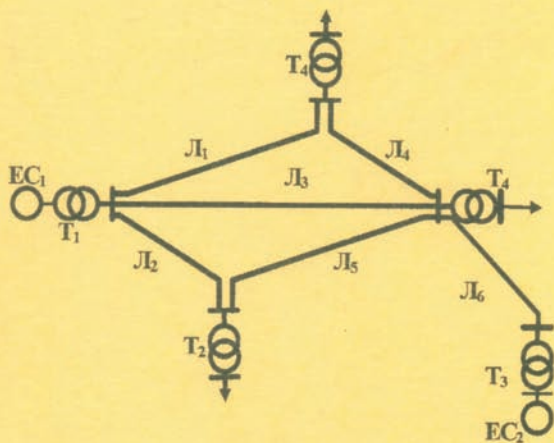


621.31(075)

3-49

Зелінський В.Ц.

МАТЕМАТИЧНІ
ЗАДАЧІ
ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ



Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

Зелінський В.Ц.

**МАТЕМАТИЧНІ
ЗАДАЧІ
ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ**

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів енергетичних спеціальностей. Протокол № 8 від 31 березня 2005 р.

Вінниця ВНТУ 2005

Рецензенти:

Лежнюк П.Д., доктор технічних наук, професор
Рогальський Б.С., доктор технічних наук, професор
Пауткіна Л.Р., кандидат технічних наук

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Зелінський В. Ц.

3 49 **Математичні задачі електроенергетики.** Навчальний посібник.-
Вінниця: ВНТУ, 2005. - 126 с.

В навчальному посібнику розглянуто деякі методи прикладної математики, які знайшли широке застосування при розв'язуванні ряду задач, що виникають в інженерній практиці при моделюванні та аналізі режимів електроенергетичних систем та мереж. Розглядаються методи теорії графів, алгебри матриць та основні закони електротехніки, на основі яких формуються матричні рівняння стану електричної ланки, вузлові та контурні рівняння. Наведено основні методи розв'язування рівнянь стану електричної системи - метод Гауса, метод простої ітерації, метод Зейделя та приклади їх використання при практичних розрахунках. В додатках наведено методики виконання лабораторних робіт та варіанти завдань до них. Посібник призначений для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей "Електричні станції" та "Електричні системи та мережі" і може бути корисний при виконанні курсового та дипломного проектування.

УДК 519.6

Зміст

	Стор.
Вступ.....	4
1 Формування рівнянь усталеного режиму електричної мережі.....	8
1.1 Основні відомості про електричні системи та схеми їх заміщення..	8
1.2 Рівняння стану лінійного електричного кола.....	17
1.3 Рівняння стану електричної ланки в матричному вигляді.....	21
1.3.1 Основні визначення теорії графів.....	21
1.3.2 Закони Ома та Кірхгофа в матричному вигляді.....	25
1.3.3 Визначення системи базисних контурів.....	30
1.4 Вузлові рівняння електричної системи.....	35
1.4.1 Формування системи вузлових рівнянь.....	35
1.4.2 Формування матриці вузлових провідностей.....	38
1.5 Контурні рівняння електричної системи.....	43
1.6 Перетворені форми рівнянь стану.....	52
2 Методи розв'язування рівнянь стану електричної системи.....	65
2.1 Загальна постановка задачі розрахунку усталеного режиму.....	65
2.2 Прямі методи розв'язку лінійних алгебраїчних рівнянь усталеного режиму ЕЕС.....	69
2.2.1 Метод Гауса із зворотнім ходом.....	69
2.2.2 Метод Гауса без зворотного ходу.....	73
2.2.3 Порівняльний аналіз алгоритмів методу Гауса.....	76
2.2.4 Особливості розв'язування лінійних рівнянь усталеного режиму електричної системи.....	80
2.3 Математичні операції з матрицями коефіцієнтів рівнянь стану електричної системи.....	85
2.3.1 Спосіб обертання матриці на основі алгоритму методу Гауса без зворотного ходу.....	86
2.3.2 Спосіб обертання матриці на основі алгоритма послідовної перестановки стовпців b і x	88
2.4 Розв'язування рівнянь стану електричної системи ітераційними методами.....	92
2.4.1 Метод простої ітерації.....	93
2.4.2 Метод Зейделя.....	99
2.4.3 Аналіз збіжності ітераційних методів.....	100
Додаток А Матриці та способи їх перетворень.....	106
Додаток Б Методика виконання лабораторних робіт.....	113
Додаток В Варіанти завдань до лабораторних робіт.....	121
Література.....	125

Вступ

Сучасний етап розвитку електроенергетики України характеризується переходом всіх галузей від виробництва електроенергії, її розподілу та споживання на більш ефективні сучасні засоби керування, які забезпечили б перехід на більш якісний етап функціонування енергетики в цілому. Керування режимами роботи електричних станцій, систем та мереж традиційними методами, які працювали ще декілька років тому, стає недоцільним. Застосування ефективності та надійності роботи всього енергетичного комплексу потребує впровадження сучасних засобів математичного моделювання та обчислювальної техніки, на основі яких розбудовуються сучасні автоматизовані системи диспетчерського управління (АСДУ) режимами ЕЕС.

Важливою складовою частиною АСДУ є методи розрахунків усталених та оптимальних режимів.

Електроенергетичне виробництво є одним з найбільших споживачів засобів обчислювальної техніки. В цьому відношенні показовим є той факт, що перші цифрові обчислювальні машини були створені якраз для вирішення проблем енергетики. Для розрахунку режимів електричних систем ще на початку 19 століття досить ефективно використовувались спеціалізовані аналогові пристрої. Це обумовлено особливостями протікання технологічних процесів і характером електроенергетичного виробництва в цілому. Сучасні ЕЕС – це об'єкти, які можна класифікувати як великі системи керування. Однією з основних особливостей електроенергетичних систем є велика трудомісткість обмежень, які необхідно використовувати при аналізі режимів з великою достовірністю та за обмежений час. Більшість практичних задач з прийняття рішень оперативного керування режимами потребують багаторазового повторення розрахунків та знаходження оптимального стану ЕЕС в реальному часі.

Окрім великого обсягу обчислень та обмеження за часом прийняття рішень оперативного керування в системах АСДУ існують ще ряд причин, які пов'язані із стійкістю параметрів режимів при аварійних режимах їх роботи. Це питання статичної та динамічної стійкості енергосистем, які теж повинні вирішуватись при моделюванні параметрів електричних систем та мереж.

Особливістю електроенергетичних систем є також те, що вони працюють в умовах одночасного виробництва та споживання всього об'єму продукції. Служби диспетчерського керування повинні забезпечувати винятково важливі функції узгодження об'ємів енергії та споживання електричної енергії, розподіл електроенергії згідно з встановленими пріоритетами, оптимізацію розподілу навантажень, зниження втрат в мережах тощо.

Математичні методи моделювання та розрахунку параметрів режимів роботи електроенергетичних систем (ЕЕС) потребують постійного

вдосконалення та розвитку. Ґрунтуються ці методи на основних постулатах теоретичної математики. Але задачі, які потребують вирішення в процесі експлуатації ЕСС, вимагають спеціального математичного апарата, основні положення якого сформовано в прикладній математиці. Розходження між прикладною і "чистою" (теоретичною) математикою лежать в площині практичного застосування певних методів.

Метою теоретичної математики є відкриття абсолютних теоретичних положень, не адаптованих до якоїсь конкретної галузі виробництва. Досягненню цієї мети служить так звана дедукція. Інакше кажучи, з аксіом і теорем, правильність яких уже встановлена, математики виводять нові чисто логічним шляхом, тобто шляхом логічно правильних міркувань, не використовуючи (принаймні, у явному вигляді) як аргументи ні спостереження, ні узагальнення досвіду, тобто не користуючись методом індукції. Метод дослідження в теоретичній математиці є дедуктивним, синтетичним і формальним. Дедуктивний метод означає, що єдиним засобом висновку, що використовується в математичному доведенні, служить дедукція. Після того як аксіоми і означення сформульовані, математик шляхом чистих, тобто основаних тільки на законах логіки, міркувань приходить до найскладніших теорем і, опираючись на них, доводить нові, невідомі теореми.

Синтетичний характер математичного методу виявляється також у виборі аксіом, причому мають на увазі не тільки математичні, але і логічні аксіоми. Закони логіки - це принципи, якими керуються при формуванні висновків і які подальшому аналізу на підлягають, на відміну від математичних аксіом, що піддаються логічному аналізу. Однак не тільки наявність аксіом складає характерну рису теоретичної математики. Своєрідність математики криється у означеннях, що вводяться нею, і це, власне кажучи, зводиться до того, що замість певної комбінації старих символів використовується один новий символ. Це дозволяє скоротити формулювання тверджень, що отримуються в теоремах. Формалізм математичного методу оснований на тому, що в математичних міркуваннях дозволяється використовувати поняття лише в тому смислі, який вкладений у них означенням. Більш того, із самого означення вилучається все те, що може допустити неоднозначне тлумачення.

Таким чином, предмет теоретичної математики визначається лише методом, і кожна дедуктивна теорія може вважатися математикою. У чистій математиці всі проблеми лежать в сфері самої математики. Однак, щоб застосовувати математичний метод, необхідно насамперед побудувати аксіоматику, що ґрунтується на практичному досвіді. Якщо мова йде про застосовність теорії до практичного застосування, наприклад в галузі математичних проблем електроенергетичної галузі, то аксіоми необхідно порівняти з практикою, що і робить прикладна математика.

Прикладна математика, на відміну від теоретичної або чистої математики, є наукою про відшукування й удосконалення практично

прийнятних методів розв'язування математичних задач, що виникають поза математикою, в галузі конкретного практичного застосування цих методів в різних галузях виробництва. Таким чином, прикладна математика - це математика, опосередкована практикою.

Математичні розв'язування прикладних задач відрізняються від розв'язувань задач чистої математики, мають серйозну специфіку. Насамперед у прикладних задачах принципово не досяжна доказовість того ж рівня, що в чисто математичних задачах, хоча б тому, що математична модель реального об'єкта може описувати лише істотні в тому або іншому смислі риси цього об'єкта, не претендуючи на його повний опис.

До розв'язувань прикладних задач висуваються вимоги, які у чисто математичних задачах вважаються другорядними. Так, розв'язування прикладних задач повинні бути не тільки правильними, але і своєчасними, ощадливими за затрачуваними зусиллями; розв'язування повинні бути доступними для існуючих обчислювальних засобів, а результати їх повинні бути доступними для огляду і придатними для практичного використання. Досить істотно, що точність розв'язувань повинна відповідати поставленій задачі.

Розходження між прикладною і чистою математикою істотно виявляється також і у вимогах до однозначності означень, застосовуваних понять і тверджень. Одним з основних принципів чистої математики є те, що усі властивості будь-якого досліджуваного поняття повинні впливати тільки з його формального означення і як би потенційно вже ув'язненого в ньому. Відповідно усі твердження повинні включати тільки формально визначені поняття і такі логічні співвідношення, що цілком визначають справедливність або хибність кожного твердження.

Усі властивості розв'язування задачі в чистій математиці, так само як і властивості понять, потенційно цілком визначаються її формулюванням. Будь-яка зміна формулювання в чистій математиці означає перехід до нової задачі. На відміну від цього в прикладній математиці поняття і твердження часто мають той же характер, що й у нематематичних дисциплінах.

При розв'язуванні прикладних задач можуть застосовуватися поняття, що взагалі не мають формального означення або означення, які не мають повної логічної чіткості. Навіть якщо застосовується чисто математичне поняття, то за ним може ховатися той неформальний об'єкт, що цим поняттям ідеалізується. Наприклад, якщо в прикладному дослідженні говориться "довільна функція", то маємо на увазі довільну функцію не взагалі, а ту, що зустрічається в даній області додатків.

На відміну від процедур розв'язування задач у прикладній математиці, де важливе досягнення мети, а апарат не істотний, у чистій математиці звичайно головна увага приділяється саме математичному апаратові, застосовуваному для розв'язування задачі, незалежно від її

реальної інтерпретації.

Найбільш привабливі для "чистого" математика важкі в математичному відношенні задачі і їхні витончені розв'язування, причому сам метод розв'язування може мати більшу цінність, ніж вихідна задача.

Таким чином, у прикладній математиці використовуються будь-які поєднання дедуктивних і раціональних індуктивних міркувань різних видів. При цьому важливо, щоб вони щонайкраще приводили до мети. А метою є реальна допомога в одержанні відповіді на практичне питання, що відноситься до задачі, яка перебуває за межами математики. Наприклад, в електроенергетиці - це формування математичної моделі ЕЕС з урахуванням всіх її технологічних особливостей, визначення оптимальних параметрів електричних мереж, які будуються, оптимізація перетоків потужності в лініях, оптимальне завантаження електричних станцій, зниження втрат потужності в електричних системах тощо.

Складні умови роботи диспетчерських служб потребують надійного та ефективного функціонування засобів обчислювальної техніки, а також сучасних методів моделювання та розрахунків параметрів режимів ЕЕС. Метою застосування методів розрахунків параметрів ustalених та оптимальних режимів є пошук допустимих та оптимальних рішень та синтез на їх основі законів керування розподільчими пристроями в ЕЕС. Реалізація цих законів в системах автоматичного та автоматизованого керування режимами дозволяє практично без значних додаткових затрат забезпечити за рахунок зниження втрат пального та втрат потужності в електричних мережах більш ефективну роботу електроенергетики в цілому.

1. ФОРМУВАННЯ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ

1.1 Основні відомості про електричні системи та схеми їх заміщення

Математичний опис електроенергетичної системи, зрозуміло, повинен мати свою специфіку, відмінну від теплоенергетичної або гідроенергетичної частини системи. При складанні математичного опису треба врахувати, що електрична система це сукупність елементів, які виробляють, перетворюють, передають, розподіляють і споживають електричну енергію. Вона містить у собі силові елементи - генератори, трансформатори, перетворювачі, навантаження й електричні мережі (високої напруги, мережі що містять лінії передач середньої напруги та розподільні з відносно низькою напругою).

Електрична система містить також елементи керування, що змінюють і регулюють стан системи або режим системи. Для розрахунку режиму системи необхідний математичний апарат. Інженер може підібрати його готовим з величезного накопиченого століттями арсеналу математичних методів, може частково сконструювати сам. Але це можливо в тому випадку, якщо він ясно уявляє собі фізичні принципи роботи енергосистеми, обумовлені явищами, що одночасно відбуваються у всіх елементах системи. Взаємодіючи між собою, елементи системи в будь-який момент пов'язані єдністю процесів виробництва, передачі, розподілу і споживання електричної енергії. При цьому під процесами розуміють окремі складові явища, що відбивають деякі зв'язки між змінними величинами, які відповідають явищам, властивим даному станові (або режимові) системи.

При вивченні систем виробництва, передачі, розподілу електричної енергії і керування нею необхідно розглядати електричні і пов'язані з ними механічні процеси. Наприклад, процеси в первинних двигунах (турбінах), механічна енергія яких у генераторах перетворюється в електричну, і процеси в двигунах навантаження електричних систем, де електрична енергія перетворюється в механічну, не можна відокремити від процесів в електричній частині системи. Доводиться розглядати процеси, що відбуваються в системі, як єдині електромеханічні. Необхідно мати на увазі, що у елементів, які складають систему, можуть виявитися нові властивості і процеси, які відбуваються в системі, і вони можуть істотно відрізнятись від процесів, що відбуваються в окремих елементах.

Перш ніж розглядати використання методів прикладної математики в задачах електроенергетики, зупинимося на деяких характеристиках умов роботи електричних систем. Робота електричної системи насамперед характеризується значеннями потужностей (і відповідно енергій), які

виробляються, перетворюються, передаються і споживаються усіма її елементами. Щоб дати математичний опис системи, треба у вигляді математичної моделі показати всі зв'язки між змінними величинами процесів.

Енергія - це кількісний показник роботи електричної системи. Якість енергії характеризується головним чином величиною і частотою напруги у споживача. Режим системи - це її стан у будь-який момент часу або на деякому інтервалі часу. Режим системи визначається зазначеними показниками й іншими показниками. Параметри режиму - показники, що залежать від зміни режиму. До параметрів режиму відносяться напруги в різних точках системи, струми в її елементах, кути розбіжності векторів ЕРС і напруг, активні і реактивні потужності і т.д.

При аналізі і складанні математичного опису розрізняють три основних види режимів електричних систем:

нормальний сталий режим, стосовно до якого проектується електрична система і визначаються техніко-економічні характеристики;

післяаварійний сталий режим, що настає після аварійного відключення будь-якого елемента або ряду елементів системи (у цьому режимі система може працювати з трохи погіршеними техніко-економічними характеристиками); як нормальний, так і післяаварійні сталі режими характеризуються параметрами, що не змінюються в часі. При цьому зв'язку між параметрами режиму показуються алгебраїчними рівняннями;

перехідний режим, під час якого система переходить від одного стану до іншого. Для нього характерна зміна всіх його параметрів у часі й опис його диференціальними рівняннями.

Будь-який режим складається з безлічі різних процесів.

Параметри режиму електричної системи пов'язані між собою певними співвідношеннями, у які входять деякі коефіцієнти пропорційності, що залежать від властивостей елементів системи і від способів з'єднання їх між собою.

Наприклад, струм на ділянці лінії передачі визначається

$$\bar{I} = (\bar{U}_1 - \bar{U}_2) / \bar{Z}_л,$$

де \bar{I} і \bar{U}_1, \bar{U}_2 - параметри режиму; $\bar{Z}_л$ - опір даної ділянки лінії.

Так у вітці складної системи в найпростішій формі струм визначається

$$\bar{I}_i = \bar{E}_1 \bar{Y}_{i1} + \bar{E}_2 \bar{Y}_{i2} + \dots + \bar{E}_k \bar{Y}_{ik}$$

де \bar{I} і $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k$ - параметри режиму; $\bar{Y}_{11}, \dots, \bar{Y}_{ik}$ - постійні коефіцієнти, названі параметрами системи.

У складних мережах запис виразів для струмів окремих віток і розподіл цих струмів у залежності від параметрів мережі зручно зображати в матричній формі.

Параметри системи можуть залежати від змін її режиму. У цьому

випадку система називається нелінійною. Параметри всіх реальних електричних систем у тій або іншій мірі нелінійні. Але математичний апарат для їхнього дослідження ще недостатньо розроблений. У зв'язку з цим у багатьох практичних задачах параметри системи доводиться приймати постійними, вважаючи систему на якійсь досліджуваній ділянці лінійною. Мистецтво інженера тут виявляється саме в тому, щоб вибрати визначений інтервал лінеаризації і уникнути істотних похибок та певною мірою врахувати нелінійність (зміна параметрів від змін режиму). Але в математичній інтерпретації режиму енергосистеми присутній завжди й інший вид нелінійності - це нелінійність, обумовлена характером співвідношень між параметрами її режиму. Наприклад, споживана в опорі R потужність зв'язана квадратичною залежністю з напругою: $P = U^2/R$. Від нелінійності цього виду не можна позбутися, а тому їх необхідно враховувати.

У різних інженерних розрахунках, особливо проведених для визначення потоків потужності і розподілу струмів, перебування величин напруги в різних точках і на різних ділянках, користуються схемами заміщення. При цьому розрахунки щодо складних процесів, які відбуваються при поширенні електричної енергії по електричних мережах, можна звести до розрахунків елементарних процесів.

Схеми заміщення є також свого роду математичним інструментом інженера. Наприклад, у залежності від того, яка електрична мережа і які процеси практично цікавлять інженера, він підбирає схему заміщення досліджуваної мережі. Розгляд процесу в далеких електропередачах може замінятися дослідженням процесів у ряді чотириполосників, зв'язаних між собою. При розрахунку електричних мереж більш низької напруги (35 кВ і нижче), як правило, враховують індуктивність і активний опір тільки у вигляді однієї схеми заміщення із зосередженими постійними параметрами. Для кабельних ліній низької напруги звичайно враховують тільки активний опір, тому що в залежності від поставленої задачі можуть бути ті або інші зміни в схемах заміщення електричних мереж. Отже, математичний апарат буде підбиратися відповідно до технічного змісту задачі.

Після того як схема заміщення підбрана, розрахунок стану електричної системи (режиму) зводиться до звичайного відомого з курсу "Теоретичні основи електротехніки" розрахунку електричного ланцюга.

Однією з особливостей інженерного розрахунку є можливість його спрощення в залежності від поставленої задачі. Інша особливість полягає в тому, що інженерові приходиться мати справу зі складними електричними колами й у зв'язку з цим розробляти спеціальні прийоми розрахунку й аналізу електричних кіл, що є схемами заміщення складних електричних мереж. Для аналізу сталого режиму електричної системи необхідне складання алгебраїчних рівнянь зв'язку.

Основні труднощі при дослідженні полягають у необхідності, по-

перше, врахування нелінійності або по можливості уникнення її врахування; по-друге, складання і розв'язування великої кількості рівнянь складної за конфігурацією мережі і безлічі величин, що підлягають визначенню. При цьому можна використовувати матричні методи, що дозволяють компактно записувати задачу і відпрацьовувати її розв'язування.

Інженер повинен не тільки вивчити сталі режими, але і досліджувати переходи системи від одного стану (режиму) до іншого. При вивченні перехідних режимів уже не можна обійтися тільки методами алгебри, які придатні для розгляду сталого стану. Закони природи, що керують тими або іншими процесами, виражаються у формі диференціальних рівнянь, а розрахунок процесів зводиться до розв'язування цих рівнянь. У даному випадку рівняння, що описують процеси, є нелінійними трансцендентними рівняннями високих порядків, а тому способи їхнього запису, перетворення і розв'язування повинні ретельно досліджуватися.

Перехідні режими поділяються на нормальні і аварійні. І ті й інші - сукупність перехідних процесів. Правильніше і зручніше записувати рівняння не для всієї різноманітності перехідних процесів, з яких складається даний режим, а тільки для тих з них, що безпосередньо відносяться до досліджуваного питання. При цьому в практиці інженера з'являються рівняння перехідних процесів, що відбивають закономірні послідовні зміни параметрів режиму системи від моменту збудження (тобто від моменту появи початкового відхилення параметрів режиму) до початку нового сталого режиму. Таким чином, у даному випадку в розв'язуванні присутня умовність - допущення, продиктоване практикою.

Поточна експлуатація системи супроводжується нормальними перехідними процесами. Вони обумовлені змінами навантаження системи і реакцією на них пристроїв регулювання. Нормальні процеси виникають при звичайних експлуатаційних операціях: включенні і відключенні трансформаторів, а також окремих ліній електропередач; нормальних експлуатаційних змінах схеми комутації системи; включенні і відключенні окремих генераторів і навантажень або змінах їхньої потужності. При нормальних перехідних процесах відхилення параметрів режиму від їхніх сталих значень часто настільки невеликі, що для опису системи можна застосувати лінійні диференціальні рівняння.

В електричній системі можуть виникнути й аварійні перехідні процеси внаслідок будь-яких різких аварійних змін режиму: при коротких замиканнях елементів системи і наступному їх відключенні, зміні схеми з'єднання системи, наприклад випадковому (аварійному) відключенні агрегатів або ліній електропередачі, що несуть значні навантаження. При дослідженні перехідних режимів особливе значення має проблема стійкості електричних (електроенергетичних) систем.

Для розв'язування цих задач застосовуються матричні записи рівнянь з використанням теорії графів і елементів топології. Сталі режими

розраховуються як при детермінованих, так і при вірогідних умовах. Причому для розрахунку при вірогідних умовах потрібно враховувати можливу появу випадкових величин і випадкових подій, для характеристики яких можна використовувати стохастично задану інформацію, а іноді тільки неповну інформацію. Ще одна задача електроенергетики - це розгляд перехідних режимів і аналіз роботи пристроїв регулювання, для її розв'язування потрібно також застосування різних методів дослідження диференціальних рівнянь.

Проблеми математичних задач електроенергетики, які розглядаються у даному посібнику, у першу чергу вимагають оволодіння одним з розділів прикладної математики — методами моделювання параметрів електричних систем та розв'язування складних алгебраїчних рівнянь при матричному їх зображенні.

Математична модель зі сформульованими операційними і функціональними задачами - основа для подальшої розробки алгоритмів. Якщо при апробації математична модель забезпечує результати, які збігаються при експерименті з оригіналом, то її можна вважати ефективною, що дає можливість ефективної її реалізації в автоматизованих системах диспетчерського управління (АСДУ) режимами ЕЕС.

Кожному параметрові, що характеризує стан фізичної системи, при побудові математичної моделі ставиться у відповідність змінна або функція. Розглядаються усі фактори для виявлення величин, які роблять сновний вплив на режим роботи системи, а також величин, що не роблять істотного впливу на кінцевий результат, якого можна не враховувати.

Якщо хід і результати процесу, що протікає в електричному колі, визначені його вихідним станом, то використовуються детерміновані математичні описи: різні функціональні залежності, рівняння, системи рівнянь. Математичним описом системи будуть рівняння, у яких змінні фігурують або безпосередньо, або у вигляді похідних, або інтегралів. Постійні величини в рівняннях* визначаються значеннями параметрів системи. При описі складної системи кількість рівнянь дорівнює числу залежних змінних, невідомих для розглянутої системи. Підсумкові рівняння, що містять лише похідні за однією незалежною змінною, називаються *звичайними диференціальними рівняннями*. Коли ж маємо більше однієї незалежної змінної, з'являються часткові похідні за деякими або за всіма змінними, і диференціальне рівняння стає рівнянням у частинних похідних.

Будь-який результат прикладного математичного дослідження повинен сприйматися критично. В основі такого дослідження завжди лежать ті або інші гіпотези, допущення, що можуть неадекватно відображати процеси, які відбуваються в ЕЕС. Навіть якщо кожне допущення окремо вважається прийнятним, то їхнє сполучення через несприятливий збіг обставин може призвести до помилки, а отже, модель

може виявитися неадекватною і потребує доопрацювання та подальшого аналізу роботи, в першу чергу, усталених режимів електричної системи.

Аналіз роботи електричної схеми потребує розрахунку її усталених режимів, метою якого є визначення таких параметрів режиму, як напруги в вузлових точках, струмів і потужностей, що протікають по її окремих елементах.

Для виконання таких розрахунків реальній схемі ставиться у відповідність так звана схема заміщення, яка є сукупністю схем заміщення її окремих елементів, з'єднаних між собою в тій послідовності, що і в реальній схемі.

На рис.1.1. показана принципова схема відносно простої електричної системи, що має дві електростанції (ЕС1, ЕС2) і три понижувальних підстанції (А, В, С), зв'язаних між собою шістьма лініями електропередачі (Л1-Л6).

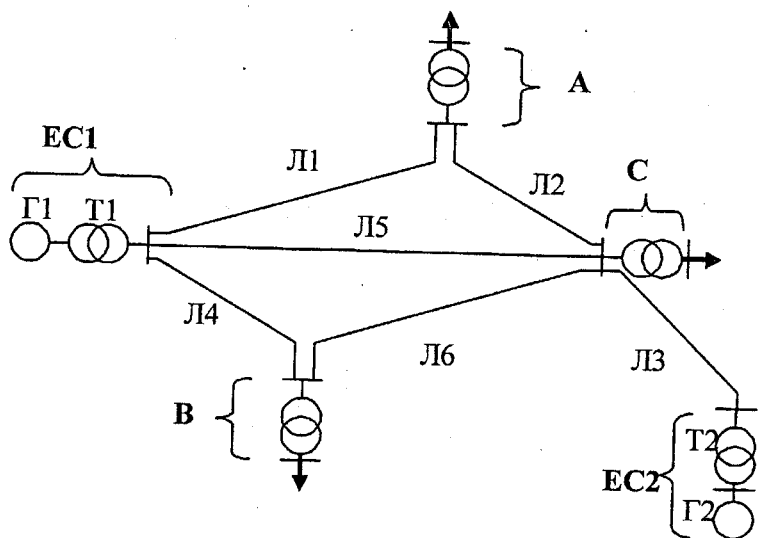


Рисунок 1.1.- Приклад схеми з'єднань електричної системи

Сумарне навантаження споживачів, що живляться від шин низької напруги кожної підстанції, умовно позначено на рис.1.1 стрілками. Окремі елементи електричної системи в розрахунках усталених режимів зображуються схемами заміщення, що складаються із елементів електричного кола: джерел напруги чи струму і опорів. При розгляді симетричних усталених режимів системи трифазного змінного струму всі

величини, що характеризують схеми заміщення її елементів, визначаються комплексними числами. При цьому схеми заміщення складаються тільки на одну фазу з нейтраллю.

Джерела живлення можуть бути зображені у вигляді джерела напруги з ЕРС \dot{E} і внутрішнім опором Z (рис.1.2,а), або у вигляді джерела струму \dot{J} , значення якого рівне струму усталеного режиму (рис.1.2,б) причому останній звичайно зображується так званим задавальним струмом (рис. 1.3, в).

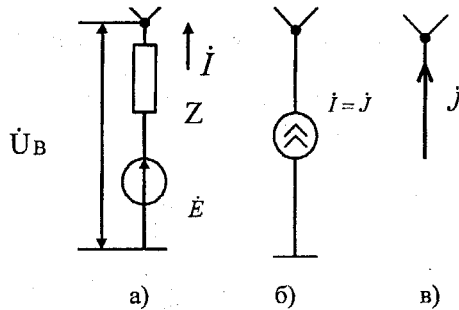


Рисунок 1.2- Приклад зображення джерела живлення

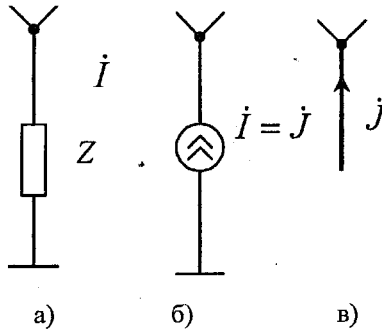


Рисунок 1.3- Приклад зображення навантаження

Навантаження (споживачі електроенергії) мають схему заміщення або у вигляді опору Z (рис.1.3,а), або (аналогічно джерелу живлення) у

вигляді джерела струму (рис.1.3,б), або у вигляді задавального струму (рис.1.3,в). Лінії електропередачі, трансформатори підстанцій і електростанцій показуються в схемі заміщення системи у вигляді опорів, причому схеми заміщення трансформаторів можуть бути об'єднані зі схемами заміщення відповідних джерел живлення і навантажень.

