В. І. Месюра, Л. М. Ваховська, В. В. Колодний

СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З НЕЧІТКОЮ ЛОГІКОЮ

Лабораторний практикум
Частина 1
Математичні основи нечіткої логіки

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. І. Месюра, Л. М. Ваховська, В. В. Колодний

СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З НЕЧІТКОЮ ЛОГІКОЮ

Лабораторний практикум
Частина 1
Математичні основи нечіткої логіки

Вінниця
ВНТУ
2015

УДК 510.6: 004.89(075)
ББК 22.18: 32.97я73
М53

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 11 від 30.06.2011 р.).

Рецензенти:
О. М. Роїк, доктор технічних наук, професор
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор
А. Б. Ракитянська, кандидат технічних наук, доцент

Месюра, В. І.
М53 Системи прийняття рішень з нечіткою логікою : лабораторний практикум. Частина 1. Математичні основи нечіткої логіки. В. І. Месюра, Л. М. Ваховська, В. В. Колодний – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 124 с.

Лабораторний практикум містить теоретичний матеріал і велику кількість прикладів формалізації та розв'язування задач за допомогою математичного апарату нечітких множин, необхідних для набуття студентами практичних навичок у створенні програмного забезпечення систем підтримки прийняття рішень з нечіткою логікою, переліки контрольних запитань та вимоги до знань студентів, необхідні для виконання лабораторних робіт навчальної дисципліни «Системи прийняття рішень з нечіткою логікою».

УДК 510.6: 004.89(075)
ББК 22.18: 32.97я73

ЗМІСТ

ВСТУП ... 4
1 НЕЧІТКІ МНОЖИНИ ... 6
1.1 Загальне поняття нечіткої множини ... 6
1.2 Основні характеристики нечітких множин ... 11
1.3 Теоретико-множинні операції над нечіткими множинами ... 16
1.4 Відстань між нечіткими множинами ... 26
1.5 Індекси нечіткості ... 28
Контрольні запитання ... 30
Лабораторна робота № 1 ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ... 32

2 НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ ... 35
2.1 Поняття нечіткого відношення ... 35
2.2 Операції над нечіткими відношеннями ... 39
2.3 Проекції нечіткого відношення ... 43
2.4 Композиція нечітких відношень ... 45
2.5 Основні властивості нечітких відношень ... 48
2.6 Види нечітких відношень ... 52
2.7 Відношення нечітких порядків ... 59
Контрольні запитання ... 65
Лабораторна робота № 2 ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЧІТКИХ ВІДНОШЕНЬ ... 67

3 ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ... 71
3.1 Змістовна інтерпретація функції належності ... 71
3.2 Поняття нечіткої та лінгвістичної змінної ... 73
3.3 Прямі методи побудови функції належності ... 79
3.4 Побудова функцій належності на основі парних порівнянь ... 83
3.5 Непрямі методи для групи експертів ... 89
3.6 Побудова функцій належності на основі експертних оцінок ... 91
3.7 Параметричний перехід до побудови функцій належності ... 96
3.8 Побудова функцій належності на основі інтервальних оцінок ... 103
3.9 Методи побудови функцій належності лінгвістичних термів ... 110
Контрольні запитання ... 117
Лабораторна робота № 3 ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ... 119

ГЛОСАРІЙ ... 121

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ... 122

ВСТУП

Будь-яка розумова діяльність людини (як і будь-яка наука) полягає у створенні та дослідженні моделей реального світу. Навіть спілкуючись між собою природною мовою ми постійно формулюємо моделі різноманітних реальних об'єктів, описуючи їх словами.

Реальні об'єкти, явища і процеси навколишнього світу є надто складними і відповідають нашим моделям лише настільки, наскільки самі ці об'єкти, явища і процеси відповідають нашим знанням про них. При цьому модель ніколи не є повністю еквівалентною об'єкту, вона завжди є неповним (неточним, викривленим) поданням об'єкта, тобто – біднішою за сам об'єкт. Тому в моделі завжди присутня невизначеність, яку слід враховувати при перенесенні висновків, отриманих при її аналізі на сам об'єкт.

Невизначеність є складним філософським поняттям. Обмежуючись розглядом невизначеності лише на рівні структури, можна навести її загальну класифікацію у вигляді, поданому на рисунку 1 [1].

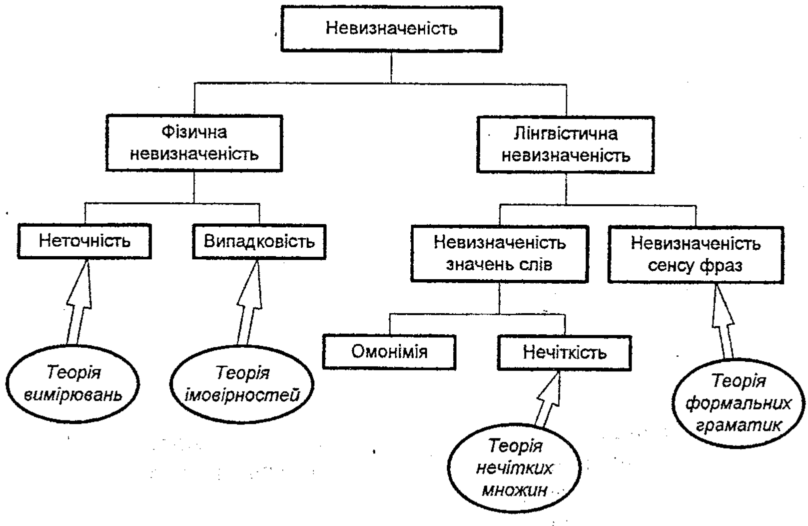


Рисунок 1 – Загальна класифікація невизначеності

Фізична невизначеність описує невизначеність об'єкта реального світу з точки зору спостерігача. Вона може бути зумовлена неточністю вимірювань цілком визначених величин, викликаною можливостями фізичних приборів. Наприклад, маючи шкалу з кроком 1 мм ми не можемо виміряти розмір з точністю до мікрона. Математичною моделлю для обробки такого типу невизначеності є інтервальна арифметика. З об'єктами виміряними у різних шкалах треба працювати по-різному.

Наприклад, для рангових або номінальних шкал не мають сенсу арифметичні операції. Вивчення цих питань є предметом дослідження теорії вимірювань.

Фізична невизначеність може бути пов'язана також з наявністю у зовнішньому середовищі кількох можливостей, кожна з яких випадково стає дійсністю (ситуація випадковості, невизначеності). Теорією, орієнтованою на обробку невизначеності у цьому сенсі, є теорія ймовірностей. Але й сама ця теорія базується на ряді припущень і гіпотез, без перевірки яких для даної конкретної проблеми неможливо гарантувати адекватність висновків, отриманих у межах аналізу її моделей, реальним об'єктам або процесам. До таких вимог відносяться, зокрема: повторюваність подій, гарантування можливості переносу ефектів, що спостерігаються, на всі об'єкти або події даного типу (генеральна сукупність), незалежність подій і т. ін.

Невизначеність вмісту фраз вивчає формальна граматика. Прикладами такої невизначеності можуть бути відомі фрази: «стратити не можна помилувати», «він зустрів її на поляні з квітами» і т. ін., – сенс яких змінюється в залежності від місця розташування коми.

Теорія нечітких множин дозволяє формалізувати невизначеність, що виникає при моделюванні (не тільки математичному, а у широкому сенсі цього слова) реальних об'єктів. Невизначеність виникає завжди при використанні для опису об'єкта слова природної мови. Це особливо характерно для застосування інформаційних технологій до «нетрадиційних» або «гуманітарних» областей, таких як соціологія, психологія, медицина, економіка, управління (з урахуванням особливостей досвіду, характеру, світогляду особи, що приймає рішення) і т. ін. У теорії нечітких множин розроблено апарат формалізації змістовних понять, прикладами яких є «людина середнього зросту», «високий рівень безпеки», «стійка ситуація» і т. ін.

Лабораторний практикум є першою з трьох частин лабораторного практикуму з дисципліни «Системи прийняття рішень з нечіткою логікою»:

- математичні основи теорії нечітких множин;
- моделі та методи нечіткого логічного висновку;
- проектування нечітких систем підтримки прийняття рішень з використанням засобів MATLAB та FUZZYTECH.

Він містить теоретичний матеріал і велику кількість прикладів формалізації та розв'язування задач за допомогою математичного апарату нечітких множин, необхідних для набуття студентами практичних навичок у створенні програмного забезпечення систем підтримки прийняття рішень з нечіткою логікою.

1 НЕЧІТКІ МНОЖИНИ

1.1 Загальне поняття нечіткої множини

Англійське слово fuzzy, від якого утворене прикметник Fuzzy (нечіткий), означає «ворс», оскільки малюнок на ворсистій тканині здається розмитим [2]. Отже, кажучи «нечіткий», мають на увазі «неясний», «розмитий». Нечіткою множиною, наприклад, можна назвати усіх красунь світу. Сенс цього Означення повністю зрозумілий, але сказати, чи належить до цієї множини одна або інша дівчина однозначно, лише за допомогою слів «так» або «ні» не просто, оскільки йдеться про невизначені, нестрогі властивості об'єктів дослідження.

На відміну від цього світ, властивості якого можна строго визначити двома словами, наприклад «чоловік або жінка?», назвемо чітким світом. Отже, логіку комп'ютерів, які мають справу з 0 і 1, називатимемо чіткою логікою, а звичайні множини – чіткими множинами. Зауважимо, що нечіткі множини і нечітку логіку можна розглядати як розширення відповідних чітких понять.

Для кращого розуміння нечітких множин згадаємо спочатку основи теорії чітких множин [3].

Нехай E є множиною, A – є підмножиною E, а x є елементом підмножини A, або, як ще кажуть, належить A:

$$A \subset E,\ x \in A$$

Відобразити цю належність можна з використанням іншого поняття – характеристичної функції $\mu_A(x)$, значення якої вказують, чи є (так або ні) x елементом A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad x \in A, \\ 0, & \textit{якщо} \quad x \notin A \end{cases}.$$

Приклад 1.1 Розглянемо кінцеву множину з п'яти елементів

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

і нехай

$$A = \{x_2, x_3, x_5\}.$$

Випишемо для кожного елементу з E ступінь його належності множині A

$$\mu_A(x_1) = 0,\ \mu_A(x_2) = 1,\ \mu_A(x_3) = 1,\ \mu_A(x_4) = 0,\ \mu_A(x_5) = 1.$$

Це дозволить подати A через усі елементи множини E, супроводивши кожен з них значенням його функції належності

$$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1\}.$$

Тобто елементи, яким поставлено у відповідність значення $\mu_A(x_i) = 1$, можна інтерпретувати як елементи, що знаходяться у множині A, а елементи, якім поставлено у відповідність значення $\mu_A(x_i) = 0$, як елементи, що не знаходяться у множині A.

Графічну інтерпретацію характеристичної функції μ_A множини A наведено на рисунку 1.1. Така концепція використовується в багатьох застосуваннях.

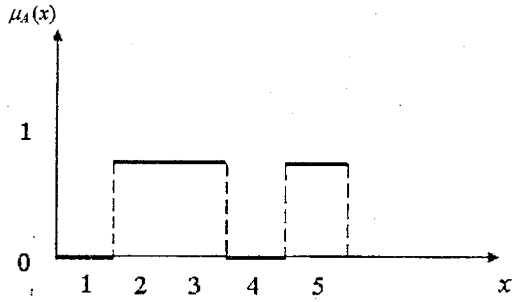


Рисунок 1.1 – Графічне відображення характеристичної функції μ_A

Але не важко навести ситуації, в яких дана концепція буде недостатньо гнучкою. Розглянемо, наприклад, множину B молодих людей:

$$B = \{\text{множина молодих людей}\}$$

Така множина може бути визначена через вік людини. При цьому нижня межа буде подана значенням 0. Верхню межу визначити трохи складніше. Припустимо, ми визначимо її рівною значенню 20. Отже, B буде визначено як чітко обмежений інтервал, буквально:

$$B = [0; 20].$$

Але тут виникає таке запитання. Чому людина у свій двадцятирічний ювілей ще є молодою, а наступного дня вже ні? Зрозуміло, що це є структурна проблема, і до якої б довільної точки ми не пересунули верхню межу наше запитання залишиться справедливим.

Більш природний шлях отримання множини B полягає в послабленні жорсткого розподілу людей на молодих і немолодих. Зробимо це з використанням не тільки чітких суджень: «Так, він (вона) належить множині молодих людей», «Ні, він (вона) не належить множині молодих людей», але і за допомогою більш гнучких формулювань: «Так, він (вона) належить множині достатньо молодих людей», «Ні, він (вона) не дуже молоді люди.»

Для формалізації даної пропозиції, з метою її узагальнення, будемо кодувати всі елементи універсуму міркування не лише значеннями 0 або 1, а додатково скористаємось значеннями з інтервалу від 0 до 1, який має назву одиничного інтервалу $I = [0; 1]$.

Інтерпретація чисел при співвіднесенні всіх елементів універсуму міркувань стає при цьому більш складною. Тепер число 1 ставиться у відповідність (співвідноситься) тому елементу, який точно належить множині *B*, а 0 означає, що елемент точно не належить множині *B*. Всі інші значення визначають ступінь належності елемента множині *B*.

Тобто, характеристична функція може тепер приймати будь-яке значення в інтервалі [0; 1]. Відповідно до цього елемент x_i множини *E* може не належати *A* ($\mu_A = 0$), може бути елементом А у невеликому ступені ((μ_A близько до 0), може більш менш належати А (μ_A не надто близьке до 0, ні надто близьке до 1), може значною мірою бути елементом А (μ_A близько до 1) або, нарешті, може бути елементом А ($\mu_A = 1$). Отже, поняття належності отримує цікаве узагальнення, що приводить до дуже корисних результатів.

Приклад 1.2. Поставимо у відповідність різному віку людини різні «ступені» її молодості, які відобразимо відповідними значеннями характеристичної функції (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Значення характеристичної функції з інтервалу [0, 1]

Вік	Значення характеристичної функції, як «ступінь відповідності» людини поняттю «молода»	Поняття
[0 – 20]	1	молода
25	0,75	достатньо молода
30	0,5	не дуже молода
40	0	немолода

Значення характеристичної функції для проміжного віку людини можна отримати, поєднавши сусідні відомі значення відрізками прямих (рис. 1.2). Наприклад, для віку 35 років отримаємо у нашому прикладі значення характеристичної функції $\mu_A(35) = 0{,}125$. Математичний об'єкт, що визначається виразом вигляду

$$A = \{(1/x_1), (1/x_2), (0{,}75/x_3), (0{,}5/x_4), (0/x_5\}\},$$

де x_i – елемент універсальної множини *E*, а число перед нахиленою рискою є значенням характеристичної функції на цьому елементі, будемо називати нечіткою підмножиною множини *E* і позначати $\widetilde{A}$.

Означення 1.1. Для довільної непустої множини *X* її нечіткою підмножиною $\widetilde{A}$ називають множину пар вигляду [7]:

$$\widetilde{A} = \{<\mu_A(x)/x>\}, \tag{1.1}$$

де $x \in X$, $\mu_A(x) \in [0;\ 1]$, $\mu_A : X \to [0;\ 1]$ – функція належності елементу $x \in X$ нечіткій множині $\widetilde{A}$, $\widetilde{A} \subset E$, X – базова множина або базова шкала.

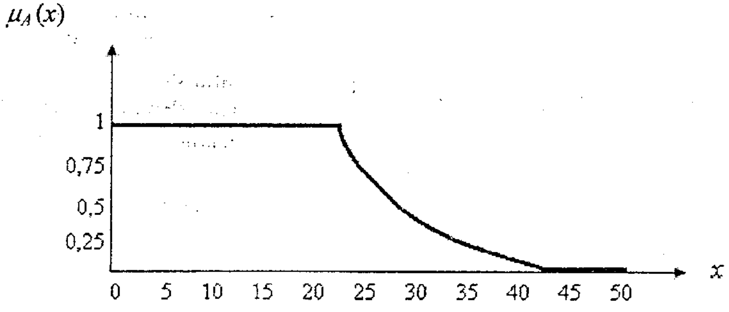


Рисунок 1.2 – Графічне відображення характеристичної функції μ_A з інтервалу [0; 1]

Для кожного конкретного значення $x \in X$ величина $\mu_A(x)$ набуває певного значення із замкненого інтервалу [0; 1], яке називається ступенем належності елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$. Будемо вважати, що до множини $\widetilde{A}$ не входять елементи $(\mu_A(x) / x)$ для яких $\mu_A(x) = 0$.

Означення 1.2. Функцією належності $\mu_A(x)$ називається функція, що дозволяє для довільного елементу $x \in X$ визначити ступінь його належності нечіткій множині.

Функція належності $\mu_A(x)$ є одним з базових понять теорії нечітких множин. Більшість дослідників вважають, що вона є деяким не імовірнісним суб'єктивним виміром нечіткості, який відрізняється від імовірнісної міри. Тобто, ступінь належності $\mu_A(x)$ елемента x до нечіткої множини $\widetilde{A}$ інтерпретується як суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x \in X$ відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною $\widetilde{A}$.

Означення 1.3. Підмножина A множини E, яка містить тільки ті елементи з E, для яких значення функції належності $\mu_A(x)$ є більшими за 0, називається носієм $supp\,\widetilde{A}$ нечіткої множини $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} := \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Приклад 1.3. Нехай E – множина натуральних чисел. Тоді її нечітку підмножину $\widetilde{A}$ «дуже малих» чисел можна подати так:

$$\widetilde{A} = \{<1/1>, <0{,}8/2>, <0{,}6/4>, <0{,}5/5>, <0{,}3/6>, <0{,}1/7>\}.$$

Носієм нечіткої множини $\widetilde{A}$ буде множина

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

оскільки для всіх інших натуральних чисел значення функції належності $\mu_A(x)$ поняттю «дуже мале число» буде дорівнювати нулю. Помітимо, що носієм нечіткої множини є зазвичай чітка підмножина множини E.

Приклад 1.4. Нехай E = {«Мерседес», «БМВ», «Вольво», «Жигулі», «Таврія», «Запорожець»} множина марок легкових автомобілів, а E^* = [0; ∞) – універсальна множина «вартість». Тоді на E^* можна визначити нечіткі множини типу: «для людини з невеликим достатком», «для середнього класу», «престижні» з функціями належності подібними до наведених на рисунку 1.3 [4].

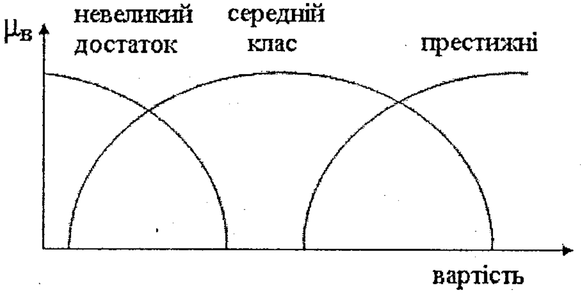


Рисунок 1.3 – Функції належності для означення вартості речей доступних для осіб різного рівня достатку

Маючи такі функції належності і знаючи вартості автомобілів з E у даний момент часу, можна визначити на E^* нечіткі множини з такими ж назвами для різних марок автомобілів.

Наприклад, нечітка множина «для людини з невеликим достатком», задана на універсальній множині Х = {«Мерседес», «БМВ», «Вольво», «Жигулі», «Таврія», «Запорожець»} буде мати вигляд, наведений на рисунку 1.4.

Тобто, згідно з рисунком 1.4 можна стверджувати, що «Запорожець» є автомобілем виключно для людей з невеликим достатком; «Таврія» – на 90% для людей з невеликим достатком і на 60% для людей із середнім достатком; «Жигулі» – на 30% для людей з невеликим достатком і на 90% – для людей із середнім достатком і т. ін.

Функція належності для кожної нечіткої множини визначається, в загальному випадку, суб'єктивно. Так, в наведеному прикладі вигляд функції належності відображає точку зору авторів і може не збігатися з точкою зору читача. Тобто, функції належності однієї і тієї ж множини можуть бути різними при визначенні їх як різними особами, так і однією і тією ж особою в залежності від її настрою, мети побудови нечіткої підмножини, задачі, методики побудови і т. ін. Детально з методами побудови функцій належності ви познайомитесь у четвертій лабораторній роботі.

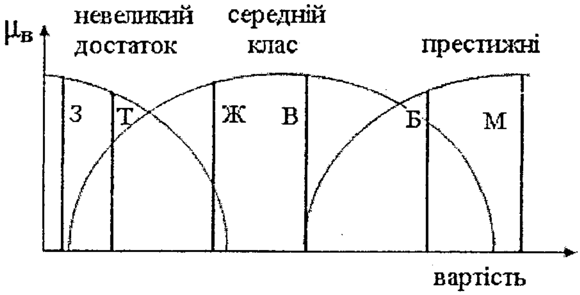


Рисунок 1.4 – Функції належності для означення престижності легкових автомобілів

1.2 Основні характеристики нечітких множин

Нехай $M = [0; 1]$ і $\widetilde{A}$ – нечітка множина з елементами з універсальної множини X і множиною функцій належностей M.

Означення 1.4. Величина верхньої границі функції належності нечіткої множини називається висотою нечіткої *height* ($\widetilde{A}$) множини $\widetilde{A}$.

$$height(\widetilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Означення 1.5. Нечітка множна $\widetilde{A}$ називається нормальною, якщо її висота дорівнює 1, тобто верхня межа її функції належності дорівнює 1:

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1.$$

Якщо виконується

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) < 1,$$

то нечітка множина називається субнормальною (рис. 1.5)

Означення 1.6. Нечітка множина є пустою, якщо

$$\forall x \in X, \ \mu_A(x) = 0.$$

Непусту субнормальну множину можна нормалізувати за формулою

$$\mu_A(x) := \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)}.$$

Означення 1.7. Нечітка множина унімодальна, якщо $\mu_A(x) = 1$ виконується тільки для одного x з X.

Елементи $x \in X$, для яких виконується $\mu_A(x) = 0{,}5$ іноді називають точками переходу множини А.

Приклад 1.5. Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0, 1]$; $\widetilde{A}$ – нечітка множина, для якої:

$$\mu_A(x_1) = 0{,}3;\ \mu_A(x_2) = 0;\ \mu_A(x_3) = 1;\ \mu_A(x_4) = 0{,}5;\ \mu_A(x_5) = 0{,}9.$$

Тоді $\widetilde{A}$ можна подати у вигляді:

$\widetilde{A} = \{0{,}3/x_1; 0/x_2; 1/x_3; 0{,}5/x_4; 0{,}9/x_5\}$, або $A = 0{,}3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0{,}5/x_4 +$ $+ 0{,}9/x_5$, або

A =	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0,3	0	1	0,5	0,9

Зауважимо, що знак «+» не є позначенням операції додавання, а має зміст об'єднання.

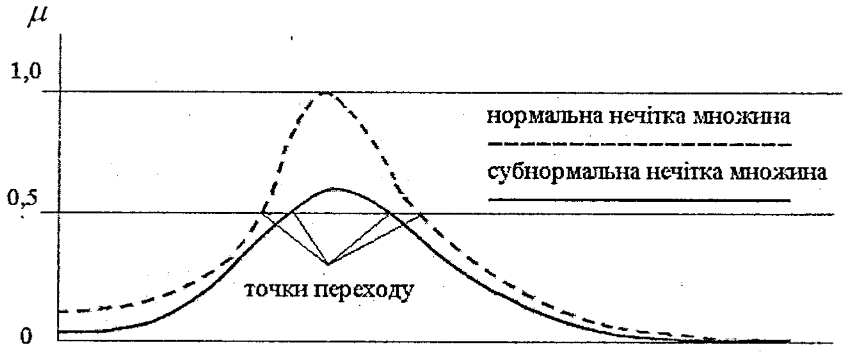


Рисунок 1.5 – Нормалізація унімодальної нечіткої множини

Приклад 1.6. Нехай $X = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$, $M = [0; 1]$. Визначимо нечітку множину:

«декілька» = 0,5/3 + 0,8/4 + 1/5 + 1/6 + 0,8/7 + 0,5/8.

Визначимо характеристики даної нечіткої множини:

висота = 1; носій = {3, 4, 5, 6, 7, 8}; точки переходу – {3, 8}.

Приклад 1.7. Нехай $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Функцію належності нечіткій множині «малий» можна описати за допомогою аналітичних виразів, наприклад, таких:

$$\mu_{\text{"малий"}}(n)=\frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2} \quad \text{або} \quad \mu_{\text{"малий"}}(n)=\frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2}/n$$

При цьому графіки функції належності набудуть вигляду, наведеного на рисунку 1.6 суцільною та переривистою лініями.

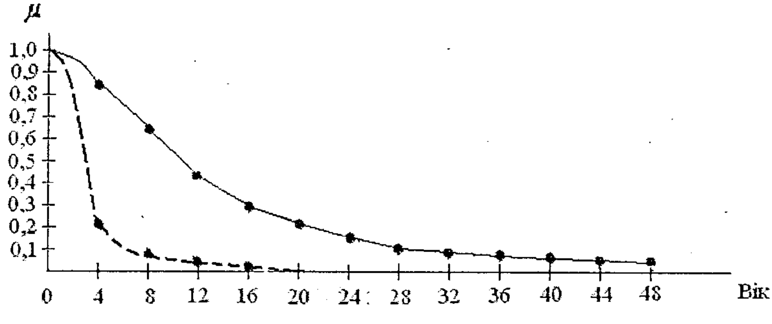


Рисунок 1.6 – Графік функцій належності нечіткій множині «малий»

Приклад 1.8. Нехай X = {0, 1, 2, 3, ... , 100} і відповідає поняттю «вік». Відповідно функцію належності нечіткої множини «молодий» можна задати, наприклад таким виразом:

$$\mu_{\text{"молодий"}}(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0{,}25] \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2}, & x\geq 25. \end{cases}$$

Нечітка множина «молодий» на універсальній множині

$$X' = \{\text{Бойко, Луцюк, Сердюк, ...}\},$$

задається за допомогою функції $\mu_{\text{"молодий"}}(x)$ на $X = \{1, 2, 3, \dots , 100\}$ (вік), яка називається відносно X функцією сумісності. При цьому виконується:

$$\mu_{\text{"молодий"}}(\text{Бойко}) = \mu_{\text{"молодий"}}(x),$$

де x – вік Бойка.

Означення 1.8. Нечітка множина називається пустою, якщо її носій є пустою множиною.

Означення 1.9. Ядром нечіткої множини $\tilde{A}$ називається чітка підмножина базової множини X, елементи якої мають ступені належності, що дорівнюють одиниці:

$$\tilde{A} := \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}.$$

Означення 1.10. Нечіткою множиною α-рівня (α-перерізом або α-зрізом) нечіткої множини $\tilde{A}$ називають чітку підмножину множини X, елементи якої мають ступені належності, що перевищують або дорівнюють α:

$$A_\alpha := \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1]$$

Носій та ядро можна розглядати як переріз нечіткої множини на нульовому та одиничному α-рівнях (рис. 1.7) Ядро субнормальної нечіткої множини є пустим.

Приклад 1.9 Знайдемо для нечіткої множини $\tilde{A}$ дві підмножини α-рівнів: $A_{0,3}$ і $A_{0,55}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\tilde{A}=$	0,8	0,1	1	0,3	0,6	0,2	0,5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$A_{0,3}=$	1	0	1	1	1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$A_{0,55}=$	1	0	1	0	1	0	0

Розглянемо дві важливі теореми, пов'язані з поняттям підмножини α-рівнів.

Теорема про декомпозицію. Будь-яку нечітку підмножину A можна розкласти на добуток звичайних підмножин за коефіцієнтами α_i:

$$\tilde{A} = \underset{\alpha_i}{MAX}[\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, \ldots, \alpha_n A_{\alpha_n}],$$

$$0 < \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведення є очевидним. Оскільки

$$\mu_{A\alpha_i}(x) = \begin{cases} 1, & якщо \;\; \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha_i \\ \hline 0, & якщо \;\; \mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha_i \end{cases},$$

то функцію належності A можна записати у вигляді:

$$\underset{\underset{\varepsilon_i}{MAX[\alpha_i \times A\alpha_i]}}{\mu(x)} = \underset{\alpha_i}{MAX}[\alpha_i \times A_{\alpha_i}] = \underset{\alpha_i < \mu_{\tilde{A}}(x)}{MAX}[\alpha_i] = \mu_{\tilde{A}}(x).$$

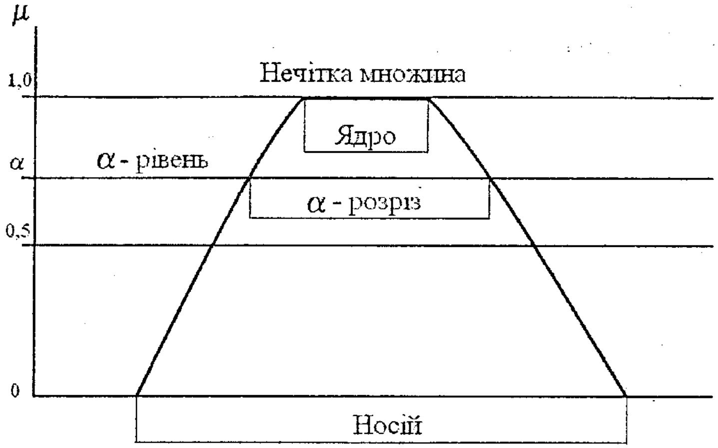


Рисунок 1.7– Характеристики нечіткої множини

Приклад 1.10. Здійснимо декомпозицію нечіткої множини $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \end{array} = MAX \left(0{,}2 \times \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \right.$$

$$0{,}5 \times \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad 0{,}7 \times \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}, \; 1 \times \left. \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Синтез нечіткої множини об'єднанням звичайних підмножин

Теорему про декомпозицію можна застосувати не тільки для аналізу, але й для синтезу. Якщо розглянути послідовність звичайних підмножин

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$$

і присвоїти значення α_1 для A_1, α_2 для A_2, … , α_n для A_n, причому такі, що

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n.$$

отримаємо нечітку підмножину $\widetilde{A}$.

Означення 1.11. Нечітка множин $\widetilde{A}$ називається випуклою, якщо:

$$\mu_A(\lambda \times x_1 + (1 - \lambda) \times x_2) \geq min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)), \qquad x_1, x_2 \in X,\ \lambda \in [0; 1].$$

Альтернативне означення: нечітка множина буде випуклою, якщо всі її α – перерізи є випуклими множинами [4, 6]. Приклади випуклої та невипуклої нечітких множин наведені на рисунку 1.8.

Рисунок 1.8 – Випукла та не випукла нечіткі множини

1.3 Теоретико-множинні операції над нечіткими множинами

Над нечіткими множинами можна виконувати різноманітні операції. При цьому необхідно визначити їх таким чином, щоб в окремому випадку, коли множина є чіткою, операції перетворювалися на звичайні операції теорії множин, тобто операції над нечіткими множинами повинні узагальнювати відповідні операції над звичайними множинами. Таке узагальнення можна реалізувати різними способами [3, 5, 6].

Оскільки у теорії нечітких множин ступінь належності може набувати значень з інтервалу [0; 1], а не обмежений бінарними значеннями 0 і 1, як у звичайній теорії множин, таке узагальнення можна реалізувати різними способами, які дозволяють враховувати різноманітні смислові відтінки відповідних логічних зв'язок «І», «АБО», «НЕ» у різних предметних областях.

Отож, будь-якій операції над звичайними множинами у теорії нечітких множин може відповідати кілька операцій.

Для означення перетину та об'єднання нечітких множин найбільшою популярністю користуються три групи операцій: мінімаксні, алгебраїчні та обмежені.

Мінімаксні операції визначаються за допомогою таких співвідношень:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\};\ \mu_{A\cap B}(x)=\min\ \{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

Рисунок 1.9 ілюструє головну ідею, закладену в основу такого Означення. Об'єднання множин, що відображає логічну операцію «АБО», визначається тією областю, у якій хоча б одне зі значень (або A, або B) є істинним, тобто, максимальним значенням. Перетин, що відображає логічну операцію «І», визначається областю, де істинними є обидва значення (і A і B), тобто, мінімальним значенням.

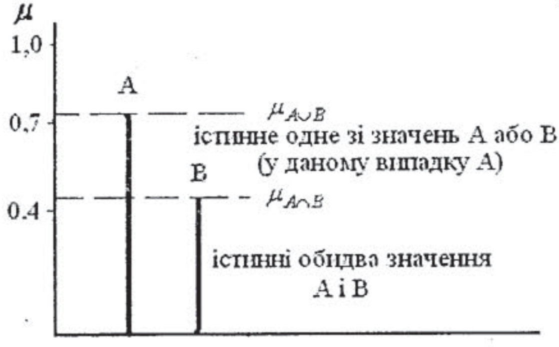


Рисунок 1.9 – Мінімаксні операції перетину та об'єднання нечітких множин

Зауважимо, що мінімаксні операції не враховують внесок менш значущих складових на загальний результат. Тобто, результат повністю визначається лише максимальною складовою при об'єднанні та лише мінімальною складовою при перетині нечітких множин.

Алгебраїчні операції відображають об'єднання та перетин через алгебраїчні операції додавання та множення, відповідно, що дозволяє враховувати усі складові, що беруть участь у формуванні результату:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)\} - \mu_A(x)\mu_B(x); \;\; \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x).$$

При цьому, при визначенні результату об'єднання, з суми значень складових впливів віднімається їх добуток, що забезпечує знаходження результату в інтервалі [0; 1].

Результат обмежених операцій визначається з використанням таких формул:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\ \{1,\ \mu_A(x) + \mu_B(x)\};\ \mu_{A\cap B}(x) = \max\ \{0,\ \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}.$$

Дані операції в явному вигляді задають обмеження на можливі значення результату, ще більше враховуючи внесок у результат окремих складових.

Доповнення нечіткої множини в усіх трьох випадках визначається однаково:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Можна показати, що для будь-яких нечітких множин оператори $F = \min$ і $G = \max$ є єдино можливими операторами ~~перетину і об'єднання~~, при виконанні таких властивостей

1. Комутативність:

$$F(\mu_A, \mu_B) = F(\mu_B, \mu_A); \quad G(\mu_A, \mu_B) = G(\mu_B, \mu_A).$$

2. Асоціативність:

$$F(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(F(\mu_A, \mu_B), \mu_C);$$
$$G(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(G(\mu_A, \mu_B), \mu_C).$$

3. Дистрибутивність:

$$F(\mu_A, G(\mu_B, \mu_C)) = G(F(\mu_A, \mu_B), F(\mu_A, \mu_C));$$
$$G(\mu_A, F(\mu_B, \mu_C)) = F(G(\mu_A, \mu_B), G(\mu_A, \mu_C)).$$

4. Монотонність:

$\mu_A \le \mu_C, \mu_B \le \mu_D \Rightarrow F(\mu_A, \mu_B) \le F(\mu_C, \mu_D));$
$G(\mu_A, \mu_B) \le G(\mu_C, \mu_D));$
$\mu_A < \mu_B \Rightarrow F(\mu_A, \mu_A) < F(\mu_B, \mu_B); \; G(\mu_A, \mu_A) < G(\mu_B, \mu_B);$
$F(1, 1) = 1; F(0, 0) = 0;$
$F(\mu_A, \mu_B) \le \min\{\mu_A, \mu_B\}; G(\mu_A, \mu_B) \ge \max\{\mu_A, \mu_B\}.$

Наведені оператори не вичерпують усю множину можливих визначень нечітких операторів об'єднання та перетину.

Найбільш загальний підхід до цілеспрямованого формування нечітких операторів об'єднання та перетину полягає в їх визначенні в класі трикутних норм і конорм.

Означення 1.12. Трикутною нормою (t-нормою) називається двомісна дійсна функція $\wedge$ на одиничному інтервалі:

$$T: [0; 1] \times [0; 1] \to [0; 1],$$

що задовольняє такі аксіоми для будь-яких $\mu_A, \mu_B, \mu_C \in [0; 1]$:

$T(0, 0) = 0; T(\mu_A, 1) = \mu_A; T(1, \mu_A) = \mu_A$ – обмеженість;
$T(\mu_A, \mu_B) \le T(\mu_C, \mu_D)$, якщо $\mu_A \le \mu_C, \mu_B \le \mu_D$ – монотонність;
$T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$ – комутативність;
$T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ – асоціативність.

Означення 1.13. Трикутною конормою (t-конормою, або s-нормою) називається двомісна дійсна функція $\vee$ на одиничному інтервалі:

$$T: [0; 1] \times [0; 1] \to [0; 1],$$

з такими властивостями:

$T(1, 1) = 1; T(\mu_A, 0) = \mu_A; T(0, \mu_A) = \mu_A$ – обмеженість;
$T(\mu_A, \mu_B) \ge T(\mu_C, \mu_D)$, якщо $\mu_A \ge \mu_C, \mu_B \ge \mu_D$ – монотонність;
$T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$ – комутативність;
$T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ – асоціативність.

Простими випадками трикутних норм є розглянуті раніше групи операторів.

Розглянемо більш детально Означення теоретико-множинних операцій, запропонованих Лотфі Заде [11].

Означення 1.14. Доповненням нечіткої множини $\tilde{A}$ називається нечітка множина $\neg\tilde{A}$, яка визначається за формулою:

$$\neg\tilde{A} = \{< \mu_{\neg A}(x)/ x >\}, x \in X,$$

де – $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Позначення: $\neg\tilde{A}$

Зауважимо, що в теорії нечітких множин оператор доповнення не є єдиним. Крім загальновідомого $\forall x\ \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$, існує багато інших операторів доповнення нечіткої множини.

Нехай задано деяке відображення λ: [0; 1] → [0; 1]. Це відображення отримає назву оператора заперечення в теорії нечітких множин, якщо виконуватимуться такі умови:

(1) $\lambda(0) = 1$; $\lambda(1) = 0$;

(2) $\mu_A \le \mu_B \Rightarrow \lambda(\mu_A) \ge \lambda(\mu_B)$.

Якщо до того ж λ:

(3) є строго спадною функцією;

(4) є неперервною функцією;

то вона називається строгим запереченням.

