88
4.2	Комп'ютерна реконструктивна томографія.....	91
4.2.1	Постановка задачі та алгебраїчний підхід до її вирішення.....	91
4.2.2	Паралельна інтерпретація метода Гаусса-Жордана для розв'язання СЛАР високих порядків	99
4.3	Моделювання в прикладних задачах створення біомедичних оптоелектронних систем.....	100
4.3.1	Аналіз математичних моделей взаємодії оптичного випромінювання з біотканинами.....	100
4.3.2	Моделювання в оптико-електронних системах обробки біосигналів із застосуванням алгоритмів фільтрації.....	103
4.3.3	Моделювання в складних оптико-електронних системах діагностики стану організму людини із застосуванням математичного апарату нечіткої логіки.....	111
4.3.4	Аналіз зображення за інтенсивністю світлового потоку при діагностиці захворювань рогівки ока	122
	Контрольні питання	125

5 Моделювання паралельних обчислень в оптоелектронних інформаційно-обчислювальних пристроях	126
5.1 Основні принципи організації обчислювального процесу на паралельних регулярних однорідних середовищах.....	126
5.2 Базовий набір бінарних операцій картинної обробки оптичної інформації.....	127
5.3 Моделювання операцій картинної обробки над числовими матрицями (багатоградацийними зображеннями).....	129
5.3.1 Паралельний запис, збереження і зчитування числових матриць	129
5.3.2 Паралельне додавання бінарних матриць на оптоелектронному комбінаційному однорозрядному картинному суматорі.....	130
5.3.3 Паралельне додавання числових матриць за розрядними зрізами на оптоелектронному накопичувальному суматорі	131
5.3.4 Приклад моделювання операції паралельної картинної обробки на традиційному комп'ютері.....	133
5.4 Математичне моделювання операції паралельного векторно-матричного множення.....	135
Контрольні питання	145
Література.....	147

ПЕРЕДМОВА

Комп'ютерні системи оброблення даних отримали широке застосування в наукових дослідженнях і на виробництві. Зростаючі можливості комп'ютерного моделювання забезпечують високу ефективність збирання, оброблення і перетворення даних в лазерних і оптоелектронних інформаційно-обчислювальних, вимірювальних і керувальних системах. Тому вивчення методів та засобів комп'ютерного моделювання лазерних та оптоелектронних інформаційних технологій займає провідне місце у підготовці фахівців зі спеціальності „Лазерна та оптоелектронна техніка”.

До основних напрямків застосування моделювання в розв'язанні задач лазерної та оптоелектронної техніки слід віднести: оброблення результатів оптичних експериментів; комп'ютерний розрахунок і конструювання оптичних систем; оптимізацію оптоелектронних систем; оброблення зображень і цифрову оптику; автоматизацію оптичних експериментів; адаптивне керування оптичними і лазерними системами; розробку оптичних методів оброблення інформації з метою створення оптоелектронних комп'ютерів; розробку моделей прогресивних лазерних медичних технологій.

Метою навчального посібника є спроба допомогти студентам та аспірантам, що спеціалізуються за фахом „Лазерна та оптоелектронна техніка”, засвоїти необхідні знання з загальних питань теорії математичного моделювання, технологій моделювання (аналітичного і імітаційного) оптоелектронних систем, як складних систем, для отримання практичних навичок в моделюванні систем оброблення біомедичної інформації та паралельних обчислень в оптоелектронних обчислювальних пристроях. Так, в навчальному посібнику наведена загальна постановка задачі комп'ютерної реконструктивної томографії, алгебраїчний підхід до її вирішення та запропонована паралельна інтерпретація цього підходу на засадах природного паралелізму оптичних цифрових обчислень. За цими ж принципами запропоновано моделі паралельних операцій картинного оброблення над числовими матрицями (багаторозмірними зображеннями) в оптоелектронних інформаційно-обчислювальних пристроях.

З іншого боку, в навчальному посібнику висвітлюються тенденції розвитку нових інформаційних технологій для моделювання процесів взаємодії оптичного випромінювання з біотканинами, систем діагностики стану організму людини на основі апарату нечіткої логіки.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Основою для успішного засвоєння матеріалу запропонованого навчального посібника в межах дисципліни „Комп'ютерне моделювання пристроїв та технологій в оптоелектроніці” є знання з „Теорії ймовірності”, „Математичної статистики” та „Обчислювальної техніки та програмування”.

Навчальний посібник складається із п'яти розділів.

Розділ 1, написаний к.т.н., ст. викладачем Шолотою В.В., носить узагальнювальний вступний характер. В ньому висвітлюються предмет, принципи, етапи моделювання, наводиться класифікація його видів з детальним розглядом прикладів аналітичного та імітаційного моделювання.

Розділ 2, написаний к.т.н., доцентом Заболотною Н.І. (п.2.1–2.4) к.т.н. Шолотою В.В. (2.5–2.8), присвячений технології моделювання як процесу, що дозволяє полегшити читачу перехід від опису до імітаційної моделі, комп'ютерної програми.

Розділ 3, написаний к.т.н. доцентом Заболотною Н.І., висвітлює математичні основи моделювання лазерних і оптоелектронних систем як складних систем. Запропоновано ряд рекомендацій з формалізації імітації складної системи, за допомогою статистичних методів.

Приклади сучасних напрямків застосування комп'ютерного моделювання в оптоелектронних дослідженнях наводяться в розділі 4, написаному к.т.н. Шолотою В.В. (пп 4.1, 4.2) і к.т.н. доцентом Павловим С.В. (пп. 4.3, 4.4) та в розділі 5, написаному к.т.н., доц. Заболотною Н.І. Розділ 4 демонструє результати моделювання в прикладних задачах створення біомедичних оптоелектронних систем. Моделювання паралельних обчислень в оптоелектронних інформаційно-обчислювальних пристроях за технікою розрядних зрізів наведено в розділі 5.

При організації самостійної роботи над матеріалом посібника слід звернути увагу, що розділи 1–3 описують основні теоретичні положення для досить широкого класу складних систем, в той час, як розділи 4 і 5 висвітлюють моделювання спеціалізованих оптоелектронних систем.

Комп'ютерне моделювання сьогодні є широко розповсюдженим інструментом оптичних та електронних досліджень. Вплив обчислювальної техніки привів до багатьох важливих змін в оптичних та оптоелектронних дослідженнях. Так, з одного боку, комп'ютерне моделювання вдихнуло нове життя в деякі області дослідження, такі, як проектування лінз, дослідження оптичних систем, медична оптика і створило власні нові напрямки, наприклад методи Монте-Карло (та інші статистичні методи) в оптиці, обчислювальна оптика, цифрова обробка зображень і синтез голограм на комп'ютері. Результатом став видатний вклад в бурхливе зростання оптоелектроніки останнім часом.

З іншого боку, методи експериментальної оптики та оптоелектроніки сильно вплинули на розвиток сучасної обчислювальної техніки. Суттєвого прогресу досягнуто в дослідженнях архітектур і оптичних систем, придатних для побудови оптоелектронних комп'ютерів, яким властивий високий рівень паралелізму та висока продуктивність обчислень.

Запропонований навчальний посібник присвячений загальним питанням теорії математичного моделювання, технології аналітичного та імітаційного моделювання складних систем, до складу яких відносяться і оптоелектронні та лазерні системи. Теоретичні питання моделювання складних обчислювальних систем викладені в ряді робіт, збірниках статей, спеціальних випусках журналів вітчизняних та іноземних авторів. Разом з тим літератури, присвяченої прикладним аспектам моделювання оптоелектронних спеціалізованих пристроїв та технологій, ще не достатньо. Автори посібника задались метою в певній мірі поповнити знання в даній області. Автори впевнені, що поява нових методів комп'ютерної реконструктивної томографії, ефективних моделей біомедичних оптоелектронних систем діагностики стану організму людини відкриває нові можливості в науці, техніці, медицині. Практично на даний момент прогрес суспільства, особливо в сфері охорони здоров'я, багато в чому залежить від досягнень комп'ютерного моделювання систем обробки оптичних зображень. Тому серед сучасних напрямків в моделюванні оптоелектронних біометричних технологій автори виділяють нові модифікації методів комп'ютерної реконструктивної томографії та методи діагностики стану організму людини на основі апарату нечіткої логіки.

Для створення відповідних апаратних засобів для цих методів авторами пропонуються паралельні оптоелектронні пристрої, моделі яких відзначаються високим рівнем паралелізму. Так, запропоновано перспективні моделі паралельних картинних логічних операцій, паралельних тригерів, паралельних картинних нагромаджуючих суматорів та векторно-матричних помножувачів.

1 ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Предмет теорії моделювання

Моделювання – це заміщення одного об'єкта (оригіналу) іншим (моделлю) і фіксація чи вивчення властивостей оригіналу шляхом дослідження властивостей моделі [1-5]. Заміщення відбувається з метою спрощення, здешевлення, прискорення фіксації чи вивчення властивостей оригіналу.

В загальному випадку об'єктом-оригіналом може бути будь-яка штучна чи природна, реальна чи уявна система. Вона має деяку множину параметрів S_0 і характеризується певними властивостями. Кількісною мірою властивостей системи служить множина характеристик Y_0 . Система проявляє свої властивості під впливом зовнішніх впливів X .

Множина параметрів системи і їх значень відображають її внутрішній стан - структуру і принципи функціонування чи існування. набір і значення параметрів виділяють систему серед інших. Характеристики системи – це її в основному зовнішні ознаки, які важливі при взаємодії з іншими системами. Значення характеристик відображають рівень взаємозв'язку між системами.

Характеристики системи в основному знаходяться в функціональній залежності від її параметрів. Очевидно, що кожна характеристика системи $y_0 \in Y_0$ визначається в основному чи частково обмеженою підмножиною параметрів $\{s_{0k}\} \subset S_0$. Решта параметрів не впливають чи практично не впливають на значення даної характеристики системи. Дослідника, як правило, цікавлять тільки деякі характеристики досліджуваної системи $\{y_{0k}\} \subset Y_0$ при конкретних зовнішніх впливах на систему $\{x_{0k}\} \subset X$.

Модель – це теж система зі своєю множиною параметрів S_m та характеристик Y_m . Оригінал та модель схожі за одними параметрами та різними за іншими. Заміщення одного об'єкта іншим правомірне, якщо характеристики оригіналу та моделі, які цікавлять досліджувача, визначаються однотипними параметрами і пов'язані однаковими залежностями з цими параметрами. При однакових зовнішніх впливах $\{x_{on}\}$ на визначеному часовому інтервалі T для оригіналу та моделі характерні такі залежності:

$$y_{ok} = f(\{s_{oi}\}, \{x_{on}\}, T), \quad (1)$$

$$y_{mk} = f(\{s_{mi}\}, \{x_{mn}\}, T_m), \quad (2)$$

де y_{mk} – k -та характеристика моделі; x_{mn} – зовнішній вплив на модель; T_m – модельний час, тобто час, на протязі якого на модель діють зовнішні впливи $\{x_{mn}\} \subset X$ та вимірюються характеристики $\{y_{mk}\} \subset Y_m$.

При цьому $s_{oi} = \psi(s_{mi})$, $x_{on} = \omega(x_{mn})$, $T = mT_m$ (де m – масштабний коефіцієнт) на всьому інтервалі $(0, T_m)$ або в окремі періоди часу.

Тоді з деяким наближенням можна зробити висновок про те, що характеристики оригіналу пов'язані з характеристиками моделі деякими залежностями $y_{ok} = \phi(y_{mk})$. В такому випадку множина характеристик моделі $Y_{mk} = \{y_{mk}\}$ є зображенням множини досліджуваних характеристик оригіналу $Y_{ok} = \{y_{ok}\}$, тобто $\phi: Y_{ok} \rightarrow Y_{mk}$.

При дослідженні складних реальних систем, у яких відомі характеристики Y_{ok} , але мало вивчені склад елементів та принципи їх взаємодії при конкретних зовнішніх впливах $\{x_{on}\}$, а значить немає достатньо відомостей про параметри $\{s_{oi}\}$, за допомогою моделювання може вирішуватись обернена задача. Створюють приблизну модель, визначають її характеристики Y_{mk} при еквівалентних зовнішніх впливах $\{x_{mn}\}$ ($\omega: \{x_{on}\} \rightarrow \{x_{mn}\}$) і, якщо виявляється, що має місце відображення $\phi: Y_{ok} \rightarrow Y_{mk}$ з деякою відомою функцією ϕ , то вважається, що система-оригінал має такі ж параметри.

Таким чином, моделювання доцільне в таких випадках: якщо об'єкт-оригінал не існує в природі і його, на даний момент, неможливо створити фізично; якщо створення чи дослідження об'єкта-оригіналу коштує дуже дорого; при теоретичних дослідженнях, якщо на основі теорії виникає множина даних, які необхідно опрацювати.

При цьому обрана модель повинна задовольняти такі основні вимоги:

- а) адекватність моделі і об'єкта-оригінала з відсутністю у моделі тих ознак оригінала, які заважають його дослідженню, або наявність у моделі відмінних від оригінала ознак, які допомагають фіксації чи вивченню властивостей моделі;
- б) реалізуємість моделі;
- в) надійність моделі і достовірність отриманих результатів.

Теорія моделювання являє собою взаємопов'язану сукупність положень, визначень, методів та засобів створення і вивчення моделей. Ці положення, визначення, методи і засоби, як і самі моделі, є предметом теорії моделювання.

Основна мета теорії моделювання полягає в тому, щоб озброїти дослідників технологією створення таких моделей, які досить точно і повно фіксують ті властивості оригіналів, які їх цікавлять, простіше і дешевше піддаються дослідженню та припускають перенесення його результатів на оригінали.

1.2 Принципи системного підходу в моделюванні

В наш час при аналізі та синтезі великих систем отримав розвиток системний підхід [2,3], який відрізняється від класичного (або індуктивного) підходу. Останній визнає систему шляхом переходу від особливого до спільного і синтезує (конструює) систему шляхом злиття її компонент, які розробляються окремо. На відміну від цього системний підхід припускає послідовний перехід від спільного до особливого, коли в основі розглядан-

ня лежить мета, причому досліджуваний об'єкт виділяється з оточуючого середовища.

Важливим для системного підходу є визначення структури системи – сукупності зв'язків між елементами системи, які відображають їх взаємодію. Структура системи може вивчатися зовні, коли аналізуються окремі властивості, які дозволяють системі досягати заданої мети, тобто коли вивчаються функції системи.

Сьогодні існують різні подання системи, які відображають різні напрямки системного підходу. Вся різноманітність представлення системи, яка пропонується в системному підході, може бути зведена до п'яти основних форм подання систем: *мікроскопічної, функціональної, макроскопічної, ієрархічної і процесуальної*.

Мікроскопічне подання системи базується на розумінні її як множини взаємопов'язаних елементів. Для такого подання системи важливим є також подання структури, яка включає і елементи, і зв'язки системи, але не будь-які, а тільки прямі зв'язки цих елементів.

Функціональне подання системи пов'язано з її розумінням як сукупності дій (функцій) для досягнення визначеної мети. Кожен елемент в системі виконує визначену функцію. Функціональні властивості елементів є властивостями першого порядку. Вони дозволяють елементу вмикатися в систему для отримання спільної мети. Властивостями другого порядку – небажані властивості, які приносять з собою елемент в систему.

Макроскопічне подання системи базується на розумінні системи як нерозривного цілого. Тут домінуючим є поняття системного оточення, під яким розуміється сукупність всіх об'єктів, зміна властивостей яких впливає на систему і на які, в свою чергу, впливає зміна властивостей самої системи. В даному випадку система може бути охарактеризована множиною зовнішніх зв'язків або зовнішньою структурою.

Ієрархічне подання системи (як і ієрархічної упорядкованості) базується на понятті підсистеми або одиниці, яке слід відрізнити від поняття елемент. Одиниця володіє функціональною специфікою цілого (системи). Система може бути представлена у вигляді одиниць, які складають системну ієрархію, яка закривається знизу кінцевою одиницею. Остання все ще зберігає риси даної системи, але не може бути розкладена на одиниці, а тільки на елементи.

Процесуальне системне подання припускає розуміння системи як сукупності процесів, кожен з яких може бути розкладений на послідовність станів в часі. Основним поняттям тут є поняття часового інтервалу (періоду життя), в протіканні якого функціонує даний процес (саме період життя і розбивається на ряд станів). Зв'язки між окремими станами, які з'єднують їх в єдиний процес, називаються зв'язками переходу.

На базі системного підходу може бути запропонована і деяка послідовність розробки моделей, коли виділяють дві основні стадії проектування: макропроектування і мікропроектування.

На стадії макропроекування на основі даних про реальну систему S і даних зовнішнього середовища E будується модель зовнішнього середовища, виявляються ресурси та обмеження для побудови моделі системи, вибирається модель системи та категорії, які дозволяють оцінити адекватність моделі M реальній системі S.

Стадія мікропроекування в значній мірі залежить від конкретного типу обраної моделі. У випадку імітаційної моделі необхідно забезпечити створення інформаційного, математичного, технічного та програмного забезпечення системи моделювання. На цій стадії можна встановити основні характеристики створеної моделі, оцінити час роботи з нею та затрати ресурсів для отримання заданої якості відповідності моделі процесу функціонування системи S.

Незалежно від типу використаної моделі M при її побудові необхідно керуватися рядом таких принципів системного підходу [2]:

- а) пропорційно – послідовне переміщення по етапах та напрямках створення моделі;
- б) узгодження інформаційних, ресурсних, надійнісних та інших характеристик;
- в) правильне співвідношення окремих рівнів ієрархії в системі моделювання;
- г) цілісність відокремлених стадій побудови моделі.

1.3 Етапи моделювання

Моделювання містить в собі такі етапи:

- а) формування мети моделювання (постановка проблеми);
- б) системне дослідження об'єкта моделювання (збір початкових даних);
- в) побудова моделі об'єкта (тобто проєктованої та досліджуваної системи) на природній мові з розгорнутим формулюванням гіпотези, яку необхідно перевірити;
- г) формалізований системний опис моделі;
- д) експериментування з моделлю на комп'ютері, передбачення поведінки об'єкта моделювання для різних умов (генерація варіантів моделі);
- е) вибір найбільш придатного для даних умов варіанта моделі, його оптимізація та обґрунтування вибору;
- ж) інтерпретація моделі, тобто перенесення отриманих на моделі знань на проєктовану систему, формулювання конкретних рекомендацій на основі результатів експериментування з моделлю (обробка результатів експерименту).

Постановка проблеми полягає насамперед в зрозумілому викладенні мети експерименту, тобто усвідомленні і зрозумілому поданні тих результатів, які бажано отримати в процесі експериментування з моделлю. Це формулюється або у вигляді питань, на які треба відповісти, або у вигляді гіпотез, які потрібно перевірити.

Характер системного обстеження об'єкта моделювання безпосередньо залежить від формулювання мети модельного експерименту. В ході обстеження важливо визначити, які початкові дані необхідні і достатні для вирішення постановленої проблеми і в якому вигляді вони повинні бути представлені. Повинні також бути розроблені методики збору даних і перевірки їх адекватності та старанно продумана організація збору даних. На основі зібраної початкової інформації і будується потім модель, яка імітує поведінку системи.

Спочатку модель задається не обов'язково в строго формалізованому вигляді. Навпаки, мета попереднього опису моделі – сформулювати його на мові, найбільш наближеній до природної, тобто в термінах, зрозумілих неспеціалісту з моделювання, на змістовному рівні. Побудована таким чином модель на наступному етапі повинна бути представлена вже у формалізованому вигляді – за допомогою відповідних мов програмування.

Експериментування з моделлю на комп'ютері полягає в зміні вхідних даних, тобто умов функціонування об'єкта моделювання. В даному випадку робиться генерація варіантів моделі, які завбачають поведінку системи в гіпотетично змінних умовах. Вибір найбільш придатного для даних умов варіанта моделі і оптимізації цього варіанта є вже проектними задачами і знаходяться в прямій залежності від цілей проектування. Такий вибір диктується насамперед змістовними критеріями, тобто інтерпретацією моделі. Остання полягає у визначенні області і меж, в яких результати, отримані на моделі, будуть справедливими для проектованої системи.

1.4 Класифікація видів моделювання системи

Класифікація видів моделювання системи подана на рис. 1.1 [2].

Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких передбачається відсутність будь-яких випадкових впливів.

Стохастичне моделювання відображає ймовірні процеси і події. В цьому випадку аналізується ряд реалізації випадкового процесу і оцінюються середні характеристики, тобто набір однорідних реалізацій.

Статичне моделювання служить для опису поведінки об'єкта в який-небудь конкретний момент часу.

Динамічне моделювання відображає поведінку об'єкта в часі.

Дискретне моделювання служить для опису процесів, які передбачаються дискретними.

Неперервне моделювання дозволяє відобразити неперервні процеси з системах.

Дискретно-неперервне моделювання використовується для випадків, коли хочуть виділити наявність як дискретних, так і неперервних процесів.

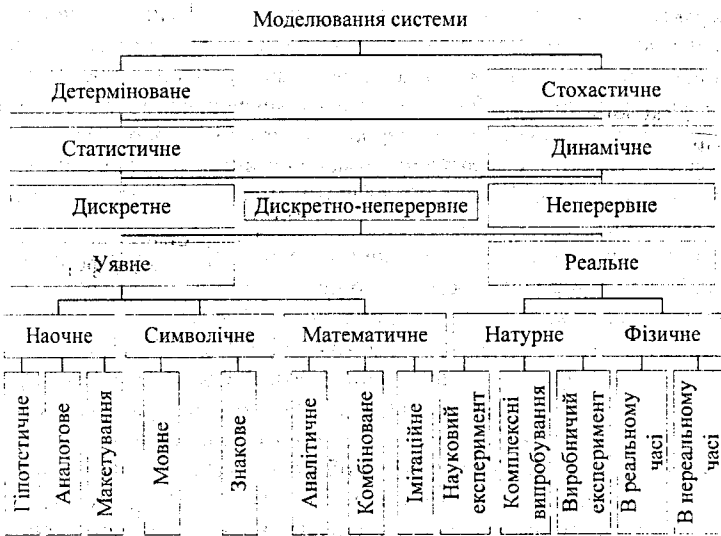


Рисунок 1.1 – Класифікація видів моделювання системи

Уявне моделювання часто є єдиним способом моделювання об'єктів, які практично не реалізуються, або існують поза умов, можливих для їх фізичного створення. Уявне моделювання може бути реалізоване у вигляді наочного, символічного і математичного моделювання.

Наочне моделювання – на базі уяв людини про реальні об'єкти створюються різні наочні моделі, які відображають явища і процеси, які протікають в об'єкті.

Гіпотетичне моделювання - дослідником закладається деяка гіпотеза про закономірність протікання процесу в реальному об'єкті, яка відображає рівень знань дослідника про об'єкт і базується на причинно-наслідкових зв'язках між входом та виходом об'єкта дослідження. Гіпотетичне моделювання використовується коли знань недостатньо для побудови формальних моделей.

Аналогове моделювання базується на використуванні аналогій різних рівнів. Найвищим рівнем є повна аналогія, яка має місце тільки для достатньо простих об'єктів. З ускладненням об'єкта використовують аналогії наступних рівнів, коли аналогова модель відображає декілька, або тільки одну сторону функціонування об'єкта.

Макетування базується на побудові уявних макетів, в основі яких також лежать аналогії, що, як правило, базуються на причинно-наслідкових зв'язках між явищами та процесами в об'єкті. Уявний макет може використовуватись у випадках, коли процеси, які протікають в реальному об'єкті не піддаються фізичному моделюванню.

Символьне моделювання – це штучний процес створення логічного об'єкта, який заміщує реальний і виражає основні властивості його відношень за допомогою певної системи знаків і символів.

Знакове моделювання можна реалізувати, якщо ввести умовне позначення окремих понять, тобто знаки, а також окремі операції між цими знаками і за допомогою знаків відображати набір понять - скласти окремі ланцюги зі слів та речень.

В основі *мовного моделювання* - лежить тезаурус. Тезаурус - словник, який утворюється з фіксованого набору вхідних понять, в якому кожному слову відповідає тільки одне поняття.

Для побудови характеристик процесу функціонування будь-якої системи S математичними методами, включаючи комп'ютерні, повинна бути проведена формалізація цього процесу, тобто побудована математична модель.

Математичне моделювання – це процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, який називається математичною моделлю, та дослідження цієї моделі, що дозволяє отримувати характеристики реального об'єкта, який ми вивчаємо. Вид математичної моделі залежить як від природи реального об'єкта, так і від задач дослідження об'єкта та необхідної достовірності і точності вирішення цієї задачі.

Для *аналітичного моделювання* характерно те, що процеси функціонування системи записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень (алгебраїчних, інтегро-диференційних, кінцево-різницевих і т.д.) або логічних умов. Аналітична модель може бути досліджена такими методами:

- а) аналітичними, коли прагнуть отримати в загальному вигляді явні залежності для шуканих характеристик;
- б) чисельними, коли, не маючи розв'язку в загальному вигляді, прагнуть отримати чисельні результати при конкретних початкових даних;
- в) якісними, коли, не маючи рішення в явному вигляді, можна знайти властивості розв'язку (наприклад, оцінити стійкість розв'язку).

Імітаційне моделювання базується на алгоритмі, який реалізує модель та відтворює процес функціонування системи S в часі, причому імітуються елементарні явища, які складають процес; зі зберіганням їх логічної структури та послідовності протікання в часі, що дозволяє за початковими даними отримати відомості про стан процесу у визначені моменти часу, які дають можливість оцінити характеристики системи S .

Комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання при аналізі та синтезі систем дозволяє об'єднувати переваги аналітичного та імітаційного методу. При побудові комбінованих моделей проводиться попередня декомпозиція процесу функціонування об'єкта на складові підпроцеси, і для тих з них, де це можливо, використовуються аналітичні моделі, а для решти процесів будуються імітаційні моделі.

Реальне моделювання - використання можливості дослідження різних характеристик або на реальному об'єкті, або на його частині.

Натурним моделюванням називають проведення дослідження на реальному об'єкті з наступною обробкою результатів експерименту на основі теорії подібності. При функціонуванні об'єкта у відповідності з поставленою метою вдається виявити закономірність протікання реального процесу. Треба відмітити, що такі різновиди натурального експерименту, як *виробничий експеримент та комплексні випробовування*, наділені рівнем достовірності.

Науковий експеримент характеризується широким застосуванням засобів автоматизації, використанням різноманітних засобів обробки інформації, можливостями втручання людини в процес проведення експерименту. У відповідності з цим з'явилася нова наукова течія - автоматизація наукових експериментів.

Фізичне моделювання відрізняється від натурального тим, що дослідження проводяться на установках, які зберігають природу явищ і наділені фізичною схожістю. В процесі фізичного моделювання задаються деякі характеристики зовнішнього середовища і досліджується поведінка чи реального об'єкта, чи його моделі при заданих або створених штучних впливах зовнішнього середовища. Фізичне моделювання може протікати в реальному і нереальному часі, а також може розглядатися без урахування часу.

З точки зору математичного опису об'єкта і в залежності від його характеру моделі можна розділити на такі типи:

- *аналогові* - моделі, які описуються рівняннями, що зв'язують неперервні величини;
- *цифрові* - моделі, які описуються рівняннями, що зв'язують дискретні величини, подані в цифровій формі;
- *аналогове - цифрові* - моделі, які описуються рівняннями, що зв'язують неперервні і дискретні величини.

1.5 Аналітичні моделі

1.5.1 Моделі фізичних явищ

При вивченні фізичного явища за допомогою методу математичного моделювання, необхідно в першу чергу створити його математичний опис - математичну модель. Математична модель дозволяє підібрати для даного явища на основі відомих аналогій співвідношення в явному вигляді (найчастіше диференціальні рівняння) між характеристиками явища. Прикладом такої аналогії можуть служити гармонічні коливання [6]. Дійсно, нехай $\xi(t)$ - відхилення центра мас пружинного маятника від положення рівноваги в момент часу t ; m - його маса; $\Psi\xi(t)$ - сила, діюча на маятник зі сторони пружини (Ψ - жорсткість пружини). Тоді рівняння коливання маятника має вигляд $m d^2\xi(t)/dt^2 = \Psi\xi(t)$;

Позначивши $\Psi/m = w_0^2$ і $\xi(t) = z$, можемо записати його у такій загальній формі рівняння вільних коливань: $d^2z/dt^2 - w_0^2z = 0$;

Розглянемо тепер вільні коливання в електричному контурі. Якщо позначити ємність конденсатора через C , його заряд в момент часу t через $q(t)$, а індуктивність котушки через L , то рівняння коливань буде мати вигляд $Ld^2q(t)/dt^2 + q(t)/C = 0$. Ввівши позначення $1/LC = w_0^2$, $q(t) = z$, ми прийдемо до рівняння вільних коливань.

Таким чином, закономірності, властиві коливальному контуру (наприклад, залежність амплітуди і частоти коливань від його параметрів L і C), можливо вивчати на моделі, що представляє пружинний маятник. В моделях даного класу процес, як правило, описується системою диференціальних рівнянь. В залежності від складності процесу, що моделюється, для різних варіантів моделювання отримують рішення або аналітичне, або числове. В основному ці моделі застосовуються при виконанні технічних розрахунків.

1.5.2. Моделі математичного програмування

В самому загальному випадку моделі задач математичного програмування мають такий вигляд [6,7]: знайти $\max E = f(x,y)$, при обмеженнях: $q_i(x,y) \leq b_i, i = \overline{1,m}$, де $E = f(x,y)$ - цільова функція (показник ефективності) системи; x, y - вектори відповідно змінних керованих чи не керованих; q_i - функція споживання i -го ресурсу; b_i - величина i -го ресурсу.

Для знаходження оптимального рішення даної задачі в залежності від виду структури цільової функції і обмежень використовуються такі види математичного програмування:

- лінійне програмування, якщо функції $f(x,y)$, $q_i(x,y)$, $i = \overline{1,m}$, лінійні відносно змінних x ;
- нелінійне програмування, якщо функції $f(x,y)$ чи $q_i(x,y)$ нелінійні відносно змінних x ;
- динамічне програмування, якщо цільова функція $f(x,y)$ має спеціальну структуру і є адитивною чи мультиплікативною функцією від змінних x (функція адитивна, якщо $f(x_1, \dots, x_n) = \sum f_i(x_i)$); функція мультиплікативна, якщо $f(x_1, \dots, x_n) = \prod f_i(x_i)$);
- геометричне програмування, якщо цільова функція $f(x)$ і обмеження $q_k(x)$ представляють функції - поліноми $q_k(x) = \sum c_i x_1^{a_{i1}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{in}}$.

Математична модель задачі в цьому випадку записується у вигляді

$$\min \sum_{i \in I[0]} c_i \cdot x_1^{a_{i1}} \cdot x_2^{a_{i2}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{in}}$$

при умовах:

$$q_k(x) = \min \sum_{i \in I[k]} c_i \cdot x_1^{a_{i1}} \cdot x_2^{a_{i2}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{in}} \leq 1; k = \overline{1, p},$$

де

$$I[0] = (m_0, m_0 + 1, \dots, n_0); I[k] = (m_k, m_{k+1}, \dots, n_k); m_{k+1} = n_k + 1; m_0 = 1; n_p = n.$$

д) стохастичне програмування, коли вектор змінних y , є випадковим:

$$\max M_Y E = M_Y \{f(x, y)\}$$

при обмеженнях : $M_Y \{q_i(x, y)\} \leq b_i, i = \overline{1, m}$, чи імовірнісних обмеженнях: $p\{q_i(x, y) \leq b_i\} \geq 1 - \epsilon_i, i = \overline{1, m}$, де M_Y – математичне сподівання по y
 $p\{q_i(x) \leq b_i\}$ - імовірність того, що виконується умова $q_i(x) \leq b_i$;

е) дискретне програмування, якщо на змінні x_j накладено умову дискретності (наприклад, цілочисельності): x_j - ціле число $j = \overline{1, n_1} \leq n$;

ж) евристичне програмування, застосовується для рішення задач, в яких знайти точний оптимум алгоритмічним шляхом неможливо внаслідок великої кількості варіантів. В такому разі відмовляються від пошуку оптимального рішення і шукають задовільне. При цьому користуються спеціальними прийомами – евристиками, що дозволяють істотно скоротити кількість варіантів, що розглядаються.

1.5.3 Мережеві моделі

Мережеві моделі дозволяють відобразити об'єм взаємопов'язаних робіт, послідовність їх виконання, а також логічний взаємозв'язок між ними [6]. Мережева модель відображається у вигляді єдиного мережевого графіка, який складається зі стрілок, що позначають ті чи інші роботи, і кружків, які характеризують виконання окремих конкретних подій, що відображають результат виконання робіт.

Процес розробки мережевого графіка можна поділити на два етапи: підготовку вихідних даних і побудову мережевого графіка. Побудова мережевого графіка зводиться до нанесення на папір позначень робіт і наступному розрахунку і аналізу параметрів мережевого графіка для виявлення критичного шляху і резервів часу для робіт, розміщених на інших шляхах мережевого графіка, і включає: розрахунок найбільш ранніх і найбільш пізніх строків завершення подій, а також резервів часу виконання подій R_j . Визначення критичного шляху в мережевому графіку (всі $R_j = 0$) необхідно для того, щоб виявити роботи, послідовність виконання яких визначає загальний строк закінчення виробничого процесу, і зосередити увагу на їх своєчасному виконанні, оскільки збільшення часу виконання будь-якої з робіт приводить до збільшення строків завершення всього комплексу.

1.5.4 Моделі масового обслуговування

За допомогою моделей масового обслуговування вивчається і аналізується достатньо широкий клас систем, в основу яких покладено однотипні дії для масового споживача, і поява черг вимог на це обслуговування. Черги з'являються в зв'язку з тим, що потік вимог на обслуговування є випадковим та не керується. Якщо кількість приладів обслуговування достатньо велика, то черги з'являються рідко, однак неможливо уникнути значних простоїв обладнання. При малій кількості обладнання виникають значні черги та можливі великі втрати в зв'язку з очікуванням в чергах. Тому часто ставиться задача масового обслуговування: визначити, яка кількість приладів обслуговування необхідна, щоб мінімізувати сумарні очікувані втрати від несвоечасного обслуговування і простоїв обладнання.

Основні типи систем масового обслуговування (СМО) визначаються поведінкою споживача [8,9]: якщо всі прилади зайняті, воно або чекає в черзі, або покидає її не обслугованим: (СМО з відмовами). Інколи накладаються обмеження: на час очікування споживача в черзі, після чого він покидає її не обслугованим, на загальний час перебування споживача в системі, на довжину черги на обслуговування.

Основним елементом кожної моделі СМО є обслуговуючий прилад, який виконує затримки у часі. Модель СМО може включати один чи багато обслуговуючих приладів (одноканальна та багатоканальна СМО). Тривалість обслуговування різних вимог може бути постійною, випадковою, та керованою. Переміщення вимог усередині моделі від одних обслуговуючих приладів до інших відбувається на основі спеціальних правил функціонування системи, що входять в її опис.

Прикладом СМО може бути лінія станків [6]. Кожен станок такої лінії можна розглядати як обслуговуючий прилад, що виконує власну операцію обслуговування. Матеріали, заготовки, напівфабрикати, які поступають на лінію зовні, складають сукупність вхідних потоків системи. Час обробки деталей на станку інтерпретується як час обслуговування. Запас заготовок, які мають підлягати обробці складає чергу. Вихідними потоками СМО є потоки готових деталей, які пройшли обробку. Група станків, що здійснюють виконання однієї і тієї ж виробничої операції, для різних деталей, складає багатоканальну СМО. Багатофазна СМО – це група станків, послідовно виконуючих різні операції обробки одних і тих же деталей. Досліджувати цю СМО можна, наприклад, з метою визначення таких параметрів системи, при яких максимум продукції випускається за фіксований час чи затрати на її випуск мінімальні. Визначаються показники ефективності СМО, які використовуються в ході аналізу великої системи. Інтерес в основному представляє час очікування з вимогою обслуговування, число вимог в системі, довжина періоду зайнятості обслуговуючих приладів, довжина вільного періоду, час життя вимог, характеристики обслуговування черг.

Як правило, моделі масового обслуговування сильно спрощують реальну ситуацію, оскільки вводиться обмеження на характер прибування і обслуговування вимог в системі (наприклад, появу подій вважають стаціонарною пуассонівською, експоненційним вважають характер часу обслуговування вимог). Результатом рішення поставленої задачі за допомогою моделі СМО звичайно є аналітичні залежності характеристик системи від її вхідних параметрів.

1.5.5 Моделі теорії ігор

При вирішенні ряду практичних задач (в економіці, військовій справі) приходиться аналізувати ситуації, де дві (чи більше) сторони, переслідують протилежні цілі. Результат дії кожної зі сторін залежить від того, який тип дій обере противник. Такі ситуації називають конфліктними.

Необхідність аналізувати подібні ситуації призвала до життя спеціальний клас ігрових моделей, за допомогою яких виробляються рекомендації для дій кожного з супротивників у ході конфліктної ситуації. Будеться спрощена модель ситуацій – гра, яка від реальної ситуації відрізняється тим, що ведеться за цілком визначеними правилами. Сторони, що приймають участь в грі, іменуються *гравцями*, а результат сутички – *виграшем* однієї з сторін. Кожен гравець притримується однієї чи декількох стратегій. *Стратегією* гравця називається сукупність правил, які визначають вибір при кожному ході даного гравця в залежності від ситуації, що склалася під час гри. Вибір стратегій супротивниками визначає *виграш* a_{ij} . Значення a_{ij} задаються завчасно у вигляді матриці $\|a_{ij}\|$ (*платіжна матриця* чи *матриця гри*). *Оптимальною стратегією гравця* називається така послідовність ходів, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує гравцю максимально можливий середній виграш.

В якості прикладу ігрової моделі розглянемо задачу, яка називається „поліцейські і крадії” [6]. В універсальному магазині існують дві зони A і B . В першій зоні, завдяки широкому асортименту товарів, завжди велика юрба покупців, тоді як в другій зоні їх значно менше. В розпорядженні адміністрації двоє поліцейських в цивільному, які можуть знаходитися в зоні A чи в зоні B . Крім того, в магазині встановлено телевізійні камери, які дозволяють спостерігати за зонами A і B з місця T , де знаходяться телевізори. Таким чином, поліцейські можуть знаходитися в зонах A , B чи T , тоді як крадії можуть бути чи в зоні A , чи в зоні B . Поліцейські змогли встановити деякі значення вірогідностей p_{ij} знаходження і затримання крадія у випадку застосування ними стратегії i , а крадіями — стратегії j . Двоє поліцейських мають шість стратегій поведінки ($i \leq 6$): обидва знаходяться в телевізійній будці (ТТ); обидва знаходяться в різних зонах магазину (АВ); обидва знаходяться в одній зоні (АА, ВВ); знаходяться в одній із зон і за телевізором (ТА, ТВ). Позначимо їх стратегії відповідно через $X_1 \dots X_6$.

Один крадій може мати дві стратегії: красти в зоні A (y_1) чи красти в зоні B (y_2). Поліцейські і крадії в рівній мірі розумні і обережні. Поліцейські шукають таку стратегію (x_1, \dots, x_6), щоб забезпечити затримання крадія з вірогідністю v , незалежно від поведінки крадіїв. Аналогічно крадій шукає таку змішану стратегію (y_1, y_2), щоб вірогідність його затримання не перевищувала v , як би не поступали поліцейські.

Моделювання зводиться до отримання частот x_1, \dots, x_6 та y_1, y_2 , що дають оптимальні стратегії. Нехай задана така матриця гри $\|a_{ij}\|$

	A	B	
ТТ	0,51	0,75	x_1
АА	0,64	0,36	x_2
ВВ	0,19	0,91	x_3
ТА	0,58	0,60	x_4
ТВ	0,37	0,85	x_5
АВ	0,46	0,76	x_6
	Y_1	Y_2	

Тоді для поліцейських співвідношення мають вигляд:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1;$$

$$0.51x_1 + 0.64x_2 + 0.19x_3 + 0.58x_4 + 0.37x_5 + 0.46x_6 \geq v;$$

$$0.75x_1 + 0.36x_2 + 0.91x_3 + 0.60x_4 + 0.85x_5 + 0.76x_6 \geq v.$$

Для крадіїв:

$$y_1 + y_2 = 1;$$

$$0.51y_1 + 0.75y_2 \leq v;$$

$$0.64y_1 + 0.36y_2 \leq v;$$

$$0.19y_1 + 0.91y_2 \leq v;$$

$$0.58y_1 + 0.60y_2 \leq v;$$

$$0.37y_1 + 0.85y_2 \leq v;$$

$$0.46y_1 + 0.76y_2 \leq v.$$

В зв'язку з великою кількістю змінних рівняння і нерівності для стратегії поліцейських важко розв'язати, проте нерівності для стратегії крадіїв, які мають тільки дві змінних, легко вирішити графічним методом. Підставимо $y_2 = 1 - y_1$ у всі нерівності стратегії крадіїв і будемо розглядати їх як рівняння. Тоді отримаємо шість прямих в області $0 \leq y_1 \leq 1$:

$$v = 0.75 - 0.24y_1 \quad \text{— пряма 1;}$$

$$v = 0.36 - 0.28y_1 \quad \text{— пряма 2;}$$

$$v = 0.91 - 0.72y_1 \quad \text{— пряма 3;}$$

$$v = 0.60 - 0.02y_1 \quad \text{— пряма 4;}$$

$$v = 0.85 - 0.48y_1 \quad \text{— пряма 5;}$$

$$v = 0.70 - 0.30u_1 - \text{пряма 6.}$$

Накреслимо ці шість прямих в системі координат vO_1 (рис. 1.2). Кожна точка заштрихованої області визначає можливе рішення, бо вона задовольняє тепер всім розглянутим нерівностям для стратегії крадіїв. З рис. 1.1 видно, що найменша величина знаходиться на перетині прямих 2 і 4, бо пряма 4 має від'ємний нахил. Таким чином, маємо $0,36 + 0,28u_1 = 0,60 - 0,02u_1$ звідки $u_1 = 0,8$ і $u_2 = 0,2$.

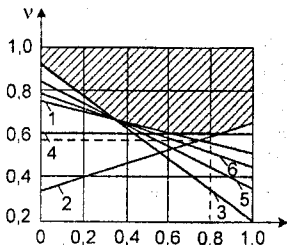


Рисунок.1.2 – Геометрична інтерпретація задачі „поліцейські і крадії”

Таким чином, вибираючи стратегію u_1 з вірогідністю 0,8, а стратегію u_2 з вірогідністю 0,2, крадії має мінімальну вірогідність затримання рівну $v = 0,584$. Нехай $x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$ і, підставивши значення $v = 0,584$, зі співвідношень для поліцейських знаходимо: $x_2 = 1/15$ і $x_4 = 14/15$. Виходить, якщо обидва поліцейських проводять $1/15$ свого часу в зоні A , а $14/15$ часу один з них проводить в зоні T , а другий – в зоні A , то вірогідність затримання крадія буде максимальною і рівною $0,584$, яку б стратегію не обрали крадії.

1.5.6 Сутність моделювання на аналітичних моделях

Можливо було б привести ще приклади аналітичних моделей, однак розглянуті достатньо повно характеризують клас цих моделей і визначають специфіку їх використання при математичному моделюванні великих систем. В тих випадках, коли не вдається перетворити математичну модель в підходящу систему рівнянь, а спрощення задачі приводять до недопустимо грубих результатів, від аналітичного дослідження відмовляються і переходять до інших способів застосування математичної моделі.

Більш широку сферу застосування має дослідження процесів на ЕОМ за допомогою чисельних методів. Зміст роботи при чисельному дослідженні процесів зостається в основному таким же, як і при застосуванні аналітичних методів. Різниця полягає в тому, що після перетворення математичної моделі в систему рівнянь, яка допускає ефективне рішення чисельними методами, необхідно провести розрахунки на ЕОМ для реалізації чисельного методу. Часто математичні моделі складних процесів далеко не завжди виходять придатними для застосування чисельних методів, а перетворення математичних моделей зостаються такими ж складними, як і в випадку аналітичного дослідження.