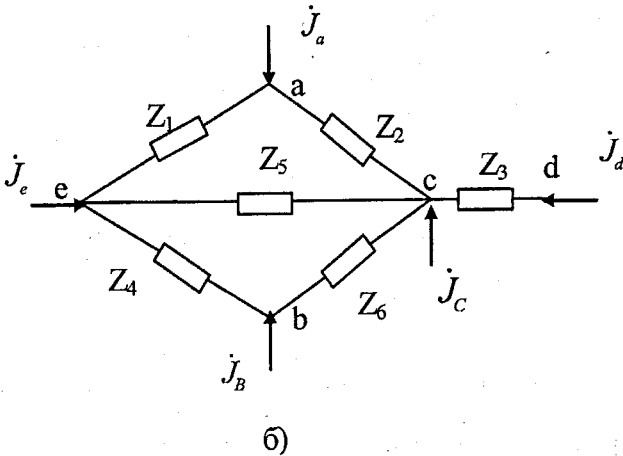
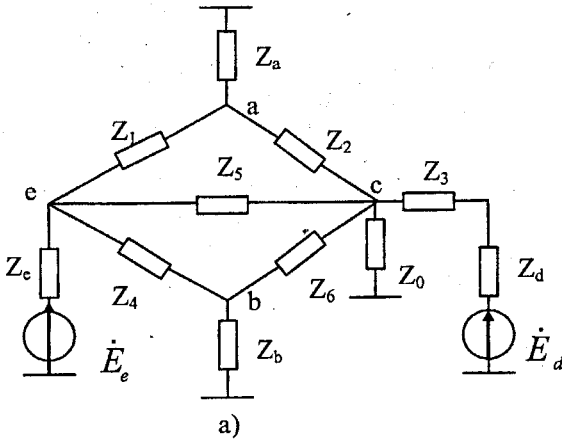


Рисунок 1.4- Схема заміщення а) з джерелами живлення та б) з задавальними струмами

Один із варіантів схеми заміщення електричної системи, зображений на рис.1.1, в якому електростанції показані джерелами напруги, а підстанції (трансформатори і навантаження) – опорами, показаними на рис.1.4,а. Другий варіант заміщення схеми, що розглядається, де як електростанції, так і підстанції зображені задавальними струмами, показаними на рис.1.4, б. Вибір того чи іншого варіанта схеми заміщення визначається цілями розрахунку і початковими даними.

Таким чином, схема заміщення електричної системи, що використовується для розрахунків усталених режимів, представляє собою електричне коло. Це означає, що до схеми заміщення електричної системи прийнятні такі поняття, що характеризують електричні кола, як *вітка, вузол, контур*.

Віткою називається ділянка кола, яка складається з послідовно з'єднаних ЕРС і опору (або тільки опору) і вздовж якого в будь-який заданий момент струм має одне й те ж значення.

Вузол визначається як точка з'єднання двох або більше віток електричної схеми.

Контур – ділянка електричного кола, утворена таким послідовним з'єднанням декількох віток, при якому початок першої вітки контуру з'єднано з кінцем останньої в одному вузлі.

Схема заміщення на рис.1.4,а має одинадцять віток і шість вузлів від *a* до *e* та вузол нейтралі (землі), що має нульовий потенціал.

Вітки, що зв'язані з вузлом нейтралі (вітки джерел живлення і навантаження), називаються *поперечними*; інші вітки – *повздовжніми*. Схема заміщення, показана на рис.1.4,б, в якій джерело живлення і навантаження зображене задавальними струмами, має контури, що утворюються, наприклад, лініями 1,2,5 чи 4,5,6, і тому називаються *замкненими*; при відсутності контурів схема заміщення називається *розімкненою*.

Опори, що входять в схему заміщення електричної системи, при розрахунках її усталених режимів звичайно приймаються постійними, тобто не залежними від значень струмів і напруг. При цьому схема заміщення системи є лінійним електричним колом. В тих випадках, коли необхідно враховувати залежність значень опорів віток від струмів і напруг, схема заміщення є нелінійним електричним колом. В практиці розрахунків усталених режимів електричних систем такі випадки бувають рідко і тому тут не розглядаються. В зв'язку з цим математична модель усталеного режиму електричної системи описується рівняннями стану лінійного електричного кола.

1.2 Рівняння стану лінійного електричного кола

Стан лінійного електричного кола описується рівняннями законів Ома і Кірхгофа. Як відомо, закон Ома визначає взаємозв'язок параметрів кожної із віток ланцюгів. Для i -ї вітки, що характеризується опором Z_i , дією в ній \dot{E}_i струмом \dot{I}_i , який по ній протікає (рис.1.5), різниця потенціалів між її кінцями (падіння напруги на вітці) \dot{U}_{Bi} визначаються у відповідності з рівнянням

$$\dot{U}_{Bi} = Z_i \dot{I}_i - \dot{E}_i \quad (1.1)$$

В загальному випадку між окремими вітками i та j можуть існувати взаємні опори Z_{ij} , обумовлені, наприклад, взаємною індуктивністю. В схемі, що має властивість взаємності, взаємний опір не залежить від черговості запису індексів:

$$Z_{ij} = Z_{ji}.$$

Взаємний опір визначає ЕРС $\Delta \dot{E}_j$, наведену у вітці j струмом \dot{I}_i , що проходить у вітці i і навпаки:

$$Z_{ij} = \Delta \dot{E}_j / \dot{I}_i = \Delta \dot{E}_i / \dot{I}_j.$$

Для віток i та j , що мають взаємний опір, зв'язок між всіма показаними величинами визначається такими рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{Bi} &= Z_{ii} \dot{I}_i - \dot{E}_i + Z_{ij} \dot{I}_j; \\ \dot{U}_{Bj} &= Z_{jj} \dot{I}_j - \dot{E}_j + Z_{ji} \dot{I}_i; \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

при вказаних на рис.1.6 додатних напрямках.

Величини \dot{E}_i і \dot{J}_i є початковими (незалежними) параметрами режиму, а величини Z_{ii} і Z_{ij} - параметрами системи. Значення цих величин необхідне для визначення інших (залежних) параметрів режиму: струмів \dot{I}_i , спадів напруг \dot{U}_{Bi} на вітках.

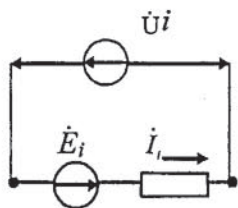


Рисунок 1.5

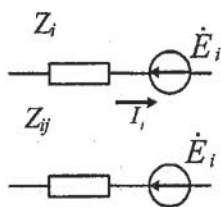


Рисунок 1.6

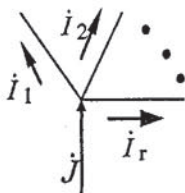


Рисунок 1.7

Перший закон Кірхгофа визначає баланс струмів в кожному вузлі електричного кола і формулюється так: алгебраїчна сума струмів у вузлі рівна нулю. Для довільного вузла, що має джерело струму J і зв'язує k віток (рис.1-7), рівняння першого закону Кірхгофа має вигляд :

$$\sum_{i=1}^k \dot{I}_i - J = 0 \quad (1.3)$$

Тут і далі за додатний приймається напрямок струму від вузла.

Другий закон Кірхгофа визначає баланс напруг в контурах електричного кола і формулюється так: алгебраїчна сума спадів напруг на вітках контуру рівна нулю. Для довільного контуру, який складається з l віток (рис.1.8), рівняння другого закону Кірхгофа записується у вигляді

$$\sum_{i=1}^l \dot{U}_{Bi} = 0. \quad (1.4)$$

Стан електричного кола повністю описується рівняннями законів Ома і Кірхгофа (1.1) і (1.4).

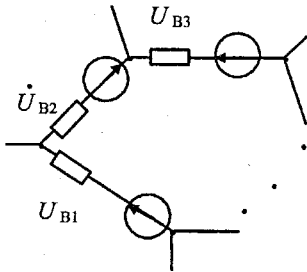


Рисунок 1.8

Складемо рівняння стану для схеми заміщення електричної системи, зображеної на рис.1.4, б вважаючи для загальності, що в кожному вітку додатково введено джерело напруги з ЕРС $\dot{E}_i, i=1, \dots, 6$ (рис.1.9). Нехай потрібно визначити струми у вітках \dot{I}_i при заданих значеннях задавальних струмів, опорів і ЕРС. Запишемо рівняння першого закону Кірхгофа для вузлів

$a - e$ у відповідності з рівнянням (1.3):

$$\left. \begin{aligned} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_a = 0; & \quad -\dot{I}_4 - \dot{I}_c - \dot{I}_b = 0; \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{I}_5 + \dot{I}_c = 0; & \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_a = 0; & \quad \dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_5 - \dot{I}_c = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Сума цих рівнянь приводить до рівності: $0=0$. Це зумовлено тим, що струм кожної вітки входить тільки в два рівняння (оскільки вітка з'єднує два вузли), причому з протилежними знаками. Крім цього, сума задавальних струмів

$$\dot{J}_a + \dot{J}_b + \dot{J}_c + \dot{J}_d + \dot{J}_e = 0,$$

оскільки умова балансу потребує, щоб сума струмів джерел енергії дорівнювала сумі струмів навантажень. Таким чином, рівняння (1.5) не є

взаємозалежними: будь-яке з них може бути отримане в результаті додавання інших.

Як відомо, для електричного кола, що має n вузлів, можна скласти $n-1$ взаємозалежних рівнянь вигляду (1.3), тобто один із вузлів не розглядати. Цей вузол називається *вузлом балансу* або *балансирувальним вузлом*.

Виберемо в схемі, зображеній на рис.1.9 ($n=5$), вузол e як балансувальний. Це відповідає усуненню останнього рівняння із системи (1.5). Чотири взаємно незалежні рівняння, що залишились, можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 &= \dot{J}_a; & -\dot{I}_4 - \dot{I}_6 &= -\dot{J}_b; \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 &= \dot{J}_c; & \dot{I}_3 &= -\dot{J}_d \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Кількість незалежних струмів віток в рівняннях (1.6) рівне числу віток ($m=6$), тобто на два більше числа рівнянь. Для отримання двох відсутніх рівнянь скористаємось законом Кірхгофа.

Схема, що розглядається, має три контури, що утворюються вітками 1-2-5, 4-5-6 і 1-2-6-4. У відповідності з рівнянням (1-4) запишемо рівняння другого закону Кірхгофа для вказаних контурів:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} - \dot{U}_{B5} &= 0; & -\dot{U}_{B4} + \dot{U}_{B5} + \dot{U}_{B6} &= 0; \\ -\dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} + \dot{U}_{B4} - \dot{U}_{B6} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Отримані рівняння, так як і рівняння (1-5), не є взаємно залежними – їх додавання призводить до рівності $0=0$. Це пояснюється тим, що до будь-якого з контурів, що розглядається, входять тільки вітки, які належать двом контурам, що залишились. Отже, рівняння для нього отримується додаванням рівнянь двох контурів, що залишились.

Відомо, що для схеми, яка має m віток і n вузлів, кількість взаємно незалежних рівнянь другого закону Кірхгофа або, що те ж саме, кількість *незалежних контурів* дорівнює $k=m-n+1$.

У розглянутому випадку $k=6-5+1=2$. Як незалежні виберемо контури I і II, додатні напрями обходу яких вказані на рис.1.9.

Запишемо рівняння другого закону Кірхгофа для цих контурів у відповідності з системою (1.7):

$$\dot{U}_{B1} - \dot{U}_{B2} - \dot{U}_{B5} = 0; \quad -\dot{U}_{B4} + \dot{U}_{B5} + \dot{U}_{B6} = 0. \quad (1.8)$$

Використовуючи рівняння закону Ома (1.1), перепишемо (1.8):

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2 - Z_5 \dot{I}_5 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_5; \\ Z_4 \dot{I}_4 + Z_5 \dot{I}_5 + Z_6 \dot{I}_6 &= -\dot{E}_4 + \dot{E}_5 + \dot{E}_6 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Об'єднуючи системи (1.6) і (1.9), отримаємо систему із шести взаємно незалежних, рівнянь, які необхідні і достатні для визначення струмів у вітках схеми.

В загальному випадку електричного кола, яке складається з n вузлів і m віток, має певну кількість взаємно незалежних рівнянь першого і другого законів Кірхгофа

$$(n-1) + (m-n+1) = m,$$

тобто кількість їх дорівнює кількості віток електричної схеми.

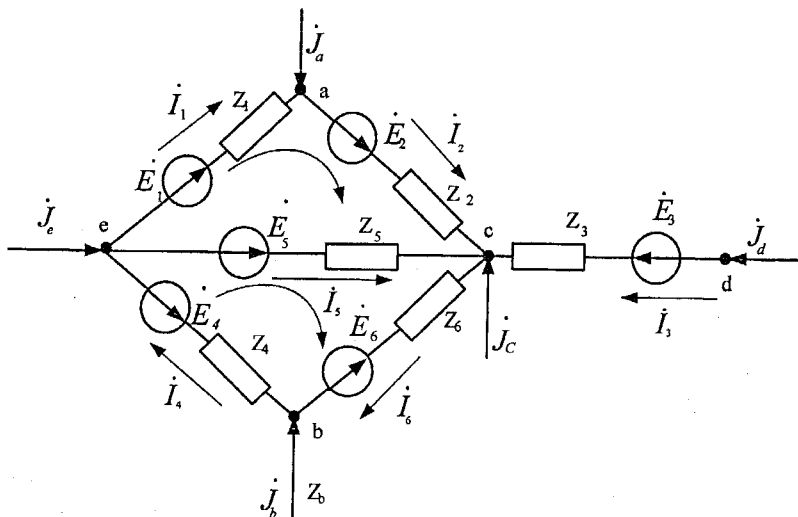


Рисунок 1.9- Схема заміщення з вибраними напрямками обходу контурів

Схеми заміщення сучасних складних електричних систем мають десятки і навіть сотні вузлів і віток. Кількість рівнянь стану для таких систем відповідно настільки велика, що для їх розв'язування необхідно використовувати сучасні електронні обчислювальні машини. Більш того, складання рівнянь стану для складних схем є доволі трудомісткою процедурою. Для цього потрібно мати формалізований підхід до складання рівнянь, який був би однаковий для схем будь-якої складності і конфігурації. Такий підхід може бути розроблений на основі аналітичного зображення конфігурації схеми заміщення з допомогою елементів теорії графів і алгебри матриць.

1.3 Рівняння стану електричної ланки в матричному вигляді

Математичне моделювання параметрів схем заміщення електричних систем та їх топологічне з'єднання доцільно виконувати із застосуванням елементів теорії графів. Конфігурацію схеми заміщення можна відобразити у вигляді графа, що значною мірою спрощує прийняття моделі та її формалізацію в АСДУ

1.3.1 Основні означення теорії графів

Граф - це множина *вершин* (вузлів) і *ребер* (віток), які з'єднують деякі (а може бути і всі) пари вершин. Будь-яка частина графа, називається *підграфом*. Сукупність ребер, які з'єднують дві довільні вершини створюють *підграф*, що визначається як *шлях графа*. Якщо початкова і кінцева вершини шляху графа збігаються, то цей шлях є замкненим і вони створюють *контур*.

Якщо в графі можна вибрати шлях, який з'єднує його будь-які вершини, то цей граф є *зв'язним*; якщо не можна, - то *незв'язним*. Якщо ребра графа мають фіксовані напрямлення, то цей граф називається *напрямленим*. Кожне ребро напрямленого графа має початкову і кінцеву вершини; його напрямок приймається від першої вершини до другої.

Схема заміщення електричної системи звичайно є зв'язним графом. Вона складається із віток (ребер), з'єднаних в вузли (вершини). Вітки утворюють ланцюги (шляхи графа), які можуть бути замкненими. Всі величини, що характеризують стан віток (струми, ЕРС, спад напруги), мають певний напрямок (без чого не може бути розрахований режим даної схеми). В зв'язку з цим доцільно кожній вітці надати певний (довільним чином вибраний) напрямок. Таким чином, схема заміщення системи звичайно є зв'язним напрямленим графом, ребрами якого служать вітки, а вершинами - вузли.

На рис.1.10 у вигляді зв'язного напрямленого графа показана схема (див. рис.1.9), на якій вибрані напрямки віток, а також вказані номери віток та вузлів. На рис.1.11 зображено частину цієї схеми - підграф (підсхема), що є незв'язним, оскільки, наприклад, немає шляху графа, що зв'яже вершини *a* і *v*. При зображенні схем у вигляді графів немає потреби в спеціальних позначеннях опорів і ЕРС. Вітки графічно зображуються лінією (прямою чи кривою) з вказаними напрямками (рис.1.10). Таким чином, напрямок вітки від початкового вузла до кінцевого вузла одночасно є додатним і для всіх величин, що беруть участь у моделюванні - ЕРС \dot{E} , струмів \dot{I} і спадів напруги \dot{U}_v . Будь-яка з цих величин може бути додатною чи від'ємною по відношенню до прийнятого напрямку.

Для напрямленого графа можуть бути визначені:

- 1) *матриця з'єднання віток у вузлах* (перша матриця інциденцій - M);
- 2) *матриця з'єднання віток в незалежні контури* (друга матриця інциденцій - N).

Ці матриці служать для узагальненого аналітичного зображення графа електричної мережі.

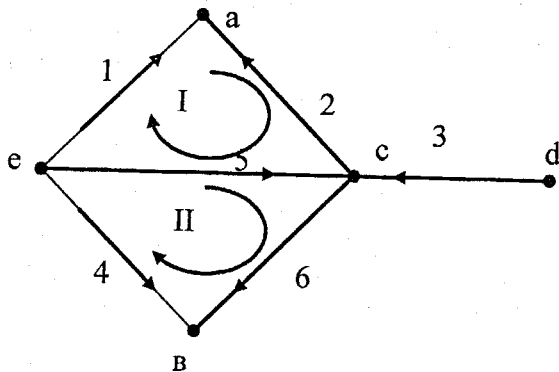


Рисунок 1.10 Зв'язний граф для схеми на рис. 1.9.

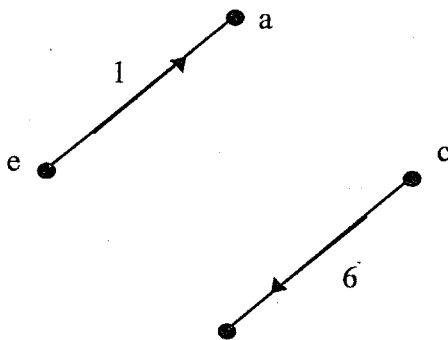


Рисунок 1.11 Приклад незв'язного графа

Матриця з'єднання віток у вузлах (матриця M) – це прямокутна матриця, кількість рядків якої рівна кількості вершин графа n , а кількість стовпців – кількості ребер m . Вона визначається таким чином:

$$M_{ij} = (m_{ij}), \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, m.$$

При цьому номери рядків i відповідають номерам вершин, а номери стовпців j – номерам ребер. Елементи матриці M_{ij} можуть приймати одне з трьох значень:

- $m_{ij} = +1$, якщо вузол i є початковою вершиною вітки j ;
- $m_{ij} = -1$, якщо вузол i є кінцевою вершиною вітки j ;
- $m_{ij} = 0$, якщо вузол i не є вершиною вітки j .

Кожний рядок матриці M_{Σ} показує, яким вершинам відповідають вітки приєднані до даного вузла схеми; кожний стовпець — які вузли є початковою і кінцевою вершинами даної вітки. Очевидно, що в кожному стовпці матриці M_{Σ} може бути тільки одна +1 і одна -1; іншими елементами є нулі (див. далі матрицю M_{Σ} для конкретної схеми). Очевидно, суми всіх елементів рядків цієї матриці (по стовпцям) повинна давати нульову (рядкову) матрицю:

$$n_i \cdot M_{\Sigma} = 0,$$

де n_i — одиничний рядок (див. додаток А).

Якщо виділити рядок, що відповідає деякому вузлу, прийнятому за балансувальний причому номер його прийняти останнім, то умова запишеться у такому вигляді:

$$[n_i, 1] \times \begin{bmatrix} M \\ M_6 \end{bmatrix} = 0,$$

звідки

$$M_6 = -n_i M.$$

Тут M — матриця з'єднань без балансувального вузла; M_6 — матриця з'єднань для балансувального вузла.

Отриманий результат показує, що один із рядків матриці M_{Σ} може бути утворений підсумовуванням інших рядків (по стовпцях) і зміною знаків всіх елементів сумарної матриці на обернені (тобто множенням його на -1). Тому для практичних розрахунків достатньо користуватись матрицею M , за якою може бути відновлена вся схема. Отримана схема може відрізнятись від вихідної тільки її зовнішнім виглядом, тобто розташуванням вузлів, конфігурацією контурів. У випадку необхідності матриця M_{Σ} може бути визначена за виразом:

$$M_{\Sigma} = \begin{bmatrix} M \\ -n_i M \end{bmatrix}.$$

Для напрямленого графа, показаного на рис.1.10, матриця M_{Σ} має вигляд:

$$M_{\Sigma} = \left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & b \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & +1 & c \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & d \\ +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & e \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}} \right\} \text{вузли}$$

вітки

Вибравши вузол e як балансувальний, отримаємо матрицю M із M_E шляхом виключення останнього рядка:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

За даною матрицею можна відновити виключений рядок, який є матрицею M_E :

$$M_E = -n_1 M = -[1111] \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [+1 \ 0 \ 0 +1 +1 \ 0].$$

Матриця з'єднання віток в незалежні контури (матриця N) – це прямокутна матриця, число рядків якої рівне числу незалежних контурів графа k , а число стовпців – числу віток m . Вона позначається таким чином:

$$N = (n_{ij}), \quad i=1, \dots, k; \quad j=1, \dots, m.$$

При цьому номери рядків i відповідають номерам незалежних контурів, а номери стовпців j – номерам віток.

Елементи матриці визначаються таким чином:

$n_{ij} = +1$, якщо вітка j входить в контур i і їх напрямки збігаються;

$n_{ij} = -1$, якщо вітка j входить в контур i і їх напрямки не збігаються;

$n_{ij} = 0$, якщо вітка j не входить в контур i .

Кожний рядок матриці N показує, які вітки входять в склад відповідного незалежного контуру. Кожен стовпець тієї ж матриці показує, в склад яких контурів входить дана вітка і чи збігається її напрямок з напрямком цих контурів.

Для напрямленого графа, показаного на рис.1.10, матриця N має вигляд:

$$N = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{bmatrix}}_{\text{вітки}} \left. \begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \right\} \text{ незалежні контури}$$

1.3.2 Закони Ома та Кірхгофа в матричному вигляді

Матриці M і N дають можливість записати рівняння стану електричного кола в матричній формі. Система взаємно незалежних рівнянь *першого закону Кірхгофа* може бути записана у вигляді:

$$M\dot{I} = \dot{J}, \quad (1.10)$$

де $\dot{I} = (\dot{I}_i), i = 1, \dots, m$; $\dot{J} = (\dot{J}_j), \dots, n-1$ - матриця-стовпець струмів у вітках і матриця-стовпець задавальних струмів в вузлах, відповідно.

Дійсно, зі струмів усіх віток, записаних у вигляді стовпця \dot{I} , при множенні на кожен рядок матриці M підсумовуються (алгебраїчно, тобто з врахуванням знаку) тільки струми тих віток, які з'єднані з відповідним вузлом (що має номер даного рядка). Знак кожного з цих струмів визначає напрямок вітки: за додатний напрямок приймається напрямок від вузла, за від'ємний напрямок – до вузла. Очевидно, при прийнятому записі додатним для задавальних струмів є напрямок до вузла. Аналогічно, система взаємно незалежних рівнянь *другого закону Кірхгофа* може бути записана у вигляді

$$N\dot{U}_v = 0, \quad (1.11)$$

де $\dot{U}_v = (\dot{U}_{v_i}), i = 1, \dots, m$ - стовпець спадів напруг на вітках схеми.

Щоб ввести у рівняння *другого закону Кірхгофа* струми у вітках схеми заміщення, скористаємось *законом Ома*. Для схеми довільної конфігурації, яка має m віток, між якими відсутній взаємоіндуктивний зв'язок, цей закон виражається матричним рівнянням:

$$\dot{U}_v = Z_v \dot{I} - \dot{E}, \quad (1.12)$$

де $Z_v = \text{diag}(Z_i), i = 1, \dots, m$ - діагональна матриця опорів віток; $\dot{E} = (\dot{E}_i), i = 1, \dots, m$ - стовпець ЕРС у вітках.

При розгляді нормальних симетричних усталених режимів для схем заміщення реальних електричних систем взаємоіндуктивний зв'язок між ними відсутній. Тому в подальшому схеми зі взаємоіндуктивним зв'язком не розглядаються. Зауважимо, що такі зв'язки можуть бути враховані в рівнянні (1.12) шляхом введення в матрицю Z_v відповідних недиагональних елементів відповідно до виразу (1.2).

Підставляючи (1.12) в (1.11), отримуємо матричне рівняння *другого закону Кірхгофа*:

$$N(Z_v \dot{I} - \dot{E}) = 0 \quad (1.13)$$

або

$$NZ_v \dot{I} = \dot{E}_k,$$

де $\dot{E}_k = N\dot{E}$ - стовпці контурних ЕРС, що є алгебраїчними сумами ЕРС віток, що входять в кожний незалежний контур.

Об'єднуючи матричні рівняння (1.10) і (1.13) в загальну систему, отримаємо загальне рівняння стану електричного кола, вигляд якого не залежить від його конфігурації і числа елементів:

$$\left. \begin{aligned} M\dot{I} &= J; \\ NZ_B\dot{I} &= \dot{E}_k \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Ці рівняння можна об'єднати в одне, якщо матриці M і NZ_B розглядати як блоки однієї об'єднаної матриці параметрів схеми заміщення системи:

$$A = \begin{bmatrix} M \\ NZ_B \end{bmatrix},$$

а матриці J і \dot{E}_k розглядати як блоки однієї об'єднаної матриці початкових параметрів режиму системи:

$$\dot{F} = \begin{bmatrix} J \\ \dot{E}_k \end{bmatrix}.$$

При цьому узагальнене рівняння стану приймає вигляд

$$A\dot{I} = \dot{F}. \quad (1.15)$$

Тут матриця A є квадратною і в звичайних умовах неособливою, тому отримане рівняння стану можна розв'язати відносно матриці струмів віток.

Знайдемо узагальнене рівняння для схеми, зображеної на рис.1.9. Попередньо визначимо матриці NZ_B і \dot{E}_k :

$$NZ_B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_1 & & & & & \\ & Z_2 & & & & \\ & & Z_3 & & & \\ & & & Z_4 & & \\ & & & & Z_5 & \\ & & & & & Z_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_2 & 0 & 0 & -Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4 & Z_3 & Z_6 \end{bmatrix};$$

$$\dot{E}_k = N\dot{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 \\ \dot{E}_5 \\ \dot{E}_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_k \\ -\dot{E}_4 + \dot{E}_5 + \dot{E}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{kl} \\ \dot{E}_{kl} \end{bmatrix}.$$

При цьому для схеми, що розглядається, узагальнене рівняння стану (1.15) в розгорненому вигляді запишеться таким чином:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & 0 & -Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4 & Z_5 & Z_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_a \\ \dot{J}_b \\ \dot{J}_c \\ \dot{J}_d \\ \dots \\ \dot{E}_{kl} \\ \dot{E}_{kl} \end{bmatrix}.$$

Штриховою лінією розділені блоки матриць A і F . Отримане матричне рівняння ідентичне сукупності рівнянь (1.6) і (1.9).

Для формування узагальненого рівняння стану (1.15) необхідно попередньо визначити матриці з'єднань M і N , які в аналітичній формі відображають конфігурацію схеми заміщення електричної системи.

Складання матриці M_{Σ} для схеми будь-якої складності не є проблемою. Для цього достатньо пронумерувати всі вузли і вітки схеми заміщення і в кожному стовпці матриці M_{Σ} записати "+1" і "-1" в тих рядках, які відповідають з'єднанню даною віткою вузлам, а в інших елементах цього стовпця записати "0".

Наприклад, якщо k -а вітка з'єднує вузли i та j то в k -му стовпці потрібно записати або $m_{ik}=+1$ та $m_{jk}=-1$, або навпаки, $m_{ik}=-1$ та $m_{jk}=+1$. Вибір того чи іншого варіанта довільний і в результаті визначає напрямок k -ї вітки. Викреслюючи із отриманої матриці M_{Σ} рядок, що відповідає вибраному балансувальному вузлі, отримуємо шукану матрицю M . Як відзначалось вище, за матрицею M можна відтворити конфігурацію схеми, що їй відповідає, тобто матриця має вичерпну інформацію про всю схему заміщення.

Скласти матрицю N для складних електричних систем на відміну від матриці M складно, оскільки потрібно виділити незалежні контури, кількість яких $k=m-n+1$ може бути значна. Крім того, матриця N в загальному випадку не містить повної інформації про конфігурацію схеми, що розглядається, оскільки розімкнені частини схеми у ній не відображаються. Наприклад, вітка 3 на рис.1.9 зображена в матриці N нульовими елементами і приєднання її до будь-якого іншого вузла не змінює матриці N .

Із зіставлення способів формування рівнянь стану електричного кола безпосередньо за її схемою і в узагальненій формі з використанням матриць M і N випливає, що за трудомісткістю обидва способи майже рівні, причому основна складність полягає у складанні рівнянь для незалежних контурів у першому випадку і матриці N – у другому. Видно, що при першому підході ця складність принципово не може бути усунена, тоді як при використанні узагальнених рівнянь стану її можна уникнути, якщо формалізувати процес складання матриці N . Можливість такої формалізації обумовлена тим, що матриця M містить в собі вичерпну інформацію про конфігурацію схеми, в тому числі і необхідну для складання матриці N . Для реалізації цієї можливості необхідно встановити аналітичну залежність, що пов'язує матриці M і N .

Позначимо стовпець напруг всіх вузлів схеми (вузлових напруг) як $\dot{U}_z = (\dot{U}_i), i = 1, \dots, n$. За цими напругами за допомогою матриці M_z можна визначити спад напруг на вітках схеми. Дійсно, кожен стовпець матриці M_z має додатну одиницю на місці початкової вершини і від'ємну – на місці кінцевої вершини вітки. Тому достатньо транспоновану матрицю з'єднань M_{zT} помножити справа на стовпець вузлових напруг \dot{U}_z , щоб отримати стовпець різниць напруг на кінцях кожної вітки, тобто спадів напруг на вітках:

$$\dot{U}_B = M_{zT} \dot{U}_z \quad (1.16)$$

Тут матриця вузлових напруг \dot{U}_z записана для всіх вузлів схеми (включаючи балансувальний). При цьому вузлові напруги можуть бути визначені відносно будь-якого вузла, навіть якщо він не входить в склад схеми заміщення системи (наприклад, відносно нейтралі мережі, з якою вузли схеми можуть не мати зв'язку у вигляді віток (див.рис.1.9).

Часто вузлові напруги доцільно визначати відносно балансувального вузла, тобто як спади напруг від кожного із незалежних вузлів схеми до балансувального. Ці значення відрізняються від напруг відносно нейтралі (при відсутності поперечних віток) на одну й ту ж величину – напругу балансувального вузла U_6 :

$$\dot{U}_z = U_6 \mathbf{1} - \begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ 0 \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{1}$ – одиничний стовпець (при цьому балансувальний вузол передбачається останнім за номером, тобто $U_6 = U_n$). Тут матриця $\dot{U}_d = (U_i - U_6), i = 1, \dots, n-1$ визначає напругу вузлів відносно балансувального.

В цьому випадку у відповідності (1.16)

$$\dot{U}_B = M_{zT} \begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ 0 \end{bmatrix} = [M_T M_{zT}] \times \begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ 0 \end{bmatrix} = [M_T \dot{U}_d]. \quad (1.17)$$

Із матричного рівняння другого закону Кірхгофа (1.11)

$$N\dot{U}_B = 0$$

і виразу для спадів напруг на вітках (1.17)

$$\dot{U}_B = M_1 \dot{U}_A$$

випливає, що

$$NM_1 \dot{U}_A = 0.$$

оскільки дана умова справедлива при будь-якій матриці \dot{U}_A , тому

$$NM_1 = 0. \quad (1.18)$$

Вираз (1.18) відображає загальну топологічну властивість графа і може бути пояснений таким чином. При обході будь-якого замкненого контуру перехід через вузол пов'язаний з переміщенням по одній із віток в напрямку до вузла і по другій – від вузла. Разом із тим при складанні матриці M напрямки віток орієнтуються відносно напрямку до вузла. При множенні матриці N на транспоновану матрицю M_1 справа відбувається попарне множення ненульових елементів матриць N і M для одних і тих же віток при різній орієнтації. В цьому випадку при переході через кожен вузол один добуток отримується рівним додатній одиниці, а другий – від'ємній і, отже, їх сума завжди дає нуль.