Функція λ називається сильним запереченням або інволюцією, якщо наряду з умовами (1) і (2) для неї виконується:

(5) $\lambda(\lambda(\mu_A)) = \mu_A$

Прикладами функції заперечення можуть бути, наприклад, такі:

- класичне заперечення: $\lambda(\mu_A) = \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$;
- квадратичне заперечення: $\lambda(\mu) = \sqrt{1-\mu(x)^2}$;
- заперечення Сугено: $\lambda(\mu) = \dfrac{1-\mu}{1+k\mu}$, де $-1 < k < \infty$

Доповнення порогового типу: $\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \mu \le \alpha, \\ 0, \text{якщо } \mu > \alpha, \end{cases}$

Будь-яке значення λ, для якого $\lambda(\mu) = \mu$ називають рівноважною точкою. Для будь-якого неперервного заперечення існує єдина рівноважна точка.

Означення 1.15. Об'єднанням $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ називається найменша нечітка підмножина, що містить в собі як $\tilde{A}$, так і $\tilde{B}$, і визначається за формулою:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{< \mu_{A \cup B}(x)/x >\}, x \in X,$$

де – $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$, або $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Інакше кажучи, множина $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ є нечіткою множиною, для якої виконується: $\tilde{A} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$; $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Позначення: $\tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Означення 1.16 Перетином $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ називається найбільша нечітка підмножина, що міститься водночас як у $\tilde{A}$, так і у $\tilde{B}$, і визначається за формулою:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{< \mu_{A \cap B}(x)/x >\},\ x \in X,$$

де – $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \,\&\, \mu_B(x)$, або $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Інакше кажучи, множина $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ нечітко включається до $\tilde{A}$ і до $\tilde{B}$, тобто: $\tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ і $\tilde{A} \cap \tilde{B} \subseteq \tilde{B}$.

Позначення: $\tilde{A} \cap \tilde{B}$.

На рисунку 1.10 наведене візуальне подання простих операцій над нечіткими множинами, які мають ті ж властивості, що і операції над чіткими множинами:

інволюція – $\neg(\neg \tilde{A}) \approx \tilde{A}$;

ідемпотентність – $\tilde{A} \cup \tilde{A} \approx \tilde{A}$ і $\tilde{A} \cap \tilde{A} \approx \tilde{A}$;

комутативність – $\tilde{A} \cup \tilde{B} \approx \tilde{B} \cup \tilde{A}$ і $\tilde{A} \cap \tilde{B} \approx \tilde{B} \cap \tilde{A}$;

асоціативність – $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} \approx \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}$ і $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \approx$ $\approx (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} \approx \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$;

дистрибутивності – $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$,
$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$;

закони де Моргана – $\neg(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \approx \neg \tilde{A} \cap \neg \tilde{B}$, $\neg(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \approx \neg \tilde{A} \cup \neg \tilde{B}$ і т ін.

Зауважимо, що при мінімаксному та алгебраїчному Означеннях операцій для нечітких множин, на відміну від чітких множин, в загальному випадку не виконуються закони суперечності і виключення третього: $\tilde{A} \cap \neg \tilde{A} \neq \varnothing$ і $\tilde{A} \cup \neg \tilde{A} \neq X$, а для обмежених операцій не виконуються властивості ідемпотентності $\tilde{A} \cup \tilde{A} \neq \tilde{A}$ та дистрибутивності

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}),\ \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C}).$$

Означення 1.17. Нехай $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ – нечіткі множини на універсальній множині E. Кажуть, що $\tilde{B}$ нечітко включається до $\tilde{A}$ ($\tilde{A}$ міститься в $\tilde{B}$), якщо виконується:

$$\forall x \in E,\ \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \quad (\mu_A(x) \supset \mu_B(x)).$$

Позначення: $\tilde{A} \to \tilde{B}$ ($\tilde{A} \supset \tilde{B}$).

Іноді використовують термін «домінування», тобто у випадку $\tilde{A} \to \tilde{B}$ ($\tilde{A} \supset \tilde{B}$), кажуть, що $\tilde{A}$ домінує над $\tilde{B}$.

Означення 1.18. Ступенем включення $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B})$ нечіткої множини $\widetilde{A}$ до нечіткої множини $\widetilde{B}$ називається величина, яка знаходиться за формулою:

$$\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \underset{x \in X}{\&} (\mu_A(\mathrm{x}) \to \mu_B(\mathrm{x})),$$

де, $\mu_A(\mathrm{x})$ і $\mu_B(\mathrm{x})$ – нечіткі висловлювальні змінні, $\to$ – операція імплікації нечітких висловлювань.

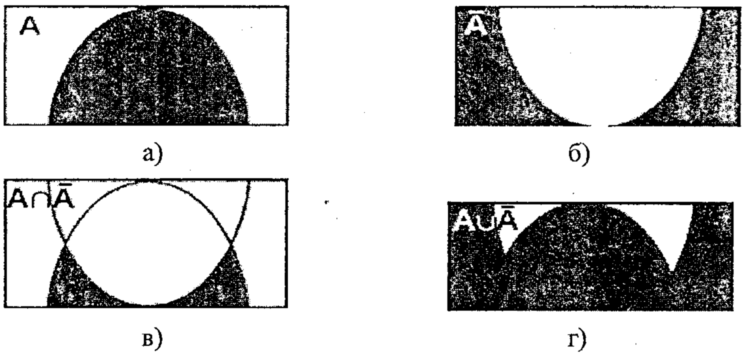


Рисунок 1.10 – Графічне подання операцій над нечіткими множинами: а) нечітка множина $\widetilde{A}$ (заштрихована частина рисунка) – область значень $\widetilde{A}$ та всіх нечітких підмножин, що містяться в $\widetilde{A}$; б) $\neg\widetilde{A}$; в) $\widetilde{A} \cap \neg\widetilde{A}$; г) $\widetilde{A} \cup \neg\widetilde{A}$

Аналогічно можна визначити і ступінь включення $\nu(\widetilde{B},\widetilde{A})$ нечіткої множини $\widetilde{B}$ до нечіткої множини $\widetilde{A}$.

Якщо виконується $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq 0{,}5$, то кажуть, що множина $\widetilde{A}$ нечітко включається до множини $\widetilde{B}$ і позначають:

$$\widetilde{A} \subset \widetilde{B}.$$

Якщо виконується $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \leq 0{,}5$, то кажуть, що множина $\widetilde{A}$ нечітко не включається до множини $\widetilde{B}$ і позначають:

$$\widetilde{A} \not\subset \widetilde{B}$$

Неважко побачити, що поняття нечіткого включення нечітких множин є узагальненням поняття включення чітких множин. Дійсно, якщо A і B – чіткі множини і $A \subseteq B$, то $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 1$, а якщо $\widetilde{A} \subsetneq \widetilde{B}$, то $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 0$.

Приклад 1.11. Нехай $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$,

$$\widetilde{A} = \{<0{,}3/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}4/x_5>\},$$

$$\widetilde{B} = \{<0{,}8/x_1>, <0{,}5/x_2>, <0{,}7/x_3>, <0{,}6/x_5>\}.$$

Тоді:

$$\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = (0\to 0{,}8)\ \&\ (0{,}3\to 0{,}5)\ \&\ (0{,}6\to 0{,}7)\ \&\ (0\to 0)\ \&\ (0{,}4\to 0{,}6) =$$
$$= 1\ \&\ 0{,}7\ \&\ 0{,}7\ \&\ 1\ \&\ 0{,}6 = 0{,}6;$$
$$\nu(\widetilde{B},\widetilde{A}) = (0{,}8\to 0)\ \&\ (0{,}5\to 0{,}3)\ \&\ (0{,}7\to 0{,}6)\ \&\ (0\to 0)\ \&\ (0{,}6\to 0{,}4) =$$
$$= 0{,}2\ \&\ 0{,}5\ \&\ 0{,}6\ \&\ 1\ \&\ 0{,}4 = 0{,}2.$$

Отже, отримуємо:

$$\widetilde{A} \subset \widetilde{B} \text{ і } \widetilde{A} \not\subset \widetilde{B}.$$

Підкреслимо, що ступінь включення однієї нечіткої множини до іншої може бути обчислена для будь-яких двох нечітких множин і набуває будь-якого значення з інтервалу [0; 1].

Означення 1.19. Нехай $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ – нечіткі множини на універсальній множині X. Кажуть, що $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ є нечітко рівними, якщо виконується:

$$\forall x \in X,\ \ \mu_A(\mathrm{x}) = \mu_B(\mathrm{x}).$$

Позначення: $\tilde{A} \approx \widetilde{B}$.

Означення 1.20. Ступінь рівності $\mu(\widetilde{A},\widetilde{B})$ нечітких множин $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ визначається згідно з виразом:

$$\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \underset{x\in X}{\&}(\mu_A(\mathrm{x}) \leftrightarrow \mu_B(\mathrm{x})).$$

Якщо виконується $\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq 0{,}5$, то кажуть, що множини $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ нечітко рівні, що позначається як $\tilde{A} \approx \widetilde{B}$.

Якщо виконується $\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \leq 0{,}5$, то кажуть, що множини $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ нечітко нерівні, що позначається як $\tilde{A} \approx \widetilde{B}$.

Якщо виконується $\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 0{,}5$, то кажуть, що множини $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ водночас нечітко рівні і нечітко нерівні, тобто індиферентні, що позначається як $\tilde{A} \sim \widetilde{B}$. Розглянуте поняття є узагальненням поняття рівності чітких множин A і B. Дійсно, якщо $A = B$ – маємо $\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 1$, а якщо $A \neq B$, то $\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 0$.

Приклад 1.12. Нехай $X = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$,

$$\widetilde{A} = \{<0{,}8/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}1/x_5>\},$$
$$\widetilde{B} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}6/x_2>, <0{,}7/x_3>, <0{,}2/x_4>, <0{,}3/x_5>\}.$$

Тоді:

$$\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = (0\leftrightarrow 0{,}3)\ \&\ (0{,}8\leftrightarrow 0{,}6)\ \&\ (0{,}6\leftrightarrow 0{,}7)\ \&\ (0\leftrightarrow 0{,}2)\ \&\ (0{,}1\leftrightarrow 0{,}3) =$$
$$= 0{,}7\&\ 0{,}6\ \&\ 0{,}6\ \&\ 0{,}8\ \&\ 0{,}7 = 0{,}6.$$

Отже,

$$\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = 0{,}6 \text{ і } \widetilde{A} \approx \widetilde{B}.$$

Підкреслимо, що ступінь рівності може бути обчислений для будь-яких двох нечітких множин і приймає будь-яке значення з інтервалу [0; 1].

Подамо вираз для ступеня рівності нечітких множин через Означення операції еквівалентності нечітких висловлювань у вигляді:

$$\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \underset{x\in X}{\&}((\mu_A(x)\rightarrow \mu_B(x))\ \&\ (\mu_B\ (x)\rightarrow \mu_A\ (x))).$$

У зв'язку з комутативністю кон'юнкції отримаємо:

$$\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \underset{x\in X}{\&}(\mu_A(x)\rightarrow \mu_B(x))\ \&\ (\underset{x\in X}{\&}\ (\mu_B\ (x)\rightarrow \mu_A\ (x))),$$

звідки безпосередньо отримуємо

$$\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \nu(\widetilde{A},\widetilde{B})\ \&\ \nu(\widetilde{B},\widetilde{A}).$$

Якщо $\mu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq 0{,}5$, тобто множини $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ нечітко рівні, то і $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq 0{,}5$ і $\nu(\widetilde{B},\widetilde{A}) \geq 0{,}5$. Отже, множина $\tilde{A}$ нечітко включається до множини $\widetilde{B}$ і навпаки. Звідси випливає метод доведення нечіткої рівності двох і більше нечітких множин, оснований на доведенні їх взаємної нечіткої рівності.

Означення 1.21 Різницею нечітких множин $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ називається нечітка множина $\tilde{A}\setminus\widetilde{B}$, яка визначається за формулою:

$$\tilde{A}\setminus\widetilde{B} = \{<\mu_{A\setminus B}(x)/x>\},\ x\in X,$$

де – $\mu_{A\setminus B}(x) = \mu_A(x)\ \&\ \neg\mu_B(x)$, або $\mu_{A\setminus B}(x) = \min\ \{\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\}$.

Позначення: $\tilde{A}\setminus\widetilde{B}$.

Означення 1.22. Симетричною різницею (диз'юнктивною сумою) нечітких множин $\tilde{A}$ і $\widetilde{B}$ називається нечітка множина $\tilde{A}\ominus\widetilde{B}$, яка визначається за формулою:

$$\tilde{A}\ominus\widetilde{B} = \tilde{A}\setminus\widetilde{B}\ \cup\ \widetilde{B}\setminus\tilde{A} = \{<\mu_{A\oplus B}(x)/x>\},\ x\in X,$$

де – $\mu_{A\oplus B}(x) = \mu_{A\setminus B}(x) \vee \mu_{B\setminus A}(x)$, або $\mu_{A\oplus B}(x) = \max\ \{[\min\{\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\}], [\min\ \{1-\mu_A(x), \mu_B(x)\}]\}$.

Позначення: $\tilde{A}\ominus\widetilde{B}$.

Приклад 1.13. Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$,

$$\widetilde{A} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}8/x_3>, <0{,}4/x_6>\},$$
$$\widetilde{B} = \{<0{,}9/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}4/x_3>, <0{,}5/x_4>\}.$$

Тоді:

$$\widetilde{A}\cup\widetilde{B} = \{<0{,}9/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}8/x_3>, <0{,}5/x_4>, <0{,}4/x_6>\};$$
$$\widetilde{A}\cap\widetilde{B} = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}4/x_3>\};$$
$$\neg\widetilde{A} = \{<0{,}7/x_1>,<1{,}0/x_2>,<0{,}2/x_3>,<1{,}0/x_4>,<1{,}0/x_5>,<0{,}6/x_6>,<1{,}0/x_7>\};$$
$$\neg\widetilde{B} = \{<0{,}1/x_1>,<0{,}8/x_2>,<0{,}6/x_3>,<0{,}5/x_4>,<1{,}0/x_5>,<1{,}0/x_6>,<1{,}0/x_7>\};$$

$$\widetilde{A}\setminus\widetilde{B} = \{<0{,}1/x_1>, <0{,}6/x_3>, <0{,}4/x_6>\};$$

$$\widetilde{B}\setminus\widetilde{B} = \{<0{,}7/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}2/x_3>, <0{,}5/x_4>\};$$

$$\widetilde{A}\ominus\widetilde{B} = \{<0{,}7/x_1>, <0{,}2/x_2>, <0{,}6/x_3>, <0{,}5/x_4>, <0{,}4/x_6>\}$$

Означення 1.23. Нечітким покриттям довільної непустої множини X називається сукупність $\Re$ нечітких множин, для яких виконуються такі умови:

$$(\forall\,\widetilde{A}\in\Re)\,(\widetilde{A}\not\approx\varnothing);\ (\forall\,\widetilde{A}\in\Re)\,(\widetilde{A}\subseteq X);\ \bigcup_{\widetilde{A}\in\Re}\widetilde{A}\approx X.$$

Інакше кажучи, нечітке покриття $\Re$ є сукупністю нечітких підмножин множини X, об'єднання яких нечітко дорівнює множині X. Елементи сукупності $\Re$ називаються класами нечіткого покриття.

Приклад 1.14. Нехай $X = \{1, 2, \dots, 10\}$.

Тоді нечіткі множини:

$\widetilde{A}_1 = \{<0{,}3/1>, <0{,}7/6>, <0{,}9/7>, <0{,}2/10>\}$;

$\widetilde{A}_2 = \{<0{,}5/1>, <0{,}8/2>, <0{,}4/7>, <0{,}9/8>, <0{,}6/10>\}$;

$\widetilde{A}_3 = \{<0{,}8/2>, <0{,}9/3>, <0{,}7/5>, <0{,}3/8>, <0{,}9/9>, <1/10>\}$;

$\widetilde{A}_4 = \{<0{,}7/3>, <0{,}6/4>, <0{,}8/5>, <0{,}3/7>, <0{,}6/8>, <0{,}7/9>\}$;

$\widetilde{A}_5 = \{<1/1>, <0{,}7/6>, <0{,}5/7>, <0{,}6/8>, <0{,}7/9>\}$;

Класами покриття є $\Re = \{\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4, \widetilde{A}_5\}$.

Клас нечіткого покриття називається максимальним, якщо він нечітко не включається ні в один з інших класів даного покриття. В розглянутому прикладі максимальними є класи $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{A}_3$, $\widetilde{A}_4$, $\widetilde{A}_5$, а клас $\widetilde{A}_1$ не є максимальним, оскільки має місце $\widetilde{A}_1\subseteq\widetilde{A}_5$.

Нечітким розбиттям множини називається таке покриття, в якому попарний перетин всіх різних нечітких класів покриття є нечітко близьким до пустої множини. Тобто, нечітким розбиттям множини X називається сукупність $\Re$ нечітких множин, для яких виконуються такі умови:

$$(\forall\,\widetilde{A}\in\Re)\,(\widetilde{A}\not\approx\varnothing);\ (\forall\,\widetilde{A}\in\Re)\,(\widetilde{A}\subseteq X);$$

$$(\forall\,\widetilde{A}\in\Re)\,(\forall\,\widetilde{B}\in\Re)\,((\widetilde{A}\approx\widetilde{B})\ \&\ ((\widetilde{A}\cap\widetilde{B})\approx\mathrm{o}));\ \bigcup_{\widetilde{A}\in\Re}\widetilde{A}\not\approx X.$$

Елементи сукупності $\Re$ називаються класами нечіткого розбиття множини X.

Приклад 1.15. Нехай $X = \{1, 2, \dots, 5\}$.

Тоді нечіткі множини:

$\widetilde{A}_1 = \{<0{,}3/1>, <0{,}1/2>, <0{,}8/3>, <0{,}2/4>, <1/3>\}$;

$\widetilde{A}_2 = \{<0{,}9/1>, <0{,}3/2>, <0{,}3/3>, <0{,}7/4>, <0{,}2/5>\}$;

$\widetilde{A}_3 = \{<0,8/ 2>, <0,3/ 5>\}$

є нечітким розбиттям множини X.

Означення 1.24. Нехай

$$\widetilde{A} = \{<\mu_A(x)/x>\}(x \in X),$$
$$\widetilde{B} = \{<\mu_B(y)/y>\}(y \in Y)$$

– нечіткі підмножини множин X і Y, відповідно. Прямим добутком $\widetilde{A} \times \widetilde{B}$ нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ називається нечітка підмножина множини $X \times Y$, яка визначається відповідно до виразу:

$$\widetilde{A} \times \widetilde{B} = \{<\mu_{A \times B}<x, y>/<x, y>>\},\ x \in X,\ y \in Y,$$

де $<\mu_{A \times B}<x, y> = \mu_A(x) \,\&\, \mu_B(y)$.

Приклад 1.16. Нехай $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$,

$$\widetilde{A} = \{<0,3/x_1>, <0,8/x_2>\},$$
$$\widetilde{B} = \{<0,7/y_1>, <0,3/y_2>, <0,9/y_3>\}.$$

Тоді:

$$\widetilde{A} \times \widetilde{B} = \{<0,3/<x_1, y_1>, <0,3/x_1, y_2>, <0,3/x_1, y_3>, <0,7/x_2, y_1>, <0,3/x_2, y_2>\},$$
$$<0,8/x_2, y_3>\}.$$

Розглянемо поняття інверсії і композиції нечітких множин.

Нехай $\widetilde{F} = \{<\mu_F<x, y> / <x, y>>\}$, $<x, y> \in X \times Y$ – нечітка підмножина $X \times Y$. Інверсією $\widetilde{F}^{-1}$ нечіткої множини $\widetilde{F}$ називається нечітка множина вигляду:

$\widetilde{F}^{-1} = \{<\mu_{F^{-1}}<y, x> / <y, x>>\}, <y, x> \in Y \times X$, де $\mu_{F^{-1}}<y, x> = \mu_F<x, y>$.

Нехай тепер: $\widetilde{F} = \{<\mu_F<x, y>/<x, y>>\}$, $<x, y> \in X \times Y$ – нечітка підмножина $X \times Y$, а $\widetilde{P} = \{<\mu_P<y, z>/<y, z>>\}$, $<y, z> \in Y \times Z$ – нечітка підмножина $Y \times Z$. Композицією $\widetilde{F} \circ \widetilde{P}$ нечітких множин $\widetilde{F}$ і $\widetilde{P}$ називається нечітка множина

$$\widetilde{F} \circ \widetilde{P} = \{<\mu_{F \circ P}<x, z> / <x, z>>\}\ <x, z> \in X \times Z,$$

де $\mu_{F \circ P}<x, z> = \bigvee_{y \in Y} (<\mu_F<x, y> \,\&\, \mu_P<y, z>),\ x \in X, z \in Z$.

Звідси випливає, що ступінь належності пари $<x, z> \in X \times Z$ нечіткій множині $\widetilde{F} \circ \widetilde{P}$ дорівнює найбільшому з мінімумів ступенів належності різних пар $<x, y> \in X \times Y$ і $<y, z> \in Y \times Z$, що компонуються, нечітким множинам $\widetilde{F}$ і $\widetilde{P}$, де як y можуть виступати кілька композиційних елементів.

Приклад 1.17. Нехай:

$$\widetilde{F} = \{<0,3/<x_1, y_1>, <0,7/x_2, y_1>, <0,9/x_2, y_2>, <1/x_1, y_3>, <0,4/x_2, y_3>\},$$
$$\widetilde{P} = \{<1/<y_1, z_4>, <0,2/y_1, z_1>, <0,8/y_1, z_3>, <0,3/y_2, z_1>, <0,4/y_2, z_4>\}$$

Визначимо інверсію:

$$\tilde{F}^{-1} = \{<0,3/<y_1, x_1>, <0,7/y_1, x_2>, <0,9/y_2, x_2>, <1/y_3, x_1>, <0,4/y_3, x_2>\}.$$

Побудуємо композицію:

$$\tilde{F} \circ \tilde{P} = \{<0,3/<x_1, z_4>, <0,2/x_1, z_1>, <0,3/x_1, z_3>, <0,7/x_2, z_4>, <0,7/x_2, z_3>, <0,3/x_2, z_1>\}.$$

Наприклад, значення функції належності пари $<x_2, z_1>$ нечіткій множині $\tilde{F} \circ \tilde{P}$ отримано за допомогою таких розрахунків:

$\mu_{F \circ P}<x_2, z_1> = (\mu_F<x_2, y_1> \;\&\; \mu_P<y_1, z_1>) \vee ((\mu_F<x_2, y_2> \;\&\; \mu_P<y_2, z_1>) =$
$= (0,7 \;\&\; 0,2) \vee (0,9 \;\&\; 0,3) = 0,3.$

На завершення відмітимо, що операція композиції нечітких множин має такі основні властивості:

$\tilde{F} \circ (\tilde{P} \circ \tilde{Q}) \approx (\tilde{F} \circ \tilde{P}) \circ \tilde{Q}$ – асоціативність;

$\tilde{F} \circ (\tilde{P} \cup \tilde{Q}) \approx (\tilde{F} \circ \tilde{P}) \cup (\tilde{F} \circ \tilde{Q})$ – дистрибутивність;

$(F \circ P)^{-1} \approx \tilde{P}^{-1} \circ \tilde{F}^{-1}$,

де $\tilde{F}$ і $\tilde{P}$ – нечіткі підмножини $X \times Y$ і $Y \times Z$ відповідно;
$\tilde{Q}$ – нечітка підмножина $Z \times W$.

1.4 Відстань між нечіткими множинами

Означення 1.25. Нехай V деяка множина, D_+ – множина невід'ємних дійсних чисел, і d: $V \times V \to D_+$. Кажуть, що $d(x, y)$ – відстань у V, якщо при $x, y, z \in V$ виконується:

1) $d(x,y) > 0$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$:
3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$;
4) $d(x,x) = 0$.

Найбільш часто для нечітких множин використовуються такі метрики відстаней між нечіткими множинами (функціями належності):

– відстань Хемінга для скінченної базової множини E: $|E| = n$:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} | \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) |;$$

– відносна відстань Хемінга:

$$\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = (1/n)\, d(\tilde{A}, \tilde{B});$$

– евклідова (або квадратична) відстань для скінченної базової множини E: $|E| = n$:

$$\mathrm{e}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\,;$$

– відносна евклідова відстань:

$$\varepsilon(\tilde{A}, \tilde{B}) = \mathrm{e}(\tilde{A}, \tilde{B})/\sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}\,.$$

Величина e^2 називається «евклідовою нормою»:

$$e^2(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2,$$

а величина

$$\varepsilon^2(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = e^2(\widetilde{A}, \widetilde{B})/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2.$$

Неважко помітити, що значення $\delta(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ і $\varepsilon(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ знаходяться у діапазоні [0; 1].

Для нескінченної універсальної множини отримуємо:

$$d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \int_E |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|\,dx;$$

$$\delta(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \frac{1}{|E|}\int_E |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|\,dx;$$

$$e(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sqrt{\int_E (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2\,dx};$$

$$\varepsilon(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \frac{1}{\sqrt{|E|}}\sqrt{\int_E (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2\,dx}.$$

Очевидно, що можна вигадати та визначити й інші відстані. Вибір тієї або іншої відстані залежить від природи досліджуваної проблеми. Кожна з них має свої переваги та недоліки, які стають очевидними у застосуваннях. Поняття відстані використовується при визначенні ступеня нечіткості множини.

Приклад 1.18. Визначимо відстань між нечіткими множинами $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\widetilde{A}$ =	0,7	0,2	0	0,6	0,6	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\widetilde{B}$ =	0,2	0	0	0,6	0,8	0,4	1

Отримаємо:

$$d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = |0{,}7-0{,}2|+|0{,}2-0|+|0-0|+|0{,}6-0{,}6|+|0{,}5-0{,}8|+|1-0{,}4|+|0-1| =$$
$$= 0{,}5+0{,}2+0+0+0{,}3+0{,}6+0{,}1 = 2{,}6;$$

$$\delta(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (1/7)\,d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 2{,}6/7 = 0{,}37;$$

$$e^2(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (0{,}7-0{,}2)^2 + (0{,}2-0)^2 + (0-0)^2 + (0{,}6-0{,}6)^2 + (0{,}5-0{,}8)^2 +$$
$$+ (1-0{,}4)^2 + (0-1)^2 = (0{,}5)^2 + (0{,}2)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (0{,}3)^2 + (0{,}6)^2 + (1)^2 = 1{,}74;$$

$$\mathrm{e}(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{1{,}74} = 1{,}32;$$
$$\varepsilon(\tilde{A},\tilde{B}) = \mathrm{e}(\tilde{A},\tilde{B})/\sqrt{7} = 1{,}32/\sqrt{7} = 0{,}49.$$

1.5 Індекси нечіткості

Розглянемо індекси нечіткості або показники розмитості нечітких множин. Якщо об'єкт x має властивість R, що породжує нечітку множину $\tilde{A}$, лише окремою мірою, тобто

$$0 < \mu_A(x) < 1,$$

то внутрішня невизначеність, неоднозначність об'єкта x відносно R проявляється в тому, що він, хоча й у різному ступені, належить одразу двом протилежним класам: класу об'єктів, що «мають властивість R», і класу об'єктів, що «не мають властивості R». Ця неоднозначність максимальна, коли ступені належності об'єкта обом класам рівні, тобто

$$\mu_A(\mathrm{x}) = \mu_{\neg A}(\mathrm{x}) = 0{,}5,$$

і мінімальна, коли об'єкт належить тільки одному класу, тобто

$$\mu_A(\mathrm{x}) = 1 \text{ і } \mu_{\neg A}(\mathrm{x}) = 0,$$

або

$$\mu_A(\mathrm{x}) = 0 \text{ і } \mu_{\neg A}(\mathrm{x}) = 1.$$

У загальному випадку показник розмитості нечіткої множини можна визначити у вигляді функціонала $d(\tilde{A})$ зі значеннями в R (додатна піввісь), що задовольняє такі умови:

– $d(\tilde{A}) = 0$ тоді й тільки тоді, коли A – звичайна множина;
– $d(\tilde{A})$ максимальне тоді й тільки тоді, коли $\mu_A(x) = 0.5$ для усіх $x \in X$;
– $d(\tilde{A}) < d(\tilde{B})$, якщо $\tilde{A}$ є загостренням $\tilde{B}$, тобто:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ при } \mu_B(x) < 0{,}5;$$
$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \text{ при } \mu_B(x) > 0{,}5;$$
$$\mu_A(x) - \text{будь-яке при } \mu_B(x) = 0{,}5;$$

– $d(\tilde{A}) = d(\neg\tilde{A})$ – симетричність відносно 0,5;
– $d(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = d(\tilde{A}) + d(\tilde{B})$, якщо $d(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \varnothing$.

При введенні конкретних показників розмитості наведену систему аксіом часто використовують лише частково, обмежуючись, наприклад лише першими трьома властивостями, або підсилюючи чи послаблюючи певні властивості в залежності від задачі, що розв'язується.

Розглянемо деякі індекси нечіткості (показники розмитості), які можна визначити з використанням поняття відстані.

Звичайна множина, найближча до нечіткої. Нехай $\tilde{A}$ – нечітка множина. Звичайна множина $\tilde{\tilde{A}} \subset X$, що є найближчою до $\tilde{A}$, тобто знаходиться на найменшій евклідовій відстані від нечіткої множини $\tilde{A}$, позначається як $\tilde{\tilde{A}}$, і є підмножиною з характеристичною функцією:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mu_A(x_i) < 0{,}5; \\ 1, & \text{якщо } \mu_A(x_i) > 0{,}5; \\ 0 \text{ або } 1, & \text{якщо } \mu_A(x_i) = 0{,}5. \end{cases}$$

Звичайно приймають $\mu_A(x) = 0$, якщо $\mu_A(x_i) = 0{,}5$.

Визначимо ряд індексів нечіткості нечіткої множини $\tilde{A}$, базуючись на понятті звичайної множини, найближчої до нечіткої множини.

Лінійний індекс нечіткості:

$$d(\tilde{A}) = \frac{2}{n}\,\rho(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}),$$

де $\rho(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}})$ – лінійна (хемінгова) відстань, множник – забезпечує виконання умови $0 \le d(\tilde{A}) \le 1$.

Квадратичний індекс нечіткості:

$$d(\tilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}}\,\varepsilon(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}}), \; 0 \le d(\tilde{A}) \le 1,$$

де $\varepsilon(\tilde{A}, \underline{\tilde{A}})$ – квадратична (евклідова) відстань.

Введені на основі понять відстані і звичайної множини, найближчої до нечіткої, лінійний і квадратичний індекси нечіткості можна визначити і з використанням операції доповнення:

лінійний індекс – $d(\tilde{A}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A(x_i), \mu_{\neg A}(x_i))$;

квадратичний індекс – $d(\tilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min(\mu_A^2(x_i), \mu_{\neg A}^2(x_i))}$;

Відмітимо ряд властивостей, пов'язаних з найближчою звичайною множиною:

$$\tilde{\tilde{A}} \cap \tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{B}} \cap \tilde{\tilde{A}};$$
$$\tilde{\tilde{A}} \cup \tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{B}} \cup \tilde{\tilde{A}};$$
$$x \in X: |\mu_A(x_i) - \mu_{\neg A}(x_i)| = \mu_{A \cap \neg A}(x_i),$$

звідки для лінійного індексу нечіткості маємо:

$$d(\tilde{A}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_{A \cap \neg A}(x_i),$$

тобто, у цьому поданні стає очевидним, що $d(\tilde{A}) = d(\neg\tilde{A})$.

Нечітку множину з функцією належності

$$2\mu_{A \cap \neg A}(x_i),$$

іноді називають векторним індикатором нечіткості.

Можна оцінювати нечіткість і через поняття ентропії. Обмежимося при цьому випадком скінченної універсальної множини. Ентропія системи з n станами

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n,$$

з якими пов'язані ймовірності

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

визначається виразом:

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i, \ H_{\min} = 0, \ H_{\max} = 1.$$

Для випадку нечітких множин покладемо:

$$\pi_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)}.$$

Тоді загальну формулу для підрахунку ентропії за нечіткістю, можна записати у такому вигляді:

$$H(\pi_A(x_1), \pi_A(x_2), \ldots, \pi_A(x_n)) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \pi_A(x_i) \ln \pi_A(x_i).$$

Поки що спроби використання ентропії в теорії нечітких множин (у наведеному вигляді) не дали гарних результатів, але роботи з узагальнення поняття ентропії для нечітких множин тривають.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні джерела невизначеності в задачах прийняття рішень.

2. Яка принципова відмінність існує між чіткою та нечіткою множиною?

3. Що таке функція належності?

4. Назвіть основні характеристики нечітких множин.

5. Сформулюйте теорему про декомпозицію та доведіть її.

6. Поясніть три основні групи нечітких операторів об'єднання та перетину нечітких множин.

7. Що таке трикутні норма та конорма і для чого вони використовуються?

8. Наведіть вимоги до нечіткого оператора доповнення та наведіть приклади його Означення.

9. Наведіть основні теоретико-множинні операції над нечіткими множинами.

10. Які закони чіткої логіки не виконуються при Означеннях логічних операцій на нечітких множинах.

11. Як визначається ступінь включення нечітких множин?

12. Поясніть поняття домінування однієї нечіткої множини над іншою.

13. Поясніть відмінність між поняттями нечіткого розбиття та нечіткого покриття множини.

14. Як обчислюється композиція нечітких множин? Поясніть «фізичний зміст» цієї операції.

15. Як вимірюється відстань між нечіткими множинами і навіщо потрібні такі вимірювання?

16. Що таке індекс нечіткості нечіткої множини і що він характеризує?

Лабораторна робота № 1

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Мета роботи

Закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок з формалізації за допомогою нечітких множин понять, що погано формалізуються, створення відповідного програмного забезпечення.

У результаті виконання лабораторної роботи студент повинен вміти:

- створювати нечіткі множини для формалізації опису об'єкта, явища, процесу;
- визначати основні характеристики нечітких множин;
- виконувати математичні операції над нечіткими множинами;
- створювати програмні функції для виконання операцій над нечіткими множинами.

Завдання на підготовку

Студент повинен знати:

- основні поняття нечітких множин;
- форми та методи подання нечітких множин;
- теоретико-множинні операції над нечіткими множинами;
- одну з мов програмування.

Студент повинен вміти:

- створювати програми однією з мов програмування.

Для допуску до виконання роботи необхідно:

- вміти відповісти на теоретичні запитання по ходу виконання роботи;
- дати викладачу заготівку звіту про лабораторну роботу, яка повинна містити титульний лист та опис вибраної предметної області.

Завдання на лабораторну роботу

1. Відповідно до теми курсового проекту сформулювати задачу для формалізації за допомогою нечітких множин.
2. Визначити три основні поняття предметної області курсового проекту.
3. Подати вибрані поняття нечіткими множинами.
4. Створити бібліотеку функцій для виконання операцій над нечіткими множинами.
5. Розробити методику дослідження реалізованих функцій.
6. Здійснити дослідження реалізованих операцій над нечіткими множинами.
7. Зробити висновки щодо адекватності та ефективності подання задачі нечіткими множинами.

Зміст звіту

Титульний лист.
Назва і мета лабораторної роботи.
Теоретична частина:

1. Опис умов задачі.
2. Обґрунтування створених нечітких множин.

Практична частина:

1. Формалізований опис функцій належності нечітких множин.
2. Опис створених функцій для виконання операцій над нечіткими множинами.
3. Методика дослідження реалізованих функцій.
4. Приклади роботи створених функцій, ілюстровані скріншотами.
5. Інструкція користувача по роботі з бібліотекою функцій.
6. Лістинги функцій з коментарями.

Висновки по роботі.

Завдання для виконання

1. Визначте ступінь включення нечіткої множини $\widetilde{A}$ до нечіткої множини $\widetilde{B}$, і множини $\widetilde{B}$ до множини $\widetilde{A}$, якщо:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_5\},$$
$$\widetilde{A} = \{<0,3/x_2>, <0,6/x_3>, <0,4/x_5>\},$$
$$\widetilde{B} = \{<0,8/x_1>, <0,5/x_2>, <0,7/x_3>, <0,6/x_5>\}.$$

2. Визначте ступінь включення нечіткої множини $\widetilde{A}$ до нечіткої множини $\widetilde{B}$, і множини $\widetilde{B}$ до множину $\widetilde{A}$, якщо:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_6\},$$
$$\widetilde{A} = \{<0,4/x_1>, <0,7/x_2>, <0,2/x_3>, <0,9/x_5>, <0,6/x_6>\},$$
$$\widetilde{B} = \{<0,8/x_1>, <0,4/x_2>, <0,5/x_3>, <0,7/x_4>, <0,9/x_6>\}.$$

3. Визначте ступінь нечіткої рівності нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, якщо

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_5\},$$
$$\widetilde{A} = \{<0,8/x_2>, <0,6/x_3>, <0,1/x_5>\},$$
$$\widetilde{B} = \{<0,3/x_1>, <0,6/x_2>, <0,7/x_3>, <0,2/x_4>, <0,3/x_5>\}.$$

4. Визначте ступінь нечіткої рівності нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, якщо

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_6\},$$
$$\widetilde{A} = \{<0,3/x_1>, <0,9/x_2>, <0,2/x_3>, <0,5/x_4>, <0,8/x_5>, <0,6/x_6>\},$$
$$\widetilde{B} = \{<0,8/x_1>, <0,5/x_2>, <0,1/x_3>, <0,7/x_4>, <0,6/x_5>, <0,9/x_6>\}.$$

5. Наведіть приклад трьох нечітких множин, які задані на базовій множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$, таких, що ступінь включення першої множини в другу дорівнює 0,4, а першої множини в третю – 0,6. Для наведеного прикладу знайдіть значення ступеня включення другої множини в третю.

6. Наведіть приклад трьох нечітких множин, які задані на базовій множині $X = \{x_1, x_2, ..., x_5\}$, таких, що ступінь нечіткої рівності першої множини з другою дорівнює 0,7, а першої множини з третьою – 0,6. Для наведеного прикладу знайдіть значення ступеня нечіткої рівності другої множини з третьою.