Як видно з наведених прикладів, сутність моделювання на аналітичних моделях така. Як правило, математична модель в своєму первісному

вигляді не може бути використана для аналітичного дослідження великої системи. Наприклад, вона може не мати в явному вигляді шуканих величин. Необхідно перетворити математичну модель в таку систему співвідношень відносно шуканих величин, яка допускає отримання потрібного результату аналітичними методами. Це перетворення є найбільш суттєвим і в той же час часто найбільш трудомістким кроком при аналітичному дослідженні процесів.

Під отриманням результату будемо розуміти або побудову явних формул для шуканих величин, або приведення рівнянь до такого виду, для якого рішення відомі, або дослідження рівнянь якісними методами (наприклад, оцінка асимптотичних значень шуканих величин чи оцінка стійкості рішення). Отримання результатів такого характеру звичайно є настільки повним рішенням задачі, що до аналітичного дослідження великих систем на практиці прагнуть у першу чергу. Однак скористатися аналітичним дослідженням вдається порівняно рідко, оскільки перетворення математичних моделей в систему рівнянь, яка допускає ефективне рішення, є складною задачею, а для великих систем ці складності часто є нездоланими. Не дивлячись на це, використання аналітичних методів настільки принале, що при рішенні багатьох прикладних задач ідуть на умисне відхилення від початкової моделі і огрубіння її заради можливості отримати хоча б наближене рішення.

1.6 Імітаційні моделі

1.6.1 Приклад імітаційної моделі

При моделюванні процесів необов'язково перетворювати математичну модель у спеціальну систему рівнянь відносно шуканих величин. У деяких випадках досить імітувати самі явища, що описуються математичною моделлю, зі збереженням їх логічної структури, послідовності чергування в часі, а іноді і фізичного змісту, за допомогою моделюючих установок або ЕОМ [1,6]. На відміну від аналітичного і чисельного методів зміст операцій, які здійснюються при імітаційному моделюванні, мало залежить від того, які величини обрані в якості шуканих.

Як приклад розглянемо модель стратегії обслуговування автобуса [6]. Нехай E - основний стан автобуса (він справний і здійснює N рейсів за зміну), A — стан, коли автобус має потребу в дрібному профілактичному ремонті тривалістю часу одного рейсу, B — стан, коли автобус має потребу в негайному поточному ремонті тривалістю в одну зміну.

Припустимо, що a - імовірність переходу автобуса зі стану E в стан A , b - імовірність переходу автобуса зі стану A в стан B . Ми бажасмо вибрати одну з двох наступних стратегій обслуговування. Стратегія α : як тільки автобус переходить у стан A , він ремонтується. Стратегія β : автобус працює доти, поки не перейде в стан B . Кращою вважається та стратегія, що дає найбільше середнє число рейсів у день. Нарешті, ми припускаємо,

що щодня автобус виходить на лінію в стані E , тобто при будь-якій стратегії автобус, що закінчує N рейсів у стані A чи B , уночі ремонтується.

При моделюванні формується вибірка випадкового числа ξ і за допомогою відповідної таблиці імітується стан, у якому знаходився автобус наприкінці рейсу. Спочатку імітується один рейс при стратегії α і потім при стратегії β . Після цього імітується наступний рейс: спочатку при стратегії α , а потім при стратегії β і т.д., після чого підраховуються середнє число рейсів у день, фактично виконаних автобусом при стратегіях α і β , і їхня різниця. Метод імітації дозволяє робити зміни в моделі простою зміною схеми алгоритму. Отримані результати обробляються статистичними методами і на основі статистичних даних приймається рішення про перевагу однієї стратегії над іншою.

1.6.2 Сутність моделювання на імітаційних моделях

Оскільки результати, отримані при відтворенні на імітаційній моделі розглянутого процесу, є реалізаціями випадкових об'єктів (величин, функцій), то для знаходження об'єктивних і стійких характеристик процесу потрібно його багаторазове відтворення з наступною статистичною обробкою отриманих даних. Саме тому дослідження великих систем за допомогою імітаційних моделей прийнято називати *статистичним моделюванням* [10], проте, зрозуміло, імітаційні моделі застосовують й у детерміністському випадку, де немає ніяких статистичних задач.

За допомогою статистичного моделювання можна обчислити значення будь-якого функціонала, заданого на множині реалізації процесу функціонування великої системи, що досліджується, якщо тільки відповідні підпрограми передбачені в побудованій імітаційній моделі.

Найбільш важливим функціоналом, що цікавить дослідника в першу чергу, є звичайно показник ефективності системи в широкому розумінні слова. Маючи можливість знаходити значення показника ефективності, ми можемо за допомогою моделі вирішувати цілий ряд задач, у число яких входять: оцінка ефективності різних принципів керування; оцінка варіантів структури великої системи; оцінка впливу змін різних параметрів великої системи або її окремих елементів, а також початкових умов. Це задачі аналізу складних систем [5,10,11]. Не менш важливі, але набагато складніші задачі синтезу складних систем, коли потрібно створити систему з наперед заданими властивостями й у деякому змісті оптимальну. Результати моделювання часто виявляються корисними при синтезі системи для оцінки якості тих чи інших її варіантів.

1.6.3 Умови використання імітаційних моделей

Дослідник може намагатися використовувати імітаційну модель великої системи при вирішенні задач проектування в таких випадках:

- а) не існує закінченої математичної постановки даної задачі або ще не розроблені аналітичні методи рішення сформульованої математичної

моделі;

- б) аналітичні методи існують, але математичні процедури настільки складні і трудомісткі, що імітаційне моделювання дає більш простий спосіб розв'язування задачі;
- в) крім оцінювання вихідних параметрів, бажано здійснити на імітаційній моделі спостереження за ходом процесу протягом визначеного періоду;
- г) імітаційне моделювання може виявитися єдиною можливістю внаслідок постановки експериментів і спостереження явищ у реальних умовах (вивчення поведінки космічних кораблів в умовах міжпланетних польотів);
- д) для довгострокової дії систем чи процесів може знадобитися стиск часової шкали. Імітаційне моделювання дає можливість повністю контролювати час досліджуваного процесу, оскільки явище може бути уповільнено чи прискорено за бажанням;
- е) додатковою перевагою імітаційного моделювання можна вважати більш широкі можливості його застосування в сфері освіти і професійної підготовки. Розробка і використання імітаційної моделі дозволяють експериментатору бачити і "розігрувати" на моделі реальні процеси і ситуації. Це має допомогти йому зрозуміти і відчувати проблему, що стимулює процес пошуку нововведень у великій системі;
- ж) імітацію можна використовувати для вивчення нових ситуацій, про які мало що відомо чи не відомо нічого. Це дає можливість підготуватися до майбутнього. Імітація може служити для попередньої перевірки нових стратегій і правил прийняття рішень перед проведенням експериментів на реальній системі;
- и) для деяких типів стохастичних моделей особливе значення має послідовність подій. Дані тільки про очікувані значення і моменти можуть виявитися недостатніми для опису процесу. У цих умовах єдиним задовільним способом одержання потрібної інформації може служити імітаційна модель. Імітацію можна використовувати для пророкування вузьких місць і інших труднощів, що виявляються в поведінці великої системи при введенні в неї нових елементів.

Однак імітаційні моделі володіють рядом істотних недоліків. Розробка гарної імітаційної моделі часто обходиться дорого і вимагає багато часу. Іноді може здатись, що імітаційна модель відбиває реальне положення речей, хоча в дійсності це не так. Якщо не враховувати цього, то деякі властиві імітації особливості можуть привести до невірної відповіді. Імітаційна модель у принципі неточна, і ми не в змозі виміряти ступінь цієї неточності. Ці труднощі можна подолати лише частково шляхом аналізу чутливості моделі до зміни визначених параметрів. Дуже істотно те, що на імітаційній моделі дослідник може одержати відповідь тільки після чергового імітаційного експерименту і можливості прогнозування імітаційного моделювання значно менші, ніж аналітичного моделювання.

Проте імітаційне моделювання є одним з найбільше широко використовуваних методів, які застосовуються при вирішенні задач синтезу великих систем. Високий рівень деталізації систем будь-якого рівня складності, можливість дослідження динаміки розвитку процесу забезпечують імітаційному методу велику перспективу поширення.

Контрольні питання

1. Поясніть взаємозв'язок між об'єктом-оригіналом і моделлю при здійсненні процесу моделювання.
2. Що є метою моделювання?
3. Розкрийте зв'язок між множиною параметрів S , множиною характеристик Y , множиною зовнішніх впливів X відповідно для об'єкта-оригіналу та для моделі складної системи.
4. В яких випадках є доцільним здійснення процесу моделювання?
5. Визначте загальні вимоги до моделей складних систем в процесі моделювання.
6. Дайте загальну характеристику класичного (індуктивного) та системного підходів в моделюванні.
7. Які особливості системного підходу щодо визначення структури досліджуваної системи?
8. Розкрийте сутність п'яти основних форм подання системи: мікроскопічної, функціональної, макроскопічної, ієрархічної і процесуальної.
9. Назвіть спільні риси та особливості макропроекування і мікропроекування як основних стадій розробки моделей систем.
10. Визначте основні принципи системного підходу.
11. Назвіть основні етапи моделювання та коротко охарактеризуйте кожний з них.
12. Як класифікують види моделювання складних систем в залежності від наявності в них випадкових процесів?
13. Яка ознака лежить в основі поділу видів моделювання складних систем на статичне та динамічне?
14. Поясніть різницю між дискретним, неперервним та дискретно-неперервним моделюванням.
15. Охарактеризуйте наочне, символічне та математичне види моделювання, як представники уявного способу моделювання.
16. Які методи існують для дослідження аналітичних моделей?
17. Чи правомірно імітаційне моделювання назвати алгоритмічним?
18. Що спільного та яка різниця між фізичним моделюванням та науковим експериментом?
19. Наведіть приклади моделей фізичних явищ?
20. Сформулюйте суть задачі математичного програмування в загальному випадку.
21. Яка різниця між лінійним і нелінійним програмуванням?

22. Які вимоги висуваються до цільової функції в динамічному програмуванні?
23. Дайте означення статистичному програмуванню.
24. Охарактеризуйте складові мережевого графіка, як мережевої моделі системи та етапи його побудови.
25. Які моделі застосовують для систем, в основу яких покладено однотипні дії з обслуговування при виникненні черг?
26. Наведіть приклад систем масового обслуговування, в якій визначаються час очікування за вимогою обслуговування, число вимог в системі, довжина періоду зайнятості та вільного періоду обслуговуючих приладів.
27. В яких випадках застосовуються моделі теорії ігор?
28. Дайте означення понять „гравці”, „виграш”, „стратегія гравця” в теорії ігор.
29. Охарактеризуйте модель теорії ігор на прикладі задачі „поліцейські і крадії”.
30. Поясніть в чому полягають труднощі застосування для складних систем?
31. Які задачі можна вирішувати за допомогою імітаційного моделювання складних систем?
32. Охарактеризуйте сутність моделювання на імітаційних моделях.
33. Назвіть недоліки імітаційного моделювання.

2.1 Створення концептуальної моделі

Визначення та орієнтація. В процесі розробки моделі можна умовно виділити такі етапи опису, як концептуальний, математичний і програмний. На цих етапах створюється відповідна модель.

Концептуальна (змістовна) модель – це абстрактна модель, яка визначає склад і структуру системи S_0 , властивості елементів та причинно-наслідкові зв'язки, характерні досліджуваній системі і суттєві для досягнення мети моделювання [12,13]. В концептуальній моделі зазвичай у словесній формі приводяться відомості про природу і параметри елементарних явищ досліджуваної системи, про вид і ступінь взаємозв'язку між ними, про місце і значення кожного елементарного явища в загальному процесі функціонування системи.

Спочатку концептуальна модель системи S_0 виникає в свідомості дослідника J (рис.2.1). Модель орієнтується на виявлення певних властивостей системи у відповідності з цілями моделювання. Для цього дослідник робить уявний зріз системи в площині тієї метасистеми M , в якості

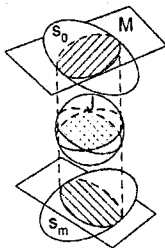


Рисунок 2.1 – Відображення оригіналу S_0 і моделі S_m в свідомості дослідника

елементу якої представляє інтерес система S_0 , тобто виконує M -орієнтацію. Потім дослідник виявляє основні ознаки орієнтованої моделі і може додати деякі ознаки та умови, які полегшать дослідження моделі або дозволять представити її у вигляді деякого зрізу моделюючої системи S_m . Концептуальна модель - це субстрат системи з позицій досягнення цілей моделювання.

Розробка концептуальної моделі потребує достатньо глибоких знань системи S_0 , оскільки потрібно обґрунтувати не лише те, що повинно увійти в модель, але і те, що може бути відкинуто без суттєвих перекручень результатів моделювання. Останнє являється найбільш проблематичним, оскільки виникає замкнуте коло: для точного визначення впливу виключення якого-небудь елемента або явища з моделі на ступінь перекручення результатів необхідно створити і дослідити дві моделі – із врахуванням і без врахування цього елемента або явища. Виконати це з кожним сумнівним елементом і явищем не являється можливим у зв'язку зі значним збільшенням об'єму робіт.

Основна проблема при створенні моделі полягає в знаходженні компромісу між простотою моделі та її адекватністю з досліджуваною системою. Існують теоретичні проробки розв'язку даної проблеми [14], але практично їх важко реалізувати. Тому розробник моделі, керуючись своїми знаннями системи, оціночними розрахунками, досвідом, повинен прийняти рішення про виключення якогось елементу або явища з моделі без достатньої повної впевненості в тому, що це не внесе суттєвих похибок в результаті моделювання. Процес створення концептуальної моделі, очевидно, ніколи не може бути повністю формалізований. Саме в зв'язку з цим іноді говорять, що моделювання являється не лише наукою, але й мистецтвом [11]. При створенні орієнтованої моделі уточнюються безліч корисних і зовнішніх збурювальних впливів.

Стратифікація. Наступним кроком на шляху створення концептуальної моделі служить вибір рівня деталізації моделі. Відомо, що будь-яка система, в тому числі і обчислювальна, - це перш за все цілісна сукупність елементів. Обов'язковою властивістю кожної системи являється її членування. Модель системи представляється у вигляді сукупності частин (підсистем, елементів). В цю сукупність включаються усі частини, які забезпечують збереження цілісності системи. Виключення яких-небудь елементів із моделі не повинно призводити до втрати основних властивостей системи при виконанні функцій по відношенню до метасистеми.

З другого боку, кожна частина системи теж складається із сукупності елементів, які, в свою чергу, можуть бути розчленовані на елементи. З врахуванням цього проблема вибору рівня деталізації може бути вирішена шляхом побудови ієрархічної послідовності моделей [15,16]. Система представляється сімейством моделей, кожна з яких відображає її поведінку на різних рівнях деталізації (рис.2.2). На кожному рівні існують характерні особливості системи, зміни, принципи та залежності, за допомогою яких записується поведінка системи.

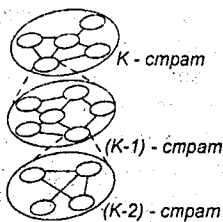


Рисунок 2.2 – Рівні моделі

Рівні деталізації іноді називають стратами, а процес виділення рівнів – стратифікацією [13]. Вибір страт залежить від цілей моделювання і ступеня попереднього знання властивостей елементів. Для однієї і тієї ж системи можуть бути використані різні страти. Зазвичай в модель включаються елементи одного рівня деталізації – K -страта. Однак може представляти інтерес побудова моделі із елементів різних страт. В тому випадку, коли загальносистемні (функціональні) властивості окремих елементів маловідомі або викликає труднощі їх опис, можна для кожного такого елементу включити в модель його деталізований опис із нижчого ($K-1$)-страта.

деякі елементи і цього рівня можна розчленити, тобто використати їх опис із наступного рівня – (К-2)-страта.

При побудові орієнтованої та стратифікованої концептуальної моделі необхідно керуватись такими міркуваннями. В модель повинні ввійти усі параметри системи S_{ok} і, в першу чергу, параметри $\{s_{oj}\}$, які допускають варіювання в процесі моделювання, забезпечують визначення цікавлячих дослідника характеристик $\{x_{on}\}$, що цікавлять дослідника, на заданому часовому інтервалі T функціонування системи. Інші параметри повинні бути, по можливості, виключені із моделі.

Деталізація. При розчленуванні системи на елементи можна вчинити таким чином. Функціонування будь-якої системи являє собою виконання одного або декількох технологічних процесів перетворення речовини, енергії або інформації. Кожний процес складається з послідовності елементарних операцій. Виконання кожної елементарної операції забезпечується певним ресурсом – елементом. Тому в моделі повинні бути присутні усі елементи, які реалізують виконання усіх технологічних процесів. Крім них в модель можуть бути включені елементи, які служать для керування ресурсами і процесами і для збереження інформації, необхідної для керування. Застосування цього правила потребує попереднього визначення поняття елементарної операції.

Деталізація системи повинна проводитись до такого рівня, щоб для кожного елемента були відомі або могли б бути отримані залежності параметрів вихідних впливів елемента, суттєвих для функціонування системи і визначення її вихідних характеристик, від параметрів впливів, які є вхідними для цього елемента.

Якщо за результатами орієнтації, стратифікації та розчленування отримується модель великої розмірності, тобто, з великим числом параметрів, зокрема, з великим числом елементів (декілька сотень або навіть тисяч), то її слід спростити, оскільки з громіздкою моделлю працювати незручно. Це можна зробити різними способами ізоморфних перетворень моделі без зниження ступені адекватності, в тому числі шляхом декомпозиції системи на підсистеми, інтеграції елементарних операцій і відповідної інтеграції елементів, виключення та усікання другорядних технологічних процесів з виключенням елементів, що забезпечують ці процеси. Більш докладно ці способи і прийоми розглядаються у розділі 4.

Локалізація. Наступний крок створення концептуальної моделі – її локалізація, яка здійснюється шляхом представлення зовнішнього середовища у вигляді генераторів зовнішніх впливів, які включаються в склад моделі в якості елементів.

При необхідності вони диференціюються на генератори робочого навантаження, що поставляють на вхід системи основні вихідні об'єкти – речовину (сировину, напівфабрикати, комплектуючі), енергію для енергетичних систем або дані для інформаційних систем; генератори для додат-

кового забезпечення об'єктів і енергії; генератори керуючих впливів. Генератори впливів порушують процес функціонування системи (рис. 2.3).

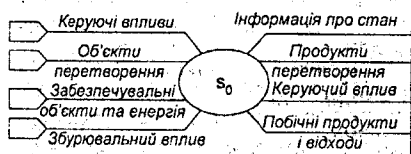


Рисунок 2.3 – Локалізована модель

не середовище споживає (приймає) повністю та без затримки.

Структуризація. Керування. Завершується побудова структури моделі зазначенням зв'язку між елементами. Зв'язки можуть бути розділені на речові та інформаційні. Речові зв'язки відображають можливі шляхи переміщення продукту перетворення від одного елемента до іншого. Інформаційні зв'язки забезпечують передачу між елементами керуючих впливів та передачу інформації про стан. Відмітимо, що як інформаційні, так і речові зв'язки не обов'язково повинні бути представлені в системі деяким матеріальним каналом зв'язку. В простих системах, складених із однофункціональних елементів, які мають не більше ніж по одному вихідному речовому зв'язку, інформаційні зв'язки можуть взагалі бути відсутні. Керування процесом функціонування в таких системах визначається самою структурою, тобто в них реалізований принцип структурного керування. Прикладами таких систем можуть бути логічні елементи і аналогові обчислювальні машини.

В більш складних системах, які включають багатфункціональні елементи або елементи, які мають більше ніж по одному вихідному зв'язку, існують керуючі засоби (вирішуючі елементи) і відповідні інформаційні зв'язки. Керування необхідне для вказівки, якому елементу, який вихідний об'єкт, коли і звідки взяти, яку операцію перетворення виконати і куди передати. Про такі системи можна говорити, що вони функціонують у відповідності з програмним або алгоритмічним принципом керування. В концептуальній моделі повинні бути конкретизовані правила розв'язання або алгоритми керування робочим навантаженням, елементами і процесами.

Виділення процесів. Розглянуті вище дії направлені на створення моделі, яка відображає статистику системи – склад і структуру. Оскільки основний інтерес представляють динамічні системи, то слід доповнити цю модель описом роботи системи.

Функціонування системи полягає у виконанні технологічного процесу перетворення речовини, енергії або інформації. В складних системах найчастіше одночасно протікає декілька технологічних процесів. Зокрема, усі сучасні універсальні обчислювальні системи розраховані на мульти-

програмний режим роботи. Технологічний процес являє собою певну послідовність окремих елементарних операцій. Частина операцій може виконуватися паралельно різними елементами (ресурсами) системи. Задається технологічний процес маршрутною картою, програмою і т.п., іншими словами – одним із видів зображення алгоритму.

Алгоритм однозначно визначає, які ресурси системи, в якій послідовності і які операції повинні бути виконані для досягнення деякого цільового призначення системи. В системах з програмним принципом керування, які забезпечують паралельне виконання декількох технологічних процесів, існують алгоритми керування сукупністю процесів. Їх основне призначення полягає у вирішенні конфліктних ситуацій, які виникають, коли два чи більше процесів претендують на один і той самий ресурс. Сукупність алгоритмів керування A_0 разом із параметрами вхідних впливів X_0 і елементів S_0 відображають динаміку функціонування системи.

Зазвичай алгоритми перетворюються до вигляду A_m , який зручний для моделювання.

Відображення станів. В ряді випадків, зокрема, для систем зі структурним принципом керування, набув поширення інший підхід. Для кожного елемента обирається певний параметр s (іноді декілька параметрів), значення якого змінюється в ході функціонування елемента і відображає його стан в даний момент часу $z(t)$. Множина таких параметрів за всіма $n = \overline{1, N}$ елементами системи $\{z_n\}$ відображає стан системи $Z(t)$. Функціонування системи представляється у вигляді послідовної зміни станів [2,3]: $Z(t_0), Z(t_1), \dots, Z(T)$. Множину $\{Z\}$ можливих станів системи називають простором станів. Поточний стан системи в момент часу $t (t_0 < t \leq T)$ відображається у вигляді координати точки в n -вимірному просторі станів, а уся реалізація процесу функціонування системи за час T – у вигляді деякої траєкторії.

Якщо відомо початковий стан системи $Z^0 = Z(t_0)$, то можна визначити її стан в будь-який момент t , який належить інтервалу T , коли відома залежність

$$Z(t) \doteq H(X, Z^0, Z, t). \quad (2.1)$$

Тоді вихідні характеристики визначаються за формулою

$$Y = G(Z, T). \quad (2.2)$$

Створена концептуальна модель повинна бути перевірена на адекватність досліджуваного об'єкта. Оскільки на даному етапі можливий лише умоглядний аналіз та експеримент, бажано, щоб таку перевірку виконували експерти, а не розробники моделі.

2.2 Підготовка початкових даних

Збір фактичних даних. При створенні концептуальної моделі виявляються якісні (функціональні) і кількісні параметри системи S_0 і зовнішніх впливів X . Для кількісних параметрів необхідно визначити їх конкретні значення, які будуть використані у вигляді вихідних даних при моделюванні. Це трудомісткий і відповідний етап роботи. Він суттєво впливає на успіх результатів моделювання. Очевидно, що достовірність результатів моделювання однозначно залежить від точності і повноти вихідних даних.

На ранній стадії створення концептуальної моделі найчастіше виявляється частина параметрів, які точно ввійдуть в модель. За цими параметрами збір вихідних даних можна вести паралельно з розробкою концептуальної моделі. В міру уточнення концептуальної моделі визначаються інші параметри. Збирання вихідних даних ускладнюється за таких причин. По-перше, значення параметрів можуть бути не лише детермінованими, але і стохастичними. По-друге, не усі параметри виявляються стаціонарними. По-третє, завжди йде мова про моделювання неіснуючої (проектованої, модернізованої) системи або системи, яка повинна функціонувати в нових умовах.

Більша частина параметрів – це випадкові величини за своєю природою. Однак в цілях спрощення моделі часто більшість з них представляються детермінованими середніми значеннями. Це можна зробити, якщо випадкова величина має найбільший розкид або у випадку, коли для досягнення мети моделювання достатньо вести розрахунок за середніми значеннями. Наприклад, продуктивність процесора може бути задана певною кількістю операцій, які виконуються за одиницю часу. Проте ця кількість детермінована лише для певної суміші операцій, які може виконувати процесор. Підміна в розрахунках випадкових значень параметрів детермінованими величинами повинна проводитися обдумано, оскільки вона може призвести до помилок моделювання. В роботі [17] показано, що під дією випадкових факторів результати функціонування системи не лише підлягають розсіюванню, але й можуть також отримати зміщення своїх середніх значень.

При створенні моделі може мати місце і зворотнє явище – детерміновані параметри представляються випадковою величиною. Робиться це при інтеграції елементів системи або зовнішніх впливів з метою скорочення розмірності моделі. Наприклад, при виконанні програми обчислювальної системи обробляється цілком окрема кількість даних. Для моделювання багаторазового виконання програми можна задати всю сукупність кількостей даних або підмінити цю множину значень випадковою величиною з певним законом розподілу.

Підбір закону розподілу. Для випадкових параметрів організується збір статистики і подальша її обробка. В процесі обробки виявляється можливість представлення параметра деяким теоретичним законом розподі-

ду. Це необхідно, в зв'язку з тим, що при певних законах розподілу основних параметрів системи і навантаження з'являється можливість створення аналітичної моделі, а при імітаційному моделюванні може виявитись простіше задати вид закону розподілу і основні статистичні характеристики, ніж представляти випадкову величину, наприклад, у вигляді таблиці.

Процедура підбору виду закону розподілу така [10,11]. За сукупністю чисельних значень параметра будується гістограма відносних частот – емпірична щільність розподілу. Гістограма апроксимується плавною кривою. Отримана крива послідовно порівнюється з кривими щільності розподілу різних теоретичних законів розподілу [18]. Обирається один із законів за найкращим збігом вигляду кривих, які порівнюються. За емпіричними значеннями обчислюють параметри цього розподілу. Потім оцінюють збіг емпіричного і теоретичного розподілу за тим чи іншим критерієм згоди, наприклад, Пірсона (хі-квадрат), Колмогорова, Смірнова, Фішера або Стюдента. Питання підбору виду закону розподілу детально розроблені в математичній статистиці [19,20].

Особливу складність представляє збір даних за випадковими параметрами, які являються функціями часу. В першу чергу такі параметри характерні для зовнішніх впливів. Нехтування фактами нестаціонарності параметрів, яке найчастіше має місце в практиці моделювання, призводить до суттєвих порушень адекватності моделі.

Апроксимація функцій. Для кожного елемента системи існує функціональний зв'язок між параметрами вхідних впливів на цей елемент і його вихідними характеристиками. Вид функціональної залежності для одних елементів буває очевидний, для інших може бути легко виявлений, виходячи з природи функціонування. Однак для деяких елементів може бути отримана лише сукупність експериментальних даних про кількісні значення вихідних характеристик при різних значеннях параметрів. В цьому випадку виникає необхідність ввести деяку гіпотезу про характер функціональної залежності, тобто апроксимувати її певним математичним рівнянням. Пошук математичних залежностей між двома або більше змінними за зібраними дослідними даними може виконуватися за допомогою методів регресійного, кореляційного або дисперсійного аналізу [21].

Спочатку для опису певного елемента вид рівняння задає дослідник. При двох змінних це робиться достатньо просто за результатами порівняння графіка, на який нанесені експериментальні точки, з графіками найбільш поширених апроксимуючих функцій, таких як пряма, парабола, гіпербола, експонента і т. д. [11]. Потім методами регресійного аналізу [22,23] обчислюються константи обраного рівняння таким чином, щоб забезпечити найкраще наближення кривої до експериментальних даних, незалежно від того, наскільки добре обрано вид кривої. Найчастіше наближення оцінюється за критерієм найменших квадратів [24,25].

Для з'ясування того, наскільки точно обрана залежність узгоджується з дослідними даними, використовується кореляційний аналіз. Коефі-

цієнт кореляції лежить в межах від 0 до ± 1 , що відповідає зміні ступеня узгодження від повної відсутності кореляції до того випадку, коли усі експериментальні точки лежать точно на кривій.

Висування гіпотез. За частиною параметрів, які відображають нові елементи майбутньої системи або нові умови функціонування, відсутня можливість збору фактичних даних. Для таких параметрів висуваються гіпотези про їх можливі значення. Важливо, щоб гіпотези висували експерти-спеціалісти, які достатньо добре представляють створену систему або нові зовнішні впливи на систему. Великий успіх може бути досягнений, якщо представляється можливість отримати відомості від групи спеціалістів. В цьому випадку можна зменшити ступінь суб'єктивності і скористатися добре відпрацьованими методиками експертних оцінок [26,11]. При проведенні даної роботи певні відомості можна отримати в результаті аналізу функціонування аналогічних систем або прототипів майбутньої системи.

Закінчується етап збирання і оброблення вихідних даних класифікацією на зовнішні та внутрішні, постійні та змінні, неперервні та дискретні, лінійні та нелінійні, стаціонарні та нестаціонарні, детерміновані та стохастичні. Для змінних кількісних параметрів, якими може варіювати дослідник в ході моделювання, визначаються межі їх зміни, а для дискретних – можливі значення.

2.3 Розробка математичної моделі

Узагальнені моделі. Концептуальна модель і кількісні вихідні дані служать основою для розробки математичної моделі. Створення математичної моделі переслідує дві цілі:

- а) дати формалізований опис структури і процесу функціонування системи для однозначності їх розуміння;
- б) спробувати представити процес функціонування у вигляді, який допускає аналітичне дослідження системи.

Розробка єдиної методики створення математичних моделей, очевидно, не представляється можливою. Це обумовлено великою кількістю класів систем. Системи можуть бути статичні і динамічні, зі структурним або програмним керуванням, з постійною або змінною структурою, з постійним (жорстким) або змінним (гнучким) програмним керуванням. За характером вхідних впливів та внутрішніх станів системи підрозділяються на неперервні та дискретні, лінійні та нелінійні, стаціонарні та нестаціонарні, детерміновані та стохастичні (див. розділ 1) [27;14]. При дослідженні системи може бути отримана така ж кількість моделей в залежності від орієнтації, а також від ступеня стратифікації і деталізації.

Для динамічних систем без передісторії з програмним принципом керування узагальнена математична модель представляється у вигляді залежності множин вихідних характеристик Y від множин зовнішніх впливів X , параметрів системи S та алгоритмів керування A :

$$Y = \Phi(X, S, A, T) \quad (2.3)$$

Для системи зі структурним або програмним принципом керування, але з простими і сталими програмами керування узагальнена математична модель зазвичай представляється у вигляді залежностей (2.1) і (2.2). В залежностях (2.1) і (2.3) оператори Φ і G називають операторами виходів, а в (2.2) оператор H – оператором переходів [27,14]. З метою переведення узагальненої моделі в конструктивну необхідно конкретизувати властивості множин змінних і операторів. Для визначення класів систем розроблені формалізовані схеми і математичні методи, які дозволяють описати функціонування системи, а в деяких випадках – виконати аналітичні дослідження [31].

Засобами формалізованого опису процесів функціонування систем з програмним принципом керування служать певні мови і системи імітаційного моделювання. Деякі з них описані в книзі [1].

Агрегативні системи. Однією із найбільш загальних формалізованих схем являється опис у вигляді агрегативних систем [2,3,17]. Цей метод дозволяє представити функціонування неперервних і дискретних, детермінованих і стохастичних систем. Він в найбільшій мірі пристосований для опису систем, у яких характерно представлення вхідних та вихідних впливів у вигляді “повідомлень”, складених із сукупностей “сигналів”.

В основі методу лежить поняття агрегату як елементу системи. Математична модель агрегату виражається у вигляді залежностей (2.1) і (2.2) з конкретизацією вхідних впливів, станів і операторів переходів і виходів. Зокрема, виділяють особливі стани агрегату, до яких відносяться стани в моменти отримання вхідного чи керуючого сигналу, або видачі вихідного сигналу. Із особливого стану агрегат скачкоподібно може переходити в новий стан. Виділяються окремі оператори переходу для випадків надходження в агрегат вхідного сигналу V' , керуючого сигналу V'' , вхідного і керуючого сигналів V , видачі вихідного сигналу W та зміни стану в інтервалах між особливими станами U . Агрегативна система утворюється при розчленуванні системи на елементи, кожний із яких представляє собою агрегат.

Більш докладні відомості про агрегативні системи приведені в [1]. Ідентичний математичний опис досліджуваних об'єктів у вигляді агрегативних систем дозволяє використовувати універсальні засоби імітаційного моделювання.

Кусково-лінійні агрегати. Подальша конкретизація структури просторів станів, вхідних і вихідних впливів, а також операторів переходів і виходів призводить до поняття кусково-лінійних агрегатів, зручних для формалізації широкої сукупності різних процесів і явищ матеріального світу. В основі підходу лежить кусково-лінійний закон зміни стану системи, що забезпечує простоту обчислення опорних моментів часу і, як наслідок, простоту реалізації моделі кусково-лінійного агрегату і системи, складеної

із таких агрегатів. В окремих випадках для кусково-лінійних агрегативних систем результати можуть бути отримані аналітичним методом.

Спільно з формалізованим описом системи у вигляді сукупності кусково-лінійних агрегатів може застосовуватись метод керуючих послідовностей [13]. Суть метода полягає в тому, що функціонування системи визначається керуючими послідовностями, які мають певний фізичний зміст, а також алгоритмами, які описують керування системою за допомогою введених послідовностей. Керуючі послідовності і алгоритми дозволяють скласти рекурентні співвідношення для опису функціонування кусково-лінійного агрегату.

Стохастичні сітки. Для опису стохастичних систем з дискретними множинами станів, вхідних та вихідних впливів, які функціонують в неперервному часі, широко використовуються стохастичні сітки [28,29]. Стохастична сітка являє собою сукупність систем масового обслуговування, в якій циркулюють заявки, що переходять із одної системи в іншу.

Велика група мов імітаційного моделювання заснована на формалізованому представленні систем у вигляді стохастичних сіток [17,30]. При певних умовах стохастична сітка може розглядатися як сукупність незалежних систем масового обслуговування. Це відкриває можливості застосування досягнень теорії масового обслуговування для проведення аналітичного моделювання.

Системи масового обслуговування. Частково такі ж системи були описані в п.1.5.4 даного навчального посібника.

Теорія масового обслуговування добре розроблена [8,9]. Тому вона знайшла широке застосування для створення математичних моделей, зокрема, при моделюванні ОС [13,28,29]. Застосування теорії марковських процесів і теорії дифузійних процесів для дослідження СМО при певних обмеженнях і припущеннях дозволило отримати ряд важливих аналітичних залежностей, деякі із яких розглядаються в [1].

Неперервні детерміновані системи. Якщо в моделі системи не враховується вплив випадкових факторів, а оператори переходів і виходів неперервні (це означає, що малі зміни вхідних впливів призводять до такого ж порядку малих змін вихідного впливу і стану системи), то залежності (2.1) і (2.2) можуть бути представлені у вигляді диференційних рівнянь

$$\frac{dz}{dt} = h(z(t), x(t), t), \quad (2.4)$$

$$y = g(z(t), t), \quad (2.5)$$

де h, g – вектор-функції станів і виходів відповідно; x, z, y – вектори вхідних впливів, станів і вихідних впливів відповідно.

У випадку лінійності таких систем, коли оператори переходів і виходів володіють властивостями однорідності і адитивності, вигляд рівнянь

(2.4) і (2.5) спрощується, що дає можливість аналітичного розв'язування або дослідження відомими методами за допомогою обчислювальних машин.

Побудова математичних моделей неперервних лінійних детермінованих систем у вигляді диференційних рівнянь використовується при аналізі функціонування елементів і електричних кіл обчислювальних систем.

Автомати. Розглянуті вище формалізовані математичні схеми, можуть бути застосовні для систем, які функціонують в неперервному часі. Системи, стани яких визначені в дискретні моменти часу t_0, t_1, t_2, \dots , отримали назву автоматів. Якщо за одиницю часу вибраний такт $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, то просто пишуть: 0, 1, 2, ... [17]. В кожний дискретний момент часу, за виключенням t_0 , в автомат поступає вхідний сигнал $x(t)$, під дією якого автомат переходить в новий стан у відповідності з функцією переходів

$$z(t) = \varphi_a(z(t-1), x(t)) \quad (2.6)$$

і видає вихідний сигнал, який визначається функцією виходів

$$y(t) = \psi_a(z(t-1), x(t)). \quad (2.7)$$

Якщо автомат характеризується кінцевими множинами станів z , вхідних сигналів x і вихідних сигналів y , то він називається кінцевим автоматом. Функції переходів і виходів кінцевого автомата задаються таблицями, матрицями або графіками.

Стохастичні системи, які функціонують в дискретному часі, можна представити ймовірнісними автоматами. Функція переходів ймовірнісного автомату визначає не один конкретний стан, а розподіл ймовірностей на множині вихідних станів, а функція виходів – розподіл ймовірностей на множині вихідних сигналів. Функціонування ймовірнісних автоматів вивчається за допомогою апарату ланцюгів Маркова. Для оцінювання характеристик систем, які представлені у вигляді автоматів, можуть використовуватися аналітичні або імітаційні методи.

Крім наведених математичних схем для формалізованого опису функціонування систем використовуються числення висловлювань, тензорна алгебра, сітки Петрі, E -сітки та ін. [13].

Таким чином, побудова математичної моделі передбачає аналіз концептуальної моделі і вихідних даних з метою вибору однієї із придатних формалізованих схем, підбору необхідних множин і конкретизації операторів. Якщо це не вдається для всієї системи, то формалізовані схеми можуть бути застосовані для опису окремих елементів, а вся система описується з використанням програмного або структурного підходу.

2.4 Вибір методу моделювання

2.4.1 Аналітичні методи

Розроблена аналітична модель функціонування системи може бути досліджена різними методами – аналітичними або імітаційними. За допо-

могою аналітичних методів аналізу можна провести найбільш повне дослідження моделі. В деяких випадках наявність аналітичної моделі робить можливим застосування математичних методів оптимізації [31]. Для використання аналітичних методів необхідно математичну модель перетворити до вигляду явних аналітичних залежностей між характеристиками і параметрами системи та зовнішніх впливів. Однак це вдається лише для порівняно простих систем. Застосування аналітичних методів для більш складних систем пов'язано з більшим, порівняно із іншими методами, ступенем спрощення реальності та абстрагування. Тому аналітичні методи дослідження використовуються зазвичай для первісного грубого оцінювання характеристик всієї системи або окремих її підсистем, а також інформації для побудови більш точної моделі. Вони можуть використовуватися для аналізу паралельних процесів в складних системах [32,33].

Ряд аналітичних моделей не піддається аналітичним рішенням відомими математичними методами. Для їх дослідження можуть бути використані чисельні методи. Вони застосовуються до більш широкого класу систем, для яких математична модель представляється у вигляді системи рівнянь, які допускають рішення чисельними методами. Використання чисельних методів особливо ефективно за допомогою швидкодіючих комп'ютерів. Для дослідження систем, функціонування яких описується марковськими процесами, розроблений, наприклад, програмний засіб для автоматизованого складання рівнянь та їх рішення на комп'ютері [13]. Результатом дослідження систем чисельними методами являються таблиці значень шуканих величин для кінцевого набору значень параметрів системи та навантаження.

Якщо отримані рівняння не вдається розв'язати аналітичними або чисельними методами, то вдаються до якісних методів. Якісні методи дозволяють в ряді випадків оцінити асимптотичні значення шуканих величин, стійкість, а також говорити про поведінку траєкторії системи в цілому. Перераховані властивості відносяться до поведінки окремих траєкторій. Розглядаються і такі якісні властивості, які характеризують поведінку сукупностей траєкторій. Прикладом такої властивості являється неперервність, наявність якої говорить про те, що при малих змінах параметрів характеристики системи також мало змінюються. Слід відмітити, що для складних систем важливість якісних методів зростає.

2.4.2 Імітаційні методи

Імітаційне моделювання являється найбільш універсальним методом дослідження систем і кількісного оцінювання характеристик їх функціонування. При імітаційному моделюванні динамічні процеси системи-оригіналу підміняються процесами, які імітуються в абстрактній моделі, але з дотриманням таких самих співвідношень тривалостей та часових послідовностей окремих операцій. Тому метод імітаційного моделювання міг би називатись алгоритмічним або операційним. В процесі імітації, як при

експерименті з оригіналом, фіксують певні події та стани або вимірюють вихідні впливи, за якими обчислюють характеристики якості функціонування системи.

Імітаційне моделювання дозволяє розглядати процеси, які відбуваються в системі, практично на будь-якому рівні деталізації. Використовуючи алгоритмічні можливості складної системи, в імітаційній моделі можна реалізувати будь-який алгоритм керування або функціонування системи. Моделі, які допускають дослідження аналітичними методами, також можуть аналізуватися імітаційними методами. Усе це являється причиною того, що імітаційні методи моделювання стають основними методами дослідження складних систем.

Методи імітаційного моделювання розрізняють в залежності від класу досліджуваних систем, способу просування модельного часу і вигляду кількісних змінних параметрів системи та зовнішніх впливів.

В першу чергу можна розділити методи імітаційного моделювання дискретних і неперервних систем. Якщо усі елементи системи мають кінцеву множину станів і перехід із одного стану в інший здійснюється миттєво, то така система відноситься до систем з дискретною зміною станів або дискретних систем. Якщо змінні усіх елементів системи змінюються поступово і можуть приймати нескінченну множину значень, то така система називається системою з неперервною зміною станів або неперервною системою. Системи, в яких присутні змінні того та іншого типу, вважаються дискретно-неперервними. В неперервних системах можуть бути штучно виділені певні стани елементів. Наприклад, деякі характерні значення змінних фіксуються як досягнення певних станів. При моделюванні складних систем на системному рівні їх зазвичай зручно розглядати як системи з дискретною зміною станів.

Одним із основних параметрів при імітаційному моделюванні являється модельний час, який відображає час функціонування реальної системи. В залежності від способу просування модельного часу методи моделювання підрозділяються на методи з приростом часового інтервалу і методи з просуванням часу до особливих станів [1]. В першому випадку модельний час просувається на деяку величину Δt . Визначаються зміни станів елементів і вихідних впливів системи, які відбулися за цей час. Після цього модельний час знову просувається на величину Δt і процедура повторюється. Так продовжується до кінця періоду моделювання T_m . Крок приросту часу Δt зазвичай обирається постійним, але в загальному випадку він може бути і змінним. Цей метод називають "принципом Δt " [1].

Алгоритм моделювання за принципом Δt

Узагальнена схема алгоритму, що моделюється, який реалізує принцип постійного прирощення модельного часу (принцип Δt), представлена на рис.2.4. На початку вводяться значення $z_i(t_0)$, $i=1, \dots, n$, які характеризують стан системи в n -вимірному фазовому просторі станів в початковий момент часу t_0 . Час моделювання встановлюється $t=t_0=0$.

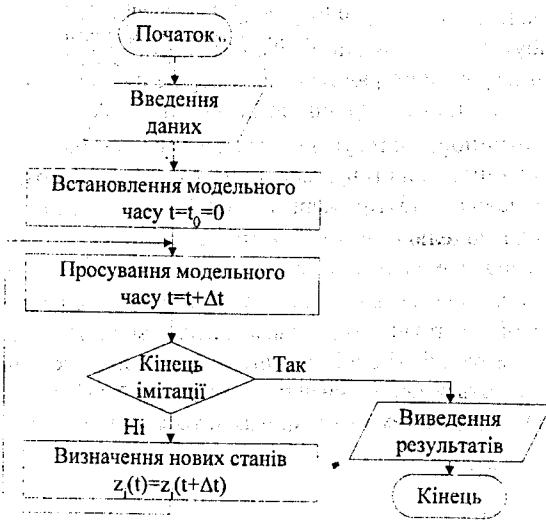


Рисунок 2.4 – Алгоритм моделювання за принципом Δt

Основні операції, за допомогою яких імітується стан системи, виконуються в циклі. Функціонування системи фіксується за послідовною зміною станів $z(t)$. Для цього модельному часу надається деяке приріст Δt . Потім за вектором поточних станів визначаються нові стани $z_i(t+\Delta t)$, які стають поточними. Для визначення нових станів за поточними в формалізованому описі системи мають існувати необхідні математичні залежності. Такий цикл продовжується до тих пір, поки поточний модельний час менше заданого часу моделювання T_m .