Для схеми, що показана на рис.1.9, в справедливості умови легко переконатись, перемноживши відповідні матриці:

$$NM = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Умова (1.18) не дозволяє безпосередньо визначити матрицю N за відомою M . Це пов'язано з тим, що одному і тому ж електричному колу відповідають декілька різних схем незалежних контурів, або, іншими словами, одній і тій же матриці M можна поставати у відповідність декілька матриць N .

Так, для схеми, що приведена на рис.1.9, відповідає три можливих системи незалежних контурів, що складаються з віток:

- а) 1-2-5 і 4-5-6;
- б) 1-2-5 і 1-2-6-4;
- в) 1-2-6-4 і 4-5-6.

1.3.3 Визначення системи базисних контурів

Однозначність у виділенні системи незалежних контурів, що дозволяє отримати матрицю N за матрицею M , може бути досягнута при використанні таких понять теорії графів, як *дерево* і *хорди* (рис.1.12).

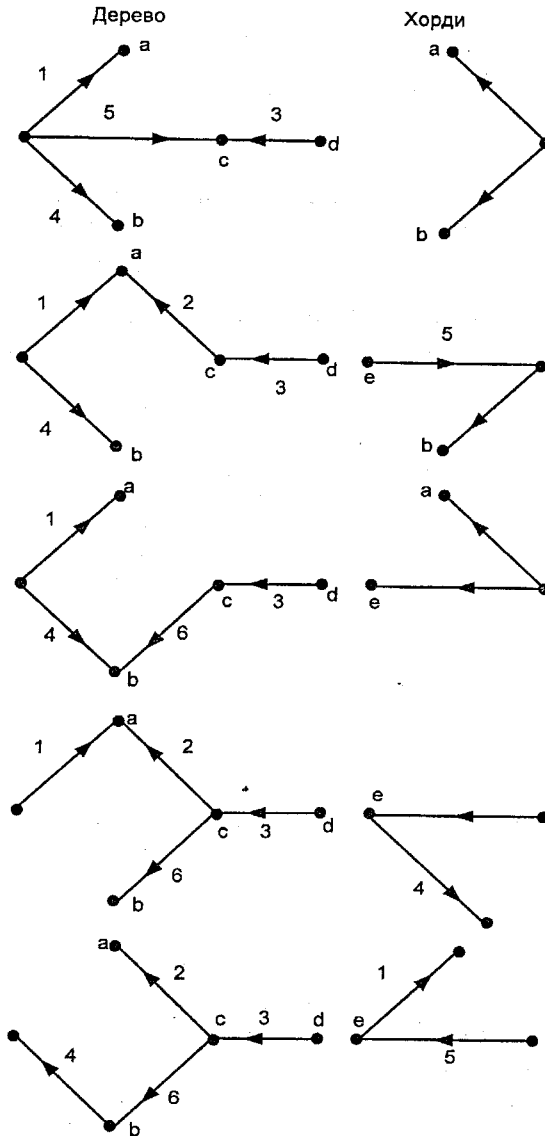


Рисунок 1.12 -Випадки розділення графа, що зображений на рис.1.10

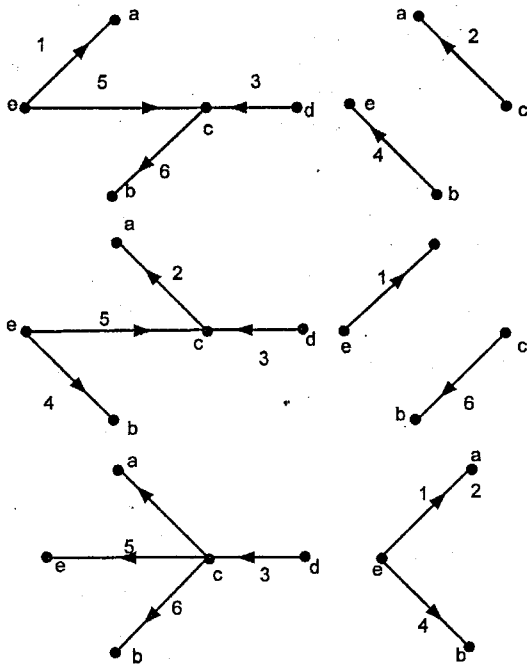


Рисунок 1.12

Одна і та ж схема може бути розділена на дерево і хорди по-різному. Звичайно число варіантів такого ділення отримується достатньо великим. На рис.1.12 показано всі можливі випадки розділення графа, що зображений на рис.1.10, на дерево і хорди.

При цьому деякі з підграфів, що складаються із хорд, стають незв'язними. В даному випадку вони не мають контурів, оскільки кількість хорд дуже мала (рівно двом).

Деревом називається найменший зв'язний підграф, що містить всі вершини графа. Такий підграф не має контурів. Іншими словами, *дерево* – це розімкнена частина замкненої схеми, яка з'єднує всі її вузли. Число віток, що входять в склад дерева схеми, на одиницю менше числа вузлів всієї схеми ($m_0 = n - 1$). Меншим числом віток не можна з'єднати ті ж вузли. Розглянуті контури називаються *базисними*. Вони є взаємозалежними, оскільки в кожен з них входить одна вітка, яка називається *хордою*, що не входить в жоден інший контур. Розімкнена схема отримується шляхом виключення деяких віток, що входять в незалежні контури вихідної схеми. Кожний контур схеми розмикається, якщо виключається одна із

віток, що входить в нього. При почерговому розімкненні всіх незалежних контурів одночасно розмикаються і всі інші контури: залишається розімкнена частина схеми – *дерево*.

Вітки, що не входять в дерево схеми, називаються *хордами*. Кількість хорд дорівнює кількості незалежних контурів схеми ($m_\alpha - m_\beta = m - n + 1 = k$). Підграф, що складається із хорд, може містити контури; він може бути і не зв'язним.

Граф, що зображений на рис.1.10, має два незалежних контури, тому достатньо виключити дві вітки, щоб ті що залишаться з'єднували всі вузли, тобто складали дерево схеми.

Для простих схем, аналогічно до розглянутої, виділення віток дерева і хорд і навіть всіх можливих варіантів розділення графа на відповідні підграфи не є складним. При складних схемах цю операцію доцільно покласти на ЕОМ, для чого в наш час розроблені ефективні алгоритми. В результаті матриця М, записана першочергово при довільній нумерації віток, шляхом перестановки стовпців перетворюється до вигляду

$$M = [M_\alpha M_\beta], \quad (1.19)$$

де M_α - підматриця (блок), що відноситься до дерева схеми; M_β - підматриця, що характеризує підграф, який складається із хорд.

Аналогічно можна розділити на блоки і матрицю N:

$$N = [N_\alpha N_\beta], \quad (1.20)$$

підставивши вирази (1.19) і (1.20) в (1.18), отримаємо

$$[N_\alpha N_\beta] \times \begin{bmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \end{bmatrix} = N_\alpha M_\alpha + N_\beta M_\beta = 0. \quad (1.21)$$

матриця M_α , а відповідно і M_α^{-1} , є квадратною порядку $(n-1)$ і неособливою. Тому, перемножуючи справа обидві частини виразу (1-21) на M_α^{-1} , знайдемо

$$N_\alpha = -N_\beta M_\beta M_\alpha^{-1}, \quad (1.22)$$

звідки випливає, що якщо відомі M_α , M_β , N_β , то можна визначити N_α , а відповідно, і всю матрицю N. Матрицю N_β можна задати рівною одиничній матриці ($N_\beta=1$). Це відповідає вибору системи таких контурів, які характеризуються такими властивостями:

- кожен із контурів замикається однією хордою, тобто кожна хорда входить тільки в один контур;
- послідовності нумерації хорд і контурів однакові;
- напрямки обходу контурів і хорд, які їх замикають, збігаються.

Таким чином, при виділенні базисних контурів ($N_\beta=1$) вираз (1.22) перетворюється до вигляду

$$N_{\alpha} = -M_{\beta} M_{\alpha}^{-1} \quad (1.23)$$

Отже, ділення матриці M на блоки, що відповідають дереву і хордам графа, дозволяє однозначно визначити матрицю N для системи базисних контурів, що відповідали даному дереву. Тим самим задача формування рівнянь стану електричного кола довільної конфігурації вигляду (1.15) зводиться до складання матриці M , ділення її на блоки M_{α} і M_{β} і виконання над ними стандартних операцій.

Проілюструємо викладений спосіб отримання матриці N для графа, показаного на рис.1.10. запишемо матрицю M у вигляді (1.19), виділивши блоки, що відповідають віткам дерева (1, 2, 3, 4) і хордам (5 і 6):

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{M_{\alpha}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{M_{\beta}}$

Для простого графа, що розглядається, таке розбиття не потребує використання спеціального алгоритму. Вибраний варіант дерева (другий із восьми, показаних на рис.1.12) зручний лише тим, що не потребує перенумерації стовпців отриманих раніше матриці M .

У випадку з виразом (1.23)

$$N_{\alpha} = -M_{\beta} M_{\alpha}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

За умовою отримання (1.23)

$$N_{\beta} = 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

тому шукана матриця N має вигляд

$$N = [N_\alpha N_\beta] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриці N відповідає два контури, в перший із яких входять вітки 1, 2, 5, а в другий – 1, 2, 4, 6. При цьому хорда 5 входить тільки в перший контур, а хорда 6 – в другий і напрямки обходів контурів збігаються з напрямками відповідних хорд (рис.1.13). Таким чином, отримана система базисних контурів, що відповідає виділенню матриць дерева і хорд.

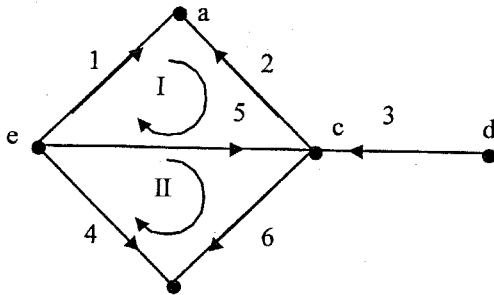


Рисунок 1.13

Відмітимо важливий окремий випадок схеми заміщення системи, а саме, випадок “розімкненої” схеми, коли відповідний граф не має контурів, тобто є деревом. Для розімкненої схеми матриця M є квадратною, так же як і матриця M_α у загальному випадку. При цьому, оскільки граф не має контурів, узагальнене рівняння стану (1.15) зводиться до матричного рівняння першого закону Кірхгофа (1.10):

$$M_p \dot{I} = J \quad (1.24)$$

де M_p – перша матриця з’єднань для розімкненої схеми.

Дане рівняння можна розв’язати відносно струмів віток, для чого достатньо перемножити обидві частини (1.24) зліва на матрицю, обернену по відношенню до M_p , тобто на M_p^{-1} :

$$\dot{I} = M_p^{-1} J = C_p J, \quad (1.24a)$$

де $C_p = M_p^{-1}$ (1.25)
- матриця коефіцієнтів розподілу задавальних струмів по вітках розімкненої схеми.

1.4 Вузлові рівняння електричної системи

Завданням розрахунку параметрів усталеного режиму електричної системи, як зауважувалось вище, є визначення струмів у вітках схеми заміщення, напруги в її вузлових точках і відповідних їм потужностей.

1.4.1 Формування системи вузлових рівнянь

В загальному випадку замкнутої схеми заміщення ця задача розв'язується таким чином. Складається узагальнене рівняння стану (1.15), яке розв'язується відносно струмів у вітках. За знайденою матрицею струмів \dot{I} знаходиться спад напруги на вітках схеми \dot{U}_B відповідно до рівняння закону Ома (1.12). Далі знаходиться напруга вузлів відносно балансувального \dot{U}_A .

Вираз (1-17), що зв'язує \dot{U}_B і \dot{U}_A , не дає можливості безпосередньо визначити \dot{U}_A при відомих \dot{U}_B , оскільки матриця M_4 прямокутна. Це обумовлено тим, що у відповідності з другим законом Кірхгофа в замкненій схемі (яка має контури) не всі спади напруг на вітках є незалежними величинами. Дійсно, спад напруг на будь-якій вітці, що входить в контур, дорівнює алгебраїчній сумі спаду напруг на інших вітках даного контуру, що береться з оберненим знаком. Оскільки дерево графа має у своєму складі всі вузли і не має контурів, то спади напруг на вітках дерева є взаємно незалежними і однозначно визначають матрицю \dot{U}_A . Це легко показати, якщо записати вираз (1.17), розбивши матриці M_4 і \dot{U}_A на блоки, що відповідають віткам дерева і хордам:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{B\alpha} \\ \dot{U}_{B\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\alpha} \\ M_{\beta} \end{bmatrix} \times \dot{U}_A.$$

Цей вираз еквівалентний двом матричним рівнянням:

$$\dot{U}_{B\alpha} = M_{\alpha} \dot{U}_A; \quad \dot{U}_{B\beta} = M_{\beta} \dot{U}_A.$$

Оскільки M_{α} – квадратна і неособлива матриця, то із першого рівняння випливає, що

$$\dot{U}_A = M_{\alpha}^{-1} \dot{U}_{B\alpha} \quad (1.26)$$

Підставляючи (1.26) в друге рівняння, виразимо спади напруг на хордах схеми через спади напруг на вітках дерева:

$$\dot{U}_{B\beta} = M_{\beta} M_{\alpha}^{-1} \dot{U}_{B\alpha}. \quad (1.27)$$

Таким чином, достатньо знати спади напруг на вітках дерева схеми, щоб визначити спади напруг на всіх інших вітках і напруги всіх вузлів відносно балансувального, а відповідно, і напруги вузлів, якщо напругу балансувального вузла \dot{U}_e задано:

$$\dot{U}_i = \dot{U}_e + \dot{U}_\Delta, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Викладена послідовність розрахунку параметрів усталеного режиму електричної системи характеризується тим, що на першому етапі (визначення струмів у вітках) розв'язується система рівнянь порядку m , де m – число віток. Якщо ж використовувати іншу послідовність, тобто починати розрахунок з визначення напруг у вузлах схеми відносно балансувального вузла (матриці \dot{U}_Δ), то порядок системи рівнянь, що розв'язується, буде рівним $n-1$. Оскільки кількість віток перевищує $n-1$ на кількість незалежних контурів ($m=n-1+k$), то для складних замкнених схем можна отримати суттєве пониження порядку системи рівнянь, що розв'язуються.

Система, що складається із $(n-1)$ рівнянь, що зв'язують напруги вузлів відносно балансувального із задавальним струмом в вузлах і ЕРС у вітках, називається *системою вузлових рівнянь*. Вона широко використовується у практиці розрахунків усталених режимів складних електричних систем. Система вузлових рівнянь може бути отримана таким чином:

підставляючи у рівняння (1.17), що пов'язує матриці \dot{U}_B і \dot{U}_Δ , вираз \dot{U}_B із (1.12), отримаємо

$$M_t \dot{U}_\Delta = Z_B \dot{I} - \dot{E};$$

розв'язавши отримане рівняння відносно струму \dot{I} (що можливо, оскільки Z_B – квадратна і неособлива матриця), будемо мати

$$\dot{I} = Z_B^{-1}(M_t \dot{U}_\Delta + \dot{E}),$$

підставляючи вираз для \dot{I} в рівняння першого закону Кірхгофа (1.10), отримаємо

$$J = MZ_B^{-1}M_t \dot{U}_\Delta + MZ_B^{-1}\dot{E},$$

звідки

$$MZ_B^{-1}M_t \dot{U}_\Delta = J - MZ_B^{-1}\dot{E}.$$

Визначимо матрицю провідності віток як

$$Y_B = Z_B^{-1} = \text{diag}(Y_i) = \text{diag}(1/Z_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Позначимо

$$Y_t = MZ_B^{-1}M_t = MY_B M_t. \quad (1.28)$$

Квадратна матриця (1-28) порядку $(n-1)$ називається *матрицею вузлових провідностей*. Вона дає можливість отримати кінцеву форму запису системи вузлових рівнянь (*матричне вузлове рівняння*):

$$Y_t \dot{U}_\Delta = J - MY_B \dot{E}. \quad (1.29)$$

Розв'язавши дане рівняння відносно \dot{U}_Δ , можна розрахувати спад напруги на вітках схеми за (1.17) і знайти струми у вітках схеми із (1.12).

Для ілюстрації алгоритму формування вузлового рівняння складемо ці рівняння для електричної схеми заміщення, яка показана на рис.1.9:

$$Y_B = \begin{bmatrix} Y_1 & & & & & \\ & Y_2 & & & & \\ & & Y_3 & & & \\ & & & Y_4 & & \\ & & & & Y_5 & \\ & & & & & Y_6 \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$MY_B = \begin{bmatrix} -Y_1 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_4 & 0 & -Y_6 \\ 0 & Y_2 & -Y_3 & 0 & -Y_5 & Y_6 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

При цьому у відповідності з (1.28) і (1.29)

$$Y_y = MY_B M_t = \begin{bmatrix} -Y_1 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_4 & 0 & -Y_6 \\ 0 & Y_2 & -Y_3 & 0 & -Y_5 & Y_6 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Y_1 + Y_1 & 0 & -Y_2 & 0 \\ 0 & Y_4 + Y_6 & -Y_6 & 0 \\ -Y_2 & -Y_6 & Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6 & -Y_5 \\ 0 & 0 & -Y_3 & Y_3 \end{bmatrix};$$

$$MY_B \dot{E} = \begin{bmatrix} -Y_1 \dot{E}_1 - Y_2 \dot{E}_2 \\ -Y_4 \dot{E}_4 - Y_6 \dot{E}_6 \\ Y_2 \dot{E}_2 - Y_3 \dot{E}_3 - Y_5 \dot{E}_5 + Y_6 \dot{E}_6 \\ Y_3 \dot{E}_3 \end{bmatrix}$$

Остаточно отримаємо систему вузлових рівнянь (1.29) у вигляді

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_1 & 0 & -Y_2 & 0 \\ 0 & Y_4 + Y_6 & -Y_6 & 0 \\ -Y_2 & -Y_6 & Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6 & -Y_3 \\ 0 & 0 & -Y_3 & Y_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_{\Delta a} \\ \dot{U}_{\Delta b} \\ \dot{U}_{\Delta c} \\ \dot{U}_{\Delta d} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} J_a + Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2 \\ J_b + Y_4 \dot{E}_4 + Y_6 \dot{E}_6 \\ J_c - Y_2 \dot{E}_2 + Y_3 \dot{E}_3 + Y_5 \dot{E}_5 - Y_6 \dot{E}_6 \\ J_d - Y_3 \dot{E}_3 \end{bmatrix}$$

При відсутності ЕРС у вітках, що характерно для більшості схем заміщення реальних електричних систем, матричне вузлове рівняння (1.29) має найбільш простий вигляд. Тоді при $\dot{E} = 0$ отримуємо

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \dot{J} \quad (1.30)$$

Формування вузлових рівнянь вигляду (1.30) зводиться до визначення матриці Y_y .

1.4.2 Формування матриці вузлових провідностей

В залежності від розрахункових умов, наприклад вибору балансувального вузла, вигляд матриці вузлових провідностей може бути різним. Для того щоб проаналізувати її можливості модифікацій, доцільно розглянути систему вузлових рівнянь для всіх вузлів схеми. Процедура отримання такої системи аналогічна розглянутій для системи вигляду (1.30), з тією лиш різницею, що в її основу покладені не рівняння (1.17), а рівняння (1.16):

$$\dot{U}_B = M_\Delta \dot{U}_\Delta$$

В даному випадку матричне вузлове рівняння при $\dot{E} = 0$ буде мати вигляд

$$Y_{y\Sigma} \dot{U}_\Sigma = \dot{J}_\Sigma, \quad (1.31)$$

де

$$Y_{y\Sigma} = M_\Sigma Y_B M_\Sigma^T, \quad (1.32)$$

а індекс "Σ" означає, що відповідна матриця визначена для всіх вузлів схеми.

Розглянемо структуру матриці $Y_{y\Sigma}$. Оскільки

$$M_\Sigma = (m_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad \text{і} \quad Y_B = \text{diag}(Y_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

то матриця буде квадратною порядку n , тобто

$$Y_{yx} = (Y_{ij}), i, j = 1, \dots, n.$$

Відповідно до (1.32) довільний елемент цієї матриці з врахуванням діагональності матриці Y_B визначається виразом

$$Y_{ij} = \sum_{l=1}^m m_{il} m_{jl} Y_l. \quad (1.33)$$

Нагадаємо, що кожен стовпець матриці M_x відповідає одній із віток схеми, а кожний рядок – одному із вузлів. При цьому будь-який із стовпців l цієї матриці має два ненульових елементи (+1 і -1), що розташовані в рядках, які відповідають вузлам i і j , що з'єднуються віткою l . Така структура матриці M_x дозволяє просто і наглядно визначити елементи матриці Y_{yx} через провідності віток схеми. Так, при $i \neq j$ серед добутків $m_{il} m_{jl}$ для всіх $l=1, \dots, m$ буде лише одне, відмінне від нуля значення; воно буде відповідати тій вітці l , яка з'єднує вузли i і j , і буде дорівнювати -1. Тому у відповідності з (1.33)

$$Y_{ij} = -Y_l \quad (1.34)$$

Іншими словами, будь-який діагональний елемент матриці Y_{yx} , що належить рядку i і стовпцю j , дорівнює взятій з протилежним знаком провідності вітки, що включена між вузлами i і j , або нулю, якщо між вузлами i і j відсутній безпосередній зв'язок.

При $i = j$, тобто для i -го елемента матриці Y_{yx} , вираз (1.33) прийме вигляд

$$Y_{ij} = -\sum_{l=1}^m m_{il}^2 Y_l. \quad (1.35)$$

Із розгляду структури матриці M_x випливає, що $m_{il}^2 = 1$, якщо вузол i є початковою або кінцевою вершиною вітки l ; і $m_{il}^2 = 0$, якщо вітка l не пов'язана з вузлом i . Це, в свою чергу, означає, що i -й діагональний елемент матриці Y_{yx} відповідно (1.35) дорівнює сумі провідностей, що пов'язані з вузлом i .

Отримані результати дозволяють відмітити такі основні *властивості матриці вузлових провідностей* Y_{yx} :

- 1) кожен із n діагональних елементів матриці дорівнює сумі недіагональних елементів відповідного рядка (або стовпця), взятого з протилежним знаком. Звідки випливає, що визначник матриці дорівнює нулю, тобто вона є особливою;
- 2) в схемах заміщення реальних схем діагональні елементи матриці Y_{yx} відрізняються від нуля, і як правило, за абсолютною величиною переважають недіагональні елементи відповідного рядка чи стовпця. Будь-який діагональний елемент може дорівнювати нулю лише в тому випадку, коли

провідності віток, що пов'язані з даним вузлом, є чисто індуктивними і смісними і взаємно компенсують один одного, що практично нереально;

- 3) кількість відмінних від нуля недіагональних елементів дорівнює подвійній кількості віток схеми ($2m$), тому для матриці порядку n кількість елементів якої дорівнює n^2 , кількість ненульових елементів рівна $n+2m$. Аналіз схем заміщення сучасних складних електричних систем показує, що кількість їх віток приблизно в 1,5 раза більша кількості вузлів. Якщо прийняти $m=1,5n$, то кількість ненульових елементів в матриці $Y_{y\epsilon}$ складатиме $n+2\cdot 1,5n=4n$, а відношення кількості ненульових елементів до загальної кількості елементів рівне $4n/n^2=4/n$ і спадає з ростом n . Таким чином, матриця $Y_{y\epsilon}$ характеризується слабкою заповненістю, тобто великою кількістю ненульових елементів;
- 4) матриця $Y_{y\epsilon}$ симетрична, оскільки відповідно до (1.34) $Y_{ij} = Y_{ji} = -Y_l$, де l – номер вітки, що з'єднує вузли i і j . Це ж впливає і з рівняння (1.32). Дійсно, оскільки $Y_{y\epsilon} = M_\epsilon Y_B M_\epsilon^T$, то $Y_{y\epsilon} = (M_\epsilon Y_B M_\epsilon^T)_i = M_\epsilon Y_B M_\epsilon^T = Y_{y\epsilon}$, тому що $Y_B = Y_B^T$.

Вузлове рівняння системи (1.31) не є взаємнонезалежним, так як і не є взаємнонезалежними рівняння першого закону Кірхгофа (записані для всіх вузлів схеми), на базі яких і отримане рівняння (1.31). Дійсно, сума цих рівнянь дає тотожність $0=0$, що впливає із першої властивості матриці $Y_{y\epsilon}$ і рівності нулю алгебраїчної суми всіх задавальних струмів вузлів.

Перехід від системи рівнянь (1.31) до системи взаємнонезалежних рівнянь (1.30), до складу якої входить матриця $Y_{y\epsilon}$, відбувається за допомогою відношення:

$$Y_{y\epsilon} \dot{U}_\epsilon^* = 0, \quad (1.36)$$

де $\dot{U}_\epsilon^* = \dot{U}_\epsilon n$ – стовпець, всі n елементів якого дорівнюють \dot{U}_ϵ .

Відношення (1.36) впливає із першої властивості матриці $Y_{y\epsilon}$, оскільки кожний елемент матриці-добутку в лівій частині дорівнює сумі елементів відповідного рядка $Y_{y\epsilon}$, помноженого на \dot{U}_ϵ , а ця сума для кожного рядка матриці $Y_{y\epsilon}$ рівна нулю.

Віднявши (1.36) від (1.31), отримаємо

$$Y_{y\epsilon} (\dot{U}_\epsilon - \dot{U}_\epsilon^*) = \dot{J}_\epsilon$$

Запишемо цей вираз у блокувій формі, виділяючи блоки, що відповідають балансувальному вузлу, номер якого прийнято рівним n :

$$\begin{bmatrix} Y_y & \cdot & Y_{yn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{ynt} & \cdot & Y_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_{\Delta} \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

де - Y_{yn} - n -й стовпець матриці $Y_{y\epsilon}$ без його останнього елемента Y_{nn} .

Цей вираз еквівалентний системі двох матричних рівнянь, перше з яких ідентичне (1.30). Таким чином, знаючи матрицю $Y_{y\epsilon}$, можна одержати матрицю Y_y шляхом виключення рядка і стовпця, що відповідають балансувальному вузлу. Утворена таким способом матриця Y_y зберігає усі властивості матриці $Y_{y\epsilon}$, за винятком першого, *тобто на відміну від $Y_{y\epsilon}$ матриця Y_y не є особливою, але залишається симетричною і слабо заповненою.*

Розглянутий спосіб одержання матриці Y_y з $Y_{y\epsilon}$ відповідає виключенню з повної системи вузлових рівнянь (1.31) рівняння для балансувального вузла і задання напруги в цьому ж вузлі. У загальному випадку напруга може бути задана й у будь-якому іншому вузлі (наприклад, в k -му), а не в балансувальному. При цьому отриманій системі незалежних вузлових рівнянь буде відповідати матриця вузлових провідностей Y'_y , утворена з $Y_{y\epsilon}$ шляхом викреслювання n -го рядка (відповідного балансувальному вузлу) і k -го стовпця ($k \neq n$). На відміну від балансувального, вузол k , у якому задається напруга, називається *опорним* або *базисним вузлом*.

Система взаємно незалежних вузлових рівнянь при виборі різних балансувального і базисного вузлів може бути отримана у вигляді, аналогічному (1.30), з виразу

$$Y_{y\epsilon} (\dot{U}_{\Sigma} - \dot{U}_0) = \dot{J}_{\Sigma}$$

де $\dot{U}_0 = \dot{U}_{0n}$ — стовпець, усі n елементів якого дорівнюють напрузі у базисному вузлі \dot{U}_0 .

Якщо, наприклад, за базисний вузол вибрати перший вузол ($k=1$), а як балансувальний, як і раніше, — останній (n -й), то аналогічно (1.37) отримаємо

$$\begin{bmatrix} Y'_{y1} & Y'_y \\ \dots & \dots \\ Y'_{yn1} & Y'_{yn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dot{U}_{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ \dots \\ j_n \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

де $\dot{U}_{\Delta} = \dot{U}'_{\Delta i}$, $i = 2, \dots, n$ $\dot{U}'_{\Delta i} = \dot{U}_i - \dot{U}_0$.

Із (1.38) випливає матричне вузлове рівняння

$$\mathbf{Y}_y \dot{\mathbf{U}}_\Delta = \dot{\mathbf{J}}, \quad (1.39)$$

яке відрізняється від рівняння (1.30). Через розбіжність балансувального і базисного вузлів матриця коефіцієнтів \mathbf{Y}_y , залишаючись неособливою, буде несиметричною, а напруга $\dot{\mathbf{U}}_\Delta$ не буде відніматися від балансувального вузла.

Для ілюстрації одержимо матрицю \mathbf{Y}_y для електричної системи, схема заміщення якої показана на рис. 1.9. Приймаємо, що балансувальним є вузол e , а базисним — вузол a . Матриця $\mathbf{Y}_{y\epsilon}$ для цієї схеми, складена згідно з (1.32), має вигляд

$$\mathbf{Y}_{y\epsilon} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & 0 & -Y_2 & 0 & -Y_1 \\ 0 & Y_4 + Y_6 & -Y_6 & 0 & -Y_4 \\ -Y_2 & -Y_6 & Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6 & -Y_3 & -Y_5 \\ 0 & 0 & -Y_3 & Y_3 & 0 \\ -Y_1 & -Y_4 & -Y_5 & 0 & Y_1 + Y_4 + Y_5 \\ a & b & c & d & e \end{bmatrix}$$

Виключаючи із цієї матриці перший стовпець, що відповідає базисному вузлу a , і останній рядок, що відповідає балансувальному вузлу e , отримаємо матрицю

$$\mathbf{Y}_{y\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & -Y_2 & 0 & -Y_1 \\ Y_4 + Y_6 & -Y_6 & 0 & -Y_4 \\ -Y_6 & Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6 & -Y_3 & -Y_5 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 & 0 \\ b & c & d & e \end{bmatrix}$$

Несиметричність матриці \mathbf{Y}_y , а також той факт, що на її головній діагоналі можуть знаходитися нульові елементи, приводить до того, що з погляду організації обчислень із застосуванням ЕОМ рівняння (1.39) менш раціональне в порівнянні з (1.30). У зв'язку з цим доцільно при створенні розрахункової моделі електроенергетичної системи сполучати базисний і балансувальний вузол у всіх випадках у одному вузлі, коли це не суперечить технічній постановці задачі розрахунку усталеного режиму.

1.5 Контурні рівняння електричної системи

Розглянуті вузлові рівняння базувалися на рівняннях першого закону Кірхгофа і закону Ома для електричного ланцюга (див. розд. 1.4). Їхнє використання для розрахунку усталеного режиму електричної системи дозволяє скоротити порядок розв'язуваної системи рівнянь до $(n-1)$ у порівнянні з використанням системи узагальнених рівнянь стану (1.15), що має порядок m . Ще однією можливістю зниження порядку розв'язуваної системи рівнянь є використання *контурних рівнянь*, основаних на другому законі Кірхгофа і законі Ома. Можливість застосування таких рівнянь, кількість яких дорівнює кількості незалежних контурів ($k=m-n+1$), обумовлена тим, що за відомими струмами у хордах графа схеми заміщення, кількість яких дорівнює кількості контурів, можна однозначно визначити струми у вітках дерева графа.