7. Для базової множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$ наведіть приклад чотирьох класів нечіткого покриття, з яких три є максимальними.

8. Для базової множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$наведіть приклад чотирьох класів нечіткого розбиття.

9. Побудуйте композицію нечітких множин:

$$\widetilde{F} = \{<0{,}3/<x_1, y_1>, <0{,}7/x_2, y_1>, <0{,}9/x_2, y_2>, <1/x_1, y_3>, <0{,}4/x_2, y_3>\},$$

$$\widetilde{P} = \{<1/<y_1, z_4>, <0{,}2/y_1, z_1>, <0{,}8/y_1, z_3>, <0{,}3/y_2, z_1>, <0{,}4/y_2, z_4>\}.$$

10. Побудуйте варіант вихідних нечітких множин $\widetilde{F}$ і $\widetilde{P}$, композиція яких дорівнює:

$$\widetilde{F} \circ \widetilde{P} = \{<0{,}3/<x_1, z_4>, <0{,}2/x_1, z_1>, <0{,}3/x_1, z_3>, <0{,}7/x_2, z_4>,$$
$$<0{,}7/x_2, z_3>, <0{,}3\ /x_2, z_1>\}.$$

2 НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ

2.1 Поняття нечіткого відношення

Перед розглядом поняття нечіткого відношення нагадаємо ряд визначень [3, 5, 7, 8].

Декартовим (або прямим) добутком множин *A*, *B*, …, *X* називається множина всіх можливих сполучень вигляду $\{a_i, b_j, \ldots, x_k\}$ таких, що $a_i \in A$, $b_j \in B$, $x_k \in X$. Якщо ж всі *n* координат належать одній і тій же множині, наприклад *A*, то такий добуток позначається як A^n.

Підмножина $R \in A^n$ називається *n* – місним відношенням на множині A. Кажуть, що елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ знаходяться у відношенні R, якщо виконується $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$. Одномісні відношення, які називають також ознаками, є просто підмножинами R і тому в цьому випадку термін «відношення» використовується дуже рідко. Прикладом 11 – місного відношення може служити множина всіх гравців футбольної команди, які в даний час знаходяться на футбольному полі. Якщо a і b знаходяться у відношенні R, то це часто записують у вигляді $a\,R\,b$.

Нехай $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – прямий добуток універсальних множин і *M* – деяка множина належностей (наприклад $M = [0;\ 1]$). Нечітке *n* – арне відношення визначається як нечітка підмножина *R* на *X*, яка приймає свої значення в *M*. У випадку $n = 2$ і $M = [0;\ 1]$, нечітким відношенням *R* між множинами $X = X_1$ і $Y = X_2$ буде називатися функція

$$R\colon (X, Y) \to [0;\ 1],$$

яка ставить у відповідність кожній парі елементів $(x,y) \in X \times Y$ величину $\mu_R(x, y) \in [0,\ 1]$.

Нечітке відношення на $X \times Y$ запишеться у вигляді:

$$X \in X, y \in Y\colon x\,R\,y.$$

У випадку, коли $X = Y$, тобто *X* і *Y* збігаються, нечітке відношення

$$R\colon X \times X \to [0;\ 1]$$

називається нечітким відношенням на множині X.

Нечіткі відношення вигляду *XRX* задаються функцією належності $\mu_R(x,\ y)$, але за умови, що *x* і *y* – елементи однієї і тієї ж універсальної множини. В залежності від своїх властивостей (основними з яких є симетричність, рефлексивність, транзитивність), конкретні нечіткі відношення задають відношення подібності та розбіжності, порядку або слабого порядку між елементами *X*. Вони мають широку сферу застосування у задачах автоматичної класифікації й прийняття рішень (порівняння альтернатив).

Означення 2.1. Нечітким відношенням $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$ на довільній непустій множині X називається пара множин, в якій $\tilde{F}$ є нечіткою підмножиною X^2. У відношенні $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$ множина X називається областю задання, а множина

$\tilde{F}$ – нечітким графіком відношення. Тобто, нечітке відношення є окремим випадком нечіткої відповідності $\tilde{\Gamma} = (X, Y, \tilde{F})$, для якої виконується умова $X = Y$.

Нечітке відношення можна задати у теоретико-множинному, графічному, матричному вигляді, а також за допомогою нечітких предикатів.

Для теоретико-множинного подання нечіткого відношення необхідно перелічити елементи множини X і задати нечіткий графік

$$\tilde{F} = \{<\mu_F< x_i, x_j >/<x_i, x_j >>\},\ <x_i, x_j> \in X^2.$$

В матричному вигляді нечітке відношення $\tilde{\varphi}$ задається за допомогою матриці суміжності R_φ, рядки і стовпці якої помічені елементами $x \in X$, а на перетині i-го рядка і j-го стовпця розташовано елемент $r_{ij} = \mu_F<x_i, x_j>$, де μ_F – функція належності елементів з X^2 нечіткому графіку $\tilde{F}$.

Нечітке відношення $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$ можна задати також у вигляді орієнтованого графа з множиною вершин X, дугам $<x_i, x_j>$ якого приписано відповідні значення $\mu_F<x_i, x_j>$ функції належності μ_F.

Приклад 2.1. Задамо деяке нечітке відношення $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$, визначивши $X = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$ і нечіткий графік

$$\tilde{F} = \{<0{,}5/<x_1, x_6>, <0{,}7/x_1, x_5>, <0{,}4/x_2, x_3>, <0{,}8/x_3, x_3>, <0{,}2/x_4, x_3>,$$

$$<0{,}1/x_4, x_1>, <0{,}3/x_4, x_6>, <0{,}6/x_6, x_4>, <1{,}0/x_6, x_3>, <1{,}0/x_6, x_6>\}$$

Матриця суміжностей цього відношення наведена на рисунку 2.1.

Приклад 2.2. Нехай $X = Y = (-\bar{x}, \infty)$, тобто множина всіх дійсних чисел. Відношення $x >> y$ (x набагато більше за y) можна задати функцією належності:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \ x \le y; \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x - y^2)}}, \text{ якщо } y < x. \end{cases}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$

$$
\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6
\end{array}
\left\|
\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}5 \\
0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1{,}0 & 0{,}6 & 0 & 1{,}0
\end{array}
\right\|
$$

Рисунок 2.1 – Матриця суміжності і граф нечіткого відношення $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$

Відношення R, для якого $\mu_R(x,y) = e^{-k(x-y)^2}$, при достатньо великих k можна інтерпретувати як «x і y близькі одне до одного числа».

Приклад 2.3. У випадку скінченних або зчисленних універсальних множин очевидна інтерпретація нечіткого відношення у вигляді нечіткого графа, в якому пара вершин (x_i, x_j) у випадку $X\,R\,X$ з'єднується ребром з вагою $\mu_R(x_i, x_j)$, а у випадку $X\ R\ Y$ пара вершин (x_i, y_j) з'єднується ребром з вагою $\mu_R(x_i, y_j)$.

Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, і задано нечітке відношення R: $X \times X \rightarrow [0; 1]$. Приклад подання такого відношення нечітким графом наведено на рис. 2.2.

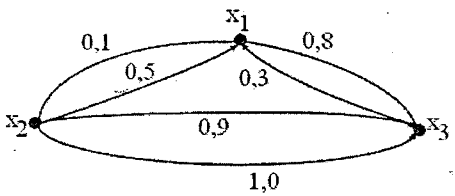


Рисунок 2.2 – Подання нечіткого відношення за допомогою нечіткого графа

Нехай $X = \{x_1, x_2\}$ і $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, тоді нечіткий граф, наведений на рисунку 2.3 задає нечітке відношення $X\,R\,Y$.

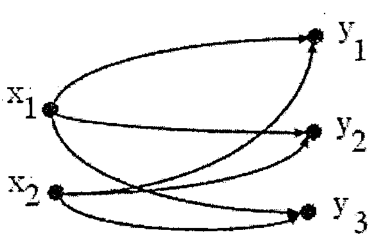


Рисунок 2.3 – Подання нечітким графом нечіткого відношення $X\,R\,Y$

Нехай $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$ – довільне нечітке відношення. Якщо

$$(\mu_F<a,b>/<a,b>) \in F;\ a,b \in X,$$

то вираз $a\,\widetilde{\varphi}\,b$ подає логічне висловлювання зі значенням істинності, що дорівнює $\mu_F<a,b>$. Звідси випливає, що для задання деякого нечіткого відношення $\widetilde{\varphi}$ на X необхідно задати нечітку логічну формулу $x_i\,\widetilde{\varphi}\,x_j$ від двох змінних або нечіткий предикат, який визначено на множині X^2 і який приймає значення з інтервалу [0; 1].

Означення 2.2. Носієм нечіткого відношення $\widetilde{\varphi} = (X,\ \widetilde{F})$ називають чітке відношення $\varphi = (X,\ F)$ $\Gamma = (X,\ Y,\ F)$, в якому графік F є носієм нечіткого графіка $\widetilde{F}$. Інакше кажучи, носієм нечіткого відношенням R називається звичайна множина впорядкованих пар (x, y), для яких функція належності є додатною:

$$S(R) = \{(x, y)\colon\ \mu_R(x, y) > 0\}.$$

Нехай $\widetilde{\varphi} = (X,\ \widetilde{F})$ і $\widetilde{\psi} = (X,\ \widetilde{P})$ деякі відношення на X. Тоді ступінь рівності $\mu(\widetilde{\varphi},\ \widetilde{\psi})$ нечітких відношень $\widetilde{\varphi}$ і $\widetilde{\psi}$ визначиться за допомогою виразу:

$$\mu(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = \underset{(x_i, x_j) \in X^2}{\&} (\mu_F<x_i, x_j> \leftrightarrow \mu_P<x_i, x_j>).$$

Якщо $\mu(\widetilde{\varphi},\ \widetilde{\psi}) \geq 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ і $\widetilde{\psi}$ нечітко рівні, що позначається як $\widetilde{\varphi} \approx \widetilde{\psi}$. Якщо $\mu(\widetilde{\varphi},\ \widetilde{\psi}) \leq 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ і $\widetilde{\psi}$ нечітко не рівні. Якщо $\mu(\widetilde{\varphi},\ \widetilde{\psi}) = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ і $\widetilde{\psi}$ водночас нечітко рівні і нечітко не рівні, тобто взаємно індиферентні, що позначається як $\widetilde{\varphi} \sim \widetilde{\psi}$.

Означення 2.3. Ступенем нечіткості $\rho(\widetilde{\varphi})$ відношення $\widetilde{\varphi} = (X,\ \widetilde{F})$ називається величина:

$$\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \mu(\widetilde{\varphi},\ \varphi),$$

де φ – носій нечіткого відношення $\widetilde{\varphi}$. З урахуванням попереднього виразу можемо записати:

$$\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \underset{(x_i, x_j) \in X^2}{\&} (\mu_{\widetilde{F}}<x_i, x_j> \leftrightarrow \mu_F<x_i, x_j>),$$

де $\mu_F<x_i, x_j> = \begin{cases} 1, \textit{якщо}(\mathrm{x_i}, x_j) \in F, \\ 0, \textit{якщо}(\mathrm{x_i}, x_j) \notin F. \end{cases}$

Якщо $\mu_{\widetilde{F}}<x_i, x_j> = 0$, то $(x_i, x_j) \notin F$, отже $\mu_F<x_i, x_j> = 0$. Звідси ступінь істинності висловлювання $\mu_{\widetilde{F}}<x_i, x_j> \leftrightarrow \mu_F<x_i, x_j>$ дорівнює 1. Тому в останньому виразі можемо замінити $\underset{(x_i, x_j) \in X^2}{\&}$ на $\underset{(x_i, x_j) \in F}{\&}$. Далі, оскільки для всіх $(x_i, x_j) \in F$ величина $\mu_{\widetilde{F}}<x_i, x_j> = 1$, то останній вираз можна переписати у вигляді:

$$\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \underset{(x_i, x_j)\in F}{\&} (\mu_{\widetilde{F}}<x_i, x_j> \leftrightarrow 1),$$

або остаточно

$$\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \underset{(x_i, x_j)\in F}{\&} \mu_{\widetilde{F}}<x_i, x_j>.$$

Для будь-якого відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ можна отримати єдине чітке відношення $\varphi_0 = (X,\ F_0)$ нечітко рівне або індиферентне $\widetilde{\varphi}$. Для цього графік F_0 треба будувати за такими правилами: $F_0 = \{<x_i, x_j> \in X^2\}$, $\mu_F<x_i, x_j>> 0{,}5$.

Для будь-якого чіткого відношення $\psi = (X, P)$ можна отримати не скінчено багато відношень $\widetilde{\psi}$, нечітко рівних або індиферентних відношенню ψ. Для отримання будь-якого з них достатньо всім парам $(x_i, x_j) \in P$ приписати значення функції належності більші за 0,5, а всім парам з $X^2 \backslash P$ – значення менші або рівні 0,5. З побудови нечітких відношень, які нечітко рівні відношенню $\psi = (X, P)$ і з Означення нечіткої рівності випливає, що всі отримані за ψ нечіткі відношення будуть нечітко рівні між собою або взаємно індиферентні.

Таким чином, нехай задано два нечітких відношення $\widetilde{\varphi} = (X,\ \widetilde{F})$ і $\widetilde{\psi} = (X, \widetilde{P})$. Побудуємо для них два чітких відношення $\varphi_0 = (X,\ F_0)$ і $\psi_0 = (X, P_0)$. При цьому можна стверджувати таке:

- якщо відношення φ_0 і ψ_0 є рівними, то нечіткі відношення $\widetilde{\varphi}$ і $\widetilde{\psi}$ теж будуть нечітко рівними або нечітко індиферентними;

- якщо відношення φ_0 і ψ_0 не є рівними, то нечіткі відношення $\widetilde{\varphi}$ і $\widetilde{\psi}$ теж будуть нечітко не рівними або нечітко індиферентними.

2.2 Операції над нечіткими відношеннями

Означення 2.4. Нехай $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$ – два нечітких відношення таких, що:

$$\forall (x, y) \in X\times Y\colon\ \mu_{R_1}(x, y) \times\ \mu_{R_2}(x, y).$$

Тоді кажуть, що $\widetilde{R}_2$ включає (містить) $\widetilde{R}_1$ або $\widetilde{R}_1$ включається до $\widetilde{R}_2$ ($\widetilde{R}_1$ міститься у $\widetilde{R}_2$).

Позначення: $\widetilde{R}_1 \subseteq \widetilde{R}_2$ – нечітке включення відношень.

Приклад 2.4. Нехай задано функції належності μ_{R_1} і μ_{R_2} нечітких відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$, відповідно:

$$\mu_{R_1}(x,y)=\begin{cases}0, & \textit{якщо } x>y;\\ 1-e^{k_1}(x-y)^2, & \textit{якщо } y\ge x.\end{cases}$$

$$\mu_{R_2}(x,y)=\begin{cases}0, & \textit{якщо } x>y;\\ 1-e^{k_2}(x-y)^2, & \textit{якщо } y\ge x.\end{cases}$$

Відношення $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$ є відношеннями типу $y >> x$ (y набагато більший за x). При $k_2 > k_1$ відношення $\widetilde{R}_2$ містить відношення $\widetilde{R}_1$.

Отож, для довільних нечітких відношень $\widetilde{\varphi}=(X,\widetilde{F})$ і $\widetilde{\psi}=(X,\widetilde{P})$, заданих на множині X, вважають, що відношення $\widetilde{\varphi}$ нечітко включається у відношення $\widetilde{\psi}$, якщо $\widetilde{F}\subseteq\widetilde{P}$, що позначається це як $\widetilde{\varphi}\subseteq\widetilde{\psi}$.

Означення 2.5. Об'єднанням нечітких відношень $\widetilde{\varphi}=(X,\widetilde{F})$ і $\widetilde{\psi}=(X,\widetilde{P})$ називається нечітке відношення $\widetilde{\eta}=(X,\widetilde{S})$, де $\widetilde{\eta}=\widetilde{\varphi}\cup\widetilde{\psi}$, $\widetilde{S}=\widetilde{F}\cup\widetilde{P}$. При цьому для будь яких $x_i,x_j\in X$ виконується

$$\mu_S<x_i,x_j>=\mu_F<x_i,x_j>\vee\ \mu_P<x_i,x_j>.$$

Позначення: $\widetilde{R}_1\cup\widetilde{R}_2$.

Приклад 2.5. На рисунку 2.4 наведені відношення дійсних чисел із таким змістом:

а) $x\widetilde{R}_1 y$ – «числа x і y дуже близькі»;

б) $x\widetilde{R}_2 y$ – «числа x і y дуже різні»;

в) об'єднання $x\widetilde{R}_1\cup\widetilde{R}_2 y$ – «числа x і y дуже близькі або дуже різні».

Функції належності відношень задані на $|y-x|$.

$$\mu_{R_1\cup R_2}(x,y)=\begin{matrix}\mu_{R_1}(x,y),|\,y-x\,|\le\alpha;\\ \mu_{R_2}(x,y),|\,y-x\,|>\alpha.\end{matrix}$$

де α – таке $|\,y-x\,|$, що $\mu_{R_1}(x,y)=\mu_{R_2}(x,y)$.

Приклад 2.6 На рис.2.5 наведений приклад аналітичного обчислення результату об'єднання нечітких відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$.

Означення 2.6 Перетином нечітких відношень $\widetilde{\varphi}=(X,\widetilde{F})$ і $\widetilde{\psi}=(X,\widetilde{P})$ називається нечітке відношення $\widetilde{\pi}=(X,\widetilde{U})$, де $\widetilde{\pi}=\widetilde{\varphi}\cap\widetilde{\psi}$, $\widetilde{U}=\widetilde{F}\cap\widetilde{P}$. При цьому для будь-яких $x_i,x_j\in X$ виконується

$$\mu_U<x_i,x_j>=\mu_F<x_i,x_j>\&\ \mu_P<x_i,x_j>.$$

Позначення: $\widetilde{R}_1\cap\widetilde{R}_2$.

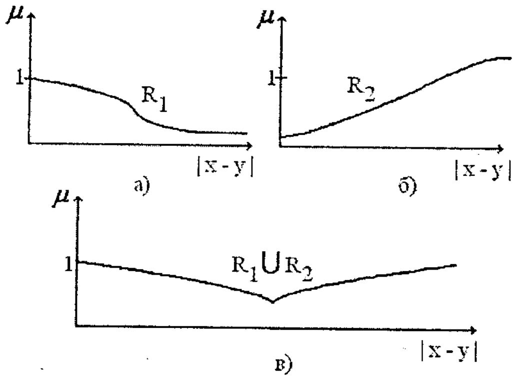


Рисунок 2.4 – Функції належності відношень: а) $x\widetilde{R}_1 y$ – «числа x і y дуже близькі»; б) $x\widetilde{R}_2 y$ – «числа x і y дуже різні»; в) об'єднання $x\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2 y$ – «числа x і y дуже близькі або дуже різні».

$$R_1 \cup R_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 0{,}1 & 0 & 0{,}8 \\ 1.0 & 0{,}7 & 0 \end{array}\right| \end{array} \cup \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 0{,}7 & 0{,}9 & 1{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 0{,}7 & 0{,}9 & 1{,}0 \\ 1{,}0 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{array}\right| \end{array}.$$

Рисунок 2.5 – Аналітичне обчислення результатів об'єднання нечітких відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$

Приклад 2.7. На рисунку 2.6 наведені відношення:

а) $x\widetilde{R}_1 y$ – «модуль різниці $|y-x|$ близький до α»;

б) $x\widetilde{R}_2 y$ – «модуль різниці $|y-x|$ близький до β»;

в) перетин $\widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2$.

Означення 2.7. Алгебраїчним добутком відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$ називається нечітке відношення $\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2$, яке визначається за формулою:

$$\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2 = \{<\mu_{R_1 \cdot R_2} <x,y>/ x,y>\}, x \in X, y \in Y.$$

де – $\mu_{R_1 \cdot R_2} <x,y> = \mu_{R_1} <x,y> \cdot \mu_{R_2} <x,y>.$

Позначення: $\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2$.

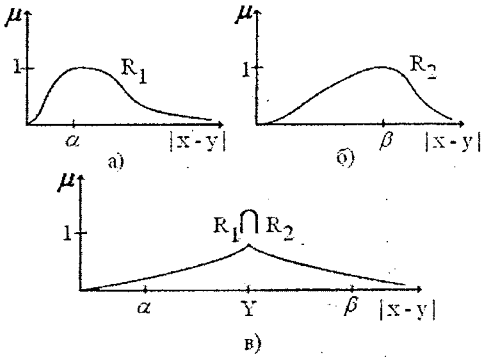


Рисунок 2.6 – Функції належності відношень: а) $x\widetilde{R}_1 y$ – «модуль різниці $|y-x|$ близький до α»; б) $x\widetilde{R}_2 y$ – «модуль різниці $|y-x|$ близький до β»; в) перетин $\widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2$.

Означення 2.8. Алгебраїчною сумою відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$ називається нечітке відношення $\widetilde{R}_1 \hat{+} \widetilde{R}_2$, яке визначається за формулою:

$$\widetilde{R}_1 \hat{+} \widetilde{R}_2 = \{<\mu_{R_1 \hat{+} R_2} <x, y>/\, x, y>\},\ x\in X,\ y\in Y.$$

де – $\mu_{R_1 \hat{+} R_2} <x, y> = \mu_{R_1} <x, y> + \mu_{R_2} <x, y> - \mu_{R_1} <x, y> \cdot \mu_{R_2} <x, y>$.

Позначення: $\widetilde{R}_1 \hat{+} \widetilde{R}_2$.

Для наведених операцій виконуються такі властивості дистрибутивності:

$$\widetilde{R}_1 \cap (\widetilde{R}_2 \cup \widetilde{R}_3) = (\widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2) \cup (\widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_3);$$

$$\widetilde{R}_1 \cup (\widetilde{R}_2 \cap \widetilde{R}_3) = (\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2) \cap (\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_3);$$

$$\widetilde{R}_1 \cdot (\widetilde{R}_2 \cup \widetilde{R}_3) = (\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2) \cup (\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_3);$$

$$\widetilde{R}_1 \cdot (\widetilde{R}_2 \cap \widetilde{R}_3) = (\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_2) \cap (\widetilde{R}_1 \cdot \widetilde{R}_3);$$

$$\widetilde{R}_1 \hat{+} (\widetilde{R}_2 \cup \widetilde{R}_3) = (\widetilde{R}_1 \hat{+} \widetilde{R}_2) \cup (\widetilde{R}_1 \hat{+} \widetilde{R}_3);$$

$$\widetilde{R}_1 \hat{+} (\widetilde{R}_2 \cap \widetilde{R}_3) = (\widetilde{R}_1 \hat{+} \widetilde{R}_2) \cap (\widetilde{R}_1 \hat{+} \widetilde{R}_3).$$

Означення 2.9. Доповненням відношення $\widetilde{R}$ називається нечітке відношення $\neg \widetilde{R}$, яке визначається за формулою:

$$\neg \widetilde{R} = \{<\mu_{\neg R} <x, y>/\, x, y>\},\ x \in X,\ y \in Y.$$

де – $\mu_{\neg R} <x, y> = 1 - \mu_R <x, y>$.

Позначення: $\neg \widetilde{R}$.

Означення 2.10. Інверсією відношення $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$ називається нечітке відношення $\tilde{\varphi}^{-1} = (X, \tilde{F}^{-1})$ таке, що нечіткий графік $\tilde{F}^{-1}$ є інверсією графіка $\tilde{F}$. При цьому для будь-яких x_i, $x_j \in X$ виконується $\mu_{F^{-1}} < x_i, x_j > = \mu_F < x_i, x_j >$.

Позначення: $\tilde{R}^{-1}$.

Означення 2.11. Диз'юнктивною сумою двох відношень $\tilde{R}_1$ і $\tilde{R}_2$ називається нечітке відношення $\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2$, яке визначається за формулою:

$$\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2 = (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2) \cup (\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2).$$

Позначення: $\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2$.

Означення 2.12. Звичайним відношенням, найближчим до нечіткого відношення $\tilde{R}$, називається нечітке відношення $\underline{R}$, яке визначається за формулою:

$$\underline{R} = \{\leq \mu_{\underline{R}} < x, y > / x, y >\}, \; x \in X, \; y \in Y,$$

де $- \; \mu_R < x, y > = \begin{cases} 0, & якщо \; \mu_R(x, y) < 0{,}5; \\ 1, & якщо \; \mu_R(x, y) > 0{,}5; \\ 0 \; або \; 1, & якщо \; \mu_R(x, y) = 0{,}5. \end{cases}$

За домовленістю приймають $\mu_{\underline{R}} < x, y > = 0$ при $\mu_R < x, y > = 0{,}5$.

Позначення: $\underline{R}$.

Означення 2.13. Звичайною підмножиною α-рівня нечіткого відношення $\tilde{R}$ називається чітке (звичайне) відношення R_α, яке визначається за формулою:

$$R_\alpha = \{< \mu_R < x, y > / x, y >\}, \; x \in X, \; y \in Y$$

де $\mu_R < x, y > = \begin{cases} 1, \; якщо \; \mu_R(x, y) \geq \alpha; \\ 0, \; якщо \; \mu_R(x, y) < \alpha. \end{cases}$

Очевидно, що з $\alpha_1 \leq \alpha_2$ випливає $\tilde{R}_{\alpha_1} \geq \tilde{R}_{\alpha_2}$.

Позначення: R_α.

Нагадаємо, що існує теорема (теорема декомпозиції), яка стверджує, що будь-яке нечітке відношення $\tilde{R}$ може бути подано у вигляді:

$$\tilde{R} = \bigcup_{\alpha} \; \alpha \cdot R_\alpha, \; 0 < \alpha \leq 1,$$

де $\alpha \cdot R_\alpha$ означає, що всі елементи R_x множаться на x.

2.3 Проекції нечіткого відношення

Нехай $\tilde{R}$ – нечітке відношення

$$\tilde{R} : (x, y) \rightarrow [0; 1].$$

Означення 2.14. Першою проекцією $\widetilde{R}_1^{'}$ відношення $\widetilde{R}$ (проекція на X), називається нечітка множина $\widetilde{R}_1^{'}$, задана на множині X, з функцією належності:

$$\mu_{R_1^{'}}(x) = \underset{y}{\vee}\, \mu_R\,(x, y).$$

Означення 2.15. Аналогічно, другою проекцією $\widetilde{R}_2^{'}$ відношення $\widetilde{R}$ (проекція на Y), називається нечітка множина $\widetilde{R}_2^{'}$, задана на множині Y, з функцією належності:

$$\mu_{R_2^{'}}(y) = \underset{x}{\vee}\, \mu_R\,(x, y).$$

Величина

$$h(R) = \underset{x}{\vee}\, \mu_{R_1^{'}}(x) = \underset{y}{\vee}\, \mu_{R_2^{'}}(x)$$

називається глобальною проекцією відношення $\widetilde{R}$. Якщо $h(R) = 1$, то відношення $\widetilde{R}$ є нормальним, в іншому випадку – субнормальним.

Приклад 2.8. Нехай задано нечітке відношення $\widetilde{R}$:

$$\widetilde{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0{,}1 & 0{,}2 & 1 & 0{,}3 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 1 & 0{,}3 \end{array} \right\| \end{array}$$

Проекції відношення $\widetilde{R}$ будуть мати такий вигляд:

$$\widetilde{R}_1^{'} = \begin{array}{cc} x_1 & 1 \\ x_2 & 0{,}9 \\ x_3 & 1 \end{array} \qquad \widetilde{R}_2^{'} = \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 0{,}9 & 0{,}2 & 1 & 1 & 0{,}9 \end{array}$$

Проекції $\widetilde{R}_1^{'}$ і $\widetilde{R}_2^{'}$ нечіткого відношення XRY у свою чергу визначають в $X \times Y$ нечіткі відношення $\hat{R}_1^{'}$ і $\hat{R}_2^{'}$ з функціями належності:

$$\mu_{\hat{R}_1}(x, y) = \mu_{R_1^{'}}(x) \text{ при будь-якому } y;$$

$$\mu_{\hat{R}_2}(x, y) = \mu_{R_2^{'}}(y) \text{ при будь-якому } x,$$

які називаються, відповідно, циліндричним продовженням $\widetilde{R}_1^{'}$ і циліндричним продовженням $\widetilde{R}_2^{'}$.

Приклад 2.9. Повернемося до нечіткого відношення $\widetilde{R}$ з прикладу 2.8:

$$\widetilde{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0{,}1 & 0{,}2 & 1 & 0{,}3 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 1 & 0{,}3 \end{array} \right\| \end{array}$$

Для значень проекцій $\widetilde{R}_1'$ і $\widetilde{R}_2'$ отримаємо, відповідно:

$$\widetilde{R}_1' = \begin{array}{cc} x_1 & 1 \\ x_2 & 0,9 \\ x_3 & 1 \end{array} . \qquad \hat{R}_1' = \begin{array}{c|ccccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\widetilde{R}_2' = \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 0,9 & 0,2 & 1 & 1 & 0,9 \end{array} \qquad \hat{R}_2' = \begin{array}{c|ccccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & 0,9 & 0,2 & 1 & 1 & 0,9 \\ x_2 & 0,9 & 0,2 & 1 & 1 & 0,9 \\ x_3 & 0,9 & 0,2 & 1 & 1 & 0,9 \end{array}$$

Якщо нечітке відношення XRY дорівнює перетину циліндричних продовжень своїх проекцій, тобто, якщо виконується

$$\widetilde{R} = \hat{R}_1' \cap \hat{R}_2' \ (\mu_R \ (x, y) = \mu_{R_1'}(x) \cap \mu_{R_2'}(y)),$$

то таке відношення називається сепарабельним.

Зауважимо, що нечітке відношення XRY завжди буде сепарабельним, якщо воно є декартовим добутком своїх проекцій, тобто якщо виконується

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}_1' \times \widetilde{R}_2'.$$

Приклад 2.10. Для нечіткого відношення $\widetilde{R}$ з прикладу 2.8 перетин циліндричних продовжень його проекцій складе:

$$\hat{R}_1' \cap \hat{R}_2' = \begin{array}{c|ccccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & 0,9 & 0,2 & 1 & 1 & 0,9 \\ x_2 & 0,9 & 0,2 & 0,9 & 0,9 & 0,9 \\ x_3 & 0,9 & 0,2 & 1 & 1 & 0,9 \end{array}$$

Отже, вихідне відношення $\widetilde{R}$ є несепарабельним.

2.4 Композиція нечітких відношень

Означення 2.16. Мінімаксною (min – max) – композицією відношень $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ і $\widetilde{\psi} = (X, \widetilde{P})$ називається нечітке відношення $\widetilde{\kappa} = (X, \widetilde{V})$, де $\widetilde{\kappa} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$, $\widetilde{V} = \widetilde{F} \circ \widetilde{P}$. При цьому для будь-яких x_i, x_j, $x_k \in X$ виконується $\mu_V <x_i, x_j> = \bigvee_{x_k} (\mu_F <x_i, x_k> \& \ \mu_P <x_k, x_j>)$.

Відповідно якщо $\widetilde{R}_1$ є нечітким відношенням між X і Y:

$$\widetilde{R}_1 : (X \times Y) \to [0; 1],$$

$$\widetilde{R}_1 = \{<\mu_{R_1} <x, y>/<x, y>>\}, (x, y) \in X \times Y,$$

і $\widetilde{R}_2$ є нечітким відношенням між Y і Z:

$$\widetilde{R}_2 : (Y \times Z) \to [0;\ 1],$$
$$\widetilde{R}_2 = \{<\mu_{R_2} <y, z>/<y, z>>\},\ (y, z) \in Y \times Z,$$

то max-min – композицією $\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2$ вихідних відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$ буде називатися нечітке відношення між X і Z, яке визначається за формулою:

$$\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2 = \{<\mu_{R_1 \circ R_2} <x, z>/<x, z>>\},\ (x, z) \in X \times Z,$$

де $\mu_{R_1 \circ R_2} <x, z> = \bigvee_{y \in Y} (\mu_{R_1} <x, y> \wedge \mu_{R_2} <y, z>),\ x \in X, y \in Y, z \in Z.$

Позначення: $\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2$.

Приклад 2.11. Розглянемо приклад аналітичного обчислення результату композиції нечітких відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$:

$$\begin{array}{c|ccc|} \mathbf{R}_1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ x_2 & 1 & 0{,}5 & 0 \end{array} \circ \begin{array}{c|cccc|} \mathbf{R}_2 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & 0{,}9 & 0 & 1 & 0{,}2 \\ y_2 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0 & 0{,}9 \\ y_3 & 0{,}1 & 1 & 0 & 0{,}5 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|} \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ x_1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ x_2 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{array}$$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1) = [\mu_{R_1}(x_1, y_1) \wedge \mu_{R_2}(y_1, z_1)] \vee [\mu_{R_1}(x_1, y_2) \wedge \mu_{R_2}(y_2, z_1)] \vee \vee [\mu_{R_1}(x_1, y_3) \wedge \mu_{R_2}(y_3, z_1)] = (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}4 \wedge 0{,}1) = = 0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}3;$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_2) = (0{,}1 \wedge 0) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}6) \vee (0{,}4 \wedge 1) = 0 \vee 0{,}6 \vee 0{,}4 = 0{,}6;$

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_3) = 0{,}1;$

....

....

$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_4) = 0{,}5.$

У даному прикладі використано «аналітичний» спосіб композиції відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$, тобто i-й рядок $\widetilde{R}_1$ «множиться» на j-й стовпець $\widetilde{R}_2$ з використанням операції кон'юнкції, а отриманий результат «згортається» з використанням операції диз'юнкції у $\mu(x_i, z_j)$.

На рисунку 2.7 наведені графи, що відповідають відношенням $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$, а на рисунку 2.8 ті ж графи, склеєні по Y. В отриманому графі розглядаються усі шляхи від x_i до z_j і кожному з них ставиться у відповідність мінімальна з «ваг», що зустрічається на цьому шляху. Далі визначається максимальна вага по усіх шляхах з x_i до z_j, яка й приймається за значення $\mu(x_i, z_j)$.

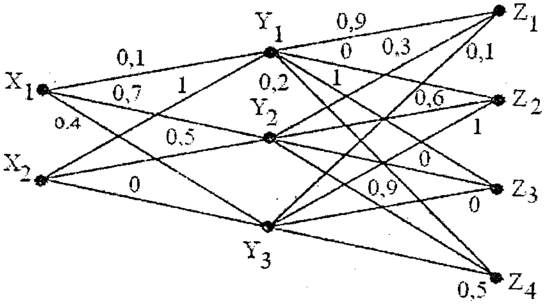


Рисунок 2.7 – Графи відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$, склеєні по Y

Результуючий граф відношення $\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2$ наведений на рисунку 2.8.

Основними властивостями (max-min) – композиції є такі:
асоціативність – $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$;
дистрибутивність відносно об'єднання – $R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1)$;
дистрибутивність відносно перетину – $R_3 \circ (R_2 \cap R_1) = (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1)$.

Крім того (max-min) – композиції характерна така важлива властивість:

$$\text{якщо } R1 \subset R2, \text{ то } R2 \circ R1 \subset R1 \circ R2.$$

У виразі

$$\mu_{R_1 \circ R_2} < x, z > = \bigvee_{y \in Y} (\mu_{R_1} < x, y > \wedge \mu_{R_2} < y, z >)$$

для (max-min) – композиції відношень $\widetilde{R}_1$ і $\widetilde{R}_2$ операцію $\wedge$ можна замінити будь-якою іншою, для якої виконуються ті ж самі обмеження, що й для $\wedge$: асоціативність і монотонність (у понятті не зменшення) по кожному аргументові. Тобто, можна записати:

$$\mu_{R_1 \circ R_2} < x, z > = \bigvee_{y \in Y} (\mu_{R_1} < x, y > * \mu_{R_2} < y, z >),$$

де $*$ – знак відповідної операції.

Зокрема, операція $\wedge$ може бути замінена алгебраїчним множенням, при цьому кажуть про (max-min) – композицію.

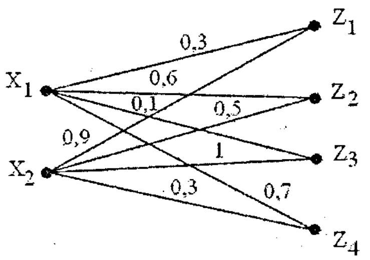


Рисунок 2.8 – Результуючий граф відношення $\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2$

2.5 Основні властивості нечітких відношень

На прикладі відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ розглянемо характерні для нечітких відношень властивості, сукупність яких дозволяє визначати різні типи відношень. До таких властивостей відносяться нечіткі рефлексивність і антирефлексивність, нечіткі симетричність і антисиметричність, нечітка транзитивність і нечітка зв'язаність.

Означення 2.17. Чітке відношення R називається рефлексивним, якщо для будь-якого $a \in M$ виконується $a\,R\,a$. Тобто, головна діагональ матриці такого відношення завжди містить одиниці.

Означення 2.18. Відношення R називається антирефлексивним, якщо ні для якого $a \in M$ не виконується $a\,R\,a$. Головна діагональ матриці такого відношення містить тільки нулі.

Прикладами рефлексивних відношень є – « $\leq$ », «мати спільний дільник», антирефлексивних – «<», «бути сином». Відношення «бути симетричним відносно осі X» не є ні рефлексивним, а ні антирефлексивним, оскільки точка площини симетрична сама собі, якщо вона розташована на осі X і несиметрична сама собі в іншому випадку.

Ступінь рефлексивності $\alpha(\widetilde{\varphi})_{ref}$ нечіткого відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ визначається за формулою:

$$\alpha(\widetilde{\varphi})_{ref} = \underset{x \in X}{\&} \mu_F < x, x >.$$

Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко рефлексивним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{ref} \geq 0{,}5$. Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко нерефлексивним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{ref} \leq 0{,}5$. Якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{ref} = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ називається рефлексивно індиферентним.