Під час імітації вимірюються, фіксуються і обробляються необхідні вихідні характеристики. При $t \geq T_m$ завершується обробка вимірів і виводяться результати моделювання.

При моделюванні стохастичних систем замість нових станів обчислюються розподіли імовірності для можливих станів. Конкретні значення вектору поточних станів визначаються за результатами випадкових досліджень. В результаті проведення імітаційного експерименту отримуємо одну із можливих реалізацій випадкового багатовимірною процесу в заданому інтервалі часу (t_0, T_m) .

В другому випадку в поточний момент модельного часу t спочатку аналізуються ті майбутні особливі стани – надходження дискретного вхідного впливу (заявки), закінчення обслуговування і т. п., для яких визначені моменти їх настання $t_i > t$. Обирається найбільш ранній особливий стан, і модельний час просувається до моменту появи цього стану. Вважається, що стан системи не змінюється між двома сусідніми особливими станами. Потім аналізується реакція системи на обраний особливий стан. Зокрема, в хо-

ді аналізу визначається момент появи нового особливого стану. Потім аналізуються майбутні особливі стани, і модельний час просувається до найближчого. Процедура повторюється до завершення періоду моделювання T_m . Даний метод називають “принципом особливих станів” або “принципом δz ” [2,17]. Завдяки його застосуванню заощаджується машинний час моделювання. Однак він використовується лише тоді, коли є можливість визначення моментів появи майбутніх чергових особливих станів.

Алгоритм моделювання за принципом δz

Узагальнена схема алгоритму моделювання за принципом особливих станів (принцип δz) зображена на рис.2.5. На початку виконується ініціалізація моделюючої програми – готуються масиви, вводяться і розміщуються в оперативній пам'яті вхідні дані, налаштовуються датчики випадкових чисел. Потім генеруються перші заявки по кожному потоку – визначаються моменти їх введення в систему і конкретизуються інші параметри.

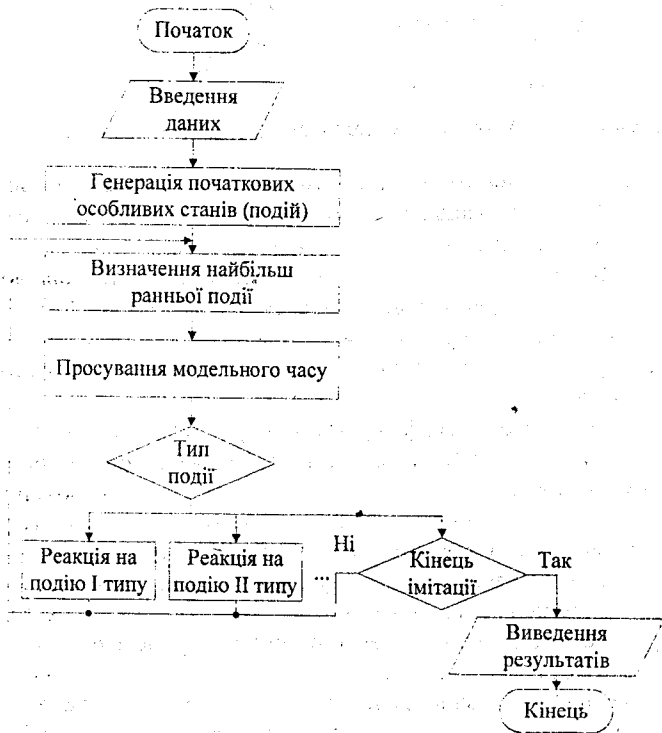


Рисунок 2.5 – Алгоритм моделювання за принципом особливих станів

Інші операції виконуються в циклі. Визначається момент початку найбільш ранньої події і до цього моменту зміщують модельний час. Після визначення типу події реалізується відповідна реакція на подію. В процесі цих дій можуть виникати ті або інші події в майбутньому, що фіксуються в масиві подій. Реакція на визначену подію, крім всього іншого, призводить, як правило, до виключення її із масиву подій. Закінчується кожна реакція поверненням до визначення події з мінімальним часом.

Такий цикл виконується до досягнення кінця моделювання, після чого завершується обробка статистики і виводяться результати. На цьому закінчується модельний експеримент.

В системі-оригіналі можуть протікати одночасно декілька процесів. Це призводить до того, що в один і той же момент часу в системі можуть виникнути декілька особливих подій. При моделюванні на однопроцесорній обчислювальній системі ці ситуації вирішуються так: послідовно у встановленому порядку реалізуються реакції на всі події, що виникли одночасно без збільшення модельного часу. Це називається псевдопарале́льною імітацією декількох процесів [1].

Алгоритм моделювання, що базується на принципі Δt , використовується для більш широкого кола систем, ніж алгоритм, що побудований за принципом особливих станів. Проте при його реалізації виникають проблеми з визначенням величини Δt . Для моделювання ОС на системному рівні в основному використовується принцип особливих станів.

Кількісні параметри системи і зовнішніх впливів можуть бути детермінованими або випадковими. За цією ознакою розрізняють детерміноване та статистичне моделювання. При статистичному моделюванні для отримання достовірних ймовірнісних характеристик процесів функціонування системи потрібне їх багаторазове відновлення з різними конкретними значеннями випадкових факторів і статистичним обробленням результатів вимірювань. В основу статистичного моделювання покладений метод статистичних досліджень або метод Монте-Карло [34,35].

Нехай необхідно визначити функцію розподілу випадкової величини y . Припустимо, що шукана величина y може бути представлена в вигляді залежності

$$y = y(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega),$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ – випадкові величини з невідомими функціями розподілу.

Для вирішення задач такого виду використовується такий алгоритм:

- а) за кожною із величин $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ виконується випадкове дослідження, в результаті якого визначається деяке конкретне значення випадкової величини $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$;
- б) використовуючи знайдені величини, визначається одне окреме значення y , за вищенаведеною залежністю;

- в) попередні операції повторюють N разів, в результаті чого визначається N значень випадкової величини y ;
- г) на основі N значень величини y знаходиться її емпірична функція розподілу.

Особливе значення має стаціонарність або нестаціонарність випадкових незалежних змінних системи і зовнішніх впливів. При нестаціонарному характері змінних, в першу чергу – зовнішніх впливів, що часто спостерігається на практиці, повинні бути використані спеціальні методи моделювання, зокрема метод повторних експериментів.

Із вищевикладеного випливає, що вибір того чи іншого методу моделювання повністю визначається математичною моделлю та вихідними даними.

2.5 Вибір засобів моделювання

Технічні засоби моделювання. Після вибору методу моделювання необхідно обрати технічні та програмні засоби для проведення дослідження моделі за допомогою обчислювальної системи. В якості програмних засобів можуть бути використані універсальні процедурно-орієнтовані алгоритмічні мови, проблемно-орієнтовані мови або спеціалізовані системи комп'ютерного моделювання.

Для дослідження моделей застосовуються універсальні або спеціалізовані обчислювальні системи. Для проведення аналітичного моделювання за допомогою універсальних комп'ютерів зазвичай не пред'являють ніяких особливих вимог до технічних засобів. Основною вимогою до універсальних комп'ютерів, які використовуються для імітаційного моделювання, являється наявність оперативної пам'яті достатньо великої ємності. Це пояснюється тим, що в процесі модельного експерименту постійно формуються звернення, що чергуються, до параметрів елементів та впливів (до атрибутів статичних та динамічних складових), тому всі вони повинні знаходитись в оперативній пам'яті.

Кожний модельний експеримент при статистичному моделюванні потребує суттєвих затрат машинного часу, тому бажано використовувати для моделювання високопродуктивні комп'ютери. Інші вимоги до складу і технічних характеристик універсальних ОС не є суттєвими.

У зв'язку з широким застосуванням імітаційного моделювання в різних областях все більш актуальними стають розробки і випуск спеціалізованих ОС. Прикладом потужних спеціалізованих технічних засобів моделювання є розподілені системи моделювання [1].

Алгоритмічні мови. Для створення програмних моделей можуть використовуватися універсальні процедурно-орієнтовані алгоритмічні мови загального призначення такі, як Pascal, Delphi, C. При створенні імітаційних моделей на мовах загального призначення виникає ряд труднощів, не типових для практики програмування традиційних задач обробки даних.

Ці труднощі пов'язані з двома основними особливостями алгоритмів імітаційного моделювання.

Перша особливість полягає у тому, що алгоритми поведінки складних систем відносяться до паралельних алгоритмів, тобто таких, що допускають більше ніж одне перетворення в кожний момент часу. Труднощі програмування паралельних алгоритмів полягають у тому, що алгоритмічні мови орієнтовані на опис чисто послідовних процесів. Програмна імітація паралельних процесів при використанні мов загального призначення зводиться до організації псевдопаралельного розвитку паралельних процесів, що достатньо складно для програмування.

Друга особливість полягає в тому, що в процесі моделювання необхідна обробка даних, об'єм яких досить важко оцінити апріорно. Це обумовлено динамічним характером імітаційних процесів в системах. При програмуванні таких алгоритмів першорядна увага приділяється динамічному розподілу оперативної пам'яті.

Переваги застосування процедурно-орієнтованих мов для складання програм імітаційного моделювання полягають в можливості використання стандартного програмного забезпечення обчислювальних систем, написання економічних за затратами пам'яті та швидкодіючих програм, врахування детальних особливостей функціонування моделюючих систем.

Мови моделювання. При створенні програм імітаційного моделювання виникають задачі, загальні для широкого класу моделей. Це – організація псевдопаралельного виконання алгоритмів; динамічний розподіл пам'яті; операції з модельним часом, який відображає астрономічний час функціонування оригіналу; імітація випадкових процесів; введення масиву подій; збирання та оброблення результатів моделювання. Для полегшення рішення цих та деяких інших задач створені спеціальні проблемно-орієнтовані засоби (програмні системи), які називають мовами моделювання. Рішення названих вище задач здійснюється повністю або частково внутрішніми засобами мови.

Описові засоби мов моделювання дозволяють ідентифікувати і задавати параметри моделюваної системи та зовнішніх впливів; алгоритми функціонування та керування, режими і потрібні результати моделювання. За структурою і правилами програмування мови моделювання подібні процедурно-орієнтованим алгоритмічним мовам високого рівня. Вони мають той або інший набір операторів, які супроводжуються відповідними операндами. Проте оператори мов моделювання визначають виконання більш складних процедур, тому мови моделювання мають більш високий рівень порівняно з рівнем алгоритмічних мов, що спрощує складання програм. Мови моделювання слід розглядати як формалізований базис створення математичної моделі.

В наш час відомо більше 500 мов моделювання [1,30]. Така множина мов частково обумовлена розмаїттям класів модульованих систем, методів їх формалізованого математичного опису, цілей та методів моделю-

вання. За класом систем мови підрозділяються на сімейства, які орієнтовані на моделювання дискретних, неперервних і комбінованих систем. Іншою класифікаційною ознакою може служити алгоритмічний або структурний підхід до опису процесів функціонування систем. Можна класифікувати мови і за іншими ознаками.

Відома класифікація мов моделювання, в основу якої покладено такий принцип [30]. Всі об'єкти (елементи) моделі поділяються на активності і транзакти. Активність (А) – це статистичні (структурні) об'єкти, які, як правило, відображають матеріальні ресурси модельованої системи. Транзакти (Т) – це динамічні (процесуальні) об'єкти, зокрема – запити.

Динамічні системи є системами типу А, Т чи АТ в залежності від того, є її елементи в своїй більшості активностями, транзактами чи елементами обох типів. Якщо семантика мови допускає опис тільки системи типу А чи Т, то мова відноситься до мов основного типу А чи Т, інакше це – мова типу АТ.

Наприклад, є класи мов, орієнтовані на опис системи з постійною структурою (VHDL [36]), наприклад, і мови типу Т, в яких всі елементи є динамічно породжуваними, а статичні елементи представляються псевдоактивностями (Simula-67) [1]. Мови GPSS, SLAM-II [1] допускають перебування в системі типу АТ. Статичні елементи представляють структуру модельованої системи (вузли, блоки в графічному поданні моделі), а динамічні (транзакти в GPSS, компоненти в SLAM) – запити.

Спроби уніфікувати мови моделювання в різних сферах привели до появи нової мови UML (Unified Modeling Language [37]), яка дозволяє стандартизувати етапи роботи над об'єктом. Її назвали Уніфікованою Мовою Моделювання. Автори мови вважають, що надалі, вони зможуть створити програмний продукт, за допомогою якого можна буде не лише описати об'єкт (в межах розвитку об'єктно-орієнтованого підходу) в єдиних для всіх термінах, але й автоматично за цим створити програмний код.

Проте автори посібника не розділяють оптимізму авторів UML, оскільки вважають, що спеціалізація – це шлях до ефективності.

Спеціалізовані системи комп'ютерного моделювання

На початку 90-х років на зміну універсальним мовам програмування прийшли спеціалізовані системи комп'ютерної математики.

Серед них найбільшу популярність отримали системи Eureka [38], Mercury [39], Derive [40], Mathematica 2/3/4 [41], Maple V R3/R4/R5 і Maple 6 [42] MathCAD [23,43] та інші.

Однією із найпотужніших сучасних спеціалізованих систем комп'ютерної математики є система MatLab (Math Works), розрахована на розв'язання широкого кола математичних задач із подання даних в універсальній матричній формі. Система MatLab [44] пропонується як лідер на ринку, в першу чергу в системі воєнно-промислового комплексу, в аерокосмічній галузі, як мова програмування високого рівня для технічних обчислень з великою кількістю стандартних пакетів прикладних програм. Попу-

лярності системи сприяє її потужне розширення Simulink, яке надає зручні і прості засоби, в тому числі візуальне об'єктно-орієнтоване програмування, для моделювання лінійних і нелінійних динамічних систем та інші.

Спеціалістів з оптоелектронних технологій найбільше зацікавляють пакети розширення найсучаснішої версії 6.1 MatLab, орієнтовані на обробку сигналів та зображень: Signal Processing Toolbox, Filter Design Toolbox, Wavelet Toolbox і Image Processing Toolbox [45].

Пакет Signal Processing Toolbox застосовують для генерації сигналів різної форми, над якими виконують швидке перетворення Фур'є. Представлені засоби спектрального і кепстрального аналізу сигналів, відображені функції модуляції і демодуляції сигналів, наявні методи математичного проектування фільтрів. Пакет розширення Image Processing Toolbox містить основні технології комп'ютерної реалізації обробки зображень: керування світловими потоками і кольоровими характеристиками, змінювання геометричних параметрів, виділення різних областей зображень.

Засобами двох згаданих пакетів розширень MatLab є можливість виконання комп'ютерного моделювання лінійних оптичних систем, геометричної оптики, оптичного відтворення неоднорідних середовищ, представлення і дифракції оптичних хвиль [45].

Програмні та технічні засоби моделювання обираються з врахуванням ряду критеріїв. Обов'язкова умова при цьому – достатність і повнота засобів для реалізації концептуальної та математичної моделі. Серед інших критеріїв можна назвати доступність засобів, наявність у дослідника інформації про ті чи інші засоби. Важливе значення має простота і легкість засвоєння програмних засобів моделювання, швидкість і конкретність створення програмної моделі, існування методики використання засобів для моделювання систем певного класу.

Після вибору мови розробляють програмну модель. Цей процес включає розробку алгоритму, конкретизацію форм представлення вхідних даних та результатів, написання та налагодження програми. Це важливий і трудомісткий етап, але за технологією він практично не відрізняється від будь-якого іншого програмування і тому тут детально не розглядається.

2.6 Перевірка адекватності та корекції моделі

Перевірка адекватності. Перевірка адекватності моделі системи полягає в аналізі її співрозмірності з досліджуваною системою, а також рівнозначності системі. Однак модель не повинна бути повним відображенням системи, інакше втрачається зміст її створення. В процесі створення моделі адекватність штучно спотворюється в результаті орієнтації, стратифікації, деталізації та локалізації. Адекватність порушується через ідеалізацію зовнішніх умов і режимів функціонування, виключення тих чи інших параметрів, нехтування деякими випадковими факторами. Відсутність точних відомостей про зовнішні впливи, певні нюанси структури системи,

прийнятї апроксимації, інтерполяції, припущення та гіпотези теж призводять до зменшення відповідності між моделлю та системою. Перераховані та інші фактори можуть стати причиною того, що результати моделювання будуть суттєво відрізнятись від реальних.

Природною найпростішою мірою адекватності може служити відхилення деякої характеристики y_0 оригіналу і y_m моделі

$$\Delta y = |y_0 - y_m|$$

або, що краще, відношення відхилення до характеристики оригіналу

$$\Delta y = |y_0 - y_m| / y_0.$$

Тоді можна вважати, що модель адекватна з системою, якщо ймовірність того, що відхилення Δy не перевищує граничної величини Δ , більше за допустиму ймовірність P_Δ :

$$P(\Delta y < \Delta) \geq P_\Delta.$$

Проте практичне використання даного критерію адекватності зазвичай неможливе з таких причин.

По-перше, для проєктованих або модернізованих систем відсутня інформація про значення характеристики y_0 . А моделюються, як правило, саме такі системи. Можна порівнювати характеристики моделі та деякої системи-аналога, але тоді буде однакова ступінь недовіри до цих характеристик. По-друге, система оцінюється не за однією, а за множиною характеристик, у яких може бути різна величина відхилення. По-третє, характеристики можуть бути випадковими величинами та функціями, а часто і нестационарними функціями. Для стохастичних систем може виявитися, що стохастичні характеристики, отримані на моделі з високим ступенем адекватності, більш точні, ніж відповідні характеристики, обчислені за результатами вимірювань на реальній системі. Це пояснюється тим, що результати моделювання визначаються за великою кількістю реалізацій, в той час як кількість вимірювань на реальній системі завжди обмежена. По-четверте, відсутня можливість апріорного точного завдання граничних відхилень Δ і допустимих ймовірностей P_Δ .

Проте перевіряти адекватність необхідно, оскільки за невірними результатами моделювання можуть бути прийняті невірні рішення. На практиці оцінка адекватності зазвичай проводиться шляхом експертного аналізу розумності результатів моделювання. Можна виділити такі види перевірок:

- а) перевірка моделей елементів (в сумнівних випадках слід деталізувати елемент або провести додатковий аналіз);
- б) перевірка моделей зовнішніх впливів (прийняті припущення, апроксимації та гіпотези необхідно оцінити математичними методами);

- в) перевірка концептуальної моделі функціонування системи (виявляються помилки постановки задачі);
- г) перевірка формалізованої і математичної моделі;
- д) перевірка способів вимірювання та обчислення вихідних характеристик; виявляються помилки розв'язання;
- е) перевірка програмної моделі (аналізується відповідність операцій і алгоритмів функціонування програмної та математичної моделі, проводяться контрольні розрахунки при типових і граничних значеннях змінних, виявляються інструментальні помилки програмування).

Деякі прийоми перевірок адекватності конкретних моделей наведені в роботах [2,28,46].

Корекція моделі. Якщо за результатами перевірки адекватності виявляється неприпустима неузгодженість моделі та системи, то виникає необхідність в корекції або калібруванні моделі. При цьому можуть бути виділені такі типи змін [46]: глобальні, локальні і параметричні.

Необхідність в глобальних змінах виникає у випадку виявлення методичних помилок в концептуальній моделі або математичній моделі. Усунення таких помилок призводить до розробки нової моделі. Локальні зміни пов'язані із уточненням деяких параметрів або алгоритмів. Вони виконуються, наприклад, шляхом заміни моделей компонентів системи і зовнішніх впливів на еквівалентні, але більш точні моделі. Локальні зміни потребують часткової зміни математичної моделі, але можуть призвести до необхідності розробки нової програмної моделі. Для зменшення ймовірності таких змін рекомендується відразу розробляти моделі з більшим ступенем деталізації, ніж це необхідно для досягнення мети моделювання.

До параметричних відносяться зміни деяких спеціальних параметрів, які називаються калібрувальними. Для забезпечення можливості підвищення адекватності моделі шляхом параметричних змін слід заздалегідь виявити калібрувальні параметри і передбачити прості способи варіювання ними.

Стратегія корекції моделі повинна бути направлена на першочергове введення глобальних змін, потім – локальних і, нарешті, параметричних змін. Загальна методика корекції приведена в роботі [46]. Для розробки тактики параметричних змін велике значення має аналіз чутливості моделі до варіацій її параметрів [2].

Завершується етап перевірки адекватності і корекції моделі визначенням та фіксацією області придатності моделі. Під областю придатності розуміється множина умов, при дотриманні яких точність результатів моделювання знаходиться в допустимих межах.

2.7 Планування експериментів з моделлю

Стратегічне планування. Мета моделювання досягається шляхом дослідження розробленої моделі. Дослідження полягають в проведенні

експериментів, в результаті яких визначаються вихідні характеристики при різних значеннях керуючих змінних параметрів моделі. Експерименти слід проводити за певним планом. Особливої важливості набуває планування експериментів при чисельному і статистичному імітаційному моделюванні на універсальних ОС. Це обґрунтовується великою кількістю можливих сполучень значень керуючих параметрів, а кожний машинний експеримент проводиться при певному визначеному сполученні значень параметрів. Наприклад, при п'яти керуючих параметрах, кожний з яких може мати три значення, кількість сполучень параметрів дорівнює 243, при десяти параметрах (по п'ять значень кожного) число сполучень наближується до 10 млн. При обмежених обчислювальних і часових ресурсах зазвичай не можливо провести всі експерименти. Виникає необхідність у виборі певних сполучень параметрів і послідовності проведення експериментів. Це називається стратегічним плануванням [2,11].

Розробка плану починається на ранніх етапах створення моделі, коли виявляються характеристики якості і параметри, за допомогою яких передбачається керувати якістю функціонування системи. Ці параметри називають в теорії планування експериментів факторами. Потім виділяються можливі значення кількісних параметрів і варіанти кількісних (функціональних) параметрів. Їх називають рівнями q . При цьому число сполучень

$$N_S = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_k,$$

де k – число факторів.

Якщо число факторів велике, то для проведення досліджень системи використовується один із параметрів складання плану за неповним факторним аналізом. Ці методи добре розроблені в теорії планування експериментів [47]. Особливу важливість набуває старанне планування експериментів при дослідженні нестационарних систем у зв'язку з необхідністю істотного збільшення загальної кількості експериментів.

Тактичне планування. Сукупність методів зменшення тривалості машинного експерименту при забезпеченні статистичної ймовірності результатів імітаційного моделювання отримала назву тактичного планування [2,11]. На тривалість одного експерименту (періоду моделювання T_m) впливає ступінь стаціонарності системи, взаємозалежності характеристик і значення початкових умов моделювання.

Дані, зібрані в експерименті, можна розглядати як часові ряди, які складаються із вимірів певних характеристик. Ряд вимірів характеристики y може розглядатись як вибірка із стохастичної послідовності. Якщо ця послідовність стаціонарна, то середнє значення \bar{y} не залежить від часу. Оцінкою \bar{y}_N являється середнє за часовим рядом y_1, \dots, y_N . Для ергодичної послідовності точність цієї оцінки зростає з ростом N .

Якщо задані максимальна допустима помилка оцінки (довірчий інтервал) і мінімальна ймовірність того, що істинне середнє \bar{y} лежить всередині цього інтервалу, то існує мінімальний розмір досліджуваної вибірки. Цей розмір відповідає мінімальній тривалості експерименту. Для оцінки декількох характеристик період моделювання визначається за максимальним значенням.

Потрібний розмір вибірки суттєво залежить від дисперсії характеристики, яка оцінюється. Чим більша дисперсія, тим більше повинен бути розмір вибірки. Для корельованих випадкових характеристик слід оцінювати дисперсії. Існують спеціальні прийоми обробки результатів моделювання, які отримали назву методів зменшення дисперсії. Вони використовують апіорну інформацію про систему і дозволяють зменшити розмір вибірки при збереженні заданої точності оцінок. До них відносяться методи корельованих, стратифікованих вибірок та ін. [2,11].

Більшість імітаційних моделей використовуються для вивчення сталих рівноважних режимів функціонування. Проте в початковий період роботи системи або моделі існує перехідний режим навіть при незмінних значеннях параметрів вхідних впливів. Як показали дослідження, тривалість перехідного режиму може бути досить великою. Значення вихідних характеристик, які виміряні в перехідний період, зміщують їхні загальні оцінки.

Існує три методи зменшення помилки, що обумовлена початковими умовами. Перший полягає в достатньому збільшенні періоду моделювання. Зі збільшенням числа вимірів вплив початкового зміщення на статистичну оцінку прямує до нуля. Другий метод полягає у тому, щоб почати збір статистики не з початкового моменту, а після проходження деякого часу. Третій метод полягає в ініціалізації моделі не з "нульового", а спеціально заданого стану, близького до встановленого.

Перші два методи призводять до збільшення тривалості експерименту і не дають гарантії зменшення помилки, так як апіорно невідома тривалість перехідного режиму. Третій метод можна застосувати при наявності інформації про придатний початковий стан. Така інформація може бути отримана в ряді випадків на основі попередніх аналітичних розрахунків за спрощеними моделями. В наступних експериментах для задання початкових станів можуть бути використані уточнені відомості із попередніх експериментів.

При моделюванні нестационарних систем встановлений режим може повністю бути відсутнім. Природним методом визначення характеристик імітаційного моделювання нестационарних систем являється метод повторних експериментів. В цьому випадку число експериментів суттєво збільшується, що призводить до особливих вимог до їхнього планування.

2.8 Аналіз результатів моделювання

Обробка вимірювань імітаційного моделювання. При статистичному моделюванні в ході імітаційного експерименту вимірюються множині значень за кожною вихідною характеристикою. Ці вибірки необхідно обробляти для зручності наступного аналізу і використання. Оскільки вихідні характеристики зазвичай являються випадковими величинами або функціями, то обробка полягає в обчисленні оцінок математичних очікувань, дисперсій і кореляційних моментів. Оцінки, отримані в результаті статистичної обробки вимірювань, повинні бути суттєвими, незміщеними та ефективними.

Для того, щоб виключити необхідність збереження в машині усіх значень, обробку проводять за рекурентними формулами, коли оцінки обчислюють в процесі експерименту методом наростаючого результату в міру появи нових вимірювань.

Для стохастичних характеристик можна побудувати гістограму відносних частот – емпіричну щільність розподілу. З цією метою область припустимих значень характеристики у розбивається на інтервали. В ході експерименту за вимірюваннями визначають число попадань характеристики в кожний інтервал і підраховують загальне число вимірів. Після завершення експерименту для кожного інтервалу обчислюють відношення числа попадань характеристики до загального числа вимірювань і до довжини інтервалу. Для побудови гістограми можна спробувати підібрати теоретичний закон розподілу. Робиться це так само, як і при підготовці початкових даних моделювання.

Якщо шукана характеристика являється стаціонарною випадковою функцією часу $y(t)$ і має властивість ергодичності, то для її оцінки обчислення середнього за часом замінюється обчисленням за множиною вимірювань при одному достатньо тривалому експерименті.

Для випадкових нестаціонарних характеристик період моделювання T_m розбивається на відрізки зі сталим кроком Δt (прогони або перерізи), і запам'ятовуються значення характеристики в кінці кожного прогону. Проводиться серія експериментів з різними послідовностями випадкових параметрів моделі. Потім виміри кожного перерізу обробляються як при оцінці випадкових величин. Процеси обробки вимірювань імітаційного експерименту направлені на отримання інтегральних характеристик, тобто стиснення даних.

Визначення залежностей характеристик від параметрів системи. За результатами статистичного моделювання може бути проведений аналіз залежностей характеристик від параметрів системи і зовнішніх впливів. Для цього можна скористатися кореляційним, дисперсійним або регресивним методами.

За допомогою кореляційного аналізу можна встановити наявність зв'язку між двома або більше випадковими величинами. Оцінкою зв'язку

служить коефіцієнт кореляції при наявності лінійної залежності між величинами і нормальному законі їх спільного розподілу. Коефіцієнт кореляції, який дорівнює одиниці за абсолютною величиною, свідчить про наявність функціонального нестохастичного лінійного зв'язку між величинами, що аналізуються. При рівності нулю коефіцієнта кореляції зв'язок відсутній. Проміжні значення коефіцієнта кореляції відповідають наявності лінійного зв'язку з розсіюванням або нелінійної кореляції.

Дисперсійний аналіз можна використовувати для встановлення відносного впливу різних факторів на значення вихідних характеристик. При цьому загальна дисперсія характеристики розпадається на компоненти, відповідні факторам, які розглядаються. За значеннями окремих компонентів роблять висновок про ступінь впливу того чи іншого фактора на характеристику, що аналізується.

Коли усі фактори в експерименті являються кількісними, то можна знайти аналітичну залежність між характеристиками і факторами. Для цього використовуються методи регресивного аналізу. Знайдена залежність називається емпіричною моделлю. Регресивний аналіз полягає у тому, що обирається вид співвідношення між залежними і незалежними змінними, за експериментальними даними обчислюються параметри обраної залежності і оцінюється якість апроксимації експериментальних даних моделлю. Якщо якість незадовільна, то береться залежність іншого виду, і процедура повторюється [13].

До аналізу результатів моделювання можна віднести задачу аналізу чутливості моделі до варіацій її параметрів. Під аналізом чутливості розуміють перевірку стійкості характеристик процесу функціонування системи до можливих відхилень значень параметрів [2].

Аналіз результатів моделювання дозволяє уточнювати множину інформативних параметрів моделі, що може призвести до суттєвої зміни початкового виду концептуальної моделі; знайти функціональні залежності характеристик і параметрів, що іноді дає можливість створити аналітичні моделі системи або визначити вагові коефіцієнти критерію ефективності.

Використання результатів моделювання. Результати моделювання використовуються для прийняття рішення про працездатність системи, для вибору кращого проектного варіанта або для оптимізації системи. Рішення про працездатність приймається тоді, коли виходять або не виходять характеристики системи за встановлені межі при будь-яких допустимих змінах параметрів. При виборі найкращого варіанта із усіх працездатних варіантів обирається той, в якого максимальне значення критерію ефективності. Найбільш загальною та складною являється оптимізація системи: потрібно знайти таке поєднання значень змінних параметрів системи або робочого навантаження із множини допустимих, яке максимізує значення критерію ефективності:

$$E_{opt} = \max(\min)E(y)$$

при дотриманні обмежень на усі n характеристик [5,31]

$$y_{i\min} \leq y_i \leq y_{i\max}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Якщо вихідна характеристика y_i являється випадковою величиною з деякою щільністю розподілу $f(y_i)$, то доцільно ввести в задачу оптимізації стохастичні обмеження такого вигляду :

$$P(y_{i\min} \leq y_i \leq y_{i\max}) = \int_{y_{i\min}}^{y_{i\max}} f(y_i) dy_i \geq \beta_i,$$

де β_i - мінімально допустима ймовірність того, що конкретні значення y_i не вийдуть за границі обмежень.

Для нестационарних систем вихідна характеристика y_i зазвичай являється випадковою функцією зі щільністю розподілу, яка змінюється в часі $f(y_i, t)$. В цьому випадку можна задати обмеження:

$$P(y_{i\min} \leq y_i \leq y_{i\max}) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{y_{i\min}}^{y_{i\max}} f(y_i, t) dy_i dt \geq \beta_i,$$

де T – тривалість періоду функціонування періоду, який аналізується.

Наведена постановка задачі оптимізації стохастичних систем допускає вихід за встановлені границі не лише окремих значень характеристики y_i , але й її математичного сподівання $M[y_i, t]$ в пікові моменти навіть при величинах β_i , близьких до одиниці. Це показано на рис.2.6 для випадку обмеження y_i лише зверху.

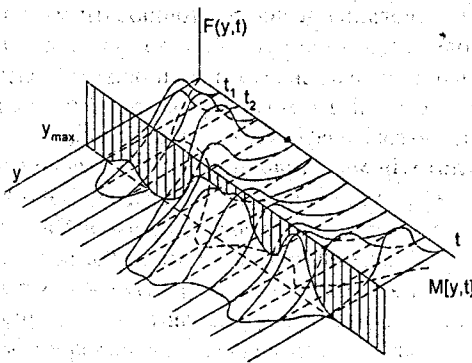


Рисунок 2.6 – Обмеження на вихідну характеристику, представлену нестационарним випадковим процесом

При статистичному моделюванні обчислення наведеного подвійного інтеграла, яке часто виявляється невирішуваною задачею у випадку використання інших методів дослідження, зводиться до ймовірнісної оцінки, яка виконується шляхом підрахунку числа реалізацій y , які не виходять за допустимі значення, і його ділення на величину вибірки за час експерименту T_m .

У випадку великої кількості сполучень незалежних змінних пошук оптимального варіанта потребує використання спеціальних процедур, наприклад, методів математичного програмування, зокрема, методу найшвидшого спускання та ін. Значно скоротити затрати машинного часу на моделювання дозволяє проведення залежних експериментів [2]. Застосування цих методів слід враховувати на етапі планування експериментів.

Після створення системи доцільна апостеріорна перевірка результатів моделювання і зміна характеристик функціонування. Така перевірка допомагає уточнити модель та підвищити ефективність системи. Наявність моделі діючої системи дає можливість прогнозування якості функціонування в результаті розвитку системи або зміни зовнішніх впливів.

Викладені в даному розділі технологічні аспекти моделювання розглядаються більш докладно в наступних главах на прикладах моделювання обчислювальних систем.

Контрольні питання

1. Сформулюйте сутність поняття концептуальної моделі.
2. Які основні етапи процесу створення концептуальної моделі?
3. Як знайти компроміс між рівнем спрощення моделі та її адекватністю з досліджуваною системою?
4. Як вирішують проблему вибору рівня деталізації моделі?
5. Дайте означення процесу стратифікації.
6. Які основні компоненти повинні бути присутніми в моделі при проведенні етапу деталізації?
7. Наведіть приклади генераторів зовнішніх впливів, що діють на модель в процесі її локалізації.
8. В чому полягає принцип структурного керування для функціонування простих систем?
9. В чому полягає суть програмного (алгоритмічного) принципу керування для функціонування складних систем?
10. Як відбувається виділення процесів при розробці концептуальної моделі?
11. Дайте означення простору станів системи і вкажіть зв'язок між початковим станом системи та її станом в поточний момент часу.
12. При яких умовах на етапі збору фактичних даних можливо підміняти випадкові значення параметрів детермінованими величинами і навпаки?

3. В чому полягає процедура підбору закону розподілу випадкових параметрів системи?
14. Як називається процес встановлення аналітичної залежності між параметрами вхідних впливів і вихідними характеристиками елементів на основі експериментальних даних?
15. В чому суть методу найменших квадратів?
16. Які задачі апроксимації функції вирішує кореляційний аналіз?
17. Що служить основою для розробки математичної моделі системи?
18. Наведіть узагальнену математичну модель динамічних систем без передісторії з програмним принципом керування.
19. Наведіть узагальнену математичну модель для систем з простими і сталими програмами керування.
20. В чому суть методу агрегативних систем?
21. В чому суть методу керуючих послідовностей?
22. Дайте означення поняття стохастичної сітки.
23. Який клас систем описується диференційними рівняннями?
24. Якими множинами можна описати автомат?
25. Як визначають кінцевий та ймовірнісний автомати?
26. Охарактеризуйте аналітичні методи моделювання та вкажіть область їх застосування.
27. Як досліджують аналітичні моделі, що не мають аналітичних розв'язків?
28. Чому методи імітаційного моделювання називають ще по-іншому алгоритмічними чи операційними?
29. Що розуміють під процесом імітації системи?
30. Наведіть параметри, покладені в основу класифікації імітаційних моделей.
31. Наведіть узагальнену схему алгоритму імітаційного моделювання за „принципом Δt ”.
32. Які особливості просування модельного часу в алгоритмі імітаційного моделювання за „принципом δz ”?
33. Що таке псевдопаралельна імітація декількох процесів?
34. В чому полягає суть методу Монте-Карло?
35. Які основні види програмних засобів можуть бути використані для моделювання об'єктів?
36. Які труднощі виникають під час програмування алгоритмів імітаційного моделювання?
37. Поясніть відмінність між алгоритмічними мовами та мовами моделювання.
38. Що таке активності і транзакти?
39. Наведіть приклади мов моделювання та спеціалізованих систем комп'ютерного моделювання, які застосовуються в моделюванні оптоелектронних технологій.

40. Що розуміють під адекватністю моделі системі-оригіналу та які причини виникнення порушення адекватності?
41. Які види перевірок здійснюють на практиці для оцінювання адекватності моделі системі-оригіналу?
42. Охарактеризуйте глобальні, локальні і параметричні зміни в моделі, що здійснюють на етапі корегування моделей.
43. Встановіть особливості стратегічного і тактичного планування.
44. Які основні характеристики обчислюють при обробці вимірювань імітаційних експериментів?
45. Як оцінити залежність характеристик модельованої системи від її параметрів за допомогою кореляційного, дисперсійного чи регресійного методів?
46. Як приймаються рішення про працездатність системи-оригіналу на основі результатів моделювання?
47. Наведіть постановку задачі оптимізації стохастичних складних систем.

3 МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

3.1 Використання методу статистичних досліджень при імітації

3.1.1 Сутність методу статистичних досліджень

При реалізації процесів в імітаційних моделях великих систем необхідно імітувати вплив багаточисельних випадкових факторів складної природи на різні компоненти імітаційних моделей. Кожний такий вплив на процес в моделі являє собою "розіграш" випадкового явища за допомогою деякої процедури, яка дає випадковий результат. Основним елементом, із сукупності яких складається статистична модель, є одна випадкова реалізація модульованого явища. Множина таких реалізацій явищ в ході одного варіанта імітації дає одну із реалізацій процесу. Потім передбачається процедура статистичного оцінювання цих реалізацій для отримання наближених характеристик процесу. При великому числі реалізацій вдається отримати статистичні оцінки модульованого процесу.

Для побудови імітаційних моделей дослідник повинен знати: сутність методу статистичних досліджень; способи розрахунку необхідного числа реалізацій; алгоритми імітації псевдовипадкових чисел, які мають типові розподіли.

Сутність методу статистичних досліджень розглянемо на прикладі задачі про ураження n ракетами складної системи [6]. Зона руйнування однієї ракети являє собою коло радіусом r . В результаті n вистрелів буде вражена якась частина S_{Π} площі цілі S_{Σ} , яка складає деяку долю площі цілі $U = S_{\Pi} / S_{\Sigma}$. Щоб уникнути непотрібних перекриттів зон ураження, проводиться прицілювання по n різних точках (рис.3.1): O_1, \dots, O_n . Задані характеристики розсіювання ракет: середньоквадратичні відхилення по координатах σ_x і σ_y . Систематичні помилки відсутні. Координати x і y у кожній точці попадання незалежні одна від одної і від координат інших точок попадання. Необхідно при заданому розташуванні точок прицілювання O_1, \dots, O_n обчислити такі характеристики ефективності операцій: середню долю уражень площі цілі m_U ; дисперсію доли D_U ; ймовірність ураження не менше заданої доли $p(U \geq \bar{U})$; математичне очікування числа ракет, які пролітають мимо цілі, \bar{r}_0 .

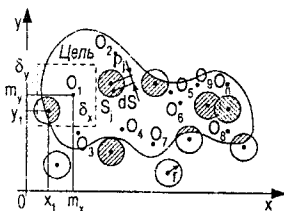


Рисунок 3.1 – Приклад ураження ракетами площі цілі

ної доли $p(U \geq \bar{U})$; математичне очікування числа ракет, які пролітають мимо цілі, \bar{r}_0 .

При розв'язанні задачі методом Монте-Карло кожна реалізація являє собою обстріл цілі n ракетами, при якому точки попадання ракет розіграні по жеребкуванню. Таким чином, моделювання кожної реалізації буде складатися із n одиничних жеребкувань плюс розрахунок враженої цілі S_n . В кожному одиничному жеребкуванні розігрується точка попадання j -тої ракети x_j, y_j , координати якої розподілені за нормальним законом $N(m_{x_j}, \sigma_x)$ і $N(m_{y_j}, \sigma_y)$. Тут m_{x_j}, m_{y_j} - координати точки прицілювання O_j . Припустимо, що коефіцієнт кореляції $r_{xy} = 0$, оскільки x_j і y_j незалежні. Координати j -тої точки попадання розраховуються за такими формулами:

$$x_j = \sigma_x \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^6 \xi_k - 3 \right) + m_{x_j},$$

$$y_j = \sigma_y \sqrt{2} \left(\sum_{k=7}^{12} \xi_k - 3 \right) + m_{y_j},$$

де ξ_k - 12 незалежних екземплярів випадкової величини $\xi(0;1)$.

Припустимо, що цей етап виконаний і ми отримасмо n точок попадання в даній j -тій реалізації (див.рис.3.1). Зараз потрібно підрахувати уражену площу S_n для j -тої реалізації. Навколо кожної точки опишемо коло радіусом r і підрахуємо площу тієї частини цілі, яка покрита хоча б одним із кіл. Уся цілі поділяється на ряд елементарних площадок ds . Для кожної площадки визначається відстань ρ_j від точки попадання j -тої ракети ($j = \overline{1, n}$). Якщо хоча б для однієї із точок попадання ця відстань виявилася меншою за r , то площадка ds вважається ураженою, після чого виконується сумування уражених площадок по всій цілі: $S_n = \sum ds$. Для j -тої реалізації визначають долю ураженої площі в даній реалізації $U^j = S_n^j / S_u$. Одночасно для кожної i -тої реалізації обчислюють кількість ракет, відстань від точок попадання яких до цілі перевищує r_0 (число промахів). Виконавши N реалізацій, обчислюють потрібні характеристики, а саме середнє значення і дисперсію U^j .

Ймовірність того, що доля ураження площі буде не менше \bar{U} , визначається так. З кожною реалізацією пов'язується число z_i , яке може бути або 1 (якщо $U^i \geq \bar{U}$), або 0 (при $U^i < \bar{U}$). Тоді $p(U \geq \bar{U}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$. Число ракет, які не чинять шкоди, визначається за формулою $\bar{r}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_0^i$.

3.1.2 Розрахунок необхідного числа реалізацій

Метод статистичних досліджень заснований на граничних теоремах теорії ймовірності [19], які стверджують, що при великому числі N реалізацій частота події p^* наближається до його ймовірності p , а середнє арифметичне \bar{x} - до його математичного сподівання m_x . Яка буде помилка від заміни $p^* \rightarrow p$, $\bar{x} = m_x$? Необхідно визначити таке число реалізацій N , щоб ця помилка при заданій ймовірності β не перевищувала задані межі. Згідно з центральною граничною теоремою [19], при великому значенні N має місце асимптотична нормальність середнього значення і частоти подій.

Розглянемо випадок N незалежних дослідів, в кожному з яких: подія A з'являється з ймовірністю p і частота події p^* має нормальний розподіл з

параметрами $\left(p, \sqrt{\frac{p(p-1)}{N}} \right)$; випадкова величина x приймає значення

x_1, \dots, x_N і середнє значення \bar{x} має нормальний розподіл з параметрами $\left(m_x, \sigma_x / \sqrt{N} \right)$, де m_x і σ_x - відповідно математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення величини x .

Із теорії ймовірності відомо, що достовірна ймовірність β попадання p^* в інтервал $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ визначається із виразу [19]

$$P\left(|p^* - p| < \epsilon \right) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} \right) - 1 = \beta,$$

де Φ - нормальна функція розподілу. Аналогічно розраховується достовірна ймовірність β попадання \bar{x} в інтервал $(m_x - \epsilon, m_x + \epsilon)$ [19];

$$P\left(|\bar{x} - m_x| < \epsilon \right) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{N}}{\sigma_x} \right) - 1 = \beta.$$

На практиці досліднику невідомі істинні значення p і m_x . По вибірці об'єму N він визначає значення p^* і \bar{x} та вирішує одну із таких задач.