Дійсно, зображаючи матрицю M в вигляді (1.19), тобто виділяючи блоки, що відповідають віткам дерева і хордам, можна записати рівняння першого закону Кірхгофа (1.10) у вигляді

$$[M_{\alpha} M_{\beta}] \times \begin{bmatrix} I_{\alpha} \\ I_{\beta} \end{bmatrix} = J$$

де I_{α} , I_{β} - стовпці струмів у вітках дерева і хордах, відповідно. Звідси випливає, що

$$I_{\alpha} = M_{\alpha}^{-1} J - M_{\alpha}^{-1} M_{\beta} I_{\beta}. \quad (1.40)$$

При виборі системи незалежних базисних контурів (див. 1.3) добуток $M_{\alpha}^{-1} M_{\beta}$ згідно з (1.23) дорівнює узятому зі зворотним знаком транспонованому блоку матриці N , що відповідає віткам дерева:

$$M_{\alpha}^{-1} M_{\beta} = -N_{\alpha}.$$

Тоді вираз (1.40) переписеться у вигляді

$$I_{\alpha} = M_{\alpha}^{-1} J + N_{\alpha} I_{\beta}. \quad (1.40a)$$

При розбивці стовпця I на блоки I_{α} і I_{β} з врахуванням (1.40a) одержимо

$$I = \begin{bmatrix} I_{\alpha} \\ I_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} J + N_{\alpha} I_{\beta} \\ I_{\beta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{\alpha}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} J + \begin{bmatrix} N_{\alpha} \\ I \end{bmatrix} I_{\beta}.$$

Оскільки при виборі системи базисних контурів $N_{\beta}=1$, то

i

$$N = [N_\alpha N_\beta] = [N_\alpha 1]$$

$$\dot{i} = \begin{bmatrix} M^{-1}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} j + N_t \dot{i}_\beta. \quad (1.41)$$

Для визначення струму \dot{i}_β як функції параметрів схеми заміщення, ЕРС у вітках і задавальних струмів у вузлах скористаємося матричним виразом другого закону Кірхгофа (1.13):

$$NZ_B \dot{i} = \dot{E}_k$$

Підставимо в цей вираз матрицю струмів у вітках (1.41):

$$NZ_B \left(\begin{bmatrix} M^{-1}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} j + N_t \dot{i}_\beta \right) = \dot{E}_k.$$

Таким чином, отримуємо систему k взаємонезалежних рівнянь для визначення струмів у хордах \dot{i}_β :

$$NZ_B N_t \dot{i}_\beta = \dot{E}_k - NZ_B \begin{bmatrix} M^{-1}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} j.$$

Як відомо, для системи базисних контурів струми в хордах називаються *контурними*. Позначивши $\dot{i}_k = \dot{i}_\beta$, остаточно запишемо матричний вираз системи контурних рівнянь:

$$Z_k \dot{i}_k = \dot{E}_k - NZ_B \begin{bmatrix} M^{-1}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} j, \quad (1.42)$$

де

$$Z_k = NZ_B N_t \quad (1.43)$$

Квадратна неособлива матриця Z_k порядку k називається *матрицею контурних опорів*.

Розв'язавши рівняння (1.42) відносно $\dot{i}_k = \dot{i}_\beta$, можна визначити струми у вітках дерева схеми \dot{i}_α за (1.40) спади напруг на вітках системи за (1.12) і напруги вузлів відносно балансувального вузла за (1.26). В результаті вирішується *задача визначення параметрів усталеного режиму електричної системи*.

Складемо контурне рівняння для електричної системи, схема заміщення якої зображена на рис. 1.9, а направлений граф з виділеними базисними контурами I і II – на рис 1.13.

Для цієї схеми

$$\dot{Z}_B = \begin{bmatrix} Z_1 & & & & & \\ & Z_2 & & & & \\ & & Z_3 & & & \\ & & & Z_4 & & \\ & & & & Z_5 & \\ & & & & & Z_6 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$ZN_B = \begin{bmatrix} -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 & 0 & Z_6 \end{bmatrix}.$$

При цьому у відповідності з (1.43)

$$Z_k = NZ_B N_t = \begin{bmatrix} -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 & 0 & Z_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_5 & -(Z_1 + Z_2) \\ -(Z_1 + Z_2) & Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6 \end{bmatrix}.$$

Окрім того,

$$\dot{E}_k = N\dot{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 \\ \dot{E}_5 \\ \dot{E}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_5 \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_4 + \dot{E}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{kl} \\ \dot{E}_{kl} \end{bmatrix};$$

$$NZ_B \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 & 0 & Z_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & (Z_1 + Z_2) & (Z_1 + Z_2) \\ -Z_1 & Z_4 & -(Z_1 + Z_2) & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix};$$

$$NZ_B \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{j} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & (Z_1 + Z_2) & (Z_1 + Z_2) \\ -Z_1 & Z_4 & -(Z_1 + Z_2) & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{j}_a \\ \dot{j}_b \\ \dot{j}_c \\ \dot{j}_d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{j}_a Z_1 + (\dot{j}_c + \dot{j}_d)(Z_1 + Z_2) \\ -\dot{j}_a Z_1 + \dot{j}_b Z_4 - (\dot{j}_c + \dot{j}_d)(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$$

Остаточно отримавмо систему контурних рівнянь (1.42) у вигляді

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_5 & -(Z_1 + Z_2) \\ -(Z_1 + Z_2) & Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{i}_{kl} \\ \dot{i}_{kl} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{E}_{kl} - \dot{j}_a Z_1 - (\dot{j}_c + \dot{j}_d)(Z_1 + Z_2) \\ \dot{E}_{kl} + \dot{j}_a Z_1 - \dot{j}_b Z_4 + (\dot{j}_c + \dot{j}_d)(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}.$$

Найбільш простий вигляд матричне контурне рівняння (1.42) набуває при відсутності задавальних струмів у вузлах, що відповідає схемі заміщення, у якій електростанції зображені джерелами напруги, а навантаження - опорами (див. розд. 1.1, рис. 1.4, а). У цьому випадку при $\dot{J} = 0$.

$$Z_k \dot{I}_k = \dot{E}_k. \quad (1.44)$$

Формування контурних рівнянь вигляду (1.44) зводиться до визначення матриці Z_k . Конкретний вигляд цієї матриці і ступінь її заповнювання залежать від обраної системи незалежних контурів. Однак правила формування Z_k від цього фактора не залежать і вона може бути отримана на підставі аналізу виразу (1.43). Дійсно, у силу діагональності матриці Z_B довільний елемент Z_{ij} матриці Z_k визначається аналогічно елементу Y_{ij} матриці Y_{yz} у такий спосіб:

$$Z_{ij} = \sum_{l=1}^m n_{il} n_{jl} Z_l. \quad (1.45)$$

Кожен стовпець матриці N відповідає одній з віток схеми, а кожний рядок - одному з незалежних контурів (див. розд. 1.3).

При цьому в кожному стовпці буде стільки ненульових елементів (1 або -1), у скільки контурів входить відповідна вітка. Така структура матриці N дозволяє сформулювати прості правила визначення елементів матриці Z_k через опори віток схеми заміщення.

Так, при $i \neq j$ буде стільки відмінних від нуля добутків $n_{il} n_{jl}$, скільки спільних віток мають контури i і j . Отже, недіагональний елемент Z_{ij} буде дорівнювати алгебраїчній сумі опорів віток, що одночасно входять у контури i та j . Доданок цієї суми буде додатний, якщо напрямки обходу контурів i і j у межах даної вітки збігаються, і від'ємним, якщо вони не збігаються. Якщо контури i і j не мають спільних віток, то елемент $Z_{ij} = 0$.

При $i=j$, тобто для i -го діагонального елемента Z_k , вираз (1.45) прийме вигляд:

$$Z_{ii} = \sum_{l=1}^m n_{il}^2 Z_l. \quad (1.45a)$$

Оскільки $n_{il}^2 = 1$, якщо вітка l входить у контур i , і дорівнює нулю в іншому випадку, то Z_{ii} являє собою суму опорів віток, що утворюють i -й контур.

Проведений аналіз дозволяє сформулювати такі властивості матриці контурних опорів Z_k :

1) діагональні елементи є сумою опорів віток, що входять у відповідний контур, тому в схемах заміщення реальних систем вони відмінні від нуля і,

як правило, за абсолютною величиною більші за відповідні недиагональні елементи рядка чи стовпця;

2) кількість відмінних від нуля недиагональних елементів визначається складністю схеми заміщення системи і, крім того, істотно залежить від обраної системи незалежних контурів. Для схеми з n вітками і k незалежними контурами ця кількість дорівнює $2p$, де p - число пар контурів, що мають загальні вітки. Тому для матриці порядку k , число елементів якої дорівнює k^2 , кількість ненульових елементів дорівнює $k+2p$;

3) матриця Z_k - симетрична, оскільки згідно з (1.45) $Z_{ij} = Z_{ji}$. Це ж можна показати, використовуючи вираз (1.43). Дійсно, оскільки $Z_k = NZ_B N_t$, то

$$Z_{kt} = (NZ_B N_t)_t = NZ_B N_t = Z_k,$$

оскільки $Z_{Bt} = Z_B$.

Для ілюстрації властивостей матриці Z_k розглянемо схему заміщення системи, зображену на рис. 1.4,а, яка містить одинадцять віток, шість вузлів і, отже, шість незалежних контурів.

Складемо матриці Z_k для двох варіантів системи базисних контурів, зображених на рис. 1.14, а, б. Вузол з нульовим потенціалом (нейтраль) на рис. 1.14, а, б позначений цифрою "0", зв'язок з ним віток 7-11 показаний штриховою лінією.

Для варіанта а дерево графа включає вітки 7-11 і матриця N має такий вигляд:

$$N_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} I \\ II \\ III \\ IV \\ V \\ VI \end{matrix} = [N_{\alpha\alpha} N_{\alpha\beta}].$$

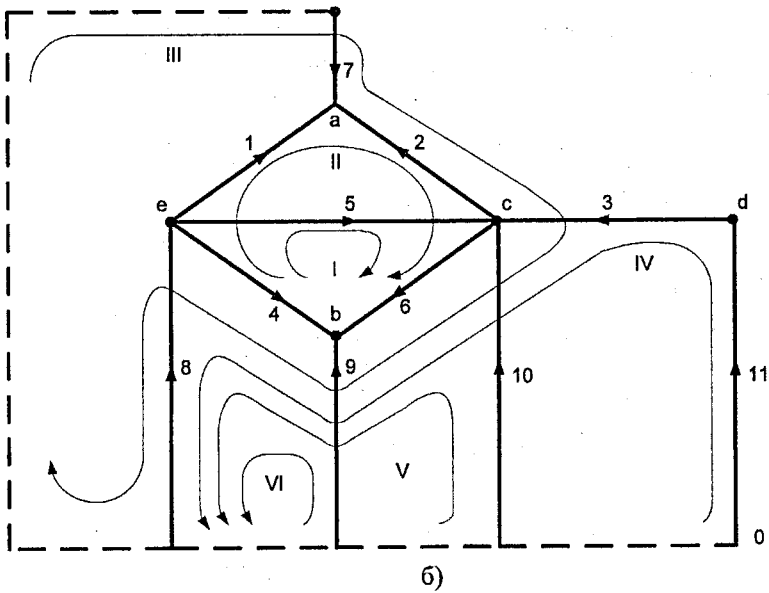
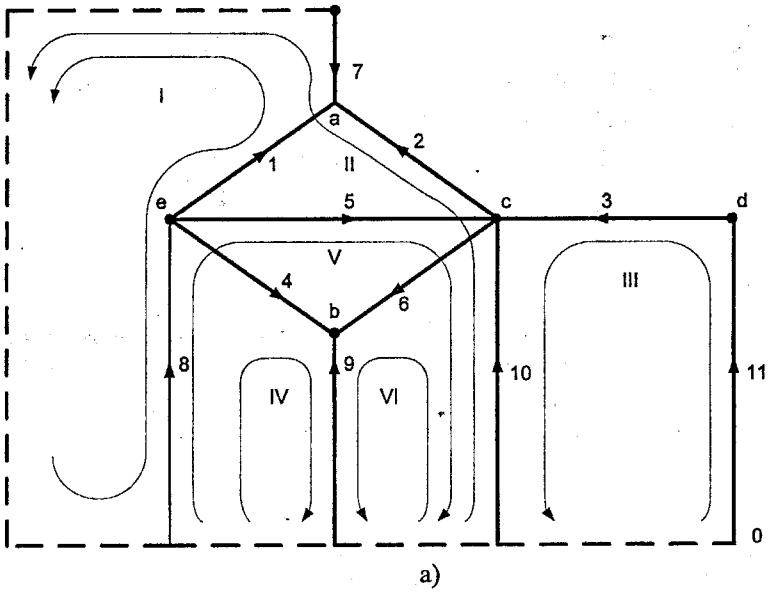


Рисунок 1.14 Приклад схеми заміщення

У відповідності з виразом (1.45) і (1.45а)

$$Z_{\text{ка}} = \begin{bmatrix} Z_7 + Z_8 + Z_1 & Z_7 & 0 & Z_8 & Z_8 & 0 \\ Z_7 & Z_7 + Z_{10} + Z_2 & -Z_{10} & 0 & -Z_{10} & Z_{10} \\ 0 & -Z_{10} & Z_{10} + Z_{11} + Z_3 & 0 & Z_{10} & -Z_{10} \\ Z_8 & 0 & 0 & Z_8 + Z_9 + Z_4 & Z_8 & Z_9 \\ Z_8 & -Z_{10} & Z_{10} & Z_8 & Z_8 + Z_{10} + Z_5 & -Z_{10} \\ 0 & Z_{10} & -Z_{10} & Z_8 & -Z_{10} & Z_9 + Z_{10} + Z_6 \end{bmatrix}$$

Для варіанта, що розглядається на (рис.1.14,а) спільні вітки мають такі пари контурів: I-II, I-IV, I-V, II-III, II-V, II-VI, III-V, III-VI, IV-V, IV-VI і V-VI, тобто число пар $p=11$.

Звідки випливає, що число ненульових елементів цієї матриці

$$k + 2p = 6 + 2 \cdot 11 = 28,$$

а число ненульових елементів

$$k^2 - (k + 2p) = 36 - 28 = 8.$$

Аналогічно для варіанта б, базисні контури якого відповідають дереву, що включає вітки 2, 3, 4, 6, 8, отримаємо

$$N_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 5 & 1 & 7 & 11 & 10 & 9 \end{bmatrix} = [N_{6\alpha} N_{6\beta}];$$

$$Z_{\kappa\delta} = \begin{bmatrix} Z_4 + Z_6 + Z_8 & Z_4 + Z_6 & Z_4 + Z_6 \\ Z_4 + Z_6 & Z_2 + Z_4 + Z_6 + Z_7 & Z_2 + Z_4 + Z_6 \\ Z_4 + Z_6 & Z_2 + Z_4 + Z_6 & Z_2 + Z_4 + Z_6 + Z_8 + Z_7 \\ Z_4 + Z_6 & Z_4 + Z_6 & Z_4 + Z_6 + Z_8 \\ Z_4 + Z_6 & Z_4 + Z_6 & Z_4 + Z_6 + Z_8 \\ Z_4 & Z_4 & Z_4 + Z_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_4 + Z_6 & Z_4 + Z_6 & Z_4 \\ Z_4 + Z_6 & Z_4 + Z_6 & Z_4 \\ Z_4 + Z_6 + Z_8 & Z_4 + Z_6 + Z_8 & Z_4 + Z_8 \\ Z_3 + Z_4 + Z_6 + Z_8 + Z_{11} & Z_4 + Z_6 + Z_8 & Z_4 + Z_6 \\ Z_4 + Z_6 + Z_8 & Z_4 + Z_6 + Z_8 + Z_{10} & Z_4 + Z_6 \\ Z_4 + Z_8 & Z_4 + Z_8 & Z_4 + Z_8 + Z_9 \end{bmatrix}$$

Для варіанта, що розглядається (рис.1.14, б) вітка 4 є спільною для всіх можливих пар незалежних контурів, число яких

$$C_6^2 = 6! / (2!4!) = 15.$$

Отже, $p=15$ і число ненульових елементів матриці $Z_{\kappa\delta}$ дорівнює

$$k + 2p = 6 + 2 \cdot 15 = 36,$$

тобто ця матриця цілком заповнена.

Розглянутий приклад ілюструє відзначене вище положення про істотний вплив вибору системи незалежних контурів на ступінь заповнювання матриці Z_k .

Розрахунок параметрів усталеного режиму електричної системи на основі контурних рівнянь при відсутності задавальних струмів у вузлах схеми заміщення ведеться за таким алгоритмом:

1) при відомих опорах і ЕРС віток розв'язується матричне контурне рівняння (1.42) щодо контурних струмів \dot{I}_{ki} , тобто струмів хорд $\dot{I}_{\beta i}$;

2) визначаються струми у вітках дерева $\dot{I}_{\alpha i}$ за виразом (1.40а), що при $\dot{J} = 0$ спрощується до виразу

$$\dot{I}_{\alpha} = N_{\alpha} \dot{I}_{\beta};$$

3) за відомими струмами віток схеми визначаються спади напруг на вітках і напруги вузлів відносно базисного.

1.6 Перетворені форми рівнянь стану

Раніше на основі двох законів Кірхгофа і закону Ома для електричного кола були отримані *три основних матричних рівняння*, що визначають взаємозв'язок параметрів усталеного режиму електричної системи:

узагальнене рівняння стану (1.15)

$$A\dot{I} = \dot{F};$$

вузлове рівняння (1.29)

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \dot{J} - M Y_b \dot{E};$$

контурне рівняння (1.42)

$$Z_k \dot{I}_k = \dot{E}_k - N Z_b \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{J}.$$

У порівнянні з узагальненим рівнянням стану останні два рівняння широко застосовуються в практиці розрахунків сталих режимів електричних систем, що обумовлено в першу чергу меншим порядком цих систем ($n-1$ вузлових, k контурних у порівнянні з $m=n-1+k$ узагальнених рівнянь).

При цьому, як відзначалося раніше, області найбільш раціонального застосування вузлових або контурних рівнянь визначаються характером вихідних даних і задачами розрахунку. Так, вузлові рівняння найбільш зручні при відсутності ЕРС у вітках, коли вони мають найбільш простий вигляд (1.30), а контурні — при відсутності задавальних струмів у вузлах схеми заміщення, що відповідає виразу (1.44).

Вузлові і контурні рівняння були отримані так само, як і узагальнене рівняння стану на основі загальних законів електричних ланцюгів. Однак можна показати, що вузлові і контурні рівняння є окремими формами узагальненого рівняння стану, розв'язаного відносно струмів у вітках:

$$\dot{I} = A^{-1} \dot{F} = B \dot{F}, \quad (1.46)$$

де $B = A^{-1}$ обернена матриця параметрів схеми заміщення системи порядку m .

Оскільки матриця \dot{F} містить два блоки, що відповідають задавальним струмам \dot{J} і контурним ЕРС \dot{E}_k , доцільно зобразити

матрицю B також у вигляді двох блоків - B_j і B_E розміром $m \times (n-1)$ і $m \times k$, відповідно, що дозволяє записати рівняння (1.46) у вигляді

$$\dot{I} = [B_j B_E] \times \begin{bmatrix} J \\ E_k \end{bmatrix} = B_j J + B_E \dot{E}_k. \quad (1.46a)$$

Оскільки $\dot{E}_k = N \dot{E}$, то (1.46a) можна записати як

$$\dot{I} = B_j J + B_E N \dot{E}.$$

Використовуючи загальноприйняті позначення $B_j = C$ та $B_E N = Y$, остаточно одержимо

$$\dot{I} = C J + Y \dot{E}. \quad (1.47)$$

Рівняння (1.47) показує, що для розглянутої схеми заміщення, яка є лінійним електричним ланцюгом, струми у вітках визначаються як сума двох складових, обумовлена дією задавальних струмів і ЕРС у вітках, що є відображенням відомого в теорії лінійних електричних ланцюгів принципу накладання.

Матриця C в (1.47) має m рядків і $(n-1)$ стовпців і є матрицею безрозмірних і в загальному випадку комплексних коефіцієнтів, що встановлюють зв'язок між струмами в вітках і задавальними струмами у вузлах. Відповідно до цього вона називається *матрицею коефіцієнтів розподілу задавальних струмів по вітках схеми заміщення*.

Матриця Y в (1.47) є квадратною порядком m . Її комплексні елементи мають розмірність провідності і зв'язують значення струмів і ЕРС у вітках схеми. Ця матриця називається *матрицею вхідних і взаємних провідностей віток*.

Щоб одержати різні конкретні форми запису рівняння (1.47), включаючи і ті, котрі зводяться до вузлових і контурних рівнянь, варто визначити в загальному вигляді матрицю B , через блоки якої виражаються матриці C і Y . Для цього використовуємо алгоритм обернення матриці при розбитті її на відповідні блоки.

Відповідно до поділу всіх віток схеми заміщення на вітки дерева графа і хорди матриця A з врахуванням (1.19) і (1.20) може бути розділена на чотири блоки таким чином:

$$A = \begin{bmatrix} M \\ NZ_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta \\ N_\alpha Z_{B\alpha} & N_\alpha Z_{B\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

де $Z_B = \begin{bmatrix} Z_{B\alpha} & 0 \\ 0 & Z_{B\beta} \end{bmatrix}$; $Z_{B\alpha} = \text{diag}(Z_{\alpha i}), i = 1, \dots, n-1$ - матриця опорів віток дерева;

$Z_{B\beta} = \text{diag}(Z_{\beta i}), i = 1, \dots, k$ - матриця опорів хорд.

Виділені блоки матриці мають такі розміри:

$$\begin{aligned} A_{11} & - (n-1) \times (n-1), \\ A_{12} & - (n-1) \times k, \\ A_{21} & - k \times (n-1) \\ A_{22} & - k \times k. \end{aligned}$$

При цьому блоки $A_{21} = M_\alpha$ і $A_{22} = N_\beta$ $Z_{B\beta}$ представляють собою квадратні і неособливі матриці.

У відповідності з прийнятим розбиттям матриці A на блоки матриця B може бути зображена у вигляді чотирьох блоків тих же розмірів:

$$B = [B_j B_e] \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді відповідно (1.46a) і (1.47)

$$C = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} N. \quad (1.49)$$

Блоки матриці B , що входять в ці вирази, можуть бути визначені через блоки матриці A [див. додаток А, рівняння (А1.3a) - (3А.3з)]:

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}; \quad (1.50a)$$

$$B_{12} = -B_{11} A_{12} A_{22}^{-1}; \quad (1.50б)$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1} A_{21} B_{11} \quad (1.50в)$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} A_{22}^{-1} A_{21} B_{12}. \quad (1.50г)$$

Використовуючи вирази блоків матриці A , визначимо блоки матриці B через параметри схеми заміщення електричної системи. У відповідності з (1.50a) і (1.48)

$$B_{11} = (M_\alpha - M_\beta (N_\beta Z_{B\beta})^{-1} N_\alpha Z_{B\alpha})^{-1} = (M_\alpha - M_\beta N_\beta^{-1} Z_{B\beta}^{-1} N_\alpha Z_{B\alpha})^{-1}.$$

Оскільки із (1.21) випливає, що

$$N_{\beta}^{-1}N_{\alpha}=M_{\beta t}M_{\alpha t}^{-1}, \quad (1.51)$$

то

$$B_{11}=(M_{\alpha}M_{\beta}(N_{\beta}Z_{B\beta})^{-1}N_{\alpha}Z_{B\alpha})^{-1}=Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}(M_{\alpha}Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}+M_{\beta}Z_{B\beta}^{-1}M_{\beta t})^{-1}.$$

Вираз в круглих дужках представляє собою *матрицю вузлових провідностей*. Дійсно, відповідно до (1.28)

$$\begin{aligned} Y_y = MZ_B^{-1}M_t &= \begin{bmatrix} M_{\alpha} & M_{\beta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_{B\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & Z_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{\alpha t} \\ M_{\beta t} \end{bmatrix} = \\ &= M_{\alpha}Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t} + M_{\beta}Z_{B\beta}^{-1}M_{\beta t}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Таким чином,

$$B_{11}=Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}Y_y^{-1}. \quad (1.53a)$$

У відповідності з (1.48), (1.50б) і (1.53a)

$$B_{12}=-Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}Y_y^{-1}M_{\beta}(N_{\beta}Z_{B\beta})^{-1}=-Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}Y_y^{-1}M_{\beta}Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1}. \quad (1.53б)$$

Аналогічно

$$B_{21}=-N_{\beta}(Z_{B\beta})^{-1}N_{\alpha}Z_{B\alpha}Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}Y_y^{-1}=-Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1}N_{\alpha}M_{\alpha t}Y_y^{-1}.$$

З урахуванням (1.51) остаточно отримаємо

$$B_{21}=Z_{B\beta}M_{\alpha t}Y_y^{-1}. \quad (1.53в)$$

У відповідності з (1.48), (1.50г) і (1.53б)

$$\begin{aligned} B_{22} &= (N_{\beta}Z_{B\beta})^{-1} + (N_{\beta}Z_{B\beta})^{-1}N_{\alpha}Z_{B\alpha}Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}Y_y^{-1}M_{\beta}Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1} = \\ &= Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1} + Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1}N_{\alpha}Z_{B\alpha}Z_{B\alpha}^{-1}M_{\alpha t}Y_y^{-1}M_{\beta}Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1}. \end{aligned}$$

З урахуванням (1.51) остаточно отримаємо

$$B_{22}=Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1}-Z_{B\beta}^{-1}Y_y^{-1}M_{\beta}Z_{B\beta}^{-1}N_{\beta}^{-1}. \quad (1.53г)$$

Підставляючи вирази (1.52a) і (1.52в) блоків B_{11} і B_{21} у вираз для матриці коефіцієнтів розподілення задаючих струмів по вітках із (1.49), отримаємо

$$C = \begin{bmatrix} Z_{B\alpha}^{-1} & M_{\alpha} Y_y^{-1} \\ Z_{B\beta}^{-1} & M_{\beta} Y_y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{B\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & Z_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{\alpha} \\ M_{\beta} \end{bmatrix} \times Y_y^{-1} = Z_B^{-1} M_t Y_y^{-1}. \quad (1.54)$$

Аналогічно, використовуючи вирази (1.53б) і (1.53г) блоків B_{12} і B_{22} , отримаємо вирази для матриці вхідних і взаємних провідностей віток

$$Y = \begin{bmatrix} -Z_{B\alpha}^{-1} & M_{\alpha} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} N_{B\beta}^{-1} \\ Z_{B\beta}^{-1} & (1 - M_{\beta} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1}) N_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix} N =$$

$$\begin{bmatrix} Z_{B\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & Z_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -M_{\alpha} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} N_{B\beta}^{-1} \\ (1 - M_{\beta} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1}) N_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix} N_{B\beta}^{-1} \times [N_{\alpha} N_{\beta}] =$$

$$Z_B^{-1} \begin{bmatrix} -M_{\alpha} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} N_{B\beta}^{-1} \\ (1 - M_{\beta} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1}) N_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix} \times [N_{\alpha} N_{\beta} \ 1].$$

Перемножимо дві матриці з врахуванням (1.51):

$$Y = Z_B^{-1} \begin{bmatrix} M_{\alpha} Y_y^{-1} (M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} M_{\beta}) M_{\alpha}^{-1} & : & -M_{\alpha} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} \\ -M_{\beta} M_{\alpha}^{-1} + M_{\beta} Y_y^{-1} (M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} M_{\beta}) M_{\alpha}^{-1} & : & (1 - M_{\beta} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1}) \end{bmatrix}$$

У відповідності з (1.52)

$$M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} M_{\beta} = Y_y - M_{\alpha} Z_{B\alpha}^{-1} M_{\alpha}.$$

Підставляючи цей вираз в елементи першого стовпця матриці Y , отримаємо

$$Y = Z_B^{-1} \begin{bmatrix} 1 - M_{\alpha} Y_y^{-1} M_{\alpha}^{-1} Z_{B\alpha}^{-1} & -M_{\alpha} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} \\ -M_{\beta} Y_y^{-1} M_{\alpha}^{-1} Z_{B\alpha}^{-1} & 1 - M_{\beta} Y_y^{-1} M_{\beta} Z_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= Z_B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{\alpha} \\ M_{\beta} \end{bmatrix} Y_y^{-1} [M_{\alpha} \ M_{\beta}] \times \begin{bmatrix} Z_{B\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & Z_{B\beta}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Остаточний вираз для матриці Y буде:

$$Y = Z_B^{-1} - Z_B^{-1} M_t Y_y^{-1} M Z_B^{-1}. \quad (1.55)$$

З отриманих виразів (1.54) і (1.55) визначають матриці C і Y у функції матриці провідностей віток, першої матриці з'єднань і матриці вузлових провідностей. Skorиставшись другою групою формул для визначення блоків матриці B [(див. додаток А, рівняння (A1.4a)-(A1.4r)], аналогічно можливо знайти C і Y у функції другої матриці з'єднань і матриці контурних опорів. Не приводячи детальних перетворень, запишемо остаточно:

$$C = \begin{bmatrix} C_\alpha \\ C_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\alpha t}^{-1} N_{\alpha t} Z_k^{-1} N_\alpha Z_{B\alpha}^{-1} M_\alpha^{-1} \\ -N_{\beta t} Z_k^{-1} N_{B\alpha} M_\alpha^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} - N_t Z_k^{-1} N_\alpha Z_{B\alpha}^{-1} M_\alpha^{-1}; \quad (1.56)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_\alpha \\ Y_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\alpha t} Z_k^{-1} N \\ N_{\beta t} Z_k^{-1} N \end{bmatrix} = N_t Z_k^{-1} N. \quad (1.57)$$

Визначимо матриці C і Y для електричної системи, схема заміщення якої представлена на рис.1.9. Для спрощення розрахунків вважатимемо, що опори всіх віток схеми однакові і рівні Z .

Відповідно до виразу (1.54)

$$C = Z_k^{-1} M_t Y_y^{-1}.$$

Визначимо множники правої частини:

1) матриця провідностей віток

$$Z_B^{-1} = Z^{-1} \cdot I;$$

2) Транспонована перша матриця з'єднань

$$M_t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

3) матриця вузлових провідностей

$$Y_y = \begin{bmatrix} -Y_1 + Y_2 & 0 & -Y_2 & 0 \\ 0 & Y_4 + Y_6 & -Y_6 & 0 \\ -Y_2 & -Y_6 & Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6 & -Y_3 \\ 0 & 0 & -Y_3 & Y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2Y & 0 & -Y & 0 \\ 0 & 2Y & -Y & 0 \\ -Y & -Y & 4Y & -Y \\ 0 & 0 & -Y & Y \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

де $Y=1/Z$.