Ступінь антирефлексивності $\beta(\widetilde{\varphi})_{ref}$ нечіткого відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ визначається за формулою:

$$\beta(\widetilde{\varphi})_{ref} = \underset{x \in X}{\&} (\neg\, \mu_F < x, x >).$$

або, з урахуванням законів де Моргана:

$$\beta(\widetilde{\varphi})_{ref} = \neg(\underset{x \in X}{\vee} \mu_F < x, x >).$$

Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко антирефлексивним, якщо $\beta(\widetilde{\varphi})_{ref} \geq 0{,}5$. Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко неантирефлексивним, якщо $\beta(\widetilde{\varphi})_{ref} \leq 0{,}5$. Якщо $\beta(\widetilde{\varphi})_{ref} = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ антирефлексивно індиферентне.

В загальному випадку, якщо відношення $\widetilde{\varphi}$ рефлексивно індиферентне, воно не обов'язково має бути антирефлексивно індиферентне і навпаки.

Приклад 2.12. Нехай задані нечіткі відношення

$$\widetilde{\varphi}_1 = (X_1, \widetilde{F}_1) \text{ і } \widetilde{\varphi}_2 = (X_2, \widetilde{F}_2),$$

наведені на рисунку 2.9. Знайдемо для цих відношень значення $\alpha(\widetilde{\varphi})_{ref}$ і $\beta(\widetilde{\varphi})_{ref}$. Отримаємо: $\alpha(\widetilde{\varphi}_1)_{ref} = 0{,}6$; $\beta(\widetilde{\varphi}_1)_{ref} = 0$; $\alpha(\widetilde{\varphi}_2)_{ref} = 0{,}2$; $\beta(\widetilde{\varphi}_2)_{ref} = 0{,}6$. Отже, відношення $\widetilde{\varphi}_1$ нечітко рефлексивне, а відношення $\widetilde{\varphi}_2$ – нечітко антирефлексивне.

Означення 2.19. Відношення R називається симетричним, якщо для будь-якої пари з $(a, b) \in M^2$ з $a\,R\,b$ випливає $b\,R\,a$ (тобто, для будь-якої пари R або виконується в обох напрямках, або не виконується взагалі). Матриця симетричного відношення завжди симетрична відносно своєї головної діагоналі).

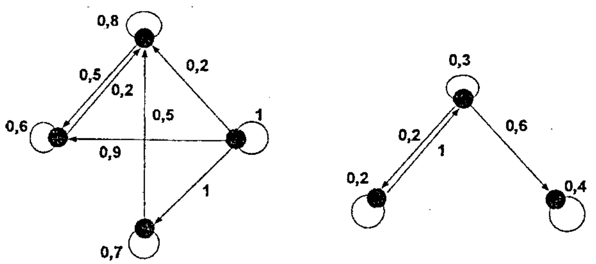


Рисунок 2.9 – Графи відношень $\widetilde{\varphi}_1$ і $\widetilde{\varphi}_2$ з прикладу 2.12

Означення 2.20. Відношення R називається антисиметричним, якщо з $a\,R\,b$ і $b\,R\,a$ випливає, що $a = b$. Відношення «бути симетричним відносно осі X» є симетричним. Антисиметричним є відношення $\leq$. Дійсно, якщо $a \leq b$ і $b \leq a$, то має місце $a = b$.

Ступінь симетричності $\alpha(\widetilde{\varphi})_{sym}$ нечіткого відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ визначається за формулою:

$$\alpha(\widetilde{\varphi})_{sym} = \underset{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}}{\&} (\mu_F < x, y > \leftrightarrow \mu_F < y, x >).$$

Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко симетричним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{sym} \geq 0{,}5$. Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко несиметричним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{sym} \leq 0{,}5$. Якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{sym} = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ називається симетрично індиферентним.

Ступінь антисиметричності $\beta(\widetilde{\varphi})_{sym}$ нечіткого відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ визначається за формулою:

$$\beta(\widetilde{\varphi})_{sym} = \underset{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}}{\&} \neg(\mu_F < x, y > \leftrightarrow \mu_F < y, x >).$$

Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко антисиметричним, якщо $\beta(\widetilde{\varphi})_{sym} \geq 0{,}5$. Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко неантисиметричним, якщо $\beta(\widetilde{\varphi})_{sym} \leq 0{,}5$. Якщо $\beta(\widetilde{\varphi})_{sym} = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ називається антисиметрично індиферентним. В загальному випадку, якщо відношення $\widetilde{\varphi}$ симетрично індиферентне, воно не обов'язково має бути антисиметрично індиферентне і навпаки.

Приклад 2.13. Нехай задані нечіткі відношення

$$\widetilde{\varphi}_1 = (X_1, \widetilde{F}_1) \text{ і } \widetilde{\varphi}_2 = (X_2, \widetilde{F}_2),$$

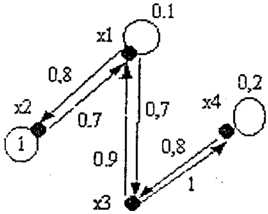
наведені на рисунку 2.10. Знайдемо для цих відношень значення $\alpha(\widetilde{\varphi})_{sym}$ і $\beta(\widetilde{\varphi})_{sym}$. Отримаємо: $\alpha(\widetilde{\varphi}_1)_{sym} = 0{,}7$; $\beta(\widetilde{\varphi}_1)_{sym} = 0{,}2$; $\alpha(\widetilde{\varphi}_2)_{sym} = 0{,}1$; $\beta(\widetilde{\varphi}_2)_{sym} = 0{,}6$. Отже, відношення $\widetilde{\varphi}_1$ нечітко симетричне, а відношення $\widetilde{\varphi}_2$ – нечітко антисиметричне.

Визначимо поняття нечіткої транзитивності і зв'язаності відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$

Означення 2.21. Відношення називається транзитивним, якщо для будь-яких a, b і c з $a R b$ і $b R c$ випливає $a R c$.

Наприклад, транзитивними є відношення «дорівнює», $\leq$, «жити в одному місті». Нетранзитивними є відношення: «бути сином», «перетинатись» і т. ін.

Означення 2.22. Транзитивним замкненням R називається відношення $R^\wedge$, яке визначається згідно з таким правилом: $a R^\wedge b$, якщо в М існує ланцюжок з n елементів, $a = a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = b$, в якому між сусідніми елементами виконується $a R a_1, a_1 R a_2, \ldots, a_{n-1} R b$.



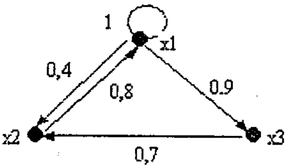


Рисунок 2.10 – Графи відношень $\widetilde{\varphi}_1$ і $\widetilde{\varphi}_2$ з прикладу 2.13

Наприклад, транзитивним замкненням відношення «бути сином» є відношення «бути прямим нащадком», яке є об'єднанням відношень «бути сином», «бути внуком», «бути правнуком» і т. ін. Транзитивним замкненням відношення «мати спільну стіну» для жильців одного будинку є відношення «жити на одному поверсі».

Ступінь транзитивності $\alpha(\widetilde{\varphi})_{tr}$ нечіткого відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ визначається за формулою:

$$\alpha(\widetilde{\varphi})_{tr} = \underset{\substack{x,y,z\in X \\ x\neq y, e\neq z, x\neq z}}{\&} ((\underset{y}{\vee}(\mu_F < x,y > \& \ \mu_F < y,z >)) \rightarrow \mu_F < x,z >).$$

Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко транзитивним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{tr} \geq 0{,}5$. Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко нетранзитивним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{tr} \leq 0{,}5$. Якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{tr} = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ називається транзитивно індиферентним.

Ступінь зв'язаності $\alpha(\widetilde{\varphi})_{con}$ нечіткого відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ визначається за формулою:

$$\alpha(\widetilde{\varphi})_{con} = \underset{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}}{\&} \neg(\mu_F < x,y > \vee \ \mu_F < y,x >).$$

Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко зв'язаним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{con} \geq 0{,}5$. Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечітко незв'язаним, якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{con} \leq 0{,}5$. Якщо $\alpha(\widetilde{\varphi})_{con} = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ називається індиферентним відносно зв'язаності.

Приклад 2.14. Нехай задані нечіткі відношення

$$\widetilde{\varphi}_1 = (X_1, \widetilde{F}_1) \text{ і } \widetilde{\varphi}_2 = (X_2, \widetilde{F}_2),$$

наведені на рисунку 2.11. Знайдемо для цих відношень значення $\alpha(\widetilde{\varphi})_{tr}$ і $\alpha(\widetilde{\varphi})_{con}$. Отримаємо: $\alpha(\widetilde{\varphi}_1)_{tr} = 0{,}7$; $\alpha(\widetilde{\varphi}_1)_{con} = 0{,}2$; $\alpha(\widetilde{\varphi}_2)_{tr} = 0{,}1$; $\alpha(\widetilde{\varphi}_2)_{con} = 0{,}8$.

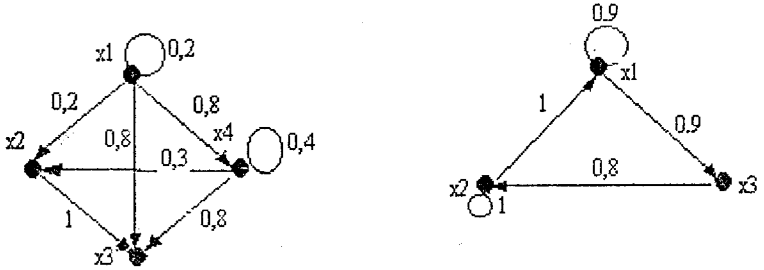


Рисунок 2.11 – Графи відношень $\widetilde{\varphi}_1$ і $\widetilde{\varphi}_2$ з прикладу 2.14

Отже, відношення $\widetilde{\varphi}_1$ нечітко транзитивне і нечітко незв'язане, а відношення $\widetilde{\varphi}_2$ – нечітко нетранзитивне, але нечітко зв'язане.

Розглянуті властивості називають основними властивостями нечітких відношень. Будь-яке нечітке відношення має певну сукупність таких властивостей. Різні сукупності властивостей визначають різні види нечітких відношень.

2.6 Види нечітких відношень

Означення 2.22. Відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ називається відношенням нечіткої еквівалентності, якщо воно нечітко рефлексивне, симетричне і транзитивне. Тобто, відношення $\widetilde{\varphi}$ є нечіткою еквівалентністю, якщо ступінь еквівалентності $\eta(\widetilde{\varphi})$ задовольняє умову:

$$\eta(\widetilde{\varphi}) = \alpha(\widetilde{\varphi})_{ref} \& \alpha(\widetilde{\varphi})_{sym} \& \alpha(\widetilde{\varphi})_{tr} \geq 0,5.$$

Відношення $\widetilde{\varphi}$ називається нечіткою еквівалентністю, якщо $\eta(\widetilde{\varphi}) \geq 0,5$. Якщо $\eta(\widetilde{\varphi}) \leq 0,5$, то $\widetilde{\varphi}$ не є нечіткою еквівалентністю. Якщо $\eta(\widetilde{\varphi}) = 0,5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ називається індиферентним відносно еквівалентності.

Нехай $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ – нечітка еквівалентність на множині X. Елементи $x, y \in X$ називають нечітко еквівалентними, якщо виконується $\mu_F(x, y) \geq 0,5$. Прикладами нечіткої еквівалентності є нечіткі відношення «бути приблизно одного кольору» на множині речей, «мати приблизно однакові інтереси» – на множині людей і т. ін.

Означення 2.23. Відношення $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$ на множині X і розбиття $\Re$ множини X називають нечітко спряженими, якщо ступінь спряженості $\sigma(\widetilde{\varphi}, \Re)$ задовольняє умову:

$$\sigma(\widetilde{\varphi}, \Re) = \underset{x,y \in X}{\&} (\mu_F < x, y > \leftrightarrow \bigvee_{\widetilde{A} \in \Re} (\mu_A(\text{x})) \& \mu_A(\text{y}))) \geq 0,5.$$

Якщо $\sigma(\widetilde{\varphi}, \Re) \leq 0,5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ і розбиття $\Re$ нечітко не спряжені. Якщо $\sigma(\widetilde{\varphi}, \Re) = 0,5$, то відношення $\widetilde{\varphi}$ і розбиття $\Re$

індиферентні відносно спряженості. З наведеного Означення випливає, що з кожним відношенням нечіткої еквівалентності спряжено нескінченно багато нечітких розбиттів, нечітко рівних або індиферентних одне одному.

Розбиття $\Re$, яке нечітко спряжене з відношенням еквівалентності, називається нечіткою фактор-множиною множини X по відношенню $\widetilde{\varphi}$ і позначається як $X / \widetilde{\varphi}$.

Для будь-якого розбиття $\Re$, спряженого з відношенням еквівалентності $\widetilde{\varphi}$ виконується співвідношення:

$$\sigma(\widetilde{\varphi}, \Re) \leq \eta(\widetilde{\varphi})$$

При цьому рівність може бути досягнута, якщо розбиття $\Re$ будувати відносно $\widetilde{\varphi}$ за такими правилами. Для кожного $x \in X$ необхідно отримати нечітку множину

$$\widetilde{A}(x) = \{<\mu_{A(x)}(y) / y>\}, y \in X, \text{де } \mu_{A(x)}(y) = \mu_F<x, y>.$$

Інакше кажучи, множина $\widetilde{A}(x)$ є образом елемента $x \in X$ при відношенні $\widetilde{\varphi}$. Якщо виконується $\widetilde{A}(x) \approx \widetilde{A}(y)$, або $\widetilde{A}(x)$ індиферентно $\widetilde{A}(y)$, то елементи x і y входять до одного класу $\widetilde{A}(x) \cup \widetilde{A}(y)$.

Отримана в такий спосіб система нечітких класів є нечітким розбиттям і називається канонічною фактор-множиною множини X відносно $\widetilde{\varphi}$. Для побудови неканонічного розбиття $\Re$, спряженого з відношенням нечіткої еквівалентності $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$, достатньо один чи кілька класів канонічного розбиття замінити на нечітко рівні їм нечіткі множини в X.

Означення 2.24. Висотою $h(\widetilde{A})$ класу $\widetilde{A}$ називається величина $h(\widetilde{A}) = \max\limits_{x \in X} \mu_A(x)$. Висота перетину двох будь-яких класів $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{A}_j$ розбиття $\Re$, спряженого з відношенням нечіткої еквівалентності $\widetilde{\varphi} = (X, \widetilde{F})$, не перевищує величину $1 - \eta(\widetilde{\varphi})$.

Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що для деяких $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{A}_j$ виконується $h(\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j) > 1 - \eta(\widetilde{\varphi})$. З побудови розбиття $\Re$ і Означення перетину нечітких множин випливає існування такого $z \in X$, що $\mu_F(z, x_i)$ більше за $1 - \eta(\widetilde{\varphi})$ і $\mu_F(x_j, z)$ більше за $1 - \eta(\widetilde{\varphi})$. Оскільки відношення $\widetilde{\varphi}$ є нечіткою еквівалентністю, то ступінь його транзитивності $\alpha(\widetilde{\varphi})_{tr} \geq \eta(\widetilde{\varphi})$. Отже, отримуємо:

$$(\mu_F(x_i, z) \,\&\, \mu_F(z, x_j)) \rightarrow \mu_F(x_i, x_j) \geq \eta(\widetilde{\varphi}).$$

Розкриємо імплікацію і застосуємо правило де Моргана:

$$(1 - \mu_F(x_i, z)) \vee (1 - \mu_F(z, x_j)) \vee \mu_F(x_i, x_j) \geq \eta(\widetilde{\varphi}).$$

Величина $\mu_F(x_i,\ x_j) < \eta(\widetilde{\varphi})$, оскільки елементи x_i і x_j породжують різні класи розбиття $\widetilde{A}_i$ і $\widetilde{A}_j$ нечіткого розбиття $\Re$, отже $\mu_F(\widetilde{A}_i, \widetilde{A}_j) \le 0{,}5$. Звідси випливає, що повинна виконуватися умова:

$$(1 - \mu_F(x_i, z)) \ge \eta(\widetilde{\varphi}) \text{ або } (1 - \mu_F(z,\ x_j)) \ge \eta(\widetilde{\varphi}).$$

Взявши доповнення до обох частин першої нерівності отримаємо:

$$\mu_F(x_i, z) \le 1 - \eta(\widetilde{\varphi}),$$

що суперечить початковому припущенню.

Розглянемо другу нерівність. Оскільки відношення $\widetilde{\varphi}$ є нечіткою еквівалентністю, то ступінь його симетричності $\alpha(\widetilde{\varphi})_{sym} \ge \eta(\widetilde{\varphi})$. Розкривши імплікацію у формулі ступеня симетричності отримуємо:

$$((1 - \mu_F(z,\ x_j)) \vee \mu_F(x_i, z)) \ge \eta(\widetilde{\varphi})$$
$$\text{і } ((1 - \mu_F(x_j, z)) \vee \mu_F(z,\ x_i)) \ge \eta(\widetilde{\varphi}).$$

Отже, якщо виконується умова $(1 - \mu_F(z,\ x_j)) \ge \eta(\widetilde{\varphi})$, то $\mu_F(z,\ x_j) \le \eta(\widetilde{\varphi})$, звідки отримуємо $(1 - \mu_F(x_j, \mathrm{z})) \ge \eta(\widetilde{\varphi})$.

Взявши доповнення до обох частин першої нерівності отримаємо:

$$\mu_F(x_i, z) \le 1 - \eta(\widetilde{\varphi}),$$

що суперечить початковому припущенню. Теорему доведено.

З теореми випливає, що чим вищий ступінь еквівалентності відношення $\widetilde{\varphi}$, тобто чим ближче воно до відношення чіткої еквівалентності, тем меншим є ступінь одночасної належності елементів вихідної множини різним класам розбиття $\Re$, спряженого з $\widetilde{\varphi}$.

Приклад 2.15. Нехай є нечітке відношення $\widetilde{\varphi} = (X,\ \widetilde{F})$. на множині людей $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$, яке відображає суб'єктивну залежність між ними. Наприклад, ступінь самоповаги та взаємоповаги в деякому колективі. Нехай нечіткий графік $\widetilde{F}$ такого відношення має вигляд:

$\widetilde{F} = \{<0{,}9/<x_1,\ x_1>>, <0{,}3/<x_1,\ x_3>>, <0{,}7/<x_1,\ x_4>>, <0{,}8/<x_2,\ x_2>>, <0{,}3/<x_2,\ x_5>>, <0{,}8/<x_3,\ x_3>>, <0{,}2/<x_3,\ x_4>>, <0{,}8/<x_3,\ x_5>>, <0{,}7/<x_4,\ x_1>>, <0{,}3/<x_4,\ x_2>>, <0{,}7/<x_4,\ x_4>>, <0{,}2/<x_4,\ x_5>>, <0{,}3/<x_5,\ x_1>>, <0{,}7/<x_5,\ x_3>>, <1{,}0/<x_5,\ x_5>>\}$.

Ступінь нечіткості даного відношення складає $\rho(\widetilde{\varphi}) = 0{,}7$. Величина $\eta(\widetilde{\varphi})$, що визначається як кон'юнкція ступенів рефлексивності, симетричності та транзитивності дорівнює 0,7. Тобто, дане відношення є еквівалентністю.

Визначимо канонічне розбиття $\Re$ відносно $\widetilde{\varphi}$. Для цього побудуємо класи нечіткого розбиття як образи елементів x при відношенні $\widetilde{\varphi}$. Отримаємо:

$$\widetilde{A}(x_1) \approx \{<0{,}9/x_1>, <0{,}3/x_3>, <0{,}7/x_4>\};$$

$$\widetilde{A}(x_2) \approx \{<0{,}8/x_2>, <0{,}3/x_5>\};$$
$$\widetilde{A}(x_3) \approx \{<0{,}8/x_3>, <0{,}2/x_4>, <0{,}8/x_5>\};$$
$$\widetilde{A}(x_4) \approx \{<0{,}7/x_1>, <0{,}3/x_2>, <0{,}7/x_4>, <0{,}2/x_5>\};$$
$$\widetilde{A}(x_5) \approx \{<0{,}3/x_1>, <0{,}7/x_3>, <1{,}0/x_5>\}.$$

Неважко встановити, що $\widetilde{A}(x_1) \approx \widetilde{A}(x_4)$, $\widetilde{A}(x_3) \approx \widetilde{A}(x_5)$.

Тобто, отримуємо:

$$\Re = \{\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3\}.$$
$$\widetilde{A}_1 \approx \widetilde{A}(x_1) \cup \widetilde{A}(x_4) \approx \{<0{,}9/x_1>, <0{,}3/x_2>, <0{,}3/x_3>, <0{,}7/x_4>\};$$
$$\widetilde{A}_2 \approx \{<0{,}8/x_2>, <0{,}3/x_5>\};$$
$$\widetilde{A}_3 \approx \widetilde{A}(x_3) \cup \widetilde{A}(x_5) \approx \{<0{,}3/x_1>, <0{,}8/x_3>, <0{,}2/x_4>, <1{,}08/x_5>\}.$$

В даному випадку маємо $\sigma(\widetilde{\varphi}, \Re) \approx \eta(\widetilde{\varphi}) \approx 0{,}7$.

Результати показують, що в розглянутому колективі існують три групи. Значення $\mu_A(x)$ в даному випадку характеризують ступінь поваги до особи x в групі $\widetilde{A}_i$. Наприклад, особу x_1 дуже поважають в групі $\widetilde{A}_1$, мало поважають в групі $\widetilde{A}_3$ і зовсім не поважають в групі $\widetilde{A}_2$.

Оскільки ступінь еквівалентності розглянутого відношення складає 0,7 і ступінь спряженості отриманого канонічного нечіткого розбиття також дорівнює 0,7, то і ступінь «довіри» до отриманих результатів не може перевищувати 0,7.

Означення 2.25 Відношення $\widetilde{\tau} = (X, \widetilde{F})$ називається відношенням нечіткої толерантності, якщо воно нечітко рефлексивне і нечітко симетричне. Ступінь нечіткої толерантності визначається згідно з виразом:

$$\gamma(\widetilde{\tau}) = \alpha(\widetilde{\tau})_{ref} \;\&\; \alpha(\widetilde{\tau})_{sym}.$$

Відношення $\widetilde{\tau}$ називається нечітко толерантним, якщо $\gamma(\widetilde{\tau}) \geq 0{,}5$. Якщо $\gamma(\widetilde{\tau}) \leq 0{,}5$, то $\widetilde{\tau}$ не є нечіткою толерантністю. Якщо $\gamma(\widetilde{\tau}) = 0{,}5$, то відношення $\widetilde{\tau}$ називається індиферентним відносно толерантності.

Якщо $\widetilde{\tau} = (X, \widetilde{F})$ нечітка толерантність на множині X, то кажуть, що елементи $x, y \in X$ нечітко толерантні, якщо виконується умова $\mu_F(x, y) \geq 0{,}5$.

Відношення нечіткої еквівалентності є окремим випадком нечіткої толерантності, оскільки завжди виконується $\eta(\widetilde{\tau}) \leq \gamma(\widetilde{\tau})$.

Прикладом нечітких толерантностей є нечіткі відношення «бути трохи схожим», «знаходитися на певній відстані одне від одного», які на скінченній множині речей у просторі нечітко рефлексивні і симетричні, але не транзитивні.

Означення 2.26. Відношення $\tilde{\tau} = (X, \tilde{F})$ на множині X і покриття $\Re$ множини X називають нечітко спряженими, якщо ступінь спряженості $\sigma(\tilde{\tau}, \Re)$ задовольняє умову:

$$\sigma(\tilde{\tau}, \Re) = \underset{x,y\in X}{\&} (\mu_F < x, y > \leftrightarrow \underset{\tilde{A}\in\Re}{\vee} (\mu_A(x) \& \mu_A(y))) \geq 0{,}5.$$

Якщо $\sigma(\tilde{\tau}, \Re) \leq 0{,}5$, то відношення $\tilde{\tau}$ і розбиття $\Re$ нечітко не спряжені. Якщо $\sigma(\tilde{\tau}, \Re) = 0{,}5$, то відношення $\tilde{\tau}$ і розбиття $\Re$ індиферентні відносно спряженості. З означення 2.26 випливає, що з кожним відношенням нечіткої толерантності спряжено нескінченно багато нечітких покриттів, нечітко рівних або індиферентних одне одному. Але, на відміну від нечітких розбиттів, спряжених з відношенням нечіткої еквівалентності, в загальному випадку покриття, що отримуються, можуть нечітко не дорівнювати одне одному.

Розглянемо метод побудови одного з покриттів спряжених із заданим відношенням нечіткої толерантності [5].

Нехай $\tilde{\tau} = (X, \tilde{F})$ – нечітка толерантність на множині X. Для довільно вибраного елемента $x \in X$ побудуємо нечіткий клас толерантності $\tilde{A}_1$, всі елементи якого попарно нечітко толерантні, взявши елемент a як початковий. З цією метою побудуємо нечітку множину $\tilde{\tau}(a)$, де $\tilde{\tau}(a) = \{<\mu_{\tau(a)}(x) / x>\}$, $x \in X$, $\mu_{\tau(a)}(x) = \mu_F<a, x>$.

Оскільки відношення $\tilde{\tau}$ рефлексивне, завжди виконується умова $\tilde{\tau}(a) \not\approx \varnothing$, або $\tilde{\tau}(a) \sim \varnothing$.

Якщо $\tilde{\tau}(a)$ є одноелементною нечіткою множиною, тобто $\tilde{\tau}(a) = \{<\mu_{\tau(a)}(a) / a>\}$, то клас толерантності $\tilde{A}_1$ збігається з $\tilde{\tau}(a)$.

Якщо існує пара $<\mu_{\tau(a)}(b) / b>$, в множині $\tilde{\tau}(a)$ (тобто існує зв'язок між вершинами a і b у відношенні $\tilde{\tau}$ з $\mu_F<a, b>\geq 0{,}5$), де $b \in X$, $a \neq b$, $\mu_{\tau(a)}(b) \geq 0{,}5$, то таку пару включаємо до класу толерантності $\tilde{A}_1$ на даному крокові, водночас приймаючи $\mu_{\tau(a)}(a) = \mu_F< a, a > \& \ \mu_F<a, b>$.

Подібно до $\tilde{\tau}(a)$ знаходимо нечітку множину $\tilde{\tau}(b)$ і визначаємо перетин $\tilde{\tau}(a) \cap \tilde{\tau}(b)$. Якщо $\tilde{\tau}(a) \cap \tilde{\tau}(b) \approx \tilde{A}_1$, то клас $\tilde{A}_1$ сформовано.

Якщо існує пара $<\mu_{\tau(a)\cap\tau(b)}(c)/c>$, де $c\in X$, $c\neq a$, $c\neq b$, $\mu_{\tau(a)\cap\tau(b)}(c)\geq 0{,}5$, то таку пару включаємо до класу толерантності $\tilde{A}_1$, оскільки вершина c є попарно толерантною до обох вершин a і b.

Якщо $\tilde{\tau}(a) \cap \tilde{\tau}(b) \not\approx \tilde{A}_1$ і $\tilde{\tau}(a) \cap \tilde{\tau}(\mathrm{b}) \subseteq \tilde{A}_1$, то виключаємо пару $<\mu_{\tau(a)}(b) / b>$ з класу $\tilde{A}_1$.

Продовжуємо процедуру до того часу, поки клас толерантності сформований на даному кроці не стане нечітко рівним класу, який було отримано на попередньому кроці.

Для побудови наступного класу покриття в нечіткій множині $\tilde{\tau}$(а) знаходимо наступну пару $<\mu_{\tau(a)}(d) / d>$, $d \in X$, $d \neq a$, $\mu_{\tau(a)}$(d) $\geq$ 0,5, якщо вона існує, і включаємо у клас толерантності $\tilde{A}_2$ елементи $<\mu_{\tau(a)}(a) / a>$ і $<\mu_{\tau(a)}(d) / d>$, приймаючи $\mu_{\tau(a)}(a) = \mu_F < a, a > \& \mu_F < a, d >$. Продовжуємо формувати клас $\tilde{A}_2$ подібно до вже описаного.

Якщо такі пари в нечіткій множині $\tilde{\tau}(a)$ відсутні, то слід початковим вибрати елемент $p \in X$, $p \neq a$, і продовжувати процедуру доти, поки як початкові не будуть по черзі взяті всі елементи множини X.

Взявши перетин нечітко рівних класів $\tilde{A}$, отримаємо сукупність нечітких класів толерантності, яка створює покриття $\Re$ множини X.

Відношення $\tilde{\tau}$ і отримане за ним покриття $\Re$ нечітко спряжені за способом побудови покриття, оскільки до кожного класу входять елементи, що є попарно толерантними один до одного.

Приклад 2.16. Нехай задано відношення толерантності $\tilde{\tau}$, що показано на рисунку 2.12. Необхідно побудувати нечітке покриття $\Re$, нечітко спряжене з відношенням $\tilde{\tau}$.

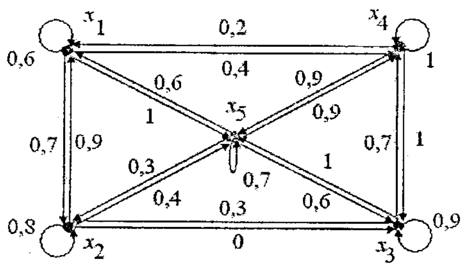


Рисунок 2.12 – Граф відношень $\tilde{\tau}$ для прикладу 2.16

1 Створимо $\tilde{\tau}(x_1) = \{0,6/x_1>, <0,7/x_2>, <0,4/x_4>, <1/x_5>\}$. На даному кроці $\tilde{A}_1 = \{0,6/x_1>, <0,7/x_2>\}$.

2 Знаходимо $\tilde{\tau}(x_2) = \{<0,9/x_1>, <0,8/x_2>, <0,4/x_5>\}$. Оскільки $\mu_{\tau(x_1)\cap\tau(x_2)}(x_5) = 0,4$, то елемент x_5 до класу $\tilde{A}_1$ не включається.

3 Визначаємо перетин $\tilde{\tau}(x_1) \cap \tilde{\tau}(x_2) = \{<0,6/x_1>, <0,7/x_2>\}$. Оскільки виконується умова, що $\tilde{\tau}(x_1) \cap \tilde{\tau}(x_2) \approx \tilde{A}_1$, то формування класу $\tilde{A}_1$ закінчено.

4 Оскільки до множини $\tilde{\tau}(x_1)$ входить елемент $<1/x_5>$, починаємо формувати клас $\tilde{A}_2$ і отримуємо, що $\tilde{A}_2 = \{< 0,6 / x_1 >, <1/x_5 >\}$. Знаходимо $\tilde{\tau}(x_5) = \{<0,6/x_1>, <0,3/x_2>, <0,6/x_3>, <0,9/x_4>, <0,7/x_5>\}$. Визначаємо $\tilde{\tau}(x_1) \cap \tilde{\tau}(x_5) = \{<0,6/x_1>, <0,3/x_2>, <0,4/x_4>, <0,7/x_5>\}$.

Оскільки $\mu_{\tau(x_1)\cap\tau(x_2)}(x_2) = 0{,}3$, і $\mu_{\tau(x_1)\cap\tau(x_5)}(x_4) = 0{,}4$, то елементи x_2 і x_4 до класу $\tilde{A}_2$ не включаються. Оскільки виконується умова, що $\tilde{\tau}(x_1) \cap \tilde{\tau}(x_5) \approx \tilde{A}_2$, то формування класу $\tilde{A}_2$ закінчено.

5 Оскільки інших елементів в множині $\tilde{\tau}(x_1)$ зі ступенями належності більшими за 0,5 немає, то обираємо як початкову вершину x_2.

6 Створюємо $\tilde{\tau}(x_2) = \{<0{,}9/x_1>, <0{,}8/x_2>, <0{,}4/x_5>\}$. На даному кроці $\tilde{A}_3 = \{0{,}9/x_1>, <0{,}8/x_2>\}$. Будуючи перетин $\tilde{\tau}(x_2) \cap \tilde{\tau}(x_1)$ отримуємо $\tilde{A}_3 \approx \tilde{A}_1$.

7 Створюємо клас $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_3 = \{0{,}6/x_1>, <0{,}7/x_2>\}$. Оскільки ми перебрали усі елементи множини $\tilde{\tau}(x_2)$, що мають ступені належності більші за 0,5 вважаємо, що спроба побудувати клас $\tilde{A}_3$, який нечітко не дорівнює раніше побудованим класам і нечітко до них не включається, на основі початкового елемента x_2, виявилася невдалою.

8 Вибираємо як початкову наступну вершину – x_3.

9 Створюємо клас $\tilde{A}_3 = \{<0{,}7/x_3>, <0{,}7/x_4>\}$. Знаходимо

$$\tilde{\tau}(x_4) = \{<0{,}2/x_1>, <1/x_3>, <1/x_4>, <0{,}9/x_5>\}.$$

10 Визначаємо $\tilde{\tau}(x_3) \cap \tilde{\tau}(x_4) = \{<0{,}9/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}9/x_5>\}$.

11 Включаємо елемент $<0{,}9/x_5>$ до класу $\tilde{A}_3$ на даному кроці. Отримуємо $\tilde{A}_3 = \{<0{,}7/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}9/x_5>\}$.

12 Визначаємо перетин $\tilde{\tau}(x_3) \cap \tilde{\tau}(x_4) \cap \tilde{\tau}(x_5) = \{<0{,}6/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}7/x_5>\}$. Оскільки $\tilde{\tau}(x_3) \cap \tilde{\tau}(x_4) \cap \tilde{\tau}(x_5) = \tilde{A}_3$ на даному кроці, то формування класу $\tilde{A}_3$ закінчено.

13 Переходимо до формування класу $\tilde{A}_4$ по $\tilde{\tau}(x_3)$. Отримуємо, що $\tilde{A}_4 = \{<0{,}7/x_3>, <0{,}7/x_4>, <1/x_5>\} \approx \tilde{A}_3$. Створюємо клас $\tilde{A}_3 = \tilde{A}_3 \cap \tilde{A}_4 =$ $= \{<0{,}7/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}9/x_5>\}$.

14 Вибираємо як початкову вершину x_4 і, виходячи з неї, отримуємо класи $\tilde{A}_4 = \{<1/x_3>, <0{,}9/x_4>, <0{,}9/x_5>\}$ і $\tilde{A}_5 = \{<0{,}6/x_3>, <0{,}6/x_4>, <0{,}9/x_5>\}$. Бачимо, що $\tilde{A}_3 \approx \tilde{A}_4 \approx \tilde{A}_5$. Створюємо клас $\tilde{A}_3 = \tilde{A}_3 \cap \tilde{A}_4 \cap \tilde{A}_5 = \{<0{,}6/x_3>, <0{,}6/x_4>, <0{,}9/x_5>\}$.

15 Вибираючи як початкову вершину x_5, отримаємо класи $\tilde{A}_4 = \{0{,}6/x_1>, <0{,}6/x_5>\}$; $\tilde{A}_5 = \{<0{,}6/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}6/x_5>\}$ і $\tilde{A}_6 = \{<0{,}6/x_3>, <0{,}9/x_4>, <0{,}6/x_5>\}$. Враховуючи, що $\tilde{A}_4 \approx \tilde{A}_2$, а $\tilde{A}_5 \approx \tilde{A}_6 \approx \tilde{A}_3$ формуємо класи $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2 \cap \tilde{A}_4 = \{<0{,}6/x_1>, <0{,}6/x_5>\}$ і $\tilde{A}_3 = \tilde{A}_3 \cap \tilde{A}_5 \cap \tilde{A}_6 = \{<0{,}6/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}6/x_5>\}$.

16 Отримуємо покриття $\Re = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3\}$, де $\tilde{A}_1 = \{<0{,}6/x_1>, <0{,}7/x_2>\}$, $\tilde{A}_2 = \{<0{,}6/x_1>, <0{,}6/x_5>\}$, $\tilde{A}_3 = \{<0{,}6/x_3>, <0{,}7/x_4>, <0{,}6/x_5>\}$.

З процедури побудови класів толерантності видно, що нечітке відношення $\tilde{\tau}$ і нечітке покриття $\Re$ є нечітко спряженими, оскільки попарно нечітко толерантні елементи множини X належать одному класу покриття. Крім того, покриття $\Re$ є повним, тобто містить всі можливі класи толерантності, оскільки при побудові класів як початкові елементи по черзі використовуються всі елементи множини X. Крім того, перетин нечітко рівних класів толерантності при побудові покриття М приводить до створення найбільш «строгого» покриття, яке називають канонічним. Канонічне покриття $\Re$ множини X відносно нечіткої толерантності $\tilde{\tau}$ є єдиним і не залежить від вибору початкового елемента.

2.7 Відношення нечітких порядків

Означення 2.27. Відношення $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$ називається відношенням нечіткого строгого порядку якщо воно нечітко антирефлексивне, нечітко антисиметричне і нечітко транзитивне. При цьому ступінь строгого порядку

$$\pi_1(\tilde{\delta}) = \beta(\tilde{\delta})_{ref} \,\&\, \beta(\tilde{\delta})_{sym} \,\&\, \alpha(\tilde{\delta})_{tr}$$

відношення $\tilde{\delta}$ має бути більшим або дорівнювати 0,5.

Нехай $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$ – нечіткий строгий порядок на множині X. Якщо $\mu_F(x, y) \geq 0{,}5$, то кажуть, що елементи $(x, y) \in X$ зв'язані відношенням нечіткого строгого порядку і елемент x нечітко передує елементу y.

Означення 2.28. Ступенем досконалого строгого порядку називають величину

$$\pi_2(\tilde{\delta}) = \pi_1(\tilde{\delta}) \,\&\, \alpha(\tilde{\delta})_{con}.$$

Якщо виконується умова, що $\pi_2(\tilde{\delta}) \geq 0{,}5$, то відношення $\tilde{\delta}$ є нечітким досконалим строгим порядком.

Визначимо поняття нечіткої лінійно впорядкованої множини X.

Означення 2.29. Множина X називається нечітко лінійно впорядкованою за передуванням і позначається як $\tilde{P}(X)$, якщо кожному $x \in X$, $|X| = n$, присвоєний індекс $i \in I$, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, і кожному $x_i \in X$ приписано ступінь передування $\beta(x_i)$ елемента x_i відносно елементів множини X з більшими індексами.