1. Оцінити ймовірність відхилення істинної ймовірності p від частоти події p^* , якщо відомі N і ϵ .

$$P\left(|p^* - p| < \epsilon \right) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p^*(1-p^*)}} \right) - 1.$$

2. Визначити число дослідів N , необхідних для забезпечення заданої точності ϵ при ймовірності β відхилення частоти p^* від істинної ймовірності p :

$$N = \frac{p^*(1-p^*)}{\epsilon^2} \left[\Phi^{-1} \left(\frac{\beta+1}{2} \right) \right]^2,$$

де Φ^{-1} - функція, обернена до нормальної функції розподілу Φ .

3. Оцінити ймовірність відхилення середнього значення \bar{x} від його математичного сподівання, якщо відомі N , ϵ і σ_x :

$$P\left(\left|\bar{x} - m_x\right| < \epsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right) - 1.$$

4. Визначити число дослідів, необхідних для того, щоб із заданою ймовірністю β очікувати, що x відхилиться від m_x на величину, яка не перевищує ϵ :

$$N = \left(\frac{\sigma_x}{\epsilon}\right)^2 \left[\Phi^{-1} \left(\frac{1+\beta}{2} \right) \right]^2.$$

3.1.3 Імітація рівномірної розподілених псевдовипадкових чисел

При побудові стохастичної моделі випадкові впливи можуть вводитись в неї у вигляді таблиць експериментальних даних або штучно відтворюються програмними або фізичними датчиками. В якості фізичного датчика використовується, наприклад, електронний імпульсний генератор, який керується джерелом шуму.

Фізичні датчики оформлюються у вигляді приставки до ЕОМ і мають високу швидкість моделювання рівномірно розподілених величин на інтервалі (0; 1). Формування випадкових величин ξ здійснюється у вигляді елементарної машинної команди. Проте серйозні труднощі виникають при стандартизації характеристик фізичного датчика випадкових чисел у зв'язку із схемною нестабільністю його роботи, залежністю температури і вологості навколишнього середовища. Крім того, точне повторення реалізації модельованих процесів можливе лише за допомогою перезаписування випадкових чисел у зовнішню пам'ять ЕОМ. Тому спеціалісти пішли по шляху формування значень випадкових чисел за допомогою рекурентних математичних методів. Реалізовано велике число алгоритмів генерування псевдовипадкових чисел. Ці числа являються повністю детермінованими, що означає можливість повторення циклу генератора з одними й тими ж початковими даними. В результаті на виході генератора можна отримати однакові послідовності чисел. Звичайно, затрати на імітацію зростають, оскільки для генерації псевдовипадкового числа ξ виконується ціла програма на ЕОМ. Крім того, починаючи з деякого моменту відбувається автоматичне повторення циклу генерації числа, що змушує приймати спеціальні запобіжні заходи для запобігання виникнення цієї ситуації при імітації випадкових явищ.

Традиційний спосіб програмної імітації випадкових функцій будь-якої складності зводиться до генерування базових послідовностей та їх подальшого функціонального перетворення. Частіше за все в якості базової використовується послідовність чисел, яка представляє реалізації рівномірно розподілених на інтервалі $(0;1)$ випадкових величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i$, тобто повторну вибірку на рівномірно розподіленій генеральній сукупності значень величини ξ . Практично в силу дискретності представлення числа в ЕОМ можна оперувати з $M = 2^k$ різними можливими значеннями чисел $x_i = x_i^* / M$, де x_i^* - реалізація випадкової величини ξ , яка має рівномірний розподіл з ймовірностями $p(\xi_i^* = x_i^*) = 1/M$, $0 \leq i \leq M - 1$; k - розрядність коду ЕОМ. Дискретний характер ξ_i досить суттєвий, але при великому M ξ_i представляють як неперервні випадкові величини. Для задовільного розв'язку задачі вказана послідовність чисел повинна мати статистичну структуру, яка відповідає імовірнісним властивостям ряду незалежних випадкових величин з квазірівномірним розподілом.

Існує ряд типових відхилень від статистичної послідовності випадкових чисел: періодичність повторення окремих чисел або груп; кореляція між окремими розрядами або послідовними числами; відмінність закону розподілу випадкових чисел, які формуються даним генератором, від квазірівномірного; відмінність параметрів закону розподілу від потрібного значення і т.д. Тому в арсеналі моделювання існують спеціальні тести, які дозволяють здійснити статистичний аналіз якості послідовності випадкових чисел, які формуються вибраним генератором, і виявити існуючі відхилення. Суть перевірок полягає, як правило, у визначенні тривалості перехідного процесу, після якого відбувається повторення чисел (відрідка аперіодичності); перевірки випадковості послідовності псевдовипадкових чисел, яка формується, і визначенні параметрів розподілу псевдовипадкових чисел, що формуються генератором. В генераторах псевдовипадкових чисел на ЕОМ фактично реалізуються формули вигляду [1,6]:

$$x_i^* = \varphi(x_{i-1}^*, \dots, x_{i-s}^*); \text{ mod } M; x_i = x_i^* / M.$$

Реалізації x_i отримуються всередині алгоритму за допомогою перетворення φ із раніше імітованих випадкових чисел. Тут x_i^* являють собою числа більше одиниці. Тому необхідне нормування їх величиною M , яка визначається розрядною сіткою ($M = 2^s$; s - розрядність слова ЕОМ), для якої реалізований алгоритм генератора. Найбільш поширений конгруентний метод генерації псевдовипадкових чисел [1,6]:

$$x_i^* = A \cdot x_{i-1}^* + C; \text{ mod } M; x_i = x_i^* / M.$$

Роботу такого алгоритму можна представити на ітераційній площині (x_{i-1}, x_i) за допомогою діаграми для випадку $A=2$ і $C=0$. Як видно із рис.3.2, задаючи різні початкові значення x_0 , можна отримати різні режими роботи алгоритму. Перехідний режим дозволяє отримати псевдовипадкові послідовності. Можна очікувати, що при відповідному підборі параметрів A , C і x_0 цей режим буде достатньо тривалим, а генерована послідовність $\{x_i\}$ буде мати стохастичні властивості.

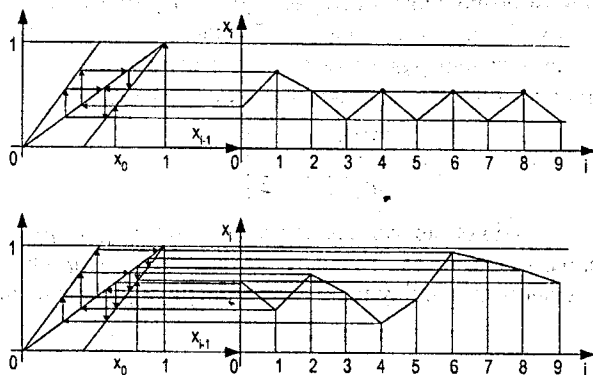


Рисунок 3.2 – Діаграма імітації псевдовипадкових чисел: $a - x_0 \approx 0.67$;
 $b - x_0 \approx 0.71$

Крім розглянутого методу, існує велике число алгоритмів імітації псевдовипадкових чисел з рівномірним розподілом на інтервалі $(0; 1)$. Найбільш раннім є метод серединних квадратів, суть така [6]: беруть довільне m -розрядне число x_0 , підносять його до квадрату, із результату обирають середні m цифр і отримують нове число x_1 і т.д.

Змішаний конгруентний метод передбачає подвійне звернення до генератора, який формує псевдовипадкові числа конгруентним способом, і здійснює перетворення за формулою

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-1}) \pmod{M}.$$

Для збільшення інтервалу аперіодичності псевдовипадкових чисел використовується метод збурень основного алгоритму [6]. Суть його така. Основна програма імітує числа за алгоритмом $x_{i1} = \varphi_1(x_{i1-1})$, в якості початкових значень задаються числа, які формуються за іншим алгоритмом $x_{i2} = \varphi_2(x_{i2-1})$.

3.1.4 Алгоритми імітації різних випадкових впливів

Нормальний розподіл. Імітація нормально розподілених величин η може проводитися багатьма способами. Розглянемо алгоритм імітування

нормально розподілених величин, який використовується найчастіше, і базується на центральній граничній теоремі ймовірності [19,20]. Згідно з цією теоремою, при додаванні достатньо великого числа незалежних випадкових величин, які порівнюються за своїми дисперсіями, отримуємо випадкову величину, розподілену приблизно за нормальним законом, причому цей закон тим ближче до нормального, чим більше випадкових величин додається.

Виявляється, що при додаванні не менше шести випадкових величин з рівномірним розподілом в інтервалі (0; 1) отримуємо випадкову величину, яка за точністю, достатньою для більшості практичних задач, може вважатися нормальною. Таким чином, отримуємо спосіб (суми), згідно з яким необхідно виконувати перетворення 12 значень ξ_1 :

$$\eta = \sqrt{\frac{12}{n}} \left[\sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{n}{2} \right].$$

В ряді випадків обмежуються $n=6$ зверненнями до базового генератора псевдовипадкових чисел. Тоді для забезпечення потрібної наближеності до нормального розподілу необхідно здійснити виправлення згідно з формулою

$$\eta^* = \eta - \frac{1}{20n} [3\eta - \eta^3],$$

де η визначається за попередньою формулою.

Експоненційний розподіл. Експоненційний розподіл широко використовується при моделюванні складних систем. Найбільш поширені нижчезказані два способи імітації експоненційно розподілених псевдовипадкових величин з функцією щільності $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Перший із них на основі методу оберненої функції $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Оберненою по відношенню до F буде функція $e^{-\lambda x} = \xi - 1$. Тоді $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi)$. Другий спосіб на основі методу композиції. Задавшись величинами τ і θ , моделюють за допомогою базового генератора θ рівномірно розподілених величин ξ . Потім здійснюють перерахунок за формулою $x = \tau - \max(\xi_1, \dots, \xi_\theta)$. Зазвичай задають $\tau = 4$ і $\theta = 4$ та отримують послідовність чисел, розподілених по експоненті з точністю, достатньою для практики моделювання великих систем.

В ряді випадків цілочисельна випадкова величина характеризує заданий процес випадкових досліджень і тому може імітуватися шляхом прямого відтворення і аналізу цього процесу.

Дискретний розподіл. Багато дискретних розподілів пов'язані зі схемою незалежних досліджень і легко моделюються шляхом імітації послідовності подій $A_i = (\xi_i \leq p)$, $i = \overline{1, n}$.

Вибірка із *біноміального розподілу* отримується прямим підрахунком числа одиниць в n розрядах випадкового коду $\eta^* = 0, r_1^* r_2^* \dots r_n^*$.

Для імітації випадкових величин v , які підпорядковуються *геометричному розподілу* $p(v = y) = p(1 - p)^{y-1}$, $y = 1, 2, \dots$, визначають номер дослідження, яке принесло перший успіх (істинної події A_1).

При моделюванні складних систем досить поширене використання дискретних величин, розподілених за *законом Пуассона*. Зазвичай використовують алгоритм "розіграшу" псевдовипадкових величин, розподілених

за *законом Пуассона* з параметром λ : $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Послідовно моделюють значення ξ_i до тих пір, поки не буде виконуватися співвідношення

$\prod_{i=1}^k \xi_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{k+1} \xi_i$. Тоді величина $\pi = \sum \xi_i$ буде мати розподіл Пуассона з параметром λ .

"Розіграш" незалежних подій за вектором ймовірностей. Нехай задана ймовірність p появи події A . Шляхом звернення до генератора рівномірно розподілених чисел на інтервалі $(0; 1)$ (базового генератора) знаходять псевдовипадкове число ξ . Якщо $\xi \leq p$, то вважають що подія A відбулася; інакше – не відбулася.

Задані ймовірності p_1, \dots, p_k появи відповідно несумісних подій A_1, \dots, A_k . Необхідно визначити, яка із можливих подій A_i з'явилась. Розділяють інтервал $(0; 1)$ на k ділянок довжиною p_1, \dots, p_k . За допомогою базового генератора псевдовипадкових чисел формують ξ . Якщо ξ потрапила на i -ту ділянку ($i = \overline{1, k}$), то вважають, що з'явилась подія A_i .

"Розіграш" псевдовипадкових величин за довільним законом. Якщо x – дискретна величина і приймає значення x_1, \dots, x_k відповідно з ймовірностями появи p_1, \dots, p_k , то її "розігрують" аналогічно попередній задачі: $x = x_1$; $x = x_2$; ...; $x = x_k$. Якщо x – неперервна величина і має довільну функцію щільності ймовірності розподілу $f(x)$, то переходять до функції розподілу $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Звертаючись до базового генератора, зна-

ходять ξ і обчислюють $x = \Psi(\xi)$, де Ψ – функція, обернена до F . Якщо ж $F(x)$ важко представити аналітично, то її апроксимують або ступінчастою, або кусково-лінійною функцією і потім за значенням ξ знаходять обернене значення апроксимуючої функції.

В тому випадку, якщо необхідно визначити, яку сукупність значень

прийняла система випадкових величин x_1, \dots, x_k , діють так. Якщо x_1, \dots, x_k незалежні, то “розігруються” k разів значення x_i аналогічно попередньому способу. Якщо ж вони залежні, то “розігравши” одну із них, наприклад x_1 , необхідно “розіграти” другу x_2 згідно з її умовним розподілом з врахуванням вже відомого x_1 . Третю величину x_3 , необхідно “розігрувати” за двома умовами.

Моделювання марковських кіл. В своїй практичній роботі розробник складних систем часто використовує математичний апарат кіл Маркова.

Марковські процеси це спеціальний тип випадкових процесів, які характеризуються тим, що імовірнісна залежність між станами процесу поширюється лише на близькі відстані і не проявляється між достатньо далекими станами. Цю властивість називають *властивістю відсутності післядії*, так як для передбачення імовірнісного характеру процесу в майбутньому достатньо знати стан процесу в даний момент. Марковське коло є окремим випадком марковських процесів з кінцевою кількістю станів.

Розрізняють марковські кола з *дискретним і неперервним часом*. Для простого марковського кола характерний є те, що залежність між станами поширюється лише на два розташованих поряд стани. Із кожного стану S_i система може перейти в стан S_j із ймовірністю p_{ij} . Умовні ймовірності p_{ij} називаються *ймовірностями переходу* і означають ймовірність того, що система знаходиться в стані S_j на $(k+1)$ -му кроці при умові, що вона знаходиться в стані S_i на k -му кроці.

Кожній парі станів (S_i, S_j) відповідає своя умовна ймовірність p_{ij} . Якщо значення p_{ij} не залежать від часу ($p_{ij} = \text{const}$), то такі кола називаються *ординарними*. Для повного визначення марковських кіл необхідно, крім ймовірностей p_{ij} , задавати сукупність початкових ймовірностей $p_i(0)$, які означають ймовірність того, що в початковий момент часу система буде знаходитися в стані i .

Для встановлення залежностей, які пов'язують кожну пару станів (S_i, S_j) , складається матриця ймовірностей переходу:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix},$$

де перший індекс означає номер рядка, а другий – номер стовпця, причому $0 \leq p_{ij} \leq 1$ для усіх ij , а $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ для усіх i . Матриця P , яка має вказані вище властивості, називається *стохастичною* і з вектором почат-

кових ймовірностей $\{p_i(0)\}$ повністю визначає просте марковське коло. Для визначення ймовірності того, що система на $(k+1)$ -му кроці знаходиться в стані S_j , можна скористатися формулою ймовірності:

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^n p_i(k)p_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Техніка моделювання марковських кіл полягає в отриманні послідовності станів S_1, \dots, S_n у відповідності із заданою матрицею переходу P . В марковському колі результат кожного наступного дослідження залежить від результату попереднього. Для цього оберемо n відрізків $(0; 1)$, кожний із яких розіб'ємо на n ділянок у відповідності з матрицею переходу P . Розбиття кожного відрізка на ділянки виконується за рядками матриці: ділянки першого відрізка $(0; 1)$ дорівнюють елементам першого рядка p_{1j} ; ділянки другого відрізка дорівнюють елементам другого рядка p_{2j} , і т.д. Процедура отримання послідовності станів аналогічна другому виду одиничного жеребкування. При цьому перед тим, як визначити результат дослідження, необхідно обрати відповідний відрізок $(0; 1)$, а саме рядок матриці переходу P . Цей вибір відбувається на основі результату попереднього дослідження, тобто кожний даний стан стає попереднім; і номер стану вказує номер рядка, за яким ведеться "розіграш" наступного стану. Початковий вибір визначається сукупністю початкових ймовірностей $\{p_i(0)\}$.

3.2 Статистичні методи обробки результатів моделювання

3.2.1 Фіксація і накопичення статистики моделювання

При будь-якому дослідженні великої системи необхідний статистичний аналіз результатів експерименту. Зазвичай потрібно вилучити всю існуючу в експерименті інформацію і виявити обмеження у висновках, які базуються на статистиці моделювання. Задача формулюється так: вивчити випадкові явища, коли відсутня інформація про розподіл ймовірностей випадкових величин, що породжують ці явища, може бути отримана із експерименту на моделях.

Як правило, дослідники приймають ряд пропозицій: деяка випадкова величина розподілена за нормальним законом $N(\bar{a}, \sigma^2)$ і відоме її математичне сподівання m або дисперсія σ^2 ; дві випадкові величини x та y мають однакові m і σ^2 . Частіше за все такі посилення при імітаційному експерименті не виконуються. Для складних систем і великого числа реалізацій при моделюванні об'єм інформації про стан системи може бути настільки значним, що зберігання її в пам'яті ЕОМ викликає труднощі. Тому в одних випадках важливо організувати фіксацію і оброблення результатів моделювання таким чином, щоб оцінки для шуканих характеристик формувалися в ході моделювання без спеціального запам'ятовування усієї ін-

інформації про стан системи. В інших випадках моделювання ведеться на досить детальному рівні, займає багато часу роботи ЕОМ, і тому на оброблення результатів в циклі моделювання варіантів системи вже немає часу. Тому використовується двоступінчате оброблення: фіксація результатів в циклі імітації і наступне формування статистик по закінченню циклу імітації.

Накопичення і зберігання статистики моделювання застосовується в тих випадках, коли головним фактором експерименту є час моделювання варіантів складної системи на ЕОМ. Якщо місця в пам'яті ЕОМ достатньо, то результати досліджень компонується у вигляді масивів. При цьому виконується лише фіксація статистик моделювання без будь-якої обробки. В тих випадках, коли існують обмеження на розміри пам'яті ЕОМ, яка відводиться на масиви статистик, використовують буферизацію інформації у зовнішній пам'яті. Довготривале зберігання статистики в первинному вигляді зазвичай не практикується. До первинної обробки відносять такі операції, як сортування і об'єднання даних, представлення їх у вигляді, звичному для подальшої роботи, відбракування аномальних результатів моделювання. Вторинна обробка являє собою проведення безпосередніх обчислень характеристик, які цікавлять дослідника. Всім стохастичним моделям властива флуктуація результатів, тому для досягнення заданої точності результатів моделювання необхідно повторювати експеримент. Бажану точність моделювання можна задавати у вигляді долі стандартного відхилення, в процентах від величини середнього, в абсолютних значеннях.

Більшість імітаційних моделей використовуються для вивчення встановленої (рівноважної) умови, тобто для вивчення системи в умовах, що типові для неї і повторюються день у день. Проте майже усі моделі мають перехідні стани, і потрібен певний час для досягнення моделлю встановленого стану. Для того, щоб зменшити можливий вплив початкового періоду на статистику моделювання, використовуються такі прийоми: вибір довгих обчислювальних прогонів і зменшення долі даних перехідного періоду; виключення із розгляду початкового періоду прогону; вибір такої початкової умови моделювання, яка зменшує період розгону моделі.

Одним із способів зменшення перехідного процесу є вибір початкових умов на основі апріорної інформації. Другим способом збільшення точності моделювання є об'єм вибірки. Щоб досягти великих об'ємів вибірки в експерименті, що моделюється, застосовується зменшення інтервалу тактування за часом, повторення прогонів при моделюванні, продовження імітаційних експериментів. Тактування за часом є ділення періоду моделювання $T_{\text{мод}}$ на малі інтервали, в кінці яких фіксується статистика моделювання. Розмір вибірки може визначатися або апріорно, або в процесі імітації на основі отриманих за допомогою моделі результатів.

3.2.2 Визначення довірчих інтервалів

В ряді випадків дослідник задає довірчі інтервали для вихідних величин моделювання і після досягнення заданого довірчого інтервалу зупиняє прогон моделі. Наприклад, якщо дослідник має оцінки \bar{Y} істинного середнього μ і S_Y^2 істинної дисперсії σ^2 , отримані за вибіркою відклику Y об'єму N , то верхня і нижня межі визначаються таким чином, щоб ймовірність попадання в ці межі $\pm d$ істинних значень дорівнювала величині $1 - \alpha$.

При оцінюванні середнього \bar{Y} найбільш часто зустрічаються такі випадки.

1. Y має нормальний розподіл, μ відоме, об'єм вибірки малий ($N \leq 30$). Складається статистика $t = \sqrt{N-1}(\bar{Y} - \mu) / S_Y$, яка має розподіл Стюдента, і за таблицями знаходиться критичне її значення $t_{кр}$ при $N-1$ ступенях вільності і заданому рівні значимості α . Тоді довірчий інтервал можна записати у вигляді

$$\bar{Y} \pm d = \bar{Y} \pm t_{кр} S_Y / \sqrt{N-1},$$

а потрібний об'єм вибірки відклику буде дорівнювати

$$N \geq \left(\frac{t_{кр} S_Y}{d} \right)^2 + 1.$$

2. Y має нормальний розподіл, μ відоме, об'єм вибірки великий ($N \geq 30$). Визначається двостороння статистика $z_{\alpha/2}$ при заданому рівні значимості α . Тоді довірчий інтервал можна записати у вигляді

$$Y \pm d = Y \pm z_{\alpha/2} \frac{S_Y}{\sqrt{N}},$$

а потрібний об'єм вибірки відклику буде дорівнювати

$$N \geq \left(\frac{S_Y z_{\alpha/2}}{d} \right)^2.$$

3. Нормальність Y припустити не можна, але відомі μ і σ , об'єм вибірки великий ($N \geq 30$). Використовується нерівність Чебишева

$$P \left\{ \left| \bar{Y} - \mu \right| \geq k \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right\} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Тоді довірчий інтервал можна записати у вигляді

$$\bar{Y} \pm d = \bar{Y} \pm \frac{k\sigma}{\sqrt{N}} = \bar{Y} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N(1-\alpha)}},$$

а потрібний об'єм вибірки відклику буде дорівнювати

$$N \geq \frac{\sigma}{d^2(1-\alpha)}.$$

Наприклад, при $d = \sigma/4$ та ймовірності 0,95 об'єм вибірки $N \geq 320$.

При оцінюванні дисперсії задача пошуку оцінки S_Y^2 з достовірністю $1 - \alpha$ має вигляд

$$P\{1 - d|\sigma^2 \leq S_Y^2 \leq (1 + d)\sigma^2\} = 1 - \alpha,$$

і має сенс її розв'язувати лише при великому числі досліджень N . В цьому випадку зручніше використовувати χ^2 -статистику $(n-1)S^2/\sigma^2$ з $N-1$ ступенями вільності, яка дозволяє визначити довірчу ймовірність, що не залежить від σ^2 [19,20]. Оскільки N достатньо велике, то цю статистику апроксимують нормальним розподілом і отримують таку формулу для розрахунку потрібного об'єму вибірки відклику:

$$N \geq 1 + 2 \left(\frac{z_{\alpha/2}}{d} \right)^2.$$

При моделюванні великих систем є деяка надія, що одночасна дія великого числа мілких факторів може породжувати близькі до нормально-го розподіли відкликів цих моделей.

3.2.3 Правила автоматичної зупинки

Іноді дослідник попередньо організує багатопрогонні експерименти з використанням правил автоматичної зупинки. Існує два способи включення в модель правил зупинки:

- проводити прогони моделі в два етапи – спочатку виконати N прогонів і використати отриману вибірку відкликів для оцінювання необхідного об'єму вибірки N_1 , якщо $N_1 < N$, то закінчити експеримент, в іншому випадку продовжувати експерименти на моделі до отримання $N_1 - N$ вибіркових значень, яких не вистає;
- використати послідовну вибірку для визначення мінімальної величини N , за якою можна з достатньою точністю визначити середньоквадратичне відхилення S_Y , а потім порівняти величину $S_{Y'_{(1-\alpha, n-1)}}/\sqrt{N}$ із заданим рівнем α і зупиняти прогони в той момент, коли ця величина стає менше α .

3.2.4 Апроксимація результатів моделювання

В багатьох системах має місце функціональний зв'язок між двома і більше змінними, і бажано цей зв'язок виявити. Для визначення цього зв'язку використовується регресійний аналіз [23], який дає можливість побудувати рівняння, виходячи із вибірки. Зазвичай аналітик організує такі процеси: вимірювання; отримання вибірки; нанесення цих точок (x_i, y_i) на графік в прямокутній системі координат (кореляційне поле); вибір плавної кривої для отримання інформації про вид залежності; підгонку кривих за експериментальними точками. На рис. 3.3 представлені види кривих, які найбільш часто застосовуються, та відповідні їм апроксимуючі вирази. Можуть знайти застосування і криві багатьох інших видів.

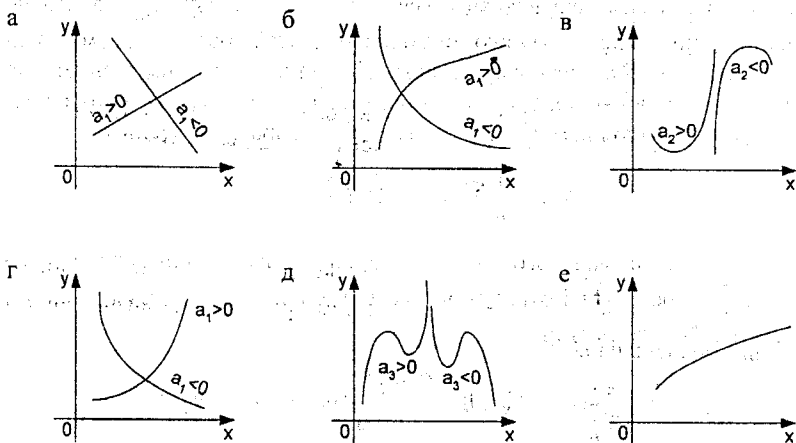


Рисунок 3.3 – Криві, які найбільш часто застосовуються, і відповідні апроксимуючі вирази:

а – пряма лінія: $y = a_0 + a_1 x$;

б – логарифмічна крива: $y = a_0 + a_1 \lg x$;

в – квадратична парабола: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$;

г – експонента: $\lg y = a_0 + a_1 x$;

д – кубічна парабола: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$;

е – кубічна логарифмічна крива: $\lg y = a_0 + a_1 \lg x$.

Іноді корисно досліджувати діаграму розкиду, перетворивши зміні. Для цього можна скористатися спеціальною напівологіфімічною сіткою з логарифмічним масштабом на одній або обох осях координат. При цьому, якщо, наприклад, діаграма розкиду в системі координат $x - \lg y$ виявляється лінійною, слід скористатися рівнянням експоненти. Аналогічно, якщо діаграма лінійна в масштабі $\lg x - \lg y$, слід взяти апроксимуючі рівняння логарифмічної кривої.

Задача полягає у тому, щоб за даними експериментальними точками провести криву, яка проходила б якомога ближче до істинної функціональної залежності $y=f(x)$. Найбільш часто для цієї мети використовується метод найменших квадратів [25]. Суть його така. Припустимо, що шукана залежність виражається функцією $y = f(x, A_1, \dots, A_m)$, де A_i - параметри. Значення цих параметрів визначається так, щоб y_i розташовувалися по обидві сторони кривої $y=f(x)$ якомога ближче до неї, тобто щоб сума квадратів відхилів $y=f(x)$ була найменшою. Це відповідає припущенню, що розкид точок відносно кривої $y=f(x)$ підпорядковується закону нормальному розподілу. Мірою цього розкиду є середній квадрат відхилень

$$\Delta S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - y(x_j))^2,$$

і вимога мінімального розкиду відповідає вимозі мінімального значення ΔS_n^2 . В результаті отримаємо систему рівнянь для визначення найкращих значень параметрів

$$\frac{\partial \Delta S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - f(x_j)), \quad \frac{\partial f(x_j)}{\partial A_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}; m < n.$$

Зазвичай форму залежності $y = f(x, A_1, \dots, A_m)$ задають або у вигляді полінома $f(x) = \sum_{i=1}^m A_i x^i$, $m < n - 1$, або у вигляді будь-якої іншої системи лінійно незалежних функцій:

$$f(x) = A_1 \varphi_1(x) + \dots + A_m \varphi_m(x), \quad m < n,$$

що достатньо добре відображає загальний хід залежності $y=f(x)$, який можна встановити за розподілом точок (x_i, y_i) . У випадку вибору $f(x, A_1, \dots, A_m)$ у вигляді поліному маємо систему рівнянь:

$$\sum_{k=1}^m A_k \sum_{j=1}^n x_j^{k+1} = \sum_{j=1}^n y_j x_j^i, \quad i = \overline{0, m}, \quad m + 1 < n.$$

Якщо ж використовується розкладання на лінійно незалежні функції, то маємо систему рівнянь:

$$\sum_{k=1}^m A_k \sum_{j=1}^n \varphi_k(x_j) \varphi_i(x_j) = \sum_{j=1}^n y_j \varphi_i(x_j), \quad i = \overline{0, m}, \quad m < n.$$

Розв'язання цих систем лінійних рівнянь дозволяє однозначно визначити коефіцієнти A_i розкладу $y = \varphi(x)$.

Розглянутий вище спосіб найменших квадратів можна узагальнити і на деякі випадки нелінійних залежностей $f(x, A_1, \dots, A_m)$ від параметрів.

Наприклад, для $y = \alpha e^{-\gamma x}$ доцільно шукати мінімум відхилень логарифмів цих самих функцій

$$\sum_{j=1}^n \left[\ln y_j - \ln \left(\alpha \cdot e^{-\gamma x_j} \right) \right]^2,$$

що приводить до рівнянь:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n (\ln y_j - \ln \alpha + \gamma x_j) = 0;$$

$$\sum_{j=1}^n (\ln y_j - \ln \alpha + \gamma x_j) x_j = 0.$$

У випадку лінійної залежності $y = a_0 + a_1 x$ обчислення коефіцієнтів за методом найменших квадратів виконується за такими формулами:

$$a_0 = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2};$$

$$a_1 = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}.$$

3.2.5 Ідентифікація закону розподілу за гістограмою

При моделюванні великих систем, як правило, фіксується багато статистичних даних, і зазвичай метою імітації являється отримання аналітичного виду розподілу деякої статистики за допомогою моделі. Тому важливо вміти якісно вирішувати задачу ідентифікації закону розподілу за існуючою гістограмою. Гістограма характеризується двома масивами: інтервалів групування ("масштабів") $\{\hat{x}_i\}_1^k$ і частоти попадання в інтервали групування $\{\hat{y}_i\}_1^k$ (k – число інтервалів групування).

Існує декілька способів формування гістограм. При формуванні за методом масштабів масив $\{\hat{x}_i\}_1^k$ відомий, вибірка x_1, \dots, x_n задана. Для кожного чергового x_j із $\{\hat{x}_i\}$, $j = \overline{1, n}$, перевіряється виконання умови: якщо $\hat{x}_{i-1} < x_j < \hat{x}_i$, то $v_i := v_i + 1$, $i = \overline{1, k}$, інакше $i := i + 1$, потім $j := j + 1$;

при $j = n$ формування масиву частот завершено. По закінченню відрахунку частот попадання x_i в інтервали групування обчислюються відповідні частоти $p_i^* = v_i/n$.

Другим способом є формування гістограми за *методом рівних інтервалів*. Переглядається вибірка x_1, \dots, x_n і знаходяться x_{\min} та x_{\max} . Визначається довжина інтервалу $\Delta l = (x_{\max} - x_{\min})/k$. Потім формується масив інтервалів групування: $\hat{x}_1 = x_{\min} + \Delta l$; $\hat{x}_i = \hat{x}_{i-1} + \Delta l$, $i = 2, \dots, k$. Далі формування масиву частот $\{v_i\}$ здійснюється за методом масштабів.

Третій спосіб передбачає формування гістограми за *методом рівних частот*. Задаються числом інтервалів k . Об'єм вибірки n відомий. Обчислюється величина $\delta = [n/k]$. За значеннями величини x_j упорядковується вибірка $\{x_j\}_1^n$. Вибірka ділиться на k інтервалів, в кожний із яких включається не менше δ значень. Рівні значення включаються в один інтервал (зліва). Визначаються значення інтервалів групування \hat{x}_i , які дорівнюють останньому значенню \hat{x}_i в i -му інтервалі. Масив частот складається, як правило, із однакових значень $v_i \approx \sigma$.

Суть комбінованого методу формування гістограм така. Спочатку формується мала вибірка об'ємом n_1 і методом рівних частот або рівних інтервалів формується масив інтервалів групування $\{\hat{x}_j\}_1^k$. Потім формування гістограми продовжується за методом масштабів.

Якщо деякі із елементів системи поведуть себе стохастично, то в процесі моделювання виникає проблема перевірки сумісності експериментальних даних з деяким теоретичним розподілом. Виникає питання: чи відповідає частота вибірових значень, що спостерігаються, тій частоті, з якою вони повинні були б з'явитися при деякому ймовірнісному розподілі, який відповідає певному теоретичному закону? Якщо частота значень, що спостерігаються, вимірюваної величини близька до передбаченої теорією, то в подальшому модель будують на основі теоретичного розподілу гаусівського типу, оскільки такі розподіли моделюються достатньо. Для мульти-модальних розподілів при побудові доцільно користуватися безпосередньо гістограмами. Як правило дослідник при пошуку виду розподілу керується такою методикою:

1. Виходячи із апіорних міркувань, задаються деяким розподілом, яким можна задовільно апроксимувати дану емпіричну функцію щільності розподілу.

2. Визначаються моменти емпіричного розподілу

$$\mu_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^l, \quad l \leq 4.$$

3. Емпіричні моменти прирівнюються до моментів обраного розподілу, які виражені через параметри розподілу:

4. Отримані рівняння вирішуються відносно незалежних параметрів теоретичного розподілу і знаходяться шукані розподіли:

5. Обчислюються частоти попадання, згідно з апроксимуючим розподілом, в інтервали відповідно до значень масиву: масштабів емпіричної функції щільності розподілу. Практично, як би вдало не було виражено емпіричний розподіл, між ним і теоретичним розподілом неминучі деякі розходження, які можна пояснити або випадковими обставинами, пов'язаними з обмеженим числом спостережень, або тим, що обрана крива розподілу не відповідає даному емпіричному розподілу. Для кількісної оцінки узгодженості емпіричного і теоретичного розподілів використовуються критерії узгодження, які дають гарні результати у випадку групованих вибірок, в тому числі критерії узгодження Пірсона, Колмогорова, правило "трьох сігм" Романовського [3,10,11].

6. Задаються деяким рівнем значимості β і за критерієм узгодження Пірсона χ^2 перевіряють відповідність гіпотетичного розподілу емпіричному. Характер критерію χ^2 вимагає, щоб частоти, які спостерігаються, не були малими. Якщо ж частоти малі, особливо на хвостах розподілів, то необхідно об'єднати декілька інтервалів. Після об'єднання інтервалів знову обчислюються теоретичні частоти та істинні значення χ_0^2 . Граничне значення χ_β^2 знаходять за таблицями. Якщо $\chi_0^2 \leq \chi_\beta^2$, то вважають розходження між емпіричним і теоретичним розподілами випадковим. Гіпотеза H_0 про збігання розподілів узгоджується з експериментальними даними.

7. Якщо гіпотеза, яка перевіряється, відхиляється, то обирається в якості гіпотетичного інший розподіл, і процес підгонки починається спочатку. Подібним чином розглядається весь клас розподілів гаусівського типу.

3.3 Аналіз результатів моделювання

3.3.1 Оцінювання точності імітаційного експерименту

Дослідник повинен вміти оцінювати точність проведення імітаційного експерименту і обчислювати довірчі інтервали змінної відклику імітаційної моделі, зменшувати число факторів моделі і обирати інтервали їх зміни, знаходити джерела помилок моделювання, виключати із розгляду значення, які різко відхиляються, вибирати систему координат при інтерполяції і аналізі отриманих регресійних рівнянь. Експерименти з моделями складних систем закінчуються аналізом результатів їх інтерполяцій для споживача. Перш за все необхідно оцінити точність проведення модельного експерименту. Розрізняються три типи помилок: *грубі, систематичні, випадкові*. Наявність випадкових помилок визначається так: вимірюванням однієї і тієї ж

величини різними методами; використанням еталонних значень і калібровою моделі; обчисленням поправок для виключення помилок.

Існують три джерела появи систематичних помилок: *помилки формулювання*, обумовлені помилковою або неповною, або недостатньо детальною моделлю; *помилки рішення*, обумовлені некоректним або надто спрощеним методом рішення моделі; *помилки задання параметрів*, обумовлені використанням невірних значень параметрів.

Якщо точність моделі незадовільна, то модель повинна бути змінена, а процес перевірки повторений. Ця операція називається *калібруванням*. Мета калібрування полягає у ліквідації або зменшенні неточностей формулювання. Однак точна модель може давати неправильні результати навіть в процесі калібрування, якщо метод рішення або значення параметрів моделі неправильні. Модель не можна відкалібрувати для усіх експериментальних умов, в яких вона повинна використовуватися. Це практично неможливо через велику кількість таких умов та їх непередбачуваність. Якщо була б подолана вичерпна калібровка з даними вимірювань, модель виявилася б непотрібною, оскільки більше не було б потрібно передбачати поведінку системи. Тому модель використовується в умовах, в яких її точність не була перевірена. Таким чином, калібровка зазвичай обмежена декількома комбінаціями параметрів моделі. Якщо система існує і її можна виміряти, то ці комбінації слід вибирати так, щоб експерименти повністю виконувалися і по можливості були прості. Модель під час калібрування повинна керуватися вхідними змінними, які представляють вибрані комбінації системних параметрів і параметрів вхідних впливів на модель. Зачасту можна до визначити параметри моделі на основі отриманих значень відгуку з використанням фундаментальних характеристик теорії.

Випадкові помилки не можна усунути, але їх можна оцінити. Оцінювання базується на передумовах, що середні значення і дисперсії помилок нормально розподілені. Тому для оцінювання точності моделювання необхідне знаходження дисперсії σ^2 відклику і потім перерахування значень ймовірнісної похибки ρ , середньої абсолютної похибки ν і міри точності R за формулою: $\rho = 0,67 \cdot \sigma$; $\nu = 0,80 \cdot \sigma$; $R = 0,71/\sigma$.

Якщо відклик є функцією параметрів моделі x_i і відома точність представлення параметрів моделі S_{x_i} , то в ряді випадків дослідник може розрахувати точність результату. Простіше за все обчислюється точність результату R , якщо він є добутком факторів x_j або часткою від їх ділення. Показник точності в процентах S_R/R визначається в цьому випадку із виразу

$$\frac{S_R^2}{R^2} = \sum_j \left(\frac{S_{x_j}}{x_{cj}} \right)^2, \quad R = \prod_j x_j,$$

де S_{x_j} - середньоквадратичне відхилення фактора x_j ; x_{cj} - точне значення фактора x_j ; R - точне значення відклику, тобто квадрат відносної помилки добутку або частки дорівнює сумі квадратів відносних помилок окремих вимірювань.

У випадку довільної функції $R = f(x_1, \dots, x_k)$, яка має частинні добутки, дисперсія результату дорівнює сумі дисперсій факторів, які нормовані квадратами частинних добутків:

$$S_R^2 = \sum \left(\frac{\partial R}{\partial x_j} \right)^2 S_{x_j}^2.$$

Таким чином, дослідник повинен впевнитись у тому, що розподіл помилок моделювання являється нормальним або хоча б симетричним, оцінити цю помилку за кожним фактором і визначити вираз для помилки відклику, якщо відома функціональна залежність результату від параметрів моделювання. Отримані вирази дозволяють обирати такі значення факторів, які мінімізують невизначеність результату моделювання.

В багатьох експериментах вдається так організувати моделювання, що залишається лише невизначеність, повністю обумовлена похибками округлення і похибками графічних побудов при інтерпретації результатів моделювання. Немає сенсу прагнути зменшити похибку або невизначеність результату моделювання значно нижче цієї основної похибки, якщо дослідник не зможе побудувати більш точні графіки.

3.3.2 Зменшення числа параметрів моделі

Оскільки число параметрів моделі суттєво впливає на тривалість імітаційного експерименту, то необхідно прагнути до зменшення кількості параметрів. Для цього можна звернутися до *методу випадкового балансу* [6]. Зазвичай при моделюванні складних систем дослідники будують перенасичені плани, в яких число досліджень менше за число параметрів k , які початково були включені в розгляд. Постулюється таке: якщо ефекти, які відповідають за процес, розташувати в порядку спадання внесеного ними вкладу у відгук, то отримаємо діаграму затухання, наприклад експоненційного типу. Дослідник наперед знає як рангуються параметри. Його задача полягає у тому, щоб відтворити це рангування за допомогою експерименту відсіювання. На рис.3.4 представлений приблизний вигляд діаграми рангування вкладів параметрів в сумарну дисперсію відгуку моделі. Ефекти в правих частинах рангування відносяться до шумового поля, на фоні якого потрібно виділити значимі ефекти, які потрапили в ліву частину діаграми.

Нехай вивчаються k ефектів, які створюються лінійними членами і парними взаємозв'язками. Припустимо, що деякі $x_i = x_j x_l$, $i \in$ - похибка

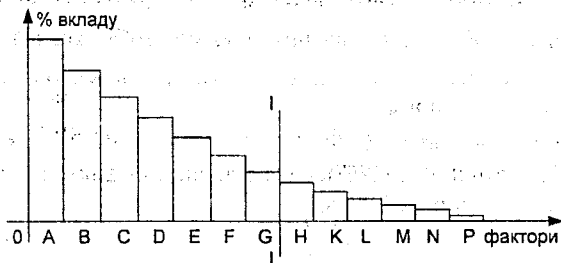


Рисунок 3.4 – Діаграма рангування вкладів факторів в сумарну дисперсію досліджу

досліджу. Тоді можна записати такі співвідношення:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{k-1} x_{k-1} + \beta'_1 z_1 + \dots + \beta'_I z_I + \epsilon = \\ = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{k-1} x_{k-1} + a,$$

де $a = \beta'_1 z_1 + \dots + \beta'_I z_I + \epsilon$; $\sigma^2(a) = (\beta'_1)^2 \sigma^2(z_1) + \dots + (\beta'_I)^2 \sigma^2(z_I) + \sigma^2(\epsilon)$.

Із загального числа k параметрів виділено $k - I$ значимих параметрів, а інші I параметрів віднесені до шумового поля. Потім оцінюється остаточна дисперсія $\sigma^2(a)$. Так добиваються незначимості $\sigma^2(a)$, що дозволяє визначити граничну лінію II (див.рис.3.4) для знаходження значимих параметрів. Далі змінні варіюють на двох рівнях. Матрицю планування будують за допомогою таблиці випадкових чисел для розподілу рівнів по стовпцях. Таким способом отримується випадково збалансована матриця (метод випадкового балансу).

Іноді можна скористатися випадковим змішуванням реплік [6]. Для обмеження перебору ефектів при побудові матриці, яка включає усі домінуючі ефекти, використовуються діаграми розсіювання. Приклад побудови діаграми розсіювання для п'яти параметрів представлений на рис.3.5. По осі ординат відкладаються значення відгуку моделі при верхньому та нижньому рівнях відповідно параметрів A, B, C, D, E , по осі абсцис – значення параметрів на верхньому (+) і нижньому (-) рівнях. Далі беруться за аналіз діаграми розсіювання. Для цієї цілі використовують візуальний прийом, який дозволяє за діаграмою розсіювання для лінійних ефектів виділити ті параметри, які підлягають дослідженню. При великому значенні деякого ефекту взаємодії повинні з'явитися точки як на рівні $+xz$, так і на рівні $-xz$. В першому випадку обидві незалежні змінні повинні мати однакові знаки, в другому випадку – різні знаки. Отже, потрібно розглядати лише взаємодії таких незалежних змінних, які мають точки, що виділяються, як на однакових, так і на різних рівнях. Остання умова виконується, коли верхні або нижні частини діаграми розсіювання для змінних x і z утворюють дзеркальні відображення. В результаті виділяються точки на обох рівнях. Навіть

якщо кожний із окремих ефектів незначний, взяті разом вони дають значний ефект. Процес корегування продовжується до тих пір, поки розсіювання результатів спостережень не стане порівняним із похибкою досліду.