Тоді

$$Y_y^{-1} = Z \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{Z}{8} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Підставляючи отримані результати у вихідний вираз, визначимо матрицю коефіцієнтів розподілення задавальних струмів по вітках:

$$C = Z^{-1} \times 1 \times M_1 Y_y^{-1} = Z^{-1} M_1 Y_y^{-1} =$$

$$= Z^{-1} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{Z}{8} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -5 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & -5 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Відповідно до виразу (1.57)

$$Y = N_k Z_k^{-1} N.$$

Визначимо матрицю, обернену матриці контурних опорів, отриману в 1.5 як

$$Z_k = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -(Z_1 + Z_2) \\ -(Z_1 + Z_2) & Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6 \end{bmatrix}$$

При рівності опорів всіх віток

$$Z_k = Z \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad Z_k^{-1} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8Z} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Матриця N для схеми, що розглядається, була визначена в 1.5

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

При цьому матриця вхідних і взаємних провідностей віток

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{8Z} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8Z} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

У відповідності з отриманими результатами узагальнене рівняння стапу (1.47) буде мати такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -5 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & -5 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j_a \\ j_b \\ j_c \\ j_d \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{8Z} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 \\ \dot{E}_5 \\ \dot{E}_6 \end{bmatrix}$$

Рядок і стовпець матриці Y , що відповідають третій вітці, виявилися нульовими. Рівність нулю елементів третього рядка свідчить про те, що струм у цій вітці (\dot{I}_3) не залежить від ЕРС у вітках схеми. Дійсно, як випливає з рис. 1.9, струм у цій вітці дорівнює задавальному струму вузла d , що підтверджується також і складом елементів третього рядка матриці C , де коефіцієнти розподілу задавальних струмів для третьої вітки $C_{31} = C_{32} = C_{33} = 0$, а $C_{34} = 1$, іншими словами $\dot{I}_3 = \dot{J}_d$.

Рівність нулю елементів третього стовпця матриці Y свідчить про те, що струми у всіх вітках не залежать від ЕРС у третій вітці. Дійсно, як випливає з рис. 1.9, третя вітка не входить ні в один з контурів i , отже, ЕРС, що діє в ній, не впливає на струми в вітках схеми.

Наявність нульового рядка (стовпця) робить матрицю Y особливою, яка не має оберненої матриці.

Правильність виразів (1.54) - (1.57) можна перевірити на основі співвідношень між матрицями M , C і Y , одержаних при підстановці (1.47) у матричне рівняння першого закону Кірхгофа (1.10):

$$\dot{J} = M\dot{I} = M(C\dot{J} + Y\dot{E}),$$

звідки випливає, що

$$MC = 1; MY = 0. \quad (1.58)$$

Отже, узагальнене рівняння стану вигляду (1.47), розв'язане щодо струмів у вітках, може бути записане в чотирьох формах, що відповідають різним послідовностям виразів матриць C і Y , обумовлених згідно з (1.54) - (1.57). Найбільш компактна форма виходить при використанні виразів (1.54) і (1.57):

$$\dot{I} = Z_B^{-1} M_t Y_y^{-1} \dot{J} + M_t Z_k^{-1} \dot{E}. \quad (1.59)$$

Слід зазначити, що простота цього виразу чисто зовнішня, оскільки визначення матриць C і Y вимагає виконання складних обчислювальних операцій, включаючи обернення матриць вузлових провідностей і контурних опорів. Виконання цих же операцій необхідно і при використанні інших, більш складних форм запису рівняння (1.47). Проте, будучи недоцільним для безпосереднього застосування при розрахунках ustalених режимів складних електричних систем, рівняння (1.47) служить тією базою, що дозволяє просто і наочно одержати окремі форми рівнянь стану, у тому числі вузлові і контурні рівняння.

Дійсно, підставляючи (1.47) у рівняння

$$M_t \dot{U}_\Delta = Z_B^{-1} \dot{I} - \dot{E},$$

визначене згідно з (1.12) і (1.17), отримаємо

$$M_t \dot{U}_\Delta = Z_B (Cj + Y\dot{E}) - \dot{E}.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на MZ_B^{-1} , маємо

$$MZ_B^{-1} M_t \dot{U}_\Delta = MCj + (MY - MZ_B^{-1}) \dot{E}.$$

З врахуванням співвідношень (1.28) і (1.58) даний вираз перетворюється до відомого вузлового рівняння вигляду (1.29):

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \dot{J} - MZ_B^{-1} \dot{E}.$$

Розв'язуючи дане рівняння відносно \dot{U}_Δ , запишемо його аналогічно (1.47) як

$$\dot{U}_\Delta = Z_y \dot{J} + D \dot{E}, \quad (1.60)$$

де $Z_y = Y_y^{-1}$ - квадратна неособлива матриця порядку $(n-1)$, що називається *матрицею вузлових опорів*;

$$D = -Z_y MZ_B^{-1} \quad (1.61)$$

- прямокутна матриця, що містить $(n-1)$ рядків і m стовпців, безрозмірні комплексні елементи якої встановлюють зв'язок між напругами вузлів щодо балансувального і ЕРС у вітках. Ця матриця називається *матрицею коефіцієнтів розподілу ЕРС віток по напругах вузлів відносно балансувального*.

Із зіставлення виразів (1.61) і (1.54) випливає

$$D = -C_b \quad (1.62)$$

що очевидно, якщо врахувати симетричність матриць Z_y і Z_B .

Щоб одержати контурне рівняння, перейдемо в (1.47) від струмів у вітках до контурних струмів ($\dot{I}_k = \dot{I}_\beta$), скориставшись для цього співвідношенням (1.41):

$$C\dot{J} + Y\dot{E} = \begin{bmatrix} E_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{J} + N_t \dot{I}_k$$

або

$$N_t \dot{I}_k = (C - \begin{bmatrix} M_\alpha^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}) \dot{J} + Y\dot{E}. \quad (1.63)$$

Підставляючи в (1.63) вираз для C і Y із (1.56) і (1.57), відповідно, отримуємо відоме контурне рівняння [див.(1.42)]:

$$N_t \dot{I}_k = -N_t Z_k^{-1} N_\alpha Z_{\beta\alpha} M_\alpha^{-1} \dot{J} + N_t Z_k^{-1} N \dot{E}$$

або

$$Z_k \dot{I}_k = \dot{E}_k - N_\alpha Z_{\beta\alpha} M_\alpha^{-1} \dot{J}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно контурних струмів, запишемо його аналогічно (1.47) у вигляді

$$\dot{I}_k = \dot{I}_\beta = \dot{E}_k - C_\beta \dot{J} + Y_\beta \dot{E}, \quad (1.64)$$

де $C_\beta = -Z_k^{-1} N_\alpha Z_{\beta\alpha} M_\alpha^{-1}$ - прямокутна матриця, що складається з k рядків і $(n-1)$ стовпців, безрозмірні комплексні елементи якої визначають зв'язок між задавальними струмами у вузлах схеми і контурними струмами, тобто струмами хорд для виділеної системи базисних контурів ($N_\beta=1$).

Ця матриця називається *матрицею коефіцієнтів розподілу задавальних струмів по хордах*; $Y_\beta = Z_k^{-1} N$ - прямокутна матриця, що складається з k рядків і t стовпців, комплексні елементи якої мають розмірність провідності і визначають зв'язок між контурними струмами (при $N_\beta=1$) і ЕРС у всіх вітках схеми.

Ця матриця називається *матрицею вхідних і взаємних провідностей для хорд*.

Матриця Y_k , обернена матриці контурних опорів, називається *матрицею контурних провідностей*. З огляду на те, що $Z_k^{-1} = Y_k$, вирази C_β і Y_β приймуть вигляд

$$C_\beta = -Y_k N_\alpha Z_{\beta\alpha} M_\alpha^{-1}; \quad (1.65)$$

$$Y_\beta = Y_k N, \quad (1.66)$$

а контурне рівняння (1.42) може бути записане як

$$\dot{I}_k = Y_k \dot{E}_k + C_\beta J. \quad (1.67)$$

Таким чином, на основі розгляду узагальненого рівняння стану, розв'язаного щодо струмів у вітках схеми заміщення, отримані вузлові і контурні рівняння в різних формах, і, зокрема, розв'язані щодо шуканих змінних. Матриці коефіцієнтів цих рівнянь (C , Y , Y_u , Z_u , Z_k , Y_k , C_β , Y_β , D) характеризують схему заміщення електричної системи в цілому і визначаються як опорами її віток, так і їхнім з'єднанням у вузли і контури. Внаслідок цього дані матриці називаються *матрицями узагальнених параметрів схеми заміщення* системи на відміну від "натуральних" параметрів, якими є опори віток.

Характеристики матриць узагальнених параметрів зведені в табл.1.1.

Таблиця 1.1

Позначення матриць	Розміри	Елементи матриць	Визначувана залежність		Розрахункові формули
Y_y	$(n-1) \times (n-1)$	Вузлові провідності	$j = Y_y \dot{U}_a$	$\dot{E} = 0$	$Y_y = M Y_B M_t$
Z_y	$(n-1) \times (n-1)$	Вузлові опори	$\dot{U}_a = Y_y j$	$\dot{E} = 0$	$Z_y = Y_y^{-1}$
Z_k	$k \times k$	Контурні опори	$\dot{E}_k = Z_k \dot{i}_k$	$j = 0$	$Z_k = N Z_B N_t$
Y_k	$k \times k$	Контурні провідності	$\dot{i}_k = Y_k \dot{E}_k$	$j = 0$	$Y_k = Z_k^{-1}$
C	$m \times (n-1)$	Коефіцієнти розподілення задаючих струмів по вітках схеми	$\dot{i}_k = C j$	$\dot{E} = 0$	$C = Y_B M_t Z_y$
C_p	$(n-1) \times (n-1)$	Те ж, для розімкненої схеми	$\dot{i}_k = C_p j$		$C = \begin{bmatrix} M_t \\ 0 \end{bmatrix} - N Y_k N_t Z_{Ba} M_a^{-1}$
C_B	$k \times (n-1)$	Те ж, для хорд замкненої схеми при виділенні базисних контурів	$\dot{i}_k = \dot{i}_p = C_B j$	$\dot{E} = 0$	$C_p = M_p^{-1}$
Y	$m \times m$	Вхідні і взаємні провідності віток	$i = Y \dot{E}$	$j = 0$	$C_B = -Y_k N_t Z_{Ba} M_a^{-1}$
Z	$m \times m$	Вхідні і взаємні опори віток ¹	$E I = Z I$	$j = 0$	$Y = Y_B - Y_B M_t Z_y M Y_B$
Y_B	$m \times m$	Вхідні і взаємні провідності для хорд при виділенні базисних контурів	$\dot{i}_k = \dot{i}_p = Y_B j$	$j = 0$	$Y = N_t Y_k N$
D	$(n-1) \times m$	Коефіцієнти розподілення ЕРС віток по напругах вузлів відносно балансувального	$\dot{U}_a = D \dot{E}$	$j = 0$	$Z = Y^{-1}$
					$Y_B = Y_k N$
					$D = -Z_y M Y_B$

¹ Визначено тільки для неособливої матриці Y

2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ СТАНУ ЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ

2.1 Загальна постановка задачі розрахунку усталеного режиму

Розрахунки усталених режимів складають істотну частину загального обсягу досліджень електроенергетичних систем, виконуваних як на стадії проектування, так і в процесі експлуатації цих систем. Ці розрахунки необхідні при виборі конфігурації схеми електричної системи і параметрів її елементів, аналізі стійкості й оцінюванні струмів коротких замикань, визначенні найбільш економічних режимів її роботи. Крім того, розрахунки усталених режимів мають і велике самостійне значення, тому що дозволяють відповісти на ряд практично важливих питань, а саме, що:

- даний режим існує, тобто можлива передача необхідної потужності від джерел електроенергії до споживачів;
- струми, які протікають по елементах електричної системи, не перевищують допустимих, навіть у тих випадках, коли деякі з них відключені (у післяаварійних режимах);
- напруги у вузлових точках системи не виходять за задані межі.

Для виконання розрахунку будь-якого усталеного режиму необхідна інформація про схему і параметри мережі електричної системи, про споживачів (навантаження) і джерела електроенергії (потужності електростанцій). Як було показано в першому розділі, мережа електричної системи в розрахунках усталених режимів зображається схемою заміщення у вигляді лінійного електричного кола, конфігурація і параметри якого відображаються тією чи іншою матрицею узагальнених параметрів.

Вихідними даними про навантаження реальних електричних систем при їхньому проектуванні й експлуатації звичайно служать значення споживаних ними активних і реактивних потужностей ($P_{ni} + Q_{ni} = \dot{S}_{ni}$), що можуть прийматися постійними ($\dot{S}_{ni} = const$) або залежними від напруги в точці підключення навантаження до мережі, тобто $\dot{S}_{ni} = f(\dot{U}_{ni})$. Вихідними даними про джерела живлення, як правило, служать генеровані в систему активні потужності ($P_{nj} = const$) і абсолютні значення напруг у пунктах їх підключення $|\dot{U}_{nj}| = const$. В ряді випадків джерела живлення можуть бути задані і постійними значеннями активних і реактивних потужностей ($P_{nj} = const; Q_{nj} = const$) аналогічно навантаженням. Крім того, одне з джерел (як правило, найбільш потужна електрична станція), що відіграє роль балансувального вузла, задається комплексним значенням напруги ($\dot{U}_s = const$).

При зазначених вихідних даних метою розрахунку усталеного режиму електричної системи в загальному випадку є визначення

потужностей і струмів у вітках схеми заміщення і комплексних значень напруг у її вузлових пунктах. З математичної точки зору задача зводиться до розв'язування системи нелінійних рівнянь через нелінійну залежність потужності від струму і напруги.

Конкретний вигляд цих рівнянь визначається формами рівнянь стану, покладених в основу математичного опису сталого режиму, і узагальненими параметрами системи. З рівнянь стану найбільш широко застосовуються *вузлові рівняння*, що характеризуються як простотою формування, так і великими можливостями ефективної організації процесу їх розв'язування. *Контурні рівняння* формуються трохи складніше, однак і вони мають певну раціональну область застосування. Не зупиняючись на більш детальному аналізі порівняльних переваг і недоліків цих систем рівнянь, покладемо в основу подальшого розгляду систему вузлових рівнянь, маючи при цьому на увазі ідентичність структур матричних вузлових і контурних рівнянь, а також подібні властивості матриць вузлових провідностей і контурних опорів. Ці властивості визначають можливість використання для їх розв'язувань однакових математичних методів.

Рівняння усталеного режиму електричної системи трифазного змінного струму, що пов'язують потужності, задавальні струми і напруги вузлів при відсутності ЕРС у вітках мають вигляд:

$$\dot{S}_y = 3\dot{U}_o \dot{J}; \quad (2.1)$$

$$Y_y(\dot{U} - \dot{U}_o) = \dot{J}, \quad (2.2)$$

де \dot{S}_y - стовпець потужностей чи джерел споживачів, приєднаних до вузлів схеми заміщення системи; $U_o = \text{diag}(\dot{U}_1)$ - діагональна матриця напруг у вузлах схеми заміщення; \dot{U} - стовпець напруг у вузлах схеми; $\dot{U}_o = \dot{U}_o n$ - стовпець, кожен елемент якого дорівнює напрузі в балансувальному вузлі ($\dot{U} - \dot{U}_o = \dot{U}_\Delta$); \dot{J} - стовпець задавальних струмів у вузлах (символом відзначаються комплексно-сполучені величини).

У рівнянні (2.1) потужність трифазного кола визначається фазними значеннями напруг і струмів. У розрахунках усталених режимів електричних систем звичайно використовується вирази потужності через лінійні напруги і фазні струми. При цьому (2.1) приймає вигляд

$$\dot{S}_y = \sqrt{3} U_o \dot{J}$$

і відповідно (2.2) переписеться як

$$Y_y(\dot{U} - \dot{U}_o) = \sqrt{3} \dot{J}$$

Система нелінійних (2.1) і лінійних (2.2) рівнянь при заданих потужностях вузлів у загальному випадку може бути розв'язана тільки ітераційним методом. При цьому можливі два підходи до розв'язування:

- почергове розв'язування рівнянь (2.1) і (2.2) у загальному ітераційному циклі;
- об'єднання цих рівнянь у єдину систему нелінійних рівнянь і наступне їх розв'язування.

У першому випадку розв'язування проводиться за такою схемою:

1) задаються початковими наближеннями напруг вузлів, що більш зручно, ніж задання струмів у вузлах, оскільки в реальних умовах фактичні напруги у вузлах незначно відрізняються від номінальних значень;

2) за значеннями напруг і заданих значень потужностей з (2.1) визначаються задавальні струми;

3) розв'язується система лінійних рівнянь (2.2) при відомих значеннях задавальних струмів відносно напруг у вузлах;

4) на основі отриманих значень напруг у вузлах виконується наступний крок ітераційного процесу починаючи з п. 2.

Умовою закінчення ітераційного процесу є досить близький з інженерної точки зору збіг напруг на двох наступних ітераціях, а також збіг обчислених за (2.1) значень потужностей вузлів із заданими.

У другому випадку рівняння (2.1) і (2.2) поєднуються шляхом підстановки задавальних струмів або з (2.2) у (2.1), що приводить до системи вигляду

$$3\hat{U}_o Y_y (\hat{U} - \hat{U}_o) = \hat{S}_y, \quad (2.3)$$

або з (2.1) у (2.2):

$$Y_y (\hat{U} - \hat{U}_o) = \frac{1}{3} \hat{U}_o^{-1} \hat{S}_y, \quad (2.4)$$

Системи нелінійних рівнянь (2.3) і (2.4) розв'язується ітераційними методами щодо напруг у вузлах. Застосовувані в практиці розрахунків ustalених режимів методи розв'язування цих рівнянь основані на їхній лінеаризації на кожному кроці ітераційного процесу.

Таким чином, як при першому, так і при другому підході на кожному кроці ітераційного процесу необхідно розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь або безпосередньо у вигляді вузлових рівнянь (2.2), або у вигляді ідентичних за структурою лінеаризованих рівнянь (2.3) і (2.4). З цієї причини обчислювальна ефективність розрахунку ustalеного режиму електричної системи в значній мірі визначається тим, наскільки ефективно буде розв'язуватись система лінійних алгебраїчних рівнянь. Отже, вибір доцільного методу розв'язування такої системи рівнянь має важливе значення [6,7].

Основним засобом розрахунку ustalених режимів складних електричних систем, а також розв'язування широкого кола системних задач диспетчерського управління нормальними режимами електроенергетичних задач в автоматизованих системах управління, у яких розрахунок ustalеного режиму є невід'ємною складовою частиною,

служать сучасні інформаційно-обчислювальні комплекси (ОІК). Факторами, що визначають ефективність процесу розв'язування інженерних задач в ОІК АСДУ, як відомо, є:

1) надійність обчислювального процесу — побудова алгоритмів, що виключають появу надмірно великих похибок при розв'язуванні задач прямими методами та забезпечення швидкої збіжності при розв'язуванні задач ітераційними методами;

2) швидкодія обчислювального процесу за рахунок раціонального (компактного) подання вихідних даних про систему в розрахунковій моделі з урахуванням її структурних властивостей та доведення результатів розрахунків до законів керування пристроями регулювання ЕЕС з подальшою їх реалізацією в АСДУ;

3) гнучкість алгоритмів і програм, тобто можливість різного ступеня деталізації подання будь-якої частини електричної системи і легкість зміни розрахункової схеми заміщення системи в залежності від мети досліджень.

Необхідною умовою реалізації обчислювального процесу моделювання параметрів ЕЕС в ОІК АСДУ є одержання результатів з достатньою для практичної реалізації точністю в системах керування режимами.

В даних умовах розвитку електроенергетики України розробка ефективних алгоритмів розрахунків усталених режимів вимагає максимального враховування всіх специфічних особливостей, якими характеризуються схеми заміщення реальних електричних систем. Ці особливості необхідно враховувати як при формуванні рівнянь усталеного режиму, так і при виборі найбільш раціонального методу їх розв'язування.

Методи розв'язування рівнянь стану ЕЕС можна розділити на дві великі групи - *прямі й ітераційні*.

До *прямих* відносяться методи, що дозволяють одержати розв'язок в результаті кінцевої кількості арифметичних операцій, які залежать від обчислювального алгоритму, а також від порядку і структури матриці коефіцієнтів системи рівнянь. В математиці методи цієї групи називаються також *точними*, оскільки, якщо вихідні дані задані точно (у вигляді цілих чисел або звичайних дробів) і обчислення виконуються точно (наприклад, за правилами дії над звичайними дробами), то розв'язок також виходить точним. Відзначимо, що при розв'язуванні технічних задач на ЕОМ через похибки задання вхідної інформації (із припустимою для даної задачі точністю) і неминучого округлення проміжних результатів обчислень одержати точний результат принципово неможливо, і в цьому змісті термін « точний метод » є умовним.

До *ітераційних* відносяться методи, за допомогою яких розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо як межу послідовних наближень до певної величини. Процедура обчислень відбувається за

допомогою однотипних операцій. В математиці ітераційні методи називаються *наближеними*, оскільки навіть у припущенні, що обчислення ведуться без округлень, вони дозволяють одержати розв'язок системи рівнянь лише з заданою точністю.

В подальшому розглядаються прямі й ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь усталеного режиму електричної системи на прикладі вузлових рівнянь (2.2).

2.2 Прямі методи розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь усталеного режиму ЕЕС

Практично в основі всіх прямих методів розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь усталеного режиму електричної системи лежить метод послідовного виключення невідомих, який носить назву *метода Гауса*. До найбільш поширених його модифікацій в математичних задачах електроенергетики відносяться метод Гауса із зворотнім ходом і метод Гауса без зворотного ходу.

2.2.1 Метод Гауса із зворотнім ходом

В загальному випадку алгоритм методу Гауса із зворотнім ходом зводиться до розв'язування системи n лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$Ax=b$$

Алгоритм методу складається з двох етапів.

На першому етапі (*прямий хід*) вихідна система за n однотипних кроків перетворюється таким чином, що матриця коефіцієнтів перетвореної системи стає верхньою трикутною, тобто всі елементи, які розташовані нижче її головної діагоналі, дорівнюють нулю.

На другому етапі (*зворотній хід*) послідовно визначаються значення невідомих, починаючи з останнього елемента x_n і до першого елемента x_1 .

Послідовність операцій, які виконуються при прямому ході: на *першому кроці* у вихідній системі рівнянь

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n;$$

перше рівняння ділиться на a_{11} . Далі x_1 виключається з усіх наступних рівнянь ($i=2, \dots, n$) шляхом множення першого рівняння щоразу на a_{i1} і вирахування його з i -го рівняння. В результаті виконання цих операцій отримаємо систему рівнянь з матрицею коефіцієнтів $A^{(1)}$, в якій окрім першого рівняння всі значення x_1 дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)}; \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n &= b_2^{(1)}; \\ \dots &\dots \\ 0 + a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n &= b_n^{(1)}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} / a_{11}; \quad b_i^{(1)} = b_i / a_{11}; \\ a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - a_{i1} a_{1j}^{(1)}; \quad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} b_1^{(1)}, \\ i, j &= 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Виконання операцій першого кроку вимагає, щоб елемент a_{11} , який називається *ведучим*, був відмінний від нуля.

Другий крок полягає у виключенні x_2 з рівнянь 3, ..., n, з отриманої на першому кроці системи шляхом виконання аналогічних операцій при використанні в якості ведучого елемента $a_{22}^{(1)}$. У результаті система приводиться до вигляду $\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(2)}$.

Третій і наступний кроки виконуються аналогічно. Формули для розрахунку коефіцієнтів системи рівнянь на довільному (k -му) кроці записуються як

$$\left. \begin{aligned} a_{kj}^{(k)} &= a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \quad b_k^{(k)} = b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)}, \\ i, j &= k+1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

На останньому кроці ($k=n$) другий з виразів (2.5) визначає значення $b_n^{(n)}$.

Таким чином, при прямому ході методу Гауса ведучими елементами послідовно виступають $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ і їхня відмінність від нуля є умовою виконання процесу обчислень.

Процес перетворення матриці коефіцієнтів \mathbf{A} вихідної системи рівнянь до верхньої трикутної на етапі прямого ходу схематично показаний на рис. 2.1, де пусті області справа відповідають елементам, які перераховуються на даному кроці обчислень.

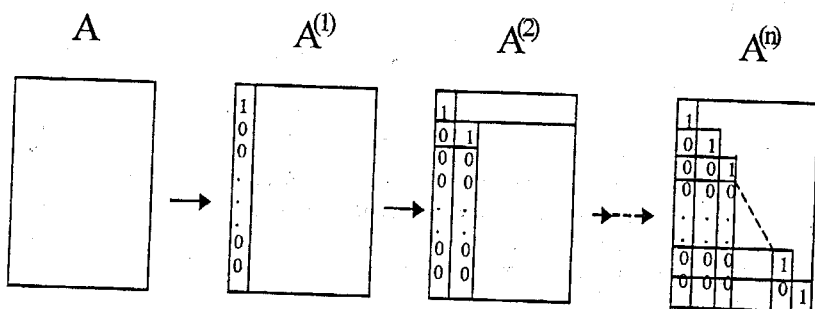


Рисунок 2.1- Процес перетворення матриці при прямому ході

У результаті виконання n кроків утворюється система рівнянь вигляду

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1(n-2)}^{(1)}x_{n-2} + a_{1(n-1)}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}; \\
 x_2 + \dots + a_{2(n-2)}^{(2)}x_{n-2} + a_{2(n-1)}^{(2)}x_{n-1} + a_n^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}; \\
 \dots & \\
 x_{n-2} + a_{2(n-2)(n-1)}^{(2)}x_{n-1} + a_{(n-2)n}^{(n-2)}x_n &= b_{n-2}^{(n-2)}; \\
 x_{n-1} + a_{(n-1)n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)}; \\
 x_n &= b_n^{(n)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

На етапі зворотного ходу визначаються невідомі в такому порядку:

$$\left. \begin{aligned}
 x_{n-1} &= b_{n-1}^{(n-1)} - a_{(n-1)n}^{(n-1)}x_n; \\
 x_{n-2} &= b_{n-2}^{(n-2)} - a_{(n-2)n}^{(n-2)}x_n - a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)}x_{n-1}; \\
 \dots & \\
 x_2 &= b_2^{(2)} - \sum_{j=2}^n a_{2j}^{(2)}x_j; \\
 x_1 &= b_1^{(1)} - \sum_{j=2}^n a_{1j}^{(1)}x_j.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

В загальному вигляді формули для зворотного ходу можуть бути записані як

$$x_i = b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j, \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (2.8)$$

Розглянемо процес розв'язування вузлових рівнянь для схеми заміщення електричної системи, зображеної на рис.1.9. Виберемо як балансувальний, як і раніше, вузол e і прийнемо, що провідності усіх віток $Y_l = 5$, $l=1, \dots, 6$, а задавальні струми мають такі значення: $J_a=0,6$; $J_b=-0,8$, $J_c=-0,6$ і $J_d=1,0$.

Для спрощення розрахунків значення провідностей віток і задавальних струмів прийняті дійсними, хоч для реальних електричних систем змінного струму вони є комплексними величинами.

Присвоївши номери 1, 2, 3, 4 вузлам c , a , b , d відповідно, запишемо систему вузлових рівнянь:

$$\begin{array}{l|cccc} c & 20U_{\Delta 1} & -5U_{\Delta 2} & -5U_{\Delta 3} & -5U_{\Delta 4} & = & -0,6 \\ a & -5U_{\Delta 1} & 10U_{\Delta 2} & & & = & -0,6 \\ b & -5U_{\Delta 1} & & 10U_{\Delta 3} & & = & -0,8 \\ d & -5U_{\Delta 1} & & & +5U_{\Delta 4} & = & 1,0 \end{array}$$

Позначаючи в подальшому $U_{\Delta l} = x_l$, виконаємо розрахунки, що відповідають прямому ходу методу Гауса за формулою (2.5).

Перший крок:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 &= -\frac{3}{100}; & \frac{35}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_4 &= -\frac{3}{4}; \\ -\frac{5}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_4 &= -\frac{19}{20}; & -\frac{5}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{15}{4}x_4 &= \frac{17}{20}; \end{aligned}$$

Другий крок:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 &= -\frac{3}{100}; & x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 &= -\frac{3}{35}; \\ \frac{60}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4 &= -\frac{37}{35}; & -\frac{10}{7}x_3 + \frac{25}{7}x_4 &= \frac{26}{35}; \end{aligned}$$

Третій крок:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 &= -\frac{3}{100}; & x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 &= -\frac{3}{35}; \\ x_3 - \frac{1}{6}x_4 &= -\frac{37}{300}; & \frac{10}{3}x_4 &= \frac{17}{30}. \end{aligned}$$

Четвертий крок:

$$x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -\frac{3}{100}; \quad x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = -\frac{3}{35};$$
$$x_3 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{37}{300}; \quad x_4 = \frac{17}{100}.$$

Далі виконуємо розрахунки (див.2.8), що відповідають зворотному ходу методу Гауса:

$$x_3 = -\frac{37}{100} + \frac{1}{6}x_4 = -\frac{3}{300} + \frac{1}{6} \cdot \frac{17}{100} = -\frac{19}{200};$$
$$x_2 = -\frac{3}{35} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = -\frac{3}{35} + \frac{1}{7} \cdot \frac{19}{200} + \frac{1}{7} \cdot \frac{17}{200} + \frac{1}{7} \cdot \frac{17}{100} = -\frac{15}{200};$$
$$x_1 = -\frac{3}{100} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = -\frac{3}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{200} + \frac{1}{4} \cdot \frac{19}{200} + \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{100} = -\frac{3}{100}.$$

Таким чином, отримаємо шукані значення

$$U_{\Delta c} = x_1 = -0,03; \quad U_{\Delta a} = x_2 = -0,075;$$

$$U_{\Delta b} = x_3 = -0,095; \quad U_{\Delta d} = x_4 = -0,17.$$

2.2.2 Метод Гауса без зворотного ходу

Алгоритм методу Гауса без зворотного ходу в математичній літературі відомий також під назвою *схеми Жордана*.

Розв'язування системи n лінійних алгебраїчних рівнянь за цим алгоритмом відбувається за один етап, в результаті якого матриця коефіцієнтів A за n однотипних кроків приводиться до одиничної, тобто система рівнянь розв'язується відносно шуканих невідомих, які дорівнюють відповідним елементам, отриманим в результаті перетворень стовпця в правій частині системи.

На *першому кроці* обчислення виконуються таким же чином, як і в алгоритмі методу Гауса зі зворотнім ходом. Отримана в результаті цього перетворення система рівнянь $A^{(1)}x = b^{(1)}$ характеризується тим, що перший елемент першого стовпця матриці дорівнює одиниці, а інші елементи стовпця дорівнюють нулю.

На *другому кроці*, як і в попередньому алгоритмі, як ведучий елемент вибирається діагональний елемент другого стовпця матриці $A^{(1)}$, тобто $a_{22}^{(1)}$. Відмінність полягає в тому, що додатково перетворюється

також і перший рядок матриці $A^{(l)}$, причому таким чином, щоб елемент $a_{12}^{(l)}$ перетворився в нуль.

Виконання операцій довільного (k -го) кроку відповідають перетворенню k -го стовпця таким чином, щоб його діагональний елемент ($a_{kk}^{(k)}$) став рівний одиниці, а недіагональний елемент $a_{jk}^{(k)}, j \neq k$ - дорівнював нулю.

Формули для розрахунку коефіцієнтів системи рівнянь на k -му кроці будуть мати точно такий же вигляд, як і в алгоритмі Гауса зі зворотним ходом (див. 2.5), відрізняючись лише діапазоном зміни індексу рядка i , оскільки на кожному кроці розраховуються елементи всіх рядків матриці $A^{(k)}$.