Ступінь нечіткої спряженості $\sigma(\tilde{\delta}, \tilde{P}(X))$ відношення $\tilde{\delta}$ і нечіткої лінійної послідовності $\tilde{P}(X)$ визначається виразом:

$$\sigma(\tilde{\delta}, \tilde{P}(X)) = \mathop{\&}_{x,y \in X} (\mu_F<x_i, x_j> \leftrightarrow \beta(x_i)).$$

Існує теорема про те, що якщо на множині X задано відношення досконалого строгого порядку $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$, то існує нечітка лінійна послідовність $\tilde{P}(X)$, нечітко спряжена з відношенням $\tilde{\delta}$.

Доведемо це. Покажемо, що на множині X, на якій задано нечіткий досконалий строгий порядок $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$, існує елемент, який задовольняє умову $\alpha(x) \geq 0{,}5$, де:

$$\alpha(x) = \underset{\substack{y \in X \\ y \neq x}}{\&} \mu_F(x, y).$$

Такий елемент називається нечітко найменшим. Виберемо довільний елемент $y_1 \in X$. Якщо для нього виконується умова, що $\alpha(x) \geq 0{,}5$, де $x = y_1$, то елемент y_1 є нечітко найменшим. Інакше, оскільки порядок є нечітко досконалим, то в X існує такий $y_2 \neq y_1$, для якого $\mu_F(y_2, y_1)) \geq 0{,}5$, тобто елемент y_2 нечітко передує елементу y_1. Тоді або y_2 нечітко найменший елемент, або існує такий $y_3 \neq y_2$, що $\mu_F(y_3, y_2) \geq 0{,}5$.

Продовжуючи аналогічно, на k-му кроці, $k \leq n$, отримаємо ланцюжок:

$$y_k \tilde{\delta} y_{k-1}, y_{k-1} \tilde{\delta} y_{k-2}, \ldots, y_2 \tilde{\delta} y_1.$$

Оскільки $\tilde{\delta}$ нечітко транзитивне, для кожного наступного елемента y_α і будь-якого попереднього елемента y_β з цього ланцюжка виконується умова, що $\mu_F(y_\alpha, y_\beta) \geq 0{,}5$. В зв'язку із тим, що множина X скінченна, процес побудови ланцюжка закінчиться не більш як за n кроків, при цьому y_k буде нечітко найменшим елементом множини X.

Нехай тепер x – нечітко найменший елемент множини X, який вибрано способом, який розглянуто вище. Припишемо йому номер 1 і зі ступенем передування

$$\beta(x_1) = \underset{\substack{y \in X \\ y \neq x}}{\&} \mu_F(x, y)$$

помістимо на перше місце нечіткої лінійної послідовності $\tilde{P}(X)$.

З множини X виключимо елемент x_1 і отримаємо множину $X_1 = X \setminus \{x_1\}$. Оскільки $X_1 \subseteq X$, то на X_1 також задано нечіткий досконалий порядок і, відповідно, в множині X_1 існує нечітко найменший елемент x, якому припишемо номер 2 і зі ступенем передування

$$\beta(x_2) = \underset{\substack{y \in X \\ y \neq x}}{\&} \mu_F(x, y)$$

помістимо на друге місце нечіткої лінійної послідовності $\tilde{P}(X)$. Ясно, що $\mu_F(x_1, x_2) \geq 0{,}5$. Продовжуючи, аналогічно прийдемо до нечіткої лінійної послідовності $\widetilde{P}(X) = \langle\langle\beta(x_1),\ x_1\rangle,\ \langle\beta(x_2),\ x_2\rangle,\ \ldots,\ \langle\beta(x_n),\ x_n\rangle\rangle$. Умовимося, що $\beta(x_n) = 1$.

Покажемо, що $\widetilde{P}(X)$ нечітко спряжена з відношенням $\widetilde{\delta} = (X,\ \widetilde{F})$, тобто має місце співвідношення $\sigma(\widetilde{\delta}, \widetilde{P}(X)) \geq 0{,}5$. З

$$\sigma(\widetilde{\delta},\ \widetilde{P}(X)) = \underset{x,y \in X}{\&}(\mu_F\langle x_i, x_j\rangle \leftrightarrow \beta(x_i))$$

випливає, що нерівність виконується в тому випадку, коли для будь-якої пари $(x_i, x_j) \in X^2$ такої, що i < j, одночасно має місце $\mu_F(x_i, x_j) \geq 0{,}5$ і $\beta(x_i) \geq 0{,}5$. Величина $\mu_F(x_i, x_j) \geq 0{,}5$ при i < j, $(x_i, x_j) \in X$, оскільки нечітка лінійна послідовність $\widetilde{P}$ (X) включає всі елементи множини X і відношення $\widetilde{\delta}$ нечітко транзитивне, а величина $\beta(x_i)$ більша або дорівнює 0,5 за способом побудови послідовності $\widetilde{P}(X)$. В зв'язку з цим:

$$(\mu_F\langle x_i, x_j\rangle \leftrightarrow \beta(x_i)) \geq 0{,}5$$

для всіх $(x_i,\ x_j) \in X$ при $i < j$. Теорему доведено.

Нехай $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F})$ – відношення нечіткого досконалого строгого порядку, а $\widetilde{P}(X)$ – деяка нечітка лінійна послідовність, нечітко спряжена з $\widetilde{\delta}$. При цьому справедливим є співвідношення: $\sigma(\widetilde{\delta},\ \widetilde{P}(X)) \leq \pi_2(\widetilde{\delta})$. При цьому рівність досягається в тому випадку, якщо послідовність $\widetilde{P}(X)$ побудовано так, як це робилося при доведенні теореми. Така послідовність $\widetilde{P}$ (X) називається канонічною.

Приклад 2.17. Нехай задано відношення $\widetilde{\delta} = (X,\ \widetilde{F})$, показане на рисунку 2.13. Для цього відношення отримаємо:

$$\beta(\widetilde{\delta})_{ref} = 0{,}7; \quad \beta(\widetilde{\delta})_{sym} = 0{,}6; \quad \alpha(\widetilde{\delta})_{tr} = 0{,}7; \quad \alpha(\beta)_{con} = 0{,}6.$$

Отже, $\pi_2(\widetilde{\delta}) = 0{,}6$ і відношення $\widetilde{\delta}$ є нечітким досконалим строгим порядком.

Знайдемо нечітко найменший елемент у множині X α (x) $\geq 0{,}5$, де

$$\alpha\ (\mathrm{x}) = \underset{\substack{y \in X \\ y \neq x}}{\&} \mu_F(x, y)).$$

Отримаємо: $\alpha(a) = 0$; $\alpha(b) = 0{,}6$; $\alpha(c) = 0{,}4$; $\alpha(d) = 0$; $\alpha(e) = 0$.

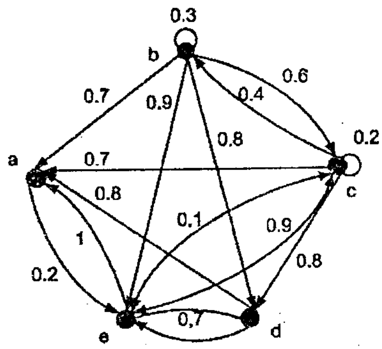


Рисунок 2.13 – Відношення нечіткого строгого досконалого порядку $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F})$

Таким чином елемент b є нечітко найменшим, йому надається номер 1 і величина $\beta(b_1) = 0{,}6$. Видалимо елемент b з множини X. Отримаємо $X_1 = \{b, c, d, e\}$. На графі цій операції відповідає видалення вершини b і всіх інцидентних їй дуг. Приходимо до відношення, граф якого показано на рисунку 2.14.

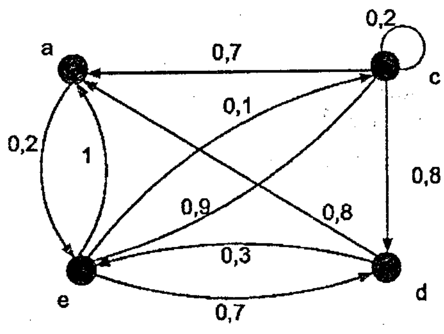


Рисунок 2.14 – Граф відношення $\widetilde{\delta}$ після вилучення найменшого елемента

Знайдемо для нього нечітко найменший елемент. Запишемо $\alpha(a) = 0$; $\alpha(c) = 0{,}7$; $\alpha(d) = 0$; $\alpha(e) = 0{,}1$. Елемент c є нечітко найменшим. Йому надається номер 2 і величина $\beta(c_2) = 0{,}7$. Продовжуючи аналогічно отримаємо нечітку лінійну послідовність $\widetilde{P}(X) = \langle\langle 0{,}6/b_1\rangle, \langle 0{,}7/c_2\rangle, \langle 0{,}7/e_3\rangle, \langle 0{,}8/d_4\rangle, \langle 1/a_5\rangle\rangle$. Ступінь нечіткої спряженості складе $\sigma(\widetilde{\delta}, \widetilde{P}(X)) = 0{,}6$.

Розглянемо відношення нечіткого строгого порядку $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F})$, який не є досконалим. В цьому випадку на множині X існують нечітко мінімальні і нечітко максимальні елементи. Елемент $a \in X$ називається нечітко мінімальним (максимальним), якщо не існує елемента $x \in X$ такого, що $\mu_F(x, a) > 0{,}5$ ($\mu_F(a, x) > 0{,}5$). У випадку нечіткого досконалого строгого порядку нечітко мінімальний елемент збігається з нечітко найменшим елементом множини X.

Означення 2.30. Підмножина $Y \subseteq X$ називається максимальною, якщо відношення $\widetilde{\delta}$ задає на Y нечіткий досконалий строгий порядок і не існує такого $Z \subseteq X$, що $Y \subseteq Z$, і відношення $\widetilde{\delta}$ є досконалим строгим порядком на Z. Для будь-якого $y \in X$ існує максимально досконала множина $Y \subseteq X$, що містить y.

Відповідно до доведеної теореми для будь-якої максимальної досконалої підмножини $Y \subseteq X$ існує нечітка лінійна послідовність $\widetilde{P}(X)$, нечітко спряжена із відношенням $\widetilde{\delta}_y = (Y, \widetilde{F}_y)$, яка є звуженням відношення $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F})$ на множину Y, причому $\widetilde{F}_y = \widetilde{F} \cap Y^2$, де Y^2 вважаємо нечіткою підмножиною X^2 з одиничним значенням ступеня належності кожної пари.

Взаємно однозначно зіставимо кожній нечіткій лінійній послідовності $\widetilde{P}(Y)$, нечітку множину $\widetilde{P}_y$, що складається з тих самих елементів що і $\widetilde{P}(Y)$, але порядок елементів не є суттєвим. Тоді неважко показати, що сукупність всіх нечітких множин $\widetilde{P}_y$ створює нечітке покриття множини X.

Приклад 2.18. Нехай задане нечітке відношення $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F})$, яке показано на рисунку 2.15. Для нього $\beta(\widetilde{\delta})_{ref} = 0{,}6$, $\beta(\widetilde{\delta})_{sym} = 0{,}6$, $\alpha(\widetilde{\delta})_{tr} = 0{,}6$, $\alpha(\widetilde{\delta})_{con} = 0$, отже $\pi_1(\widetilde{\delta}) = 0{,}6$. $\pi_2(\widetilde{\delta}) = 0$ і відношення $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F})$, є відношенням нечіткого строгого порядку.

Підмножини $Y_1 = \{a, b, e, f\}$ і $Y_2 = \{b, c, d\}$ є максимальними досконалими підмножинами і породжують нечіткі лінійні послідовності:

$$\widetilde{P}(Y_1) = \{<0{,}6/b_1>, <0{,}7/e_2>, <0{,}8/f_3>, <1/a_4>\},$$
$$\widetilde{P}(Y_2) = \{<0{,}7/b_1>, <1/c_2>, <1/d_3>\}.$$

Бачимо, що нечіткі множини $\widetilde{P}_{Y_1} = \{<0{,}6/b>, <0{,}7/e>, <0{,}8/f>, <1/a>\}$ і $\widetilde{P}_{Y_2} = \{<0{,}7/b>, <1/c>, <1/d>\}$ створюють нечітке покриття $\mathfrak{R} = \{\widetilde{P}_{Y_1}, \widetilde{P}_{Y_2}\}$ множини X.

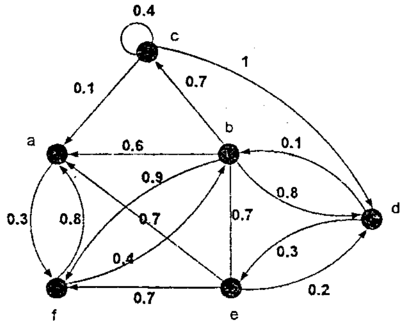


Рисунок 2.15 – Відношення нечіткого строгого недосконалого порядку

Означення 2.31. Відношення $\widetilde{\rho} = (X, \widetilde{F})$ називається відношенням нечіткого нестрогого порядку, якщо воно нечітко рефлексивне, нечітко антисиметричне і нечітко транзитивне. Тобто, ступінь нестрогого порядку визначається за допомогою такого виразу:

$$e_1(\widetilde{\rho}) = \alpha(\widetilde{\rho})_{ref} \ \& \ \beta(\widetilde{\rho})_{sym} \ \& \ \alpha(\widetilde{\delta})_{tr} \geq 0,5.$$

Означення 2.32. Відношення $\widetilde{\rho}$ називається нечітким досконалим нестрогим порядком, якщо ступінь досконалого нестрогого порядку

$$e_2(\widetilde{\rho}) = e_1(\widetilde{\rho}) \,\&\, \alpha(\widetilde{\rho})_{con} \geq 0,5.$$

Означення 2.33. Нечіткою діагоналлю $\widetilde{\Delta}_X$ множини X називається множина вигляду:

$$\widetilde{\Delta}_X = \{<\mu_{\Delta_X} <x, x>> / <x, x>>\}, x \in X,$$

де $\mu_{\Delta_X} <x, x> \geq 0,5$.

Очевидно, що існує багато нечітких діагоналей, нечітко рівних між собою.

Можна побачити, що якщо $\widetilde{\rho} = (X, \widetilde{F})$ нечіткий нестрогий порядок на множині X, то $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F} / \widetilde{\Delta}_X)$ буде нечітким строгим порядком. І навпаки, якщо $\widetilde{\delta} = (X, \widetilde{F})$ нечіткий строгий порядок, то $\widetilde{\rho} = (X, \widetilde{F} \cup \widetilde{\Delta}_X)$ буде не чітким нестрогим порядком. Дані співвідношення дозволяють переходити від будь-якого нечіткого нестрогого порядку до відповідного йому нечіткого строгого порядку і навпаки.

Означення 2.34. Відношення $\widetilde{\psi} = (X, \widetilde{F})$ називається відношенням нечіткого квазіпорядку, якщо воно нечітко рефлексивне і нечітко транзитивне, тобто якщо ступінь квазіпорядку

$$\kappa(\widetilde{\psi}) = \alpha(\widetilde{\rho})_{ref} \,\&\, \alpha(\widetilde{\delta})_{tr} \geq 0{,}5.$$

Відношення нечіткої еквівалентності і нечіткого нестрогого порядку є окремими випадками відношення нечіткого квазіпорядку, оскільки виконується умова, що

$$\eta(\widetilde{\psi}) \leq \kappa(\widetilde{\psi}) \text{ i } e_1(\widetilde{\rho}) \leq \kappa(\widetilde{\psi}).$$

Нечіткий квазіпорядок на деякій непустій множині X породжує як нечітку еквівалентність і спряжене з нею нечітке розбиття X, так і деякий нестрогий порядок на фактор-множині множини X з отриманого нечіткого відношення еквівалентності.

Контрольні запитання

1. Наведіть поняття нечіткого відношення і поясніть його значення з точки зору подання процесу логічного висновку.
2. Що таке носій нечіткого відношення?
3. Яким чином подається нескінченне нечітке відношення?
4. Як визначається ступінь нечіткості нечіткого відношення?
5. Скільки існує чітких відношень, нечітко рівних заданому нечіткому відношенню і нечітких відношень, нечітко рівних заданому чіткому відношенню?
6. Що саме, при поданні графічного вигляду, свідчить про нечітке включення одного нечіткого відношення до іншого?
7. Поясніть, за допомогою яких операцій визначається результуюча функція належності при об'єднанні та перетині нечітких множин і логічно обґрунтуйте, чому використовуються саме такі операції.
8. Наведіть теорему декомпозиції та поясніть її значення.
9. Що таке проекції нечіткого відношення? Наведіть їх графічну інтерпретацію та поясніть, де і для чого їх можна використати.
10. Що таке циліндричне продовження нечіткого відношення?
11. Які нечіткі відношення називаються сепарабельними?
12. Що таке композиція нечітких відношень і що саме вона відображає?
13. Наведіть графічне подання композиції двох нечітких відношень.
14. Стисло охарактеризуйте відомі Вам основні властивості нечітких відношень?

15. Наведіть власний приклад рефлексивного і антирефлексивного нечітких відношень, а також приклад нечіткого відношення, яке не є ані рефлексивним, ані антирефлексивним (якщо таке можливе).

16. Наведіть власний приклад симетричного та антисиметричного нечітких відношень.

17. Як обчислюється ступінь симетричності нечіткого відношення?

18. Наведіть власні приклади транзитивного та нетразитивного нечітких відношень.

19. Що таке транзитивне замкнення. Наведіть власний приклад транзитивного замкнення.

20. Наведіть формулу для обчислення ступеня транзитивності та наведіть його графічну інтерпретацію.

21. Що таке «індиферентне» нечітке відношення.

22. Наведіть відмінності, які існують між нечітким розбиттям і нечітким покриттям.

23. Наведіть власні приклади нечітко еквівалентних відношень.

24. Наведіть графічну інтерпретацію нечітко спряжених відношення нечіткої еквівалентності і розбиття $\mathfrak{R}$ та формулу для обчислення ступеня спряженості.

25. Поясніть поняття висоти класу розбиття.

26. Яке розбиття по нечіткому відношенню називається канонічним?

27. Наведіть власні приклади відношення нечіткої толерантності. У чому, на Ваш погляд, полягає основна відмінність між еквівалентністю та толерантністю?

28. Наведіть графічну інтерпретацію нечітко спряжених відношення нечіткої толерантності і розбиття $\mathfrak{R}$ та формулу для обчислення ступеня спряженості.

29. Що таке нечіткий порядок і для чого він може бути використаний?

30. Наведіть графічну інтерпретацію нечіткого строго порядку, та поясніть, які властивості має таке відношення.

31. Чим відрізняються досконалий та недосконалий нечіткий строгий порядок?

32. Яка послідовність називається нечітко лінійно впорядкованою за передуванням?

33. Що означає спряженість нечіткої лінійної послідовності та відношення нечіткого строгого порядку?

34. Що таке максимальна підмножина у множині елементів відношення нечіткого строго порядку?

Лабораторна робота № 2

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЧІТКИХ ВІДНОШЕНЬ

Мета роботи

Закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок з формалізації за допомогою нечітких множин понять, що погано формалізуються, створення відповідного програмного забезпечення.

У результаті виконання лабораторної роботи студент повинен вміти:

- створювати нечіткі відношення для формалізації опису взаємодії об'єктів, явищ, процесів;
- виконувати математичні операції над нечіткими відношеннями;
- створювати програмні функції для виконання операцій над нечіткими відношеннями.

Завдання на підготовку

Студент повинен знати:

- основні поняття нечітких множин;
- форми та методи подання нечітких відношень;
- теоретико-множинні операції над нечіткими відношеннями;
- одну з мов програмування.

Студент повинен вміти:

- створювати програми однією з мов програмування.

Для допуску до виконання роботи необхідно:

- вміти відповісти на теоретичні запитання по ходу виконання роботи;
- показати викладачу заготівку звіту про лабораторну роботу, яка повинна містити титульний лист та опис вибраної предметної області.

Завдання на лабораторну роботу

1. Відповідно до теми курсового проекту сформулювати задачу для формалізації за допомогою нечітких відношень.
2. Визначити чотири основні взаємодії у вибраній предметній області.
3. Подати вибрані взаємодії нечіткими відношеннями, які повинні задовольняти такі вимоги:

- одне з відношень має бути відношенням нечіткої еквівалентності, а друге – відношенням нечіткої толерантності;
- одне з відношень має бути відношенням строго досконалого порядку, а друге – відношенням нестрогого недосконалого порядку.

4. Створити бібліотеку функцій для роботи з нечіткими відношеннями, яка має містити:

- функції для реалізації основних операцій над нечіткими відношення (перетин, об'єднання, композиція і т. ін);

- для Означення основних властивостей та видів побудованих відношень;
- функції для побудови нечіткого розбиття та покриття нечітких відношень та Означення ступенів спряженості відношень з відповідними покриттями та розбиттями;
- функції для Означення ступенів порядків на нечітких множинах;
- функції для побудови нечітких лінійних (впорядкованих) послідовностей, Означення ступенів спряженості відношень порядку з нечіткими лінійними послідовностями та Означення максимальних досконалих множин на відношеннях нечіткого недосконалого порядку.

5. За допомогою розроблених програм визначити для побудованих нечітких відношень:
- показники властивостей відношень (ступенів нечітких рефлективності та антирефлексивності, симетричності та антисиметричності, транзитивності та зв'язності);
- показники нечітких ступенів еквівалентності та толерантності;
- нечіткі покриття та розбиття (для яких вони існують) та визначити ступені спряженості відношень з відповідними розбиттями (покриттями);
- ступені та види порядків, що існують на відношеннях;
- максимальні досконалі множині, нечіткі лінійні послідовності та ступені їх спряженості.

6. Створити бібліотеку функцій для виконання операцій над нечіткими відношеннями.
7. Розробити методики дослідження реалізованих функцій та дослідження властивостей нечітких множин.
8. Здійснити дослідження реалізованих операцій над нечіткими відношеннями та властивостей нечітких множин.
9. Зробити висновки по роботі (щодо адекватності та ефективності подання задачі нечіткими відношеннями, впливу властивостей нечітких відношень, неможливості взаємодій між об'єктами і т. ін.).

Зміст звіту

Титульний лист.

Назва і мета лабораторної роботи.

Теоретична частина

1. Опис умов задачі.
2. Обґрунтування створених нечітких відношень.

Практична частина

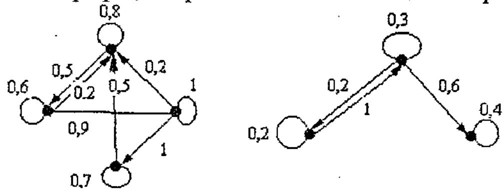
1. Формалізований опис функцій належності нечітких множин.
2. Опис створених функцій для означення властивостей нечітких відношень та їх характеристик.
3. Методика дослідження реалізованих функцій та властивостей нечітких відношень.
4. Приклади роботи створених функцій, ілюстровані скріншотами.
5. Інструкція користувача по роботі з бібліотекою функцій.

6. Лістинги функцій з коментарями.

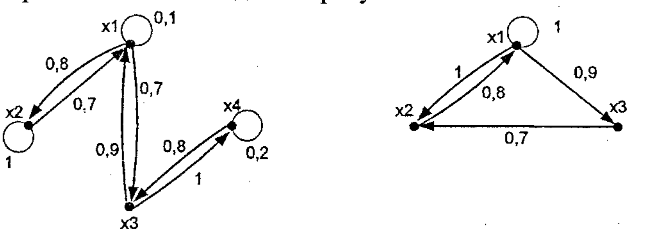
Висновки по роботі.

Завдання для виконання

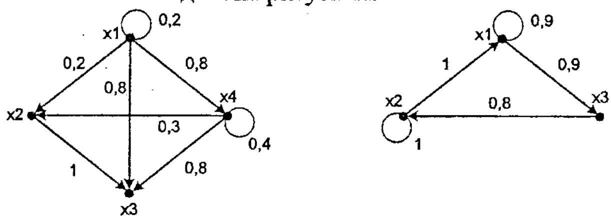
1. Визначте значення ступенів рефлексивності та антирефлексивності для графів, зображення яких наведені на рисунках:



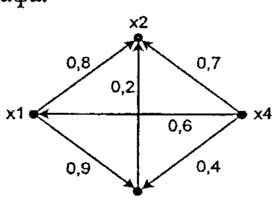
2. Визначте значення ступенів симетричності та антисиметричності для графів, зображення яких наведені на рисунках:



3. Визначте значення ступенів транзитивності та зв'язності для графів, зображення яких наведені на рисунках:



4. Обчисліть значення ступенів транзитивності і зв'язності для наведеного на рисунку графа:



5. Наведіть граф, який має чотири вершини, вісім ребер, ступінь рефлексивності 0,8 та ступінь антисиметричності 0,7.

6. У нечіткому відношенні $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F})$ нечіткий графік $\tilde{F}$ має вигляд:

$\tilde{F}=\{<0{,}9/<x_1, x_1>>, <0{,}3/<x_1, x_3>>, <0{,}7/<x_1, x_4>>, <0{,}8/<x_2, x_2>>, <0{,}3/<x_2, x_5>>, <0{,}8/<x_3, x_3>>, <0{,}2/<x_3, x_4>>, <0{,}8/<x_3, x_5>>, <0{,}7/<x_4, x_1>>, <0{,}3/<x_4, x_2>>, <0{,}7/<x_4, x_4>>, <0{,}2/<x_4, x_5>>, <0{,}3/<x_5, x_1>>, <0{,}7/<x_5, x_3>>, <1{,}0/<x_5, x_5>>$. Визначить канонічне розбиття $\Re$ відносно $\tilde{\varphi}$.

7. Нарисуйте граф відношення толерантності з п'ятьма вершинами.

8. Задано матрицю інцидентності графа відношення $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$ нечіткого досконалого строгого порядку.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	0,1	0	0,8	0,3	0	1
b	0,6	0,4	1	0,3	0,7	0,6
c	0,2	0	0,7	0,4	0,1	0
d	0,7	0,9	0,6	0	1	0,9
e	1	0,2	0,6	0	0,9	0,8
f	0	0,4	0,9	0,2	0,4	0,8

9. Знайдіть нечітку лінійну послідовність $\tilde{P}(X)$ і ступінь нечіткої спряженості $\sigma(\tilde{\delta}, \tilde{P}(X))$.

10. Задано матрицю інцидентності графа відношення $\tilde{\delta} = (X, \tilde{F})$ нечіткого строгого порядку. Знайдіть максимальні досконалі підмножини і нечіткі лінійні послідовності $\tilde{P}(Y_i)$, які вони породжують.

$\tilde{R} =$

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	0,7	0	0,4	0,3	0	1
b	0,2	1	1	0,7	0,4	0,3
c	0,2	0	0,7	0,4	0,1	0
d	0,7	0,1	0,6	0,9	0,1	0,4
e	1	0,6	0,6	0,9	0,1	0,8
f	0	0,4	0,3	0,2	0,4	0,8

3 ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

3.1 Змістовна інтерпретація функції належності

Нечіткі множини дозволяють строго описувати придатні мові людини розпливчаті поняття, без формалізації яких неможливо суттєво просунутися вперед у моделюванні інтелектуальних процесів. Але головною проблемою при використанні теорії нечітких множин є визначення функції належності, оскільки вона має бути задана поза самою теорією і, відповідно, її адекватність не можна перевірити засобами теорії.

Розглянемо змістовну інтерпретацію поняття ступеня належності елементу нечіткій множині. Існують різні точки зору на таку інтерпретацію. Більшість дослідників вважає, що функція належності є деякою неімовірнісною суб'єктивною мірою нечіткості і вона принципово відрізняється від імовірнісної міри. Будемо вважати, що ступінь належності $\mu_A(x)$ елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$ інтерпретується як суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x \in X$ відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною $\widetilde{A}$. При цьому така ступінь відповідності визначається шляхом опитування експертів. Тобто, ступінь відповідності не є умовною імовірністю спостерігання події $\widetilde{A}$ при виникненні події x, а є скоріше «можливістю» інтерпретації x за допомогою поняття, яке формалізується нечіткою множиною $\widetilde{A}$. Різницю між імовірністю та можливістю можна проілюструвати такими прикладами:

- імовірність того, що деяка особа з'їсть за сніданком п'ять варених яєць практично дорівнює 0, однак можливість такої події може змінюватись в інтервалі [0,1] в залежності від стану, апетиту особи, наявності якоїсь іншої їжі окрім яєць і т. ін.;
- імовірність того, що в автомобілі «Ланос» знаходиться 8 дорослих осіб практично дорівнює 0, але можливість цього може змінюватись від 0 до 1 в залежності від відношення господаря до свого автомобіля, необхідності перевезення, стану водія, його віку і т. ін.

В даних прикладах, величині X (кількість з'їдених за сніданком яєць або кількість дорослих осіб в автомобілі «Ланос»), можуть відповідати розподіли можливості $\mu(x)$ і ймовірності $P(x)$. Звернемо увагу на таку важливу деталь. Якщо сума ймовірностей окремих подій має дорівнювати одиниці, то для можливостей такого обмеження не висувається.

Розподіл можливості може бути інтерпретований як легкість, з якою особа виконує ту або іншу дію. Для отримання імовірнісного розподілу необхідно простежити за особою протягом певного періоду.

Приклад можливих розподілів для описаних вище подій (А – поїдання яєць, В – завантаження «Ланоса»), наведений у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Приклади розподілів можливостей $\mu(x)$ та ймовірностей $P(x)$

X	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_A(x)$	1	1	1	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2
$P_A(x)$	0,2	0,5	0,4	0,1	0	0	0	0
$\mu_B(x)$	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	0	0	0
$P_B(x)$	1	1	1	1	1	0,8	0,7	0,5

Ще раз нагадаємо, що значення ймовірностей є результатами статистичних даних, основаних на великій кількості спостережень, і вони не можуть змінюватися за бажанням експерта. У той же час міра можливості є суб'єктивною. Наприклад, наведені у таблиці 3.1 дані можливостей відображають досвід і уподобання автора і можуть зовсім не збігатися з вашою думкою з цього приводу. Тобто, основані на можливості функції належності однієї і тієї ж нечіткої множини можуть бути різними при визначенні їх як різними особами, так і однією і тією ж особою залежно від мети побудови нечіткої підмножини, типу задачі, методики побудови і, навіть, настрою або стану здоров'я експерта. Така суб'єктивність має як свої недоліки, так і безсумнівні переваги, оскільки дозволяє формалізувати досвід різних експертів, і тим самим урізноманітнити використовуваний досвід залежно, наприклад, від особливих умов виконання задачі, динамічних змін у середовищі задачі, які «губляться» у великому масиві статистичних даних, що мають статичний характер [9].

Для кращого усвідомлення різниці між можливістю та імовірністю розглянемо ще один приклад [10].

Нехай мандрівник багато часу йде по пустелі без води. Йому необхідно терміново вгамувати спрагу. Це стає питанням життя або смерті. І, раптом, він бачить перед собою дві пляшки з рідиною. Пляшки мають написи, що стосуються їх вмісту, які мають такий вигляд: «Питна вода – μ_A = 0,9» та «Питна вода – P_B = 0,9». Яку пляшку слід вибрати мандрівнику?

Якщо він добре вчився в університеті і є обізнаним у теоріях ймовірності і нечітких множин, то його вибір може базуватися на таких міркуваннях. Він може припустити, що у пляшці A знаходиться, припустимо, болотна вода, на відміну від чистої води, яка мала б ступінь належності, що дорівнює 1. Тобто, вода у пляшці А на 90% питна, але має якісь забруднювальні домішки. Взагалі вона не дуже корисна для здоров'я (до речі, як і більшість води, що ми споживаємо кожного дня), але в умовах, що склалися, цілком здатна виконати задачу угамування спраги, оскільки у ній точно не може знаходитися якась отруйна рідина, припустимо сірчана кислота, ступінь належності якої до рідин, що можна пити, дорівнював би нулю.

Розмірковуючи ж про вміст пляшки В, мандрівник звернеться до частотної інтерпретації ймовірності рідини, що міститься в ній. Він може припустити, що приблизно у 9 випадках з 10 він може спокійно випити рідину з цієї пляшки. При цьому якість рідини може бути дуже близькою до чистої води. Але що станеться у тому одному випадку з 10 невідомо. Це може бути серйозна хвороба або навіть смерть. Ясна річ, що пляшка не містить пиво або квас, оскільки вони придатні для пиття. Отож, в одному з 10 випадків у пляшці може знаходитися щось, що зовсім не можна пити. Наприклад, та ж сама сірчана або соляна кислота.

Висновок буде очевидним. Якщо будь-яка додаткова інформація відсутня – слід вибрати пляшку *A*. В усякому випадку це дозволить запобігти серйозному отруєнню або навіть летальному наслідку.

Яку ж з двох пляшок *A* і *B* слід вибрати мандрівнику, якщо він побачить на них написи «Питна вода – $\mu_A = 0{,}1$» та «Питна вода – $P_B = 0{,}1$»?

Хід його міркувань у цьому випадку може бути таким. Рідина у пляшці А практично не придатна для пиття, оскільки на 90% не сумісна з поняттям питної води. Можливо якщо поряд були б лікарі, вони спасли б його після прийому такої рідини. Але в умовах пустелі і повної виснаженості мандрівника випити таку рідину було б самогубством. Не дуже радісним є й напис на пляшці *B*, який свідчить, що у мандрівника є лише один шанс з 10 залишитися у живих після прийому рідини з неї. Але в тому одному випадку він нап'ється чистої питної води, тоді як у пляшці *A* рідина точно буде отруйною. Отож, якщо мандрівник ще не втратив волю до життя, його вибір має бути здійснений на користь пляшки *B*.

І зовсім не очевидно, яку пляшку слід вибрати, якщо ступінь належності для пляшки *A* і ймовірність для пляшки В будуть дорівнювати по 0,5. Якщо мандрівник, не дивлячись на важкі умови, має відмінне здоров'я і фізичний стан, він може ризикнути випити напівпитну рідина з пляшки *A*. Якщо його шлунок або травна система хворі, у нього залишається один вибір – пляшка *B*, де він буде мати 50%-ий шанс вижити.

Таким чином, поняття нечіткої множини здатне забезпечити нас адекватною інформацією відносно неточного опису тих або інших ситуацій. Цей підхід варто застосовувати у тих випадках, коли невизначеність характеризується відсутністю добре визначених критеріїв, що дозволяють однозначно судити про належність елементів одному або іншому класу. Саме в цьому проявляється основна відмінність між нечіткістю і випадковістю.

3.2 Поняття нечіткої та лінгвістичної змінної

Опис об'єктів і явищ за допомогою нечітких множин здійснюється з використанням понять нечіткої та лінгвістичної змінних [11].

Нечіткою змінною називають трійку вигляду

$$<\alpha, X, \tilde{C}(\alpha)>,$$

де α – назва нечіткої змінної, наприклад «Смачний торт» або «Легкий»;

$X = \{x\}$ – множина визначення нечіткої змінної (універсальна множина).

Для нечіткої змінної «Смачний торт» – множина тортів, що розглядається; для нечіткої змінної «Легкий» – цифрова шкала, що відповідає вазі, припустимо, кошику з продуктами харчування);

$\tilde{C}(\alpha) = \{<\mu_{C(\alpha)}(x)/x>\}$ $(x \in X)$ нечітка підмножина множини X, яка описує обмеження на можливі значення нечіткої змінної α. Наприклад, «Смачний торт» = <1,0/Київський; 0,7/Наполеон; 0,4/Святковий> – де число відображає думку експерта щодо ступеня належності відповідного торту до поняття «Смачний торт»; «Легкий» = <1/1; 0,9/3; 0,8/4; 0,6/5; 0,3/7; 0,1/9> – де перше число характеризує ступінь належності відповідної ваги, заданої другим числом пари, до поняття «Легкий»).

Лінгвістичною змінною називається змінна, яка приймає значення з множини слів або словосполучень деякої природної або штучної мови, тобто тільки лінгвістичні (вербальні) значення, і визначається кортежем

$$<\beta, T(\beta), X, G, M>,$$

де: β – назва лінгвістичної змінної, наприклад «Кімнатна температура» (рис. 3.1);

$T(\beta)$ – базова терм-множина значень β, тобто множина її лінгвістичних (вербальних) значень. Наприклад, множина значень {«холодно», «комфортно», «жарко»} для змінної «Кімнатна температура». Кожне значення лінгвістичної змінної називається термом, а множина її припустимих значень – терм-множиною лінгвістичної змінної. У свою чергу, кожен терм подається нечіткою змінною, визначеною на універсальній множині X. У нашому прикладі універсальна множина буде відображати температуру в інтервалі, наприклад, $X = [5, 35]$ °С. При цьому, наприклад, терм «комфортно» може бути утворений з використанням функції належності вигляду:

$$\mu_{комфортно}(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{X - 20}{3}\right)^6}.$$

G – синтаксична процедура, яка описує процес створення з множини $T(\beta)$ нових змістовних для даної задачі значень $\alpha \in T^*$ лінгвістичної змінної. При цьому множину $T^* = T \cup G(T)$ називають розширеною терм-множиною лінгвістичної змінної. Наприклад, можна задати модифікатор (термів) з назвою «Дуже», який дозволяє сформувати з наявних термів нові, такі як «дуже мала», або «дуже велика» шляхом синтаксичного перетворення однієї назви на іншу;

M – семантична процедура, яка дозволяє приписати кожному новому значенню лінгвістичної змінної, створеному процедурою *G*, відповідну семантику шляхом формування відповідної нечіткої множини $\tilde{C}(\alpha)$, тобто відображає нове значення (терм) у нову відповідну нечітку змінну. Наприклад, функція належності терму «дуже комфортна» може бути побудована шляхом піднесення до квадрату відповідних значень функції належності нечіткої змінної (нечіткої множини) «комфортна».