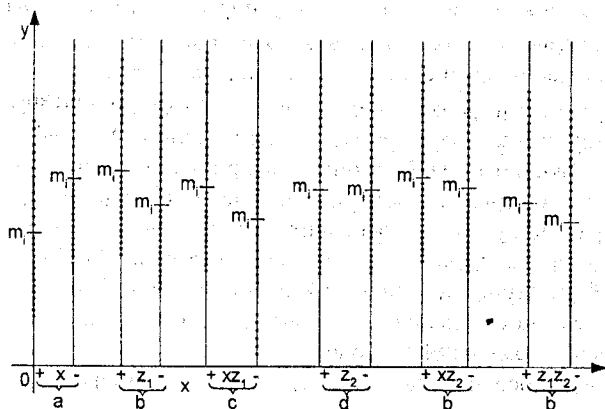


Рисунок 3.5 – Приклад побудови діаграми розсіювання:

- a – суттєве відхилення медіан;
- b – несуттєве;
- c – дзеркальне відображення;
- d – однакове відхилення

Для лінійних ефектів порівнюють медіани відгуків. При сильному відхиленні медіан при переході із рівня $+1$ на рівень -1 можна виділити значимі лінійні ефекти. Ефекти, визнані умовно значимими, включають в матрицю незалежних змінних і потім проводять звичайний регресійний аналіз. Потім ті ефекти, значимість яких підтверджується регресійним аналізом, виключають із розгляду.

Корегування результатів вимірювань проводять таким чином. Якщо деякий ефект A виявився значимим, то віднімають пов'язану з ним величину із результатів тих дослідів, в яких відповідний параметр знаходився на верхньому рівні. Після виключення першої групи значимих ефектів знову будують діаграми розсіювання, і процедура випадкового балансу повторюється по-новому.

Іншим методом зменшення кількості параметрів моделювання є метод використання безрозмірних комбінацій параметрів моделі [6]. Суть його така. Усі дії дослідник виконує в декілька етапів. На першому етапі обираються лише ті змінні, які чинять вплив на систему. При цьому необхідно розглядати також різні коефіцієнти і фізичні константи, якщо вони грають важливу роль. На другому етапі обирається система основних розмірностей, через яку можна виразити одиницю усіх обраних змінних. На третьому етапі записуються розмірності обраних незалежних змінних і

складаються безрозмірні комбінації. Розв'язок буде вірним, якщо кожна комбінація являється безрозмірною величиною, число комбінацій не менше передбачуваного π -теоремию і кожна змінна зустрічається в комбінаціях хоча б один раз. Нагадаємо формулювання π -теореми [6]: якщо існує однозначне співвідношення $\varphi = (A_1, \dots, A_n) = 0$ між n фізичними величинами, для опису яких використовується k основних одиниць вимірювання, то існує також співвідношення $\varphi = (\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = 0$ між $n-k$ безрозмірними комбінаціями, складеними із цих фізичних величин. На четвертому етапі отримані безрозмірні комбінації перевіряються з точки зору їх прийнятності і фізичного змісту. Якщо отримані комбінації неприйнятні з точки зору їх інтерпретації, то можна: отримати інше рішення, щоб знайти найкращий вибір комбінацій; обрати іншу систему основних розмірностей і проробити роботу спочатку; перевірити правильність вибору параметрів моделі. На п'ятому етапі, коли буде отриманий достатній набір безрозмірних комбінацій, можна приступати за складання плану імітаційного експерименту і вимірювання значень цих комбінацій на моделі.

Розглянемо два способи побудови безрозмірних комбінацій, які найбільше використовуються: складання рівнянь для показників степенів у основних одиниць вимірювання і послідовне виключення параметрів. Суть обох способів проілюструємо на прикладах. Нехай в якості основних розмірностей обрані: маса M , час T і довжина L . Задана деяка функція

$$\Delta P = \varphi(H^a, D^b, V^c, \mu^d, \rho^l, e^f, q^g).$$

Нехай формула розмірності має такий вигляд:

$$L = \varphi(L^a, L^b, (L/T)^c, (M/LT)^d, (M/L^3)^e, L^f, (L/T^2)^g).$$

Щоб дане рівняння було однорідним, повинні виконуватися певні співвідношення між показниками степенів: для M $d+l=0$; для T $e-d-2g=0$; для L $a+b+c-d-3l+f+g=1$. Маємо рівняння, в яких сім невідомих. Спростимо їх, виключаючи e, c, b : $e=-d$; $c=-d-2g$; $b=1-a-d+g-f$. Тоді $\varphi(H^a, D^{1-a-d+g-f}, V^{-d-2g}, \mu^d, \rho^{-d}, e^f, q^g) = \Delta P$.

Об'єднавши члени з однаковими показниками степеня, можемо скласти безрозмірні комбінації:

$$\varphi\left[(H/D)^a, (VD\rho/\mu)^{-d}, (l/D)^f, (Dq/V^2)^g\right] = \Delta P/D.$$

Так, вісім параметрів задачі дають п'ять безрозмірних комбінацій.

Нехай задана інша функція:

$$\Delta P = f(Q, N, \rho, D).$$

Рівняння розмірностей в тій самій системі має вигляд

$$M/LT^3 = f(L^3/T, 1/T, M/L^3, L).$$

Будемо використовувати метод послідовного виключення параметрів. Виключимо M , використовуючи параметр ρ :

$$\Delta P / \rho = f(Q, N, D).$$

Складемо нове рівняння розмірності:

$$L^2 / T^2 = f(L^3 / T, 1/T, L).$$

Виключимо T , використовуючи параметр N :

$$\Delta P / \rho N^2 = f(Q/N, D).$$

Рівняння розмірності має вигляд

$$L^2 = f(L^3, L).$$

Використовуючи параметр D , виключимо L :

$$\frac{\Delta P}{N^2 \rho D^2} = f\left(\frac{Q}{ND^3}\right).$$

В результаті отримаємо безрозмірну функцію $f(Q/(ND^3))$. Застосування аналізу досить суттєво при організації експериментів. Зменшення кількості параметрів залежить від числа обраних основних розмірностей. Аналіз розмірностей не дозволяє визначити тип функції, яка пов'язує одну безрозмірну комбінацію з іншою. В багатьох імітаційних експериментах цю функцію ϕ можна представити як степеневий ряд з двома основними членами. В більшості випадків для знаходження узгоджених сталих використовується група числових значень. На графік наноситься деяка сукупність експериментальних точок, по яких будується найкраща крива. Потім ця крива використовується для отримання узгоджених сталих і визначення необхідних показників степеня. Причому безрозмірні комбінації необхідно обирати так, щоб усі помилки були сконцентровані в одній із змінних.

3.3.3 Визначення інтервалів зміни параметрів

В будь-якому імітаційному експерименті важливо визначити необхідні інтервали зміни параметрів моделі. До початку імітації слід знайти граничні значення статистик моделювання. Існують два основних критерії для вибору інтервалів зміни параметрів моделі: відносна точність отримання статистик на різних ділянках області параметрів моделі і характер функції відклику. Якщо аналіз помилок показує, що на деякій ділянці процесу моделювання дані викликають сумніви, то збільшується частота зняття даних під час імітації. Необхідно прагнути до того, щоб в будь-якій частині кривої функції відклику мати одну і ту ж точність.

Виникає проблема, які із можливих планів експериментів необхідно використовувати в кожному конкретному випадку. Якщо відомо, що експеримент невідтворюваний або має особливості, які можна виявити лише

При отриманні даних в регулярній послідовності, то використовують класичний послідовний план: усі параметри моделі вважають сталими, а один параметр змінюється в усьому інтервалі значень; вибір інтервалів між сусідніми значеннями ведеться методом балансу точностей, потім аналогічно змінюється другий параметр. Якщо відклик є функцію двох типів від вхідних параметрів моделі: $R = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$; $R = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, то використовуються факторні експерименти. Основна перевага факторного плану полягає у тому, що для кожної кривої використовується уся сукупність даних і тому точність результатів максимальна.

3.3.4 Визначення джерел помилок

При аналізі результатів дослідник повинен запланувати одну або декілька перевірок точності і прийнятності результатів моделювання. Для визначення джерел помилок часто використовується рівняння балансу. Суть методики використання рівнянь балансу розглянемо на такому прикладі. В модельному експерименті вимірюються змінні A , B , X , Y , які пов'язані між собою рівнянням збереження $A \cdot B = X \cdot Y$.

Нехай $A = \text{const}$, а інші змінні змінились таким чином: $m \cdot X$; $n \cdot Y$; $m \cdot n \cdot B$. Рівняння балансу при цих умовах має вигляд $A \cdot m \cdot n \cdot B = m \cdot X \cdot n \cdot Y$. Використовується таке правило: якщо одна із змінних в рівнянні балансу має систематичну похибку типу суми ($A + f(A)$), то цю змінну можна виявити, розглядаючи по чергово випадки з фіксованим значенням кожної змінної. Змінна, для якої при фіксованому її значенні відносна похибка не змінюється, містить систематичну похибку. Єдиним винятком є випадок, коли змінною, яка містить похибку, являється $(A + kA)$. В цьому випадку похибку неможливо виявити за допомогою даного методу.

Часто використовується перевірка похибок шляхом екстраполяції графіків. Дослідник будує графік залежності $y = f(x)$. Система координат або сама функція обираються такими, щоб графік був лінійним або хоча б не мав великої кривизни поблизу початку координат. Звичайно застосовуються лінійні, напівлогарифмічні і логарифмічні шкали, які дозволяють побудувати пряму. Якщо в області малих значень має місце різке відхилення від лінійного вигляду, то екстраполяцію проводити не можна. Тому дослідник повинен слідкувати за цією ситуацією. Іноді йому відомо, що один із лінійних графіків відклику моделі мав систематичну похибку. Необхідно визначити, який із графіків правильний, і оцінити величину систематичної похибки. Наприклад, кожний набір даних характеризується майже однако-вим показником степеня, але графіки не збігаються. Відомо, що в області малих значень залежність проходить через початок координат. Для ідентифікації систематичної похибки будують лінійний графік в області малих значень. Той графік, який не задовольняє умову проходження через початок координат, має систематичну похибку, а значення ординати при $x=0$ і дає величину цієї похибки.

3.3.5 Виключення значень, які різко відхиляються

В ряді випадків необхідно вміти обґрунтовано виключити значення, які різко відхиляються від середнього. Для цієї мети використовується аналіз графіків. На рис.3.6 показаний приклад залежності $y=f(x)$, яка містить декілька значень, що різко відхиляються від середніх. Які ж із них можна вважати грубими помилками досліду і виключити із подальшого розгляду? Досить правдоподібно, що точка *A* являється сумнівною, оскільки і для менших, і для більших значень x ординати близькі до прямої лінії.

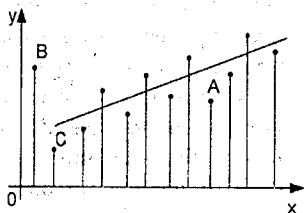


Рисунок.3.6 – Приклад залежності $y=f(x)$, яка містить значення, що різко відхиляються

Таким чином, можна сформулювати правило відбракування: *точки, які відхиляються, слід виключити, користуючись статистичними критеріями, і лише в тому випадку, якщо вони знаходяться в середній частині графіка.*

3.3.6 Вибір системи координат

В експериментальній роботі часто виникає і обернена ситуація: є дані, які в певній системі координат можуть бути представлені у вигляді прямої, і потрібно знайти її рівняння. Тоді основною задачею являється вибір і перетворення системи координат таким чином, щоб повний набір даних давав по можливості пряму лінію. Для цієї мети намагаються побудувати графік логарифмічних координат ($y = kx^a$ має вигляд $\log y = \log k + a \log x$) або напівлогарифмічних ($\log y = \log k + ax$; шкала y – логарифмічна, x – лінійна). Іноді гіперболічну функцію $y = x/(a + bx)$ можна представити у вигляді прямої, побудувавши в лінійних координатах залежність x/y від x або залежність $1/y$ від $1/x$.

Графіки дозволяють представити дані в наглядній формі при мінімальній обробці матеріалу. Як засіб видачі максимуму інформації при мінімальному просторі графіки незамінні. Розглянемо графічний спосіб побудови прямих методом найменших квадратів (рис.3.7). З'єднаємо точки 1 і 2. Рухаючись в сторону точки 2, пройдемо вздовж цього відрізка $2/3$ відстані і зробимо позначку. З'єднаємо отриману позначку з точкою 3. Рухаючись в сторону точки 3, знову пройдемо відстань, яка відповідає $2/3$ цього відрізка,

Точка *B* може бути помилковою, але, можливо, вона являється найбільш важливою і представляє реальний фізичний ефект (перехід системи в область інших станів). Точку *C* також слід зберегти до тих пір, поки не будуть отримані додаткові точки в області малих значень.

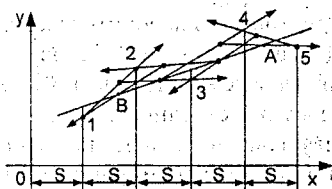


Рисунок 3.7 – Приклад використання графічного способу побудови прямої методом найменших квадратів

мій, і з'єднаємо дві точки лінією. Недоліки цього методу: лише змінна y може мати помилку; усі дані повинні мати однакову точність вимірювання; можна будувати лише лінійний графік. Перевага його полягає в оперативності отримання графіка.

При графічному аналізі даних моделювання можуть мати місце такі види невизначеності: мінімальна поділлка шкали графічного паперу повинна відповідати приблизно ймовірнісній похибці вимірюваної величини, якщо ж ймовірнісна похибка дорівнює десяти малим поділлкам, то може бути настільки великий розкид даних, що не вдасться вловити основний характер кривої або встановити її зміни; якщо ймовірнісна похибка дорівнює $0,1$ найменшої поділлки, то усі випадкові відхилення згладяться і не можна буде отримати який-небудь показник точності.

Необхідно притримуватися трьох простих правил, які дозволяють отримати графіки з мінімальною невизначеністю:

- ймовірнісна похибка в даній точці повинна бути приблизно рівною половині найменшої поділлки шкали графіка;
- по можливості для любых даних слід намагатися будувати лінійний графік;
- довжина шкали повинна обиратися із умови максимального використання формату графічного паперу.

3.3.7 Аналіз функції відклику

Отримавши регресійну модель поведінки відклику в залежності від зміни параметрів моделі, можна приступити до її аналізу. Коефіцієнти поліному являються частинними похідними за відповідними змінними. Геометричні коефіцієнти можна представити тангенсами кутів нахилу гіперплощини до відповідної осі. Великий за абсолютною величиною коефіцієнт відповідає великому куту нахилу і, відповідно, більш суттєвій зміні параметра оптимізації при зміні даного фактора.

і зробимо нову позначку.

Повторюємо цю процедуру до тих пір, поки не буде отримана остання точка. Вона лежить на найкращій прямій, тобто на прямій найменших квадратів. Тепер починаємо побудову з іншого кінця аналогічним чином і повторимо весь процес, рухаючись в протилежному напрямку. Знайдемо другу точку, яка лежить на найкращій пря-

Аналіз рівняння регресії здійснюється в три етапи. На першому етапі встановлюється, в якій мірі кожний із факторів впливає на параметр оптимізації. Величини коефіцієнтів регресії представляють кількісну міру цього впливу: чим більше коефіцієнт, тим сильніший вплив фактора. Про характер цього впливу говорять знаки коефіцієнтів: якщо знак плюс – з ростом фактора росте величина відклику; якщо знак мінус – відклик спадає. На другому етапі сукупність факторів розташовується в ряд за силою їх впливу на відклик. Фактори, в яких коефіцієнти незначні, не інтерпретуються. Зазвичай користуються правилом: якщо коефіцієнт регресії від'ємний, то для збільшення параметра оптимізації потрібно зменшити значення фактора; якщо він додатний, то необхідно збільшити значення фактора. При мінімізації параметра оптимізації можна змінити знаки коефіцієнтів на протилежні (крім b_0) і потім діяти так само, як і у випадку максимізації параметра оптимізації. На третьому етапі проводиться оцінювання ефектів взаємодії факторів. Необхідно дотримуватися такого правила: якщо ефект взаємодії має позитивний знак, то для збільшення параметра оптимізації потрібне одночасне збільшення або зменшення значень факторів. Для зменшення параметра оптимізації фактори повинні одночасно змінюватися в різних напрямках. Якщо ж ефект взаємодії має від'ємний знак, то для збільшення параметра оптимізації фактори повинні одночасно змінюватися в різних напрямках. Для зменшення параметра оптимізації потрібне одночасне зменшення або збільшення факторів. В кожному випадку існує два варіанти. Якому із варіантів надати перевагу? Перш за все потрібно врахувати знаки лінійних ефектів відповідних факторів. Якщо ефект взаємодії має знак плюс і відповідні лінійні ефекти від'ємні, то вибір однозначний (-1;-1); якщо ж знаки різні, то приходится враховувати численні значення b_j і нехтувати малим ефектом.

Контрольні питання

1. Поясніть сутність методу статистичних досліджень на практиці.
2. Сформулюйте центральну граничну теорему теорії ймовірності.
3. Як оцінити ймовірність відхилення ϵ істинної ймовірності p від частоти подій p^* , якщо відомо число N реалізацій?
4. Як визначити число дослідів N , необхідних для забезпечення заданої точності ϵ при відомій ймовірності β відхилення частоти подій p^* від істинної ймовірності p ?
5. Як визначити число дослідів N , необхідних для того, щоб із заданою ймовірністю β очікувати, що випадкова величина x відхилиться від математичного сподівання m_x на величину, яка не перевищує ϵ ?
6. Розкрийте суть конгруентного методу генерації псевдовипадкових чисел на ЕОМ.

7. Які особливості методу серединних квадратів для генерації псевдовипадкових чисел?
8. В чому суть алгоритму імітування нормально розподілених величин?
9. Назвіть способи імітації експоненційно розподілених псевдовипадкових величин.
10. Як імітуються на ЕОМ біноміальний розподіл, геометричний розподіл, розподіл Пуассона?
11. Задано ймовірності p_1, \dots, p_k появи відповідно несумісних подій A_1, \dots, A_k . Визначити за допомогою генератора рівномірно розподілених чисел на $(0; 1)$, яка із можливих подій A_i з'явилась?
12. Як відбувається „розіграш” псевдовипадкових величин за довільним законом розподілу?
13. Продемонструйте на прикладі техніку моделювання марковських кіл.
14. В яких випадках використовують фіксацію і оброблення результатів моделювання з накопиченням статистики?
15. Які існують способи зменшення перехідного періоду для досягнення моделлю встановленого стану на статистику моделювання?
16. Визначте довірчий інтервал і потрібний об'єм N вибірки, коли відомо, що оцінка \bar{Y} істинного середнього має нормальний розподіл, відоме істинне середнє μ , малий об'єм вибірки (≤ 30).
17. Визначте довірчий інтервал і потрібний об'єм N вибірки, коли відомо, що оцінка \bar{Y} істинного середнього має нормальний розподіл, відоме істинне середнє μ , великий об'єм вибірки (≥ 30).
18. Визначте довірчий інтервал і потрібний об'єм N вибірки, коли нормальність оцінки \bar{Y} істинного середнього припустити не можна, але відоме істинне середнє μ і великий об'єм вибірки (≥ 30).
19. Як визначити оцінку S_y^2 істинної дисперсії σ^2 при великому числі N досліджень?
20. Які є способи включення в модель правил зупинки?
21. Розкрийте геометричну сутність методу найменших квадратів для апроксимації результатів моделювання.
22. Наведіть математичне тлумачення методу найменших квадратів для апроксимації результатів моделювання.
23. Що таке гістограма розподілу і які існують способи формування гістограм?
24. В чому суть методики пошуку виду розподілу за відомою гістограмою?
25. Які типи помилок впливають на точність проведення модельного експерименту?
26. Наведіть джерела появи систематичних помилок імітаційного експерименту.
27. Як називається операція зміни моделі та повторення її перевірки у випадку незадовільної точності моделі?

28. Як можна оцінити випадкові помилки імітаційного експерименту?
29. Як можна зменшити число параметрів моделі за допомогою методу випадкового балансу?
30. Як побудувати діаграму рангування вкладів факторів в сумарну дисперсію досліду?
31. Як побудувати діаграму розсіювання результатів спостережень досліду?
32. Назвіть етапи методу використання безрозмірних комбінацій параметрів моделі для зменшення числа параметрів моделі.
33. Продемонструйте на прикладах суть двох способів побудови безрозмірних комбінацій параметрів моделі.
34. Визначте основні критерії для вибору інтервалів зміни параметрів моделі.
35. Поясніть суть використання рівнянь балансу для визначення джерел помилок результатів моделювання.
36. Як визначають джерела помилок результатів моделювання шляхом екстраполяції графіків результатів моделювання?
37. Сформулюйте правило відбракування для виключення значень, які різко відхиляються.
38. Як здійснити вибір і перетворення системи координат таким чином, щоб повний набір даних давав по можливості пряму лінію?
39. Як здійснюється аналіз регресійної моделі функції відклику?

4.1 Основні напрямки застосування комп'ютерного моделювання в оптоелектронних дослідженнях

Сучасна революція в оптиці і оптоелектроніці, пов'язана перш за все зі створенням та застосуванням лазерів, торкнулася майже усіх її розділів. Однією із найважливіших складових цього процесу є проникнення в оптику і оптоелектроніку цифрових методів і пов'язане з цим широке застосування комп'ютерів при розробці оптоелектронних процесорів. Особливо помітний вплив проявився у виникненні таких нових напрямків сучасної оптики, як цифрова та адаптивна оптика. Цифрове представлення оптичних полів відкрило цілком нові можливості оброблення зображень, оптичної фільтрації, синтезу голограм і т. п. В системах адаптивної оптики комп'ютери керують оптичними полями і процесами, в тому числі – в реальному часі.

Таким чином, вдалось добитися оптимального функціонування оптичних пристроїв і складних оптичних систем різного призначення; мова йде фактично про нову концепцію в оптоелектроніці. Зараз є всі підстави стверджувати, що комп'ютерні методи обчислень і цифрові процесори стають поряд з лінзами, дзеркалами та іншими традиційними оптичними елементами складовою частиною оптичних систем, забезпечуючи їх спроможність до адаптації і здійснюючи кількісне оброблення інформації, яка міститься в оптичному сигналі.

Одночасно йде зворотний процес – оптичні ідеї, методи експериментальної оптики і оптоелектроніки здійснюють великий вплив на розвиток сучасної обчислювальної техніки. Серед конкретних результатів тут можна згадати створення систем голографічної пам'яті, розробку гібридних (оптико-цифрових) систем обробки інформації. Безперечно, повна реалізація можливостей оптики в обробленні інформації знайде свій вираз в створенні оптичних і оптоелектронних процесорів із швидкодією, обмеженою часом порядку декількох періодів світлових коливань. Слід відмітити, що в квантовій електроніці і нелінійній оптиці за останній час відкрито ряд нових явищ, створені нові пристрої, які можуть прокласти шляхи до створення таких оптичних і оптоелектронних процесорів.

Взаємодія методів та засобів комп'ютерної обробки з оптикою та оптоелектронікою сприяли розв'язанню важливих задач, привели до розроблення цілком нових методів і систем, як в оптиці, так і в обчислювальній техніці. Не претендуючи на вичерпну повноту і строгу систематизацію, наведемо нижче перелік сучасних напрямків взаємодії ЕОМ і оптики у зазначених областях.

Мова йде про такі аспекти:

- а) оброблення результатів оптичних експериментів;
- б) розрахунок та конструювання оптичних систем за допомогою комп'ютерних методів;
- в) оптимізація оптичних систем;
- г) оброблення зображень та цифрова оптика;
- д) чисельне моделювання та оптимізація оптичних процесів, в тому числі нелінійних;
- е) автоматизація оптичного експерименту;
- ж) керування (в тому числі і адаптивне) оптичними системами і процесами;
- и) розробка оптичних методів оброблення інформації з метою створення оптико-електронних та оптоелектронних інформаційно-обчислювальних систем.

Розглянемо далі більш детально деякі із вказаних напрямків застосування комп'ютерного моделювання в оптичних і оптоелектронних дослідженнях.

Застосування комп'ютерів стимулювало швидкий розвиток усіх областей оптики, проте, мабуть, найбільше вплинуло на проектування лінз [7,48]. Сучасний конструктор лінз проводить більшу частину свого творчого часу в діалозі з комп'ютером.

Практично із самих перших днів, коли ЕОМ стали комерційно доступні на початку 50-х років, далекоглядні конструктори лінз намагалися оптимізувати розрахунок основних аберацій.

З появою ЕОМ погляди розділилися, існувало дві точки зору з приводу розрахунку на ЕОМ.

Одна точка зору полягала в тому, що можливо було б повністю передати комп'ютеру розв'язання задачі проектування, наприклад, просто задаючи вимоги до аберацій першого та третього порядків, а також до показника заломлення оптичних поверхонь. Вихідна система при цьому буде являти собою сукупність плоскопаралельних пластин. Отже, необхідно було б оволодіти тільки примітивними знаннями про оптичне проектування. Проблема проектування лінз звелася б просто до машинної задачі пошуку мінімуму функції втрати якості за цією точкою зору.

Прибічники другої точки зору вважали, що комп'ютери необхідно було б використовувати в діалоговому режимі досвідченим конструкторам, які б оцінювали кожний крок процесу проектування і вносили в нього свій минулий досвід і свій талант.

Час вніс свої корективи, відбулося злиття цих двох позицій. Комп'ютери створили нові несподівані конструкції навіть на основі найпростішої мінімізації функції втрати якості [48]. Проте найкращі конструкції, як правило, не виникають з початкового положення про систему, як сукупність плоскопаралельних пластин, тому, якщо знаходиться дійсно оптима-

льна конструкція, то фундаментальні знання в області оптичного проектування надають реальну допомогу.

Проектування багат шарових покриттів на тонких плівках було автоматизовано на ЕОМ тоді ж, коли й конструювання лінз. В той час відомий англійський оптик писав про те, що не існує регулярного методу, який дозволив би спроектувати багат шарове покриття із заданими властивостями, проте застосовуючи метод спроб і помилок, можна отримати ряд пристроїв для конкретних застосувань [7,48,49].

Така заява була сприйнята в тому плані, що в принципі не існує точного методу синтезу багат шарових покриттів, а значить і ЕОМ необхідно застосовувати приблизно в тому ж режимі випадкових досліджень, що й при конструюванні лінз.

Ця точка зору була пізніше спростована, коли був запропонований точний метод синтезу Педжиса [7]. Проте цей метод мав один суттєвий недолік: коефіцієнти заломлення плівкових багат шарових покриттів являли собою вихідні змінні і їх значення не могли бути встановлені користувачем в реально досягнутих межах. Як правило, в результаті необхідні такі значення, як 6, 18, 36 і т.п. Тому більшість результатів проектування за вказаним алгоритмом були нереалізовані.

Іншим прикладом методу комп'ютерного моделювання тонкоплівкових покриттів може бути метод проектування Делано [7]. Цей метод базується на неперервному коефіцієнті заломлення U як функції оптичної товщини ρ (при нормальному падінні), яка визначається за такою формулою:

$$U(\rho) = \exp \left[-2 \int_0^{\rho} dp \int_{-\infty}^{\infty} d\mu (\mu) e^{2\pi i \mu \rho} \right],$$

де μ - хвильове число.

Це співвідношення справедливо при малому коефіцієнті відбиття від кожного багат шарового покриття, а отже може бути використано безпосередньо для розв'язання задач створення антивідбивних покриттів [7,48].

Історично другим головним напрямком використання ЕОМ в оптиці став аналіз зображень, тобто розрахунок структури зображення, обумовленою дифракцією та аберациями, як осьовими, так і неосьовими. До виконання розрахунків на ЕОМ мало що було відомо про кількісну сторону структури зображення. Для отримання її оцінки існували різні розклади, але мало хто погоджувався їх використовувати, оскільки це було дуже трудомісткою справою. За допомогою найновіших методів численного інтегрування були створені програми для реального розрахунку дифракційних зображень, описані детально в [48]. Поряд з класичними квадратурними методами обчислення осцилювальних інтегралів, що є прямим наслідком хвильової природи дифракції, в роботах [50-52] виділяється алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), як один із найбільш ефективних методів чисельного інтегрування в оптиці.

Іншою найбільш широкою областю застосування комп'ютерного моделювання в оптико-електронних дослідженнях є синтезування штучних бінарних голограм на комп'ютері [7,53].

Застосування ЕОМ вплинуло на техніку медичної діагностики за зображеннями. Воно дозволило лікарям отримати такі деталі зображення тіла хворого, які досі були недоступні для спостереження. Прикладами тут можуть бути реконструктивна томографія і отримання зображень методом кодованих апертур [50], для того, щоб отримати зображення, придатне для спостереження, необхідно розкодувати закодований сигнал.

Комп'ютерні методи дозволяють також підкреслити особливості в звичайних зображеннях, таких як рентгенівське зображення і термограми. З цією метою використовується цифрова фільтрація і методи розпізнавання образів [54].

4.2 Комп'ютерна реконструктивна томографія

4.2.1 Постановка задачі та алгебраїчний підхід до її вирішення

Найбільш вражаючі успіхи за останні роки зроблені в медичній реконструктивній комп'ютерній томографії [50] (від грецького кореня, що означає "зріз"). Оскільки в цій області використовуються самі різні фізичні процеси – від ультразвуку до ядерного магнітного резонансу [50], доцільно розглянути суть і використання методу на прикладі рентгенівської реконструктивної комп'ютерної томографії.

Нагадаємо, що в традиційній рентгенодіагностиці в основі формування зображень, що відображають конфігурацію внутрішніх органів, лежить використання ефекту різної рентгенівської прозорості різних тканин організму. При цьому рентгенівське тіньове зображення частини тіла, що цікавить, проектується на фотоплівку або на електронно-оптичний перетворювач. Можливості диференціювання органів та тканин на таких проєкційних рентгенограмах обмежені, по крайній мірі, двома причинами.

По-перше, для чіткого розрізнення двох суміжних областей їх коефіцієнти поглинання повинні помітно відрізнятись. Тому на рентгенограмах легко розпізнаються та аналізуються кісткові утворення, які більш інтенсивно порівняно з іншими тканинами поглинають рентгенівські промені, і оточені повітрям та нормальною тканиною паталогічні структури в легенях. Області ж з близькими коефіцієнтами пропускання, наприклад більшість м'яких тканин, на звичайних рентгенограмах не розрізняються. По-друге, при проєкційній рентгенографії не уникнути накладання зображень структур, що нашаровуються, яке ускладнює диференціацію нормальних та паталогічних утворень.

Поява скануючих реконструктивних комп'ютерних томографів призвела до повного перевороту в області рентгенівських методів отримання зображень. Виник новий рентгенодіагностичний метод відтворення (реконструкції) за допомогою ЕОМ структури анатомічного перерізу тіла

людини — реконструктивна комп'ютерна томографія (РКТ): Основні переваги її, як засобу діагностики, такі.

1. У порівнянні з традиційною рентгенографією РКТ дозволяє в десятки разів підвищити точність аналізу тканин, що дещо відрізняються за рентгенівським поглинанням, що робить її основним засобом ранньої діагностики пухлини та інших патологій м'яких тканин.
2. Зображення анатомічної структури аксіального (осьового) перерізу тіла пацієнта відтворюється без накладень тіней інших структур і не залежить від чергування тканин з різною густиною. Наприклад, томограма тканин головного мозку не спотворюється кістками черепа.
3. Результат досліджень представляється в кількісній формі у вигляді розподілення лінійного коефіцієнта послаблення рентгенівського випромінювання по відтворювальному перерізу, тобто візуальну оцінку доповнюють результати високоточних вимірів, що представлені в цифровій формі, яка зручна для об'єктивного аналізу і автоматизації подальшої обробки.

Нехай А (рис.4.1) — точкове рентгенівське джерело з інтенсивністю I_0 , що дає монохроматичний добре сколімований промінь, який дозволяє знехтувати його поперечними розмірами. Цей промінь, яким керує детектор В, пронизує тіло пацієнта на відрізок L , експоненційно затухаючи через розсіювання і поглинання фотонів. Якби промінь проходив крізь однорідне середовище, то інтенсивність I на детекторі В визначалася б співвідношенням $I = I_0 \exp(-\mu L)$.

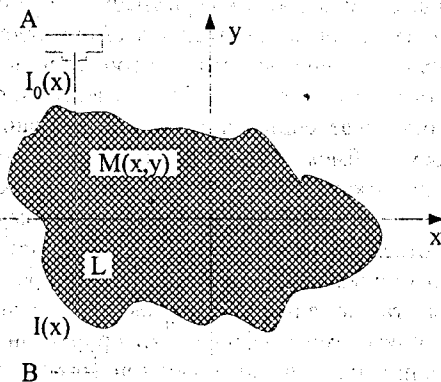


Рисунок 4.1 – Схема просвічування об'єкта рентгенівським променем

Коефіцієнт послаблення μ залежить від енергії рентгенівських променів і властивостей речовини, через яку вони проходять. Якщо речовина неоднорідна, як в даному випадку, то добуток μL замінюється променевим інтегралом і інтенсивність пучка на виході стає функцією положення променя:

$$I(x) = I_0 \exp \left[- \int_L \mu(x, y) dy \right].$$

Вираз $P(x) = -\ln I(x) / I_0 = \int_L \mu(x, y) dy$ називається проекцією.

При звичайному рентгенографічному зображенні проекцією є безпосередньо зображення, яке сприймає людина. В томографії знімається велика кількість проєкцій під різними кутами до пацієнта, при цьому проєкція і шлях проходження променя через тіло залежить від кута "просвічування" θ . Крім того, використовується не одне джерело випромінювання, а декілька, щоб утворився або пучок паралельних променів і тоді проєкція називається паралельною, або розбіжний пучок і тоді говорять про істинну проєкцію.

Суттєве значення в томографії має такий ефект. Рентгенівські промені, які використовуються в томографії, насправді не моноенергетичні; послаблення більшості речовин при рівнях енергії рентгенівського випромінювання виявляється як дія фільтра верхніх частот, що послаблює високі рівні енергії в меншій мірі, ніж низькі. При проходженні променя крізь тіло пацієнта фотони низьких енергій розсіюються і поглинаються сильніше, ніж фотони високих енергій, тому доля останніх на виході вища, ніж на вході. Таким чином, промінь стає жорсткіше. В результаті функція положення пучка буде скоректовано так:

$$I(x) = \int_{E_0}^{E_1} D(E) I_0(x; E) \exp \left[- \int_L \mu(x, y; E) dy \right] dE,$$

де $D(E)$ – енергетична характеристика детектора.

Один з методів компенсації цього ефекту складається в попередньому збільшенні жорсткості променя шляхом пропускання його перед опроміненням тіла через фільтр з алюмінію або міді.

Для побудови томограми необхідно відтворити функцію $\mu(x, y)$ за множиною її проєкцій. Сьогодні розроблено багато алгоритмів відтворення, які спираються на апарат інтегральних перетворень. Через складності відповідних викладень алгоритми тут не розглядаються.

Поряд з методами інтегральних перетворень, в яких розв'язування доводиться до кінця в неперервному вигляді і тільки кінцеві формули дискретизуються для застосування чисельних методів з подальшою їх комп'ютерною реалізацією, широко відомі методи розкладу в ряди, які також називаються алгебраїчними методами реконструкції, ітераційними алгоритмами або методами, заснованими на теорії оптимізації. Ці методи

або методами, заснованими на теорії оптимізації. Ці методи передбачають дискретизацію зображення до початку його обробки і, тому, відносяться до зовсім іншої області математики, ніж методи інтегральних перетворень.

Дискретну модель, яку використовують при розв'язанні задачі реконструкції зображень, можна описати так. Будемо вважати, що реконструйоване зображення, яке цікавить нас, задане на дискретному растрі з квадратних елементів (рис 4.2). Пронумеруємо ці елементи так, як зображено на рисунку. Будемо вважати, що функція поглинання рентгенівських променів приймає постійне значення x_j всередині елементу з номером j ($j=1,2,\dots,N$). Припустимо також, що джерело та детектор випромінювання являють собою точки, а проміні, які розповсюджуються між ними, - прямі лінії; позначимо через M загальну кількість променів. Можна також припустити, що довжина шляху i -го променя по j -му елементу, яка позначається через a_{ij} , відповідає вазі вкладу j -го елементу в сумарне поглинання вздовж всього шляху розповсюдження i -го променя в досліджуваному об'єкті. Вимірюване сумарне поглинання i -го променя, позначеного через

$$y_i, \text{ можна записати у вигляді: } \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \approx y_i, \quad i = \overline{1, M}$$

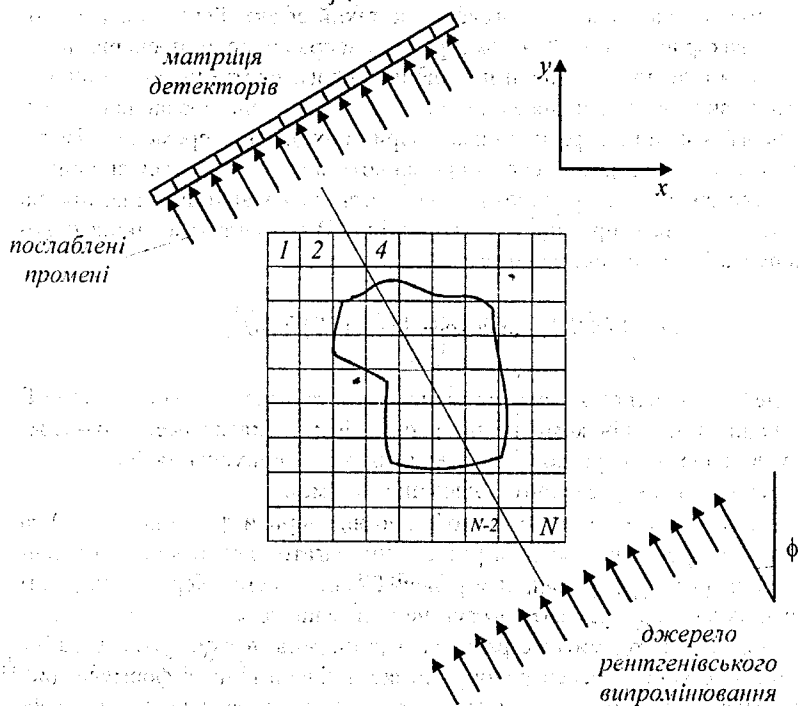


Рисунок 4.2 – Схематичне зображення реконструктивної томографії

Таким чином, модель в цілому характеризується системою лінійних рівнянь, яку можна переписати в матричній формі у вигляді:

$$y \approx Ax, \quad (4.1)$$

де $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$ – вектор елементів зображення $y=(y_1, y_2, \dots, y_M)$ – вектор вимірів: $A=(a_{ij})$ – матриця проєкцій розмірністю $M \times N$. Очевидно, що для реконструкції дискретного зображення необхідно розв'язати матричне рівняння

$$x = A^{-1}y, \quad (4.2)$$

де A^{-1} – матриця обернена до матриці A .

Проте відносно проблеми реконструкції зображень дана задача має ряд важливих особливостей. Перш за все, розмірність системи (4.1) надто велика, оскільки для отримання зображень з високою роздільною здатністю параметри M і N повинні мати порядок 10^5 . Матриця A надто розріджена, оскільки кожен промінь перетинає незначну кількість елементів растру, і лише менше 1% її елементів відрізняються від 0.

Методологія застосування алгебраїчного підходу в загальному випадку така. На першому етапі формулюється задача реконструкції зображення. Тут приймаються до уваги фізичні особливості методу томографії, який використовується, та вводяться деякі спрощувальні припущення. Крім того, на даному етапі повинна бути чітко визначена схема отримання вихідних даних. На наступному етапі виконується дискретизація області реконструкції та формується відповідна система рівнянь. Далі розглядаються характерні особливості отриманої системи рівнянь, такі як розмірність, ступінь розрідженості, сумісність і т. д. На основі проведеного аналізу обирається принцип вирішення, за допомогою якого проводиться пошук вектора, що задовольняє дану систему. Часто вводиться деяка цільова функція, причому в якості набору обмежень, які враховуються в процесі оптимізації, використовується система нерівностей.

Цей етап досить важливий, оскільки тут проводиться вибір методу, який визначає ту множину векторів, яку можна розглядати для реконструкції зображення. Основна ідея багатьох алгоритмів полягає в тому, щоб повніше використати інформацію, яка міститься в системі (4.1) з урахуванням неповної достовірності її рівнянь. Взагалі існує декілька підходів, на основі яких можна отримати алгоритми вирішення поставленої задачі. При виборі найбільш придатної з них, дослідник в кожному випадку повинен враховувати специфіку конкретної задачі реконструкції.

На наступному етапі розробляється алгоритм реконструкції. Своєрідність розв'язуваної задачі полягає в великій розмірності та сильній розрідженості систем рівнянь. Крім того, необхідно приймати до уваги особливості комп'ютерної реалізації алгоритму, що розробляється.

Результати застосування створених програм оцінюються не тільки з точки зору математичної задачі. Головним критерієм є якість реконструктивного зображення.

Сучасне обладнання для медичної діагностики за допомогою РКТ досить однотипне за складом і зазвичай містить рентгенівську скануючу систему зі столом для розміщення пацієнта, обчислювальну систему обробки вимірювальної інформації з математичним забезпеченням і пристроєм візуалізації та документування діагностичної інформації. Типова структурна схема РКТ представлена на рис.4.3.



Рисунок 4.3 – Найважливіші блоки РКТ

У всіх типах РКТ для реконструкції структури шару тіла, що досліджується, необхідно біля 10^5 незалежних результатів вимірювань послаблення рентгенівського променя, який проходить крізь шар, для різних відносних орієнтацій напрямку випромінювання та тіла. З цією метою пацієнта поміщають у нерухомому стані на спеціальний стіл, де по різні боки від нього розміщені джерело і детектори рентгенівського випромінювання. Рентгенівський випромінювач, коліматори, що формують випромінювання, і детектори розміщені один навпроти одного за строго визначеними відносно тіла пацієнта напрямками. Скануюча система використовується для збору за максимально короткий час точних кількісних даних про послаблення рентгенівського випромінювання при проходженні ним обраної ділянки тіла для порядку 10^5 орієнтацій напрямків випромінювання. Цей процес зводиться до послідовних просторових переміщень випромінювача, коліматорів і детекторів, в процесі яких виконується необхідна кількість вимірювань послаблення для різних орієнтацій променів.

Природно, що для проведення вказаних вимірювань необхідні системи керування і контролю, а також реєстрації результатів. Дані про послаблення одночасно з координатами відповідних променів і додатковою інформацією поступають на вхід обчислювального комплексу, де вони попередньо корегуються для виключення систематичних похибок, а потім

оброблюються за фіксованим алгоритмом. Результати обробки зберігаються в пам'яті ЕОМ у вигляді матриці із 10^5 чисел і відтворюються на екрані дисплею у вигляді кольорової або чорно-білої томограми.

В процесі діагностичного дослідження зазвичай скануються шари тіла пацієнта, що досягається послідовним повздовжнім переміщенням столу, на якому він лежить, і скануванням. Для підвищення продуктивності, як правило, одночасно скануються два шари. Для цього від одного рентгенівського джерела формуються два суміжних колімованих рентгенівських пучка і використовуються два однотипних вимірюючих детектора, що розташовані впритул один до одного.

В склад скануючої системи РКТ зазвичай входять рентгенівський випромінювач, елементи рентгенооптики (фільтри, коліматори та ін.), багатоелементний блок рентгенівських детекторів, електромеханічні вузли просторового переміщення вимірюючих рентгенівських пучків, датчики координат, кабельна система, що забезпечує живлення та охолодження випромінювача і обмін інформаційними сигналами між рухомою та нерухомою частинами скануючої системи, оптичний візирний пристрій, який дозволяє вірно відцентрувати пацієнта в межах діагностичної зони скануючої системи і здійснювати посвідчення невидимої площини рентгенівського випромінювання з потрібною областю тіла пацієнта.

Скануючі системи у своєму розвитку пройшли ряд етапів вдосконалення технічних характеристик і підвищення швидкості сканування. В наш час прийнято виділяти чотири покоління скануючих систем.

В наш час в універсальних установках, які використовуються реалізована послідовно-паралельна схема збору інформації з відмовою від найбільш інерційних лінійних переміщень. Системи такого роду поділяють на системи третього і четвертого поколінь. В них при фіксованому миттєвому просторовому положенні випромінювача, коліматорів і багатоелементного блока детекторів одночасно вимірюється декілька сот значень інтегральної густини тіла пацієнта вздовж весроподібною системи рентгенівських променів. За рахунок обертання рентгенооптичних елементів за один повний оберт реєструється весь необхідний набір з $10^5 - 10^6$ відліків. В скануючих системах третього покоління одночасно обертаються рентгенооптичний випромінювач, коліматори і приблизно 300 детекторів, жорстко закріплених на єдиній рамі, що обертається навколо пацієнта. В системах четвертого покоління обертається рентгенівський випромінювач і жорстко зв'язаний з ним блок весроподібних коліматорів, кільцевий блок із великої кількості (від 300 до 1088) детекторів. Типова система третього покоління має такі характеристики: число детекторів в матриці 256, проєкцій 360, загальна кількість відліків $0,92 \times 10^5$, час сканування 4 с. Система четвертого покоління має 1088 вимірювальних детекторів в кільці, загальна кількість відліків $1,5 \times 10^6$, час сканування 3 с.

Час отримання томограми залежить від багатьох факторів, але найважливішими з них є алгоритми відновлення і швидкодія комп'ютера, що входить в склад комплексу (див. рис.4.3).

Масив вимірювальних даних, що піддається обробці в сучасних системах РКТ, може перевищувати 10^6 вимірів. Оскільки, мова йде про отримання зображень живих органів, які функціонують, то час реєстрації і обробки даних не повинні бути дуже великими. Якщо в перших системах час отримання і оброблення вимірювальних даних з послідувочою реконструкцією вимірювався кількома хвилинами, то використання спецпроцесора MAP 200 фірми CSPI в томографі ND 8000 дозволило знизити цей час до 50 с [50]. В одній з моделей томографу «Somatom» фірма Siemens використовує декілька спецпроцесорів, які виконують функції попередньої обробки, фільтрації і обчислення зворотної проєкції, що дало можливість спостерігати томограму практично одночасно з закінченням сканування при часі сканування 2,5 с (на обробку однієї проєкції в цій системі витрачається менше 10 мс). Такій високій швидкості обробки крім використання вже згаданих спецпроцесорів сприяло використання багатопроцесорної ЕОМ, побудованої за конвеєрним принципом. Робота спецпроцесорів координується комп'ютером, який крім цього здійснює керування обладнанням і периферійними пристроями, а також контроль стану томографа.

Перші медичні скануючі реконструктивні томографи з вмонтованою ЕОМ були призначені виключно для досліджень голови і шиї. Традиційні дослідження головного мозку опирались на трудомісткі і небезпечні для хворого методики із штучним контрастуванням порожнин черепа повітрям і рентгеноконтрастними речовинами. Через простоту і високу інформативність РКТ стала основним методом нейродіагностики. При внутрішньочерепних пухлинах діагностика з використанням РКТ виходить на якісно новий рівень. За даними закордонних авторів надійність діагностики внутрішньочерепних пухлин за допомогою РКТ близька до 100%. Обстеження за допомогою РКТ дозволяє не тільки виявити пухлину, контролювати її розвиток або хід лікування, але й проводити видовий діагноз. При передопераційному вирішенні питання про вид пухлини мозку в основному використовують такі параметри: абсолютне значення густини тканини, розподілення густини всередині процесу (гомогенна, негомогенна, вузлувата, кільцевидна та ін.), локалізація і взаємодія пухлини із сусідніми анатомічними структурами.

З використанням РКТ значно прискорюється і стає більш надійною діагностика черепно-мозкових травм, особливо добре діагностуються переломи черепа із зміщенням фрагментів. При цьому, використовуючи горизонтальні і фронтальні томограми, можна чітко виявити глибину вдвalenня і локалізацію кісткових фрагментів, що відхилилися або сторонніх м'яких тканин і ступінь ушкодження мозку.

Реконструктивна комп'ютерна томографія тіла людини виявилась дуже ефективним методом дослідження, хоча її первісна дія на рентгеноді-

агностику не була таким значним, як в неврології. Як і при дослідженні голови, РКТ тіла дозволяє надійно виявляти наявність і розміри таких патологічних утворень як пухлини та інфекційні процеси, полегшуючи не тільки встановлення первісного діагнозу, але й планування лікування і контроль його результатів.

4.2.2 Паралельна інтерпретація методу Гаусса-Жордана для розв'язання СЛАР високих порядків

Відповідно до алгебраїчного підходу вирішення задачі реконструктивної томографії необхідні часові характеристики розв'язання системи (4.1) можна забезпечити, застосувавши паралельні методи та алгоритми обробки.

Розглянемо нову паралельну інтерпретацію методу Гаусса-Жордана на основі обчислення зовнішнього добутку векторів, запропоновану в [55].

Для розв'язання СЛАР вигляду (4.1) та обернення матриць початкові дані подають у вигляді розширеної матриці $[A|B]$, де A – квадратна неособлива матриця коефіцієнтів розмірністю $N \times N$, B – квадратна матриця вільних членів розмірністю $N \times N$, яка в випадку розв'язання СЛАР формується за вектор-стовпцями вільних членів розмірності N кожний $B = [b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(N)}]$, а в випадку знаходження оберненої матриці збігається з одиничною матрицею $B=E$.

Розширену матрицю проміжних результатів позначимо як $R[1:N;1:2N]$, а матрицю кінцевого результату як $X[1:N;1:N]$.

Для $t=0$ в розширену матрицю проміжного результату $R[1:N;1:2N]$ будуть записані початкові дані

$$R^{(t=0)}[1:N;1:N]=A, R^{(t=0)}[1:N;(N+1):2N]=B. \quad (4.3)$$

За ведучий елемент на кожному t -му кроці ($t = \overline{1, N}$) обчислень обираємо елемент $r[t,t] \neq 0$ матриці R .

Розділивши одночасно коефіцієнти t -го рівняння системи, що є елементами t -го рядка матриці R , на ведучий елемент, отримуємо вектор-рядок $d[1;1:2N]$, а саме:

$$d^{(t)}[1;1:2N] = \frac{R^{(t-1)}[t;1:2N]}{r^{(t-1)}[t;t]}. \quad (4.4)$$

Визначивши вектор-стовпець $v^{(t)}[1:N;1]$ як виділений t -й стовпець матриці проміжного результату із одиничним значенням елемента, що знаходиться в t -му рядку,

$$v^{(t)}[1:N;1] = R^{(t-1)}[1:N;t], \quad (4.5)$$

де $v^{(t)}[t;1] = -1$, сформуємо зовнішній добуток векторів у вигляді матриці P за такою формулою:

$$P(t)[1:N;1:2N] = v(t)[1:N;1] \otimes d(t)[1;1:2N], \quad (4.6)$$

де $p^{(t)}[I;J] = v^{(t)}[I,1] \times d^{(t)}[1;J]$, ($I = \overline{1,N}, J = \overline{1,2N}$).

Годі процес формування проміжного результату R в часі ($t = \overline{1,N}$) описується таким матричним співвідношенням:

$$R^{(t)} = (R^{(t-1)} \wedge MR^{(t)}) \cdot P^{(t)}, \quad (4.7)$$

де \wedge - оператор логічного множення (кон'юнкція);

$MR^{(t)}$ - специфічна бінарна матриця розмірності $N \times 2N$ елементів, будь-який елемент $mr^{(t)}[i,j]$ якої визначається:

$$mr^{(t)}[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = t, \quad j = \overline{1,2N}; \\ 1, & \text{якщо } i \neq t, \quad j = \overline{1,2N}; \end{cases} \quad (4.8)$$

$P^{(t)}$ - зовнішній добуток векторів.

Кінцевий результат $X[1:N;1:N]$, що являє собою або матрицю шуканих векторів $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(L)}$, або обернену матрицю A^{-1} , визначається на останньому $t=N$ -му кроці обчислень у вигляді

$$X[1:N;1:N] = R^{(r=N)}[1:N;(N+1):2N]. \quad (4.9)$$

Час виконання обчислень за вищенаведеною формою алгоритму Гаусса-Жордана для розв'язання СЛАР складає N кроків як в однозадачному, так і в потоковому режимі обчислень.

Таким чином, розроблено паралельну форму методу Гаусса-Жордана для розв'язання СЛАР, яка відтворює в просторі та часі процес обчислень за допомогою матричних рівнянь і дозволяє покращити часові характеристики проведення РКТ.

4.3 Моделювання в прикладних задачах створення біомедичних оптикоелектронних систем

4.3.1 Аналіз математичних моделей взаємодії оптичного випромінювання з біотканинами

Сьогодні в медичну діагностику впроваджується все більша кількість методів, оснований на застосуванні оптикоелектронних приладів. До них відноситься і фотоплетизмографічний метод (ФПМ), що дозволяє вимірювати кровонаповнення та кровотік не лише в венах і артеріях, а і в периферійних судинах і капілярах.

ФПМ у порівнянні з іншими засобами діагностики біологічного об'єкту (БО) за оптичними показниками, наприклад з фотоакустичним методом, відрізняє простота приладів для його реалізації, а також те, що введенням в фотоплетизмографічні прилади елементів світловолоконної техніки і джерел з різними довжинами хвиль зондувального випромінювання можна досить просто вирішувати задачі фотодинамічних досліджень, дистанційних вимірювань чи інших параметрів БО, що вивчаються і т.д.

На даному етапі впровадження фотоплетизмографії в медичну практику ФПМ не знайшов ще свого широкого застосування з ряду причин. Однією з них є відсутність біофізичного обґрунтування отримання фотоплетизмографічного сигналу.

Існують два різновиди ФПМ - фотоплетизмографія в світлі, що проходить, і фотоплетизмографія в відбитому світлі. Найчастіше виконуються дослідження в світлі, що проходить, в силу того що в даному випадку здійснюється пряме оцінювання кровонаповнення в дільниці БО, що вивчається. Але часто буває досить важко провести такі дослідження, наприклад, для оптично малопрозорих БО або для важко доступних дільниць об'єктів.

В випадку застосування фотоплетизмографії в відбитому світлі фотоплетизмографічний вимірювальний перетворювач (ФВП) сприймає відбитий від БО променистий потік.

Показано, що ФПМ дозволяє реєструвати величину зміни кровонаповнення тканин БО за пульсацією найближчої до ФВП поверхні БО, тобто величину зміни відбитого від тканини БО, що досліджується, світлового потоку в залежності від амплітуди пульсації тканини.

За різними літературними джерелами, що розглядають оптичні характеристики тканин БО [56,57], видно, що коефіцієнт відбиття, абсорбція, розсіювання, пропускання у різних тканин різні і величини їх залежать як від властивостей тканин БО, що досліджуються, так і від довжини хвилі зондувального випромінювання. В спрощеному вигляді схема взаємодії випромінювання з БО показана на рис.4.4.

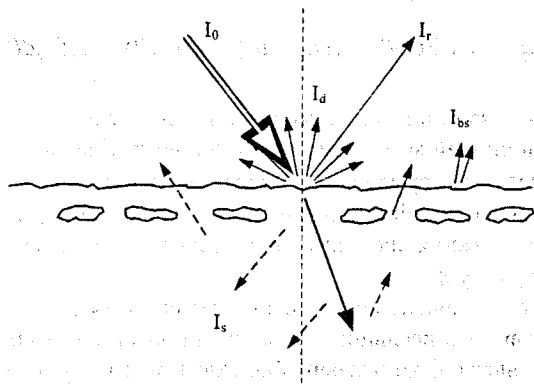


Рисунок 4.4 – Схема взаємодії випромінювання з біотканиною

Пучок світла (I_0), що падає на біотканину, частково відбивається від її поверхні, причому світло, що відбивається, можна поділити на дві

складові компоненти: регулярну (I_r) та дифузну (I_d). Випромінювання, що пройшло всередину біотканини, частково поглинається та розсіюється в ній. Випромінювання (I_s), що розсіялось, має характерний розподіл в куті 2ϕ , що визначається оптичними властивостями біотканини. Частина світла (I_{vs}), що розсіюється, яка не поглинається за час розповсюдження в тканині, проходить через її поверхню в напрямі, зворотному напрямку пучка. Таким чином, в загальному випадку світло, що реєструється від біотканини має три компоненти: I_r , I_d й I_{vs} .

Якщо ФВП використовує неколімоване випромінювання світлодіодів потужністю до 5мВт або лазерів низької потужності (до 15мВт), то випромінювання проникає на невелику глибину (наприклад, потужність 1.5 мВт, довжина хвилі $L=0.89$ мкм, глибина проникнення в шкіру 200 мкм).

Отже, можна припустити, що для зондувального випромінювання з такими характеристиками повторно відбите випромінювання не буде вносити відчутний вклад в променевий потік, відбитий від поверхні БО, що досліджується.

Спроби математичного опису взаємодії випромінювання із біотканиною вживалися багатьма дослідниками [58,59]. Частіше всього пропонується рішення цієї проблеми з позицій теорії радіаційного переносу [58], при цьому біотканина аналізується як випадково-неоднорідне середовище, яке розсіює та поглинає, а випромінювання, що розповсюджується в ній, – як потік енергії, тобто всі ефекти, зв'язані з хвильовою природою світла (дифракція, інтерференція, поляризація), не приймаються до уваги.

Основне рівняння теорії радіаційного переносу може бути записане у вигляді:

$$\theta \frac{dI(z, \theta)}{dz} = -(\mu_a + \mu_s) \cdot I(z, \theta) + \frac{1}{2}(\mu_a + \mu_s) \cdot \int_{-1}^1 P(\theta', \theta) \cdot I(z, \theta') d\theta', \quad (4.10)$$

де $I(z, \theta)$ - потужність випромінювання, що розповсюджується на глибині z через одиничний майданчик і в одиничному тілесному куті в напрямку, який складає з нормаллю до цього майданчика кут, рівний θ , Вт·м⁻²·стер⁻¹; μ_a та μ_s - коефіцієнти поглинання і розсіювання, м⁻¹; $P(\theta', \theta)$ - фазова функція розсіювання, що описує вірогідність того, що світло розповсюджується в напрямку θ .

Отримати точне аналітичне рішення рівняння (4.10) для випадку розповсюдження світла в реальній біотканині неможливо, оскільки будь-яка жива тканина являє собою надзвичайно складну структуру і практично не можна врахувати і описати всі параметри, що визначають її взаємодію з випромінюванням. В зв'язку з цим може бути два шляхи: перший - шукати аналітичне рішення рівняння (4.10) з позицій теорії дифузії, при цьому припускається, що фотони, які розповсюджуються в середовищі, можуть поглинатись і розсіюватись цим середовищем майже рівномірно в усіх на-

прямах. Для потоку фотонів в однорідному середовищі може бути записане рівняння дифузії [59]:

$$\Delta^2 \psi(\vec{r}) - \frac{\mu_a}{D} \cdot \psi(\vec{r}) = -\frac{S(\vec{r})}{D}, \quad (4.11)$$

де $\psi(\vec{r})$ – швидкість потоку фотонів в точці \vec{r} ; $S(\vec{r})$ – функція джерела, що визначається оптичними характеристиками середовища; D – коефіцієнт дифузії

$$D = \frac{1}{3} (\mu_a + (1-g)^{-1}) \cdot \mu_s^{-1}. \quad (4.12)$$

Рівняння (4.11) може бути приведене до рівняння (4.10) при умові, що розсіювання в середовищі значно домінує над поглинанням. Для більшості біотканин ця умова виконується в оптичному діапазоні 300÷1000 нм.

Іншим розповсюдженим методом рішення рівняння (4.10) є метод, який запропонували Кубелка і Мунк [59]. Суть його полягає в тому, що інтенсивність світла в елементарному об'ємі середовища $I(\vec{r}, z)$ розглядається як сума інтенсивностей двох потоків, що розповсюджуються в протилежних напрямках.

Вхідне диференціальне рівняння може бути записане в вигляді:

$$\frac{dI(\vec{r}, z)}{dz} = A_k \cdot I(\vec{r}, z) + S_k \cdot (\vec{r}, z), \quad (4.13)$$

де A_k і S_k - коефіцієнти, що характеризують оптичні властивості середовища (не рівні μ_a і μ_s).

Серед чисельних методів рішення рівняння (4.10) в першу чергу слідє виділити метод Монте-Карло [60]. Суть його полягає в тому, що по черзі простежуються "історії" кожного фотона, що влучає в середовище до тих пір, доки він або не буде поглиненим, або покине межі об'єкта середовища, що досліджується.

Розподіл імовірності подій визначаються, виходячи з значень μ_a , μ_s , одержуваних експериментальним шляхом.

Основною перевагою такого підходу є можливість моделювання достатньо складної геометрії і неоднорідностей середовища. Точність таких обчислень тим вища, чим більше число "історій" фотонів. Однак слід мати на увазі, що використання комп'ютерів з недостатньо високою продуктивністю часом неприйнятно збільшує час обчислень.

4.3.2 Моделювання в оптико-електронних системах обробки біосигналів із застосуванням алгоритмів фільтрації

Удосконалення біотехнічних систем є основним шляхом підйому рівня фізіологічних досліджень людини та автоматизації медико-біологічних експериментів. Велике значення при цьому має підвищення

якості обробки та аналізу біологічних сигналів. У багатьох випадках - при контролі стану тяжкохворого, при обробці багаточасових записів біологічних процесів - необхідна безперервна обробка біосигналів в режимі моніторингу. До недавнього часу така обробка проводилась за допомогою спеціальної аналого-дискретної апаратури. Але на сьогоднішній день надзвичайно актуальною є задача розробки біотехнічних систем з цифровою оперативною обробкою біологічних сигналів [57,59-61].

Серед всіх біологічних сигналів можна виділити великий клас сигналів, для яких інформація, що в них знаходиться, міститься в структурних елементах форми сигналу. Це кардіосигнали: фотоплетизмограма, електрокардіограма, фонокардіограма, реограма, сфігмограма; сигнали від інших органів людини, що мають певну циклічну повторюваність: пневмограма, гастрограма, шкірно-гальванічна реакція, а також поверхневі потенціали і особливі хвилі для "шумоподібних" біологічних сигналів: електроенцефалограми, електроміограми. Навіть для фонових записів цих процесів можна виділити деякі елементарні часові цикли (хвилі) і описувати зміни в сигналі як зміни структури чи форми цих хвиль.

Останнім часом в практику діагностування широко вводяться фотоплетизмографічні методи. Їх суть полягає в освітленні ділянки тканини біологічного об'єкта інфрачервоним пучком та реєстрації опромінення, що пройшло через тканини та відбилося від них. Реєстрація опромінення проводиться оптоелектронним датчиком. Завдяки своїй неінвазивності, мініатюрності датчиків, простоті апаратної реалізації та оперативності дані методи широко використовуються при моніторингу за станом серцево-судинної системи.

Основними етапами обробки в часовій області для біосигналів, форма яких має деяку стійку структуру, є:

- фільтрація;
- кускова апроксимація;
- сегментація за часовими властивостями сигналів;
- виділення характерних точок сигналу (екстремумів, точок перегину, точок перетину базової лінії та ін.);
- обчислення за характерними точками різних похідних параметрів, в тому числі й ознак форми;
- статистичний аналіз послідовності класифікованих фрагментів;
- структурний аналіз.

При розгляді етапів обробки біосигналу будемо дотримуватись схеми послідовного поєднання (конвеєру), що зображена на рис. 4.5:

Попередня обробка біосигналу включає в себе аналогові та цифрові перетворення, найважливішими з яких є згладжувальна фільтрація, режекторна фільтрація для уникнення наводок, смугова фільтрація для шумозаглушення та деякі спеціальні операції: корекція базової лінії, фільтрація коротких імпульсних завад, автоматичне регулювання підсилення та ін. Ці операції мо-

жуть бути виконані як аналоговими, так і цифровими методами [60]. При аналізі фізіологічних сигналів необхідно відокремити корисний сигнал від фонових шумів, таких наприклад, як завада від кола живлення. Приладами, що виконують функції усунення небажаних сигналів, є фільтри. При цьому аналогові фільтри обробляють сигнали, що подаються безперервною величиною; цифрові фільтри обробляють в дискретні моменти часу сигнали, перетворені в послідовність чисел, яка може бути оброблена ЕОМ за допомогою запрограмованого алгоритму фільтрації.

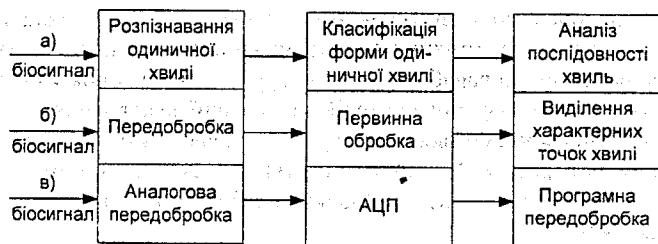


Рисунок 4.5 – Конверс класифікаторів для оперативної обробки біологічних сигналів :

а) загальна схема;

б) конверс для розпізнавання одиночної хвилі;

в) блок-схема попередньої обробки біосигналу

Порівняно з аналоговими фільтрами цифрові фільтри мають ряд переваг:

- вони мають високий ступінь завадостійкості, пов'язаний з використанням цифрових схем;
- точність цифрового фільтра залежить лише від похибки округлення при арифметичних операціях в ЕОМ, тоді як точність в аналогових схемах залежить від допусків елементів схеми і завад. При відповідному програмному забезпеченні ця похибка може бути зроблена досить малою;
- зміни характеристики цифрового фільтра можна виконати шляхом зміни програми або навіть записуючи параметри фільтра як вхідні дані для програми;
- напряга живлення, коливання температури та старіння компонентів, які змінюють характеристики аналогових фільтрів, не впливають на програми, що зберігаються в ЕОМ, тому характеристики цифрового фільтра залишаються незмінними. Це особливо важливо в медичних дослідженнях, тому що більшість сигналів є низькочастотними і тому

можуть спотворюватись із-за дрейфу в значеннях параметрів аналого-вих схем.

В зв'язку з постійним спадом цін на мікро- та міні- ЕОМ з точки зору економіки більш вигідно використовувати ЕОМ в задачах фільтрації і особливо, якщо комплекс за технічним завданням містить в собі мікропроцесорних блок.

Фільтрування проводиться за рахунок використання наближення за методом найменших квадратів [25]. Цей алгоритм реалізує нерекурсивний фільтр нижніх частот шляхом апроксимації значень відліків у вхідній послідовності за допомогою параболічного степеневого ряду. Можна вибрати будь-яку непарну кількість точок для їх наближення кожною параболою. Але далі апроксимуємо параболою кожену групу з п'яти точок у вхідній послідовності, використовуючи критерій найменшої квадратичної похибки. Для кожної точки будемо використовувати апроксимацію до цієї точки з урахуванням попередніх 2-х точок і наступних 2-х точок (тому першою точкою обробки є 3-тя точка). У випадку параболічної апроксимації маємо поліном вигляду:

$$p(nT + kT) = s_0(nT) + ks_1(nT) + k^2s_2(nT), \quad (4.14)$$

де $p(nT + kT)$ - значення параболі для кожного з п'яти значень k (-2, -1, 0, 1, 2).

Змінні $s_0(nT)$, $s_1(nT)$ та $s_2(nT)$ треба визначити для наближення параболою кожної з п'яти вхідних точок даних.

Наближення досягається шляхом знаходження параболі (коефіцієнтів s_0 , s_1 та s_2), яка найкращим чином апроксимує п'ять точок даних, що оцінюється за найменшою квадратичною похибкою. Ця похибка є:

$$\varepsilon(s_0, s_1, s_2) = \sum_{k=-2}^2 \left\{ x(nT - kT) - [s_0(nT) + ks_1(nT) + k^2s_2(nT)] \right\}^2. \quad (4.15)$$

Мінімальне значення цієї похибки визначається прирівнюванням до нуля її часткових похідних за параметрами параболі:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_2} = 0. \quad (4.16)$$

В результаті отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 5 \cdot s_0(nT) + 0 + 10 \cdot s_2(nT) &= \sum_{k=-2}^2 x \cdot (nT - kT), \\ 0 + 10 \cdot s_1(nT) + 0 &= \sum_{k=-2}^2 kx \cdot (nT - kT), \\ 5 \cdot s_0(nT) + 0 + 34 \cdot s_2(nT) &= \sum_{k=-2}^2 k^2x \cdot (nT - kT). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Так як ми хочемо зберегти лише центральні точки парабол, тоді в якості вихідної послідовності будемо мати при $k=0$, що $p(n \cdot T + k \cdot T) = s_0(n \cdot T)$. Розв'язок системи відносно $s_0(nT)$ дає:

$$s_0(nT) = \frac{1}{35}[-3x(nT - 2T) + 12x(nT - T) + 17x(nT) + 12x(nT + T) - 3x(nT + 2T)]. \quad (4.18)$$

Таким чином, параметр параболі $s_0(nT)$, заданий рівнянням, являє собою одне з чисел вихідної послідовності, обчислене по п'яти точках вхідної послідовності. Вихідна послідовність подібна до вхідної, але містить менше завад (тобто фільтруються нижні частоти), тому що параболічне наближення забезпечує згладжену апроксимацію для кожного набору з п'яти точок у вхідній послідовності.

Кожний з п'яти членів в правій частині рівняння відповідає одному числу з вхідної послідовності на відстані від сусіднього T . У результаті z -перетворення для нашого фільтра нижніх частот буде:

$$S_0(z) = \frac{1}{35}[-3 + 12z^{-1} + 17z^{-2} + 12z^{-3} - 3z^{-4}]. \quad (4.19)$$

Для визначення частотної характеристики фільтра замінюємо z в передавочній функції на $e^{j\omega T}$ і отримуємо:

$$|S_0(\omega T)| = \frac{1}{35}[17 + 24\cos(\omega T) - 6\cos(2\omega T)]. \quad (4.20)$$

Амплітудна характеристика для 5-ти точкового параболістичного фільтра, а також характеристики для фільтрів, побудованих на згладжуванні за допомогою груп з 7, 9 та 11 точок для кожного значення параболі, приведені на рис. 4.6.

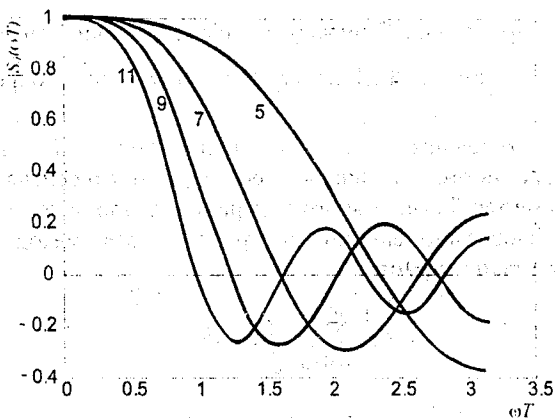


Рисунок 4.6 – Амплітудна характеристика у випадку наближення по 5, 7, 9 або 11 точках

Наведемо коефіцієнти для цих фільтрів:

$$\frac{1}{35}(-3, 12, 17, 12, -3) \quad \text{по 5-ти точках,}$$

$$\frac{1}{21}(-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2) \quad \text{по 7-ми точках,}$$

$$\frac{1}{231}(-21, 14, 39, 54, 59, 54, 39, 14, -21) \quad \text{по 9-ти точках,}$$

$$\frac{1}{429}(-36, 9, 44, 69, 84, 89, 84, 69, 44, 9, -36) \quad \text{по 11-ти точках.}$$

Застосування фільтрації є одним з найважливіших методів обробки біосигналів, який дозволяє отримати більш якісну корисну інформацію, що є дуже важливим для їх подальшої обробки. Результат використання нерекурсивного фільтра нижніх частот шляхом апроксимації значень відліків у вхідній послідовності за допомогою параболічного степеневого ряду за методом найменших квадратів представлено на рис. 4.7.

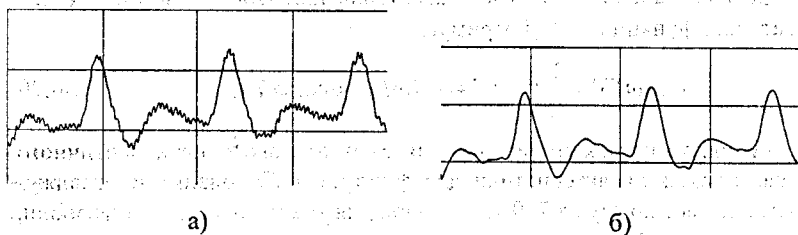


Рисунок 4.7 – Приклад ФПГ сигналу до і після обробки 5-ти точковим фільтром : а) ФПГ до обробки; б) ФПГ після обробки

Для зменшення похибки при реалізації інформаційно-вимірювальних систем з оптичним перетворенням біосигналів (фотоплетизмограм) з метою більш повного використання апріорної інформації про характер вимірювальних сигналів використовувався метод фільтрації із застосуванням таких виразів:

$$I = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^{10} \frac{1}{T_m T_{m-1}} \int_{T_{m-1}}^{T_m} i(t) \cdot dt, \quad (4.21)$$

$$A = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^{10} [i_{\max}(T_{m-1}, T_m) - i_{\min}(T_{m-1}, T_m)]. \quad (4.22)$$

Форма фотоплетизмографічних сигналів після обробки представлена на рис. 4.8.

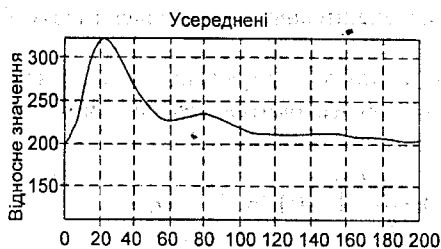


Рисунок 4.8 – Форма фотоплетизмографічних сигналів після обробки

Для аналізу фотоплетизмограм був використаний спектральний підхід, згідно з яким пульсація артеріальної крові має майже періодичну форму з частотою, що лежить в діапазоні від 0,5 до 4 Гц. З іншого боку, коливання, що викликані рушійним артефактом, як правило, носять випадковий характер з центральною частотою спектру в районі 7 Гц. Ця апріорна інформація про розподілення частот артеріальних пульсацій та рушійного артефакту простіше може бути використана в процедурі оцінювання тарувальної кривої шляхом переходу до Фур'є – перетворень часових рядів по червоному та інфрачервоному каналах. При цьому відношення амплітуд перших гармонік Фур'є червоного та інфрачервоного сигналів дає більш точну оцінку аргументу тарувальної кривої, ніж аналогічні відношення для гармонік, що лишилися, оскільки частота першої гармоніки найбільш віддалена від центральної частоти артефакту.

Для безперервного сигналу $y(t)$ коефіцієнти a_n , b_n та амплітуда α_n n -ї гармоніки Фур'є обчислюються за стандартними формулами

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T_n} \int_t^{t+T} y(t) \sin(2\pi n f_n t) dt; \\
 b_n &= \frac{2}{T_n} \int_t^{t+T} y(t) \cos(2\pi n f_n t) dt; \\
 a_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, (n=1,2,\dots)
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

де $f_n = \frac{1}{T_n}$ - частота першої гармоніки Фур'є, Гц.

Формально (4.23) можна розглядати як згладжувальний фільтр, в якому в якості вагових коефіцієнтів використані елементарні тригонометричні функції [25]. Як відомо, згладжувальні властивості такого фільтра зростають при віддаленні частоти завади від частоти гармоніки. Крім того, згладжування завади тим ефективніше, чим більш гладку форму має її спектр.

Для оцінки частоти пульсу спектральним методом спочатку обирається пробний період T_0 та обчислюються коефіцієнти Фур'є на інтервалі часу $2T_0$:

$$\begin{aligned}
 a(T_0) &= \frac{1}{T_0} \int_t^{t+2T_0} y(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) dt, \\
 b(T_0) &= \frac{1}{T_0} \int_t^{t+2T_0} y(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) dt, \\
 a(2T_0) &= \frac{1}{T_0} \int_t^{t+2T_0} y(t) \sin\left(\frac{\pi}{T_0} t\right) dt, \\
 b(2T_0) &= \frac{1}{T_0} \int_t^{t+2T_0} y(t) \cos\left(\frac{\pi}{T_0} t\right) dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Згідно з апіорною інформацією, період T_n артеріальних пульсацій, що визначається, лежить в діапазоні від 0,25 до 2 с, тому величина пробного періоду повинна обиратися з цього ж діапазону. Якщо в (4.23) замість $y(t)$ підставити першу гармоніку Фур'є артеріальних пульсацій та виконати інтегрування, отримаємо такий вираз:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0}{T_n}\right) = \frac{a(2T_0) \cdot b(T_0)}{a(T_0) \cdot b(2T_0) - a(2T_0) b(T_0)},
 \tag{4.25}$$

з якого може бути знайдена оцінка періоду T_n .

Потрібно відмітити, що цей вираз не залежить від амплітуди та фази вимірюваного сигналу $y(t)$, а також від постійної складової фотоплетизмографічного сигналу.

Таким чином, проаналізовані основні етапи обробки біосигналів на прикладі аналізу фотоплетизмографічних даних і розглянуті основні методи обробки біосигналів, що проводяться за допомогою фільтрації, вказані їх переваги і недоліки та приведені амплітудні характеристики і приклади обробки фотоплетизмографічних сигналів. Для зменшення похибки при реалізації інформаційно-вимірювальних систем з оптичним перетворенням біосигналів з метою більш повного використання апріорної інформації про характер вимірювальних сигналів запропоновано використання різних методів фільтрації (метод найменших квадратів, медіанна фільтрація).

4.3.3 Моделювання в складних оптико-електронних системах діагностики стану організму людини із застосуванням математичного апарату нечіткої логіки

При розробці медичних діагностично-інформаційних систем велике значення має аналіз параметрів, які використовує сучасна медицина.

При розробці медичної експертної системи необхідно вирішити ряд питань [61], а саме:

- а) вибір та визначення призначення системи;
- б) вибір структурної схеми системи;
- в) формування та аналіз переліку нозологічних форм, які будуть вивчатись, і збір статистично достовірної інформації про вираженість симптоматики, а також про функціональний стан організму;
- г) вибір методу обробки біомедичної інформації;
- д) побудова алгоритму для вирішення задач оцінки біомедичної інформації та видачі діагностичного і прогностичного висновку.

Проведемо аналіз медичних експертних систем.

Для вирішення задач діагностики і прогнозування при медико-біологічних дослідженнях найбільше розповсюдження отримали ймовірно-статистичні методи: регресійний аналіз і бессівський підхід [2]. Дані методи визначаються наявністю великих об'ємів даних та знань, складністю подальшої математичної обробки та інтерпретації отриманих результатів.

У медичних експертних системах обробка даних та знань зводиться до трьох основних етапів [61]:

- а) елементи інформації розміщуються у певних структурах, які мають вигляд параметрів та діагнозів;
- б) база зібраних даних та теоретичних знань упорядковуються: формуються їх структура, визначається порядок розміщення інформації, характер взаємозв'язку між елементами інформації;
- в) здійснюється пошук найбільш необхідної інформації, приймається рішення, редагується база знань та база даних.

По суті, прийняття рішення зводиться до ідентифікації нелінійних об'єктів з одним виходом та багатьма входами [56].

В медичних експертних системах для обробки інформації використовується два підходи до організації медичних даних [61]:

а) фрагментування;

б) комплексування.

При фрагментуванні задача обробки даних підрозділяється на окремі частини в цілях більш ефективного її вирішення.

При комплексуванні для вирішення окремих задач, параметри об'єднуються в більш великі розділи.

На практиці в медично-експертних системах (МЕС) знаходять застосування обидва підходи, оскільки дані різних досліджень тісно пов'язані один з одним. Результати обробки використовуються для верифікації діагнозу, вибору методів лікування, прогностичних висновків, тощо.

З метою створення моделі аналізу стану організму людини, будується експертна система шляхом проектування та налаштування нечітких баз знань, які представляють собою сукупність лінгвістичних висловлювань типу: якщо <входи>, то <виходи>.

Під час проведення діагностики, захворювання проявляється у вигляді тих чи інших ознак. За наявністю, ступенем прояву та за сумісністю ознак приймається рішення про глибину порушень в організмі.

Основними ознаками, які приймаються для розрахунку можуть бути симптоми, синдроми. Виділяють симптоми суб'єктивні, які базуються на скаргах хворих (біль, задишка та ін.) та об'єктивні, тобто отримані під час обстеження хворого лікарем (пульс, артеріальний тиск, аускультативні та перкуторні дані тощо). До об'єктивних ознак захворювання також належать показники інструментальних та лабораторних методів дослідження (фотоплетизмографічні, рентгенографічні, томографічні методи, загальний аналіз сечі і таке ін.).

Проектування експертної системи буде високоякісним лише у випадку, коли дослідження проводить досвідчений лікар –діагност. Таке дослідження може проектуватись групою кваліфікованих експертів у даній галузі діагностики.

Базова структура МЕС представлена на рис.4.9 демонструє наявність у інтерфейсу такої комп'ютерної програми з двома функціями: отримувати знання у експерта та вести діалог з користувачем.

При реалізації МЕС для діагностики стану організму запропонований підхід, який базується на описі причинно-наслідкових зв'язків між факторами ризику (причинами) та конкретним діагнозом (наслідком), які представляються у вигляді виразів, зручних для формалізації за допомогою апарата нечіткої логіки.

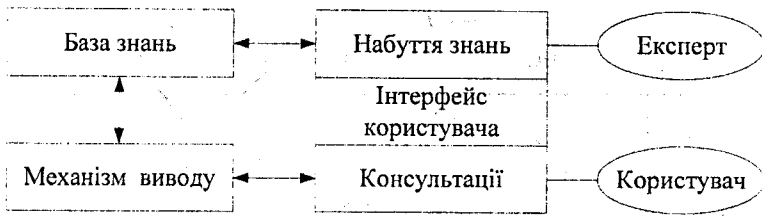


Рисунок 4.9 – Базова структура МЕС

Під час діагностики стану організму людини необхідно використовувати ступені важкості патології:

- а) d_1 – варіант норма;
- б) d_2 – патологічні зміни латентні (перший рівень);
- в) d_3 – патологічні зміни помірні (другий рівень);
- г) d_4 – патологічні зміни середнього ступеню важкості (третій рівень);
- д) d_5 – патологічні зміни важкі (четвертий рівень);
- е) d_6 – патологічні зміни дуже важкі (п'ятий рівень).

Для кожної діагностичної ознаки рівень патології різний: зміни амплітуди, частоти кольору, інтенсивності і таке інше.

Вказані рівні $d_1 - d_6$ можна вважати також варіантом діагнозу, який потрібно розпізнати. Під час з'ясування діагнозу у конкретного хворого можна використовувати параметри, які визначаються за допомогою оптико-електронного комплексу, який дозволяє аналізувати рівень мікроциркуляції в хреботно-рухомих сегментах.

Для оцінки значень лінгвістичних змінних $X_1 - X_n$ необхідно використовувати єдину шкалу якісних термів: Н – низький, НС – нижче середнього, С – середній, В – високий, ВС – вище середнього. Кожний з цих термів представляє нечітку множину, яка задана за допомогою спеціальних функцій належності (рис.4.10).

Статистична обробка матеріалів за допомогою регресійного, факторного і кластерного аналізу дозволяє виявити ступінь впливу патологічних змін у хребтових сегментах на мікрогемодинамічні та функціональні показники внутрішніх органів, які зв'язані з ушкодженими сегментами. Оскільки кластерний аналіз призводить до групування більшості сегментарних і тканинних мікроциркуляторних та функціональних показників, можна підтвердити експериментальний висновок про те, що вертеброгенна патологія реалізується через зміни у трофічному комплексі тканин відповідних внутрішніх органів таблиці 4.1 (для окремих внутрішніх органів).

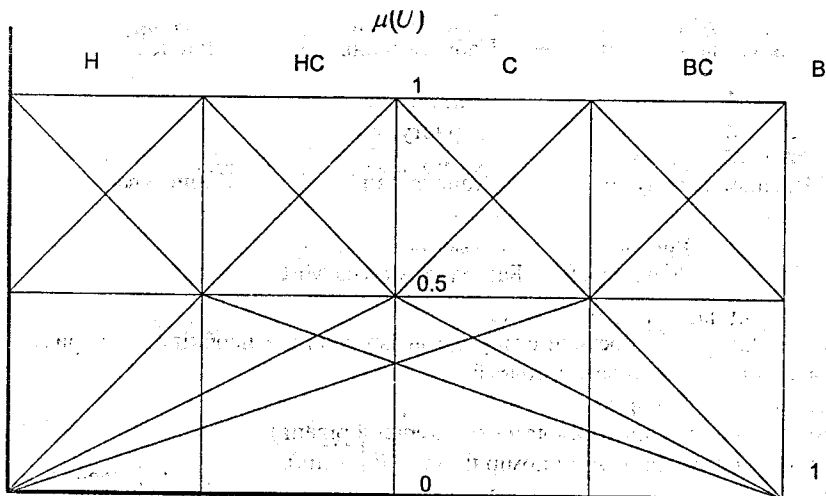


Рисунок 4.10 – Функції належності нечітких термів

Таблиця 4.1 – Сегменти хребта окремих внутрішніх органів

Орган	ХРС (С – шийні, Т – грудні сегменти)
Очі	С1, С2, С7, С8
Щитовидна залоза	С4, С5
Серце	С3, С5, С6, С7, С8, Т1, Т2, Т3, Т4
Печінка	Т3, Т5, Т6, Т7
Підшлункова залоза	Т7, Т8, Т9, Т10, Т11
Нирки	Т10, Т11, Т12
Шлунок	Т5, Т7, Т8
Селезінка	Т5, Т6, Т7, Т10

Враховуючи те, що при клінічних дослідженнях часто потрібно використовувати не тільки чіткі цифрові критерії, але й певні лінгвістичні характеристики змін (термів), нами проводився аналіз частини показників за допомогою математичного апарата нечіткої логіки [62,63]. Застосування математичного апарата нечіткої логіки може бути важливим у випадках

необхідності визначення ймовірності взаємозв'язку патологічних станів, які мають різні клінічні характеристики.

При цьому введені лінгвістичні змінні [64] визначаються співвідношенням

$$D = F_d(Z_1, Z_2, \dots, Z_n), \quad (4.26)$$

де D – функціональний стан організму, який визначається рівнями $d_1 - d_6$, Z_1, Z_2, \dots, Z_n – функціональний стан окремих внутрішніх органів, який визначається за значеннями коефіцієнта асиметрії у хребтових сегментах

$$Z_n = F_x(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.27)$$

де x_1, x_2, \dots, x_n , – значення коефіцієнта асиметрії у відповідних ХРС.

Коефіцієнт асиметрії визначається таким чином. За допомогою оптико-електронного комплексу визначаються рівні мікроциркуляції сегмента, що досліджується і сусідніх сегментів (рис. 4.11).

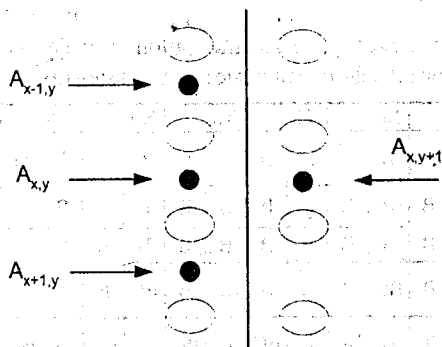


Рисунок 4.11 – Схематичне зображення хребтного стовбура із певним конкретно взятим сегментом

$$K_{ac. (л. пр)} = \frac{A_{x,y}}{(A_{x-1,y} + A_{x,i+1} + A_{x+1,y})/3} = \frac{3A_{x,y}}{A_{x-1,y} + A_{x,y} + A_{x+1,y}}, \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{при } A_{x,y} < (A_{x-1,y} + A_{x,i+1} + A_{x+1,y}) / 3 \quad (4.28)$$

$$K_{ac. (л. пр)} = \frac{(A_{x-1,y} + A_{x,i+1} + A_{x+1,y})/3}{A_{x,y}} = \frac{A_{x-1,y} + A_{x,y} + A_{x+1,y}}{3A_{x,y}}, \rightarrow \text{при}$$

$$\rightarrow \text{при } A_{x,y} > (A_{x-1,y} + A_{x,i+1} + A_{x+1,y}) / 3 \quad (4.29)$$

$$K_{ac} = \frac{K_{c.a.} + K_{c.np}}{2}$$

де $A_{x,y}$ рівень мікроциркуляції сегментів, що досліджуються.

Відповідність значення коефіцієнта асиметрії у сегментах з рівнем функціонального стану серця та жовчного міхура наведені у табл. 4.2 та 4.3.

Для кожної із баз даних записуються функції належності для формалізації знань.

Логічні рівняння для діагностики функціонального стану серця:

$$\mu^{d1}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \mu^B(X3) \cdot \mu^B(X5) \cdot \mu^B(X6) \cdot \mu^B(X7) \cdot \mu^B(X8) \cdot \mu^B(X9) \cdot \mu^B(X10) \cdot \mu^B(X11) \cdot \mu^B(X12) \quad (4.30)$$

$$\mu^{d2}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \mu^{BC}(X3) \cdot \mu^B(X5) \cdot \mu^{BC}(X6) \cdot \mu^B(X7) \cdot \mu^{BC}(X8) \cdot \mu^B(X9) \cdot \mu^{BC}(X10) \cdot \mu^B(X11) \cdot \mu^{BC}(X12) \vee \mu^B(X3) \cdot \mu^{BC}(X5) \cdot \mu^B(X6) \cdot \mu^{BC}(X7) \cdot \mu^B(X8) \cdot \mu^{BC}(X9) \cdot \mu^B(X10) \cdot \mu^{BC}(X11) \cdot \mu^B(X12) \quad (4.31)$$

Таблиця 4.2 – База даних експерта про співвідношення функціонального стану серця із значенням коефіцієнта симетрії у сегментах

Сегменти Ступінь змін	X3		X5		X6		X7		X8		X9		X10		X11		X12	
	Л	П	Л	П	Л	П	Л	П	Л	П	Л	П	Л	П	Л	П	Л	П
Норма	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В	В
Патологія I	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В
	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС	В	ВС
Патологія II	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С
	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС	С	ВС
Патологія III	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С
	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С
Патологія IV	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС
	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С	НС	С
Патологія V	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н
	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС	Н	НС

Таблиця 4.3 -- База даних експерта при оцінюванні ступеня патології жовчного міхура

Рівень патології \ Сегмент	С4		Т7		Т8		Т10	
	л	п	л'	п	л	п	л	п
0	В	В	В'	В	В	В	В	В
	В	В	В	В	В	В	В	В
I	В	BC	В	BC	В	BC	В	BC
	BC	В	BC	В	BC	В	BC	В
II	BC	С	BC	С	BC	С	BC	С
	С	BC	С	BC	С	BC	С	BC
III	С	С	С	С	С	С	С	С
	С	С	С	С	С	С	С	С
IV	С	HC	С	HC	С	HC	С	HC
	HC	С	HC	С	HC	С	HC	С
V	HC	Н	HC	Н	HC	Н	HC	Н
	Н	HC	Н	HC	Н	HC	Н	HC

$$\begin{aligned}
 \mu^{d3}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) &= \mu^{BC}(X3) \cdot \\
 \mu^C(X5) \cdot \mu^{BC}(X6) \cdot \mu^C(X7) \cdot \mu^{BC}(X8) \cdot \mu^C(X9) \cdot \mu^{BC}(X10) \cdot \\
 \mu^C(X11) \mu^{BC}(X12) \vee \mu^C(X3) \cdot \mu^{BC}(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \\
 \mu^{BC}(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^{BC}(X9) \cdot \mu^C(X10) \cdot \mu^{BC}(X11) \mu^C(X12)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
 \mu^{d4}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) &= \\
 \mu^C(X3) \cdot \mu^C(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \mu^C(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^C(X9) \cdot \\
 \mu^C(X10) \cdot \mu^C(X11) \mu^C(X12) \vee \mu^C(X3) \cdot \mu^C(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \\
 \mu^C(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^C(X9) \cdot \mu^C(X10) \cdot \mu^C(X11) \mu^C(X12)
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
 \mu^{d5}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) &= \\
 \mu^C(X3) \cdot \mu^{HC}(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \mu^{HC}(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^{HC}(X9) \cdot \\
 \mu^C(X10) \cdot \mu^{HC}(X11) \mu^C(X12) \vee \mu^C(X3) \cdot \mu^{HC}(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \\
 \mu^{HC}(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^{HC}(X9) \cdot \mu^C(X10) \cdot \mu^{HC}(X11) \mu^C(X12)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{d6}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \\
& \mu^{HC}(X3) \cdot \mu^H(X5) \cdot \mu^{HC}(X6) \cdot \mu^H(X7) \cdot \mu^{HC}(X8) \cdot \mu^H(X9) \cdot \\
& \mu^{HC}(X10) \cdot \mu^C(X11) \mu^{HC}(X12) \vee \mu^{HC}(X3) \cdot \mu^C(X5) \cdot \mu^{HC}(X6) \cdot \\
& \mu^C(X7) \cdot \mu^{BC}(X8) \cdot \mu^C(X9) \cdot \mu^{HC}(X10) \cdot \mu^C(X11) \mu^H(X12)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Проілюструємо на прикладі:

$$\begin{aligned}
& \mu^{d1}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \\
& \mu^B(0,75) \cdot \mu^B(0,85) \cdot \mu^B(0,89) \cdot \mu^B(0,93) \cdot \mu^B(0,93) \cdot \mu^B(0,95) \cdot \\
& \mu^B(0,94) \cdot \mu^B(0,98) \cdot \mu^B(1) = \\
& 0.5 \cdot 0.72 \cdot 0.78 \cdot 0.64 \cdot 0.64 \cdot 0.6 \cdot 0.63 \cdot 0.52 \cdot 1 = 0.5
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{d2}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \\
& \mu^{BC}(0,75) \cdot \mu^B(0,85) \cdot \mu^{BC}(0,89) \cdot \mu^B(0,93) \cdot \mu^{BC}(0,93) \cdot \mu^B(0,95) \cdot \\
& \mu^{BC}(0,94) \cdot \mu^B(0,98) \cdot \mu^{BC}(1) \vee \mu^B(0,75) \cdot \mu^{BC}(0,85) \cdot \mu^B(0,89) \cdot \\
& \mu^{BC}(0,93) \cdot \mu^B(0,93) \cdot \mu^{BC}(0,95) \cdot \mu^B(0,94) \cdot \mu^{BC}(0,98) \mu^B(1) = \\
& 1 \cdot 0.72 \cdot 0.78 \cdot 0.64 \cdot 0.65 \cdot 0.6 \cdot 0.61 \cdot 0.61 \cdot 0.51 \cdot 0.5 \vee \\
& \vee 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.71 \cdot 0.65 \cdot 0.64 \cdot 0.61 \cdot 0.63 \cdot 0.53 \cdot 1 = 0.5
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{d3}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \\
& \mu^{BC}(0,75) \cdot \mu^C(0,85) \cdot \mu^{BC}(0,89) \cdot \mu^C(0,93) \cdot \mu^{BC}(0,93) \cdot \mu^C(0,95) \cdot \\
& \mu^{BC}(0,94) \cdot \mu^C(0,98) \mu^{BC}(1) \vee \mu^C(0,75) \cdot \mu^{BC}(0,85) \cdot \mu^C(0,89) \cdot \\
& \mu^{BC}(0,93) \cdot \mu^C(0,93) \cdot \mu^{BC}(0,95) \cdot \mu^C(0,94) \cdot \mu^{BC}(0,98) \mu^C(1) = \\
& 1 \cdot 0.31 \cdot 0.78 \cdot 0.15 \cdot 0.65 \cdot 0.12 \cdot 0.31 \cdot 0.05 \cdot 0.5 \vee \\
& \vee 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.22 \cdot 0.65 \cdot 0.15 \cdot 0.61 \cdot 0.13 \cdot 0.53 \cdot 0 = 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{d4}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \\
& \mu^C(0,75) \cdot \mu^C(0,85) \cdot \mu^C(0,89) \cdot \mu^C(0,93) \cdot \mu^C(0,93) \cdot \mu^C(0,95) \cdot \\
& \mu^C(0,94) \cdot \mu^C(0,98) \mu^C(1) \vee \mu^C(0,75) \cdot \mu^C(0,85) \cdot \mu^C(0,89) \cdot \\
& \mu^C(0,93) \cdot \mu^C(0,93) \cdot \mu^C(0,95) \cdot \mu^C(0,94) \cdot \mu^C(0,98) \mu^C(1) = \\
& 1 \cdot 0.31 \cdot 0.22 \cdot 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.12 \cdot 0.13 \cdot 0.05 \cdot 0 \vee \\
& \vee 0.5 \cdot 0.31 \cdot 0.22 \cdot 0.15 \cdot 0.12 \cdot 0.13 \cdot 0.05 \cdot 0 = 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} \mu^{d5}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \\ \mu^C(0,75) \cdot \mu^{HC}(0,85) \cdot \mu^C(0,89) \cdot \mu^{HC}(0,93) \cdot \mu^C(0,93) \cdot \mu^{HC}(0,95) \cdot \\ \mu^C(0,94) \cdot \mu^{HC}(0,98) \mu^C(1) \vee \mu^C(0,75) \cdot \mu^{HC}(85) \cdot \mu^C(0,89) \cdot \\ \mu^{HC}(0,93) \cdot \mu^C(0,93) \cdot \mu^{HC}(0,95) \cdot \mu^C(0,94) \cdot \mu^{HC}(0,98) \mu^C(1) = \\ 0.5 \cdot 0.16 \cdot 0.22 \cdot 0.8 \cdot 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.13 \cdot 0.135 \cdot 0 \vee \\ \vee 0.5 \cdot 0.16 \cdot 0.22 \cdot 0.8 \cdot 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.13 \cdot 0.135 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \mu^{d6}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \\ \mu^{HC}(0,75) \cdot \mu^H(0,85) \cdot \mu^{HC}(0,89) \cdot \mu^H(0,93) \cdot \mu^{HC}(0,93) \cdot \mu^H(0,95) \cdot \\ \mu^{HC}(0,94) \cdot \mu^C(0,98) \mu^{HC}(1) \vee \mu^{HC}(0,75) \cdot \mu^C(0,85) \cdot \mu^{HC}(0,89) \cdot \\ \mu^C(0,93) \cdot \mu^{BC}(0,93) \cdot \mu^C(0,95) \cdot \mu^{HC}(0,94) \cdot \mu^C(0,98) \mu^H(1) = \\ 0.27 \cdot 0.11 \cdot 0.125 \cdot 0.45 \cdot 0.07 \cdot 0.03 \cdot 0.05 \cdot 0.01 \cdot 0 \vee \\ \vee 0.27 \cdot 0.31 \cdot 0.125 \cdot 0.15 \cdot 0.65 \cdot 0.12 \cdot 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Логічні рівняння для діагностики функціонального стану жовчного міхура:

$$\mu^{d1}(X4, X15, X16, X18) = \mu^B(X4) \cdot \mu^B(X15) \cdot \mu^B(X16) \cdot \mu^B(X18) \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \mu^{d2}(X4, X15, X16, X18) = \mu^B(X4) \cdot \mu^{BC}(X15) \cdot \mu^B(X16) \cdot \mu^{BC}(X18) \vee \\ \mu^{BC}(X4) \cdot \mu^B(X15) \cdot \mu^{BC}(X16) \cdot \mu^B(X18) \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \mu^{d3}(X4, X15, X16, X18) = \mu^{BC}(X4) \cdot \mu^C(X15) \cdot \mu^{BC}(X16) \cdot \mu^C(X18) \vee \\ \mu^C(X4) \cdot \mu^{BC}(X15) \cdot \mu^C(X16) \cdot \mu^{BC}(X18) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \mu^{d4}(X4, X15, X16, X18) = \mu^C(X4) \cdot \mu^C(X15) \cdot \mu^C(X16) \cdot \mu^C(X18) \vee \\ \mu^C(X4) \cdot \mu^C(X15) \cdot \mu^C(X16) \cdot \mu^C(X18) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \mu^{d5}(X4, X15, X16, X18) = \mu^B(X4) \cdot \mu^{BC}(X15) \cdot \mu^B(X16) \cdot \mu^{BC}(X18) \vee \\ \mu^{BC}(X4) \cdot \mu^B(X15) \cdot \mu^{BC}(X16) \cdot \mu^B(X18) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \mu^{d6}(X4, X15, X16, X18) = \mu^{HC}(X4) \cdot \mu^H(X15) \cdot \mu^{HC}(X16) \cdot \mu^H(X18) \vee \\ \mu^H(X4) \cdot \mu^{HC}(X15) \cdot \mu^H(X16) \cdot \mu^{HC}(X18) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Для використання логічних рівнянь, необхідно визначити функції належності $\mu^j(x_i)$ нечітких термів j (Н, НС, С, ВС, В) для усіх факторів x_n , $i = \overline{1, 20}$. Кожному фактору x_n повинна відповідати своя п'ятірка функцій належності. При цьому \underline{x}_n і \overline{x}_n - нижня та верхня межа діапазону змінювання фактора x_n . Вибір подібних кривих обумовлений тим, що вони є кусково-лінійними апроксимаціями експертних функцій належності $\mu^j(x_n)$,

сдержаних для факторів x_1+x_{20} методом парних порівнянь [61]. Графічний вигляд функцій належності зображений на рис. 4.11

Перехід від функції $\tilde{\mu}^j(u)$ до шуканих функцій $\mu^j(x_n)$ здійснюється:

$$u_i = 4 \frac{x_n - x_n}{x_n - x_n}, \tilde{\mu}^j(u_n) = \mu^j(x_n). \quad (4.48)$$

Прийняття рішення про ступінь важкості протікання захворювання можна провести за таким алгоритмом:

Крок 1. Фіксуються значення факторів для конкретного хворого $x_n (n = \overline{1, 20})$.

Крок 2. За формулами (16) – (20) визначаються значення функцій належностей $\mu^j(x_n)$ при фіксованих значеннях факторів x_n .

Крок 3. Користуючись логічними рівняннями обчислюються функції належностей $\mu^{\mu^{d_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для усіх діагнозів $d_n, n = \overline{1, 6}$. При цьому операції $J(\cdot)$ та АБО (V) над функціями належностей $\mu(a)$ та $\mu(b)$ замінюються на операції \min та \max :

$$\mu(a) \cdot \mu(b) = \min[\mu(a), \mu(b)];$$

$$\mu(a) \vee \mu(b) = \max[\mu(a), \mu(b)].$$

Крок 4. Визначається рішення d_0 , для якого

$$\mu^{d_0}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max[\mu^{d_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Цьому рішення і буде відповідати шуканий діапазон про ступінь важкості протікання захворювання.

Приклад

Після обстеження за допомогою оптико-електронних методів у хворого К. зафіксовані такі результати (табл. 4.4).

Таблиця 4.4 – Результати обстежень за допомогою оптико-електронного комплексу

ХРС КА	C3(X3)	C5(X5)	C6(X6)	C7(X7)	C8(X8)	Т1(X9)	Т2(X10)	Т3(X11)	Т4(X12)
Л	345	245	298	298	311	245	245	256	256
П	235	267	248	245	256	211	211	233	241

Визначаються коефіцієнти асиметрії для відповідних ХРС (табл.4.5)

Таблиця 4.5 – Коефіцієнти асиметрії для відповідних ХРС

ХРС Рів.А	С3(Х3)	С5(Х5)	С6(Х6)	С7(Х7)	С8(Х8)	Тн1(Х9)	Тн2(Х10)	Тн3(Х11)	Тн4(Х12)
Л	0.7	0.8	0.88	0.95	0.85	1	0.96	0.95	1
П	0.79	0.9	0.9	0.91	1	0.89	0.92	1	1
К _{ас}	0.75	0.85	0.89	0.93	0.93	0.95	0.94	0.98	1

Далі визначаються функції належності для кожних термів і їх значення підставляються у вирази (4.42)–(4.47).

$$\mu^{d1}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = 0.42 \cdot 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.75 \cdot 1 \cdot 0.95 \cdot 1 = 0.42$$

$$\mu^{d2}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = 0.8 \cdot 0.55 \cdot 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.75 \cdot 0.95 \cdot 1 \vee 0.42 \cdot 0.76 \cdot 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.9 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 0.5 = 0.55$$

$$\mu^{d3}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.75 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0 \cdot 0.95 \cdot 0.05 \cdot 0 \vee 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.35 \cdot 0.1 \cdot 0.15 \cdot 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.05 = 0.05$$

$$\mu^{d4}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \mu^C(X3) \cdot \mu^C(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \mu^C(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^C(X9) \cdot \mu^C(X10) \cdot \mu^C(X11) \vee \mu^C(X3) \cdot \mu^C(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \mu^C(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^C(X9) \cdot \mu^C(X10) \cdot \mu^C(X11) = 0.01$$

$$\mu^{d5}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \mu^C(X3) \cdot \mu^{HC}(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \mu^{HC}(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^{HC}(X9) \cdot \mu^C(X10) \cdot \mu^{HC}(X11) \vee \mu^C(X3) \cdot \mu^{HC}(X5) \cdot \mu^C(X6) \cdot \mu^{HC}(X7) \cdot \mu^C(X8) \cdot \mu^{HC}(X9) \cdot \mu^C(X10) \cdot \mu^{HC}(X11) = 0.02$$

$$\mu^{d6}(X3, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12) = \mu^{HC}(X3) \cdot \mu^H(X5) \cdot \mu^{HC}(X6) \cdot \mu^H(X7) \cdot \mu^{HC}(X8) \cdot \mu^H(X9) \cdot \mu^{HC}(X10) \cdot \mu^C(X11) \vee \mu^{HC}(X3) \cdot \mu^C(X5) \cdot \mu^{HC}(X6) \cdot \mu^C(X7) \cdot \mu^{HC}(X8) \cdot \mu^C(X9) \cdot \mu^{HC}(X10) \cdot \mu^C(X11) = 0.01$$

Визначається рішення d_0 , для якого

$$\mu^{d_0}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{\mu^{d_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

При цьому максимальним значенням є 0.55 для ступеня важкості протікання захворювання d2, тобто патологічні зміни латентні (перший рівень);

4.3.4 Аналіз зображення за інтенсивністю світлового потоку при діагностиці захворювань рогівки ока

Діагностики захворювань рогівки реалізується шляхом об'єктивного аналізу її вторинної флуоресценції і підвищення безпеки та скорочення часу дослідження.

Для більш точної діагностики її площі та глибини ураження та порівняння результатів забарвлення рогівки реєструють інтенсивність люмінесценції за допомогою фотоприймальної матриці з подальшою комп'ютерною обробкою вторинної люмінесценції рогівки, визначають фотоденситометрично площини та інтенсивності світіння.

Оцінка діагностики ураження рогівки базується на тому, що флуоресцеїн сорбується зоною запалення і в залежності від кількості сорбованого флуоресцеїну змінюється колір та тон забарвленої флуоресцеїном області ураження. Кількість сорбованого флуоресцеїну відповідає ступеню запального процесу, що забезпечує можливість визначити активність та характер патологічного процесу.

Для вирішення задачі був розроблений алгоритм обробки зображення вторинної флуоресценції за інтенсивністю світлового потоку на прикладі аналізу запального процесу ураження рогівки ока, який складається з таких етапів:

На першому етапі зображення записується в двовимірну матрицю (рис. 4.5).

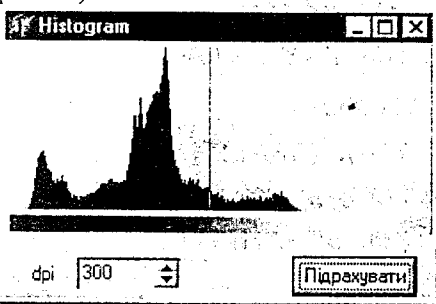


Рисунок 4.5 – Двовимірну матрицю зображення вторинної флуоресценції

Потім реалізується операція побудови гістограми за інтенсивністю зображення, що відповідає матриці A (рис. 4.6).

Обирається пік на гістограмі S_{\max} (відповідає номеру градації з максимальною кількістю пікселів цієї градації).

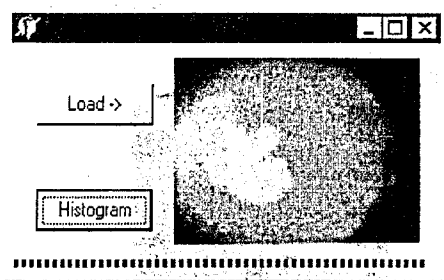


Рисунок 4.6 – Гістограма інтенсивності зображення

Далі множиться отриманий номер градації C_{\max} на коефіцієнт $k=1.5$. Отримане значення K_{\min} , характеризує нижню межу інтенсивності, починаючи з якої буде відбуватися виділення площі.

Реалізується підрахунок за вихідним зображенням кількості пікселів, градація яких $\geq K_{\min}$ (результат підрахунку буде абсолютна S_{pix} площа в пікселях) (рис.4.7).

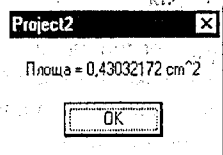


Рисунок 4.7 – Результат підрахунку за вихідним зображенням кількості пікселів

Знаючи DPI зображення A , визначається абсолютна площа S_{cm} у cm^2 за такою формулою $S_{\text{cm}} = S_{\text{pix}} * 2.54^2 / \text{DPI}^2$.

Приклад. Хворий М., 44 років, поступив в клініку з діагнозом: герпетичний рецидивний кератит правого ока. В анамнезі - грип, через 2 тижня - рецидив кератиту. Також з анамнезу відомо, що рецидив кератиту вже третій раз. Гострота зору правого ока - 0.02 не корегує. Об'єктивні дані: виражена змішана ін'єкція, на рогівці різної інтенсивності помутніння по всій поверхні, виразкування, рогівка непрозора.

Запропонованим нами способом на рогівку дозатором нанесено 0.1 мл 1% розчину флуоресцеїну натрію з рН 7.4. Майже вся поверхня рогівки фарбується в жовто-зелений колір різної інтенсивності.

З інтервалом в 10 хвилин протягом 30 хв. проводилась реєстрація вторинної флуоресценції рогівки за допомогою цифрової фотокамери, яка має електроз'єднання з комп'ютером.

Виходячи з даних денситометрії (рис. 4.8, рис. 4.9) зроблений висновок, що незважаючи на велику площу враження рогівки, низьку гостроту зору, свіже герпетичне враження її, запальний процес захоплює тільки епітелії рогівки. На основі чого зроблений висновок, що лікування не потребує загального медикаментозного (протівірусні таблетки, парентеральне введення імуноглобулінів) і хірургічного (лікувальна кератопластика)

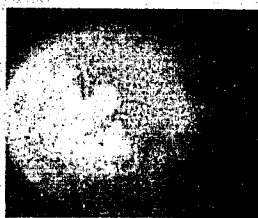
втручання, а може бути проведене місцеве (протівірусні краплі, мазі, мідріатики, кератопластичні гелі).



а)



б)



а)



б)

Рисунок 4.8 – а) зображення вторинної флуоресценції та розподіл інтенсивності світіння в жовто-зеленій області (520-540 нм) в моменти найбільш інтенсивної люмінесценції зони враження рогової оболонки,

б) розподіл інтенсивності світіння в жовто-зеленій області (520-540 нм) враження рогової оболонки

Рисунок 4.9 – а) зображення вторинної флуоресценції та розподіл інтенсивності світіння в жовто-зеленій області враження рогової оболонки на шостий день після лікування,

б) розподіл інтенсивності світіння в жовто-зеленій області враження рогової оболонки на шостий день після лікування

Призначене лікування закінчилось одужанням пацієнта на шостий день перебування в клініці без призначення масивної загальної терапії і хірургічних втручань на оці, що має економічний ефект і виключає побічну дію ліків, які приймаються всередину або в ін'єкціях. Гострота зору при виписці = 0.1 не корегує. При повторному фарбуванні флуоресцеїном рогівка не фарбується, заживлення рогівки повне, про що свідчать дані денситометрії (рис. 4.9, а, б).

Запропонований спосіб дозволяє більш точно діагностувати захворювання рогівки, виключити необхідність використання контактних електродів, скоротити час обробки та аналізу зображення рогівки.

Контрольні питання

1. Назвіть основні сучасні напрямки взаємодії комп'ютерного моделювання і оптоелектронних технологій.
2. Як застосовується комп'ютерне моделювання в проектуванні оптичних лінз?
3. Як застосовується комп'ютерне моделювання при проектуванні багат шарових покриттів?
4. Що розуміють під реконструктивною комп'ютерною томографією?
5. Назвіть основні переваги реконструктивної комп'ютерної томографії як засобу діагностики.
6. Який зв'язок між інтенсивністю I пучка на виході детектора і інтенсивністю I_0 джерела рентгенівського випромінювання, що просвічує об'єкт?
7. Чим відрізняється звичайна рентгеноскопія від реконструктивної томографії?
8. Які відомо методи відтворення функцій $\mu(x, y)$ за множиною її проєкцій для методу реконструктивної томографії?
9. Охарактеризуйте дискретну модель, яку використовують при розв'язанні задачі реконструкції зображення.
10. Наведіть матричну модель реконструкції дискретного зображення та вкажіть її особливості.
11. Поясніть методологію застосування алгебраїчного підходу до розв'язання задачі реконструктивної томографії.
12. Наведіть структурну схему обладнання для медичної діагностики за допомогою реконструктивної томографії.
13. Яка розмірність результуючої матриці вимірів під час реконструктивної томографії?
14. Охарактеризуйте технічні показники кожного із чотирьох поколінь систем сканування реконструктивної томографії.
15. Які основні фактори впливають на час отримання томограми?
16. Яким має бути час отримання і обробки вимірних даних з наступною їх реконструкцією, щоб задовольнити сучасні вимоги реконструктивної томографії?
17. Які існують класичні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
18. В чому суть класичного методу Гауса-Жордана для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь та яка його алгоритмічна складність?
19. Як змінився час розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь в паралельній інтерпретації методу Гауса-Жордана і за рахунок чого?
20. Що таке зовнішній добуток векторів?
21. Як за допомогою паралельної інтерпретації методу Гауса-Жордана можна розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь та знайти матрицю, обернену до заданої?

5 МОДЕЛЮВАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В ОПТО- ЕЛЕКТРОННИХ ІНФОРМАЦІЙНО-ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ПРИСТРОЯХ

5.1 Основні принципи організації обчислювального процесу на паралельних регулярних однорідних середовищах

Одним із могутніх засобів синтезу і створення концептуально нових паралельних алгоритмів і структур для високопродуктивної обробки оптичної інформації є розвиток математичного моделювання просторово-часових обчислювальних процесів, які організовано в ході виконання операції над багатовимірними масивами даних. З метою створення реально діючих конкурентноспроможних спецпроцесорів високопродуктивної обробки оптичної інформації поряд з конструкторсько-технологічними дослідженнями оптоелектронної елементної бази необхідно розробляти імітаційні та аналітичні моделі оптичних та оптоелектронних спецобчислювачів.

В якості об'єктів моделювання пропонується обрати паралельні оптоелектронні спецобчислювачі, особливостями яких є багатофункціональність, яка полягає в суміщеній організації паралельного введення, обробки і виведення оптичної інформації; регулярність потоків даних і структурних зв'язків; однорідність структурних складових; звернення до конкретної структури даних – багатовимірних масивів.

За основний принцип обробки інформації спецпроцесором обрано принцип цифрової картинної обробки [65]. У відповідності з принципом цифрової картинної обробки числові матриці подаються в вигляді наборів бітових розрядних зрізів (PЗ), названих картинами, під якими розуміють сукупність однойменних розрядів кодів усіх елементів відповідних числових матриць [66]. Обчислювальний процес організують таким чином, щоб всі елементи бінарної картини вводились, оброблялись і виводились паралельно в просторі та часі.

Специфіку цифрової картинної обробки найповніше відображає техніка оптичних обчислень ВІА (двійкова алгебра зображень), яка демонструється як загальний спосіб описання і розвитку паралельних алгоритмів. Серед розглянутих форм подання чисел (рядкова, стекова, символічне кодування) для цифрового оптичного однорідного процесора зображень оптимальним з точки зору забезпечення мінімальної кількості тактів обчислень є стекове кодування, яке є не що інше, як друга назва способу подання числових матриць за наборами PЗ.

Будь-яку числову матрицю цілих чисел, в яких не береться до уваги розгляд знаку, подають за наборами PЗ в такому вигляді [66]:

$$A = \sum_{\alpha=0}^{L-1} 2^{\alpha} A_{(\alpha)}, \quad (5.1)$$

де $A_{(\alpha)}$ – бінарний РЗ з номером α матриці A ; 2^α – ваговий коефіцієнт відповідного розрядного зрізу $A_{(\alpha)}$ матриці A ; L – кількість бінарних РЗ.

5.2. Базовий набір бінарних операцій картинної обробки оптичної інформації

В результаті аналізу ряду практичних задач до набору базових бінарних операцій картинної обробки оптичної інформації, поданої в вигляді числових матриць, відносять такі операції, які утворюють функціонально-повну систему [67]:

- картинне логічне додавання \vee (паралельна матрична диз'юнкція "АБО");
- картинне логічне множення \wedge (паралельна матрична кон'юнкція "І");
- картинна логічна інверсія (паралельне матричне "НІ").

Виконуючи над двовимірними бінарними матрицями $X_{N \times N}$ і $Y_{N \times N}$ вказані операції формується результуюча матриця $Z_{N \times N}$ згідно відповідних математичних моделей:

$$Z = X \wedge Y, \text{ де } z_{ij} = x_{ij} \wedge y_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.2)$$

$$Z = X \vee Y, \text{ де } z_{ij} = x_{ij} \vee y_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3)$$

$$Z = \bar{X}, \text{ де } z_{ij} = \bar{x}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.4)$$

Операцію картинного логічного множення (5.2) дозволяє реалізувати цифровий оптично керований транспарант (ОКТ), який містить картинний оптичний інформаційний вхід 1, картинний оптичний вхід керування 2 і картинний оптичний вихід 3 (рис.5.1) [67].

Цифровий ОКТ є фундаментальним логічним елементом оптичної обчислювальної техніки. Він виконує дві функції: логічне перетворення оптичних зображень числових масивів і відновлення до стандартного рівня світлової енергії результуючого зображення за рахунок джерела напруги.

Фактично ОКТ є дискретним світлоклапанним пристроєм, виконаним в вигляді матриці, кожний елемент якої призначений для виконання логічної операції над одним бітом інформації. Пропускання світлового інформаційного сигналу зі входу 1 окремим елементом ОКТ керується світловим полем керувального сигналу зі входу 2.

Той ОКТ, який пропускає світловий інформаційний сигнал x_{ij} за умови присутності "одиночного" сигналу керування ($y_{ij}=1$), виконує функцію картинного логічного множення (5.2) і позначається буквою T .

Той ОКТ, який пропускає світловий інформаційний сигнал x_{ij} за умови присутності "нульового" сигналу керування ($y_{ij}=0$), називається інверсним ОКТ і позначається буквою \bar{T} . Він виконує функцію, математична модель якої описується так:

$$Z = X \wedge \bar{Y}, \text{ де } z_{ij} = x_{ij} \wedge \bar{y}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N \quad (5.5)$$

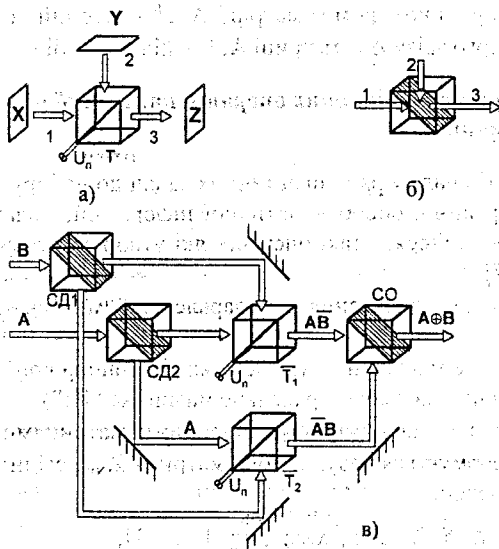


Рисунок 5.1 – Схема паралельних вузлів для картинних логічних операцій
 а) оптично-керований траспарант Т;
 б) світлооб'єднувач;
 в) сума за модулем 2.

Очевидно, що на інверсному ОКТ доцільно реалізувати операцію інверсії (5.4).

Картинне логічне додавання бінарних матриць (5.3) дозволяють реалізувати пристрої цифрової оптики, наприклад світлооб'єднувальна призма з напівпрозорим дзеркалом (рис.5.1,б), яка містить два картинних бінарних входи 1 і 2 та картинний бінарний вихід 3.

Функцію картинної нерівнозначності двох бінарних матриць, або іншими словами суму за модулем двох бінарних матриць, можна визначити на основі розглянутих базових операцій як

$$A \oplus B = AB \vee \overline{AB} \quad (5.6)$$

Оптична логічна схема (рис.5.1, в) для реалізації функції (5.6) містить два інверсні ОКТ, два світлоподільника СД та світлооб'єднувач СО.

5.3 Моделювання операцій картинної обробки над числовими матрицями (багатоградацийними зображеннями)

5.3.1 Паралельний запис, збереження і зчитування числових матриць

Введення числових матриць в оптоелектронний спецобчислювач організується, як зазначено в пункті 5.1, за розрядними зрізами.

Кожний РЗ в вигляді бінарної картинки може бути паралельно записаний, збережений і прочитаний на паралельному картинному двотактному тригері, реалізованому в вигляді MS-структури (рис.5.2) [68].

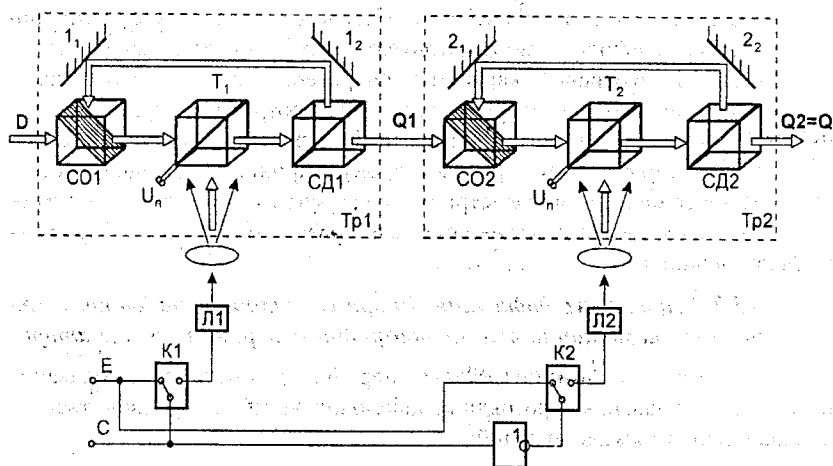


Рисунок 5.2 – Паралельний D-тригер з MS-структурою

Світлооб'єднувач CO1, оптично-керований транспарант T1, світло-поділювач CD1, дзеркала 1₁ і 1₂ утворюють M-тригер з виходом Q1, що являє собою перший паралельний D-тригер-защіпку Tr1. Елементи CO2, T2, CD2, дзеркала 2₁ і 2₂ утворюють S-тригер з виходом Q2, що являє собою другий паралельний D-тригер-защіпку Tr2. На першому такті відбувається запис інформації зі входу D пристрою в M-тригер. На другому такті відбувається перезапис інформації із M-тригера в S-тригер з передачею інформації на вихід пристрою Q2=Q. Керування M-тригером здійснюється за допомогою ланцюга із керувального електричного потенціального входу С, ключа K1, який на першому такті значенням С=1 вмикає напругу Е до лазера Л1, що випромінює світловий потік, який приводить M-тригер в активний стан. Керування S-тригером здійснюється через інвертор в аналогічному ланцюгу, що містить ключ K2 та лазер Л2, який на першому такті завдяки інвертору буде вимкнтий, привівши S-тригер в пасивний стан.

На другому такті при $C=0$ запис нової інформації в М-тригер блокується, а його попередня інформація переписується в S-тригер. При цьому для оптично-керованих транспарантів має виконуватись співвідношення

$$\tau_{зчит} < \tau_{запису} \quad (5.7)$$

Тоді модель паралельного MS-тригера можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} Q_2^{(t+2)} &= Q_1^{(t+1)} \wedge \bar{C}^{(t+1)}, & Q_1^{(t+1)} &= D^{(t)} \wedge C^{(t)}, \\ Q_2^{(t+2)} &= D^{(t)} \wedge C^{(t)} \wedge \bar{C}^{(t+1)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким чином, для паралельного збереження числових матриць, поданих L зрізами, доцільно використовувати просторові тривимірні регістри, побудовані на основі L картинних D-тригерів, які дозволяють також паралельно записувати та зчитувати матрицю за розрядними зрізами.

При необхідності організації режимів паралельного зсуву інформації на певне число розрядних зрізів в сторону старших чи молодших розрядних зрізів в тривимірному регістрі слід синтезувати схему для одновимірного варіанта за відомими правилами та адекватно відображати її на багатовимірний випадок.

5.3.2 Паралельне додавання бінарних матриць на оптоелектронному комбінаційному однорозрядному картинному суматорі

Суматор – вузол, який виконує операцію арифметичного додавання двох чисел. Додавання n-розрядних двійкових чисел x_i і y_i зводиться до виконання порозрядних операцій:

$$\left. \begin{aligned} S_i &= x_i + y_i + z_i \\ P_i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{якщо } x_i + y_i + z_i < 2, \quad (5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} S_i &= x_i + y_i + z_i \\ P_i &= 1 \end{aligned} \right\} \text{якщо } x_i + y_i + z_i \geq 2,$$

де S_i – значення суми в i-му розряді; Z_i – перенос із молодшого розряду; P_i – перенос в старший розряд.

Однорозрядним суматором називають комбінаційну схему, яка за розрядними значеннями доданків x_i і y_i та за значеннями переносу із молодшого розряду Z_i формується значення розрядної суми S_i і перенос в старший розряд P_i . Робота такого суматора описується в таблиці 5.1.

За відомими методами синтезу комбінаційних схем S_i та P_i можуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 s_i &= x_i \oplus y_i \oplus z_i = (\bar{x}_i \bar{y}_i z_i) \vee \\
 &\vee (\bar{x}_i y_i \bar{z}_i) \vee (x_i \bar{y}_i \bar{z}_i) \vee (x_i y_i z_i) \\
 p_i &= z_i (x_i \oplus y_i) \oplus x_i y_i
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Таблиця 5.1

x_i	y_i	z_i	S_i	P_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Схема паралельного комбінаційного двійкового однорозрядного суматора подана на рис.5.3.

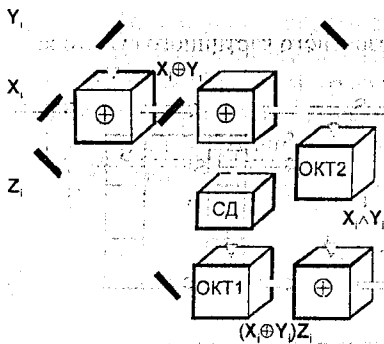


Рисунок 5.3 – Паралельний комбінаційний однорозрядний суматор

Основними її вузлами є: три картинних суматора за модулем два (\oplus), два ОКТ та світлоподільвач СД.

5.3.3 Паралельне додавання числових матриць за розрядними зрізами на оптоелектронному накопичувальному суматорі

Накопичувальним суматором (НСм) називають схему з пам'яттю, яка виконує арифметичне додавання кодів доданків (А) при поданні їх на інформаційний вхід суматора з інформацією, яку містить суматор.

$$\text{НСм} = \text{НСм} + \text{А}.
 \tag{5.11}$$

Один із методів побудови класичного НСМ полягає в використанні комбінаційного багаторозрядного суматора (рис.5.4) і регістра (рис.5.5). На рис.5.4. подана схема побудована за таким принципом для обробки матриць, поданих L-розрядними зрізами. Її особливість полягає в організації зворотного зв'язку, який підтримує інформацію з виходів НСМ на других паралельних входах багаторозрядного комбінаційного суматора, на перші входи якого подається потік доданків.

Структура багаторозрядного картинного суматора, наприклад з послідовним картинним переносом, представляє собою ланцюг послідовно з'єднаних однорозрядних комбінаційних суматорів.

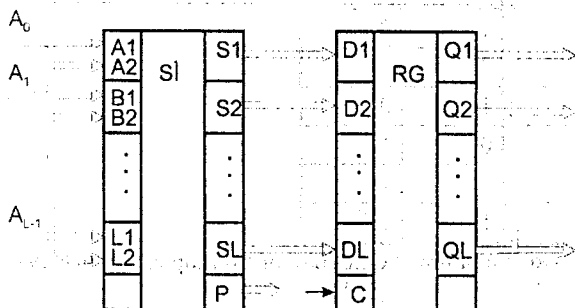


Рисунок 5.4 – Структурна схема багаторозрядного картинного суматора

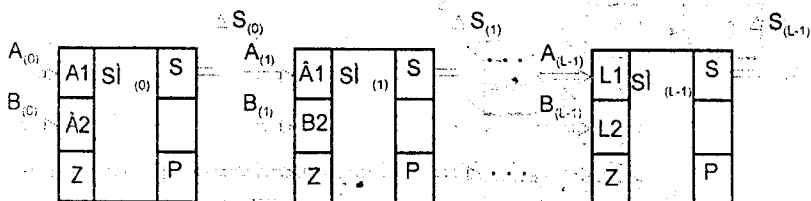


Рисунок 5.5 – Структура багаторозрядного картинного регістру

Час обробки L-зрізових матриць $A_{N \times N}$ і $B_{N \times N}$ на схемі складає

$$t_{cm} = L \cdot t_{sm}, \quad (5.12)$$

де t_{sm} – час затримки комбінаційного однорозрядного суматора.

5.3.4 Приклад моделювання операції паралельної картинної обробки на традиційному комп'ютері

Завдання. Скласти алгоритмічну модель виконання операції накопичення двох числових матриць X і Y на картинному накопичувальному суматорі.

Відомо, що дані числові матриці X і Y можна подати за формулою (5.1) відповідними наборами P_3 :

$$X = \sum_{\alpha=0}^{L-1} X_{(\alpha)}, Y = \sum_{\alpha=0}^{L-1} Y_{(\alpha)}.$$

В аналогічній формі подаватимемо і матрицю результату

$$C = \sum_{\alpha=0}^{L-1} C_{(\alpha)},$$

Причому вважатимемо, що початкові дані підібрані коректно, тобто за умови відсутності переповнення розрядної сітки машини в результаті ходу виконання операції.

Принцип роботи звичайного накопичувального суматора описано формулою (5.11). Вважатимемо, що структура накопичувального суматора побудована на основі багаторозрядного суматора (рис.5.4) і регістру (рис.5.5). Записуємо на перші паралельні входи ($i=0, \dots, (L-1)$) однорозрядних суматорів $SM_{(i)}$ відповідні розрядні зрізи, спочатку матриці X , а потім матриці Y . Організуємо ланцюги зворотного ходу між картинними виходами регістру RG і відповідними другими паралельними входами однорозрядних суматорів $SM_{(i)}$. Тоді, врахувавши процес формування картин суми та переносу за формулою (5.10), можна визначити результат накопичення в часі. Узагальнена форма паралельного, алгоритму подана на рис.5.6. В алгоритмі показано тривимірну організацію даних. Той факт, що бінарна матриця обробляється паралельно, враховано, наприклад, в операційній вершині 7 алгоритму, де при виконанні операції змінюється тільки третій індекс I в масивах SM , A , RG , Z , P . При написанні програми для реалізації розробленого алгоритму на послідовній ЕОМ слід звернути увагу на те, що всі розглянуті паралельні процеси будуть моделюватись як послідовні. Наприклад, фрагмент детальної блок-схеми для організації операцій в 7-ій операційній вершині матиме вигляд (рис.5.7).

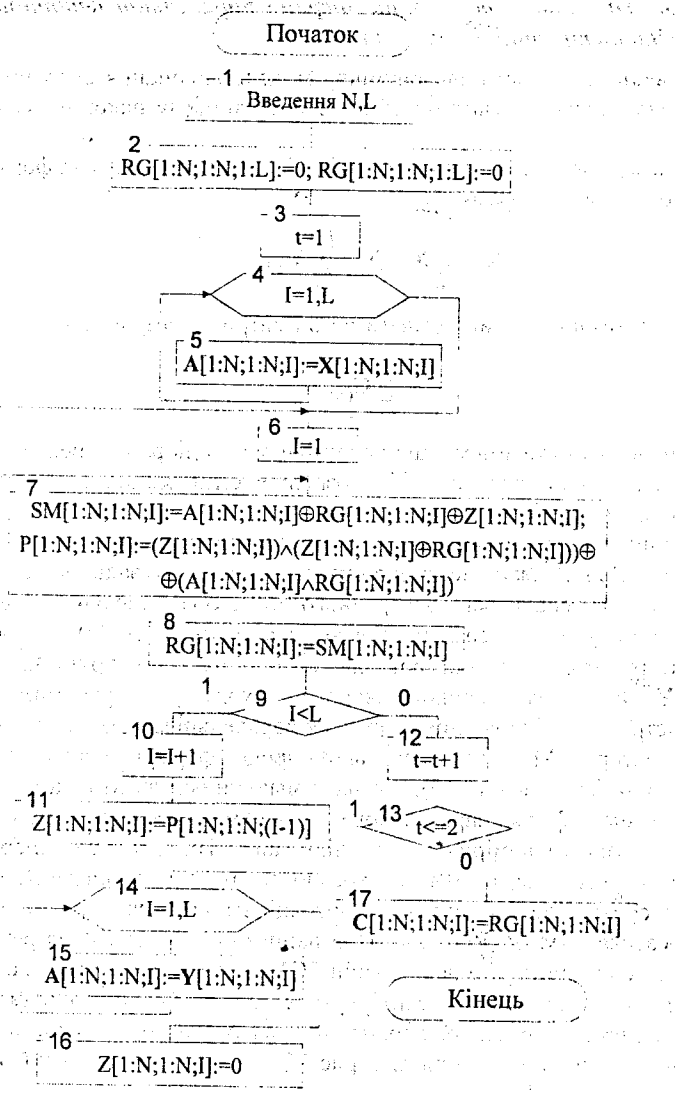


Рисунок 5.6 – Паралельний алгоритм роботи нагромаджуючого суматора

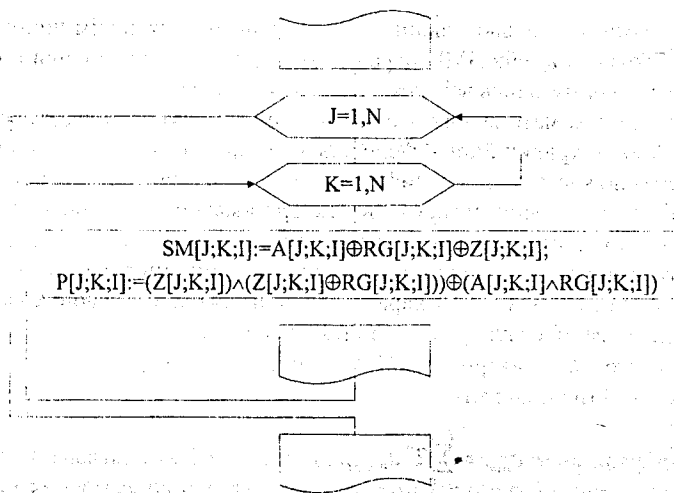


Рисунок 5.7 – Фрагмент детальної блок схеми для організації операцій в 7-ій операційній вершині

5.4 Математичне моделювання операції паралельного векторно-матричного множення

При розв'язанні багатьох задач розпізнавання образів, аналізу та синтезу систем обробки сигналів і зображень, задач побудови адаптивних паралельних ґраток і створення асоціативної вибірки з пам'яті в нейронних мережах виникає необхідність виконання операцій векторно-матричного множення в реальному часі при великих розмірностях масивів, що обробляються.

Одним із найбільш імовірних шляхів створення високопродуктивних векторно-матричних перемножувачів (ВМП) є розпаралелювання обчислювального процесу, який відтворюється на обчислювальній структурі. Тому поряд з дослідженнями, направленими на вирішення фізико-технологічних задач, при створенні і вдосконаленні елементної бази для реалізації таких перемножувачів значну увагу слід приділяти питанням розробки математичного апарату для моделювання і поглибленого вивчення просторово-часових обчислювальних процесів.

Аналіз ряду робіт [69-71], в яких розглядаються інтерпретовані математичні моделі векторно-матричного множення, які припускають розпаралелювання обчислювального процесу, показав, що в даних моделях не врахована специфіка організації обчислювального процесу при використанні принципів картинної обробки. Відповідно до принципів картинної обробки числові матриці представляються набором бінарних розрядних матриць,

називани картинами, і обчислювальний процес організується таким чином, щоб на вході блоків та вузлів ВМП паралельно подавались, проходили обробку, а на виході формувались всі елементи розрядних картин.

Розглянемо такі математичні моделі, в яких поєднуються властивості, набуті в теорії традиційного моделювання паралельних векторно-матричних перемножувачів, зі специфікою оптичної картинної обробки. Запропоновані моделі нових алгоритмів векторно-матричного множення [72] відображають характер обчислювального процесу в просторі і часі, що дозволяє обґрунтувати створення можливих груп алгоритмів паралельного множення, оцінити їх показники і характеристики, визначити набір базових вузлів обчислюваної структури і комплекс вимог до них.

Нехай вектор b_N і матриця $A(N \times N)$ – числові, тобто їх відповідні елементи можуть бути подані так:

$$\begin{aligned} a_{n,m} &= \sum_{\alpha=0}^{L-1} 2^\alpha a_{n,m,\alpha}, \\ b_n &= \sum_{\beta=0}^{L-1} 2^\beta b_{n,\beta}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

де $a_{n,m,\alpha}$ і $b_{n,\beta}$ – значення розрядів відповідних компонент початкових матриці та вектору, n – номери рядка матриці і компоненти вектора, $n = \overline{0, (N-1)}$; m – номер стовпця матриці, $m = \overline{0, (N-1)}$; α і β – номери розрядів відповідних компонент матриці і вектора; L – кількість розрядів.

Розглянемо процес формування вектора результату $c_N = b_N \wedge A(N \times N)$, числові компоненти c_m ($m = \overline{0, (N-1)}$) якого повинні бути подані в вигляді

$$c_m = \sum_{\gamma=0}^{P-1} c_{m,\gamma},$$

де $c_{m,\gamma}$ – значення розрядів відповідних компонентів c_m ; P – число розрядів коду компонента c_m , яке визначається як $P = 2L + \{\log_2 N\}$ ($\{\}$ – ціла частина числа, округлена до більшого цілого).

Відомо, що будь-який компонент вектора-результату c_N утворюється шляхом додавання відповідних часткових добутків (покомпонентних добутків елементів рядка і стовпця матриці і вектора), що дозволяє, враховуючи вираз (5.13) представити c_m так:

$$c_m = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\beta=0}^{L-1} \sum_{\alpha=0}^{L-1} 2^{(\alpha+\beta)} (a_{n,m,\alpha} \wedge b_{n,\beta}), \quad m = \overline{0, (N-1)}, \quad (5.14)$$

де $2^{(\alpha+\beta)} = 2^{l_\Sigma}$ – ваговий коефіцієнт, $l_\Sigma = \overline{0, (2L-1)}$; $(a_{n,m,\alpha} \wedge b_{n,\beta})$ – бінарний базовий компонент n -го часткового добутку.

Для забезпечення повного паралелізму необхідне одночасне формування за допомогою N каналів обробки компонента c_m вектора-результату c_N . Враховуючи вимогу про відповідність вхідних даних вихідним, матриця $A(N \times N)$ повинна вводитись у вигляді послідовності векторів.

При розгляді просторово-часового процесу формування компонента c_m ($m = 0, (N-1)$) вектора результату c_N в правій частині виразу (5.14) можливі різні варіанти визначення значення трьох сум (Σ) в часі, що одночасно відповідають законам $n(t)$, $m(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $l_\Sigma(t)$. З множини синтезованих на такій основі алгоритмів векторно-матричного множення можливо виділити дві принципово відмінні групи. Перша група алгоритмів відображає простіший підхід до формування результату векторно-матричного множення в процесі виконання паралельного для N каналів цифрового підсумовування в часі l_Σ -их ($l_\Sigma = 0, (2L-1)$) бінарних базових компонент часткових добутків. Час циклу обробки в цьому випадку може бути оцінений як $T_1 = NL^2 \Delta T_1$, де ΔT_1 – такт роботи каналу.

Аналіз виразу (5.14) показує, що для різних значень індексу n ($n = 0, (N-1)$) існують базові компоненти, що мають однакові значення вагового коефіцієнта 2^{l_Σ} . Послідовність згорток вагових коефіцієнтів в часі підсумовується на протязі циклу роботи. Алгоритми, що базуються на даних принципах утворюють групу алгоритмів векторно-матричного множення на основі обчислення згортки з просторово-часовим інтегруванням. Час циклу обробки в даному випадку скоротиться $T_2 = (2L-1)N \Delta T_2$, де ΔT_2 – такт роботи каналу.

Розглянемо детальніше алгоритми, що відносяться до другої групи алгоритмів векторно-матричного множення. Відмінність цих алгоритмів полягає в орієнтації на різні закони змінювання в часі вагового коефіцієнта $2^{l_\Sigma(t)}$ для алгоритму 1 (рис.5.8, а) та для алгоритму 2 (рис.5.8, б), що в свою чергу обумовлює різну структуру вхідних даних.

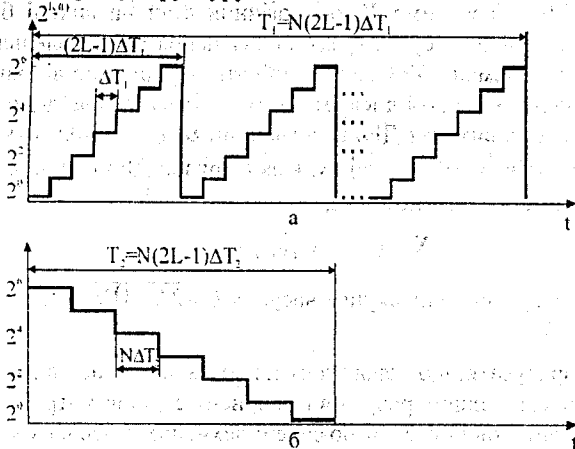


Рисунок 5.8 – Залежність зміни в часі вагового коефіцієнта $2^{l_\Sigma(t)}$ при $N=16$, $L=4$ для періодичного (а) і неперіодичного (б) законів

Для виконання вимоги встановлення однакових значень вагових коефіцієнтів в кожний момент часу для базових компонент необхідно використовувати захисні часові інтервали (інтервали часу, на протязі яких переривається подача початкової інформації на входи обчислювальних блоків структури) [72]

Алгоритм 1. Необхідність вводу числової матриці за рядками

$$\begin{array}{cccccc}
 t_{(2L-1)N-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 t_{(2L-1)(N-1)} & a_{N-1,0}(0) & a_{N-1,1}(0) & \dots & a_{N-1,N-1}(0) \\
 \hline
 t_{2L-1} & a_{1,0}(0) & a_{1,1}(0) & \dots & a_{1,N-1}(0) \\
 t_{2L-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 t_{L-1} & a_{0,0}(L-1) & a_{0,1}(L-1) & \dots & a_{0,N-1}(L-1) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 t_1 & a_{0,0}(1) & a_{0,1}(1) & \dots & a_{0,N-1}(1) \\
 t_2 & a_{0,0}(0) & a_{0,1}(0) & \dots & a_{0,N-1}(0)
 \end{array}$$

і виконання в процесі обчислень згортки базових компонент вимагає для запису, зберігання і подальшої обробки числової матриці $A(N \times N)$ використання двовимірного регістру зсуву (ДРЗ) розмірністю $(L \times N)$ з рядковим входом, паралельним виходом і паралельним стробувальним входом зчитування (рис.5.9). Позначимо $X_{p,k}(t_i)$ логічний стан на виході будь-якого елемента ДРЗ в момент часу t_i з врахуванням напрямку паралельного зсуву інформації вниз. Елемент ДРЗ може прийняти інформацію від вище розташованого елемента в $(i+1)$ -й дискретний момент часу. Знайдемо вираз, що пов'яже сигнали на виходах ДРЗ із сигналами $D_k(t)$, що подаються паралельно на k елементів ($k = \overline{0, (N-1)}$) нульового рядка ДРЗ послідовно в часі і які є імпульсними послідовностями,

$$X_{p,k}(t_i) \rightarrow D_k(t_{i-p}),$$

де i – дискретний відрахунок часу, $i = \overline{0, ((2L-1)N-1)}$; p – номер рядка, $p = \overline{0, (L-1)}$.

Якщо врахувати, що інформація повинна вводиться в ДРЗ за рядками починаючи з молодших розрядів компонент стрічок матриці, а розряди різних компонент повинні бути розділені захисними часовими інтервалами, то, позначивши символом $a_{n,m,\alpha}$ α -й розряд елемента $a_{n,m}$ матриці $A(N \times N)$ ($n = \overline{0, (N-1)}$, $m = \overline{0, (N-1)}$ $\alpha = \overline{0, (L-1)}$), можливо записати

вираз що пов'язує стан входів ДРЗ в будь-який момент часу, з розрядами компонент матриці, що вводиться

$$D_k(t_{i-p}) = \begin{cases} a_{n=f_1(t_{i-p}), m=k, \alpha=\varphi_1(t_{i-p})} \mapsto \text{при } n = \overline{0, (N-1)}; \alpha = \overline{0, (L-1)}, \\ 0 \mapsto \text{при } n \neq \overline{0, (N-1)}; \alpha \neq \overline{0, (L-1)}. \end{cases}$$

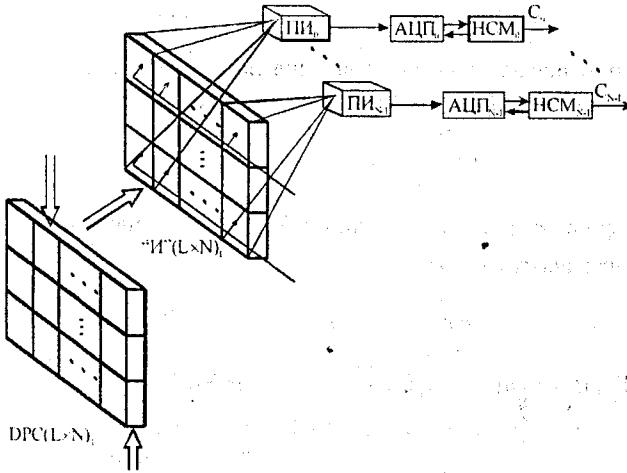


Рисунок 5.9 – Структура помножувача, що відображає алгоритм 1 векторно-матричного множення

Функції f_1 і φ_1 , які визначають фіксовані значення індексів (n і α) елементу матриці, що вводиться в $t_{(i-p)}$ -й момент часу, визначаються як

$$n = f_1(t_{i-p}) = \left\lfloor \frac{i-p}{2L-1} \right\rfloor,$$

$$\alpha = \varphi_1(t_{i-p}) = \left\lceil \frac{i-p}{2L-1} \right\rceil.$$

де $\lfloor \cdot \rfloor$ – ціла частина числа; $\lceil \cdot \rceil$ – остача від ділення числа I на J .

Розпаралелювання процесу формування бінарних базових компонент виконується за допомогою логічного множення відповідних елементів бінарних матриць $X_{p,k}(t_i)$, $Y_{p,k}(t_i)$. Остання матриця являє собою розмножені до розмірності стрічок компоненти початкового вектора, що вводяться послідовно через кожні $(2L-1)$ тактів обробки в паралельному коді,

$$\begin{array}{cccc}
 t_0 & t_{2L-1} & \dots & t_{(2L-1)(N-1)} \\
 b_0(0) & b_1(0) & \dots & b_{N-1}(0) \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 b_0(L-1) & b_1(L-1) & \dots & b_{N-1}(L-1)
 \end{array}$$

і може бути описана так:

$$Y_{p,k}(t_i) = b_{n=f_2(t_i), \beta=p}$$

Функція f_2 , що визначає фіксоване значення номера n компоненти початкового вектора b_N , якщо вводиться в t_i -й момент часу, має вигляд

$$n = f_2(t_i) = \left\lfloor \frac{i}{2L-1} \right\rfloor.$$

Елементи бінарної матриці $Q_{p,k}(t_i)$, що є базовими компонентами часткових добутків, визначаються так:

$$Q_{p,k}(t_i) = X_{p,k}(t_i) \wedge Y_{p,k}(t_i) = \begin{cases} a_{n=\lfloor \frac{i-p}{2L-1} \rfloor, m=k, \alpha=\lfloor \frac{i-p}{2L-1} \rfloor} \wedge b_{n=\lfloor \frac{i}{2L-1} \rfloor, \beta=p} \\ \text{при } n = \overline{0, (N-1)}; \alpha = \beta = \overline{0, (L-1)}, \\ 0 \text{ при } n \neq \overline{0, (N-1)}; \alpha = \beta \neq \overline{0, (L-1)}. \end{cases}$$

Легко показати, що елементи кожного стовпця бінарної матриці $Q(L \times N)$ дійсно мають однакові значення вагових коефіцієнтів $2^{t_\Sigma(t_i)}$ в кожен момент часу t_i . Оскільки $t_\Sigma(t_i) = \alpha(t_i) + \beta(t_i)$; то, враховуючи (5.14) і (5.15), одержимо

$$t_\Sigma(t_i) = \left\lfloor \frac{i-p}{2L-1} \right\rfloor + p = \left\lfloor \frac{i}{2L-1} \right\rfloor - p + p = \left\lfloor \frac{i}{2L-1} \right\rfloor.$$

Таким чином, сума номерів розрядів компонент матриці і вектора, яка визначає значення показника степеня вагового коефіцієнта $2^{t_\Sigma(t_i)}$, не залежить від p ($p = \overline{0, (L-1)}$) і в будь-який момент часу є постійною для будь-якого індексу p . Це дозволяє виконати цифрове просторове інтегрування елементів $Q_{p,k}$ ($p = \overline{0, (L-1)}$) кожного k -го $k = \overline{0, (N-1)}$ стовпця бінарної матриці $Q(L \times N)$, в результаті якого утвориться r -й розрядний код

$$\sum_{p=0}^{L-1} Q_{p,k}(t_i) = \sum_{r=0}^{\lfloor \log_2 L \rfloor} Q_{k,r}^*(t_i) \cdot 2^r,$$

де $Q_{k,r}^*(t_i)$ - r -й розряд двійкового коду; 2^r - ваговий коефіцієнт.

Організуюючи додавання в часі послідовності згорток, поданих у вигляді r – розрядного коду з врахуванням значення $2^{\lfloor \frac{i}{2L-1} \rfloor}$, одержимо математичну модель векторно-матричного множення, де компоненти c_k вектора-результату формуються одночасно:

$$c_k(t_i) = \sum_{i=0}^i 2^{\lfloor \frac{i}{2L-1} \rfloor} \sum_{p=0}^{L-1} Q_{p,k}(t_i) = \sum_{i=0}^i \left(2^{\lfloor \frac{i}{2L-1} \rfloor} \sum_{p=0}^{L-1} \left(a_{\substack{n=p \\ 2L-1}}^{i-p} \left[\substack{m=k, \alpha = \lfloor \frac{i-p}{2L-1} \rfloor} \right] \wedge b_{\substack{n=p \\ 2L-1}} \left[\substack{\beta=p} \right] \right) \right),$$

$$i = 0, ((2L-1)N-1); k = 0, (N-1).$$

Структурна схема помножувача, що відображає алгоритм його функціонування, має містити набір таких базових вузлів (див. рис.5.9): двовимірний регістр зсуву розмірністю $(L \times N)$ з рядковим входом, паралельним виходом і стробувальним входом зчитування; матрицю логічних елементів "Г" розмірністю $(L \times N)$ з картинним входом, L -рядковим керувальними входами і картинним виходом; лінійку з N цифрових просторових інтеграторів (просторовий інтегратор з аналого-цифровим перетворювачем); лінійку з N цифрових нагромаджуючих суматорів, для додавання в часі послідовності згорток з врахуванням вагового коефіцієнта $2^{\lfloor \frac{i}{2L-1} \rfloor}$.

Алгоритм 2. При розгляданні моделі даного алгоритму проміжні викладення не наводяться, оскільки вони аналогічні викладкам, наведеним при моделюванні алгоритму 1.

Алгоритм орієнтований на таку залежність в часі вагового коефіцієнта (див. рис.5.8 б), яка передбачає мінімальну кількість змін значення $2^{\lfloor \frac{i}{2L-1} \rfloor}$ на протязі циклу роботи. Це обумовлює зміни в структурі вхідних даних та часовій послідовності їх вводу (рис.5.10). Так, числова матриця вводиться рядками бінарних розрядних зрізів в поданні елементів, починаючи зі старшого зрізу, а бінарні зрізи різних числових матриць розділяються захисними часовими інтервалами

$t_{(2L-1)N-1}$	0	0	...	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
t_{LN}	0	0	...	0
t_{LN-1}	$a_{N-1,0}(0)$	$a_{N-1,1}(0)$...	$a_{N-1,N-1}(0)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
t_N	$a_{00}(L-2)$	$a_{01}(L-2)$...	$a_{0,N-1}(L-2)$
t_{N-1}	$a_{N-1,0}(L-1)$	$a_{N-1,1}(L-1)$...	$a_{N-1,N-1}(L-1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
t_1	$a_{10}(L-1)$	$a_{11}(L-1)$...	$a_{1,N-1}(L-1)$
t_0	$a_{00}(L-1)$	$a_{01}(L-1)$...	$a_{0,N-1}(L-1)$

Компоненти числового вектора вводяться циклічно паралельним кодом послідовно в часі і на протязі кожного періоду, кількість яких рівна $(2L-1)$.

t_0	t_1	...	t_{N-1}	...	$t_{(2L-2)N}$...	$t_{(2L-1)N-1}$
$b_0(L-1)$	$b_1(L-1)$...	$b_{N-1}(L-1)$...	$b_0(L-1)$...	$b_{N-1}(L-1)$
$b_0(L-2)$	$b_1(L-2)$...	$b_{N-1}(L-2)$...	$b_0(L-2)$...	$b_{N-1}(L-2)$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots
$b_0(0)$	$b_1(0)$...	$b_{N-1}(0)$...	$b_0(0)$...	$b_{N-1}(0)$

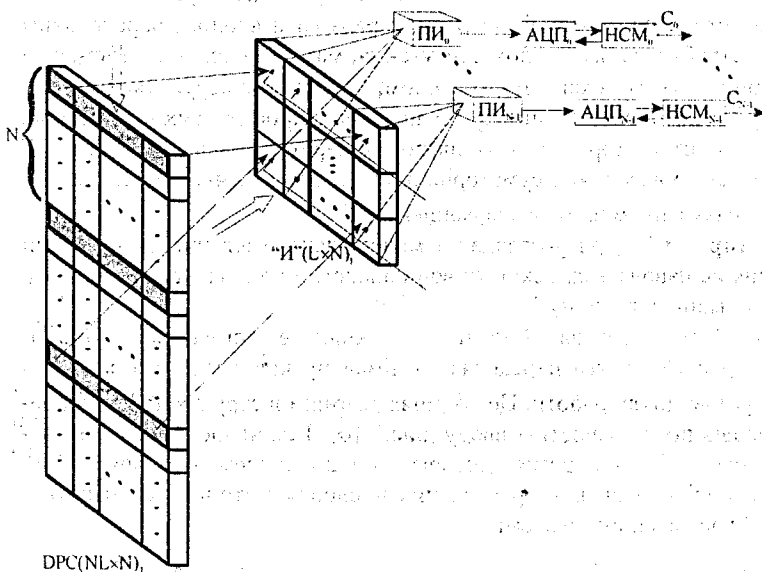


Рисунок 5.10 – Структура помножувача, що відображає алгоритм 2 векторно-матричного множення.

Для запису, зберігання та обробки числової матриці використаємо ДРЗ розмірністю $(LN \times N)$ з рядковим входом, паралельним виходом розмірністю $(L \times N)$ і паралельним стробувальним входом зчитування.

Логічний стан $X_{p,k}(t_i)$ на виході будь-якого елемента ДРЗ в момент часу t_i пов'язаний з розрядами компонент вихідної матриці згідно виразу

$$X_{p,k}(t_i) = \begin{cases} a_{n=\Psi_1(t_{i-pN}), m=k, \alpha=\xi_1(t_{i-pN})} & \text{при } n=0, \overline{(N-1)}, \alpha=0, \overline{(L-1)}, \\ 0 \cdots \text{при } n \neq 0, \overline{(N-1)}, \alpha \neq 0, \overline{(L-1)}, \end{cases}$$

де $p=0, \overline{(L-1)}$; $k=0, \overline{(N-1)}$ $i=0, \overline{(2L-1)(N-1)}$.

Функції Ψ_1 і ξ_1 , які визначають фіксовані значення індексів відповідно n та α елементу матриці вводяться в t_{i-pN} -й момент часу, визначаються як

$$n = \Psi_1(t_{i-pN}) = \left[\frac{i-pN}{N} \right],$$

$$\alpha = \xi_1(t_{i-pN}) = (L-1) - \left[\frac{i-pN}{N} \right].$$

Елементи бінарної матриці мають вигляд

$$Y_{p,k}(t_i) = b_{n=\Psi_2(t_i), \beta=L-p-1},$$

де $n = \Psi_2(t) = \left[\frac{i}{N} \right]$.

Тоді елементи бінарної матриці $Q_{p,k}(t_i)$, що є базовими компонентами відповідних часткових добутків, будуть визначені в процесі логічного множення відповідних елементів матриць $X_{p,k}(t_i)$ і $Y_{p,k}(t_i)$

$$Q_{p,k}(t_i) = X_{p,k}(t_i) \wedge Y_{p,k}(t_i) = \begin{cases} a_{n=\left[\frac{i-pN}{N}\right], m=k, \alpha=(L-1)-\left[\frac{i-pN}{N}\right]} \wedge b_{n=\left[\frac{i}{N}\right], \beta=L-p-1} & \text{при } n=0, \overline{(N-1)}, \alpha=\beta=0, \overline{(L-1)}, \\ 0 & \text{при } n \neq 0, \overline{(N-1)}, \alpha=\beta \neq 0, \overline{(L-1)}. \end{cases}$$

Аналогічно алгоритму 1 для алгоритму 2 досить легко довести, що всі елементи $Q_{p,k}(t_i)$ ($p=0, \overline{(L-1)}$) k -го стовпця при $k=0, \overline{(N-1)}$ бінарної матриці $Q(L \times N)$, сформовані в будь-який проміжок часу, мають однаковий ваговий коефіцієнт $2^{l_{\Sigma}(t)}$, не залежний від p ,

$$l_{\Sigma}(t) = (L-1) - \left[\frac{i-pN}{N} \right] + L-p-1 = 2L - \left[\frac{i}{N} \right] - 2.$$

Це дозволяє виконати просторове інтегрування значень елементів $Q_{p,k}(t_i)$ ($p=0, \overline{(L-1)}$) кожного k -го $k=0, \overline{(N-1)}$ стовпця бінарної матриці $Q(L \times N)$ з утворенням розрядного коду і його подальшим цифровим часовим інтегруванням з врахуванням вагового коефіцієнта $2^{l_{\Sigma}(t)}$. В результаті одержимо таку математичну модель алгоритму 2:

$$c_k(i) = \sum_{i=0}^i 2^{(2L-i)N-2} \left(\sum_{p=0}^{L-1} a_{n=\lfloor \frac{i-pN}{N} \rfloor, m=k, \alpha=L-\lfloor \frac{i-pN}{N} \rfloor-1} \wedge b_{n=\lfloor \frac{i}{N} \rfloor, \beta=L-p-1} \right)$$

де $k = \overline{0, (N-1)}$; $i = \overline{0, ((2L-1)N-1)}$.

Схема помножувача (див. рис. 5.10), що відображає алгоритм 2, відрізняється від схеми (див. рис. 5.9), що відображає алгоритм 1, вимогами до його функціонального вузла ДРЗ розмірністю $(LN \times N)$, який містить рядковий вхід, паралельний вихід розмірністю $(L \times N)$ і паралельний вхід зчитування.

Запропоновані структури помножувачів можуть бути реалізовані на елементній базі оптики та оптоелектроніки.

Розглянувши запропоновані алгоритми, можна зробити такі висновки.

Одною з основних характеристик алгоритму є закон $2^{i_2(t)=\alpha(t)+\beta(t)}$, що визначає, як повинні змінюватися ваги розрядів вхідних масивів $\alpha(t)$ і $\beta(t)$, щоб забезпечити можливість виконання згортки, просторового і часового інтегрування. На прикладах двох алгоритмів показано, що виконувати згортку можна, починаючи як зі старших, так і з молодших розрядів компонент. При цьому в обох випадках можливо організувати таке завантаження даних, при якому результуюча вага в будь-який момент часу не буде залежати від розташування в просторі комірок що задіяні в множенні. Перевагу слід віддавати згортці, починаючи зі старших розрядів, що дозволить значно спростити схеми нагромаджуючих суматорів і вести підрахунок ваги простим зсувом в сторону старших зарядів суматора після кожного такту додавання.

Алгоритм 1 краще за алгоритм 2 з точки зору збільшення швидкодії, оскільки дозволяє зменшити довжину такту ΔT обробки за рахунок забезпечення мінімальної кількості змін значень вагового коефіцієнта.

Ефективність і швидкодія структури помножувача сильно залежить від структури вхідних і вихідних потоків даних і методів їх завантаження. Тому лише з врахуванням характеру джерел сигналів і організації блоків пам'яті можливо вибрати найбільш оптимальний алгоритм в кожному конкретному випадку. Перевагу слід віддавати алгоритму, для якого потоки вхідних і вихідних даних ідентичні, що дозволяє використовувати блоки пам'яті одного виду.

Контрольні питання

1. Які особливості паралельних регулярних однорідних обчислювачів як об'єктів моделювання?
2. В чому полягає принцип цифрового картинного оброблення?
3. Що таке ВІА-двійкова алгебра зображення?
4. Як подати числову матрицю цілих чисел без знаку за наборами розрядних зрізів?
5. Назвіть базовий набір бінарних операцій картинного оброблення оптичної інформації.
6. Яка математична модель операції картинного логічного множення і який оптоелектронний функціональний елемент її реалізації?
7. Яка математична модель операції картинного логічного додавання і який оптоелектронний функціональний елемент її реалізації?
8. Яка математична модель операції картинної інверсії і який оптоелектронний функціональний елемент її реалізації?
9. Які функції виконує оптично-керований транспарант?
10. Що таке інверсний оптично-керований транспарант?
11. Як визначити суму за модулем двох бінарних матриць?
12. Наведіть оптичну логічну схему для паралельного обчислення суми за модулем двох бінарних матриць.
13. Чому оптоелектронний D-тригер для паралельного запису, збереження і зчитування бінарних матриць реалізовано за MS-структурою?
14. Яка модель паралельного D-тригера для паралельного запису, збереження і зчитування бінарних матриць?
15. Як на основі D-тригерів для паралельного запису, збереження і зчитування бінарних матриць запам'ятовувати та зберігати числові матриці?
16. Які порозрядні операції виконуються під час додавання n -розрядних двійкових чисел X та Y ?
17. Яким аналітичним виразом описуються розрядна сума та перенос в старший розряд однорозрядного суматора?
18. Як на основі математичної моделі формування розрядно-зрізової суми та переносу в старший розрядний зріз побудувати схему паралельного комбінаційного однорозрядного суматора?
19. Чим нагромаджуючий суматор відрізняється від комбінаційного?
20. Які існують способи побудови класичного нагромаджуючого суматора?
21. Як побудувати багаторозрядний картинний нагромаджуючий суматор на основі відомих класичних схем традиційної електронної схемотехніки?
22. Яка принципова відмінність в оформленні блок-схем послідовних і паралельних алгоритмів?

23. В яких прикладних задачах виникає необхідність виконання операцій векторно-матричного множення в реальному часі?
24. Як вводяться, обробляються та виводяться вектори та матриці в обчислювальних процесах, організованих за принципами цифрового картинного оброблення?
25. Яка загальна математична модель процесу, формування компоненти вектора-результату C_N множення L -розрядних вектора b_N та матриці $A(N \times N)$?
26. Які виділяють дві групи паралельних алгоритмів векторно-матричного множення та які їх часові характеристики?
27. Поясніть суть просторово-часового інтегрування в паралельних алгоритмах векторно-матричного множення на основі обчислення згортки.
28. Як вигляд закону змінювання в часі вагового коефіцієнта впливає на структуру початкових даних в паралельних алгоритмах векторно-матричного множення?
29. Наведіть графіки залежності в часі вагового коефіцієнта $2^{l \cdot t}$ при $N=16$ і $L=4$ для періодичного і неперіодичного законів.
30. Для чого в алгоритмах векторно-матричного множення на основі обчислення згортки використовують захисні часові інтервали та як їх моделюють?
31. Наведіть математичну модель векторно-матричного множення на основі обчислення згортки, починаючи з молодших розрядів та проаналізуйте повний час отримання результату за нею.
32. Наведіть математичну модель векторно-матричного множення на основі обчислення згортки, починаючи зі старших розрядів та проаналізуйте повний час отримання результату за нею.
33. Які відмінності існують між структурами векторно-матричних помножувачів на основі обчислення згортки, починаючи відповідно з молодших та зі старших розрядів та на чию користь вони говорять?

ЛИТЕРАТУРА

1. Альянах И.Н. Моделирование вычислительных систем.– Ленинград: Машиностроение, 1988.– 222 с.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем.– М.: Высшая школа, 1983.
3. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем.– М.: Наука, 1977.– 240 с.
4. Лебедев А.Н. Основы теории моделирования. Конспект лекций. Пенза: ППИ, 1977.– 81 с.
5. Основы моделирования сложных систем./Л.И.Дихненко, В.Ф.Кабаненко, И.В. Кузьмин и др. Киев: Вища школа, 1981.– 359 с.
6. Максимей И.В. Математическое моделирование больших систем: Учебное пособие.– М.: Высшая школа, 1985.– 119 с.
7. Компьютеры в оптических исследованиях/ Баракат Р., Далас У., Фриден Б., Мерц Л., Педжис Р., Риглер А.– М.: Мир, 1983.– 488 с.
8. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания.– М.: Высшая школа, 1982.– 256 с.
9. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания.: Пер. с англ.– М.: Машиностроение, 1979.– 432 с.
10. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании.– М.: Статистика, 1978.– 221 с.
11. Шенон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука.– М.: Мир, 1978.– 418 с.
12. Крайзмер Л.П. Кибернетика.– М.: Агропромиздат, 1985.– 255 с.
13. Пранявичус Г. Модели и методы исследования вычислительных систем.– Вильнюс: Мокслас, 1982.– 228 с.
14. Николаев В.И., Фук В.М. Системотехника: методы и приложения.– Л.: Машиностроение, 1985.– 199 с.
15. Альянах И.Н. Имитационное моделирование вычислительных систем.– Л.: ЛИМТУ, 1983.– 92 с.
16. Цвиркуп А.Д., Акипфиев В.К., Филипов В.А. Имитационное моделирование в задачах синтеза структуры сложных систем (оптимизационно-имитационный подход).– М.: Наука, 1985.– 174 с.
17. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем.– М.: Наука, 1978.– 400 с.
18. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям.– М.: Статистика, 1980.– 95 с.
19. Боровков А.А. Математическая статистика.– М.: Наука, 1984.– 462 с.
20. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Теория вероятности.– М.: МЛТИ, 1982.– 160 с.
21. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений.– М.: Сов. радио, 1976.– 190 с.

22. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия.– М.: Статистика, 1981.–300 с.
23. Заболотна Н.І., Мартинюк Т.Б., Шолота В.В. Застосування засобів MathCAD для моделювання задач лазерної та оптоелектронної техніки.– Вінниця: ВДГУ, 2002.– 107 с.
24. Железнов И.Г. Сложные технические системы (оценка характеристик).– М.: Высшая школа, 1984.– 119 с.
25. Бабак В.П. Хандецкий В.С., Шрюфер Е. Обробка сигналів: Підручник.– К.: Либідь, 1996.– 392 с.
26. Диалоговые системы моделирования / В.В.Пирогов, С.Ф.Гайстеров, И.А.Хайкин и др.: Под ред. В.В.Пирогова.– Рига: Зинатне, 1981.– 251с
27. Месаревич М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы: Пер. с англ.– М.: Мир; 1978.–311 с.
28. Авен О.И., Гурин Н.Н., Коган Я.А. Оценка качества и оптимизация вычислительных систем.– М.: Наука, 1982.– 464 с.
29. Основы теории вычислительных систем / Майоров С.А., Новиков Г.И., Алиев Т.И.: Под ред. Майорова С.А.– М.: Высшая школа, 1978.– 408 с.
30. Киндлер Е. Языки моделирования: Пер с чеш.– М.: Энергоатомиздат, 1985.– 295 с.
31. Справочник по оптимизационным задачам АСУ / Бункин А., Колев Д., Курицкий Б.Я., Максименко А.Н.– Л.: Машиностроение, 1984.– 212 с.
32. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах.– М.: Наука, 1986.– 296 с.
33. Лескин А.А. Алгебраические методы гибких производственных систем.– Л.: Наука, 1986.– 150 с.
34. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование.– М.: Наука, 1982.– 296 с.
35. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло.– М.: Наука, 1973.– 311 с.
36. Стешенко В., Шишкин Г., Евстифеев А., Седякин Ю. Языки описания аппаратуры VHDL // Chip News.–2000.– №1.– С.29-39.
37. Подробная информация о UML, включая полное описание языка – Rational Software Corporation.– <http://www.rational.com/>.
38. Дьяконов В.П. Справочник по применению системы Eureka.– М.: Наука, 1993.
39. Дьяконов В.П. Mercury – отличная система для всех.– Монитор-Аспект, 1995, №5.
40. Лобачевская О.В. Практикум по решению задач в математической системе Derive.– М.: Финансы и статистика, 2000.
41. Дьяконов В.П. Mathematica 4: Учебный курс.– СПб: Питер, 2001.

42. Прохоров Г.В. Лебедев М.А., Колбеев В.В. Пакет символьных вычислений Maple V. М.: Петит, 1997.
43. Дьяконов В.П. MathCAD 2000: Учебный курс. СПб: Питер, 2000.
44. Дьяконов В. MatLab 6: Учебный курс СПб: Питер, 2001.– 592 с.
45. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник.– СПб.: Питер, 2002.– 608 с.
46. Феррари Д. Оценка производительности вычислительных систем: Пер. с англ.– М.: Мир, 1981.– 576 с.
47. Математическая теория планирования эксперимента / Ермаков С.М., Бродский В.З., Жиглявский А.А.– Под ред. Ермакова С.М.– М.: Наука, 1983.– 392 с.
48. Гончарский А.В. и др. Введение в компьютерную оптику.– М.: МГУ, 1991.– 309 с.
49. Гульд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике.– ч.2.– М.: Мир, 1990.– 399 с.
50. Бутаков Е.А., Островский В.И., Фадеев И.Л. Обработка изображений на ЭВМ.– М.: Радио и связь, 1987.– 237 с.
51. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. Введение в цифровую оптику.– М.: Радио и связь, 1987.
52. Васильев В., Гуров И. Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам.– СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 1998.– 240 с.
53. Акаев А.А., Майоров С.А. Оптические методы обработки информации.– М.: Высшая школа, 1988.– 236 с.
54. Анисимов Б.В., Курганов В.Д., Злобин В.К. Распознавание и цифровая обработка изображений.– М.: Высшая школа, 1983.– 295 с.
55. Заболотна Н.І., Шолота В.В., Веретенников О.В. Паралельна інтерпретація прямих методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах.– 2000.– №2.– С.96-100.
56. Ахутин В.М., Ермилов Н.Н., и др. Измерительно - вычислительный комплекс контроля состояния оператора//Медицинская техника. - 1989. - N3. - С. 8-12.
57. Прэтт У.К. Цифровая обработка изображений.- М.: Мир, 1982.- Т.1,Т.2.
58. Коротко А.Ш., Кожемяко В.П., Павлов С.В., Злепко С.М. и др. Оптоэлектронный метод дифференциальной диагностики сосудистых нарушений в позвоночнике// Вісник проблем медичної реабілітації та фізіотерапії. – 1997. - №2-3, випуск 2. – С. 194-198.
59. Микрокомпьютерные медицинские системы. Проектирование и применение /Томпкинс У., Уэбстер Дж. – М.: Мир, 1983. – 250 с.
60. Куприянов М.Я., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов.- Санкт-Петербург: Политехника, 1998.-592 с.

61. Немирко А.П. Цифровая обработка биологических сигналов. - М.:Наука, 1984. - 145 с.
62. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. - Винница, Универсум-Винница, 1999. - 320 с.
63. Ротштейн А.П. Медицинская диагностика на нечеткой логике. - Винница, Континент, 1996. - 132 с.
64. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир, 1976. - 167с.
65. Егорова Л.В., Рахманов В.Ф. Картинные элементы и устройства для параллельной обработки информации // Оптическая и электрооптическая обработка информации: Сборник научных трудов, 1975.- С.142-152.
66. Денисов В.М. и др. Структура цифрового оптоэлектронного процессора многоуровневых изображений по пространственно-непрерывным разрядным срезам // Электронное моделирование.- 1984.- №6.- С.99-106.
67. Морозов В.Н. Оптоэлектронные матричные процессоры.- М.: Радио и связь, 1986.- 112 с.
68. Оптоэлектронное бистабильное устройство для параллельной записи, хранения и считывания изображения: А.с. 1451740 СССР, МКИ G06K 9/00/ Красиленко В.Г., Дубчак В.Н.- №4250323/24; Заявлено 26.05.87; Опубл. 09.12.88, Бюл.№2.- 4 с. ил.
69. Параллельная обработка информации / Под ред. Грицыка В.В., Киев: Наукова думка.- 1988.- Т.4.- 358 с.
70. Ахо А., Хопкофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.- М.:Мир.- 1979.- 200 с.
71. Евдокимов В.Ф., Стасюк А.И. Параллельные вычислительные системы на основе разрядных методов.- Киев: Техника.- 1988.- 340 с.
72. Красиленко В.Г., Заболотна Н.И., Савицкий А.В. Моделирование параллельных операций векторно-матричного перемножения на основе вычисления свертки с пространственно-временным интегрированием // Электронное моделирование.- 1994.- Т.16.- №3.- С.26-31.

Навчальне видання

Наталія Іванівна Заболотна
Сергій Володимирович Павлов
Владіслав Васильович Шолота

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЛАЗЕРНОЇ ТА
ОПТОЕЛЕКТРОННОЇ ТЕХНІКИ**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено В.В.Шолотою

Редактор О.Д.Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95. ВНТУ

Підписано до друку 27.11.53р
Формат 29,7×42 ¼
Друк різнографічний
Тираж 90 прим.
Зам.№ 2003 - 182

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум.друк. арк. 8.48

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95