Отже, на k -му кроці елементи матриці $A^{(k)}$ і рядка $b^{(k)}$ визначаються за виразами аналогічними 2.5:

$$\left. \begin{aligned} a_{kj}^{(k)} &= a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, & b_k^{(k)} &= b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, & b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)}, \\ i &= 1, \dots, n; & i &\neq k; & j &= k+1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.5a)$$

В результаті заповнення останнього кроку ($k=n$), на якому перераховуються елементи останнього стовпця матриці $A^{(n-1)}$ і всі елементи стовпця $b^{(n-1)}$, отримаємо матрицю $A^{(n)}=I$ і, отже, $x=b^{(n)}$. Перетворення матриці A коефіцієнтів вихідної системи рівнянь до одиничної схематично показано на рис.2.2.

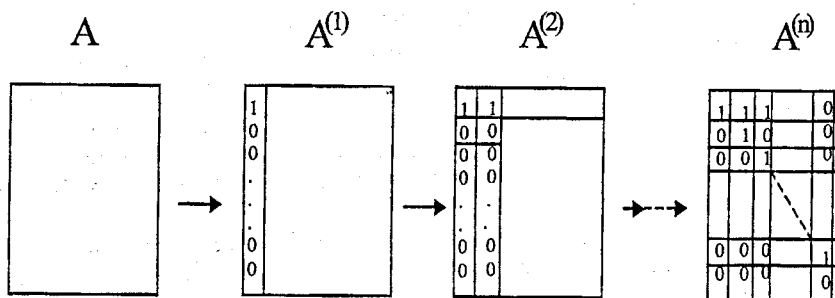


Рисунок 2.2 - Процес перетворення матриці в алгоритмі без оберненого ходу

Проїлюструємо алгоритм методу Гауса без зворотного ходу на прикладі розв'язування розглянутої вище системи вузлових рівнянь.

Вихідна система рівнянь має вигляд:

$$20x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -\frac{3}{5};$$

$$-5x_1 - 10x_2 = -\frac{3}{5};$$

$$-5x_1 + 10x_3 = -\frac{4}{5};$$

$$-5x_1 + 5x_4 = 1.$$

Перший крок:

$$x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -\frac{3}{100};$$

$$\frac{35}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_4 = -\frac{3}{4};$$

$$-\frac{5}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_4 = -\frac{19}{20};$$

$$-\frac{5}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{15}{4}x_4 = \frac{17}{20}.$$

Другий крок:

$$x_1 - \frac{2}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{9}{175};$$

$$x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = -\frac{3}{35};$$

$$\frac{60}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4 = -\frac{37}{35};$$

$$-\frac{10}{7}x_3 + \frac{25}{7}x_4 = \frac{26}{35}.$$

Третій крок:

$$x_1 - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{3}{150};$$

$$x_2 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{31}{300};$$

$$x_3 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{37}{300};$$

$$\frac{10}{3}x_4 = \frac{17}{30}.$$

Четвертий крок:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{3}{100}; \\x_2 &= -\frac{15}{200}; \\x_3 &= -\frac{19}{200}; \\x_4 &= \frac{17}{100}.\end{aligned}$$

2.2.3 Порівняльний аналіз алгоритмів методу Гауса

Для оцінки порівняльної обчислювальної ефективності розглянутих двох алгоритмів методу Гауса використовують загальноприйнятий показник – кількість арифметичних операцій, необхідних для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку n . Операціями, які в основному визначають швидкість методу, є множення і ділення, тривалість виконання яких значно більша тривалості додавання і віднімання. Тому ефективність оцінюється за кількістю операцій множення і ділення.

Для алгоритмів методу Гауса зі зворотним ходом і без зворотного ходу ця кількість складає відповідно $n(n^2+3n-1)/3$ і $n^2(n+1)/2$ операцій. З їх порівняння випливає, що для будь-якого $n > 2$ алгоритм методу Гауса зі зворотним ходом ефективніший в обчислювальному відношенні. У зв'язку з цим він розглядається далі докладно. Алгоритм без зворотного ходу не має самостійного практичного значення і коротко був розглянутий лише з тієї причини, що на його основі можуть бути побудовані компактні алгоритми обернення матриці.

Доцільним також є і оцінювання факторів, які впливають на точність розв'язку. Розглянуті алгоритми методу Гауса прості, наочні і легко програмуються. Але їх застосування не завжди дозволяє одержати розв'язок з прийнятною для практичної реалізації точністю, або не дозволяє одержати його взагалі. До причин виникнення неприпустимо великої похибки обчислень відносяться такі:

- округлення результатів обчислень;
- неточність вхідних даних (що є характерним для задач моделювання параметрів ЕЕС, оскільки не завжди можна коректно виконати заміри, наприклад струмів, напруг, потужностей тощо).

Розглянемо першу причину виникнення похибки - округлення результатів обчислень. Виконання обчислень за методом Гауса вимагає, щоб ведучий елемент був відмінним від нуля. Значення ведучих елементів не можуть бути оцінені без обчислень, які виконуються при послідовному перерахунку елементів матриці A в процесі розв'язування. Може виявитися, що на деякому кроці ведучий елемент стає рівним нулю при точних обчисленнях або ж близьким до нуля при округленні результатів обчислень (у розрахунках з кінцевою кількістю значущих цифр). У першому випадку одержати розв'язок не представляється можливим, а в другому — у зв'язку зі зникненням значущих цифр у ведучому елементі (в результаті вирахування двох величин, близьких за значенням) похибка подальших обчислень може бути надмірно великою.

Розглянемо приклад, розв'язавши систему рівнянь при проведенні обчислень з точністю до чотирьох значущих цифр:

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 8; \quad 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

Застосовуючи алгоритм методу Гауса зі зворотним ходом, отримаємо такі результати.

Перший крок:

$$\begin{aligned} x_1 + 0,3333x_2 + 0,3333x_3 &= 0,2667 \cdot 10^1; \\ 0,1000 \cdot 10^{-3} \cdot x_2 - 0,2000 \cdot 10^1 x_3 &= -0,6001 \cdot 10^1; \\ 0,6667x_2 - 0,6667x_3 &= -0,3333 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

Другий крок:

$$\begin{aligned} x_1 + 0,3333x_2 + 0,3333x_3 &= 0,2667 \cdot 10^1; \\ x_2 - 0,2000 \cdot 10^5 x_3 &= -0,6001 \cdot 10^5; \\ 0,1333 \cdot 10^5 x_3 &= 0,4001 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Третій крок:

$$\begin{aligned} x_1 + 0,3333x_2 + 0,3333x_3 &= 0,2667 \cdot 10^1; \\ x_2 - 0,2000 \cdot 10^5 x_3 &= -0,6001 \cdot 10^5; \\ x_3 &= 0,001 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

На етапі зворотного ходу одержимо

$$x_2 = -0,6001 \cdot 10^5 + 0,2000 \cdot 10^5 \cdot 0,001 \cdot 10^1 = 0,1000 \cdot 10^2;$$

$$x_1 = 0,2667 \cdot 10^1 - 0,3333 \cdot 0,1000 \cdot 10^2 - 0,3333 \cdot 0,001 \cdot 10^1 = -0,1666 \cdot 10^1.$$

Таким чином, при обчисленнях з точністю до чотирьох значущих цифр отримано розв'язок, де:

$$x_1 = -1,666; \quad x_2 = 10; \quad x_3 = 3,001.$$

Зіставляючи отримані результати з точним розв'язком ($x_1=1, x_2=2, x_3=3$), бачимо, що похибка є надзвичайно високою. Причиною похибки є втрата значущих цифр при обчисленні ведучого елемента $a_{22}^{(1)}$. Збільшення точності обчислень не приводить до зниження похибки, а виконання обчислень абсолютно точно (в звичайних дробах) дає результат $a_{22}^{(1)}=0$, що не дозволяє отримати розв'язок за даним алгоритмом.

Для усунення надмірної похибки результатів внаслідок округлення (причиною якої є близькість до нуля ведучого елемента) і можливості одержання розв'язування при точних обчисленнях (коли ведучий елемент дорівнює нулю) пропонується використовувати більш складну обчислювальну схему, у якій на кожному k -м кроці як ведучий елемент вибирається *найбільший за абсолютною величиною* елемент $a_{ij}^{(k-1)}$ ($i, j = k, \dots, n$). Такий обчислювальний алгоритм називається *алгоритмом вибору головного елемента*.

Розв'яжемо розглянуту систему рівнянь, використовуючи схему головного елемента і проводячи обчислення з точністю до чотирьох значущих цифр.

У вихідній системі рівнянь найбільшими за абсолютною величиною елементами матриці A є $a_{11}=a_{21}=3$.

Вибравши як ведучий елемент a_{11} , у результаті *першого кроку* одержимо

$$\begin{aligned} x_1 + 0,3333x_2 + 0,3333x_3 &= 0,2667 \cdot 10^1; \\ 0,1000 \cdot 10^3 \cdot x_2 - 0,2000 \cdot 10^5 \cdot x_3 &= -0,6001 \cdot 10^5; \\ 0,6667x_2 - 0,6667x_3 &= -0,3333 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

Серед елементів $a_{ij}^{(1)}$ ($i, j=2,3$) найбільшим за абсолютною величиною є елемент $a_{33}^{(1)} = -0,2000 \cdot 10^1$. Помінявши місцями другий і третій стовпці в лівій частині попередньої системи рівнянь і виконуючи обчислення *другого кроку*, одержимо

$$\begin{aligned} x_1 + 0,3333x_3 + 0,3333x_2 &= 0,2667 \cdot 10^1; \\ x_3 - 0,5000 \cdot 10^4 \cdot x_2 &= -0,3000 \cdot 10^1; \\ 0,6667x_2 &= 0,1333 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

Звідки

$$x_2 = 1,999; \quad x_3 = 3,000; \quad x_1 = 1,001.$$

Порівнюючи цей результат з точним розв'язком ($x_1=1, x_2=2, x_3=3$), бачимо, що похибка розв'язування відповідає точності обчислень.

Таким чином, *алгоритм вибору головного елемента дозволяє різко знизити похибки розв'язування при обчисленнях з округленнями*.

Програмна реалізація на ЕОМ алгоритма вибору головного елемента вимагає набагато складнішого програмування в порівнянні з алгоритмом методу Гауса зі зворотним ходом. Дійсно, на кожному k -м кроці необхідно вибрати найбільший за абсолютною величиною елемент a_{\max} серед $a_{ij}^{(k-1)}$ ($i, j = k, \dots, n$) і переставити рядки і стовпці матриці A , а також елементи стовпця $b^{(k-1)}$ таким чином, щоб a_{\max} зайняв місце ведучого елемента $a_{kk}^{(k-1)}$ і тільки після цього виконувати обчислення за формулами (2-5).

У зв'язку зі складністю програмної реалізації алгоритма з вибором головного елемента на практиці застосовуються його модифікації, що лише небагато поступаються за точністю одержаних результатів, але характеризуються як більш простим програмуванням, так і меншим сумарним часом розрахунку.

У цих модифікаціях на k -м кроці як ведучий елемент вибирається найбільший за абсолютною величиною елемент $a_{ij}^{(k-1)}$ або k -го стовпця ($i=k, \dots, n$; $j=k$) або k -го рядка ($i=k, j=k, \dots, n$), або головної діагоналі ($i=j=k, \dots, n$). Вибір тієї чи іншої модифікації визначається особливостями матриці A для конкретної технічної задачі.

Друга причина виникнення похибок – це *неточність вихідних даних* про параметри електричної мережі, яка моделюється. При розв'язуванні інженерних задач вихідні дані завжди відомі з деякою похибкою, обумовленою кінцевою точністю замірів та обчисленням параметрів електричної системи та її режиму. Як правило, для конкретних технічних задач в електроенергетиці відносна похибка результатів, одержуваних при розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь, майже збігається з похибками вихідних даних. Але на практиці можуть бути випадки, коли похибки вихідних даних, тобто значень елементів матриць A та b , приводять до надмірно великої похибки обчислень. Причина цього криється в так званій *поганій обумовленості матриці коефіцієнтів системи рівнянь*, наближеним показником якої є невеликі значення визначника матриці A . Малість визначника Δ може бути встановлена шляхом його зіставлення з відомою оцінкою Адамара

$$\Delta_{\max} = \sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \dots$$

Не зупиняючись на аналізі поганої обумовленості матриць, що детально викладається в математичній літературі, проілюструємо вплив цього фактора на похибки обчислень на прикладі простої системи рівнянь:

$$(1000 + \varepsilon)x_1 + x_2 = 1002; \quad 2001x_1 + 2x_2 = 2005.$$

Тут ε - похибка, з якою задається елемент a_{11} .

Розв'язок цієї системи рівнянь при довільному значенні ε може бути записано у вигляді:

$$x_1 = 1/(1-2\varepsilon); \quad x_2 = (2-2005\varepsilon)/(1-2\varepsilon)$$

Якщо $\varepsilon=0$, то $x_1=1$ і $x_2=2$.

Але досить ввести значення $\varepsilon=0,001a_{11}$, тобто $\varepsilon=1$, щоб одержати $x_1=-1$ і $x_2=2003$.

Більш того, при $\varepsilon=0,5$ система несумісна, тобто, не має розв'язку.

Причиною такої надзвичайно великої чутливості розв'язування до похибки вихідних даних є погана обумовленість матриці A . Дійсно, її визначник, який і характеризує обумовленість матриці, при $\varepsilon=0$ має значення

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1000 & 1 \\ 2001 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

та значно менший оцінки Адамара $\Delta_{\max} \approx 2 \cdot 10^6$.

Погана обумовленість матриці A в практиці розв'язування математичних задач електроенергетики може бути наслідком або некоректності математичного опису задачі, або специфічності розглянутого стану системи (наприклад, при розрахунку усталеного режиму, близького до граничного за умовою його існування). У першому випадку для одержання розв'язування необхідно коректного сформувати математичну модель електричної системи, що відповідає технічній суті поставленої задачі, а в другому – використовувати інші математичні методи, а не метод Гауса.

2.2.4 Особливості розв'язування лінійних рівнянь усталеного режиму електричної системи

Лінійні алгебраїчні рівняння, які застосовуються при моделюванні параметрів ЕЕС та якими, як правило, описуються усталені режими електроенергетичних систем, мають такі характерні риси:

— у переважній більшості випадків матриця коефіцієнтів системи рівнянь є слабкозаповненою, тобто, містить велику кількість нульових елементів. Так, кількість ненульових елементів у матриці вузлових провідностей для складних схем заміщення електричних систем з великою кількістю вузлів складає приблизно $4n$, тобто $(n^2 - 4n)$ елементів цієї матриці дорівнюють нулю;

— діагональні елементи матриці A не нульові і звичайно за абсолютною величиною перевершують недиагональні елементи відповідного рядка (стовпця);

— при використанні лінійних вузлових рівнянь (2.2) і лінеаризованих нелінійних рівнянь (2.4) матриця коефіцієнтів системи симетрична.

Урахування цих особливостей при застосуванні методу Гауса дозволяє істотно підвищити обчислювальну ефективність програми за рахунок скорочення необхідного обсягу пам'яті і часу розрахунку. Розглянемо ці особливості детальніше.

Урахування слабкого заповнювання матриці. При великій кількості нульових елементів у матриці A доцільна така побудова алгоритму і програми для методу Гауса, при якій операції виконуються тільки з ненульовими елементами і тільки ці елементи зберігаються в пам'яті ЕОМ. Але при виконанні кроків прямого ходу методу Гауса в матриці $A^{(k)}$ з'являються нові ненульові елементи, тобто її заповнювання зростає. Це, по-перше, істотно ускладнює програму і, по-друге, може звести нанівель можливу економію пам'яті і часу розрахунку, пов'язаних з урахуванням слабкого заповнювання вихідної матриці A . Оскільки ефект цього врахування може бути значним, прагнуть у такий спосіб побудувати алгоритм, щоб забезпечити мінімальне зростання заповнювання матриці $A^{(k)}$ у процесі прямого ходу методу Гауса.

Якщо розглядати один (k -й) крок прямого ходу методу Гауса, то найменше зростання заповнювання буде в тому випадку, коли k -й рядок матриці $A^{(k)}$ містить найменшу кількість ненульових елементів із усіх рядків з номером більше k . Якщо ж ця умова не виконується, то необхідно відповідним чином змінити розташування рівнянь з номерами від k до n . Але використання цього критерію на кожному кроці ще не означає, що кінцевий результат буде відповідати можливому максимуму економії пам'яті і часу розрахунку за n кроків прямого ходу. Визначення оптимального в цьому змісті розташування рівнянь (їхньої нумерації) у системі є складною задачею. Досвід розрахунків показує, що використання зазначеної простої покрокової оптимізації дає остаточний результат дуже близький до оптимального, а той виграш, який можна було б одержати за рахунок використання оптимальної нумерації, не виправдується тим значним ускладненням програми, якого вимагає визначення цієї нумерації.

Для ілюстрації впливу нумерації рівнянь на ступінь заповнювання матриці $A^{(k)}$ і, отже, на обсяг обчислень розглянемо систему чотирьох вузлових рівнянь, що розв'язується методом Гауса. Для оцінювання ступеня заповнювання матриці $A^{(k)}$ при тій чи іншій нумерації рівнянь досить записати її в символічній формі, відрізняючи лише нульові елементи від ненульових (наприклад, зображаючи ненульові елементи знаком "х"). У такому записі вихідна матриця A розглянутої системи має вигляд:

$$\left. \begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & 1 \\ x & x & & & 2 \\ x & & x & & 3 \\ x & & & x & 4 \end{array} \right\} \text{номери рівнянь}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad \quad}_{\text{номери незалежних}} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

У результаті виконання першого кроку прямого ходу методу Гауса одержимо матрицю $A^{(1)}$ вигляду

$$\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & 1 \\ 0 & x & x & x & 2 \\ 0 & x & x & x & 3 \\ 0 & x & x & x & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Тут показані нулі, що одержані до кінця першого кроку обчислень.

Підматриця третього порядку матриці $A^{(1)}$, яка повинна перераховуватися на наступному кроці, виявилася цілком заповненою і, отже, економії обчислень за рахунок нулів у вихідній матриці не буде. Причина цього полягає у тому, що задана нумерація рівнянь вкрай нерациональна – у першому рівнянні всі коефіцієнти ненульові.

Розглянемо, як зміниться обсяг обчислень, якщо на кожному кроці вибирати ведучий елемент із рівняння, що містить найбільшу кількість нульових коефіцієнтів.

Перший крок:

кількість нульових елементів у рядках матриці A дорівнює відповідно 0,2; 2,2. Отже, ведучий елемент може бути обраний з рядків 2-4. Виберемо рядок 2 і зробимо його першим, помінявши місцями рядки 1 і 2. Крім того, поміняємо місцями стовпці 1 і 2, щоб ведучим елементом став діагональний елемент вихідної матриці A . Таке розміщення найбільш раціональне з погляду точності обчислень, оскільки діагональні елементи матриці вузлових провідностей, як правило, є найбільшими за абсолютною величиною серед елементів кожного рядка. У результаті будемо мати матрицю A :

$$\begin{bmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & x & \\ & x & x & & \\ & x & & x & \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ \end{matrix}$$

Обчислення першого кроку приводять до матриці

$$\begin{bmatrix} x : & x & & & \\ \dots & & & & \\ 0 : & x & x & x & \\ \vdots & x & x & & \\ \vdots & x & & x & \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \end{matrix}$$

1 2 3 4

для одержання якої необхідно було перерахувати тільки два елементи A (замість 12 елементів у попередньому прикладі).

Другий крок:

кількість нульових елементів у рядках підматриці третього порядку матриці $A^{(1)}$, яка перераховувалась на другому кроці, дорівнює відповідно 0, 1; 1. Виберемо як ведучий діагональний елемент третього рядка матриці $A^{(1)}$, тобто поміняємо місцями рядки і стовпці 1 і 3:

$$\begin{bmatrix} x & & x & & \\ & x & x & & \\ 0 & x & x & x & \\ & & x & x & \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ \end{matrix}$$

У результаті виконання другого кроку одержимо матрицю такої структури:

$$\begin{bmatrix} x & & \vdots & & \\ \dots & & & & \\ \cdot & x : & x & x & \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 : & x & x & \\ & \vdots & x & x & \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ \end{matrix}$$

Кількість перераховуваних елементів на цьому кроці дорівнює двом (замість шести в попередньому прикладі).

У підматриці другого порядку матриці $A^{(2)}$, що підлягає перерахуванню на третьому кроці, нульові елементи відсутні, і тому подальший розрахунок можна вести за прийнятним порядком без перестановки рядків і стовпців.

Таким чином, без проведення обчислень встановлена нумерація рівнянь, при якій істотно знижується обсяг обчислень за рахунок використання слабкого заповнювання матриці A . Відповідно до цієї нумерації вихідна система рівнянь для подальших розрахунків записується в такому вигляді :

$$\begin{array}{cccccc}
 10x_2 & & -5x_1 & & = & -0,6 \\
 & 10x_3 & & -5x_1 & = & -0,8 \\
 -5x_2 & -5x_3 & +20x_1 & -5x_4 & = & -0,6 \\
 & & -5x_1 & +5x_4 & = & 1,0
 \end{array}$$

Далі ця система розв'язується в звичайному порядку.

У програмах розрахунку ustalених режимів розглянутий алгоритм нумерації реалізується тільки на основі логічних операцій і, отже, не вимагає великого машинного часу. Така нумерація для заданої схеми заміщення системи виконується однократно, до початку розрахунку режиму, оскільки, навіть якщо елементи матриці змінюються на кожному кроці ітераційного процесу розв'язування рівнянь (2.3) або (2.4), її структура залишається незмінною.

Урахування домінування діагональних елементів матриці. При розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь послідовність нумерації рівнянь і невідомих вибирається на підставі умов збереження слабкого заповнювання матриці A в процесі розрахунку і забезпечення заданої точності розв'язування. Умова забезпечення точності виконується при застосуванні алгоритма вибору головного елемента. У загальному випадку послідовність нумерації рівнянь, обумовлена кожною із зазначених умов, може бути різною.

Досвід розрахунків електроенергетичних задач показує, що в зв'язку з домінуванням діагональних елементів матриці A з точки зору забезпечення високої точності розрахунків, як правило, припустима будь-яка нумерація рівнянь, що не змінює складу її діагональних елементів. Тобто перестановка двох рядків повинна супроводжуватися перестановкою тих же стовпців. Тому нумерацію рівнянь і невідомих можна виконувати тільки за умови урахування слабкого заповнювання матриці A .

Урахування симетричності матриці A . У тих випадках, коли матриця A симетрична, можна додатково зменшити обсяг обчислень, використовуючи алгоритм методу Гауса зі зворотним ходом. Можливість

такої економії визначається тим, що квадратний блок матриці $A^{(k)}$, який перераховується на кожному кроці прямого ходу, з елементами $a_{ij}^{(k)}$ ($i, j=k+1, \dots, n$) також буде симетричним. Дійсно, згідно з (2.5),

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)};$$

$$a_{ji}^{(k)} = a_{ji}^{(k-1)} - a_{jk}^{(k-1)} a_{ki}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)};$$

і якщо квадратний блок матриці $A^{(k-1)}$ з елементами $a_{ij}^{(k-1)}$ ($i, j=k, \dots, n$) симетричний, то $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$. Отже, при симетричній матриці A досить оперувати тільки з її верхньою чи нижньою трикутною частиною, що значно скорочує кількість обчислень та підвищує точність розрахунків.

2.3 Математичні операції з матрицями коефіцієнтів рівнянь стану електричної системи

При розв'язуванні ряду електроенергетичних задач (при розрахунках перехідних процесів у системі) потрібне багаторазове розв'язування системи лінійних рівнянь стану при незмінній схемі заміщення системи і варіації струмів чи ЕРС у вітках, які постійно міняються з часом.

Тобто, *параметри системи* (топологічна схема з'єднань певних віток з певними вузлами, параметри ліній електропередач – активні та реактивні їх опори та ряд інших параметрів) залишаються незмінними в процесі моделювання, а *параметри режиму* (напруги в вузлових точках, струми у вітках, потужності, які передаються по лініях електропередач тощо) постійно змінюються в часі. Це означає, що в розв'язуваній системі лінійних рівнянь $Ax=b$ матриця коефіцієнтів A (*матриця параметрів системи*) залишається незмінною, а при кожному розрахунку міняються тільки стовпці правих частин матриці b (*матриця параметрів режиму*). Метою обчислень є пошук матриці x , яку називають *матрицею параметрів керованих змінних*. У таких випадках може виявитися доцільним обернення матриці A , тобто зображення системи рівнянь у вигляді $x=A^{-1}b$. Щоб визначити x , треба обчислити A^{-1} і помножити цю матрицю праворуч на стовпець b . Відомо, що одержання оберненої матриці вимагає більшого обсягу обчислень, ніж розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса. Але при проведенні серії розрахунків, що відрізняються значеннями елементів стовпця b , це обернення виконується один раз, а потім кожен новий розв'язок виходить просто множенням оберненої матриці на цей стовпець. При великій

кількості таких розрахунків обсяг обчислень є значно меншим в порівнянні з обсягом обчислень за методом Гауса.

Класичний спосіб обчислення оберненої матриці порядку n , описаний у додатку А, вимагає обчислення n^2 визначників порядку $n-1$ і одного визначника порядку n . Обчислення визначника порядку n вимагає $(n-1)(n^2+n+3)/3$ операцій множення і ділення. За кількістю арифметичних операцій класичний метод значно поступається ряду методів, які знайшли практичне застосування при моделюванні параметрів ЕЕС і є алгоритмічно подібними методу Гауса.

Розглянемо два способи обертання матриць, що одержали найбільш широке розповсюдження при розв'язуванні електроенергетичних задач.

2.3.1 Спосіб обертання матриці на основі алгоритму методу Гауса без зворотного ходу

Як показано в попередньому розділі, система з n лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язується методом Гауса без зворотного ходу за n кроків, у результаті яких вихідна система $Ax=b$ перетворюється до вигляду $Ix=b'$ або $x=b'$.

Якщо необхідно розв'язати m систем рівнянь з однаковою матрицею A порядку n з різними стовпцями правих частин $b_l (l=1, \dots, m)$, то їх можна звести в загальну систему вигляду:

$$AX=B, \quad (2.9)$$

де $X=[x_1, x_2, \dots, x_m]$, $B=[b_1, b_2, \dots, b_m]$ - прямокутні матриці розміром $n \times m$.

Розв'язування цієї системи може бути виконане за алгоритмом методу Гауса без зворотного ходу, тобто з використанням формул (2.5а), у яких замість елементів стовпця b фігурують елементи матриці B :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}; \quad (2.5 б)$$

$$a_{ji}^{(k)} = a_{ji}^{(k-1)} - a_{jk}^{(k-1)} a_{ki}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)};$$

$$i=1, \dots, n;$$

Якщо як B взяти одиничну матрицю порядку n , то розв'язком системи (2.9) буде квадратна матриця $X=B'$, причому, оскільки $AX=I$, то $AB'=I$, і, отже, $B'=A^{-1}$. Таким чином, обертання матриці A зводиться до одночасного розв'язування n систем рівнянь методом Гауса без зворотного ходу.

Для ілюстрації розглянемо обертання матриці вузлових провідностей четвертого порядку, що відповідає системі, нумерація рівнянь і невідомих якої визначалася в попередньому розділі.

Для вихідної системи $AX=B$ маємо

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Виконаємо обчислення за формулою (2.5 б).

Перший крок:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & \frac{35}{2} & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}; \quad B^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Другий крок:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 10 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}; \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Третій крок:

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}; \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{7}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{60} & \frac{7}{60} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Четвертий крок:

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{(4)} = B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{8} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Спосіб обертання матриці на основі алгоритму послідовної перестановки стовпців b і x .

Якщо систему лінійних алгебраїчних рівнянь піддати перетворенню, в результаті якого стовпці правих частин і невідомих поміняються місцями, тобто із $Ax=b$ отримати $Cb=x$, оскільки $x=A^{-1}b$, то $C=A^{-1}$. Це перетворення для системи порядку n можна виконати за n однотипних кроків.

Перший крок:

У вихідній системі рівнянь

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

$$\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n;$$

розв'яжемо перше рівняння відносно x_1 і отримані вирази підставимо в останні рівняння системи:

$$\frac{1}{a_{11}}b_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = x_1;$$

$$\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 + (a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}})x_2 + \dots + (a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}})x_n = b_2;$$

$$\frac{a_{n1}}{a_{11}}b_1 + (a_{n2} - a_{n1}\frac{a_{12}}{a_{11}})x_2 + \dots + (a_{nn} - a_{n1}\frac{a_{1n}}{a_{11}})x_n = b_n;$$

Цю систему можна зобразити у вигляді:

$$a_{11}^{(1)}b_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = x_1;$$

$$a_{21}^{(1)}b_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2;$$

$$\dots$$

$$a_{n1}^{(1)}b_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = x_n;$$

де

$$a_{11}^{(1)} = 1/a_{11}, \quad a_{ii}^{(1)} = a_{i1}a_y^{(1)}, \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}^{(1)}a_{1j}, \quad a_{1j}^{(1)} = -a_{1j}a_{11}^{(1)}; \quad i, j = 2, \dots, n.$$

В результаті отримаємо систему

$$A^{(1)} \begin{bmatrix} b_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Другий крок:

В системі (2.10), знайденій на першому кроці, розв'яжемо друге рівняння відносно x_2 і цей вираз підставимо в останні рівняння. В результаті отримаємо

$$A^{(2)} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix},$$

де елементи матриці $A^{(2)}$ обчислюються за виразами:

$$a_{22}^{(2)} = 1/a_{22}, \quad a_{i2}^{(2)} = a_{i2}a_{22}^{(1)}, \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(2)}a_{2j}^{(1)},$$

$$a_{2j}^{(2)} = -a_{2j}a_{22}^{(2)}; \quad i, j = 2, \dots, n; \quad i, j \neq 2.$$

Третій і наступні кроки виконуються аналогічно. При цьому формули для розрахунку елементів матриці $A^{(k)}$ на довільному k -му кроці записуються як

$$\left. \begin{aligned} a_{kk}^{(k)} &= 1/a_{kk}^{(k-1)}, & a_{ik}^{(k)} &= a_{ik}^{(k-1)} a_{kk}^{(k)}; \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}, & a_{kj}^{(k)} &= -a_{kj}^{(k-1)} a_{kk}^{(k)}, \\ i, j &= 1, \dots, n; & i, j &\neq k. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Таким чином, за n кроків одержимо матрицю $A^{(n)}=A^{-1}$. Щоб обчислити елементи матриці A^{-1} , необхідно виконати операції з елементами матриці A . Система рівнянь і відповідно стовпці x і b були введені для пояснення суті перетворень на кожному кроці.

Проілюструємо викладений спосіб обертання матриці A на основі попереднього прикладу:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Послідовно виконуючи кроки 1-4 з використанням формул (2.11), отримаємо:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -5 & \frac{35}{2} & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}; \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 15 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{7}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{60} & \frac{7}{60} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}; \quad A^{(4)} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{40} & \frac{8}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

При використанні розглянутих способів для обертання матриці n -го порядку потрібно виконання n^3 операцій множення і ділення, що істотно менше, ніж при використанні класичного способу, особливо у випадку великих порядків матриці. Розв'язання m систем рівнянь з однією і тією ж матрицею A , але з різними стовпцями $b_l (l=1, \dots, m)$ вимагає одного обертання матриці (n^3 операцій множення і ділення) і m множень матриці

A^{-1} на стовпець b_i , кожне з яких включає n^2 операцій множення. Таким чином, розв'язання таких систем рівнянь потребує $n^3 + mn^2$ операцій множення і ділення.