Розглянемо більш детально приклад нечіткої лінгвістичної змінної «Кімнатна температура»:

β: назва – «Кімнатна температура»;

$T(\beta)$: терм-множина T = {«холодно», «комфортно», «жарко»} з функціями належностей:

$$\mu_{холодно}(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-10}{7}\right)^{12}};\ \mu_{комфортно}(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-20}{3}\right)^{6}};\ \mu_{жарко}(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-30}{6}\right)^{10}};$$

X : універсальна множина [5, 35];

G : синтаксичні правила, що породжують нові терми з використанням модифікаторів «і», «або», «не», «дуже», «більш-менш» і т. ін.;

M : процедура, що ставить кожному новому терму, побудованому з використанням синтаксичних правил з *G*, нечітку множину з *X*. При цьому, якщо терми *A* і *B* мали функції $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x,)$ відповідно, то нові терми будуть мати функції належності наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Функції належності термів, породжених модифікаторами з G

Модифікатор	Функції належності ($x \in X$)
не *t*	$1-\mu_t(x)$
дуже *t*	$(\mu_t(x))^2$
більш-менш *t*	$\sqrt{\mu_t(x)}$
A і B	$\mathrm{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x))$
A або B	$\mathrm{Min}(\mu_A(x), \mu_B(x))$

На рисунку 3.1 наведені функції належності термів лінгвістичної змінної «Кімнатна температура». На рисунку 3.2 показані графіки функцій належності термів, отриманих з використанням модифікаторів.

Таким чином, лінгвістичною змінною називається змінна, яку задають на деякій кількісній шкалі і яка приймає значення, що є словами і словосполученнями природної або формальної мови.

Значеннями лінгвістичної змінної є нечіткі множини, назвами яких служать слова і речення природної або формальної мови, які, як правило, є елементарними характеристиками певних явищ.

Існує ряд загальних вимог, які в силу своєї семантики повинні задовольняти функції належності нечітких множин, що описують терми лінгвістичних змінних.

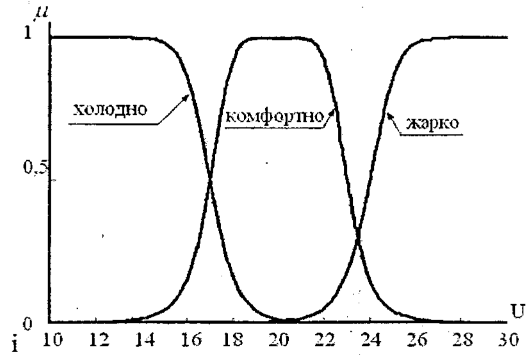


Рисунок 3.1 – Функції належності термів лінгвістичної змінної «Кімнатна температура»

Нехай $T = \{T_i\}$, $i \in L = \{1, 2, \ldots, m\}$ – базова терм-множина лінгвістичної змінної $<\beta, T, X>$; $<T_i, X, \tilde{C}_i>$ – нечітка змінна, яка відповідає терму $T_i \in T$; $\tilde{C}_i = \{<\mu_{C_i}(x)/x>\}$ (x ∈ X); C_i – носій нечіткої множини $\tilde{C}_i$. Будемо вважати, що $X \subseteq R_1$, де R_1 – дійсна вісь. Позначимо мінімальне можливе значення x через x_1, а максимальне можливе – через x_2. Впорядкуємо множину T відповідно до виразу:

$$(\forall T_i \in T)(\forall T_j \in T)(i > j \leftrightarrow (\exists x \in C_i)(\forall y \in C_j)(x > y)),$$

який означає, що менший номер отримує терм, який має носія, розташованого лівіше на осі R_1. При цьому терм-множина будь-якої лінгвістичної змінної повинна задовольняти такі вимоги:

1) $\mu_{C_1}(x_1) = 1$, $\mu_{C_m}(x_2) = 1$;

2) $(\forall T_i \in T \setminus \{T_m\})(0 < \sup\limits_{x \in X} \mu_{C_i \cap C_{i+1}}(x) < 1)$;

3) $(\forall T_i \in T)(\exists\, x \in X)(\mu_{C_i}(x) = 1)$;

4) $(\forall \beta)(\exists x_1 \in R_1)(\exists x_2 \in R_1)((\forall x \in X)(x_1 < x < x_2))$.

Графічну інтерпретацію цих умов наведено на рис.3.3.

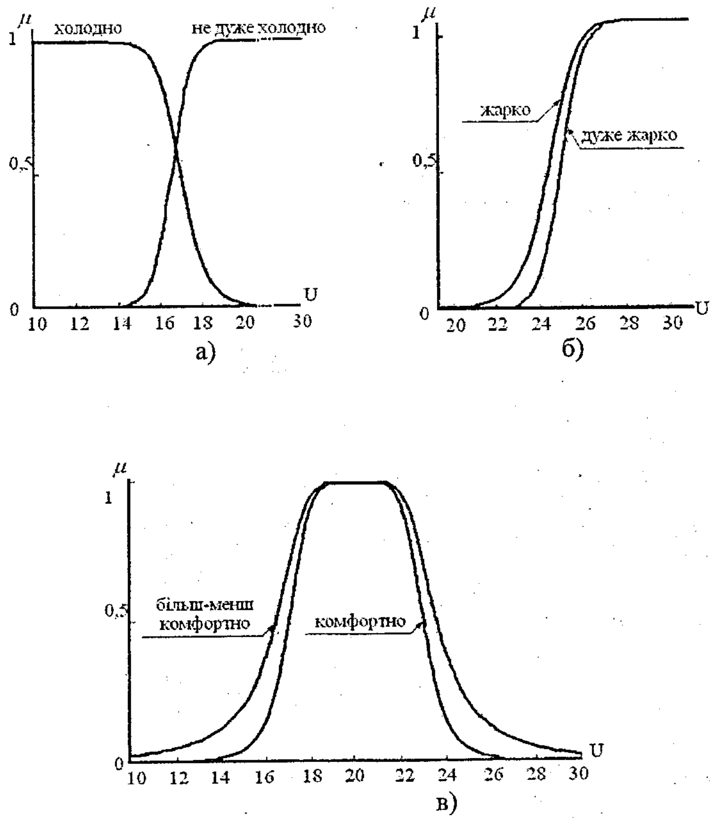


Рисунок 3.2 – Функції належності термів лінгвістичної змінної «Кімнатна температура», отриманих з використанням модифікаторів: а) не дуже; б) дуже; в) більш-менш

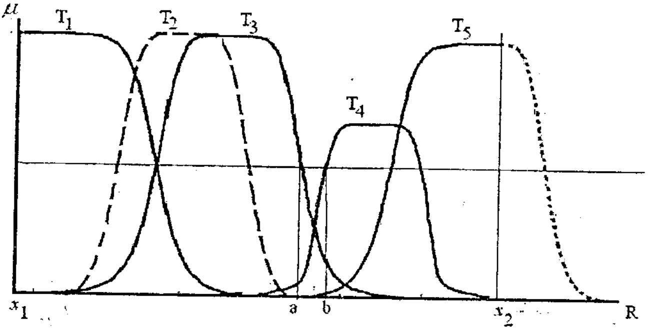


Рисунок 3.3 – Графічна інтерпретація вимог до вигляду функцій належності термів лінгвістичної змінної

Умова (1) забороняє функціям належності крайніх термів (в нашому прикладі T_1 і T_5) мати вигляд куполоподібних кривих, що обумовлено розташуванням цих термів у впорядкованій множині T. У протилежному випадку, множині об'єктів, розташованих на осі R лівіше за об'єкт x_2 (точкова крива на рис. 3.3), не буде відповідати жодне поняття системи. Це виключить можливість ефективної роботи з такими об'єктами. Тому вони або не розглядаються, або необхідно буде ввести до системи нове поняття, яке дозволить маніпулювати цими об'єктами. Отже, при впорядкуванні об'єктів, найменшому та найбільшому значенню універсальної шкали повинні відповідати об'єкти зі значеннями функцій належності, рівними одиниці.

Умова (2) забороняє існування в базовій множині T таких пар термів, як T_2 і T_3, T_4 і T_5, оскільки в першому випадку відсутня природна розмежованість понять, які апроксимують ці терми (тобто окремі об'єкти системі відповідають одразу двом поняттям, що є неприпустимим у зв'язку з появленням неоднозначності), а в другому, об'єктам розташованим в інтервалі [a, b] області визначення не буде відповідати жодне поняття, що не дозволить оперувати ними.

Оскільки кожне поняття повинно мати хоча б один типовий об'єкт, який воно позначає, введено умову (3), яка забороняє наявність в множині T термів типу T_4, які не відповідають повною мірою жодному об'єкту системи.

Умова (4) обмежує область визначення X кінцевою множиною точок. Ця умова відображає фізичні обмеження на числові значення параметрів, які присутні в будь-якій задачі управління.

Лінгвістичні змінні забезпечують можливість якісного, словесного опису кількісних величини. Тому принципово важливим є те, що будь-яка лінгвістична змінна, як і будь-які її значення, пов'язана з кількісною шкалою, яку часто називають універсальною або базовою шкалою.

Задання значення змінної словами, без використання чисел, є більш природним для людини, яка щоденно приймає множину рішень на основі саме лінгвістичної, а не цифрової інформації, типу: «надто висока температура», «швидка відповідь», «красивий букет», «гармонійний смак».

Психологи встановили, що у мозку людини практично уся числова інформація перекодовується вербально і зберігається саме у вигляді лінгвістичних термів. Поняття лінгвістичної змінної відіграє важливу роль у прийнятті рішень на основі наближених міркувань.

3.3 Прямі методи побудови функцій належності

Складність проблеми побудови функцій належності обумовила наявність багатьох методів, що базуються на експертних оцінках. Серед них виділяють дві великі групи: прямі і непрямі.

У прямих методах експерт безпосередньо задає правила визначення значень функції належності, що характеризує певне поняття. Ці значення узгоджуються з його системою переваг на множині об'єктів X таким чином:

1) для будь-яких x_i, $x_j \in X$, $\mu(x_i) < \mu(x_j)$ тільки у тому випадку, якщо x_j є більш переважним за x_i, тобто у більшому ступені характеризується поняттям A;

2) для будь-яких $x_i, x_j \in X$, $\mu(x_i) = \mu(x_j)$ тільки у тому випадку, якщо x_j і x_i рівнозначні відносно поняття A;

Прикладами прямих методів є: безпосереднє задання функції належності таблицею, формулою, переліком. Заде Л. А. обґрунтовує призначення прямого методу тим, що оцінка за своєю природою є наближеною. «У багатьох випадках достатня вельми наближена характеристика набору даних, оскільки у більшості основних задач, розв'язуваних людиною, не потрібна висока точність. Мозок людини використовує припустимість такої неточності, кодуючи інформацію, достатню для розв'язування задачі, елементами нечітких множин, які наближено описують вихідні дані. Потік інформації, що надходить до мозку через органи зору, слуху, дотику і т. ін., звужується таким чином у тонкий струмок інформації, необхідної для розв'язування поставленої задачі з мінімальним ступенем точності» [11].

У непрямих методах значення функції належності вибираються таким чином, щоб задовольнити наперед задані умови [12]. Експертна інформація використовуються тільки як є вихідні дані для подальшої обробки. Додаткові умови можуть накладатися як на вид інформації, що надходить, так і на процедури її обробки. Наприклад, функція належності має відображати близькість до наперед заданого еталону, при попарному порівнянні об'єктів сила оцінки об'єктів має бути взаємозворотною і т. ін.

Як правило, прямі методи використовуються для опису понять, що характеризуються вимірюваними властивостями, такими як висота, вага, об'єм і т. ін. До них можна віднести методи, основані на імовірнісному трактуванні функції належності $\mu_A = P(A|x)$, тобто, імовірності того, що об'єкт $x \in X$ буде віднесено до множини, що характеризує поняття A.

Насправді люди негарантовані від випадкових помилок. Наприклад, їм властиво зміщувати оцінки об'єктів у напрямку кінців оціночної шкали. Отож, прямі вимірювання, основані на безпосередньому визначенні належності, мають використовуватися лише у тому випадку, коли такі помилки незначні або малоймовірні, що буває достатньо рідко.

В іншому випадку використовують непрямі методи. Розглянемо, наприклад, поняття «КРАСА», яке, на відміну від понять «ДОВЖИНА» або «МАСА», є складним для формалізації.

У таких випадках використовують лише рангові вимірювання попарним порівнянням об'єктів. Непрямі методи є більш трудомісткими ніж прямі, але їх перевага полягає у стійкості до перекручувань у відповіді. Для непрямих методів можна висунути умову "безумовного екстремуму": при визначенні ступеня належності множина досліджуваних об'єктів повинна містити не менш як два об'єкти, числові подання яких на інтервалі [0; 1] приймають значення 0 і 1, відповідно.

Отож, відокремимо дві основні групи методів побудови функції належності: прямі і непрямі. Але функція належності може відображати як думку одного експерта, так і думку групи експертів. Відповідно можливі як мінімум чотири групи методів: прямі і непрямі для одного експерта та прямі і непрямі для групи експертів. Крім того, існує окрема група методів побудови функції належності терм-множин.

Прямі методи для одного експерта полягають у безпосередньому заданні функції, що дозволяє обчислювати значення. Наприклад, нехай змінна «ВІК» набуває значення з інтервалу X = [0; 100]. Слово «МОЛОДИЙ» можна інтерпретувати як ім'я нечіткої підмножини X, що характеризується функцією сумісності. Таким чином, ступінь, з яким числове значення віку, наприклад x = 28, сумісно з поняттям «МОЛОДИЙ», припустимо складає 0,7, у той час як сумісність x = 30 і x = 35 з тим самим поняттям складатиме 0,5 і 0,2, відповідно.

Розглянемо запропонований Ч. Осгудом метод семантичних диференціалів, техніку якого можна розглядати як різновид проективних тестів [13]. Практично у будь-якій області можна отримати множину шкал оцінок, використовуючи таку процедуру:

1) визначити список властивостей, за якими оцінюється об'єкт;

2) знайти у цьому списку полярні властивості і сформувати полярну шкалу;

3) для кожної пари полюсів оцінити, наскільки введене поняття має позитивну властивість.

Сукупність оцінок за шкалами було названо профілем поняття. Отже, вектор з координатами, що змінюються від 0 до 1, також називається профілем. Профіль є нечіткою підмножиною позитивного списку властивостей або шкал. Наприклад, у задачі розпізнавання обличчя можна виділити такі шкали (табл. 3.3): світле квадратне обличчя, з дуже широким лобом, курносим довгим носом, широкими світлими очами, гостроконечним підборіддям, може бути визначене як нечітка множина $\{(x_1, 1), (x_2, 1), \ldots, (x_9, 1)\}$.

Таблиця 3.3 – Шкали для задачі розпізнавання обличчя

x_1	Форма лоба	Низький – широкий
x_2	Профіль носа	Горбатий – курносий
x_3	Довжина носа	Короткий – довгий
x_4	Розріз очей	Вузькі – широкі
x_5	Колір очей	Темні – світлі
x_6	Форма підборіддя	Гостроконечне – квадратне
x_7	Товщина губ	Тонкі – товсті
x_8	Колір обличчя	Смугле – світле
x_9	Форма обличчя	Овальне – квадратне

Обчислення часткової належності одне одному строгих множин можна здійснити, наприклад таким чином. Нехай покриттям (або розбиттям) K звичайної множини X є будь-яка сукупність звичайних підмножин $\{A_1, \ldots, A_k\}$ множини X. Припустимо, що існує $B \subseteq X$. Тоді B може розглядатися як нечітка підмножина K з функцією належності, наприклад, такого вигляду:

$$\mu_B(A_i) = |A_i \cap B| \,/\, |A_i \cup B|,$$

де $|A|$ – потужність множини A.

Приклад 3.1. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $K = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{3, 6, 9\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 3, 7\}, \{2, 3, 8\}\} = \{A_1, A_1, A_3, A_4, A_5,\}$; $B = \{2, 3, 5, 8\}$. Тоді, розглядаючи B як нечітку підмножину K, можна записати:

$$B = \{(A_1, 1/3), (A_2, 1/3), (A_3, 1/3), (A_4, 1/7), (A_5, 3/5)\}.$$

Будь-яке розв'язання задачі багатоцільової оптимізації можна розглядати як нечітку підмножину значень цільової функції таким чином. Нехай $f_1, \ldots, f_k$ – цільові функції, де f_i: $R^n \to R$, і нехай треба розв'язати задачу $f_i \to max$ для усіх I [14]. Нехай $f_i^* < \infty$ – максимальне значення функції f_i і $C = \{f_1, \ldots, f_k\}$ – множина цільових функцій, тоді будь-яке значення x в області визначення f_i можна розглядати як нечітку множину на C з вектором значень належності

$$\mu_x = (\mu_1, \ldots, \mu_k), \text{ де } \mu_i = \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*}.$$

Ступінь належності можна інтерпретувати і як суб'єктивну імовірність. При цьому виникає можливість отримувати функції належності для кількох класів понять S_j розрахунковим шляхом, з використанням рівності

$$\mu_{Sj}(x_i) = p(S_j|x_i),$$

де умовна імовірність визначається за формулою Байєса:

$$p(S_j \mid x_i) = \frac{p_{xi}(S_j)p(x_i \mid S_j)}{\sum_{j=1}^{m} p_{xi}(S_j)p(x_i \mid S_j)},$$

причому

$$p_{xi}(S_j) = \frac{(y_i)_{x=xi}}{n}, j = 1,\dots,m, i = 1,\dots,n,$$

де y_i – кількість випадків при значенні параметра x_i, при якому правильною виявилася j-а гіпотеза.

При цьому оцінка функції належності починається з визначення тієї максимальної кількості класів, яка може бути описана даним набором параметрів [15]. Для кожного елемента x значення функції належності класу S_1 доповнює до одиниці значення функції належності класу S_2 (у випадку двох класів). Таким чином, система має складатися з класів, що подають протилежні події. Сума значень функції належності довільного елемента x у системі таких класів буде дорівнювати одиниці. Якщо кількість класів та їх склад чітко не визначені, то необхідно вводити умовний клас, що містить ті класи, які не були виявлені. Далі експерти оцінюють у відсотках при даному стані x ступінь проявлення кожного класу з названого переліку.

Але у деяких випадках думку експерта дуже важко виразити у відсотках, тому більш придатним способом оцінки функції належності буде метод опитування, який полягає у тому, що оцінюваний стан подається великій кількості експертів, кожен з яких має один голос. Експерт має однозначно віддати перевагу одному з класів з наперед відомого переліку. Значення функції належності обчислюється за формулою

$$\mu_S(x) = n_S / n,$$

де n – кількість експертів, які взяли участь в експерименті,

n_S – кількість експертів, які проголосували за клас S.

Приклад 3.2. Нехай внаслідок перепису населення в деякій області з кількістю мешканців P отримано множину значень віку $X = [0; 100]$. Нехай

$y(x)$ – кількість людей віку x, які стверджують, що вони є молодими. Нехай $n(x)$ – дійсна кількість людей віку x; тоді

$$p = \int_{0}^{100} dn(x).$$

Можна вважати, що поняття «МОЛОДИЙ» описується нечіткою множиною на X з функцією належності $\mu(x) = y(x)/n(x)$. Очевидно, що для малих значень віку виконується $y(x)/n(x)$, отже $\mu(x) = 1$. Але не всі $n(35)$ вважають себе молодими, отже, $y(35) < n(35)$. Для $x > 80$ число $y(x)$ має бути дуже маленьким.

Існує загальний метод варіювання прототипів для знаходження чисельного значення функції належності.

Нехай є прототип (ідеальний об'єкт) P, опис якого можна деформувати зміною параметрів $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Якщо задано деякий об'єкт A, то варіюванням параметрів можна добитися найбільшої відповідності прототипу і об'єкта. Вводиться міра подібності між об'єктом A і прототипом P: $\rho\,(A, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Для більш точного вимірювання подібності об'єкта з різними прототипами вводиться штрафна функція d. Далі будується функція:

$$sim(A) = \min_{p_1 \ldots p_n} \{\rho(A, p_1, \ldots, p_n) + d(p_1, \ldots, p_n)\}.$$

Оскільки прототип повністю відповідає сам собі, то sim $(P) = 0$.

Числові значення функції належності обчислюються за формулою:

$$\mu_P(A) = 1 - \frac{sim(A)}{\max\limits_{A} sim(A)}.$$

3.4 Побудова функцій належності на основі попарних порівнянь

Метод побудови функції належності на основі попарних порівнянь є типовим представником непрямих методів. Такі методи базуються на розбитті загальної задачі визначення ступеня належності $\mu_A(x)$ для кожного з елементів $x \in X$ на ряд більш простих підзадач.

Наприклад, часто буває важко впорядкувати велику кількість об'єктів за ступенем наявності певної властивості (наприклад, краси). Але, оскільки ступені належності розглядаються на конкретній заданій реальній множині об'єктів, а не в абсолютному сенсі, то інтенсивність належності зручно визначити, виконуючи послідовні попарні порівняння об'єктів, що розглядаються.

Саме такий метод попарних порівнянь Сааті [16] отримав найбільше розповсюдження при побудові функцій належності нечітких множин. Цей метод має велику обчислювальну складність, оскільки потребує обчислювати власний вектор матриці попарних порівнянь, яка задається за допомогою спеціально запропонованої шкали. При цьому складність обчислень швидко зростає зі збільшенням розмірності універсальної множини, на якій задається лінгвістичний терм.

Розглянемо модифікацію цього методу, яка не потребує знаходження власного вектора матриці [12].

Нехай A є деякою властивістю, яка розглядається як лінгвістичний терм. Нечітка множина, що формалізує терм A, подається сукупністю пар:

$$A = \{<\mu_A(x_1)/x_1>, <\mu_A(x_2)/x_2>, \ldots, <\mu_A(x_n)/x_n>\},$$

де $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – універсальна множина, на якій задається нечітка множина A. Задача полягає у визначенні значень $\mu_A(x_i)$ для усіх $i = 1, \ldots, n$. Сукупність цих значень і буде складати невідому функцію належності.

Метод, що пропонується для розв'язання цієї задачі, базується на запозиченій з теорії структурного аналізу систем ідеї розподілення ступенів належності елементів універсальної множини згідно з їх рангами. У нашому випадку під рангом елемента $x_i \in X$ будемо розуміти число $r(x_i)$, яке характеризує значимість цього елемента у формуванні властивості, яку описує нечіткий терм. При цьому виконується правило: чим більшим є ранг елемента, тим більшим є ступінь його належності нечіткій множині.

Позначимо $r_A(x_i) = r_i$, $\mu_A(x_i) = \mu_i$. Тоді правило розподілу ступенів належності можна задати у вигляді системи співвідношень:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_1}{r_1} = \dfrac{\mu_2}{r_2} = \ldots = \dfrac{\mu_n}{r_n}; \\ \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 1. \end{cases}$$

З використанням даних співвідношень, легко визначити ступені належності усіх елементів універсальної множини через ступінь належності опорного елемента.

Якщо опорним є елемент $x_i \in X$, зі значенням функції належності μ_i, то

$$\mu_j = \frac{r_i}{r_j}\mu_i, \text{ для усіх } j \neq i.$$

Враховуючи умови нормування, отримаємо:

$$\mu_1 = (1 + \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3}{r_1} + \ldots + \frac{r_2}{r_1})^{-1}$$

$$\mu_2 = (1 + \frac{r_2}{r_2} + \frac{r_3}{r_2} + \ldots + \frac{r_2}{r_2})^{-1}$$

.....

$$\mu_n = (1 + \frac{r_2}{r_n} + \frac{r_3}{r_n} + \ldots + \frac{r_2}{r_n})^{-1}.$$

Отримані формули надають можливість обчислювати ступені належності елементів $x_i \in X$ нечіткому терму A двома незалежними шляхами:

- за абсолютним оцінюванням рівнів r_i, що визначаються згідно з методиками, запропонованими у теорії структурного аналізу систем;
- за відносними оцінками рангів $\frac{r_i}{r_j} = m_{ij}$, які утворюють матрицю $M = \|m_{ij}\|$.

Ця матриця має такі властивості:

- діагональна, тобто $m_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, n$;
- симетричні відносно головної діагоналі елементи пов'язані залежністю $m_{ij} = \frac{1}{r_{ji}}$;
- транзитивна, тобто $m_{ik} \times m_{kj} = m_{ij}$.

Наявність таких властивостей приводить до того, що при відомих елементах одного рядка матриці M, можна легко визначити елементи всіх інших рядків. Якщо відомі елементи s_{rj}, $j = 1, \ldots, n$, рядка r, то довільний елемент s_{ij} знаходиться за формулою:

$$s_{ij0} = \frac{s_{kj}}{s_{ki}}.$$

Оскільки матриця M може бути інтерпретована як матриця попарних порівнянь рангів, то для експертних оцінок можна використати 9-бальну шкалу Сааті (табл. 3.4).

Зауважимо, що з теорії матриць відомо, при точних значеннях елементів матриці мають виконуватись такі співвідношення:

$$M \times r = n \times r,\ \ r = (r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_n),$$

де, n – власне значення матриці M, за яким можна відновити вектор r (у припущенні, що виконується умова $\sum_{i=1}^{m} r_i = 1$), буде збігатися з розмірністю матриці.

З іншого боку доведено, що в загальному випадку емпіричний вектор $r = (r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_n)$ повинен задовольняти задачі на пошук λ_{max} – найбільшого з власних значень матриці M. Тобто, задача зводиться до пошуку вектора r, який задовольняє рівняння $M \times r = \lambda_{max} \times r$. Оскільки відомо, що таке рівняння має лише один розв'язок, то значення координат власного вектора, які відповідають максимальному власному значенню, поділені на їхню суму, і будуть шуканими значеннями ступенів належності.

Таблиця 3.4 – Значення елементів матриці попарних порівнянь

Якісна оцінка порівнянної значимості r_i і r_j	Числова оцінка m_{ij}	Пояснення
Непорівнянні	0	Немає сенсу порівнювати елементи
Однаково значимі	1	Елементи рівні за значенням
Трохи значиміші	3	Відомості про перевагу r_i над r_j існують, але вони не є переконливими
Суттєво або сильно значиміші	5	Існують вагомі свідоцтва і логічні критерії на користь більшої важливості r_i ніж r_j
Очевидно значиміші	7	Існують переконливі свідоцтва більшої значимості r_i у порівнянні з r_j
Абсолютно значиміші	9	Максимально підтверджується існування переваги r_i над r_j.
Проміжні оцінки між сусідніми оцінками	2,4,6,8	Проміжні порівнювальні оцінки.

Матриця, в якій використовуються обернені величини ($m_{ij} = 1/m_{ji}$), відображує узгоджені судження тоді і тільки тоді, коли виконується умова рівності n та λ_{max} :

$$\lambda_{max} = n.$$

Крім того, завжди виконується співвідношення $\lambda_{max} \geq n$, тому різниця $\lambda_{max} - n$ може використовуватись як міра неузгодження суджень експертів і показує, коли судження експертів необхідно або перевіряти, або переглядати.

Для отримання матриці попарних порівнянь здійснюється опитування експерта наскільки, за його думкою, величина $\mu_A(x_i)$ перевищує величину $\mu_A(x_j)$, тобто наскільки елемент x_i є більш значущим для поняття, що описується нечіткою множиною $\tilde{A}$, ніж елемент x_j.

Якщо експертний дослід проведено ідеально і матриця попарних порівнянь побудована абсолютно точно, то вона буде мати такий вигляд:

$$M = \begin{vmatrix} \frac{r_1}{r_1} & \frac{r_1}{r_2} & \dots & \frac{r_1}{r_n} \\ \frac{r_2}{r_1} & \frac{r_2}{r_2} & \dots & \frac{r_2}{r_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_n}{r_1} & \frac{r_n}{r_2} & \dots & \frac{r_n}{r_n} \end{vmatrix}$$

При цьому для визначення j-го елемента вектора r ($j \in I$) можна використати таку очевидну процедуру. Обчислимо суму k_j елементів i-го стовпця матриці M:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = k_j.$$

З правил побудови матриці випливає, що при цьому виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} r_i}{r_j} = \frac{1}{r_j}$$

Отже, $r_j = \frac{1}{k_j}$. Продовжуючи виконувати цю процедуру по всіх стовпцях матриці отримуємо шуканий вектор r.

Якщо ж, як це і буває в дійсності, матриця попарних порівнянь побудована неточно, то описана процедура визначення вектора r може використовуватись для визначення початкового значення ітераційним методом розв'язання рівняння $M \times r = \lambda_{max} \times r$. При цьому відхилення λ_{max} від n може використовуватись для оцінювання точності розв'язання рівняння на даному кроці. Але вже початкова оцінка вектора r, обчислена згідно з описаною процедурою, буває, як правило, достатньо точною і в разі відсутності підвищених вимог до точності визначення вектора k подальше її уточнення може не проводитися.

Приклад 3.3. Необхідно побудувати функцію належності μ_A нечіткій множини $\tilde{A}$, яка описує поняття «середня кількість» на базовій шкалі $X = \{0, 5, 10, 15, \ldots, 40\}$. Шляхом опитуванням експертів побудовано матрицю попарних порівнянь, яку наведено в таблиці 3.5 [5]. Таблицю 3.6 побудовано з таблиці 2 переходом від простих дробів до десяткових чисел.

Визначимо вектор r і оцінимо його точність.

1. Побудуємо матрицю попарних порівнянь (табл. 3.5)

2. Для зручності обчислень подамо елементи матриці попарних порівнянь у десятковій формі (табл. 3.6).

3. Визначимо вектор r. Для цього послідовно визначимо значення його розрядів. Для визначення r_1 знайдемо суму елементів першого стовпця матриці M. Отримаємо $k_1 = 45$. Отже, $r_1 = 1/k_1 = 1/45 \approx 0{,}02$. Аналогічно знайдемо значення інших розрядів і заповнимо таблицю 3.7.

Таблиця 3.5 – Матриця попарних порівнянь (дробові числа)

	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	1	1/2	1/7	1/8	1/9	1/8	1/7	½	1
5	2	1	1/2	1/5	1/7	1/5	1/2	1	2
10	7	2	1	1/2	1/5	1/2	1	2	7
15	8	5	2	1	1/2	1	2	5	8
20	9	7	5	2	1	2	5	7	9
25	8	5	2	1	1/2	1	2	5	8
30	7	2	1	1/2	1/5	1/2	1	2	7
35	2	1	1/2	1/5	1/7	1/5	1/2	1	2
40	1	1/2	1/7	1/8	1/9	1/8	1/7	½	1

Таблиця 3.6 – Матриця попарних порівнянь (десяткові числа)

	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	1	0,5	0,14	0,125	0,11	0,125	0,14	0,5	1
5	2	1	0,5	0,2	0,14	0,2	0,5	1	2
10	7	2	1	0,5	0,2	0,5	1	2	7
15	8	5	2	1	0,5	1	2	5	8
20	9	7	5	2	1	2	5	7	9
25	8	5	2	1	0,5	1	2	5	8
30	7	2	1	0,5	0,2	0,5	1	2	7
35	2	1	0,5	0,2	0,14	0,2	0,5	1	2
40	1	0,5	0,14	0,125	0,11	0,125	0,14	0,5	1

Таблиця 3.7 – Значення елементів вектора *r*.

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	R_9
0,02	0,04	0,08	0,18	0,34	0,18	0,08	0,04	0,02

Оцінимо точність визначення елементів вектора *r*. Для цього підставимо обчислені значення вектора *r* у рівняння

$$M \times r = \lambda_{max} \times r,$$

і визначимо відхилення значення власного числа матриці *M* від *n*, яке й дасть оцінку точності визначення вектора r.

1. Отримаємо добуток матриці *M* і вектора *r*:

$$M \times r = (0,18; 0,36; 0,85; 1,57; 2,96; 1,57; 0,85; 0,36; 0,18).$$

2. Усереднене значення λ_{max} дорівнює 9,25. Отже, відхилення λ_{max} від *n* дорівнює $\Delta\lambda_{max} = 0,25$.

3. Точність розв'язання складає $\Delta\lambda_{max}$ /n = 0,25:9 = 0,03. Така точність є цілком достатньою і не потребує подальшого уточнення значення *r*.

4. Для нормалізації нечіткої множини $\tilde{A}$ поділимо значення кожного зі ступенів належності на значення ступеня належності $\mu_A(20) = 0,34$. Остаточно отримуємо:

$\tilde{A}$ = {<0,06/0>, <0,12/5>, <0,24/10>, <0,53/15>, <1/20>, <0,53/25>, <0,24/30>, <0,12/35>, <0,06/40>}.

3.5 Непрямі методи для групи експертів

Розглянемо спосіб визначення функції належності на основі інтервальних оцінок [17] Нехай інтервал $[x_{ji}, x'_{ji}]$ відображає думку i-го експерта, $i>1$ ($i = 1, \ldots, m$), щодо значення j-ої ознаки ($j = 1, \ldots, n$) оцінюваного поняття S. Тоді повним описом цього поняття i-м експертом є гіперпаралелепіпед $\theta = [x_{1i}, x'_{1i}] \times \ldots \times [x_{ni}, x'_{ni}]$. Обчислити коефіцієнти компетентності експертів, а також звести вихідну «розмиту» функцію (усереднені експертні оцінки) до характеристичної функції «нерозмитої», чіткої множини можна за таким алгоритмом:

1. Розглядаючи для кожної ознаки j усі інтервали, запропоновані експертами, знаходимо зв'язане покриття їх об'єднання, що складається з інтервалів, які не перетинаються, і кінцями яких є тільки кінці вихідних інтервалів:

$$[x_{jk}, x'_{jk}], j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m_j - 1.$$

2. Створимо на основі отриманих покрить гіперпаралелепіпеди, що не перетинаються:

$$T_k = [x_{jk}, x'_{jk}] \times \ldots \times [x_{nk}, x'_{nk}],\ k = 1, \ldots, m'.$$

3. Обчислимо для $x \in T_k$

4. $\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, якщо T_л \cap \theta_i \neq O \\ 0, якщо T_л \cap \theta_ш = O \end{cases}$

5. Встановимо номер ітерації $l = 1$.

6. Введемо коефіцієнти компетентності

$$\{\lambda_i^j\}_{i=1}^m = \{1/m\}_{i=1}^m.$$

7. Обчислимо наближення функції належності при нормованих λ_i, тобто $\sum \lambda_i^j = 1$:

$$f^l(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \lambda_i^l, x \in T_k, k = 1, \ldots, m'.$$

8. Обчислимо функціонал неузгодженості думки i-го експерта з думкою експертної ради на l-й ітерації:

$$\delta_i^l = \sum_{\substack{x\in T \\ k=1,\dots,m'}} [f^l(x) - \varphi_i(x)]^2, \quad i=1,\dots,m.$$

9. Обчислимо $\Delta = \sum_{i=1}^{m} 1/\delta_i^l$.

10. Присвоїмо $l = l + 1$.

11. Обчислимо $\lambda_i^l = \Delta / \delta_i^{l-1}$.

12. Якщо величина $\max|\lambda_i^{l-1} - \lambda_i^l|$ близька до нуля, то обчислення припиняються і наближенням функції належності вважаємо $f(x) = \mu_S(x)$, в іншому випадку повертаємось до кроку 6.

Розглянемо також непрямий метод Кіквідзе [18]. Нехай U – універсальна множина, S – поняття, загальна назва елементів. Задача визначення нечіткої підмножини U, що описує поняття S, розв'язується шляхом опитування експертів. Кожен експерт A_i, (i = 1, ..., m) виділяє з U множину елементів Q_i, які, на його думку, відповідають поняттю S. Ранжируванням усіх елементів множини $Q = \sum_{i=1}^{m} Q_i$ за перевагою у сенсі відповідності поняттю S, кожен експерт впорядковує Q, використовуючи відношення порядку $\succ$ або $\approx$. Відношення $\approx$ вказує на однаковий ступінь переваги між будь-якими елементами $q_\alpha, q_\beta \in Q$. Вважається, що експерти можуть поставити коефіцієнти ступеня переваги γ перед елементами у впорядкованій послідовності для підсилення або послаблення відношення переваги. Вводиться відстань між елементами вказаної послідовності $q_\alpha^i, q_\beta^i \in Q$:

$$p(q_\alpha^i, q_\beta^i) = 1/\gamma,$$

де α і β – порядкові номери елементів у впорядкованій послідовності. Відстань обчислюється через перший у впорядкованій послідовності елемент:

$$\rho(q_\alpha^i, q_\beta^i) = \rho(q_1^i, q_\beta^i) - \rho(q_1^i, q_\alpha^i) = \rho_\beta^i - \rho_\alpha^i.$$

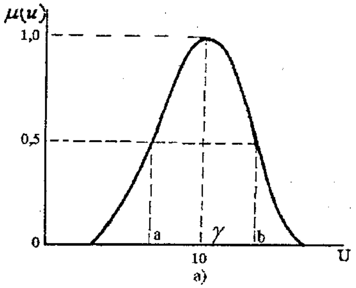
Ця різниця показує, наскільки більш переважною є q_α^i у порівнянні з q_β^i. При розв'язуванні задачі зважування переважності елементів множини Q вважається, що різниця між вагами $\varphi(q_\alpha^i) - \varphi(q_\beta^i)$ є пропорційною різниці $\rho_\beta^i - \rho_\alpha^i$: $\varphi(q_{\beta+\nu}^i) - \varphi(q_\beta^i) = c(\rho_{\beta+\nu}^i - \rho_\beta^i)$. Коли ν = 1, формула перетворюється на рекурентну формулу, і задача зводиться до визначення ваги першого елементу. При використанні рекурентних формул вага останнього елементу має відрізнятися від нуля. Наприклад, за $\varphi(q_1^i)$ можна вибрати $\max_\alpha \rho_\alpha^i + \rho_0$. На основі усіх $\varphi(q_\alpha^i)$ i = (1, ... , m) для q_α визначається значення $\varphi(q_\alpha) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi(q_\alpha^i)$; це і буде ступінь належності елемента $u \in U$ деякій нечіткій множині із загальною назвою S.

Існує також метод [19], що поєднує переваги простоти та стійкості непрямих методів до спотворення відповідей експертів і переваги прямих методів, що дозволяють отримати безпосереднє значення ступеня належності. Вибірку об'єктів необхідно проводити так, щоб достатньо рівномірно подати ступінь належності від 0 до 1 відносно нечіткої множини, що розглядається. Ця вибірка має задовольняти умову беззастережного екстремуму, тобто має містити хоча б два об'єкти, значення функції належності на яких мають визначеність 0 і 1 (усі експерти приписують ці числа екстремумам). Далі, коли множину задовільних об'єктів відібрано, експертів опитують щодо ступенів належності у процентній шкалі. Оцінка позиції за шкалою кожного об'єкта визначається шляхом медіани з розподілів значень належності. Для побудови шкали використовується метод, оснований на законі Терстона про вимірювання категорій. Процедура, що потребує сортування n об'єктів $(k + 1)$ категорії на деякому континуумі властивостей N експертами, дає розподіл частоти для кожного об'єкта за категоріями. Середні значення границь категорій, отримані методом найменших квадратів, дозволяють визначити значення оцінок об'єктів на шкалі.

3.6 Побудова функцій належності на основі експертних оцінок

Розглянемо метод побудови функцій належності нечітких чисел, приблизно рівних деякому чіткому числу, та наближених інтервальних оцінок. Задача зводиться до знаходження параметрів наперед заданої (експоненціальної) функції, при розв'язанні якої використовуються результати експертного опитування [20].

Загальний вигляд функції належності для наближених точкових оцінок (наприклад X, наближено дорівнює 10) наведено на рисунку 3.4, а, а для інтервальних оцінок (вигляду X знаходиться приблизно в інтервалі від 8 до 11) – на рисунку 3.4, б.



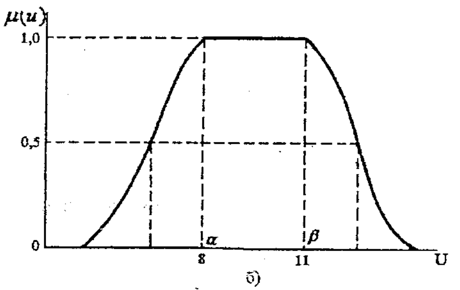


Рисунок 3.4 – Функції належності нечітких множин для:
а) наближеної точкової оцінки; б) наближеної інтервальної оцінки

Очевидно, що функцію, подану на рисунку 3.4, б, можна побудувати таким чином:

$$\text{якщо } \alpha \le x \le \beta \text{, то } \mu_{(\alpha,\beta)}(x) = 1;$$

$$\text{якщо } x \le \alpha \text{, то } \mu_{(\alpha,\beta)}(x) = \mu_{\alpha}(x);$$

$$\text{якщо } x < \alpha \text{, то } \mu_{(\alpha,\beta)}(x) = \mu_{\beta}(x),$$

де $\mu_{(\alpha,\beta)}(x)$ – функція належності нечіткому інтервалу (α,β);

$\mu_{\alpha}(x)$ та $\mu_{\beta}(x)$ – функції належності нечітким множинам чисел, приблизно рівних відповідно α і β, що будуються аналогічно функції, графік якої наведений на рисунку 3.4, а.

При побудові функції належності чисел, приблизно рівних деякому числу *K*, зазвичай використовують функцію

$$\mu_k(x) = e^{-\alpha(K-x)^2},$$

де α залежить від потрібного ступеня нечіткості $\mu_k(x)$ і визначається за допомогою виразу

$$\alpha = \frac{4 \ln 0,5}{\beta^2},$$

де β – відстань між точками переходу для $\mu_k(x)$, тобто точками, в яких функція набуває значень 0,5. На рисунку 3.4, а ці точки позначені як *a* і *b*.

Таким чином, задача побудови $\mu_k(x)$ для деякого числа зводиться до пошуку параметрів *a* та *b*, визначення за їх допомогою значення $\beta(x)$, на основі якого визначається значення α, після чого безпосередньо будується $\mu_k(x)$.

Для визначення множини вигляду «Число, приблизно рівне *K*», слід з'ясувати, як саме експерти уявляють границі класів таких чисел.

Для цього виконуються статистичні дослідження. Експертам пропонують назвати такі *a*(*K*) і *b*(*K*), які, на їх думку, відділяють числа, приблизно рівні заданому *K*, від чисел, що не є такими. Після певної обробки результати зводяться до таблиці.

Розглянемо натуральне число *K*. Нехай його менша значуща цифра має порядок *q*. Розіб'ємо можливі значення *q* на класи віднімань за модулем 3 і введемо змінну *d*, значення якої будуть представниками даних класів {0, 1, 2}. Отримаємо класи еквівалентності:

$$M_d\{d = 0, 1, 2\},\ d = q \bmod(3).$$

Введемо цілочислову змінну *X*, яка змінюється у проміжку від 0 до 99, та будемо вважати, що для кожного її значення відомі параметри $a(X)$ і $b(X)$, а, отже, і $\beta(x)$. Припустимо, що на основі результатів опитування виявилося, що значення $\beta(x)$ в залежності від *X* можна знаходити так, як показано у таблиці 3.8 ([...] – ціла частина числа). Значення $\beta(x)$ залежить також від того, до якого класу M_d належить число *K*.

Таблиця 3.8 – Відстань між точками переходу

X	$\beta(x)$
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9	$0{,}46x$
10, 20, 30, 40, 60, 80, 90	$(0{,}357-0{,}00163\,x)x$
35, 45, 55, 65, 75, 85, 95	$(0{,}213-0{,}00067\,x)x$
5	2,8
15	6,48
25	6,75
50	24
Решта двозначних чисел	$\frac{1}{2}\left(\left(\beta\left[\frac{x}{10}\right]\cdot 10+5\right)+\beta\left(x-\left[\frac{x}{10}\right]\cdot 10\right)\right)$

Позначимо через r_q цифру, яка знаходиться в *q*-му розряді числа *K*. Тоді:

1. При $K \in M_0$ (наприклад, 300, 300 000, $5 \cdot 10^8$ і т. ін.) $\beta(K)$ залежить тільки від молодшої значущої цифри числа *K*, тобто від r_q: $X = r_q \cdot 10$; $\beta(K) = \beta(x) \cdot 10^{q-2}$, де $\beta(x)$ знаходиться з таблиці 3.7.

2. При $K \in M_1$ (наприклад, 101, 20200, $5 \cdot 10^9$ і т. д.) можливі обидва варіанти:

а) $r_{q+1} = 0$, тоді $\beta(K)$ залежить тільки від r_q: $x = r_q$; $\beta(K) = \beta(x) \cdot 10^{q-1}$;

б) $r_{q+1} \neq 0$, тоді $\beta(K)$ залежить від двох останніх значущих цифр числа *K*: $x = r_{q+1} \cdot 10 + r_q$; $\beta(K) = \beta(x) \cdot 10^{q-1}$.

3. При $K \in M_2$ (наприклад, 2140, 20 і т. ін.) також можливі обидва варіанти:

а) $r_{q+1} = 0$, тоді $x = r_q \cdot 10$; $\beta(K) = \beta(x) \cdot 10^{q-2}$;

б) $r_{q+1} \neq 0$, тоді $x = r_{q+1} \cdot 10 + r_q$; $\beta(K) = \beta(x) \cdot 10^{q-1}$.

Після того, як для числа K знайдено значне $\beta(K)$, будуємо функцію належності $\mu_k(x)$ для $x \in X$, використовуючи формулу

$$\alpha = \frac{4\ln 0{,}5}{\beta^2}.$$

За допомогою наведеного алгоритму можуть бути також побудовані функції належності у випадку, коли K виражається десятковими дробами. При цьому алгоритм застосовується до мантиси дробу, а згодом враховується її порядок.

Приклад 3.4. Нехай задано наближену точкову оцінку X, яка приблизно дорівнює 235, тобто $K = 235$. Визначаємо значення змінних q, r_q, r_{q+1} і d. Найменша значуща цифра числа K розміщена у розряді одиниць, тобто маємо $q = 1$; $r_1 = 5$ – молодша значуща цифра числа K; $r_2 = 3$ – цифра з порядком на одиницю вищим за порядок молодшої значущої цифри.

При діленні числа q на 3 в останку отримуємо 1, тобто число K належить класу еквівалентності M_1 і змінна d отримує значення одиниці. Згідно з описаним методом, переходимо до п. 2. б, оскільки $r_{q+1} = r_2 \neq 0$. Тоді вираз для змінної X: $X = r_{q+1} \cdot 10 + r_q = r_2 \cdot 10 + r_1 = 30 + 5 = 35$.

Визначимо величину $\beta(K) = \beta(x) \cdot 10^{q-1}$, де $\beta(x)$ знаходиться з таблиці 3.8. Наприклад, для $\beta(35)$ отримаємо $\beta(x) = (0{,}213 - 0{,}0006x)x$; $\beta(35) = (0{,}213 - 0{,}0006 \cdot 35) \cdot 35 = 6{,}634$. Кінцевий результат

$$\beta(235) = \beta(35) \cdot 10^{1-1} = 6{,}634.$$

Тепер, знаючи відстань між точками переходу, можна побудувати функцію належності нечіткої множини, що відповідає експертній оцінці X «Приблизно рівний 235», за формулою

$$\mu_{235}(x) = e^{-\alpha(235-x)^2}, \ \alpha = -\frac{4\ln 0{,}5}{\beta^2(235)} = \frac{4\ln 0{,}5}{6{,}634^2} = 0{,}062$$

Отримана функція належності наведена на рисунку 3.5, де a і b є точками переходу:

$$a = K - \frac{\beta(K)}{2} = 235 - \frac{6{,}634}{2} = 231{,}683;$$

$$b = K + \frac{\beta(K)}{2} = 235 + \frac{6{,}634}{2} = 238{,}317.$$

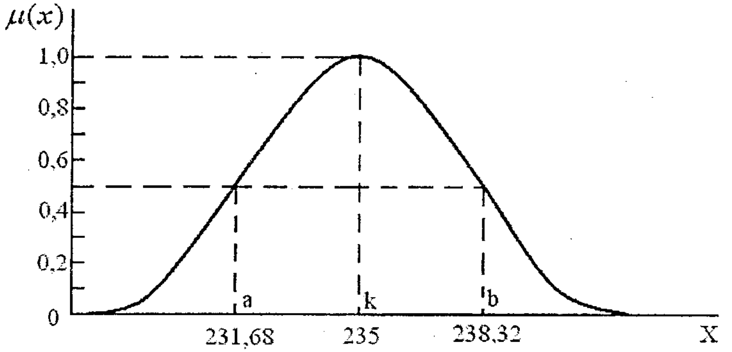


Рисунок 3.5 – Функція належності нечіткої множини, яка відповідає точковій оцінці «Приблизно рівний 235»

Приклад 3.5. Нехай задано оцінку «X приблизно знаходиться в інтервалі від 8 до 11». На цьому інтервалі функція належності дорівнює одиниці, а за його межами має повторювати функції належності, що відповідають точковим оцінкам «X приблизно рівний 8» та «X приблизно рівний 11» зліва і справа від інтервалу. Для побудови функції належності нечіткої множини, що відповідає інтервальній оцінці, необхідно двічі скористатися описаним вище методом.

Маємо $K = 8$. Знаходимо q, r_q, r_{q+1} і d; $q = 1$, оскільки єдина значуща цифра знаходиться в розряді одиниць; $r_1 = 8$, $r_{q+1} = r_2 = 0$, таким чином в розряді десятків значущі цифри відсутні. При діленні q на 3 в залишку отримуємо 1, звідси, $d = 1$. Відповідно до методу переходимо до п. 2. а. Вираз для знаходження змінної X : $X = r_q = r_1 = 8$. Для величини $\beta(K)$ маємо $\beta(K) = \beta(x)\cdot 10^{q-1}$; $\beta(8)\cdot 10^{1-1} = \beta(8)$, де $\beta(8)$ знаходиться з таблиці 3.7:

$$\beta(8) = 0{,}46\cdot 8 = 3{,}68.$$

Тепер знайдемо відстань між точками переходу $\beta(K)$ для K=11. Знаходимо значення змінних q, r_q, r_{q+1} і d: молодша значуща цифра числа K стоїть в розряді одиниць, тобто маємо $q = 1$, $r_q = r_1 = 1$; $r_{q+1} = r_2 = 1$ – цифра, порядок якої на одиницю вищий порядку молодшої значущої цифри K. При діленні числа q на 3 в остачі отримуємо одиницю, таким чином число K належить до класу еквівалентності M_1, змінна d отримує значення одиниці.

Оскільки $r_{q+1} \neq 0$, переходимо до п. 2. б алгоритму. Отримуємо $X' = r_{q+1}\cdot 10 + r_q = r_2\cdot 10 + r_1 = 10 + 1 = 11$. Величина $\beta(K)$ визначається відповідно до виразу $\beta(K) = \beta(x)\cdot 10^{q-1}$, де $\beta(x) = \beta(11)$ знаходиться з таблиці 3.7, тобто

$$\beta(11)=\frac{1}{2}\left(\left(\beta\left[\frac{11}{10}\right]\cdot 10+5\right)+\beta\left(11-\left[\frac{11}{10}\right]\cdot 10\right)\right)=\frac{1}{2}(\beta(15)+\beta(1)).$$

Тут $\beta(15)=6{,}45$; $\beta(1)=0{,}46$ знайдені з таблиці 3.7. Таким чином

$$\beta(11)=\frac{1}{2}(6{,}45+0{,}46)=3{,}455.$$

Для побудови функції належності нечіткої множини, що відповідає інтервальній оцінці, побудуємо функції належності нечітких множин, що відповідають точковим оцінкам з вершинами 8 та 11.

Функція належності буде мати вигляд, наведений на рисунку 3.6, з точками переходу:

$$a=8-\frac{\beta(8)}{2}=8-\frac{3{,}68}{2}=6{,}16;$$

$$b=11+\frac{\beta(11)}{2}=11+\frac{3{,}455}{2}=12{,}728.$$

3.7. Параметричний підхід до побудови функцій належності

Розглянемо метод побудови модифікованих нечітких термів на основі наявних термів. При цьому визначаються параметри дробово-лінійного перетворення, що відповідає нечіткому модифікатору, з використанням якого і перетворюється вихідний терм [20].

Метод базується на припущенні, що експерт, характеризуючи лінгвістичне значення будь-якої ознаки, з мінімальним навантаженням може вказати три точки універсальної шкали: *A*, *B*, *C*, серед яких *B* і *C* – точки, які на його думку (ще, чи вже) не належать описуваному лінгвістичному значенню, *A* – точка, що напевно належить йому.

Приклад побудови характеристики значень лінгвістичної змінної «Вік» наведено на рисунку 3.7.

1. На прямій $y=0$ відмічається точка навпроти того значення основи x_1, яка чітко належить даному терму (точки *A* і *D*).

2. На основі (вісь *X*) зліва і справа від x_1 відмічаються точки, найближчі до x_1, які точно не належать даному терму (точки *B*, *C* і *E*).

3. Відмічені на осі *X* та на прямій $y=1$ точки з'єднуються відрізками прямої.

4. Штриховкою позначається частина носія, яка відноситься до побудованого опису.

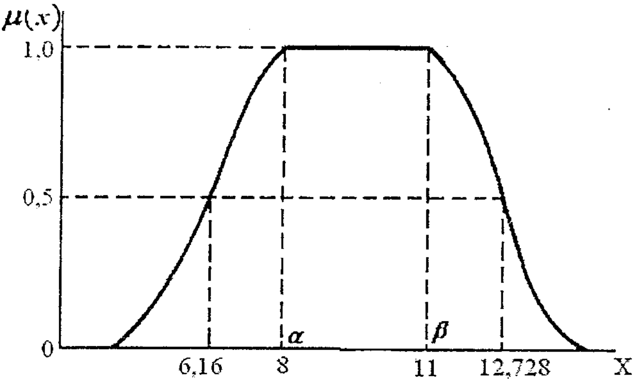


Рисунок 3.6 – Функція належності нечіткої множини, яка відповідає інтервальній оцінці «Приблизно в інтервалі від 8 до 11»

Нехай задано параметричний опис термів t та t' – обидва значення деякої лінгвістичної змінної. Один із термів може подавати модифікацію (обмеження) іншого: $t' = h(t)$, де h– обмеження на t типу «Достатньо», «Більш-Менш», «Не дуже» і т. ін. Задача полягає у тому, щоб, використовуючи параметри термів $t\colon(z_1, z_2, z_3)$ і $t'\colon(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, здійснити перехід від t до t' (параметри вважаються впорядкованими відношенням «менше»).

Основні вигляди функцій належності наведені на рисунку 3.7. Очевидно, що функцію S-вигляду (рис. 3.8, в) можна розглядати як вироджений випадок трикутної функції (рис. 3.8, а), в якій один з параметрів z_1 чи z_2 прямує до нескінченності. Таким чином, задача полягає в тому, щоб описати перехід між будь-якими двома формами, наведеними на рисунку 3.7.

Для розв'язання цієї задачі використовується апарат автоморфних функцій. Розглянемо дробово-лінійне відображення прямої на себе, вигляду

$$T : x \to \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Ці перетворення зручно розширити, додавши до існуючої прямої R точку ∞. Якщо вважати, що $T(-\delta/\gamma) = \infty$ і $T(\infty) = \alpha/\gamma$, то виявиться, що дробово-лінійне перетворення взаємно однозначно відображає розширену пряму $R \cup \{\infty\}$ на себе. Нескінченна множина перетворень

$$T : x \to \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

де α, β, γ, δ – дійсні числа, що являють собою так звану модулярну групу: обернені перетворення і добутки дробово-лінійних відображень також є дробово-лінійними.

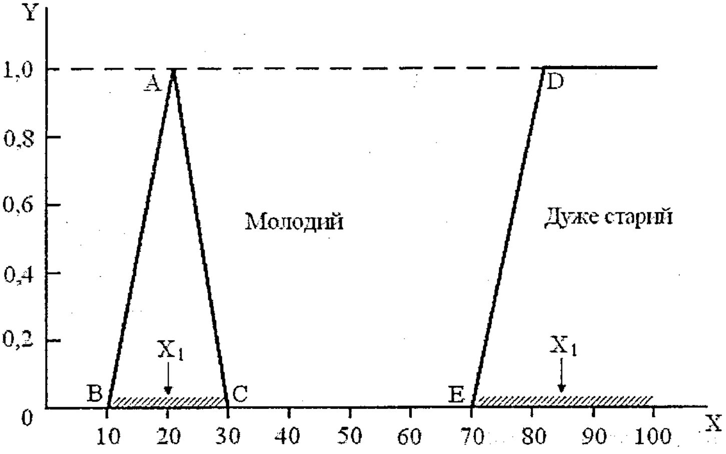


Рисунок 3.7 – Функції належності непарних термів використаної лінгвістичної змінної «Вік»

Перетворення T^1, обернене T, отримують розв'язуванням рівняння $z = \dfrac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ відносно ω:

$$T^{-1} : \omega = \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha}.$$

Таким чином, при параметричному поданні функції належності задача охарактеризування переходу від одного терму $t{:}(z_1, z_2, z_3)$ до іншого $t'{:}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ розв'язується безпосереднім підрахунком чотирьох параметрів-коефіцієнтів дробово-лінійного перетворення за формулами:

$$\alpha = z_1 z_2 (\omega_1 - \omega_2) + z_1 z_3 (\omega_3 - \omega_1) + z_2 z_3 (\omega_2 - \omega_3);$$
$$\beta = \omega_1 \omega_2 z_3 (z_1 - z_2) + \omega_1 \omega_3 z_2 (z_3 - z_1) + \omega_2 \omega_3 z_1 (z_2 - z_3);$$
$$\gamma = z_2 (\omega_1 - \omega_2) + z_1 (\omega_3 - \omega_2) + z_3 (\omega_2 - \omega_1);$$
$$\delta = \omega_1 \omega_2 (z_1 - z_2) + \omega_1 \omega_3 (z_3 - z_1) + \omega_2 \omega_3 (z_2 - z_3).$$

Ці ж коефіцієнти при підстановці в (1.5) визначають обернений перехід від t' до t.

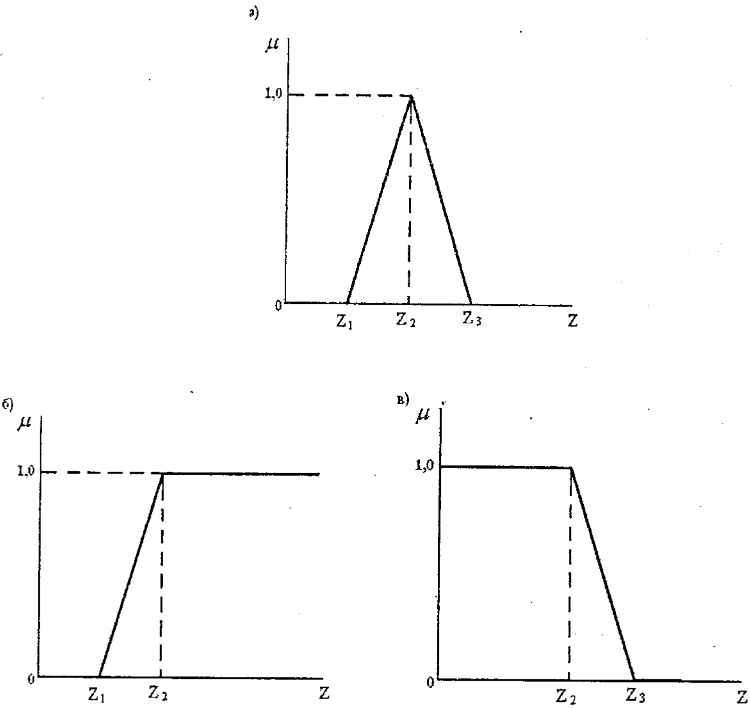


Рисунок 3.8 – Параметричне значення термів

Розглянемо тепер перехід від терму t трикутної форми до терму t' з функцією належності S-вигляду. Для дробово-лінійних перетворень цьому випадку відповідає перехід однієї з крайніх заданих точок в положенні нескінченно віддаленої точки. При $z_1 = \infty$ (перехід від рис. 3.8, а, до рис. 3.8, в), параметри дробово-лінійного перетворення набувають вигляду:

$$\alpha = z_2(\omega_2 - \omega_1) + z_3(\omega_1 - \omega_3);$$

$$\beta = \omega_2 z_3(\omega_3 - \omega_1) + \omega_3 z_2(\omega_1 - \omega_2);$$

$$\gamma = (\omega_2 - \omega_3); \qquad \delta = \omega_1(\omega_3 - \omega_2).$$

Якщо $z_3 = \infty$ (перехід від рис. 3.8 а, до рис. 3.8 б), то

$$\alpha = z_1(\omega_1 - \omega_3) + z_2(\omega_3 - \omega_2);$$

$$\beta = \omega_1 z_2(\omega_2 - \omega_3) + \omega_2 z_1(\omega_3 - \omega_1);$$

$$\gamma = (\omega_1 - \omega_2); \quad \delta = \omega_3(\omega_2 - \omega_1).$$

Розглянемо тепер випадок, коли обидва терми описуються тільки двома параметрами, тобто коли функції належності подаються функціями S-вигляду або просто нахиленою кривою. В цьому випадку має місце лінійне відображення прямої

$$L : x \to \alpha x + \beta, \quad a \neq 0.$$

Параметри перетворення (3.9)

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad \beta = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Обернений перехід $(y \to x)$ здійснюється за формулою

$$x = \frac{1}{\alpha} y + \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Приклад 3.6. Нехай експертом складені описи вихідного терму «Прохолодна» і модифікованого терму «Не прохолодна», отриманого за допомогою модифікатора «не» для змінної «Температура води для купання в Чорному морі» (рис. 3.9, а).

В даному випадку необхідно виконати перехід від терму з S-видною функцією належності ПРОХОЛОДНА ($z_1 = \infty$, $z_2 = 14$, $z_3 = 16$) до терму трикутної форми НЕ ПРОХОЛОДНА ($\omega_1 = 17$, $\omega_2 = 18$, $\omega_3 = 20$). Перехід від вихідного терму до модифікованого виконується відповідно до формули $\omega = (-\delta z + \beta)/(\gamma z - \alpha)$, де z – точки, що належать вихідному терму, а обернений перехід – за формулою $z = (\alpha\omega + \beta)/(\gamma\omega + \delta)$. Для обчислення коефіцієнтів дробово-лінійних перетворень використовуються вирази

$$\alpha = z_2(\omega_2 - \omega_1) + z_3(\omega_1 - \omega_3) = 14 \cdot (18 - 17) + 16 \cdot (17 - 20) = -34 ;$$

$$\beta = \omega_2 z_3(\omega_3 - \omega_1) + \omega_3 z_2(\omega_1 - \omega_2) = 18 \cdot 16 \cdot (20 - 17) + 20 \cdot 14 \cdot (17 - 18) = 584 ;$$

$$\gamma = \omega_2 - \omega_3 = 18 - 20 = -2;$$

$$\delta = \omega_1(\omega_3 - \omega_2) = 17 \cdot (20 - 18) = 34.$$

Нехай тепер є терм КРИЖАНА ($z_1 = \infty, z_2 = 4, z_3 = 6$). Використавши знайдене перетворення, визначимо модифіковане значення терму НЕКРИЖАНА:

$$z_1 = \infty; \; \omega_1 = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{34}{2} = 17;$$

$$z_2 = 4; \; \omega_2 = \frac{-\delta z_2 + \beta}{\gamma z_2 - \alpha} = \frac{-34 \cdot 4 + 584}{-2 \cdot 4 + 34} = 17{,}2;$$

$$z_3 = 6; \; \omega_3 = \frac{-34{,}6 + 584}{-2 \cdot 6 + 34} = 17{,}3;$$

Отриманий терм наведений на рисунку 3.9, а.

Нехай тепер є терм КРИЖАНА ($z_1 = \infty, z_2 = 4, z_3 = 6$). Використавши знайдене перетворення, визначимо модифіковане значення терму НЕКРИЖАНА:

$$z_1 = \infty;\ \omega_1 = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{34}{2} = 17;$$

$$z_2 = 4;\ \ \omega_2 = \frac{-\delta z_2 + \beta}{\gamma z_2 - \alpha} = \frac{-34 \cdot 4 + 584}{-2 \cdot 4 + 34} = 17{,}2;$$

$$z_3 = 6;\ \ \omega_3 = \frac{-34{,}6 + 584}{-2 \cdot 6 + 34} = 17{,}3;$$

Отриманий терм наведений на рисунку 3.9, а.

Приклад 3.7. Розглянемо перехід між обома термами, які мають функцію належності S-вигляду: вихідний терм «Нетепла» ($z_1 = \infty, z_2 = 16$, $z_3 = 17$) і модифікований терм «Дуже нетепла» ($\omega_1 = \infty, \omega_2 = 13, \omega_3 = 14$). Перехід від вихідного терму до модифікованого виконується за формулою $\omega = \alpha z + \beta$, де z, ω – точки, що належать вихідному і модифікованому термам, відповідно. Коефіцієнти для опису переходу:

$$\alpha = \frac{\omega_3 - \omega_2}{z_3 - z_2} = \frac{14 - 13}{17 - 16} = 1;$$

$$\beta = \frac{\omega_2 z_3 - \omega_3 z_2}{z_3 - z_2} = \frac{13 \cdot 17 - 16 \cdot 14}{1} = \frac{221 - 224}{1} = 3.$$

Обернений перехід виконується за формулою

$$z = \frac{1}{\alpha}\omega - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Використавши знайдене перетворення, перейдемо від терму «Прохолодна» ($z_1 = \infty, z_2 = 14, z_3 = 16$) до терму «Дуже прохолодна»:

$$z_1 = \infty;\ \omega_1 = \infty;\ z_2 = 14;\ \omega_2 = \alpha z_2 + \beta = 1 \cdot 14 - 3 = 11;$$

$$z_3 = 16;\ \omega_3 = 1 \cdot 16 - 3 = 13.$$

Отриманий терм ($\omega_1 = \infty, \omega_2 = 11, \omega_3 = 11$) поданий на рисунку 3.9, б.

Приклад 3.8. Розглянемо перехід між двома термами, які мають трикутну форму: вихідний терм ХОЛОДНА ($z_1 = 4, z_2 = 10, z_3 = 14$) та модифікований терм ДУЖЕ ХОЛОДНА ($\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 9$, $\omega_3 = 11$) для цієї ж змінної «Температура води для купання в Чорному морі».

Перехід від вихідного терму до модифікованого виконується відповідно до виразу $\omega = (-\delta z + \beta)/(\gamma z - \alpha)$, а обернений перехід – за формулою $z = (\alpha\omega + \beta)/(\gamma\omega + \delta)$, де z, ω – точки, що належать вихідному та модифікованому терму, відповідно.

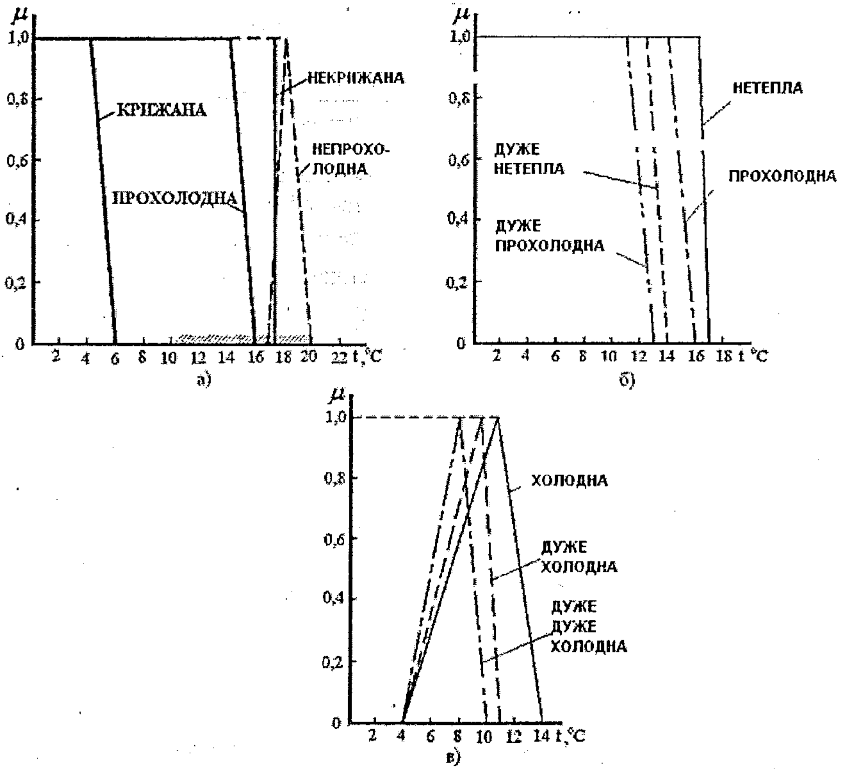


Рисунок 3.9 – Терми лінгвістичної змінної «Температура води в морі»:
а – перехід від трикутної функції належності до функції належності S-вигляду; *б* – перехід між двома функціями належності S-вигляду; *в* – перехід між двома трикутними функціями належності

Коефіцієнти для опису переходу:

$$\alpha = z_1 z_2(\omega_1-\omega_2)+z_1 z_3(\omega_3-\omega_1)+z_2 z_3(\omega_2-\omega_3) = 4\cdot 10\cdot(4-9)+$$
$$+4\cdot 14\cdot(9-11)+4\cdot(9-11) = -88;$$

$$\beta = \omega_1\omega_2 z_3(z_1-z_2)+\omega_1\omega_3 z_2(z_3-z_1)+\omega_2\omega_3 z_1(z_2-z_3) = 4\cdot 9\cdot 14\cdot(4-10)+$$
$$+4\cdot 11\cdot 10\cdot(14-9)++9\cdot 11\cdot 4\cdot(10-14) = -208;$$

$$\gamma = z_2(\omega_1-\omega_3)+z_1(\omega_3-\omega_2)+z_3(\omega_2-\omega_1) = 10\cdot(4-11)+$$
$$+4\cdot(11-9)+14\cdot(9-4) = 8;$$

$$\delta = \omega_1\omega_2(z_1-z_2)+\omega_1\omega_3(z_3-z_1)+\omega_2\omega_3(z_2-z_3) = 4\cdot 9\cdot(4-10)+$$
$$+4\cdot 11\cdot(14-4)+9\cdot 11\cdot(10-14) = -172.$$

Наприклад, тепер параметри терму «Дуже дуже холодна» можна отримати, застосувавши перетворення до терму «Дуже холодна» ($z_1 = 4$, $z_2 = 9$, $z_3 = 11$):

$$z_1 = 4;\ \omega_1 = \frac{-\delta z_1+\beta}{\gamma z_1-\alpha} = \frac{172\cdot 4-208}{8\cdot 4+88} = 4;$$

$$z_2 = 9;\ \omega_2 = \frac{172\cdot 9-208}{8\cdot 9+88} = 8;$$

$$z_3 = 11;\ \omega_3 = \frac{172\cdot 11-208}{8\cdot 11+88} = 10;$$

3.8 Побудова функцій належності на основі інтервальних оцінок

Для розв'язування задач вибору, в яких відсутня чітка грань між припустимим та неприпустимим (в просторі некерованих параметрів) та між ідеальним та незадовільним станами (в просторі критеріїв) використовується метод побудови функції належності на основі інтервальних оцінок [1, 6].

Розглянемо ситуацію, в якій відомим є зв'язок між деяким параметром Z та критерієм вибору h.

Наприклад, при конкурсному відборі зразків нової техніки одним з критеріїв (h) є точність роботи. Особі, яка приймає рішення, відомо, що критерій h залежить від освітленості (параметр Z) середовища функціонування виробів, які аналізуються. При цьому група експертів, яка підготовлювала рішення, ставить перед собою деяку мету, наприклад вибрати «хорошу» альтернативу або вибрати «об'єкт на рівні світових стандартів» (мета може бути повідомлена і замовником – організатором експертизи). Початкова мета експертизи надається в лінгвістичній формі та вносить елемент нечіткості в наступний аналіз, який в результаті цього повинен включати формалізацію використовуваних понять.

Теорія можливостей [9] базується на припущені, що експерт може вказати інтервал $[h^o;\ h^*]$ значень критерію h, який відповідає вимозі, наприклад, вибрати, «хороший» об'єкт. При цьому граничні значення інтервалу мають таку інтерпретацію. Нехай h^α є результатом вимірювання значення характеристики h для об'єкта α. Тоді h^* є границею «ідеальної» області, тобто, якщо $h^{\alpha} \geq h^{*}$, об'єкт слід визнати таким, що ідеально відповідає поняттю «хороший». Можливість такого твердження $\pi(Q) = 1{,}0$ (Q– суб'єктивна подія, яка полягає у тому, що об'єкт, з точки зору експерта, знаходиться у стані «хороший»).

Якщо ж $h^{\alpha} \leq h^{0}$, вважається, що можливість знаходження об'єкта d у стані «хороший» $\pi(Q) = 0$. Очевидно, що при $h^{o} < h^{\alpha} < h^{*}$ відповідні можливості мають значення $0 < \pi(Q) < 1{,}0$.

Розглянемо способи знаходження оцінки $\pi(Q)$. Нехай $h^{*} = 80$, $h^{\circ} = 50, h^{\alpha} = 70$. Тоді об'єкт a знаходиться ближче до ідеальної границі (рис. 3.10), якщо для вимірювання користуватись лінійною часткою.

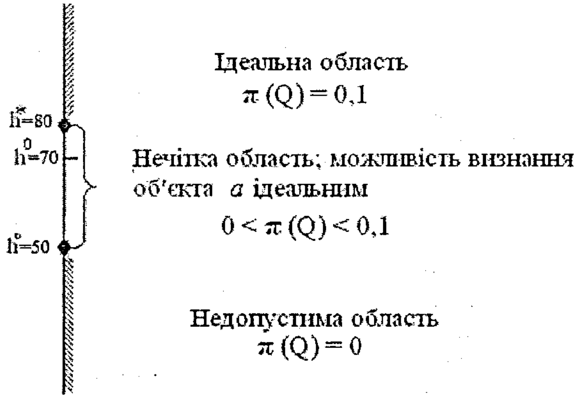


Рисунок 3.10 – Розміщення областей критеріальних значень

Знання експерта дозволять використання робочої гіпотези, яка полягає в тому, що із наближенням значення h^{0} до границі h^{*} можливість призначення a «хорошим» об'єктом лінійно зростає. Якщо експерт підтверджує вказану логіку міркувань, можна скористатися формулою:

$$\pi(Q) = \begin{cases} 0, \text{якщо} h^{\alpha} \geq h^{o} \\ \dfrac{h^{\alpha} - h^{o}}{h^{*} - h^{o}}, \text{якщо } h^{o} < h^{\alpha} < h^{*} \\ 1, \text{якщо } h^{\alpha} \geq h^{*} \end{cases} \tag{3.1}$$

У даному прикладі $\pi(Q) = \dfrac{70-50}{80-50} = \dfrac{20}{30} = 0{,}67$. Результатом є твердження, що можливість визнання об'єкта a «хорошим» складає $\pi(Q) = 0{,}67$. Графічна інтерпретація викладеного показана на рисунку 3.11, а.

До цього часу передбачалося, що h є критерієм типу «виграш», тобто $h^* > h^o$, при всіх значеннях z. Якщо $h^o > h^*$ (критерій типу «штраф»), то розрахунок можливостей проводиться згідно з формулою (3.1).

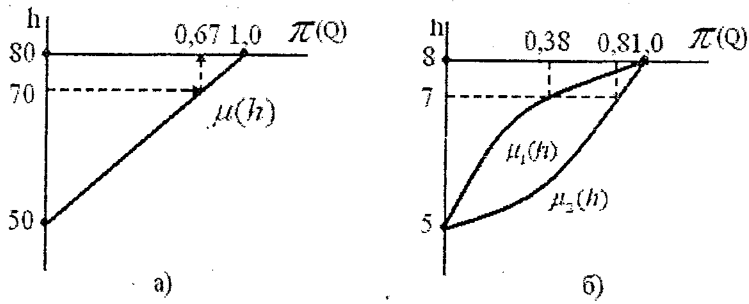


Рисунок 3.11 – Способи визначення оцінок можливостей:
а – лінійний випадок; б – нелінійний випадок

Наприклад, якщо при випробовуванні на конкурсі-екзамені на заміщення вакантних посад операторів пропонують розв'язати задачі, впорядковані за складністю, то експерт може вважати, що розв'язання шести – семи задач за фіксований час ще не є чимось особливим (рис. 3.10, б), а розв'язання восьми задач дозволяє признати претендента «хорошим» оператором. Така думка може бути пов'язана з суб'єктивними спостереженнями загального рівня претендентів при повторних експертизах. Може мати місце і протилежна думка (випукла функція $\mu(h)$).