При незалежному розв'язуванні кожної з m систем рівнянь методом Гауса зі зворотним ходом у сумі необхідно виконати $mn(n^2 + 3n - 1)/3$ операцій множення і ділення. Із зіставлення отриманих виразів випливає, що розв'язуванні m систем рівнянь з використанням обертання матриці A потребує меншої кількості операцій множення і ділення при

$$m > \frac{3}{1 - (1/n^2)}, \quad (2.12)$$

тобто при $m \geq 4$.

Отримана кількість необхідних арифметичних операцій свідчить про явні переваги обертання матриці коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь при виконанні різноманітних розрахунків. У цьому відношенні метод, який базується на обертанні матриці, істотно поступається методу Гауса, оскільки при слабкозаповненій матриці A (що характерне для більшості електроенергетичних задач) матриця A^{-1} буде заповнена цілком, тобто буде містити n^2 ненульових елементів.

У той же час розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса при відповідній нумерації рівнянь дозволяє зберегти слабке заповнювання в процесі прямого ходу і тим самим зменшити необхідний обсяг пам'яті. Ефект врахування слабого заповнювання виявляється також і в зменшенні загальної кількості арифметичних операцій. З цих причин для систем високого порядку використання способу обертання матриці A далеко не настільки ефективно, як це впливає тільки з (2.12).

Прагнення зберегти переваги обертання матриці при різноманітних розрахунках і в той же час уникнути недоліків, пов'язаних з відсутністю в оберненій матриці нульових елементів, привело до розробки і застосування методів і алгоритмів *факторизації матриць*. Суть цих методів полягає в тому, що обернена матриця A^{-1} визначається у вигляді добутку матриць спеціальної структури, у сукупності зберігаючи ступінь заповнювання, який можна порівняти з матрицею, що одержана в процесі обчислень за методом Гауса.

В обчислювальному відношенні визначення матриць співмножників практично еквівалентне прямому ходу методу Гауса, тобто за кількістю арифметичних операцій значно ефективніше, ніж одержання повної оберненої матриці. Заключний етап розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом послідовного множення матриць-співмножників на стовпець правих частин b у цьому випадку буде більш трудомістким, ніж його множення безпосередньо на A^{-1} . Але це не змінює загального висновку про більшу ефективність методів факторизації в порівнянні з одержанням повної матриці A^{-1} .

2.4 Розв'язування рівнянь стану електричної системи ітераційними методами

Ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь дозволяють одержати значення шуканих невідомих у результаті багаторазового виконання однакових кроків обчислень, які називаються *послідовними наближеннями* або *ітераціями*. На відміну від прямих методів, до числа яких відноситься метод Гауса, розв'язок можна одержати тільки із заданою кінцевою точністю, причому зі збільшенням необхідної точності зростає і кількість ітерацій.

В ітераційному процесі матриця коефіцієнтів параметрів системи (A) лінійної системи рівнянь не піддається перетворенням, що дозволяє максимально використовувати її слабе заповнювання. Це, у свою чергу, приводить до меншого обсягу обчислень на кожній ітерації в порівнянні з кожним кроком методу Гауса. Але загальна кількість ітерацій може виявитися (і, як правило, виявляється) значно більше порядку n розв'язуваної системи рівнянь.

У зв'язку з цим ітераційні методи за обчислювальною ефективністю поступаються методу Гауса, особливо при побудові алгоритму з урахуванням слабого заповнювання матриці A .

Ітераційні методи широко застосовувалися тоді, коли обсяг оперативної пам'яті ЕОМ був визначальним обмеженням розмірності задачі при розрахунку усталеного режиму електричної системи. Розвиток засобів обчислювальної техніки, з одного боку, і розробка ефективних алгоритмів методу Гауса з урахуванням слабого заповнювання матриці A , з іншого, привели до того, що в даний час ітераційні методи мають обмежене застосування для розв'язування лінійних рівнянь стану електричної системи.

Розглянемо два ітераційних методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь - *метод простої ітерації* і *метод Зейделя*, які є найбільш поширеними в математичних задачах електроенергетики.

Ці методи допускають просте узагальнення на розв'язування нелінійних рівнянь усталеного режиму, що зв'язують потужності і напруги у вузлах електричної системи. При цьому багато властивостей ітераційного процесу розв'язування нелінійних рівнянь усталеного режиму електричної системи можна пояснити, розглянувши більш простий випадок — розв'язування лінійних рівнянь стану електроенергетичної системи.

2.4.1 Метод простої ітерації

Вихідна система лінійних алгебраїчних рівнянь при розв'язуванні методом простої ітерації має вигляд

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

$$\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n;$$

в припущенні, що

$$a_{ii} \neq 0, \quad i=1, \dots, n,$$

приводиться до вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n); \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n); \\ \dots & \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Алгоритм розв'язування системи рівнянь (2.13) відповідно з методом простої ітерації такий:

- 1) задаються початковим (ненульовим) наближенням невідомих $x_i^{(0)}$, $i=1, \dots, n$;
- 2) значення $x_i^{(0)}$ підставляються в праві частини рівнянь (2.13) і тим самим визначаються наступні наближення невідомих $x_i^{(1)}$, $i=1, \dots, n$;
- 3) підстановкою отриманих значень $x_i^{(1)}$ знаходиться наступне наближення і т.д.

Таким чином, на k -му кроці ітераційного процесу система (2.13) запишеться як

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}); \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}); \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Ітераційний процес продовжується доти, поки значення x_i , отримані на двох суміжних ітераціях, не будуть відрізнятися на величину, меншу заданої похибки обчислень ϵ , тобто до виконання умови

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^k| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Для виконання умови (2.15) при будь-якій заданій точності розв'язку, тобто при будь-якому як завгодно малому значенні ϵ , необхідно, щоб

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^*, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

де x_i^* - точні розв'язки вихідної системи рівнянь.

При виконанні умови (2.16) для довільного початкового наближення $x_i^{(0)} = i = 1, \dots, n$ ітераційний процес називається *збіжним*. У іншому випадку ітераційний процес не приведе до розв'язку і називається *він розбіжним*.

Для з'ясування умов, що визначають збіжність ітераційного процесу за методом простої ітерації, запишемо рівняння в матричній формі. Вихідна система рівнянь $Ax = b$ приводиться до вигляду (2.13) шляхом введення діагональної матриці $A_\delta = \text{diag}(a_{ii}), i = 1, \dots, n$, та виконання таких перетворень:

$$(A - A_\delta + A_\delta)x = b; \quad A_\delta x = b - (A - A_\delta)x;$$

$$x = A^{-1}_\delta b - A^{-1}_\delta (A - A_\delta)x; \quad x = B + Cx,$$

де $B = A^{-1}_\delta b$; $C = 1 - A^{-1}_\delta A$.

У відповідності з цим математичне формулювання ітераційного процесу (2.14) в матричній формі запису буде мати вигляд

$$x^{(k)} = B + Cx^{(k-1)} \quad (2.17)$$

звідки випливає, що

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = C(x^{(k)} - x^{(k-1)}).$$

Оскільки цей вираз справедливий для будь-яких k , то, мабуть, його можна записати як

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = C^{(k)}(x^{(1)} - x^{(0)})$$

Для збіжності ітераційного процесу, умовою якого є матричне співвідношення $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$, при будь-яких значеннях стовпця початкових наближень $x^{(0)}$ необхідно, щоб

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0. \quad (2.18)$$

Відомо, що для виконання умови (2.18) необхідно і достатньо, щоб власні значення $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ (див. додаток А) матриці були за абсолютною величиною менші одиниці:

$$|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

У зв'язку з тим, що обчислення власних значень матриці є більш складною процедурою, ніж розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, необхідними і достатніми умовами збіжності (2.19) на практиці не користуються. Тому звичайно застосовують *достатні умови* збіжності, що формулюються безпосередньо через елементи матриці C :

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1, i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

або

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1, j = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

Оскільки $C = I - A_0^{-1}A$, то умову (2.20) можна записати безпосередньо через елементи матриці коефіцієнтів вихідної системи рівнянь:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, \dots, n \quad (2.20a)$$

Більш загальним формулюванням, що дозволяє розширити область застосування достатніх умов збіжності, є узагальнення (2.20a):

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| p_j < |a_{ii}| p_i, i = 1, \dots, n \quad (2.20b)$$

де p_j - позитивні дійсні числа.

В окремому випадку, при $p_j = 1, j = 1, \dots, n$, умова (2.20b) переходить у (2.20a). Але якщо достатня умова збіжності (2.20) не

виконується, то в деяких випадках можна знайти такі p_j , при яких виконується умова (2.20б). Це буде пояснено нижче на конкретному прикладі.

Відзначимо, що як необхідні і достатні умови збіжності ітераційного процесу за методом простої ітерації (2.19), так і тільки достатні умови (2.20а) і (2.20б) визначаються відношенням елементів матриці коефіцієнтів A і не залежать ні від значень елементів стовпця правих частин b , ні від початкового наближення $x^{(0)}$.

Стосовно до розв'язування системи вузлових рівнянь (2.2) збіжність розглянутого ітераційного процесу буде залежати тільки від властивостей матриці вузлових провідностей Y_u . Як відомо, діагональні елементи цієї матриці відмінні від нуля, тобто перетворення вихідної системи рівнянь до вигляду (2.13) завжди можна здійснити.

Крім того, як правило, її діагональні елементи за абсолютною величиною перевищують недіагональні елементи відповідного рядка або стовпця. Але, оскільки в схемах заміщення електричних систем є вузли з індуктивними і ємнісними провідностями, умови (2.20а) і (2.20б) у більшості випадків не виконуються. Тому що це лише достатні умови збіжності, то їх невиконання ще не означає обов'язкової розбіжності ітераційного процесу. У дійсності при розв'язуванні лінійних рівнянь стану ітераційний процес за методом простої ітерації звичайно сходиться, хоча і дуже повільно.

Проілюструємо метод простої ітерації, розв'язавши систему вузлових рівнянь для схеми заміщення електричної системи, показаної на рис. 1.9. Ця система рівнянь, що раніше розв'язувалась методом Гауса, має вигляд:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 10U_{\Delta a} & & & & -5U_{\Delta c} & & & = & -0,6 \\ & 10U_{\Delta b} & & & -5U_{\Delta c} & & & = & -0,8 \\ -5U_{\Delta a} & -5U_{\Delta b} & +20U_{\Delta c} & & -5U_{\Delta d} & & & = & -0,6 \\ & & -5U_{\Delta c} & +5U_{\Delta d} & & & & = & 1,0 \end{array}$$

Достатні умови збіжності (2.20а) для цієї системи не виконуються, оскільки в четвертому рівнянні ненульовий недіагональний елемент за абсолютною величиною дорівнює діагональному. Але, вибравши, наприклад, $p_1=p_2=p_4=1$ і $p_3=0,8$, можна забезпечити виконання більш загальних достатніх умов (2.20б), тобто ітераційний процес повинний сходиться до розв'язку.

Перетворимо вихідну систему до вигляду (2.14):

$$U_{\Delta a}^{(k)} = -0,06 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta b}^{(k)} = -0,08 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta c}^{(k)} = -0,03 + 0,25U_{\Delta a}^{(k-1)} + 0,25U_{\Delta b}^{(k-1)} + 0,25U_{\Delta d}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta d}^{(k)} = 0,2 + U_{\Delta c}^{(k-1)}.$$

Результати розрахунків за ітераціями при початкових наближеннях $U_{\Delta a}^{(0)} = U_{\Delta b}^{(0)} = U_{\Delta c}^{(0)} = U_{\Delta d}^{(0)} = 0$ приведені нижче:

Таблиця 2.1

Номер ітерацій k	$U_{\Delta a}^{(k)}$	$U_{\Delta b}^{(k)}$	$U_{\Delta c}^{(k)}$	$U_{\Delta d}^{(k)}$
1	2	3	4	5
1	-0,06000	-0,08000	-0,03000	0,20000
2	-0,07500	-0,09500	-0,01500	0,17000
3	-0,06750	-0,08750	-0,03000	0,18500
4	-0,07500	-0,09500	-0,02250	0,17000
5	-0,07125	-0,09125	-0,03000	0,17750
6	-0,07500	-0,09500	-0,02625	0,17000
.
.
.
25	-0,07500	-0,09500	-0,03000	0,17001
26	-0,07500	-0,09500	-0,03000	0,17000

Як впливає із наведених результатів, ітераційний процес збігся до розв'язку з точністю до п'яти знаків після коми ($\varepsilon=0,5 \cdot 10^{-5}$) за 26 ітерацій. При зменшенні потрібної точності до чотирьох знаків після коми необхідна кількість ітерацій складає відповідно 20 і 12.

Для ілюстрації можливості розбіжності ітераційного процесу не обов'язково розглядати другу систему рівнянь, достатньо поміняти місцями третє і четверте рівняння вихідної системи:

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{cccc}
 10U_{\Delta a} & & -5U_{\Delta c} & \\
 & 10U_{\Delta b} & -5U_{\Delta c} & \\
 & & -5U_{\Delta c} & +5U_{\Delta d} \\
 -5U_{\Delta a} & -5U_{\Delta b} & +20U_{\Delta c} & -5U_{\Delta d}
 \end{array} \right. = \begin{array}{l} -0,6 \\ -0,8 \\ 1,0 \\ -0,6 \end{array}
 \end{array}$$

Оскільки для отриманої системи не виконуються достатні умови збіжності (2.20а) і (2.20б), то можна очікувати, що ітераційний процес буде розбіжними. Щоб впевнитись в цьому, проведемо відповідні обчислення за виразами (2.14):

$$U_{\Delta a}^{(k)} = -0,06 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta b}^{(k)} = -0,08 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta c}^{(k)} = -0,20 + U_{\Delta d}^{(k-1)}$$

$$U_{\Delta d}^{(k)} = +0,12 - U_{\Delta a}^{(k-1)} - U_{\Delta b}^{(k-1)} + 4U_{\Delta d}^{(k-1)}.$$

Результати розрахунків за ітераціями при нульових значень початкових приближень $U_{\Delta i}$ показані нижче:

Таблиця 2.2

Номер ітерацій k	$U_{\Delta a}^{(k)}$	$U_{\Delta b}^{(k)}$	$U_{\Delta c}^{(k)}$	$U_{\Delta d}^{(k)}$
1	-0,06000	-0,08000	-0,20000	+0,12000
2	-0,16000	-0,18000	-0,08000	-0,54000
3	-0,10000	-0,12000	-0,74000	+0,14000
4	-0,43000	-0,45000	-0,06600	-2,62000
5	-0,09000	-0,11000	-2,82000	+0,76000
6	-1,47000	-1,49000	+0,56000	-10,96000
7	+0,22000	+0,20000	-11,16000	+5,32000
8	-5,64000	-5,66000	+5,12000	-44,94000
.
.
.

Аналіз отриманих результатів, показує, що ітераційний процес за даних умов є розбіжним, тобто дану систему рівнянь методом простої ітерації розв'язати неможливо.

$$x = B + C_{\sigma}x + C_{\pi}x.$$

У відповідності з цим зобразимо ітераційний процес за виразом (2.22) в матричній формі:

$$x^{(k)} = B + C_{\sigma}x^{(k-1)} + C_{\pi}x^{(k)}$$

або

$$x^{(k)} = B' + C'x^{(k-1)}, \quad (2.23)$$

де $B' = (1 - C_{\pi})^{-1}B$; $C' = (1 - C_{\pi})^{-1}C_{\sigma}$.

Вираз (2.23) є аналогічним виразу (2.17), який було отримано для методу простої ітерації. Відповідно, для збіжності ітераційного процесу за методом Зейделя необхідно і достатньо, щоб власні значення матриці C' за абсолютною величиною були менші одиниці. Оскільки матриці C і C' по різному зображені через компоненти матриці A , то умови збіжності методу Зейделя і методу простої ітерації в загальному випадку різні, тобто існують такі матриці A , для яких ітераційний процес за методом Зейделя збігається, а за методом простої ітерації не збігається, і навпаки.

2.4.3 Аналіз збіжності ітераційних методів

Достатні умови збіжності методу простої ітерації є достатніми і для методу Зейделя. Якщо ці умови виконуються, то процес за методом Зейделя збігається, причому швидше, ніж за методом простої ітерації, тобто при однакових початкових наближеннях невідомих і однаковій заданій точності розв'язку за методом Зейделя виходить за меншу кількість ітерації.

Досвід розв'язування лінійних рівнянь стану електричної системи, показує, що і у тих випадках, коли достатні умови збіжності не виконуються, метод Зейделя звичайно характеризується більш швидкою збіжністю в порівнянні з методом простої ітерації. Тому останній знайшов обмежене застосування в практиці розрахунків ustalених режимів електричних систем.

Проілюструємо метод Зейделя на прикладі розглянутої вище системи вузлових рівнянь. Перетворена до вигляду (2.22) вона запишеться таким чином:

$$U_{\Delta a}^{(k)} = -0,06 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta b}^{(k)} = -0,08 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta c}^{(k)} = -0,03 + 0,25U_{\Delta a}^{(k-1)} + 0,25U_{\Delta b}^{(k-1)} + 0,25U_{\Delta d}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta d}^{(k)} = 0,2 + U_{\Delta c}^{(k-1)}.$$

Оскільки для матриці A розглянутої системи рівнянь виконуються достатні умови збіжності методу простої ітерації, то ітераційний процес за методом Зейделя також повинен сходитись, причому швидше. Результати розрахунків за ітераціями при початкових наближеннях приведені нижче:

Таблиця 2.3

Номер ітерацій k	$U_{\Delta a}^{(k)}$	$U_{\Delta b}^{(k)}$	$U_{\Delta c}^{(k)}$	$U_{\Delta d}^{(k)}$
1	-0,06000	-0,08000	-0,06500	0,13500
2	-0,09250	-0,11250	-0,04750	0,15250
3	-0,08375	-0,10375	-0,03875	0,16250
4	-0,07938	-0,09938	-0,03438	0,16562
5	-0,07719	-0,09719	-0,03219	0,16781
.
.
13	-0,07501	-0,09501	-0,03001	0,16999
14	-0,07500	-0,09500	-0,03000	0,17000

Аналіз результатів показує, що ітераційний процес зійшовся до розв'язку з точністю до п'яти знаків після коми за 14 ітерацій. При зменшенні необхідної точності до чотирьох і трьох знаків після коми, необхідна кількість ітерацій складе відповідно 11 і 8. Таким чином, метод Зейделя в даному випадку сходиться приблизно удвічі швидше ніж метод простої ітерації.

Якщо поміняти місцями третє і четверте рівняння вихідної системи, то одержимо систему, для якої достатні умови збіжності не виконують, то відповідно до виразу (2.22) запишемо

$$\begin{aligned}
 U_{\Delta a}^{(k)} &= -0,06 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)}; \\
 U_{\Delta b}^{(k)} &= -0,08 + 0,5U_{\Delta c}^{(k-1)}; \\
 U_{\Delta c}^{(k)} &= -0,20 + U_{\Delta d}^{(k-1)} \\
 U_{\Delta d}^{(k)} &= +0,12 - U_{\Delta a}^{(k-1)} - U_{\Delta b}^{(k-1)} + 4U_{\Delta d}^{(k-1)}.
 \end{aligned}$$

Результати розрахунків за ітераціями при нульових значеннях початкових наближень $U_{\Delta i}$ приведені нижче:

Таблиця 2.4

Номер ітерацій k	$U_{\Delta a}^{(k)}$	$U_{\Delta b}^{(k)}$	$U_{\Delta c}^{(k)}$	$U_{\Delta d}^{(k)}$
1	-0,06000	-0,08000	-0,02000	-0,54000
2	-0,16000	-0,18000	-0,74000	-2,50000
3	-0,43000	-0,45000	-2,70000	-9,80000
4	-1,41000	-1,43000	-10,00000	-37,04000
5	-5,06000	-5,08000	-37,24000	-138,70000
.
.

Як видно з результатів, ітераційний процес швидко розбігається, тобто, у даному випадку не виконуються необхідні і достатні умови збіжності.

Таким чином як метод Зейделя, так і метод простої ітерації не завжди забезпечують можливість одержання розв'язку, оскільки розбіжність відповідних ітераційних процесів не виключена.

При цьому умови збіжності (чи розбіжності) визначаються тільки властивостями матриці A і не залежать ні від початкового наближення, ні від стовпця правих частин b . Останні два фактори впливають лише на кількість ітерацій, необхідних для одержання розв'язку із заданою точністю. Як було показано, навіть порядок нумерації рівнянь, тобто перестановка рядків матриці A , може привести до порушення необхідних і достатніх умов збіжності.

Виникає питання, чи не можна за допомогою простого еквівалентного перетворення вихідної системи рівнянь (тобто перетворення, що не змінює її розв'язку) завжди забезпечити збіжність ітераційного процесу? Виявляється, що при використанні методу Зейделя це зробити можна. Дійсно, відомо, що при позитивновизначеній матриці A (див. додаток А) ітераційний процес за методом Зейделя завжди сходиться. Отже, якщо матриця A - позитивновизначена, то збіжність гарантується; якщо ні, то вихідну систему можна привести до еквівалентної з позитивно визначеною матрицею коефіцієнтів шляхом множення лівої частини на транспоновану матрицю A , тобто шляхом переходу від системи $Ax=b$ до системи $A_1Ax=A_1b$ або

$$A'x=b' \quad (2.24)$$

де $A'=A_1A$; $b'=A_1b$.

Якщо вихідна система має розв'язок, тобто якщо A — неособлива, то матриця A' - позитивно визначена і ітераційний процес за методом Зейделя сходиться до розв'язку.

Для ілюстрації сказаного розглянемо систему вузлових рівнянь, для якої раніше була показана збіжність ітераційних процесів за методом простої ітерації і методом Зейделя, зобразивши її в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{\Delta a} \\ U_{\Delta b} \\ U_{\Delta c} \\ U_{\Delta d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

Матриця Y , цієї системи симетрична і, крім того, відповідна їй квадратична форма

$$[U_{\Delta a} U_{\Delta b} U_{\Delta c} U_{\Delta d}] \times \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{\Delta a} \\ U_{\Delta b} \\ U_{\Delta c} \\ U_{\Delta d} \end{bmatrix} =$$

$$5\{U_{\Delta a}^2 + U_{\Delta b}^2 + (U_{\Delta a} - U_{\Delta c})^2 + (U_{\Delta c} - U_{\Delta d})^2 + (U_{\Delta c} - U_{\Delta d})^2 + U_{\Delta c}^2\}$$

є позитивною при будь-яких $U_{\Delta i}$, не всі з яких дорівнюють нулю. Відповідно, матриця Y , позитивновизначена, і ітераційний процес розв'язування даної системи за методом Зейделя збігається.

Якщо в вихідній системі поміняти місцями третє і четверте рівняння, тобто записати її у вигляді

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{\Delta a} \\ U_{\Delta b} \\ U_{\Delta c} \\ U_{\Delta d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6 \\ -0,8 \\ 1,0 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

то при цьому порушуються необхідні і достатні умови збіжності як методу простої ітерації, так і методу Зейделя, що було проілюстровано вище розбіжними ітераційними процесами.

Для забезпечення збіжності ітераційного процесу за методом Зейделя приведемо цю систему до вигляду (2.24) з позитивновизначеною матрицею коефіцієнтів, помноживши обидві частини системи зліва на матрицю $Y_{\text{пр}}$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{\Delta a} \\ U_{\Delta b} \\ U_{\Delta c} \\ U_{\Delta d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,6 \\ -0,8 \\ 1,0 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

Після множення отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{bmatrix} 125 & 25 & -150 & 25 \\ 25 & 125 & -150 & 25 \\ -150 & -150 & 475 & -125 \\ 25 & 25 & -125 & 50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{\Delta a} \\ U_{\Delta b} \\ U_{\Delta c} \\ U_{\Delta d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Запишемо дану систему в вигляді (2.22) для k -го кроку ітераційного процесу за методом Зейделя:

$$U_{\Delta a}^{(k)} = -0,024 - 0,2U_{\Delta b}^{(k-1)} + 1,2U_{\Delta c}^{(k-1)} - 0,2U_{\Delta d}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta b}^{(k)} = -0,04 + 0,2U_{\Delta a}^{(k-1)} + 1,2U_{\Delta c}^{(k-1)} - 0,2U_{\Delta d}^{(k-1)};$$

$$U_{\Delta c}^{(k)} = (-0,4 + 6U_{\Delta a}^{(k-1)} + 6U_{\Delta b}^{(k-1)} + 5U_{\Delta d}^{(k-1)}) / 19;$$

$$U_{\Delta d}^{(k)} = 0,16 - 0,5U_{\Delta a}^{(k-1)} - 0,5U_{\Delta b}^{(k-1)} + 2,5U_{\Delta c}^{(k-1)}.$$

Результат розрахунків за ітераціями при нульових значеннях початкових наближень $U_{\Delta i}$ приведено нижче:

Таблиця 2.5

Номер ітерацій k	$U_{\Delta a}^{(k)}$	$U_{\Delta b}^{(k)}$	$U_{\Delta c}^{(k)}$	$U_{\Delta d}^{(k)}$
1	-0,02400	-0,03520	-0,03975	0,09023
2	-0,08270	-0,08920	-0,05159	0,11697
3	-0,08147	-0,10701	-0,05295	0,12687
4	-0,09151	-0,11061	-0,05149	0,13233
5	-0,09014	-0,11023	-0,04950	0,13642
.
.
43	-0,07525	-0,09526	-0,03032	0,16845
44	-0,07522	-0,09523	-0,03029	0,16951
45	-0,07520	-0,09521	-0,03026	0,16956
46	-0,07518	-0,09519	-0,03023	0,16950
.
.
86	-0,07500	-0,09500	-0,03000	0,16999
87	-0,07500	-0,09500	-0,03000	0,17000

Аналіз результатів показує, що ітераційний процес збігся до розв'язку з точністю до п'яти знаків після коми ($\epsilon=0,5 \cdot 10^{-5}$) за 87 ітерацій.

При зменшенні потрібної точності до чотирьох і трьох знаків після коми кількість ітерацій складає відповідно 67 і 45.

Таким чином, перетворення системи рівнянь до вигляду (2.24) дозволяють забезпечити збіжність методу Зейделя, але при цьому потрібно враховувати два важливих для практики фактори:

- 1) при переході від матриці A до обереної A^{-1} збільшується наповненість матриці коефіцієнтів системи рівнянь, тобто зростає об'єм обчислень на кожному кроці ітераційного процесу і збільшується час отримання результатів;
- 2) збіжність ітераційного процесу при розв'язування системи рівнянь може бути дуже повільною, що суттєво впливає на оцінювання ефективності методу. Сама по собі збіжність ітераційного процесу не є достатньою основою для доцільності практичного використання методу.

Розглянутий вище приклад демонструє ці два фактори в навмисно гіпертрофованому вигляді і не є типовим для реальних умов, оскільки структура матриці вузлових провідностей Y_v була навмисно змінена в порівнянні з матрицею, яка звичайно використовується при формуванні вузлових рівнянь електроенергетичної системи. На практиці вона є симетричною з домінуванням діагональних елементів.

В реальних задачах розрахунків параметрів ustalених режимів ЕЕС, подібне перетворення не призводить до значних негативних наслідків, але все одно відмічені фактори потрібно мати на увазі при намаганні забезпечити збіжність ітераційних процесів за методом Зейделя, оскільки на практиці ми повинні отримати гарантовані результати обчислень з достатньою для їх практичної реалізації в АСДУ ЕЕС точністю.

Додаток А

Матриці та способи їх перетворення

Основні означення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця величин, записаних у певній послідовності. Ці величини називаються *елементами матриці*. Така таблиця записується у вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix},$$

де p - кількість рядків матриці; s - кількість її стовпців.

Запис групи величин у вигляді матриці не передбачає виконання будь-яких дій над ними. Це лише форма упорядкованого запису даних величин у вигляді умовної таблиці. Певний порядок запису дає можливість оперувати відразу з усією таблицею, яка позначається одним символом. Приведену вище матрицю можна позначити символом A і записати скорочено у вигляді

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

де i - номер рядка; j - номер стовпця.

Дві матриці називаються рівними, якщо рівні їхні відповідні елементи. Якщо кількість рядків матриці не дорівнює кількості її стовпців ($p \neq s$), то така матриця називається *прямокутною* розміром $p \times s$.

Якщо кількість рядків і стовпців матриці однакові ($p = s$), то матриця називається *квадратною* порядку P .

Матриця, що складається з одного рядка ($p = 1, s > 1$), називається *рядком*; матриця, що складається з одного стовпця ($s = 1, p > 1$), називається *стовпцем*; матриця $A = (a)$, що складається з однієї величини ($p = s = 1$), ототожнюється з цією величиною.

Переставивши в матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix}$$

розміром $p \times s$ рядки зі стовпцями, одержимо транспоновану матрицю A , розміром $s \times p$:

$$A_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1s} & a_{2s} & \dots & a_{ps} \end{bmatrix}$$

Очевидно, що для рядка транспонованою матрицею є стовпець, а для стовпця - рядок.

Квадратна матриця A дорівнює транспонованій A_t , якщо вона *симетрична*, тобто якщо $a_{ij} = a_{ji}$. Окремим випадком симетричної матриці є *діагональна* матриця, у якої відмінні від нуля лише елементи, розташовані на діагоналі. Діагональна матриця порядку p

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_p \end{bmatrix}$$

скорочено записується як

$$A = \text{diag}(a_i), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Якщо всі елементи a_i діагональної матриці дорівнюють одиниці, тобто

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = (\Delta_y),$$

де Δ_y - символ Кронекера ($\Delta_y = 0$ при $i \neq j$ і $\Delta_y = 1$ при $i = j$), то така матриця називається *одиничною* і позначається символом I .

Стовпець, всі елементи якого дорівнюють одиниці, називається *одиничним стовпцем* і позначається N . Транспонований одиничний стовпець є *одиничним рядком* N_t .

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою* і позначається символом O .

Визначником квадратної матриці A називається визначник, елементи якого дорівнюють елементам матриці; він позначається символом $|A|$

Квадратна матриця $A = (a_{ij})$ називається *неособливою*, якщо її

визначник відмінний від нуля; у іншому випадку матриця називається *особливою*.

Множення матриць на число і додавання матриць. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число α називається матриця, елементи якої отримані з елементів матриці A множенням на число α :

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1s} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{p1} & \alpha a_{p2} & \dots & \alpha a_{ps} \end{bmatrix}$$

Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, що мають однакову кількість рядків і стовпців, називається матриця $C = (c_{ij})$, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B ($c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$)

Множення матриць. Множення матриць A і B визначається тільки в припущенні, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B . При цьому елементи матриці-добутку $C = A \times B$ обчислюються в такий спосіб:

елемент c_{ij} i -го рядка і j -го стовпця матриці C дорівнює сумі добуток елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B . При

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$B = (b_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

одержимо $C = A \times B = (c_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q$ причому

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^s a_{ij} b_{ij}$$

Очевидно, що добуток двох прямокутних матриць є прямокутна матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості рядків першої матриці-співмножника, а кількість стовпців - кількості стовпців другої матриці співмножника.