Звернемося до побудови функції належності на множині значень параметра z при наявності інтервальних оцінок $[h^o; h^*]$.

Задачу вибору моделі можна розв'язати приблизно, пропонуючи експертові вказати в одиничному інтервалі [0; 1] місце деякої середньої альтернативи. Наприклад, випробовуваний розв'язав 6,5 завдань, або точність роботи аналізованого виробу 65 одиниць (рис. 3.11, а). Експертові задається запитання «Де на шкалі [0; 1] знаходиться такий об'єкт?». Відповідь «Біля точки 0,5» дає гіпотезу про лінійну модель, інші відповіді – про опуклу вгору або вниз функцію $\mu(h)$. Наявність трьох значень функції $\mu(h)$ (вказане експертом, а також 0 і 1) дозволяє повністю відновити її в інтервалі $[h^o; h^*]$. При цьому необхідно з'ясувати і зіставити думку експерта про точність своєї відповіді з точністю вимірів або оцінки характеристики h^α, а також з необхідною точністю експертизи. У прикладі вибору виробів експерти можуть вважати, що границі h^o і h^* при фіксованому освітленні $z = 50$ *лк* мають значення, наведені на рисунку 3.12.

Зі зниженням освітленості вироби даного типу працюють гірше в сенсі критерію h, тому експертам можна запропонувати оцінити h^o і h^* ще в декількох точках z. Апроксимуючи дані, отримуємо аналітичні вирази двох функцій $h^* = f^*(z)$ і $h^o = f^o(z)$, які називаються обмеженнями рівнів. Ці функції шляхом експертного опиту можна побудувати так, щоб охопити весь діапазон реальної зміни параметра Z.

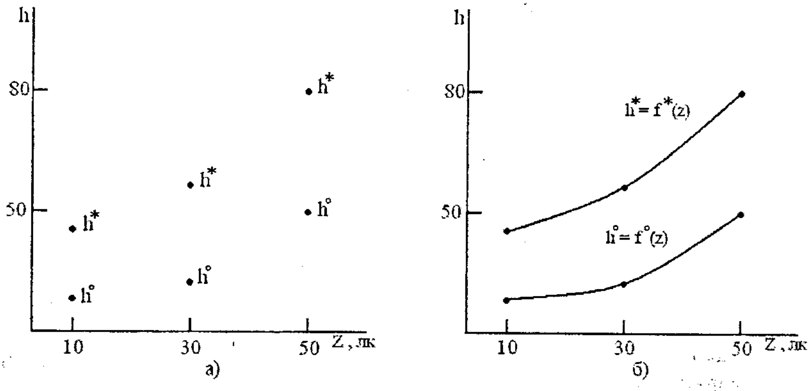


Рисунок 3.12 – Експертні дані: а) дискретні оцінки; б) обмеження рівня

Для повного уявлення про альтернативу a необхідно провести ряд експериментів з визначенням оцінки h^α при різних значеннях z. В результаті апроксимації отримаємо функцію $h^\alpha = f^\alpha(z)$ подану на рисунку 3.13, а. Для ряду значень z за формулою (3.1) розраховуються значення $\pi_z(Q)$, апроксимуючи які отримуємо міру відповідності альтернативи поняттю експерта «хороша альтернатива» на множині значень параметра Z (рис. 3.13, б).

Отримана функція називається розподілом можливостей і є нечітким обмеженням на значеннях параметра Z: можливість вживання виробу плавно змінюється від ідеальної придатності до недопустимості його використання.

На практиці можливі різні думки експертів щодо характеру рівневих обмежень (рис. 3.14). Можна назвати основні типи і вірогідні ситуації, що обумовлюють певний вигляд функцій $h^o = f^o(z)$ і $h^* = f^*(z)$:

а) погоджені функції можуть виникати у випадках досить ясних уявлень експертів про наявне середовище, за відсутності глобального впливу значення параметра на сам спосіб розв'язання задачі вибору;

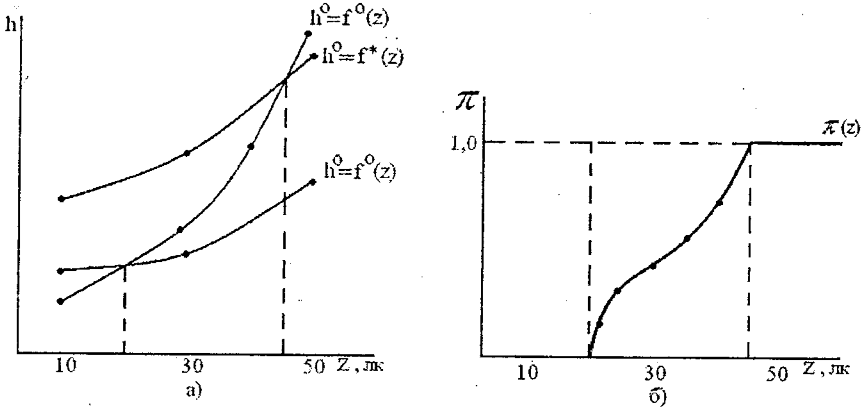


Рисунок 3.13 – Результати оцінки альтернативи a: а) функція $h^{\alpha} = f^{\alpha}(z)$; б) можливість $\pi_z(Q)$ відповідності альтернативи поняттю «хороша»

б) розбіжні функції можуть свідчити про те, що експертові недостатньо відома поведінка об'єкта при великих значеннях параметра Z і великі значення z маловірогідні;

в) збіжні функції, можуть виникнути в завданнях оцінювання об'єктів, що мають екстремальний характер функціонування при великих значеннях z;

г) функції з кінцевими розривами відображають або якісні скачки в процесах фізичного світу, або вплив законів, нормативних актів на думку експертів;

д) функції, що з'єднуються і відокремлюються, можуть виникнути у випадках, коли в деяких областях значень параметра Z експерти мають чітку думку (вимоги замовників, ДСТУ і тому подібне);

е) неузгоджені функції подають випадок, коли заздалегідь важко знайти мотивацію такій думці експерта (подібна модель «байдужості», ймовірно, є наслідком помилки експерта);

ж) функції що з'єднуються та роз'єднуються можуть виникнути у випадках, коли в деяких областях значень параметра 1 експерти мають чітку думку (вимоги замовників, ДСТУ і т. ін.);

и) неузгоджені функції подають випадок, коли заздалегідь важко знайти мотивацію такій думці експерта (подібна модель «байдужості», імовірно, є наслідком помилки експерта);

к) унімодальні функції мають використовуватися експертом, якщо йому відомо, що всі об'єкти мають унімодальну характеристику $h^{\alpha} = f^{\alpha}(z)$;

л) пересічні функції відповідають «реверсивному» завданню вибору, коли при певних значеннях параметра Z змінюється характер використання критерію (від критерію типу «виграш» до критерію типу «штраф» або навпаки).

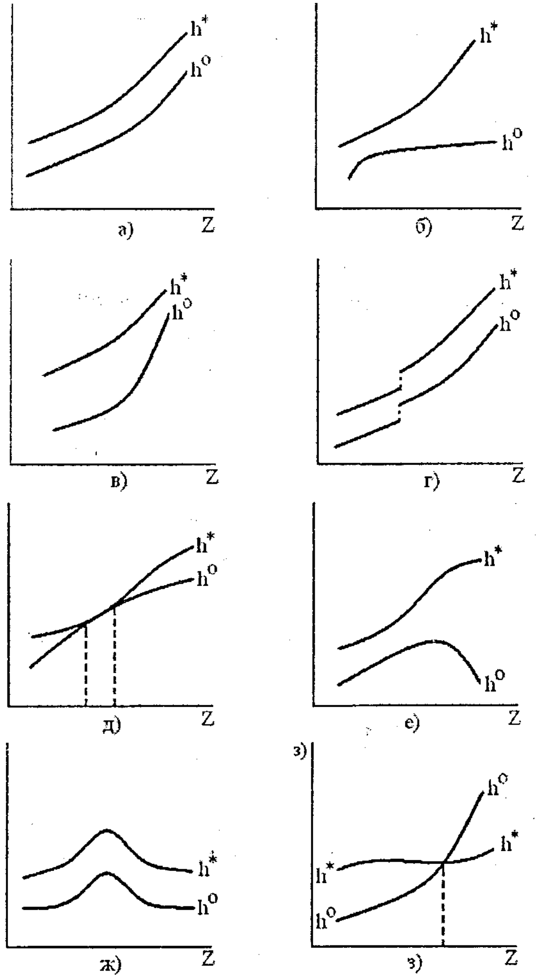


Рисунок 3.14 – Види обмежень рівня

На рисунку 3.14, а – г, є наведені рівневі обмеження, що відображають ситуацію, коли функція $h^{\alpha} = f^{\alpha}(z)$ є монотонно зростаючою або багатоекстремальною функцією з тенденцією загального збільшення.

Інакше природно використовувати монотонно спадні функції типу а – д.

Використання монотонно спадних рівневих обмежень при зростаючих характеристиках об'єктів $h^{\alpha} = f^{\alpha}(z)$ (і навпаки) свідчить або про непоінформованість експерта, або про наявність альтернатив, істотно не відповідних вимогам, що пред'являються ним. Найбільш типовими розподілами можливостей є амодальні або унімодальні функції (рис. 3.15).

Якщо об'єкт α у всьому даному діапазоні значень параметра Z не має $h^{\alpha} \geq h^{*}$, розподіл можливостей є субнормальним, тобто не досягає значення 1,0 (рис. 3.15, 2, 4).

Приклад 3.9. Знайти розподіли можливостей для наведених у таблиці 3.9 характеристик об'єкта h^{α} і трьох варіантів пар рівневих обмежень.

На основі формули (3.1) в першому варіанті (табл. 3.10) отримуємо амодальну монотонно зростаючу функцію, в другому – колоколоподібну, в третьому – субнормальну немонотонну функцію $\pi(z)$.

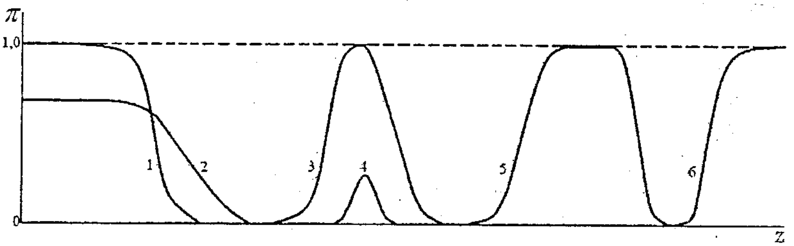


Рисунок 3.15 – Розподіл можливостей:
1, 6 – амодальні; 3 – унімодальна; 2, 4 – субнормальні;
5 – колоколоподібна

Таблиця 3.9 – Опис об'єкта і обмежень

Значення параметра Z	Об'єкт	Варіанти					
		I		II		III	
		h^{*}	h^{o}	h^{*}	h^{o}	h^{*}	h^{o}
3	15	65	20	25	10	25	15
6	35	81	32	30	20	40	20
9	70	92	40	70	30	80	30
12	90	95	50	115	75	100	60
15	105	100	55	150	120	110	75

Таблиця 3.10 – Розподіл можливостей

$\pi(z)$	Z				
	3	6	9	12	15
$\pi_1(z)$	0	0,061	0,577	0,889	1,000
$\pi_2(z)$	0,330	1,000	1,000	0,375	0
$\pi_3(z)$	0	0,750	0,800	0,750	0,889

3.9 Методи побудови функцій належності лінгвістичних термів

Вважається, що для практичних задач достатньо наявності нечіткої мови з фіксованим скінченним словником – обмеження не надто сильне з точки зору практичного використання. Лінгвістична змінна L, що використовується при формалізації задач прийняття рішень, на практиці, як правило, має базову терм-множину $T = \{T_i\}$, що складається з 2 – 10 термів. Кожен терм описується нечіткою підмножиною множини значення U деякої базової змінної u і розглядається як лінгвістичне значення L. Вважається, що об'єднання усіх цих елементів терм-множини покриває повністю U. Це гарантує, що будь-який елемент $u \in U$ описується деяким $T_i \in T$.

Існує спосіб побудови частотних оцінок S = {«рідко», «часто», «іноді», ...}, оснований на припущення про те, що слово s_j використовується людиною не для позначення зареєстрованої частоти появи факта, а для позначення відносної кількості подій у минулій діяльності людини, коли розглядалася така ж сама частота. Кожному s_i ставиться у відповідність нечітка підмножина інтервалу [0; 1]. Функції належності μ_{S_i} отримують на основі психологічного експерименту: групі досліджуваних пред'являють набір стимулів (оцінок частоти) і шкалу з k категорій, впорядкованих за ступенем інтенсивності частоти від найменшої (1) до найбільшої (k). Досліджуваним пропонується розбити стимули на k класів згідно з інтенсивністю частоти, незалежно оцінюючи кожен стимул і розміщуючи до будь-якої категорії будь-яку кількість стимулів. Кожному числу u_j з [0; 1], $u_j = (j - 1) / k - 1$, ставлять у відповідність ступені використання групою досліджуваних слова s_i для позначення категорії. Значення функції належності визначаються в результаті нормування: $\mu_{S_i}(u)$: |0,1|→ |0,1|.

Запропонована методика обґрунтовується тим, що вибір позначення категорії значно не впливає на проведенні дослідження. По-перше, кількість категорій (міток шкали) не впливає кардинально на результати експерименту, в якому здійснюється розподіл за шкалою суб'єктивних відчуттів. По-друге, шкала з k категорій є шкалою інтервалів, які здаються рівними, оскільки вважається, що її мітки розташовані на психологічному континуумі на рівних інтервалах.

Природним кроком при побудові функцій належності елементів терм-множини лінгвістичної змінної є побудова одночасно усіх функцій належності цієї терм-множини, згрупованих у так звані відношення моделювання R. Процес побудови полягає у заповненні таблиці, де, наприклад, для лінгвістичної змінної «Відстань» стовпці індексовані відстанню у метрах, а рядки – елементами терм-множини «дуже близько», «близько», ... , «далеко», «дуже далеко». На перетині відповідного рядка і стовпця стоїть ступінь подібності для досліджуваного даних понять у певній семантичній ситуації, наприклад, наскільки подібні поняття «близько» і «5 метрів» у ситуації перебігання вулиці перед транспортом, що прямує на великій швидкості. Відстань береться від пішохода до машини і у даному випадку є синонімом небезпеки. У загальному випадку кожну комірку таблиці можна заповняти окремо, а потім, переставляючи рядки і стовпці, спробувати зробити їх унімодальними. Якщо це вдається, то вихідна терм-множина може бути використана для побудови нечіткої шкали вимірювань, точками підрахунку якої будуть самі елементи терм-множини. Відображення у цю шкалу буде здійснюватися за допомогою мінімаксного множення рядка, що задає вихідну лінгвістичну змінну в шкалі метрів, на відношення моделювання. Відношення подібності між елементами терм-множини $R \circ R^T$, отримані за допомогою множення матриці R на транспоновану, задає набір функцій належності елементів лінгвістичної шкали у самій шкалі, а відношення $R^T \circ R$ задає набір функцій належності відстаней у метрах у метричній шкалі.

Функцію належності можна будувати і шляхом відповідної обробки статистичних даних. При цьому за ступінь належності елемента множині береться оцінка частоти використання понять заданих нечіткою множиною для характеристики елемента. При цьому з використанням спеціальних матриць підказок виходять гладкі функції належності [4].

Метод використовується при побудові автоматизованих систем керування, де виникає задача моделювання діяльності людини-оператора з використанням теорії нечітких множин.

Нагадаємо, що функція належності $\mu_A(x)$ ставить у відповідність кожному елементу $x \in X$ число з інтервалу [1; 0], характеризуючи ступінь належності елемента x множині A. Людина, сприймаючи інформацію, не користується конкретними числами, а перекладає їх в свої поняття – значення лінгвістичної змінної (значеннями лінгвістичної змінної є не числа, а слова. Наприклад, лінгвістична змінна «ВІК» може мати таку множину значень: {«Малюк», «Дитина», «Молодий», «Тинейджер», «Дорослий», «Старий»}. Кожне значення лінгвістичної змінної описується функцією належності, індивідуальною для кожної людини.

Припустимо, що, спостерігаючи за об'єктом протягом деякого часу, людина n разів фіксує свою увагу на наявності факту A або його відсутності. Подію, яка полягає в n перевірках наявності факту А будемо називати оцінною. Нехай в k перевірках мав місце факт А. Тоді оператор реєструє частоту $p = k/n$ появи факту A її оцінки за допомогою слів «часто», «рідко» і под.

Оцінюючи частоту p, людина опирається на свій досвід, який відображає частоту появи факту A у подіях минулого, що здаються людині аналогічними оцінюваній події. До нього також надходить інформація щодо появі факту А, основана на спостереженні інших людей, тобто інформація, яка відображає загальний досвід. В залежності від ступеня довіри до джерела такого роду інформації вона запам'ятовується з різноманітними вагами.

На універсальній шкалі [0; 1] необхідно розмістити значення лінгвістичної змінної: {«Дуже рідко», «Достатньо рідко», «Достатньо часто», «Дуже часто»}. Тоді ступінь належності деякого значення вираховується як відношення числа дослідів, в яких воно зустрічалось в певному інтервалі шкали, до максимального для цього значення числа експериментів по всіх інтервалах. Метод основується на умові, що в кожний інтервал шкали попадає однакове число експериментів. Ця умова часто не виконується. В реальних випадках створюється емпірична таблиця (табл. 3.10), в якій експерименти можуть бути розподілені нерівномірно по інтервалах, а в деякі інтервали можуть взагалі не потрапити.

Припустимо, що оператору в процесі керування пропонують оцінити в значеннях лінгвістичної змінної «Відносна величина» відхилення ΔB параметра технологічного процесу, де B – максимально можливе відхилення, а ΔB лежить в інтервалі [0; B]. Задамо множину значень лінгвістичної змінної: {«Дуже мале», «Мале», «Середнє», «Велике», «Дуже велике»}. Візьмемо за оцінку відношення $\Delta B / B$. Як інтервал [0; B], так і $\Delta B / B$ поділимо на k відрізків, з яких буде збиратися статистика, характеризуючи, як часто людина вживає задані слова для вираження свого уявлення. Аналогічна таблиця може бути створена для оцінки частоти появи будь-якого факту. При йому можуть використовуватися, наприклад, така множина значень лінгвістичної змінної: {«Дуже рідко», «Достатньо рідко», «Нерідко», «Нечасто», «Достатньо часто», «Дуже часто»}.

Нехай k = 20. Використовуючи властивості функцій належності, необхідно попередньо обробити дані отриманої таблиці таким чином, щоб зменшити внесені експериментом викривлення (табл. 3.11).

Нагадаємо, що природними властивостями функцій належності є наявність одного максимуму і затухаючих до нуля фронтів. Для обробки статистичних даних скористуємось так званими матрицями підказок. Для цього необхідно видалити з таблиці 3.11 відверто помилкові елементи (наприклад, елемент 17 з рядка «Дуже мале»). Критерієм видалення слугує наявність кількох нулів у рядку навколо цього елемента.

Елементи матриці підказок обчислюються за формулою

$$k_j = \sum_{i=1}^{5} b_{ij}, \; j = \overline{1,20}.$$

Для прикладу в таблиці 3.11 матриця підказок буде подана рядком

$$\| 3 \;\; 7 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 10 \;\; 8 \;\; 0 \;\; 7 \;\; 6 \;\; 4 \;\; 9 \;\; 7 \;\; 5 \;\; 2 \|.$$

Таблиця 3.11 – Оцінка відхилення параметра технологічного процесу в термінах лінгвістичної змінної «Відносна величина»

Значення	Інтервал																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Дуже мале	3	7	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Мале	0	0	1	0	4	1	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Середнє	0	0	0	0	0	0	0	2	2	5	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Велике	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	8	0	7	5	2	3	0	0	0
Дуже велике	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	5	7	5	2

У рядку матриці підказок вибирають максимальний елемент $k_{\max} = \max k_j$ і надалі всі елементи формуються за формулою

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} k_{\max}}{k_j}, \quad i = \overline{1,5}, \; j = \overline{1,20}$$

Для стовпців з $k_j = 0$ використовується лінійна апроксимація:

$$c_{ij} = \frac{c_{ij-1} + c_{ij+1}}{2}, \; i = \overline{1,5}, \; j = \overline{1,20}.$$

Для побудови функцій належності знаходяться максимальні елементи по рядках таблиці 3.12 $c_{i\max} = \max c_{ij}$, $i = \overline{1,\ 5}$, $j = \overline{1,\ 20}$. Функція належності обчислюється за формулою $\mu_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{i\max}}$.

На рисунку 3.16 суцільною лінією подані функції належності значень лінгвістичної змінної «Відносна величина» після обробки емпіричної таблиці. Як видно, функція належності задовольняє вимоги, що висуваються до її властивостей. Для порівняння, на рисунку пунктирною лінією показана функція належності значення МАЛО без обробки таблиці.

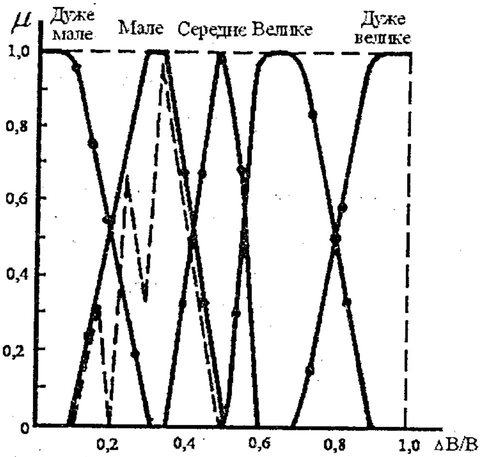


Рисунок 3.16 – Функції належності значень лінгвістичної змінної «Відносна величина»

Для прикладу наведемо розрахунок значень функцій належності терму «Дуже мале». Вибираємо з матриці підказок $k_{max} = \max k_j = 10$.

Перетворимо елементи матриці:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} \cdot k_{max}}{k_j}, \quad i=1, \quad j=\overline{1,20}, \qquad \mu_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{i\max}};$$

$$c_{11} = \frac{3 \cdot 10}{3} = 10; \qquad \mu_{11} = \frac{10}{10}; \qquad \Delta B/B = \frac{1}{20} = 0{,}05;$$

$$c_{12} = \frac{7 \cdot 10}{7} = 10; \qquad \mu_{12} = \frac{10}{10}; \qquad \Delta B/B = \frac{2}{20} = 0{,}1;$$

$$c_{13} = \frac{3 \cdot 10}{4} = 7{,}5; \qquad \mu_{13} = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75; \qquad \Delta B/B = \frac{3}{20} = 0{,}15;$$

$$c_{15} = \frac{1 \cdot 10}{5} = 2; \qquad \mu_{15} = \frac{2}{10} = 0{,}2; \qquad \Delta B/B = \frac{5}{20} = 0{,}25;$$

$$c_{14} = \frac{c_{13} + c_{15}}{2} = \frac{7{,}5+2}{2} = 4{,}75; \quad \mu_{15} = \frac{4{,}75}{10} = 0{,}475; \quad \Delta B/B = \frac{4}{20} = 0{,}2;$$

Результати обчислень зведені до таблиці 3.12

Таблиця 3.12 – Значення функції належності лінгвістичної змінної

μ_i	$\Delta B/B$								
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
μ_1	1,0	1,0	0,75	0,47	0,2	0	0	0	0
μ_2	0	0	0,25	0,52	0,8	1,0	1,0	0,67	0,33
μ_3	0	0	0	0	0	0	0	0,33	0,67
μ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0

μ_i	$\Delta B/B$										
	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0
μ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_3	1,0	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_4	0	0,3	1,0	1,0	1,0	0,83	0,5	0,33	0	0	0
μ_5	0	0	0	0	0	0,16	0,5	0,55	1,0	1,0	1,0

Приклад 3.10. Необхідно оцінити в термах лінгвістичної змінної «Відносна величина» час роботи машинних програм при пакетному режимі обробки. Зібрана статистика наведена в таблиці 3.13.

Таблиця 3.13 – Оцінка часу роботи програми у пакетному режимі

Значення	Інтервал																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Дуже малий	2	3	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Малий	0	0	1	2	5	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Середній	0	0	0	0	0	2	4	6	3	7	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Великий	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	5	8	6	3	1	0	0
Дуже великий	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	8	9

В даному випадку значення B (час роботи програм, хв) змінюється в інтервалі [0; 20]. Необхідно апроксимувати функцію належності.

За формулою $k_j = \sum_{i=1}^{5} b_{ij}$, $j = \overline{1,20}$ визначаємо матрицю підказок:

$$\|2 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad 7 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 5 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 7 \quad 5 \quad 2 \quad 8 \quad 9\|.$$

За формулою

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} k_{\max}}{k_j}, \quad i = \overline{1,5}, \; j = \overline{1,20}$$

обчислюємо елементи матриці C (табл. 3.14).

Таблиця 3.14 – Матриця C

i	j																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	9	9	7,2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1,8	6	9	7	3,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	5,1	9	9	9	9	2,3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6,8	9	9	9	7,7	5,4	4,5	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,3	3,6	4,5	9	9

Значення функцій належності μi_j наведені в таблиці 3.15.

Таблиця 3.15 – Значення функцій належності термів лінгвістичної змінної «Відносна величина»

μ_i	$\Delta B / B$								
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
μ_1	1	1	0,8	0,333	0	0	0	0	0
μ_2	0	0	0,2	0,666	1	0,777	0,43	0	0
μ_3	0	0	0	0	0	0,22	0,57	1	1
μ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0

μ_i	$\Delta B / B$										
	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
μ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_3	1	1	0,26	0	0	0	0	0	0	0	0
μ_4	0	0	0,76	1	1	1	0,86	0,6	0,5	0	0
μ_5	0	0	0	0	0	0	0,14	0,4	0,5	1	1

Функції належності термів лінгвістичної змінної подані на рисунку 3.17.

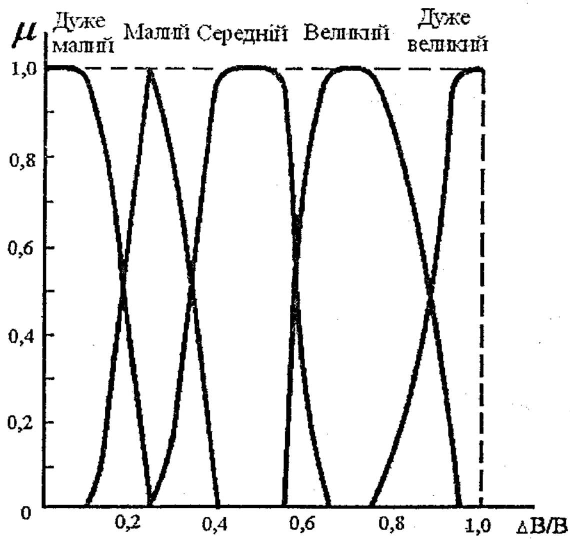


Рисунок 3.17 – Функції належності термів змінної «Час роботи програм»

Контрольні запитання

1. Поясніть поняття ступеня належності об'єкта нечіткій множині.
2. Як визначається імовірність настання події?
3. Що таке можливість? Які її основні відмінності від ймовірності?
4. Наведіть власні приклади ілюстрації поняття можливості.
5. Наведіть власний приклад нечіткої змінної та поясніть її основні відмінності від чіткої змінної.
6. Наведіть визначення та власні приклади лінгвістичної змінної.
7. Поясніть поняття терму лінгвістичної змінної Який зв'язок існує між термом та нечіткою множиною?
8. Наведіть приклади модифікаторів для розширення терм-множини лінгвістичної змінної.
9. Назвіть основні вимоги до вигляду функцій належності терм-множини лінгвістичної змінної.
10. Чому терм лінгвістичної змінної має бути унімодальним?
11. Чому значення крайніх точок крайніх термів терм-множини не можуть відрізнятися від 1?
12. Що таке прямі методи побудови функцій належності? Які прямі методи Ви знаєте?

13. Що таке непрямі методи побудови функції належності. Чому вони необхідні? В яких випадках вони використовуються?

14. Дайте порівняльну характеристику прямих та непрямих методів побудови функцій належності, підкресливши їх переваги та недоліки.

15. На яких основних принципах оснований метод попарних порівнянь та які основні переваги він надає?

16. Якими основними властивостями повинна характеризуватися матриця попарних порівнянь?

17. Що таке власне число матриці і які переваги дає його використання у методі попарних порівнянь?

18. Навіщо потрібні методи побудови функцій належності на основі опитування групи експертів? Які переваги вони надають? Які недоліки мають?

19. Які непрямі методи побудови функцій належності для групи експертів Вам відомі? Стисло охарактеризуйте їх.

20. Стисло охарактеризуйте основні положення методу побудови функції належності на основі експертних оцінок.

21. У чому полягає сутність параметричного підходу до побудови функцій належності?

22. У яких випадках доцільно використовувати параметричний підхід до побудови функцій належності?

23. Як застосовується параметричний підхід для побудови модифікаторів термів лінгвістичних змінних?

24. У чому полягає сутність методу інтервальних оцінок для побудови функцій належності?

25. Назвіть переваги та недоліки методу інтервальних оцінок для побудови функцій належності?

26. Що таке «функція розподілу можливостей» у методі інтервальних оцінок?

27. Які рівневі обмеження можуть виникнути при використанні методу інтервальних оцінок та яким ситуаціям вони відповідають?

28. Стисло охарактеризуйте основні методи побудови функцій належності лінгвістичних термів.

Лабораторна робота № 3

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ПОПАРНИХ ПОБУДОВИ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Мета роботи

Закріплення теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок з побудови функцій належності нечітких множин прямими та непрямими методами

У результаті виконання лабораторної роботи студент повинен вміти:

- обґрунтовувати вибір методу побудови функції належності нечітких множин;
- визначати основні характеристики функцій належності нечітких множин;
- будувати модифікатори для створення додаткових термів лінгвістичних змінних;
- створювати програмні засоби для побудови функцій належності нечітких множин.

Завдання на підготовку

Студент повинен знати:

- поняття нечіткої та лінгвістичної змінної;
- основні методи побудови функцій належності нечітких множин;
- методи роботи з функціями належності термів лінгвістичних змінних;
- одну з мов програмування

Студент повинен вміти:

- створювати програми однією з мов програмування

Для допуску до виконання роботи необхідно:

- вміти відповісти на теоретичні запитання по ходу виконання роботи;
- дати викладачу заготівку звіту про лабораторну роботу, яка повинна містити титульний лист та опис вибраної предметної області.

Завдання на лабораторну роботу

1. Відповідно до теми курсового проекту визначити дві лінгвістичні змінні.
2. Сформувати терм-множини лінгвістичних змінних.
3. Обґрунтувати вибір прямого (для першої лінгвістичної змінної) та непрямого (для другої лінгвістичної змінної) методів побудови функції належності (один з методів має потребувати роботи групи експертів).
4. Для вибраних методів:

- визначити вихідні дані для побудови функції належності;

- розробити алгоритм формування функції належності;
- здійснити програмну реалізацію розробленого алгоритму;
- розробити методику дослідження реалізованого методу побудови функції належності;
- здійснити дослідження реалізованого методу побудови функції належності;

5. Зробити висновки, щодо адекватності та ефективності досліджених методів.

Зміст звіту

Титульний лист.

Назва і мета лабораторної роботи.

Теоретична частина:

1. Опис умов задачі.
2. Обґрунтування методу побудови функції належності.
3. Опис джерела (методу отримання) вихідних даних.

Практична частина:

1. Виконання аналізу вихідних даних.
2. Визначення терм-множини.
3. Алгоритм програми побудови функції належності.
4. Опис створених програм для побудови функцій належності.
5. Методика дослідження побудованих функцій належності.
6. Приклади роботи створеної програми, ілюстровані скріншотами.
7. Інструкція користувача по роботі з побудови функції належності.
8. Лістинги функцій з коментарями.

Висновки по роботі.

ГЛОСАРІЙ

Antecedent – передумова виконання правила
Consequent – наслідок виконання правила
Crisp set – звичайна (ненечітка) множина
Defuzzification – дефазифікація, перетворення нечіткої множини на чітку
Degree of membership – ступінь належності елемента нечіткій множині
Decision Boundary – розв'язувальна границя
Equivalence relation – відношення еквівалентності
Expert knowledge – експертні знання
Fuzzy inference – нечіткий висновок
Fuzzy logic – нечітка логіка
Fuzzy modelling relation – відношення нечіткого моделювання
Fuzzy set – нечітка множина
Fuzzy variable – нечітка змінна
Fuzzification – фазифікація, перетворення чіткого числа на нечітке
Fuzzy inference system (FIS) – система нечіткого логічного висновку
Implication – логічна операція імплікації, яка подає правило «Якщо – То»
Inference rule – правило виведення
Inference tree – дерево виведення
Input (output) vfriable – вхідна (вихідна) змінна
Knowledge representation – подання знань
Linguistic variable – лінгвістична змінна
Linguistic term – лінгвістичний терм
Logical negation – логічне заперечення
Make decision system – система прийняття рішень
Membership function – функція належності
Order relation – відношення порядку
Possibility – можливість
Probability – імовірність
production system – продукційна система
Proposition – висловлювання
Propositional calculus – числення висловлювань
Reflexive relation – рефлексивне відношення
Rule base – база правил
Singleton – одноелементна множина
Symmetric relation – симетричне відношення
Subject area – предметна область
Tolerance relation – відношення толерантності
Transitive relation – відношення транзитивності
Uncertainty – невизначеність
Weighting factor – ваговий коефіцієнт

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Рыжов А. П. Элементы нечетких множеств и измерения нечеткости. / Рыжов А. П. – М. : Діалог-МГУ, 1998. – 81 с.
2. Прикладные нечеткие системы/ Асаи К., Ватада Д., Иваи С. и др. /Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. – М. : Мир, 1993. – 368 с.
3. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. / Кофман А. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.
4. Круглов В. В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. /Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю. – Физматлит, 2001. – 224 с.
5. Мелихов А. Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. / Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Коровин С. Я. – М. : Наука, 1990. – 272 с.
6. Пивкин В. Я. Нечеткие множества в системах управления: методическое пособие. / Пивкин В. Я., Бакулин Е. П., Кореньков Д. И. – Новосибирск : НГУ, 1997. – 52 с.
7. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. / Штовба С. Д. – М. : Горячая линия. – Телеком, 2007. – 228 с.
8. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети. / Ротштейн А. П. – Винница : УНИВЕРСУМ-Винница, 1999. – 320 с.
9. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. / Д. Дюбуа, А. Прад – М. : Радио и связь. – 1990. – 288 с
10. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и Fuzzy Tech. / Леоненков А. В. – Спб. : БХВ-Петербург, 2003.
11. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. / Заде Л. А. – М. : Мир, 1976. – 165 с
12. Яхъева Г. Э. Нечеткие множества и нейронные сети : Учебное пособие / Яхъева Г. Э. – М. : Интернет – Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 316 с.
13. Осгуд Ч. Приложение методики семантического дифференциала к исследованиям по эстетике и смежным проблемам // Семиотика и искусствометрия. / Осгуд Ч., Суси Дж., Танненбаум П. – М. : Мир. – 1972.
14. Нечеткие множества и теория возможностей (последние достижения) / Под ред. Ягер Р.; Пер. с англ. под ред. Травкина С. И. – М. : Радио и связь, 1986. – 406 с.
15. Диагностирование на граф-моделях: на примерах авиац. и автомоб. техники / Осис Я. Я., Гельфандбейн Я. А., Маркович З. П., Новожилова Н. В. – М. : Транспорт, 1991. – 243 с.
16. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Саати Т. – М. : Радио и связь, 1993.

17. Шер А. П. Согласование нечетких экспертных оценок и функция принадлежности в методе размытых множеств // Моделирование и исследование систем автоматического управления. / Шер А. П. – Владивосток : ДВНЦ АН СССР, 1978. – С. 111 – 118.

18. Киквидзе З. А. Об одном способе взвешивания элементов нечеткого множества. / З. А. Киквидзе, Н. Т. Ткемаладзе – Сообщения АНГССР, 1979. – Т. 93, № 2. – С. 317-320

19. Zimmermann H. J. Fuzzy Set Theory – and Its Applications. 3rd ed. – Kluwer Academic Publishers, 1996. – 435 p.

20. Борисов А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. / Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П. – Рига : Зинатне, 1990. – 184 с.

Додаткова література

1. Рутковская Д. Нейронные сети, генетический алгоритмы и нечеткие системы : Пер. с польск. Рудинского И. Д. / Д. Рутковская, М. Пилинський, Л. Рутковский – М. : Горячая линия. – Телеком, 2007.

2. Митюшкин Ю. И., Soft Computing: идентификация закономерностей нечеткими базами данных. / Митюшкин Ю. И., Мокин Б. И., Ротштейн А. П. – Винница : УНИВЕРСУМ – Винница, 2002.

3. Ротштейн А. П. Медицинская диагностика на нечеткой логике. / Ротштейн А. П. – Винница : Континент – ПРИМ, 1996

4. Ротштейн О. П. Проектування нечітких баз знань. / Ротштейн О. П., Штовба С. Д. – Вінниця : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 1999.

5. Малышев Н. Г. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР / Малышев Н. Г., Берштейн Л. С., Боженюк А. В. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 163 с.

Навчальне видання

Месюра Володимир Іванович
Ваховська Любов Михайлівна
Колодний Володимир Володимирович

Системи прийняття рішень з нечіткою логікою
Лабораторний практикум
Частина 1. Математичні основи нечіткої логіки

Лабораторний практикум

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук
Оригінал-макет підготовлено Л. Ваховською

Підписано до друку 23.10.2015 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 8,1.
Наклад 75 пр. Зам. № 2015-112.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.