Добуток двох матриць не має властивості комутативності, тобто $A \times B \neq B \times A$. Навіть сама постановка питання про цю рівність має сенс тільки для квадратних матриць A і B однакового порядку. Дійсно, матриці $A \times B$ і $B \times A$ мають сенс одночасно тільки в тому випадку, якщо кількість рядків першої матриці дорівнює кількості стовпців другої, а кількість

стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. При виконанні цих умов матриці $A \times B$ і $B \times A$ будуть квадратними, але різних порядків, якщо A і B не квадратні. Але навіть і для квадратних матриць однакового порядку в загальному випадку $A \times B \neq B \times A$.

В окремих випадках множення двох матриць може бути комутативним. При цьому матриці-співмножники називаються *переставленими*. Так одинична матриця переставлена з будь-якою квадратною матрицею того ж порядку і відіграє серед квадратних матриць таку ж роль, як і одиниця серед чисел, тобто

$$1 \times A = A \times 1 = A$$

З означення операції множення матриць випливає, що транспонована матриця-добуток дорівнює добуткові транспонованих матриць-співмножників, узятих у зворотному порядку:

$$(A \times B)_t = B_t \times A_t$$

Обертання матриць. Для квадратної неособливої матриці A визначена операція її обертання, тобто знаходження оберненої матриці A^{-1} . *Оберненою матрицею* стосовно даної називається матриця, яка, будучи помноженою як праворуч, так і ліворуч на дану матрицю, дає одиничну матрицю:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

Елементи оберненої матриці $A^{-1} = B = (b_{ij})$ обчислюються за формулою

$$b_{ij} = A_{ji} |A|^{-1},$$

де A_{ji} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} у визначнику матриці A

Обернена матриця добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові обернених матриць співмножників, узятому в зворотному порядку:

$$(A \times C)^{-1} = C^{-1} \times A^{-1}$$

Крім того, транспонована обернена матриця дорівнює оберненій транспонованій матриці: $(A^{-1})_t = (A_t)^{-1}$

Обертання матриці за допомогою розбиття на блоки. Обернену матрицю $B = A^{-1}$ можна одержати, розв'язавши систему матричних рівнянь $AB = 1$ при поданні матриць у блоковій формі, тобто при поділі матриці, що обертається, на кілька матриць меншого порядку (блоків). Розбиття вихідної матриці A на блоки здійснюється тим або іншим способом відповідно до її конкретної структури.

Розглянемо спосіб, який найбільш часто застосовується при розбитті матриці на чотири блоки таким чином, що діагональні блоки є квадратними і неособливими. Тоді одержимо таке матричне рівняння:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A 1.1})$$

де блоки матриці B мають ті ж розміри, що і відповідні блоки матриці A .

Нехай порядок вихідної матриці A дорівнює p , а порядки її квадратних діагональних блоків A_{11} і A_{22} рівні відповідно q і r ($p = q + r$). Тоді блоки A_{12} й A_{21} у загальному випадку ($q \neq r$) будуть прямокутними розмірів $q \times r$ і $r \times q$, відповідно.

Відповідно до правил множення блокових матриць зобразимо (A1.1) у вигляді чотирьох матричних рівнянь:

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = 1; \quad (\text{A1.2a})$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0; \quad (\text{A1.2б})$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0; \quad (\text{A1.2в})$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = 1. \quad (\text{A1.2г})$$

Розв'язуючи отриману систему (A1.2a) - (A1.2г) щодо блоків матриці B одержимо шукану матрицю A^{-1} . При цьому обернення матриці A порядку p в загальному випадку зводиться до обернення матриць порядків q і r і до виконання операцій додавання і множення блоків матриці A . Оскільки операція обернення матриць є найбільш трудомісткою, доцільно будувати обчислювальну схему таким чином, щоб кількість матриць, що обертаються, була мінімальною (для розглянутої задачі - дві). У даному випадку можливі дві таких схеми розв'язування, одна з яких будується в такий спосіб.

Множимо (A1.2в) на $A_{12}A_{22}^{-1}$ зліва, одержуємо

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} + A_{12}B_{21} = 0$$

звідки

$$A_{12}B_{21} = -A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

Підставимо отриманий вираз в (A1.2a):

$$A_{11}B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = 1,$$

звідки

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

Отриманий результат підставимо в (A1.2в) і розв'яжемо це рівняння відносно B_{21} :

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

Множимо (A1.2г) зліва на $A_{12}A_{22}^{-1}$, одержимо

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} + A_{12}B_{22} = A_{12}A_{22}^{-1}$$

або

$$A_{12}B_{22} = A_{12}A_{22}^{-1} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{12}$$

Отриманий результат підставимо в (A1.2б):

$$A_{11}B_{12} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} = -A_{12}A_{22}^{-1},$$

відкіля

$$B_{12} = -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$$

Підставивши B_{12} в (A1.2г), визначимо

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

Таким чином, блоки матриці B обчислюються відповідно до виразу:

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}; \quad (A1.3a)$$

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}; \quad (A1.3б)$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}; \quad (A1.3в)$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} \quad (A1.3г)$$

Розрахунок за цими виразами вимагає обертання двох матриць: A_{22} і $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$.

Аналогічно можна побудувати і другу схему визначення блоків матриці B , що базується на обертанні матриць A_{11} і $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$. Відповідно до цієї схеми

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}; \quad (A1.4a)$$

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}; \quad (A1.4б)$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}; \quad (A1.4в)$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}. \quad (A1.4г)$$

Власні значення матриці. Власними значеннями квадратної матриці A порядку n називаються корені характеристичного рівняння вигляду

$$|A - \lambda * I = 0|$$

тобто рівняння

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Власні значення матриці з дійсними елементами можуть бути або дійсними, або комплексно-сполученими числами.

Квадратична форма і додатно визначена матриця. Квадратична форма - це однорідний поліном другого степеня від декількох змінних:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Тут A - симетрична квадратна матриця порядку n , що називається матрицею *квадратичної форми*; x - стовпець того ж порядку.

Квадратична форма називається дійсною, якщо елементи A - дійсні числа.

Дійсна квадратична форма називається *додатно визначеною*, якщо вона додатна при будь-яких значеннях x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, не усі з яких дорівнюють нулю.

Дійсна симетрична матриця називається *додатно визначеною*, якщо відповідна їй квадратична форма *додатно визначена*. Прикладом *додатно визначеної* матриці може служити діагональна матриця з додатними елементами (зокрема, одинична матриця). Якщо G - *додатно визначена* матриця, а A - довільна квадратна неособлива матриця того ж порядку, що і G , то матриця $A_1 G A$ - також *додатно визначена*. Зокрема, при $G = I$, одержуємо, що матриця $A_1 A = A_1 A$ - *додатно визначена*.

Додаток Б

Методика виконання лабораторних робіт

Лабораторна робота № 1

Побудова графа електричної мережі

Метою даної роботи є дослідження та моделювання параметрів електричних систем у вигляді графа мережі та зображення їх послідовністю пар чисел – номерів вузлів, які обмежують вітку, а також побудови на її основі першої та другої матриці інциденцій.

1.1 Завдання

1. Ознайомитися з елементами теорії графів стосовно застосування їх до формування розрахункової моделі електричної мережі.
2. Для заданої схеми записати першу та другу матрицю інциденцій.
3. Вивчити можливості програми RM. Її особливості.
4. Ввести інформацію про задану схему в ЕОМ і отримати першу та другу матриці інциденцій. Виконати перевірку.
5. Дослідити, як змінюються матриці M і N при зміні нумерації вузлів схеми; зміні базисного вузла.

1.2 Порядок роботи

1. Для заданої схеми заміщення мережі створити окремий файл початкових даних (присвоїти файлу ім'я, яке складається з перших двох букв свого прізвища).
2. Визвати програму побудови першої та другої матриць інциденцій і відлагодити файл початкових даних.
3. Проаналізувати граф мережі побудований підпрограмою.
4. Сформувати першу матрицю інциденцій M .
5. Сформувати другу матрицю інциденцій N .
6. Поміняти довільно нумерацію вузлів і повторити п.п. 1-5. (рекомендується робити це попередньо скопіювавши файл даних).
7. Поміняти базисний вузол і повторити п.п. 1-5.
8. Скласти звіт про роботу.

1.3 Зміст звіту

1. Описати мету і задачі досліджень, які проводяться в роботі, а також короткі теоретичні відомості з теми досліджень.
2. Навести схему заміщення мережі, яка досліджується, та варіанти дерева графа моделі.

3. Алгоритми програм, які використовуються в роботі. Короткі відомості про них.
4. Результати досліджень.
5. Порівняльний аналіз результатів досліджень.
6. Висновки.

1.5 Питання для самоперевірки

1. Дайте означення дерева графа електричної мережі, що таке напрямлений граф електричної мережі?
2. Дайте означення вузла, вітки, контура, базисного та балансувального вузлів.
3. Сформулюйте правила запису першої матриці інцидентій.
4. Сформулюйте правила запису другої матриці інцидентій.
5. Чому в розрахунках електричної мережі доцільно граф ділити на дерево та хорди?
6. Дайте означення хорди та сформулюйте правила вибору хорд в дереві графа.
7. Яким чином виділення дерева і хорд мережі пов'язано з системою базисних контурів?

Лабораторна робота № 2

Вузлове рівняння електричної мережі

Метою даної роботи є формування і дослідження особливостей вузлового рівняння електричної мережі.

2.1 Завдання

1. Ознайомитися з алгоритмами формування вузлового рівняння електричної мережі.
2. Вивчити особливості матриці коефіцієнтів системи вузлових рівнянь – матриці вузлових провідностей.
3. Записати матрицю вузлових провідностей для задання схеми в повному і в ущільненому (тільки не нульові елементи) виглядах.
4. Вивчити можливості програми формування і ущільнення матриці вузлових провідностей UZUR.
5. Ввести в ЕОМ інформацію про схему заміщення заданої мережі і отримати для неї матрицю вузлових провідностей.
6. Дослідити, як змінюється матриця вузлових провідностей при зміні базисного вузла, при вимкненні та вмиканні окремих віток.

2.2 Порядок роботи

1. Перевірити готовність до роботи файла початкових даних про схему мережі, який підготовлено в лабораторній роботі № 1. Всі подальші дослідження ведуться саме для цієї схеми.

2. Визвати програму UZUR і відлагодити файл початкових даних.

3. Отримати повну матрицю вузлових провідностей і вектор струмів у вузлах.

4. Отримати матрицю вузлових провідностей в ущільненому вигляді.

5. Проаналізувати її і порівняти з аналогічними матрицями, записаними вручну.

6. Поміняти базисний вузол і повторити п.п. 2-4.

7. Вимкнути одну з віток схеми, зберігаючи при цьому зв'язність в графах і повторити п.п. 2-4.

8. Скласти звіт про роботу.

2.3 Зміст звіту

1. Мета і задачі досліджень, які проводяться в роботі.

2. Схема заміщення мережі, яка досліджується.

3. Алгоритм програми, яка використовується в роботі. Короткі відомості про неї.

4. Результати дослідження.

5. Порівняльний аналіз результатів досліджень.

6. Висновки.

2.4 Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте правила формування вузлового рівняння в матричній формі.

2. Вкажіть основні особливості матриці вузлових провідностей.

3. Дайте означення власної та взаємної провідності вузла.

4. Чому в ЕОМ матрицю вузлових провідностей зберігають в ущільненій формі?

5. В чому полягають переваги при розрахунках ustalених режимів електричних мереж методом вузлових напруг?

Лабораторна робота № 3

Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гауса

Метою даної роботи є дослідження переваг та недоліків методу Гауса стосовно розв'язування рівнянь стану електричної мережі.

3.1 Завдання

1. Ознайомитись з математичними проблемами розв'язування систем рівнянь стану електричної мережі.
2. Вивчити алгоритм методу Гауса – зі зворотним ходом і без зворотного ходу.
3. Ознайомитись із стандартними підпрограмами, в яких реалізується метод Гауса.
4. Записати файл даних для свого варіанта із заданим та зміненим базисним вузлом.

3.2 Порядок роботи

1. Для заданого варіанта завдання створити файл початкових даних.
2. Зробити розрахунки за методом Гауса.
3. Поміняти базисний вузол і записати новий файл початкових даних.
4. Повторити розрахунки за методом Гауса.
5. Результати розрахунків записати у звіт лабораторної роботи.
6. Проаналізувати результати і скласти звіт.

3.3 Зміст звіту

1. Описати мету і задачі досліджень, які проводяться в роботі.
2. Алгоритм програми.
3. Результати досліджень.
4. Порівняльний аналіз результатів досліджень.
5. Висновки.

3.4 Питання для самоперевірки

1. В чому полягають математичні проблеми розв'язування систем рівнянь стану електричних мереж?
2. Коли система рівнянь не має розв'язків? Має безліч розв'язків?
3. Що таке зумовленість матриці коефіцієнтів системи рівнянь?
4. До чого приводить прямий хід алгоритму Гауса?
5. Запишіть алгоритм Гауса без зворотного ходу.
6. Чи має переваги алгоритм методу Гауса зі зворотним ходом порівняно з методом Гауса без зворотного ходу? Які саме?
7. Як вибирається головний елемент в методі Гауса? Як слід поступати, коли він дорівнює нулю?

Лабораторна робота № 4

Розв'язування системи лінійних рівнянь методом простої ітерації та методом Зейделя

Метою даної лабораторної роботи є дослідження переваг та недоліків методів простої ітерації та Зейделя стосовно розв'язування рівнянь стану електричної мережі.

4.1 Завдання

1. Ознайомитися з математичними проблемами розв'язування системи лінійних рівнянь ітераційними методами - методом простої ітерації та методом Зейделя.
2. Вивчити алгоритми даних методів.
3. Ознайомитись з підпрограмами, які реалізують дані методи.
4. Використовуючи файли початкових даних з лабораторної роботи № 1 зробити розрахунки ітераційними методами.
5. Вивчити переваги та недоліки методу простої ітерації та методу Зейделя.

4.2 Порядок роботи

1. Перевірити файл початкових даних згідно із заданим варіантом.
2. Зробити розрахунки за методом простої ітерації та методом Зейделя.
3. Поміняти базисний вузол і записати новий файл початкових даних.
4. Повторити розрахунки.
5. Результати розрахунків записати у звіт.
6. Проаналізувати результати і скласти звіт.

4.3 Зміст звіту

1. Описати мету і задачі досліджень, які проводяться в роботі.
2. Записати алгоритм одного з методів.
3. Результати досліджень.
4. Порівняний аналіз результатів досліджень.
5. Висновки.

4.4. Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте необхідні та достатні умови для розв'язування системи лінійних рівнянь методом простої ітерації.

2. Сформулюйте необхідні та достатні умови для розв'язування системи лінійних рівнянь методом Зейделя.

3. Що таке норма матриці і як вона впливає на хід ітераційного процесу?

4. Як впливає домінування головних елементів матриці на збіжність методу простої ітерації?

5. Як впливає домінування головних елементів матриці на збіжність методу Зейделя?

6. Навести порівняльний аналіз збіжності та точності методів простої ітерації та Зейделя.

Лабораторна робота № 5

Розрахунок усталеного режиму методом Ньютона

Метою даної лабораторної роботи є розрахунок параметрів усталеного режиму електроенергетичної системи методом Ньютона та дослідження умов його збіжності.

5.1 Завдання

1. Ознайомитись з математичними проблемами розв'язування системи нелінійних рівнянь методом Ньютона.

2. Вивчити алгоритм методу Ньютона.

3. Ознайомитись з різними модифікаціями методу Ньютона.

4. Записати файл даних для свого варіанта із заданим та зміненим базисним вузлом.

5.2 Порядок роботи

1. Для заданого варіанта завдання створити файл початкових даних.

2. Зробити розрахунки усталеного режиму методом Ньютона.

3. Поміняти базисний вузол і записати новий файл початкових даних.

4. Повторити розрахунки.

5. Результати розрахунків записати в звіт.

6. Проаналізувати результати і скласти звіт.

5.3 Зміст звіту

1. Описати мету і задачі досліджень, які проводяться в роботі.

2. Навести алгоритм програми.

3. Результати досліджень.

4. Порівняти результати досліджень і зробити аналіз.

5. Зробити висновки по роботі.

5.4 Питання для самоперевірки

1. Дати порівняльну характеристику методів розрахунків усталеного режиму ЕЕС.
2. Сформулювати типи задач, які доцільно розв'язувати за методом Ньютона.
3. Як впливає вибір початкових умов на збіжність методу Ньютона?
4. Чому метод Ньютона називають методом дотичних?
5. Чому при розрахунках методом Ньютона доцільним є врахування слабкої заповненості матриці коефіцієнтів?

Лабораторна робота № 6

Розрахунок оптимальних за напругою та реактивною потужністю режимів електричної мережі

Метою даної роботи є розрахунок оптимальних за напругою та реактивною потужністю режимів електричної мережі за допомогою стандартного програмного забезпечення АСДУ ЕЕС.

6.1 Завдання

1. Ознайомитись з елементами теорії оптимальних розрахунків режимів електричної мережі.
2. Вивчити можливості стандартного програмного забезпечення OPTQU та АЧП.
3. Записати математичну модель ЕЕС в певних форматах та виконати розрахунки параметрів режиму при номінальних значеннях напруг та при відхиленні їх від номінальних.
4. Виконати аналіз зміни втрати потужності та напруг у вузлових точках в порівнянні з розрахунками усталеного режиму при номінальних параметрах ЕЕС.

6.2 Порядок роботи

1. Для заданої схеми заміщення мережі створити окремий файл початкових даних (присвоїти файлу ім'я, яке складається з перших двох букв свого прізвища).
2. Визвати програму OPTQU і зробити розрахунок оптимального режиму електричної мережі.
3. Проаналізувати отримані результати.

4. Поміняти довільно нумерацію вузлів і повторити п.п. 1-4 (рекомендується робити це, попередньо скопіювавши файл даних).
5. Поміняти базисний вузол і повторити п.п. 1-4.
6. Скласти звіт про роботу.

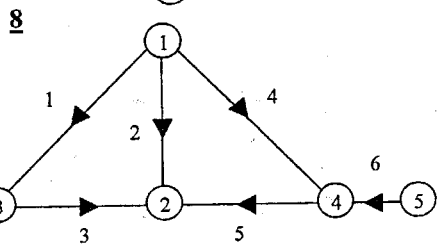
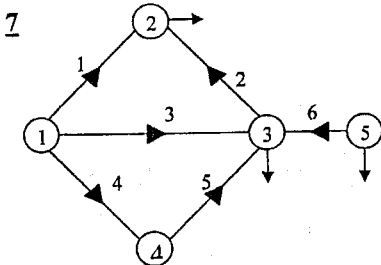
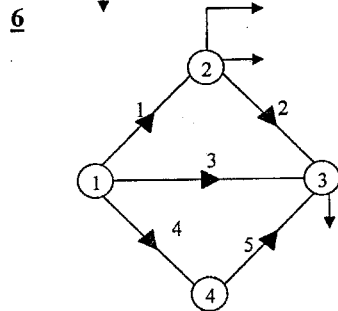
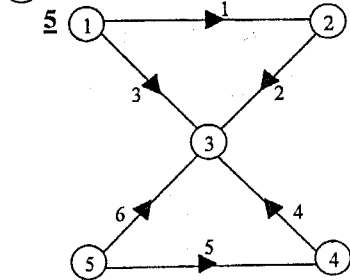
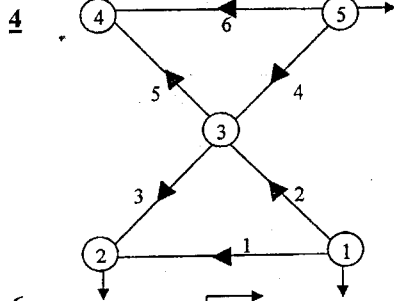
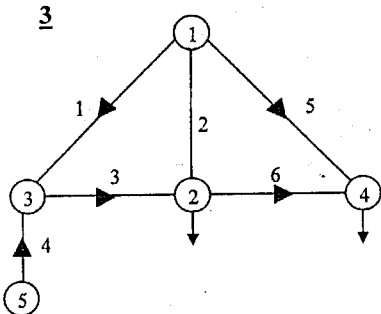
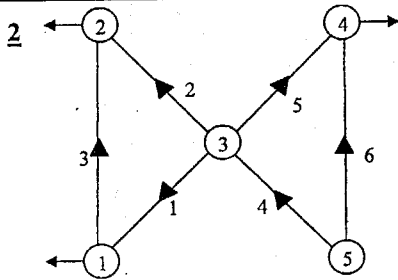
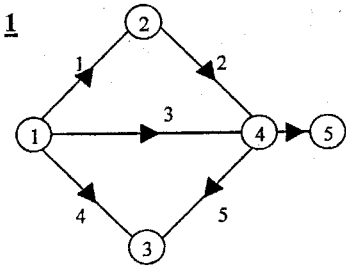
6.3 Зміст звіту

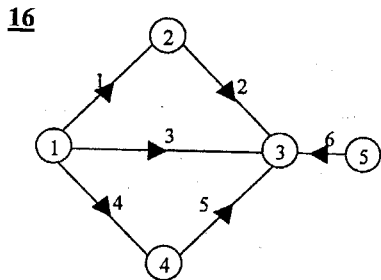
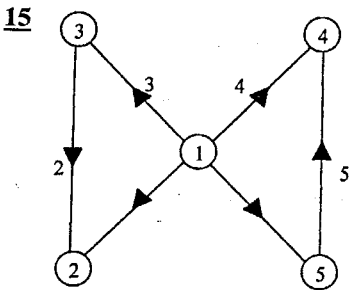
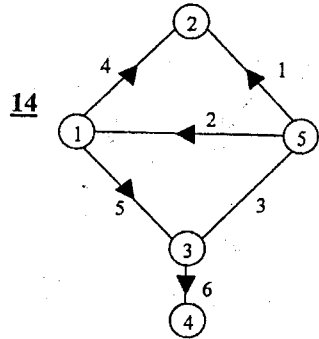
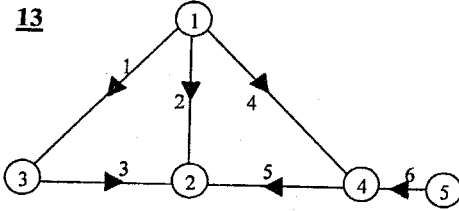
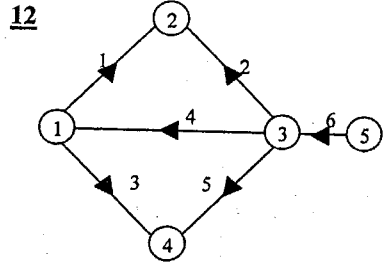
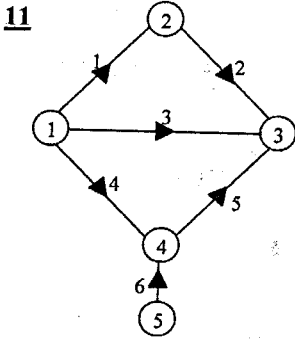
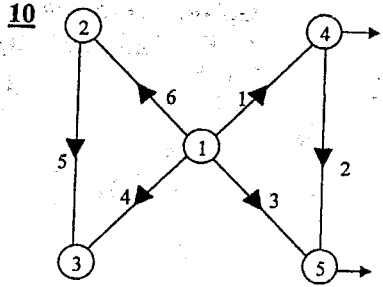
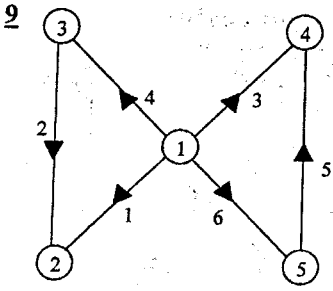
1. Описати мету і задачі досліджень, які проводяться в роботі.
2. Навести файл початкових даних.
3. Алгоритми програм, які використовуються в роботі. Короткі відомості про них.
4. Результати досліджень.
5. Проаналізувати отримані результати.
6. Висновки.

6.4 Питання для самоперевірки

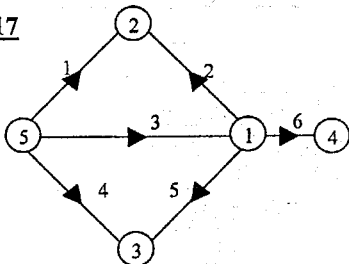
1. Назвіть основні етапи розв'язування оптимізаційної задачі і дайте коротку характеристику кожного з них.
2. На основі яких принципів вибирається критерій оптимальності?
3. Яким вимогам мусить відповідати математична модель задачі оптимізації?
4. Назвіть причини, що знижують ефективність реалізації оптимальних рішень і можливі шляхи їх усунення.
5. Дайте означення теплової функції Максвелла та її застосування в задачах оптимізації параметрів режиму ЕЕС.
6. Перерахуйте і дайте короткий аналіз галузей електроенергетики, де ефективно застосовуються методи оптимізації.

Додаток В
Варіанти завдання до лабораторних робіт
В1 Варіанти розрахункових схем

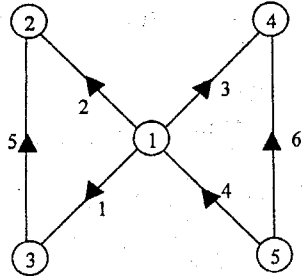




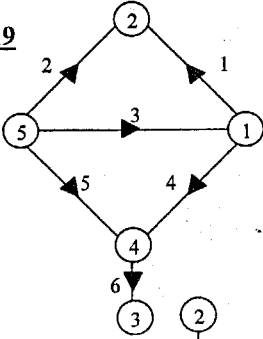
17



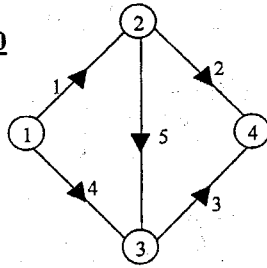
18



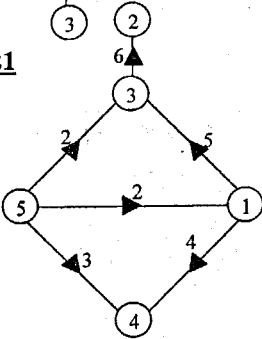
19



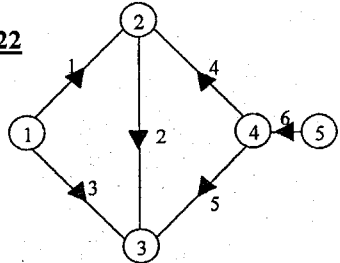
20



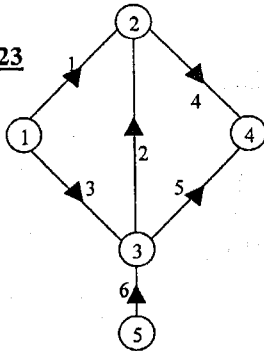
21



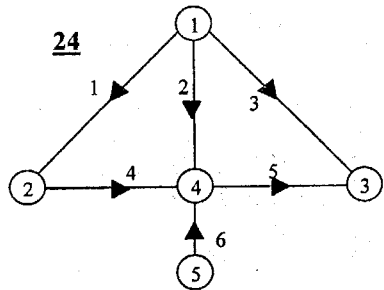
22



23



24



В2 Варіанти величин навантажень вузлів та опорів віток

Варіант 1

Опір віток		Потужність вузлів	
1.	$1.5 + j1.1$ (Ом)	1.	$0.85 + j1.75$ (МВт)
2.	$1.3 + j0.92$ (Ом)	2.	$1.40 + j1.20$ (МВт)
3.	$1.3 + j1.1$ (Ом)	3.	$1.54 + j0.74$ (МВт)
4.	$1.51 + j1.25$ (Ом)	4.	$0.76 + j0.84$ (МВт)
5.	$1.6 + j1.62$ (Ом)	5.	$0.53 - j0.75$ (МВт)
6.	$0.85 + j1.42$ (Ом)	6.	$1.25 + j1.27$ (МВт)

Варіант 2

Опір віток		Потужність вузлів	
1.	$1.21 + j0.97$ (Ом)	1.	$1.35 + j1.45$ (МВт)
2.	$0.83 + j0.73$ (Ом)	2.	$1.23 - j1.30$ (МВт)
3.	$1.60 + j0.97$ (Ом)	3.	$1.44 + j1.03$ (МВт)
4.	$1.05 - j0.67$ (Ом)	4.	$0.77 - j0.69$ (МВт)
5.	$0.87 + j0.52$ (Ом)	5.	$0.83 - j0.49$ (МВт)
6.	$0.59 + j0.62$ (Ом)		

Варіант 3

Опір віток		Потужність вузлів	
1.	$1.10 + j0.71$ (Ом)	1.	$0.95 - j0.75$ (МВт)
2.	$1.83 + j1.32$ (Ом)	2.	$1.10 + j0.70$ (МВт)
3.	$1.53 + j0.81$ (Ом)	3.	$1.84 - j1.17$ (МВт)
4.	$1.15 + j1.12$ (Ом)	4.	$0.95 - j0.98$ (МВт)
5.	$0.76 + j0.72$ (Ом)	5.	$0.93 + j0.89$ (МВт)
6.	$0.75 + j1.02$ (Ом)	6.	$1.11 + j0.67$ (МВт)

Варіант 4

Опір віток		Потужність вузлів	
1.	$5 + j10$ (Ом)	1.	$85 + j75$ (МВт)
2.	$10 + j20$ (Ом)	2.	$40 + j20$ (МВт)
3.	$10 + j10$ (Ом)	3.	$40 + j40$ (МВт)
4.	$10 + j25$ (Ом)	4.	$60 + j40$ (МВт)
5.	$6 + j24$ (Ом)	5.	$-55 - j35$ (МВт)
6.	$5 + j20$ (Ом)		

Літэратура

1. Браммелер А., Аллан Р., Хэмэм Я. Слабозаполненные матрицы: Анализ электроэнергетических систем. - М.: Энергия, 1979.
2. Мельников Н.А. Матричный метод анализа электрических цепей. Изд. 2-е. - М.: Энергия, 1972.
3. Хемминг Р.В. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
4. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики / Под ред. В.А. Веникова. - М.: Высшая школа, 1981. - 288 с.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. - М.: Мир, 1989. - 655 с.
6. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х книгах. Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. - 320 с.
7. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 1. Пер. с англ. - М.: Мир, 1972. - 335 с.
8. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. - М.: Советское радио, 1984.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебн. пособ. для вузов. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 432 с.
10. Калижман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. - М.: Высшая школа, 1975.
11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.
12. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. - М.: Радио и связь, 1984.
13. Бабенко К.И. Основы численного анализа. - М.: Наука, 1986.
14. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. - М.: Радио и связь, 1989. - 224 с.
15. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - 3-е изд. - М.: Наука, 1989.

Навчальне видання

Віктор Цезарович Зелінський

**МАТЕМАТИЧНІ
ЗАДАЧІ
ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ**

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор В.О. Дружиніна

Коректор З.В. Поліщук

Навчально-методичний відділ ВНТУ

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК №746 від 25.12.2001р.

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 30.03.2006р.

Формат 29,7×42 ¼

Друк різнографічний

Тираж 75 прим.

Гарнітура Times New Roman

Папір офсетний

Ум. друк. арк. 6.98

Зам. № 2006-065

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі

Вінницького національного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК №746 від 25.12.2001р.

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ.