

**В. М. Михалевич, Ю. А. Мейш**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА  
З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ  
ЧАСТИНА 1**

**ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ  
ТА  
ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ**



**Міністерство освіти і науки України**  
**Вінницький національний технічний університет**  
**Національний університет біоресурсів і природокористування України**

**В. М. Михалевич, Ю. А. Мейш**



**ВИЩА МАТЕМАТИКА**  
**З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ**  
ЧАСТИНА 1  
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ  
*Електронний підручник*

**КИЇВ, ВІННИЦЯ**

**ВНТУ**

**2025**

**УДК 681.3.06+514.122**

**М69**

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 27.02.2025 р.)

Рекомендовано до видання Вченою радою Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № 8 від 27.02.2025 р.)

Рецензенти:

Р. Н. Кветний, доктор технічних наук, професор

В. І. Ключко, доктор педагогічних наук, професор

П. О. Стебляк, доктор фізико-математичних наук, професор

А. Л. Шидліч, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

**Михалевич, В. М.**

**М69** Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Частина I. Елементи лінійної та векторної алгебри : підручник [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. А. Мейш. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – 199 с.

ISBN 978-617-8163-42-6 (PDF)

Підручник містить теоретичні відомості, приклади розв'язання задач, а також знайомить із можливостями пакета Maple для розв'язування задач лінійної та векторної алгебри. Окрім цього, видання містить індивідуальні завдання, питання для самоперевірки та практичні вправи, що сприяють глибшому засвоєнню матеріалу.

Особливістю підручника є використання програмних рішень, розроблених у середовищі Maple, що не лише дозволяють отримати кінцевий результат, а й автоматизують процес обчислень, покроково відтворюючи хід розв'язання, супроводжуючи його поясненнями та проміжними обчисленнями.

Підручник рекомендується для всіх, хто у своїй професійній діяльності використовує лінійну та векторну алгебру, зокрема, для здобувачів інженерних та економічних спеціальностей і може бути корисним як для самостійного опрацювання, так і для використання у навчальному процесі під керівництвом викладача.

УДК 681.3.06+514.122

ISBN 978-617-8163-42-6 (PDF)

© ВНТУ, 2025

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ .....	5
1.1. ВИЗНАЧНИКИ .....	5
Визначники другого порядку .....	5
Визначники третього порядку .....	7
Загальний спосіб обчислення визначника довільного порядку .....	8
Приклади розв'язання типових задач.....	9
Завдання для самостійної роботи до теми «Визначники» .....	11
Зразок виконання завдання до теми «Визначники» .....	15
Запитання для самоконтролю .....	19
1.2. МАТРИЦІ .....	200
Матриці та дії над ними.....	20
Дії з матрицями.....	22
Матричні рівняння .....	27
Приклади розв'язання типових задач.....	28
Завдання для самостійної роботи до теми «Матриці» .....	31
Зразок виконання завдання до теми «Матриці» .....	42
Запитання для самоконтролю .....	47
1.3. ЗАПИС ТА ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦЬ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE..	48
1.4. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE .....	67
Обчислення визначників в середовищі MAPLE методом занулення .....	73
Обчислення обернених матриць в середовищі MAPLE.....	78
1.5. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ .....	83
Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь .....	84
Однорідні системи рівнянь.....	889
Неоднорідні системи рівнянь.....	90
Приклади розв'язання типових задач.....	91
Завдання для самостійної роботи до теми «Системи лінійних рівнянь» ....	99
Зразок виконання завдання до теми «Системи лінійних рівнянь» .....	104
Запитання для самоконтролю .....	107
1.6. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE .....	108
2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ .....	157
Розв'язування типових прикладів .....	171
Індивідуальні завдання .....	179
Завдання для самостійної роботи «Елементи векторної алгебри» .....	183
Зразок виконання самостійної роботи «Елементи векторної алгебри».....	186
3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ЗАСОБАМИ MAPLE.....	191
ЛІТЕРАТУРА.....	198

# Вступ

Сучасна інженерна освіта неможлива без застосування комп'ютерних технологій, які значно полегшують аналіз та розв'язання складних математичних задач. Лінійна та векторна алгебра є фундаментальними розділами вищої математики, що широко використовуються в різних технічних дисциплінах, зокрема в механіці, електротехніці, комп'ютерному моделюванні та аналізі даних.

Особливістю цього підручника є інтеграція традиційних методів розв'язання задач із засобами комп'ютерної підтримки, зокрема використанням програмного середовища системи комп'ютерної математики Maple. У підручнику наведено не лише теоретичні основи, а й розроблені процедури та фрагменти коду, що дозволяють автоматизувати весь процес розв'язання типових задач лінійної та векторної алгебри. Використання Maple дає змогу крок за кроком відтворювати процес розв'язання задачі з супроводженням відповідних пояснень і необхідними проміжними обчисленнями, що сприяє кращому розумінню матеріалу.

Підручник орієнтований на здобувачів вищої освіти з інженерних спеціальностей, які прагнуть не лише засвоїти основи лінійної та векторної алгебри, а й навчитися ефективно використовувати сучасні програмні засоби для розв'язання практичних задач. Такий підхід дозволяє здобувачам не лише виконувати складні обчислення, а й аналізувати отримані результати, моделювати математичні процеси та автоматизувати розрахунки.

Запропоновані матеріали можуть бути корисними як для самостійного опрацювання, так і для використання в межах навчального процесу під керівництвом викладача.

# 1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

## 1.1 ВИЗНАЧНИКИ

### Визначники другого порядку

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (1)$$

Використовуючи метод алгебричного додавання, отримаємо розв'язок системи в загальному вигляді

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_2b_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (2)$$

Ці формули простіше узагальнити для систем лінійних рівнянь з більшим числом невідомих, якщо скористатися поняттям визначника.

**Означення.** Визначником другого порядку  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  називають ви-

раз  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ , тобто,  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ .

Символи  $a_{ij}$  називають елементами визначника, причому перший індекс  $i$  показує номер рядка, а другий індекс  $j$  – номер стовпця, на перетині яких стоїть цей елемент.

**Означення.** Діагональ, утворену елементами  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ , називають головною, а діагональ, утворену елементами  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  – побічною.

Отже, для того, щоб знайти визначник другого порядку, знаходимо різницю добутків елементів головної та побічної діагоналей.

### Властивості визначників

1. Якщо два рядки або стовпці поміняти місцями, то визначник змінить знак

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо обидва елементи довільного рядка або стовпця визначника помножити на одне й те саме число, то його значення помножиться на це число. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} \beta a_{11} & a_{12} \\ \beta a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Визначник не зміниться, якщо до всіх елементів довільного рядка (або стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \beta a_{21} & a_{12} + \beta a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Цю рівність легко перевірити, якщо обчислити обидва визначники. Отримаємо:  $a_{11}a_{22} + \beta a_{21}a_{22} - a_{21}a_{12} - \beta a_{21}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ .

4. Визначник з двома пропорційними рядками (стовпцями) дорівнює нулю.

5. Якщо транспонувати визначник (транспонувати означає замінити визначник його дзеркальним відбиттям відносно головної діагоналі), то він не зміниться.

6. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

7. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

8. Якщо кожен елемент  $n$ -го рядка ( $n$ -го стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких  $n$ -й рядок ( $n$ -й стовець) складається з перших доданків, а у другого – з других; інші елементи усіх трьох визначників однакові.

Повернемося до системи рівнянь (1). Використовуючи поняття визначника, розв'язок (2) лінійної системи (1) можна подати у формі, що має назву *правила Крамера*,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (3)$$

де  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$  – основний визначник системи,  $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$  – допоміжний

визначник, утворений з основного визначника шляхом заміни першого стовпця стовпцем вільних членів, аналогічно утворюється і другий допо-

міжний визначник  $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ , перший стовець залишається без змін, а

другий замінюється стовпцем вільних членів.

## Визначники третього порядку

**Означення.** Визначником третього порядку  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  назива-

ється вираз

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Для обчислення визначників третього порядку користуються **правилом трикутників**



Ліва схема відповідає додатним добуткам визначника, тобто

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32},$$

а права – від’ємним

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

### Алгоритм правила трикутників

1. Знайти добуток елементів, що знаходяться на головній діагоналі.
2. Знайти два елементи, що знаходяться на прямій, яка паралельна головній діагоналі (таких прямих буде дві, одна вище, а друга нижче головної діагоналі).
3. Для кожної зі знайдених пар знайти елемент, який розташовано у кутку, в результаті отримаємо трикутник, складений з трьох елементів визначника. Знаходимо добутки цих чисел. Отримуємо

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31},$$

тобто елементи зі знаком «+».

4. Знаходимо добуток елементів допоміжної діагоналі.
5. Аналогічно знаходимо елементи зі знаком «-». Отримуємо

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

6. Сума всіх шести отриманих добутків і буде значенням визначника.

**Правило Саррюса.** Для обчислення визначника третього порядку, потрібно знизу дописати два перших рядки, в результаті одержимо три головні і три допоміжні діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Крім дописування знизу двох перших рядків є ще один еквівалентний спосіб обчислення визначника за правилом Саррюса. Можна праворуч від визначника дописати два перших стовпці, аналогічно отримаємо три головні і три побічні діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

### Загальний спосіб обчислення визначника довільного порядку

**Означення.** Мінором  $M_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  визначника  $n$ -го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається визначник  $(n-1)$ -го порядку, який утвориться, коли в цьому визначнику викреслити рядок і стовпець, що містять елемент  $a_{ij}$ .

**Означення.** Алгебричним доповненням  $A_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  називають його мінор, який візьмемо зі знаком  $(-1)^{i+j}$ , тобто,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

**Теорема Лапласа.** Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їх алгебричні доповнення

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \text{ або } \Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Проілюструємо цю теорему на прикладі визначника 3-го порядку, застосувавши її до другого стовпця.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^{1+2} + \\ + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} (-1)^{2+2} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} (-1)^{3+2}.$$

Визначник 3-го порядку  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  можна обчислити за однією з

нижчевказаних формул

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

## Приклади розв'язання типових задач

### Приклад 1.

Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ .

### Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-4) \cdot 2 = 15 + 8 = 27.$$

### Приклад 2.

Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ .

### Розв'язання

Щоб обчислити даний визначник застосуємо правило трикутників.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 4 \cdot (-7) \cdot 3 - \\ - 6 \cdot (-1) \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-7) \cdot 5 = 2 + 60 - 84 + 18 + 16 + 35 = 47.$$

### Приклад 3.

Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ .

#### Розв'язання

Для обчислення цього визначника застосуємо теорему Лапласа. Визначник розкриємо за третім стовпцем.

Маємо

$$\Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

Алгебраїчне доповнення  $A_{23}$  обчислювати не потрібно, оскільки  $a_{23} = 0$ .

Таким чином,  $\Delta = 1 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 = 23$ .

### Приклад 4.

Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}$ .

#### Розв'язання

Для обчислення визначника застосуємо його властивості. До першого стовпця додамо третій стовпець  $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta + \cos^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}$ . Врахуємо основну тригонометричну тотожність  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos^2 \alpha \\ 1 & 1 & \cos^2 \beta \\ 1 & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}.$$

Бачимо, що отриманий визначник має два однакових стовпці, отже, за властивостями визначників, отриманий визначник дорівнює нулю.

### Приклад 5.

Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ .

### Розв'язання

Обчислимо визначник, використовуючи його властивості.

Залишимо перший рядок без змін, а до другого рядка додамо перший рядок, помножений на -2, третій рядок залишимо без змін.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

В отриманому визначнику залишимо без змін перший рядок, до третього рядка додамо перший, помножений на -1. Другий рядок залишаємо без змін.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкриємо отриманий визначник за елементами першого стовпця

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5.$$

### Завдання для самостійної роботи до теми «Визначники»

**Завдання 1.** Знайдіть дійсні корені рівняння:

$$1. \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 3 & 4-x & 7 \\ -1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$2. \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ 3 & 3-x & 6 \\ -2 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$3. \begin{vmatrix} 1-x & 4 & 5 \\ 2 & 1-x & 3 \\ -4 & 3 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$4. \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ 1 & 4-x & 5 \\ 3 & 1 & 5-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$5. \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ -2 & 3-x & 1 \\ 4 & 2 & 6-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$6. \begin{vmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$7. \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 5 & 1-x & 6 \\ -2 & 2 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

$$8. \begin{vmatrix} -3-x & 3 & 0 \\ -1 & 3-x & 2 \\ 2 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$9. \begin{vmatrix} 4-x & -2 & 2 \\ -1 & 3-x & 2 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$10. \begin{vmatrix} -3-x & 4 & 1 \\ -3 & 1-x & -2 \\ 1 & -2 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$11. \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 4 & -2-x & 2 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$12. \begin{vmatrix} -3-x & -1 & -4 \\ 1 & 2-x & 3 \\ -1 & 3 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$13. \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ -3 & 2-x & -1 \\ 0 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$14. \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 4 \\ 0 & 2-x & 2 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$15. \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -1 & -x & -1 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$16. \begin{vmatrix} -1-x & -2 & -3 \\ 3 & 2-x & 5 \\ 2 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$17. \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 5 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$18. \begin{vmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$19. \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 2 \\ -1 & 3-x & 2 \\ 2 & -2 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

$$20. \begin{vmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$21. \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 3 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$22. \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ 3 & -4-x & -1 \\ 2 & -2 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

$$23. \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -2 \\ -1 & 3-x & 2 \\ -3 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$24. \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 1 \\ 1 & 4-x & 5 \\ 1 & -2 & -1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$25. \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ 0 & 3-x & 3 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$26. \begin{vmatrix} -x & 2 & 2 \\ -2 & 4-x & 2 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$27. \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 5 \\ -1 & 3-x & 2 \\ -1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$28. \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 2 \\ 4 & -x & 4 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$29. \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 4 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 3 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$30. \begin{vmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

**Завдання 2.** Обчислити визначники четвертого порядку:

а) методом розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця);

б) методом зведення до трикутного вигляду.

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$24. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$25. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$26. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$27. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$28. \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$29. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & -1 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$30. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

### Зразок виконання завдання до теми «Визначники»

#### Завдання 1

Знайти дійсні корені рівняння 
$$\begin{vmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

#### Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами першого рядка

$$\begin{aligned} &= (-2-x)((4-x) \cdot 4 - 12) - 2(2 \cdot 4 - 6 \cdot 1) = (-2-x)(16 - 4x - 12) - 4 = \\ &= (-2-x)(4 - 4x) - 4 = -8 + 8x - 4x + 4x^2 - 4 = 4x^2 + 4x - 12. \end{aligned}$$

Отримане рівняння є рівносильним наведеному нижче

$$4x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \text{або} \quad x^2 + x - 3 = 0.$$

Розв'яжемо його.

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

## Завдання 2

$$\text{Обчислити визначники четвертого порядку } \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

а) методом розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця);

б) методом зведення до трикутного вигляду.

## Розв'язання

а) Обчислимо визначник методом розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця)

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Проаналізувавши визначник бачимо, що його зручно розкласти за елементами другого рядка або четвертого, першого або четвертого стовпця, оскільки один із їх елементів є нулем і після застосування теореми Лапласа доведеться обчислювати не чотири, а три визначники. Розкладемо визначник за елементами першого стовпця.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = \\ &= 3 * (-1)^2 \begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \\ &+ 0. \end{aligned}$$

Обчислюємо отримані визначники третього порядку за правилом трикутника

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= (-7) * 1 * 3 + 2 * 2 * 3 + (-1 * 4 * 0) - 0 * 1 * 3 - 2 * 4 \\ &* (-7) - (-1)2 * 3 = -21 + 12 + 0 - 0 + 56 + 6 = 53; \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 * 1 * 3 + (-1) * 2 * 3 + (-1)4 * 2 - 2 * 1 * 3 - 2 * 4 * 4 - (-1)(-1) * 3 = 12 - 6 - 8 - 6 - 32 - 3 = -43;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 * 2 * 3 + (-1) * 0 * 3 + (-7) * 4 * 2 - 2 * 2 * 3 - 0 * 4 * 4 - (-7) * (-1) * 3 = 24 + 0 - 56 - 12 - 0 - 21 = -65;$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 * 53 + 2 * (-1)(-43) + (-65) = 159 + 86 - 65 = 180.$$

Скориставшись властивостями визначників заданий визначник можна перетворити таким чином, щоб в деякому рядку або стовпці виявилось три нулі. Тоді нам доведеться обчислювати не три визначники третього порядку, як ми це щойно зробили, а лише один. Перетворимо перший стовпець заданого визначника, оскільки один нуль в першому рядку вже є, нам залишається отримати ще два нулі. Для цього: від першого рядка цього визначника віднімемо третій рядок, помножений на 3, а від другого рядка віднімемо третій рядок, помножений на 2. Третій і четвертий рядки залишаємо без змін.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} I p - 3 * III p \\ III p - 2 * III p \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -4 & -4 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= a_{31} A_{31} = 1 * (-1)^4 \begin{vmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -5 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 48 + 80 - 0 - (-112) - 60 \\ &= 180. \end{aligned}$$

б) Обчислимо визначник методом зведення до трикутного вигляду.

Нам потрібно перетворити визначник так, щоб під головною діагоналлю стояли всі нулі. Тоді визначник дорівнюватиме добутку елементів головної діагоналі. Для цього скористаємося властивостями визначників. Поміняємо місцями перший і третій рядки. Тоді визначник змінить знак на протилежний

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Перетворимо визначник таким чином, щоб в першому стовпці під першим елементом першого стовпця всі інші елементи дорівнювали нулю. Для цього виконаємо перетворення, аналогічні виконаним вище, тобто, від другого рядка віднімемо перший рядок, помножений на 2, а від третього рядка віднімемо перший рядок, помножений на 3

$$- \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} IIp - 2 * Ip \\ IIIp - 3 * Ip \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Далі виконаємо перетворення з другим стовпцем.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = IIc - IVc = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 11 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Винесемо (-1) з другого рядка

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Отримаємо нулі в другому стовпці під головною діагоналлю

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = IIIp - 11 * IIp = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -48 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Залишається тільки зробити нулі в третьому стовпці під головною діагоналлю. Додамо четвертий і третій рядки, і під головною діагоналлю маємо всі елементи рівні нулю. Щоб отримати значення визначника помножимо елементи головної діагоналі. Маємо

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -48 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = IIIp + IVp = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{vmatrix} \\ = 1 * 1 * (-4) * (-45) = 180.$$

**Відповідь:**  $\det A = 180$ .

## Запитання для самоконтролю

1. Що називається визначником?
2. Наведіть властивості визначників.
3. Які методи або правила для розкриття визначників Ви знаєте?
4. В чому полягає правило трикутників?
5. Для яких визначників застосовується правило трикутників?
6. В чому полягає правило Саррюса?
7. Визначники якого порядку можна обчислювати за правилом Саррюса?
8. Що називається мінором?
9. Що називається алгебраїчним доповненням?
10. За допомогою якої теореми можна обчислювати визначники будь-якого порядку?

## 1.2 МАТРИЦІ

### Матриці та дії над ними

Прямокутну таблицю чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

називають матрицею, де  $(m \times n)$  – розмір матриці, причому  $m$  вказує кількість рядків, а  $n$  – кількість стовпців матриці. Поняття матриці було запроваджене в середині XIX століття англійським математиком Джеймсом Сильвестром. Коротко матрицю позначають як  $A = (a_{ij})_{mn}$  або  $A = \|a_{ij}\|_{mn}$ . В цих рівностях  $i$  вказує кількість рядків, а  $j$  – кількість стовпців.

**Означення.** Матрицею розміром  $m \times n$  називають прямокутну таблицю чисел, що складається з  $m$  рядків та  $n$  стовпців.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Числа, з яких утворено матрицю, називають її елементами. Їх позначають малими літерами з подвійною індексацією  $a_{ij}$ , де перший індекс  $i$  вказує на номер рядка  $i = (\overline{1, m})$ , у якому знаходиться елемент, а другий індекс  $j$  – на номер стовпця  $j = (\overline{1, n})$ .

Крім подання матриці у вигляді (4) часто застосовують позначення її однією великою літерою, наприклад,  $A$ , або скорочене позначення –  $(a_{ij})$ , де  $(i = (\overline{1, m}), j = (\overline{1, n}))$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Існують матриці, які складаються тільки з одного рядка, або тільки з одного стовпця. Такі матриці називають, відповідно, *матрицею-рядком* і *матрицею-стовпцем*. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} - \text{матриця стовпець, } A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) - \text{матриця-рядок.}$$

**Означення.** Дві матриці  $A = (a_{ij})$  і  $B = (b_{ij})$  називають **рівними** ( $A = B$ ) за умови, що вони мають однаковий розмір  $m \times n$  і рівні відповідні елементи  $a_{ij} = b_{ij}$ .

**Означення.** Матриця  $A = (a_{ij})_{mn}$  називається **квадратною**, якщо кількість її рядків дорівнює кількості її стовпців, тобто,  $m = n$ .

**Означення.** Діагональною називають матрицю, всі елементи якої є нулями, крім елементів, що розташовані на головній діагоналі, тобто,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

**Означення.** Одиничною називають таку діагональну матрицю, головна діагональ якої складається тільки з одиниць, тобто,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Досить часто одиничну матрицю позначають буквою **E**. Одинична матриця в матричній алгебрі відіграє таку саму роль, як одиниці в звичайній алгебрі.

**Означення.** Нульовою називають таку матрицю, всі елементи якої складаються тільки з нулів,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Властивість.** Якщо до заданої матриці  $A$  додати нульову, то отримаємо задану матрицю  $A$ .

## Дії з матрицями

1. Сумою (різницею) матриць  $A$  та  $B$  розміром  $m \times n$  називають матрицю  $C$  такого ж розміру, кожний елемент якої складається з суми (різниці) відповідних елементів матриць  $A$  та  $B$ , тобто,  $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ .

Операція додавання і віднімання матриць можлива тільки для матриць однакових розмірів.

2. Добутком матриці  $(a_{ij})$  на число  $\beta$  називається така матриця  $(\beta a_{ij})$ , кожний елемент якої є добутком відповідного елемента матриці  $(a_{ij})$  та числа  $\beta$ .

### Властивості додавання та множення матриці на число

Нехай задано дві довільні матриці  $A$  та  $B$  однакових розмірів та два довільних числа  $\mu$  і  $\lambda$ , для них справджуються рівності:

- 1)  $A + B = B + A$ ;
- 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- 3)  $A + 0 = A$ ;  $A - A = 0$ ;
- 4)  $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ ;
- 5)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ;
- 6)  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ .

3. Операція множення матриць. Матрицю  $A$  розміром  $m \times n$  можна помножити на матрицю  $B$  розміром  $p \times s$  за умови, що  $n = p$  (кількість стовпців першої матриці  $A$  дорівнює кількості рядків другої матриці  $B$ ). Результатом добутку буде матриця  $C = A \cdot B$ , розмір якої  $m \times s$ ; кожний її елемент  $c_{ij}$  є сумою добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  на відповідні елементи  $j$ -го стовпця матриці  $B$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Це правило називається правилом множення рядка на стовпець.

Виконувати операцію множення матриць можна лише для узгоджених матриць.

**Означення.** Матриці  $A$ ,  $B$  називаються узгодженими, якщо кількість стовпців першої матриці  $A$  дорівнює кількості рядків другої матриці  $B$ .

Множення матриць неможливе, якщо задана умова не виконується, тобто, коли матриці  $A$  і  $B$  неузгоджені.

**Приклад.** Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A_{3 \times 2}$  є узгодженою з матрицею  $B_{2 \times 4}$ , тому множення матриць можливе

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2+3 & (-2)+3 & 0+9 & 4+3 \\ 0+4 & 0+8 & 0+12 & 0+4 \\ (-1)+5 & 1+10 & 0+15 & (-2)+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \\ -5 & 11 & 15 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

З узгодженості матриці  $A$  з матрицею  $B$  у загальному випадку не випливає узгодженість матриці  $B$  з матрицею  $A$

$$AB \neq BA.$$

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Розглянемо приклад множення матриці розміром  $3 \times 3$  на матрицю-стовпець розміром  $3 \times 1$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10+18 \\ -3+15+6 \\ 6+20+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 18 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

### Властивості множення матриць

Для довільних матриць  $A$  та  $B$  однакового розміру та довільних чисел  $\mu$  і  $\lambda$  справджуються рівності:

- 1)  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ;
- 2)  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ ;
- 3)  $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (B \cdot A)$ ;
- 4)  $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$ ;  $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ;
- 5)  $A \cdot E = E \cdot A = A$ .

**4.** *Піднесення матриці до степеня.* Операція піднесення матриці  $A$  до степеня  $n$  розглядається лише для квадратних матриць, і являє собою операцію множення матриці  $A$  на саму себе  $n$  разів.

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**5.** *Транспонування матриці.* Транспонувати матрицю означає поміняти місцями її рядки і стовпці. При цьому перший рядок стає першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем, ...,  $m$ -ий рядок –  $m$ -им стовпцем або, що те ж саме: перший стовпець стає першим рядком, другий стовпець – другим рядком, ...,  $n$ -ий стовпець –  $n$ -им рядком.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Із означення матриці  $A^T$  видно, що вона має розмір  $n \times m$ , а розмір матриці  $A$   $m \times n$ .

### **6.** *Обернена матриця*

Хай задано квадратну матрицю  $A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A^{-1}$  називається *оберненою* до матриці  $A$ , якщо виконуються рівності  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ , причому  $E$  – одинична матриця.

Для кожної невідродженої матриці  $A$  ( $\det A \neq 0$ ) існує обернена матриця  $A^{-1}$ . Якщо матриця вироджена ( $\det A = 0$ ), то для неї оберненої матриці не існує.

Для того, щоб існувала обернена матриця  $A^{-1}$  необхідно і достатньо, щоб матриця  $A$  була невиродженою.

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де  $A_{ij}$  – алгебраїчні доповнення до елементів  $a_{ij}$  матриці  $A$ .

Доведемо для випадку матриці третього порядку. Хай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Знайдемо добуток  $AA^{-1}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31} = \det A; \\ c_{22} &= a_{21}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{32} = \det A; \\ c_{33} &= a_{31}A_{13} + a_{32}A_{23} + a_{33}A_{33} = \det A; \\ c_{12} &= a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0; & c_{13} &= a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0; \\ c_{21} &= a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0; & c_{23} &= a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0; \\ c_{31} &= a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0; & c_{32} &= a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогічно можна показати, що  $A^{-1}A = E$ .

Наведемо властивості оберненої матриці:

$$1. \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad 2. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}. \quad 3. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

**Приклад.** Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до даної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці  $A$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = a_{32}A_{32}1 \times (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

II p. + III p.

Отже, матриця  $A$  – невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (5). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів згаданої матриці

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 14; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 14 & -4 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 14 & -4 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

## Елементарні перетворення матриць

Матриця не зміниться, якщо

1. Поміняти місцями два стовпці або два рядки.
2. Помножити стовець або рядок на довільне число, яке не дорівнює нулю.
3. Додати до елементів будь-якого рядка або стовпця відповідні елементи іншого рядка або стовпця, помножені на одне і те саме число.

За допомогою елементарних перетворень довільну матрицю  $A$  можна перетворити у матрицю, у якої елементи  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$  ( $0 \leq r \leq \min(m; n)$ ) дорівнюють одиниці, а всі інші рівні нулю.

Число  $r$  називають *рангом матриці* і позначають  $\text{rang } A$ ,  $r_A$ ,  $r(A)$ .

Якщо  $m = n$ , то матрицю називають квадратною порядку  $n$ . Нехай  $B$  – квадратна матриця

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке є її визначником. Позначають визначник:  $\det B$ ,  $|B|$ .

**Означення.** Матриця  $A^{-1}$  називається оберненою до матриці  $A$ , якщо виконується умова  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ .

Матриця  $A$  має обернену матрицю, якщо визначник матриці  $A$  не дорівнює нулю  $|A| \neq 0$ .

Для обчислення оберненої матриці використовується формула

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де  $A_{ij}$  – алгебричні доповнення елементів  $a_{ij}$  матриці  $A$ .

## Матричні рівняння

Матриці використовують для розв'язування матричних рівнянь вигляду

$$AX = B \text{ або } XA = B.$$

Помножимо обидві частини матричного рівняння  $AX = B$  зліва на  $A^{-1}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B, \\ EX &= A^{-1}B, \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Отже, щоб отримати розв'язок матричного рівняння потрібно знайти обернену матрицю  $A^{-1}$  і помножити її на матрицю  $B$ .

Рівняння  $XA=B$  розв'язується аналогічно до  $AX=B$  тільки множення на  $A^{-1}$  виконується справа.

### Ранг матриці

Рангом  $\text{rang}(A)$  матриці  $A$  називається найбільший порядок її визначників, що не дорівнюють нулю.

Ранг матриці не зміниться, якщо:

- 1) поміняти місцями два рядки;
- 2) помножити кожен елемент рядка на один і той самий відмінний від нуля множник;
- 3) додати до елементів рядка відповідні елементи довільного іншого рядка, помножені на один і той самий множник.

За допомогою перетворень 1)–3), які називаються елементарними, будь-яку матрицю можна звести до вигляду, коли кожний її рядок буде складатися тільки з нулів або з нулів і однієї одиниці. Тоді число одиниць, що залишились, визначає ранг матриці.

### Приклади розв'язання типових задач

#### Приклад 1.

Транспонувати матрицю  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ .

**Розв'язання.** За означенням маємо  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ .

#### Приклад 2.

Обчислити лінійну комбінацію матриць  $3 \cdot A - 2 \cdot B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** За означенням  $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ -9 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ .

Оскільки матриці  $3A$  і  $2B$  мають однаковий розмір ( $2 \times 3$ ), то для них є коректною операція алгебраїчної суми, тобто,

$$\begin{aligned} 3 \cdot A - 2 \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ -9 & 12 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0-2 & -6-10 & 3-2 \\ -9-(-2) & 12-4 & 6-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -16 & 1 \\ -7 & 8 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Приклад 3.

Знайти добуток матриць  $A \cdot B$  і  $B \cdot A$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Розв'язання.** Оскільки матриці  $A$  і  $B$  квадратні розміру ( $2 \times 2$ ), тобто є узгодженими, то для них є коректною операція добутку. Результатом добутку буде також квадратна матриця ( $2 \times 2$ ). Знайдемо добуток матриць  $A \cdot B$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знайдемо добуток  $B \cdot A$ .

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для цих матриць  $A$  і  $B$  не виконується закон комутативності, оскільки  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

### Приклад 4.

Знайти добуток матриць  $A \cdot B$  і  $B \cdot A$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Матриця  $A$  – це прямокутна матриця розміру ( $2 \times 3$ ). Матриця  $B$  є квадратною матрицею розміру ( $2 \times 2$ ). Матриця  $A$  не є узгодженою з матрицею  $B$ , а тому добуток  $A \cdot B$  не існує.

Зауважимо, що матриця  $B$  є узгодженою з матрицею  $A$ , і в цьому випадку можна знайти добуток  $B \cdot A$ . В результаті маємо отримати матрицю розміру ( $2 \times 3$ ). Дійсно,

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 & -4 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 & -4 \cdot 3 + (-3) \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -23 & -30 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Знайти обернену матрицю до матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Розв'язання.** Обчислимо визначник цієї матриці, розкриваючи його за другим стовпцем, тобто,  $\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{32} \cdot A_{32}$ , оскільки  $a_{22} = 0$ .

Обчислимо потрібні алгебраїчні доповнення.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

Так,  $\Delta = -1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 = 6$ . Оскільки  $\Delta \neq 0$ , то матриця  $A$  є невиродженою і для неї існує обернена матриця.

Обчислимо решту алгебраїчних доповнень.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

**Приклад 6.** Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Використовуємо такі елементарні перетворення. Від 1-го та 4-го рядків віднімаємо 2-ий рядок, помножений на 2.

$$\text{Маємо} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставляємо рядки місцями 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому,  $\text{rang}(A) = 3$ .

### Завдання для самостійної роботи до теми «Матриці»

#### Завдання 1.. Знайти добуток матриць АВ

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 8 & -2 & -9 & 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -7 \\ 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll}
9. A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 8 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \\
10. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}. \\
11. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}. \\
12. A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \\
13. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}. \\
14. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \\
15. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -7 & -3 & 2 \end{pmatrix}. \\
16. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}. \\
17. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 4 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}. \\
18. A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \\
19. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}; & B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 2 & 8 \\ 3 & -5 & -7 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 4 & -7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Завдання 2.** Знайти значення матричного многочлена

$$2B - 3A - 7E + 3AB + B^2.$$

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Завдання 3.** Знайти матрицю  $A^{-1}$  обернену до вказаної, якщо

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad 3. A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 5. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad 6. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad 8. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad 9. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 11. A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 12. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 14. A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 15. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 17. A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 6 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 18. A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad 20. A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 21. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

22.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

23.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 6 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

24.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

25.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

26. 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

27.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

28.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

29.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

30.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Завдання 4.** Розв'язати матричне рівняння:

$$1. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

7.  $A \cdot X = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
8.  $X \cdot A = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ .
9.  $A \cdot X = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .
10.  $X \cdot A = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ .
11.  $X \cdot A = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .
12.  $A \cdot X = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ .
13.  $X \cdot A = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .
14.  $A \cdot X = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ .
15.  $X \cdot A = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ .
16.  $A \cdot X = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 9 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ .
17.  $X \cdot A = B$ , де  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 11 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$18. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$19. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$20. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$21. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$22. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$23. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$24. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$25. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$26. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$27. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$28. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$29. X \cdot A = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$30. A \cdot X = B, \quad \text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Завдання 5.** Обчислити ранг матриці:

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad 3. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 15 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad 5. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 5 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}; \quad 6. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$7. \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad 8. \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 & 6 \\ 1 & -7 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 9. \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$10. \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -4 & -9 & 0 \end{pmatrix}; \quad 11. \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad 12. \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$13. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 14. \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 & 0 \\ 9 & 4 & -7 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad 15. \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$16. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}; \quad 17. \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 1 \\ 7 & -9 & -1 & 3 \\ 5 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad 18. \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$19. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 6 \\ 5 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad 20. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad 21. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -8 & 4 \end{pmatrix};$$

$$22. \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -6 & 2 \\ 4 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix}; \quad 23. \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad 24. \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$25. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad 26. \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 27. \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$28. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad 29. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}; \quad 30. \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 1 & 11 \\ 3 & 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

### Зразок виконання завдання до теми «Матриці»

**Завдання 1.** Знайти добуток матриць  $A$  і  $B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання**

Маємо

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$

**Завдання 2.** Знайти значення матричного многочлена  $3B + 4E - AB - 5A$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** За правилом множення матриці на число, знайдемо:

$$3 \cdot B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -3 & 9 & -6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad 4 \cdot E = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

;

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 10 & -10 & -5 \\ 5 & 15 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матриці  $A$  і  $B$  квадратні розміру  $(3 \times 3)$ , тому для них є коректною операція добутку. Результатом добутку цих матриць буде також квадратна матриця розміру  $(3 \times 3)$ . Тому

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -4 & 9 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оскільки матриці  $3B$ ,  $AB$ ,  $4E$ ,  $5A$  мають однаковий розмір  $(3 \times 3)$ , то для них є коректною операція алгебраїчної суми. Отже,

$$\begin{aligned} 3B + 4E - AB - 5A &= \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -3 & 9 & -6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 \\ 2 & -5 & 9 \\ -4 & 9 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 10 & -10 & -5 \\ 5 & 15 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -32 & 0 \\ -15 & 28 & -10 \\ 5 & -21 & 23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $3B + 4E - AB - 5A = \begin{pmatrix} 1 & -32 & 0 \\ -15 & 28 & -10 \\ 5 & -21 & 23 \end{pmatrix}.$

**Завдання 3.** Знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$

**Розв'язання**

Обчислимо визначник наведеної матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} \{II p. - 3 \cdot I p.\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11(-1-2) = 33.$$

Оскільки визначник  $\det A \neq 0$ , то матриця  $A$  є невиродженою і обернена матриця  $A^{-1}$  існує.

Обчислимо всі алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -16, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 31 \\ 9 & -3 & -3 \\ 11 & 0 & -11 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Завдання 4.** Розв'язати матричне рівняння:

$$\text{а) } X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання**

$$\text{а) } X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Позначимо: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо рівняння  $X \cdot A = B$ . Із цього рівняння випливає, що  $X = B \cdot A^{-1}$ . Знайдемо обернену матрицю  $A^{-1}$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{11} = 5; \quad A_{12} = -5; \quad A_{21} = -3; \quad A_{22} = 2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} (15 - 10 \quad -9 + 4) = \frac{1}{-5} (5 \quad -5) = (-1 \quad 1).$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Позначимо: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Маємо рівняння  $A \cdot X = B$ . Із цього рівняння випливає, що  $X = A^{-1}B$ . Знайдемо матрицю  $A^{-1}$ . Обчислимо визначник матриці  $A$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Оскільки визначник системи  $\Delta \neq 0$ , то матриця  $A$  є невідродженою і для неї існує обернена матриця. Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо  $X = A^{-1}B$ .

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 13 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -22 & 1 \\ -1 & -44 & -1 \\ 0 & -41 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Відповідь:** а)  $X = (-1 \ 1)$ ; б)  $X = \begin{pmatrix} 1 & -22 & 1 \\ -1 & -44 & -1 \\ 0 & -41 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Завдання 5.** Обчислити ранг матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ ,

**Розв'язання**

Виконаємо елементарні перетворення матриці. Елементи першого рядка поділимо на 2, отримаємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Від другого і третього рядків отриманої матриці віднімемо перший рядок, помножений, відповідно, на 3 та 5, отримаємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -27/2 & 21/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Від третього рядка матриці віднімемо другий рядок, помножений на 3, маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відкинемо в матриці  $A$  рядок, який складається з нулів, і отримаємо матрицю  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$ , ранг якої дорівнює двом  $r(A) = 2$ .

**Відповідь.**  $r(A) = 2$ .

## Запитання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Як визначити розмір матриці?
3. Які існують види матриць?
4. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення?
5. Які дії можна виконувати з матрицями?
6. Які матриці називаються квадратними?
7. Яка матриця називається діагональною?
8. Яка матриця називається одиничною?
9. Чи для всіх матриць існує дія множення?
10. Які дві матриці називаються узгодженими?
11. Які властивості добутку матриць Ви знаєте?
12. З якою властивістю матриць пов'язана назва «одинична» матриця?
13. Що називають оберненою матрицею?
14. Що таке транспонування матриці?
15. Чи можна підносити матрицю до степеня?
16. Що називається рангом матриці?
17. Яку матрицю називають виродженою?
18. Для яких матриць існують обернені матриці?
19. Що таке ранг матриці?

### 1.3 ЗАПИС ТА ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦЬ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE

Середовище комп'ютерної математики MAPLE є потужним інструментом для розв'язання широкого спектра математичних задач і, зокрема, для виконання операцій з матрицями. У системі MAPLE передбачено велику кількість вбудованих і стандартних команд, призначених для розв'язання типових математичних задач. Однак недоліком таких команд є те, що сам процес розв'язування залишається прихованим від користувача.

Окрім цього, система MAPLE має власну мову програмування, яка значно спрощує створення користувацьких програм для розв'язання математичних задач у випадках, коли відповідні стандартні команди відсутні. Надалі ми використовуватимемо програмне середовище MAPLE для розробки програм, що забезпечуватимуть наочне подання покрокового ходу розв'язання типових математичних задач.

Більшість стандартних команд системи MAPLE вбудовано в ядро системи, вони доступні одразу після запуску програми. Інші команди розташовані у спеціалізованих пакетах. Основні команди для роботи з матрицями містяться у двох подібних пакетах: `linalg` та `LinearAlgebra`. Для вирішення наших задач цілком достатньо використання пакета `linalg`, що забезпечує зручні функції для створення, редагування та обчислення матриць. Щоб завантажити команди цього пакета, слід виконати команду

**with(linalg) ;**

*[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve,*

*matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]*

Стандартні налаштування системи: текст у секції введення команд відображається червоним кольором, а результати виконання команд у полі виведення – блакитним. У полі виведення показано стандартні команди, що стають доступними після під'єднання пакета `linalg`.

Стандартні налаштування системи: текст в секції набору команд – червоний, результати виконання команди в полі виведення – блакитний колір.

## Створення матриць у MAPLE

Для створення матриці в пакеті `linalg` використовується команда `matrix`. Розглянемо варіанти загального синтаксису створення квадратної матриці розміром  $3 \times 3$ .

```
a := matrix(3, 3);  
a;
```

```
a := array(1 .. 3, 1 .. 3, [ ]),  
a .
```

Маленькій літері «*a*» присвоєно значення квадратної матриці третього порядку з символічними елементами. Але для того, щоб в полі виведення результатів показати всі елементи матриці, недостатньо записати тільки назву матриці, а потрібно використати команду `evalm`:

```
A:=evalm(a);  
A=evalm(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Таким простим прийомом ми досягли того, що зазвичай матриця позначається великими літерами, а її елементи – відповідними маленькими.

```
A := matrix(3, 3, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

або

```
A := matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Такий самий результат отримаємо і у випадку

```
A:= matrix(3, 3, [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]):
```

Звернемо увагу, що в останньому випадку, коли команда завершується символом двокрапки «:» замість крапки з комою «;», команда виконується, у цьому випадку – команда присвоєння великій літері «A» відповідної матриці, але результат команди відсутній в поле виведення.

Матриця розмірності 3×2

```
B:=matrix(3,2, [[2, 3], [0,4], [-1,5]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Матриця розмірності 2×4

```
C:=matrix(2,4, [[1,-1,0,2], [1,2,3,1]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Доступ до будь-якого елемента матриці:

```
A[1,1], A[3,2], B[3,2], C[1,3];  
1, 8, 5, 0.
```

У процесі роботи в середовищі системи Maple важливо звертати увагу на розкладку клавіатури при наборі відповідних символів. Наприклад, якщо символу «A», введеному як латинська буква, присвоєно певне значення, то спроба звернутися до цього значення за допомогою літери «A», набраної на клавіатурі кирилицею, призведе до помилки. Підступність таких ситуацій полягає в тому, що зовні ці та деякі інші літери виглядають однаково.

**Окремі типи матриць.**

Нульова матриця розмірності 3×7:

```
Z0:= matrix(3, 7, 0);
```

$$Z0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця-стовпець:

```
Ac := matrix(5,1,[1, 2, 3,4, 5]);
```

$$Ac := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Матриця-рядок:

```
Ar := matrix(1,5,[1, 2, 3,4, 5]);
```

$$Ar := [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5].$$

**Окремі типи квадратних матриць.**

Діагональна матриця:

```
Dd := diag(1, 2, 3,4, 5);
```

$$Dd := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Скалярна матриця:

```
lambda$4;
```

```
S:=diag(%);
```

$$S := \begin{matrix} \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Оператори «%», «%%» та «%%» використовуються для позначення результатів виконання трьох останніх команд, починаючи з останньої. Важливо зазначити, що немає значення, де саме команди розташовані на робочому листі Maple; ключовим є лише порядок їх виконання у часі.

Одинична матриця:

```
> E2=diag(1$2), E3=diag(1$3), E5=diag(1$5);
```

$$E2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Основні операції з матрицями

### Множення матриці на число або числа на матрицю

► `A:=matrix(4,3,(i,j)->x^(i-j));`

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ x & 1 & \frac{1}{x} \\ x^2 & x & 1 \\ x^3 & x^2 & x \end{bmatrix},$$

`3*A=evalm(3*A);`

`evalm(3*A)=evalm(A*3);`

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{x} & \frac{3}{x^2} \\ 3x & 3 & \frac{3}{x} \\ 3x^2 & 3x & 3 \\ 3x^3 & 3x^2 & 3x \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{x} & \frac{3}{x^2} \\ 3x & 3 & \frac{3}{x} \\ 3x^2 & 3x & 3 \\ 3x^3 & 3x^2 & 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{x} & \frac{3}{x^2} \\ 3x & 3 & \frac{3}{x} \\ 3x^2 & 3x & 3 \\ 3x^3 & 3x^2 & 3x \end{bmatrix}.$$

### Додавання та віднімання матриць

► Для виконання операцій додавання та віднімання матриць використовуються стандартні арифметичні оператори:

`A1:=matrix([[1,2],[4,5]]);`

`A2:=matrix([[5,3],[-4,6]]);`

`C=A1+A2;`

`C:=evalm(A1+A2);`

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = A1 + A2,$$

$$C := \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

► Обчислити лінійну комбінацію матриць  $3 \cdot A - 2 \cdot B$ , якщо

```
> A:= matrix([[0,-2,1], [-3,4, 2]]);
B:= matrix([[1,5,1], [-1,2,-3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

**Розв'язання.** Обчислимо окремо кожен доданок

```
3*A=evalm(3*A);
2*B=evalm(2*B);
```

$$3A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ -9 & 12 & 6 \end{bmatrix},$$

$$2B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix},$$

Обчислити лінійну комбінацію матриць  $3 \cdot A - 2 \cdot B$  можна одним із варіантів:

```
evalm(rhs(%%)+rhs(%))=evalm(3*A+2*B);
```

$$\begin{bmatrix} -2 & -16 & 1 \\ -7 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -16 & 1 \\ -7 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

### Множення матриць

Створимо процедуру перевірки узгодженості двох матриць  $A$  і  $B$ .

```
CCM:=proc(A::matrix,B::matrix)
  local m1,m2,n1,n2,m3,n3:
  m1:=rowdim(A):n1:=coldim(A):
  m2:=rowdim(B):n2:=coldim(B):
  if n1=m2 then
    printf(cat(`Оскільки кількість стовпців першої мат-
риці A дорівнює `,convert(n1,string),` та дорівнює
кількості рядків другої матриці B, ці матриці є узго-
дженими, тобто можлива операція множення матриць A*B.
Результатом цієї операції є матриця розмірності
`,convert(m1,string),`x`,convert(n2,string),`.`))
  else
    printf(cat(`Оскільки кількість стовпців першої мат-
риці A не збігається з кількістю рядків другої матри-
ці B`)):
    print(n1<>m2):
    printf(`ці матриці є неузгодженими, тобто операція
множення BxA - неможлива.`):
  end if
end proc;
```

```

CCM:=proc(A:=linalg-matrix, B:=linalg-matrix)
local m1, m2, n1, n2, m3, n3;
  m1:=linalg-rowdim(A);
  n1:=linalg-coldim(A);
  m2:=linalg-rowdim(B);
  n2:=linalg-coldim(B);
  if n1=m2 then printf(cat(`Оскільки кількість стовпців першої матриці A дорівнює`, convert(n1, string), `\
та дорівнює кількості рядків другої матриці B, ці матриці є узгодженими, тобто можлива опера\
ція множення матриць A*B. Результатом цієї операції є матриця розмірності`, convert(m1, string),`\
x, convert(n2, string), `.`))
  else
    printf(cat(`Оскільки кількість стовпців першої матриці A не збігається з кількістю рядків другої ма\
триці B`));
    print(n1≠m2);
    printf(`ці матриці є неузгодженими, тобто операція множення BxA є неможлива.`)
  end if
end proc

```

Розглянемо приклади роботи цієї процедури

```

▶ a:=matrix(1,3):A:=evalm(a);
b:=matrix(3,1):B:=evalm(b);
CCM(A,B);

```

$$A := [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3}],$$

$$B := \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix}.$$

Оскільки кількість стовпців першої матриці A дорівнює 3 та дорівнює кількості рядків другої матриці B, ці матриці є узгодженими, тобто можлива операція множення матриць A\*B. Результатом цієї операції є матриця розмірності 1x1.

```
CCM(B,A);
```

Оскільки кількість стовпців першої матриці A дорівнює 1 та дорівнює кількості рядків другої матриці B, ці матриці є узгодженими, тобто можлива операція множення матриць A\*B. Результатом цієї операції є матриця розмірності 3x3.

У розглянутому випадку можлива як операція множення  $A \times B$ , так і  $B \times A$ , проте результатами цих двох операцій є матриці різної розмірності. ◀

```

▶ a:=matrix(1,2):A:=evalm(a);
b:=matrix(2,3):B:=evalm(b);
CCM(A,B);

```

$$A := [a_{1,1} \quad a_{1,2}],$$

$$B := \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Оскільки кількість стовпців першої матриці  $A$  дорівнює 2 та дорівнює кількості рядків другої матриці  $B$ , ці матриці є узгодженими, тобто можлива операція множення матриць  $A \cdot B$ . Результатом цієї операції є матриця розмірності  $1 \times 3$ .

**ССМ(B, A) ;**

Оскільки кількість стовпців першої матриці  $A$  не збігається з кількістю рядків другої матриці  $B$

$$3 \neq 1$$

ці матриці є неузгодженими, тобто операція  $B \times A$  - неможлива. ◀

Отже, якщо матриці  $A$ ,  $B$  узгоджені, ті самі матриці, переставлені місцями,  $B$ ,  $A$  можуть бути узгодженими або неузгодженими.

Правило множення елементів рядка першої матриці на елементи стовпця другої, яке лежить в основі операції множення матриць, можна наочно продемонструвати за допомогою стандартної команди в Maple на простих прикладах, зокрема при множенні матриці-рядка на матрицю-стовпець. Для цього потрібно створити матриці відповідної розмірності з символічними елементами.

**► a := matrix(1, 5) : Ar := evalm(a) : A = evalm(Ar) ;  
b := matrix(5, 1) : Ac := evalm(b) : B = evalm(Ac) ;  
A \* B = evalm(Ar & \* Ac) ;**

$$A = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3} \quad a_{1,4} \quad a_{1,5}], \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \\ b_{4,1} \\ b_{5,1} \end{bmatrix}.$$

$$A B = [a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + a_{1,3} b_{3,1} + a_{1,4} b_{4,1} + a_{1,5} b_{5,1}]. \quad \blacktriangleleft$$

Слід звернути увагу на синтаксис команди множення двох матриць  $A$ ,  $B$ : `evalm(A & * B)`.

**► a := matrix(2, 3) : Ar := evalm(a) : A = evalm(Ar) ;  
b := matrix(3, 2) : Ac := evalm(b) : B = evalm(Ac) ;  
A \* B = evalm(Ar & \* Ac) ;**

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix},$$

$$A B = \begin{bmatrix} a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + a_{1,3} b_{3,1} & a_{1,1} b_{1,2} + a_{1,2} b_{2,2} + a_{1,3} b_{3,2} \\ a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{2,1} + a_{2,3} b_{3,1} & a_{2,1} b_{1,2} + a_{2,2} b_{2,2} + a_{2,3} b_{3,2} \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

```

▶ a:= matrix(3,2):Ar:=evalm(a):A=evalm(Ar);
b:= matrix(2,3):Ac:=evalm(b):B=evalm(Ac);
A*B=evalm(Ar*Ac);

```

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} & a_{1,1}b_{1,3} + a_{1,2}b_{2,3} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,1}b_{1,3} + a_{2,2}b_{2,3} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} & a_{3,1}b_{1,3} + a_{3,2}b_{2,3} \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Створимо Maple процедуру для наочної демонстрації правила множення будь-яких двох узгоджених числових матриць  $A$  і  $B$ .

```

#Процедура наочної демонстрації операції множення
двох ЧИСЛОВИХ матриць
#В цій процедурі використовуються внутрішні процедури
IsMnum та CVT
MyPRDm:=proc(A::matrix,B::matrix)
  local
a,b,ab,m1,m2,n1,n2,m3,n3,c,C,i1,j2,ij,cij,IsMnum,CVT:
  a:=evaln(A):b:=evaln(B):ab:=cat(a,`*`,b):
  IsMnum:=proc(x::matrix)# Процедура перевірки типу
матриці - чи є матриця числовою.
  local i,j;
  for i to linalg[rowdim](x) do
    for j to linalg[coldim](x) do
      if not type(evalf(x[i,j]),numeric) then RETURN(0)
    end if
  end do
  end do;
  1
end proc;
#CVT:=(x) -
>`if`(evalf(x)<0,cat("`(",convert(x,string),`)`),convert(x,string)):
# Процедура конвертування елемента матриці, що має
числовий тип, в текст
CVT:=(x) -
>`if`(evalf(x)<0,cat("`(",convert(x,string),`)`),convert(x,string)):
  if IsMnum(A)*IsMnum(B)=0 then

```

```

#RETURN(`Матриці `,convert(a,string),` та `,
convert(b,string),` мають бути числовими, проте ці
матриці мають, принаймні, один нечисловий елемент.`)
RETURN(`Матриці `,a,` та `, b,` мають бути числови-
ми, проте ці матриці мають, принаймні, один нечисло-
вий елемент.`)
else
m1:=linalg[rowdim](A):n1:=linalg[coldim](A):
m2:=linalg[rowdim](B):n2:=linalg[coldim](B):
if n1=m2 then
c:=matrix(m1,n2):
for i1 to m1 do
for j2 to n2 do
cij:=cat(CVT(A[i1,1]),`*`,CVT(B[1,j2]));
for ij from 2 to n1 do
cij:=cat(cij,`+`,cat(CVT(A[i1,ij]),`*`,CVT(B[ij,j2]))
)
end do;c[i1,j2]:=cij;
end do
end do; print(ab=op(c)):ab=evalm(A&*B)
else
printf(cat(`Оскільки кількість стовпців першої матри-
ці `,convert(args[1],string),` не збігається з кіль-
кістю рядків другої матриці `,
convert(args[2],string))):
print(n1<>m2):
printf(cat(`ці матриці є неузгодженими, тобто опера-
ція множення
`,convert(args[1],string),`x`,convert(args[2],string)
,` - неможлива.`)):
end if
end if
end proc:
► Знайти добуток матриць
A:=matrix([[2,3],[0,4],[-1,5]]);
B:=matrix([[1,-1,0,2],[1,2,3,1]]);
MyPRDm(A,B);

```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A*B = \begin{bmatrix} "2*1+3*1" & "2*(-1)+3*2" & "2*0+3*3" & "2*2+3*1" \\ "0*1+4*1" & "0*(-1)+4*2" & "0*0+4*3" & "0*2+4*1" \\ "(-1)*1+5*1" & "(-1)*(-1)+5*2" & "(-1)*0+5*3" & "(-1)*2+5*1" \end{bmatrix},$$

$$A*B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \\ 4 & 11 & 15 & 3 \end{bmatrix}.$$

Перевірка за допомогою стандартних команд Maple для дій над матрицями

**A\*B=evalm(AB) ;**

$$A B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \\ 4 & 11 & 15 & 3 \end{bmatrix}.$$

Більш наочною є така форма перевірки в подібних випадках

**evalm(A&\*B-AB) ;**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ознакою правильності результату є отримання нульової матриці, що є більш наочним порівняно з потребою порівнювати кожен елемент матриці. ◀

► **B:=matrix([[1,-1,0,2],[1,2,3,1]]);**

**A:=matrix([[2,3],[0,4],[-1,5]]);**

**MyPRDm(B,A) ;**

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Оскільки кількість стовпців першої матриці B не збігається з кількістю рядків другої матриці A

$$4 \neq 3$$

ці матриці є неузгодженими, тобто операція множення  $B \times A$  - неможлива.

Квадратні матриці одного порядку взаємноузгоджені.

► Знайти добутки двох квадратних матриць, переставляючи їх місцями.

**A:=matrix([[2,3,0],[0,4,-6],[-1,5,7]]);**

**B:=matrix([[1,-1,0],[1,2,3],[3,-5,4]]);**

**MyPRDm(A,B) ;AB:=rhs(%):**

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A*B = \begin{bmatrix} "2*1+3*1+0*3" & "2*1+3*2+0*(-5)" & "2*0+3*3+0*4" \\ "0*1+4*1+6*3" & "0*1+4*2+6*(-5)" & "0*0+4*3+6*4" \\ "1*1+5*1+7*3" & "1*1+5*2+7*(-5)" & "1*0+5*3+7*4" \end{bmatrix},$$

$$A*B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 22 & -22 & 36 \\ 27 & -24 & 43 \end{bmatrix}.$$

Перевірка

`evalm(A*B-AB);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

`B:=matrix([[1,1,0],[1,2,3],[3,-5,4]]);`

`A:=matrix([[2,3,0],[0,4,6],[1,5,7]]);`

`MyPRDm(B,A);BA:=rhs(%):`

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

$B*A =$

$$\begin{bmatrix} "1*2+1*0+0*1" & "1*3+1*4+0*5" & "1*0+1*6+0*7" \\ "1*2+2*0+3*1" & "1*3+2*4+3*5" & "1*0+2*6+3*7" \\ "3*2+(-5)*0+4*1" & "3*3+(-5)*4+4*5" & "3*0+(-5)*6+4*7" \end{bmatrix},$$

$$B*A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 26 & 33 \\ 10 & 9 & -2 \end{bmatrix}.$$

Перевірка

`evalm(B*A-BA);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Цей приклад підтверджує, що дві квадратні матриці одного порядку є взаємноузгодженими, і демонструє, що в загальному випадку такі матриці не є комутативними, тобто  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . Однак є типи матриць, для яких справджується властивість комутативності. ◀

► Знайти добуток матриць

`A:=matrix([[2,Pi],[0,sqrt(2)],[-1,5]],[3,1/sqrt(3)]]);`

`B:=matrix([[-2,sqrt(2)],[1,5]]);`

`MyPRDm(A,B);AB:=rhs(%):`

$$A := \begin{bmatrix} 2 & \pi \\ 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 5 \\ 3 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A * B = \begin{bmatrix} "2*(-2)+\text{Pi}*1" & "2*2^{(1/2)}+\text{Pi}*5" \\ "0*(-2)+2^{(1/2)}*1" & "0*2^{(1/2)}+2^{(1/2)}*5" \\ "(-1)*(-2)+5*1" & "(-1)*2^{(1/2)}+5*5" \\ "3*(-2)+1/3*3^{(1/2)}*1" & "3*2^{(1/2)}+1/3*3^{(1/2)}*5" \end{bmatrix},$$

$$A * B = \begin{bmatrix} -4 + \pi & 2\sqrt{2} + 5\pi \\ \sqrt{2} & 5\sqrt{2} \\ 7 & -\sqrt{2} + 25 \\ -6 + \frac{\sqrt{3}}{3} & 3\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Перевірка

`evalm(A*B-AB);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

► Знайти добуток матриць

`A := matrix([[2, Pi], [0, 1/x], [-1, 5], [1/sqrt(2), 1/sqrt(3)]]);`

`B := matrix([exp(1), -1, 0, sqrt(2)], [1, sqrt(5), 3, 1]);`

`MyPRDm(A, B); #AB:=rhs(%):`

$$A := \begin{bmatrix} 2 & \pi \\ 0 & x \\ -1 & 5 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} e & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{5} & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриці A, B мають бути числовими, проте ці матриці мають, принаймні, один нечисловий елемент.

► Знайти добуток матриць

`A := matrix([[1, 2, 3], [-1, 3, 1], [2, 4, 5]]);`

`B := matrix(3, 1, [3, 5, 6]);`

`MyPRDm(A, B); AB:=rhs(%):`

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$A*B = \begin{bmatrix} "1*3+2*5+3*6" \\ "(-1)*3+3*5+1*6" \\ "2*3+4*5+5*6" \end{bmatrix},$$

$$A*B = \begin{bmatrix} 31 \\ 18 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Перевірка  
`evalm(A*B-AB) ;`

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Операція множення квадратної матриці на матрицю-стовпець є останнім кроком матричного методу розв'язування систем лінійних рівнянь. ◀

Квадратні матриці можна підносити до натуральних степенів, виконуючи послідовне множення матриці саму на себе.

► Знайти квадрат матриці  $A$ .

`A:=matrix([[1,0,2],[1,1,3],[2,1,1]]);`  
`B:=evalm(A);`  
`A^2=MyPRDm(A,B);AB:=rhs(%):`

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A*B = \begin{bmatrix} "1*1+0*1+2*2" & "1*0+0*1+2*1" & "1*2+0*3+2*1" \\ "1*1+1*1+3*2" & "1*0+1*1+3*1" & "1*2+1*3+3*1" \\ "2*1+1*1+1*2" & "2*0+1*1+1*1" & "2*2+1*3+1*1" \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \left( A*B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 8 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \right).$$

Перевірка  
`evalm(A*B-AB) ;`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Скалярна та одинична матриці отримали свої назви завдяки властивостям множення узгоджених матриць і добутку матриці на число. Зокрема, добуток будь-якої матриці на число  $\lambda$  (або числа на матрицю) еквівалентний множенню цієї матриці на узгоджену скалярну матрицю, у якій всі діагональні елементи дорівнюють  $\lambda$ .

► Порівняємо результати множення матриці на число та її множення на узгоджену скалярну матрицю.

1)

`A1:= matrix(1,4,[4,0,2,7]);lambda:=10:`

`D1:=linalg[diag](lambda$4);`

`A1*lambda=evalm(A1*lambda);`

`MyPRDm(A1,D1);AD:=rhs(%):`

$$A1 := [4 \ 0 \ 2 \ 7], \quad D1 := \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$10 A1 = [40 \ 0 \ 20 \ 70],$$

$$A1 * D1 = ["4*10+0*0+2*0+7*0" \ "4*0+0*10+2*0+7*0" \ "4*0+0*0+2*10+7*0" \ "4*0+0*0+2*0+7*10"]$$

$$A1 * D1 = [40 \ 0 \ 20 \ 70].$$

Перевірка

`evalm(A1*lambda-AD);`

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

2)

`A1:= matrix(4,1,[4,0,2,7]);lambda:=20:`

`D1:=linalg[diag](lambda$1);`

`A1*lambda=evalm(A1*lambda);`

`MyPRDm(A1,D1);AD:=rhs(%):`

$$A1 := \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad D1 := [20],$$

$$20 A1 = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 40 \\ 140 \end{bmatrix},$$

$$A1 * D1 = \begin{bmatrix} "4*20" \\ "0*20" \\ "2*20" \\ "7*20" \end{bmatrix},$$

$$A1 * D1 = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 40 \\ 140 \end{bmatrix}.$$

Перевірка

`evalm(A1*lambda-AD);`

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



► Знайти добутки узгоджених матриць, коли одним із співмножників є одинична матриця.

1)

```
A1:= matrix([[1,0,2], [1,1,3],[2, 1,1]]);
```

```
E:=linalg[diag](1$3);
```

```
MyPRDm(A1,E);AE:=rhs(%):
```

$$AI := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AI * E = \begin{bmatrix} "1*1+0*0+2*0" & "1*0+0*1+2*0" & "1*0+0*0+2*1" \\ "1*1+1*0+3*0" & "1*0+1*1+3*0" & "1*0+1*0+3*1" \\ "2*1+1*0+1*0" & "2*0+1*1+1*0" & "2*0+1*0+1*1" \end{bmatrix},$$

$$AI * E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

```
evalm(A1&*E-AE);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2)

```
E:=linalg[diag](1$3);
```

```
A:= matrix([[1,0,2], [1,1,3],[2, 1,1]]);
```

```
MyPRDm(E,A);EA:=rhs(%):
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E * A = \begin{bmatrix} "1*1+0*1+0*2" & "1*0+0*1+0*1" & "1*2+0*3+0*1" \\ "0*1+1*1+0*2" & "0*0+1*1+0*1" & "0*2+1*3+0*1" \\ "0*1+0*1+1*2" & "0*0+0*1+1*1" & "0*2+0*3+1*1" \end{bmatrix},$$

$$E * A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3)

```
A2:= matrix([[1,0], [2,3], [1,1],[3,4],[2, 1],[1,6]]);
```

```
E:=linalg[diag](1$2);
```

```
MyPRDm(A2,E);A2E:=rhs(%):
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A2 * E = \begin{bmatrix} "1*1+0*0" & "1*0+0*1" \\ "2*1+3*0" & "2*0+3*1" \\ "1*1+1*0" & "1*0+1*1" \\ "3*1+4*0" & "3*0+4*1" \\ "2*1+1*0" & "2*0+1*1" \\ "1*1+6*0" & "1*0+6*1" \end{bmatrix},$$

$$A2 * E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

4)

```
E:=linalg[diag](1$2);
A2:= matrix([[1,0],[2,3],[1,1],[3,4],[2,1],[1,6]]);
MyPRDm(E,A2);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Оскільки кількість стовпців першої матриці E не збігається з кількістю рядків другої матриці A2  
 $2 \neq 6$

ці матриці є неузгодженими, тобто операція множення  $E \times A2$  - неможлива.

5)

```
E:=linalg[diag](1$6);
A2:= matrix([[1,0],[2,3],[1,1],[3,4],[2,1],[1,6]]);
MyPRDm(E,A2);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$E * A2 = \begin{bmatrix} "1*1+0*2+0*1+0*3+0*2+0*1" & "1*0+0*3+0*1+0*4+0*1+0*6" \\ "0*1+1*2+0*1+0*3+0*2+0*1" & "0*0+1*3+0*1+0*4+0*1+0*6" \\ "0*1+0*2+1*1+0*3+0*2+0*1" & "0*0+0*3+1*1+0*4+0*1+0*6" \\ "0*1+0*2+0*1+1*3+0*2+0*1" & "0*0+0*3+0*1+1*4+0*1+0*6" \\ "0*1+0*2+0*1+0*3+1*2+0*1" & "0*0+0*3+0*1+0*4+1*1+0*6" \\ "0*1+0*2+0*1+0*3+0*2+1*1" & "0*0+0*3+0*1+0*4+0*1+1*6" \end{bmatrix},$$

$$E * A2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

► Переконатися, що піднесення одиничної матриці до будь-якого натурального степеня завжди дає одиничну матрицю того самого порядку.

**E2:=linalg[diag](1\$2);**  
**seq((E2)^k=evalm(E2^k),k in [2,3,5,8,100]);**

$$E2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E2^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E2^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E2^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

**E5:=linalg[diag](1\$5);**  
**seq((E5)^k=evalm(E5^k),k in [2,3,5]);**

$$E5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E5^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E5^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E5^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Транспонування матриці

У Maple операцію транспонування матриці можна виконати за допомогою команди `transpose` з пакета `linalg`.

► Траспонувати задані матриці.

```
with(linalg):
a:=matrix(2,4):
b:=matrix(5,3,(i,j)->i+j):
A[`(rowdim(a))*x`(coldim(a))]=evalm(a);
aT:=transpose(a):
(A^T)[[rowdim(aT))*x`(coldim(aT))]=evalm(aT);
B[`(rowdim(b))*x`(coldim(b))]=evalm(b);
BT:=transpose(b):
(B^T)[[rowdim(BT))*x`(coldim(BT))]=evalm(BT);
```

$$A_{(2) \times (4)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix},$$

$$(A^T)_{[4] \times (2)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \\ a_{1,4} & a_{2,4} \end{bmatrix}.$$

$$B_{(5) \times (3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

$$(B^T)_{[3] \times (5)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

## 1.4 ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE

В Maple визначник матриці можна обчислити за допомогою команди `det`, що входить до пакета `linalg`.

► Обчислити визначник

```
restart:
#with(linalg):
a:=matrix(2,2):
A:=a:
det(evalm(A))=linalg[det](A);
b:=matrix(3,3):
B:=b:
det(evalm(b))=linalg[det](b);
```

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1},$$

$$\det \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = b_{1,1} b_{2,2} b_{3,3} - b_{1,1} b_{2,3} b_{3,2} - b_{2,1} b_{1,2} b_{3,3} \\ + b_{2,1} b_{1,3} b_{3,2} + b_{3,1} b_{1,2} b_{2,3} - b_{3,1} b_{1,3} b_{2,2}.$$

```
A:=matrix([[3,-4],[2,5]]):
det(evalm(A))=linalg[det](A);
B:=matrix(3,3,(i,j)->i+j):
det(evalm(B))=linalg[det](B);
C:=matrix(3,3,(i,j)->i^2+(-1)^j/j):
det(evalm(C))=linalg[det](C);
```

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 23,$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{9}{2} & \frac{11}{3} \\ 8 & \frac{19}{2} & \frac{26}{3} \end{pmatrix} = 0.$$

Для висвітлення покрокового обчислення визначника за теоремою Лапласа була створена спеціальна процедура Maple під назвою `det_matrixS` та збережена у файл `d:\Maple\My_gauss.m`.

Після виконання команди

```
read "d:\\Maple\\ My_gauss.m";
```

усі записані в цьому файлі процедури стають доступними для використання.

Аргументи процедури `det_matrixS(A,j,RowOrCol)`

$A$  – матриця;  $j$  – номер рядка або стовпця, за елементами якого виконується розкладання визначника; `RowOrCol` – якщо вказати велику літеру  $R$ , розкладання відбуватиметься за елементами рядка  $j$ , в інших випадках – за елементами стовпця  $j$ .

Зазначимо, що формула для обчислення визначників 2-го порядку надто проста і її вигляд не залежить від вибору параметрів  $j$ , `RowOrCol`.

Продемонструємо варіанти роботи цієї процедури.

```
► A:=matrix([[3,-4],[2,5]]);  
det_matrixS(A,1,"R");
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = "3*5-2*(-4)"$$
$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 23$$

```
a:=matrix(3,3):A:=a:  
det_matrixS(A,1,"R");
```

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1} \det \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$
$$- a_{1,2} \det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} + a_{1,3} \det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

```
det_matrixS(A,2,"R");
```

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = -a_{2,1} \det \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$
$$+ a_{2,2} \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} - a_{2,3} \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

```
det_matrixS(A,1,"c");
```

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = -a_{1,2} \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ + a_{2,2} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{3,2} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

`det_matrixS(A,3,"c");`

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,3} \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \\ - a_{2,3} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} + a_{3,3} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

`A:=matrix([[ -3, 2, 10], [6, -1, 19], [0, 1, 7]]);`

`det_matrixS(A,1,"R");`

`det_matrixS(A,3,"h");`

`det_matrixS(A,2,"h");`

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 6 & -1 & 19 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 6 & -1 & 19 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + 10 \det \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 6 & -1 & 19 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 10 \det \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 19 \det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 6 & -1 & 19 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

► Записати декілька формул розкладання для визначника четвертого порядку:

`A:=matrix([[3,4,-1,2],[2,-7,2,0],[1,-`

`1,1,2],[0,3,4,3]]);`

`det_matrixS(A,1,"R");`

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ - \det \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

**det\_matrixS(A,2,"R");**

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ -2 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 7 \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

**det\_matrixS(A,1,"c");**

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ 3 \det \begin{bmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

**det\_matrixS(A,4,"R");**

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ 3 \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**det\_matrixS(A,4,"c");**

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ -2 \det \begin{bmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Звернемо увагу, що 2-й та 4-й рядки, а також 1-й та 4-й стовпці містять по одному нульовому елементу. Відповідно, формули розкладання визначника за цими рядками або стовпцями будуть мати всього три доданки – за кількістю ненульових елементів. Натомість, формули розкладання за іншими рядками або стовпцями, наприклад, за елементами 1-го рядка, мають чотири доданки, що потребує більше обчислень.

Для збільшення кількості нульових елементів у визначнику можна застосувати метод занулення. Цей метод базується на проведеннях еквівалентних перетворень визначника, що дозволяють отримати більше нулів і спростити процес обчислення. Ми повернемося до цього прикладу пізніше, коли детальніше розглянемо метод занулення для обчислення визначників. ◀

► Обчислити визначник:

```
A:=matrix([ [sin(alpha)^2, 1,cos(alpha)^2],
[sin(beta)^2, 1,cos(beta)^2], [sin(gamma)^2,
1,cos(gamma)^2] ] );
```

$$A := \begin{bmatrix} \sin(\alpha)^2 & 1 & \cos(\alpha)^2 \\ \sin(\beta)^2 & 1 & \cos(\beta)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix}$$

Розглянута процедура нам в цьому випадку не надто допоможе.

```
det_matrixS(A,1,"R");
det_matrixS(A,3,"h");
det_matrixS(A,2,"h");
```

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \sin(\alpha)^2 & 1 & \cos(\alpha)^2 \\ \sin(\beta)^2 & 1 & \cos(\beta)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 & \cos(\gamma)^2 \end{pmatrix} &= \sin(\alpha)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & \cos(\beta)^2 \\ 1 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix} \\ &- \det \begin{bmatrix} \sin(\beta)^2 & \cos(\beta)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix} + \cos(\alpha)^2 \det \begin{bmatrix} \sin(\beta)^2 & 1 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 \end{bmatrix}, \\ \det \begin{pmatrix} \sin(\alpha)^2 & 1 & \cos(\alpha)^2 \\ \sin(\beta)^2 & 1 & \cos(\beta)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 & \cos(\gamma)^2 \end{pmatrix} &= \cos(\alpha)^2 \det \begin{bmatrix} \sin(\beta)^2 & 1 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 \end{bmatrix} \\ &- \cos(\beta)^2 \det \begin{bmatrix} \sin(\alpha)^2 & 1 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 \end{bmatrix} + \cos(\gamma)^2 \det \begin{bmatrix} \sin(\alpha)^2 & 1 \\ \sin(\beta)^2 & 1 \end{bmatrix}, \\ \det \begin{pmatrix} \sin(\alpha)^2 & 1 & \cos(\alpha)^2 \\ \sin(\beta)^2 & 1 & \cos(\beta)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 & \cos(\gamma)^2 \end{pmatrix} &= -\det \begin{bmatrix} \sin(\beta)^2 & \cos(\beta)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix} \\ &+ \det \begin{bmatrix} \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 \\ \sin(\beta)^2 & \cos(\beta)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Додамо до елементів 1-го стовпця відповідні елементи 3-го стовпця. Зробимо це за допомогою команди `addcol(A, c1, c2, m)`, виклик якої повертає копію матриці  $A$ , у якій стовпець  $c2$  замінено на  $m \cdot \text{col}(A, c1) + \text{col}(A, c2)$ :

```
Delta=linalg[addcol](A,3,1,1);  
simplify(%);
```

$$\Delta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 & 1 & \cos(\alpha)^2 \\ \cos(\beta)^2 + \sin(\beta)^2 & 1 & \cos(\beta)^2 \\ \cos(\gamma)^2 + \sin(\gamma)^2 & 1 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix}.$$

Застосуємо, напевне, найпоширенішу команду спрощення виразів `simplify(%);`

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cos(\alpha)^2 \\ 1 & 1 & \cos(\beta)^2 \\ 1 & 1 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що у процесі спрощення символічних виразів Maple розпізнала основну тригонометричну тотожність  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ . Бачимо, що отриманий визначник має два однакових стовпці. Згідно з властивостями визначників, якщо матриця містить два однакових стовпці, то визначник дорівнює нулю. Отже, отриманий визначник також дорівнює нулю.

В той же час, звернемо увагу, що застосування команди спрощення до вихідної матриці бажаного результату не дає:

```
A=simplify(A);
```

$$A = \begin{bmatrix} \sin(\alpha)^2 & 1 & \cos(\alpha)^2 \\ \sin(\beta)^2 & 1 & \cos(\beta)^2 \\ \sin(\gamma)^2 & 1 & \cos(\gamma)^2 \end{bmatrix}.$$

► Знайдіть дійсні корені квадратного рівняння:

```
A:=matrix([[-2-x,2,0],[2,4-x,6],[1,2,4]]):  
det(evalm(A))=0;  
sort(linalg[det](A));  
solve(%,{x});
```

$$\det \begin{pmatrix} -2-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0,$$

$$4x^2 + 4x - 12,$$

$$\left\{ x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}, \left\{ x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

► Знайдіть дійсні корені кубічного рівняння:

```
A:=matrix([[-x,0,6],[1,-x,-11],[0,1,6-x]]):  
det(evalm(A))=0;  
sort(linalg[det](evalm(A)))=0;  
solve(%,{x});
```

$$\det \begin{pmatrix} -x & 0 & 6 \\ 1 & -x & -11 \\ 0 & 1 & 6-x \end{pmatrix} = 0,$$
$$-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0,$$
$$\{x=1\}, \{x=2\}, \{x=3\}.$$

### Обчислення визначників в середовищі MAPLE методом занулення

Для висвітлення покрокового обчислення визначника методом занулення була створена спеціальна процедура Maple під назвою nullification\_encl та збережена у файл d:\Maple\My\_gauss.m.

Після виконання команди

```
read "d:\Maple\My_gauss.m";
```

усі записані в цьому файлі процедури стають доступними для використання.

Аргументом процедури nullification\_encl(A) є матриця A. Метод застосовується до обчислення визначників третього та вищих порядків.

Розглянемо приклади роботи цієї процедури.

► Обчислити визначники методом занулення.

```
A:=matrix(3,3,[-3,2,-1],[-1,1,1],[2,1,2]):  
nullification_encl(A):
```

Для обчислення визначника

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 1.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 2.

Дістаємо матрицю A2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \det(A2)$

$$\det(A) = \{-1\} (-1)^{1+3} \det\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \{-4\} \{5\} - \{3\} \{-4\}$$

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = -8$$

$$\det(A) = \{-1\} \{-8\}, \det(A) = 8$$

**A:=matrix(3,3,[[1,2,3],[2,1,-2],[1,3,4]]):  
nullification\_encl(A):**

Для обчислення визначника

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число -2.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число -1.

Дістаємо матрицю A2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A2)$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \{-3\} \{1\} - \{-8\} \{1\}$$

$$\det\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\det(A) = \{1\} \{5\}, \det(A) = 5$$

**A:=matrix(4,4,[[3,4,-1,2],[2,-7,2,0],[1,-1,1,2],[0,3,4,3]]):  
nullification\_encl(A):**

Для обчислення визначника

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 2.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 1.

Дістаємо матрицю A2.

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 4.

Дістаємо матрицю A3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 12 & 19 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A3)$$

$$\det(A) = \{-1\} (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 12 & 19 & 11 \end{pmatrix}$$

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число -3.

Дістаємо матрицю B1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число -19.

Дістаємо матрицю B2.

B =

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 12 & 19 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow B1 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -20 & 0 & -8 \\ 12 & 19 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow B2 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -20 & 0 & -8 \\ -140 & 0 & -65 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \det(B2)$$

$$\det(B) = \{1\} (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ -140 & -65 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ -140 & -65 \end{pmatrix} = \{-20\} \{-65\} - \{-8\} \{-140\}$$

$$\det \begin{pmatrix} -20 & -8 \\ -140 & -65 \end{pmatrix} = 180$$

$$\det(A) = \{-1\}^2 \{180\}, \det(A) = 180$$

> **A:=matrix(5,5,[[3,4,-1,2,6],[2,-7,2,0,-1],[1,-1,1,2,-8],[0,3,4,3,3],[1,1,1,1,1]]):**

### **nullification\_encl(A):**

Для обчислення визначника

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -7 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 2.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 1.

Дістаємо матрицю A2.

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 4.

Дістаємо матрицю A3.

До членів рядка 5 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число 1.

Дістаємо матрицю A4.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -7 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 1 & 0 & 4 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A2 =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 1 & 0 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 1 & 0 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 12 & 19 & 0 & 11 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A4 =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 1 & 0 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 12 & 19 & 0 & 11 & 27 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A4)$$

$$\det(A) = \{-1\} (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \\ 12 & 19 & 11 & 27 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число  $-3$ .

Дістаємо матрицю  $B1$ .

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число  $-19$ .

Дістаємо матрицю  $B2$ .

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число  $-5$ .

Дістаємо матрицю  $B3$ .

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \\ 12 & 19 & 11 & 27 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow B1 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 11 \\ -20 & 0 & -8 & -35 \\ 12 & 19 & 11 & 27 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow B2 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 11 \\ -20 & 0 & -8 & -35 \\ -140 & 0 & -65 & -182 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow B3 = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 & 11 \\ -20 & 0 & -8 & -35 \\ -140 & 0 & -65 & -182 \\ -36 & 0 & -17 & -48 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \det(B3)$$

$$\det(B) = \{1\} (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} -20 & -8 & -35 \\ -140 & -65 & -182 \\ -36 & -17 & -48 \end{pmatrix}$$

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число  $-65/8$ .

Дістаємо матрицю  $C1$ .

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1, помножені на число  $-17/8$ .

Дістаємо матрицю  $C2$ .

$$C = \begin{bmatrix} -20 & -8 & -35 \\ -140 & -65 & -182 \\ -36 & -17 & -48 \end{bmatrix} \rightarrow C1 = \begin{bmatrix} -20 & -8 & -35 \\ \frac{45}{2} & 0 & \frac{819}{8} \\ -36 & -17 & -48 \end{bmatrix} \rightarrow C2 = \begin{bmatrix} -20 & -8 & -35 \\ \frac{45}{2} & 0 & \frac{819}{8} \\ \frac{13}{2} & 0 & \frac{211}{8} \end{bmatrix}$$

$$\det(C) = \det(C2)$$

$$\det(C) = \{-8\} (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} \frac{45}{2} & \frac{819}{8} \\ \frac{13}{2} & \frac{211}{8} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{45}{2} & \frac{819}{8} \\ \frac{13}{2} & \frac{211}{8} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{45}{2} \right\} \left\{ \frac{211}{8} \right\} - \left\{ \frac{819}{8} \right\} \left\{ \frac{13}{2} \right\}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{45}{2} & \frac{819}{8} \\ \frac{13}{2} & \frac{211}{8} \end{pmatrix} = -72$$

$$\det(A) = \{-1\}^2 \{8\} \{-72\}, \det(A) = -576$$

Зі збільшенням порядку визначників кількість необхідних обчислень зростає факторіально відносно розміру матриці. Тому ефект застосування методу занулення може бути особливо значущим, оскільки цей метод дозволяє спростити процес обчислення, зменшуючи кількість необхідних операцій. ◀

### Обчислення обернених матриць в середовищі MAPLE

В Maple обернена матриця може бути обчислена за допомогою команди `inverse`, що входить до пакета `linalg` і може бути використана з таким синтаксисом `linalg[inverse](A)`, де  $A$  – матриця.

► Знайти матрицю  $A^{-1}$  обернену до даної матриці

**`A:=matrix(3,3,[[1,0,1],[4,-1,3],[2,1,-2]]):`**

**`A^(-1)=linalg[inverse](A);`**

$$A^{(-1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{14}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Той самий результат можемо отримати в більш наочній формі

**`A^(-1)=linalg[adj](A)/linalg[det](A);`**

$$A^{(-1)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 14 & -4 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Перевіримо отриманий результат:

**`A*A^(-1)=evalm(A&*rhs(%));`**

$$A A^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

**`A^(-1)*A=rhs(%%)*evalm(A), A^(-1)*A^(-1)*A=evalm(rhs(%%)&*A);`**

$$A^{(-1)}(A) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 14 & -4 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{(-1)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Як відомо, для виродженої матриці обернена матриця не існує. У такому випадку система Maple видає нижченаведене повідомлення

```
A:=matrix(2,2,[[1,2],[3,6]]);
A^(-1)=linalg[inverse](A);
      A :=  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ,
      Error, (in linalg:-inverse) singular matrix
```

Продемонструємо відомі властивості оберненої матриці

$$1. \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad 2. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}. \quad 3. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

на прикладі матриць різних порядків.

► Перевірити властивості оберненої матриці на прикладі матриці 2-го порядку.

```
A:=matrix(2,2,[[1,0],[4,3]]);
A^(-1)=linalg[adj](A)/linalg[det](A);
A^(-1)=linalg[inverse](A);
printf(`Перевірка властивості:`);det(A^(-1))=1/det(A);
linalg[det](linalg[inverse](A))-
1/`(`linalg[det](A))=linalg[det](linalg[inverse](A))-
1/linalg[det](A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A^{(-1)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Перевірка властивості:

$$\det(A^{(-1)}) = \frac{1}{\det(A)},$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{(3)} = 0.$$

```
printf(`Перевірка властивості:`);(A^(-1))^T=(A^T)^(-1);
linalg[transpose](linalg[inverse](A))-
linalg[inverse](linalg[transpose](A))=evalm(linalg[tr
anspose](linalg[inverse](A))-
linalg[inverse](linalg[transpose](A)));
```

Перевірка властивості:

$$(A^{(-1)})^T = (A^T)^{(-1)},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
printf(`Перевірка властивості:`); (A*B)^``(-1)=B^``(-1)*A^``(-1);
B:=matrix(2,2,[[5,1],[2,3]]);
A=evalm(A),B=evalm(B);
linalg[inverse](evalm(A*B))-
evalm(linalg[inverse](B)*linalg[inverse](A))=evalm(linalg[inverse](evalm(A*B))-
evalm(linalg[inverse](B)*linalg[inverse](A)));
Перевірка властивості:
```

$$(AB)^{(-1)} = B^{(-1)} A^{(-1)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{39} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{39} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{39} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{39} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

► Перевірити властивості оберненої матриці на прикладі матриці 3-го порядку.

```
A:=matrix([[ -7, 2, 0], [-1, 1, 2], [3, 4, 3]]);
A^``(-1)=linalg[adj](A)/linalg[det](A);
A^``(-1)=linalg[inverse](A);
printf(`Перевірка властивості:`); det(A^``(-1))=1/det(A);
linalg[det](linalg[inverse](A))-
1/``(linalg[det](A))=linalg[det](linalg[inverse](A))-
1/linalg[det](A);
```

$$A := \begin{bmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A^{(-1)} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} -5 & -6 & 4 \\ 9 & -21 & 14 \\ -7 & 34 & -5 \end{bmatrix},$$

$$A^{(-1)} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{53} & \frac{-6}{53} & \frac{4}{53} \\ \frac{9}{53} & \frac{-21}{53} & \frac{14}{53} \\ \frac{-7}{53} & \frac{34}{53} & \frac{-5}{53} \end{bmatrix}.$$

Перевірка властивості:

$$\det(A^{(-1)}) = \frac{1}{\det(A)},$$

$$\frac{1}{53} - \frac{1}{(53)} = 0.$$

```
printf(`Перевірка властивості:`); (A^` ` (-
1))^T=(A^T)^` ` (-1);
linalg[transpose](linalg[inverse](A))-
linalg[inverse](linalg[transpose](A))=evalm(linalg[tr
anspose](linalg[inverse](A))-
linalg[inverse](linalg[transpose](A)));
```

Перевірка властивості:

$$(A^{(-1)})^T = (A^T)^{(-1)},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-5}{53} & \frac{9}{53} & \frac{-7}{53} \\ \frac{-6}{53} & \frac{-21}{53} & \frac{34}{53} \\ \frac{4}{53} & \frac{14}{53} & \frac{-5}{53} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-5}{53} & \frac{9}{53} & \frac{-7}{53} \\ \frac{-6}{53} & \frac{-21}{53} & \frac{34}{53} \\ \frac{4}{53} & \frac{14}{53} & \frac{-5}{53} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
printf(`Перевірка властивості:`); (A*B)^` ` (-1)=B^` ` (-
1)*A^` ` (-1);
#A:=matrix(2,2,[[1,0],[4,3]]):
B:=matrix(2,2,[[5,1],[2,3]]):
B:=matrix([[3, 4, -1], [2, -7, 2], [1, -1, 1]]):
A=evalm(A),B=evalm(B);
linalg[inverse](evalm(A&*B))-
evalm(linalg[inverse](B)&*linalg[inverse](A))=evalm(l
inalg[inverse](evalm(A&*B))-
evalm(linalg[inverse](B)&*linalg[inverse](A)));
```

Перевірка властивості:

$$(AB)^{(-1)} = B^{(-1)} A^{(-1)}.$$

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{1060} & \frac{-127}{1060} & \frac{67}{1060} \\ \frac{-23}{265} & \frac{89}{265} & \frac{-24}{265} \\ \frac{-241}{1060} & \frac{1163}{1060} & \frac{-263}{1060} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{1060} & \frac{-127}{1060} & \frac{67}{1060} \\ \frac{-23}{265} & \frac{89}{265} & \frac{-24}{265} \\ \frac{-241}{1060} & \frac{1163}{1060} & \frac{-263}{1060} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad \blacktriangleleft$$

Покрокове обчислення оберненої матриці за допомогою спеціально створеної процедури в Maple буде розглянуто під час аналізу матричного методу розв'язування систем лінійних рівнянь.

## 1.5 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему  $n$  лінійних алгебричних рівнянь з  $n$  невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (6)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – невідомі;

$a_{ij}$  – коефіцієнти при невідомих ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ );

$b_1, b_2, \dots, b_n$  – вільні члени.

*Однорідною* називають таку систему лінійних рівнянь (6), у якій всі її вільні члени дорівнюють нулю. У випадку, коли хоча б один з вільних членів системи відмінний від нуля, система називається неоднорідною.

Розв'язком системи лінійних алгебричних рівнянь (6) є така сукупність  $n$  чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , що після їх підстановки в систему (6) замість невідомих  $x_1, x_2, \dots, x_n$  всі рівняння перетворює у тотожності.

Однорідна система завжди має тривіальний, тобто, нульовий розв'язок.

Якщо система лінійних рівнянь має хоча б один розв'язок, то її називають *сумісною*.

Сумісна система, яка має єдиний розв'язок, називається *визначеною*, а сумісна система, яка має більше одного розв'язку, називається *невизначеною*.

Система, яка не має жодного розв'язку, називається *несумісною*.

Сумісна система має єдиний розв'язок, якщо її визначник не дорівнює нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

і є визначеною.

Розв'язок визначеної системи (6) можна знайти за правилом Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, (j = 1, 2, \dots, n),$$

де  $\Delta_j$  – визначник, утворений з визначника системи  $\Delta$  заміною  $j$ -го стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо  $\Delta = 0$ , а хоча б один із допоміжних визначників  $\Delta_j \neq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) не дорівнює нулю, то система не сумісна.

Якщо ж  $\Delta = \Delta_j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), то система невизначена і має безліч розв'язків.

### Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

**Метод Гаусса.** Метод послідовного виключення невідомих (метод Гаусса) є одним із найпоширеніших способів розв'язання систем лінійних рівнянь. Метод було запропоновано Гауссом, і ґрунтується він на елементарних перетвореннях заданої системи рівнянь. Метод складається з двох етапів: прямий хід Гаусса і зворотний хід Гаусса.

*Розглянемо перший етап.* Прямий хід Гаусса полягає в перетворенні системи до трапецеподібного (якщо кількість рівнянь і невідомих однакова, то до трикутного) вигляду.

Нехай задано систему  $n$  лінійних рівнянь з  $m$  невідомими. У системі (у разі  $m = n$ ) від другого рівняння потрібно відняти перше, помножене на  $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ; від третього – відняти перше, помножене на  $\frac{a_{31}}{a_{11}}$  і т. ін.

Матимемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{n1}x_1 + a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_m \end{cases}$$

В отриманій системі від третього рівняння віднімемо друге, помножене на  $a'_{32}/a'_{22}$ , а від четвертого – друге, помножене на  $a'_{42}/a'_{22}$  тощо. Отримаємо нижченаведену систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \dots \\ a''_{n1}x_1 + a''_{n2}x_2 + \dots + a''_{nn}x_n = b''_m \end{cases}$$

Далі виконуємо аналогічні перетворення з усіма рівняннями, починаючи з третього: від четвертого віднімаємо третє, помножене на  $a_{43}' / a_{33}'$ , тощо. Таку процедуру проводимо  $n$  разів. В результаті отримаємо трикутну систему, у якій будуть відсутні елементи зліва від головної діагоналі. Штрихи біля коефіцієнтів означають, що у процесі кожної дії коефіцієнти змінюють своє значення

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}'x_1 + a_{22}''x_2 + \dots + a_{2n}''x_n = b_2'' \\ a_{33}'''x_3 + \dots + a_{3n}'''x_n = b_3''' \\ \dots \\ a_{nn}^{n-1}x_n = b_n^{n-1} \end{array} \right.$$

Переходимо до другого етапу (зворотний хід). З останнього рівняння знаходимо  $X_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}$ ; підставивши це значення в  $(n - 1)$ -е рівняння, знайдемо  $X_{n-1}$ .

Так поступово дійдемо до  $X_1$ .

Наприклад, розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

Складемо розширену матрицю системи і зведемо її до трикутного вигляду. Таким чином виконаємо перший етап розв'язання системи, прямий хід Гаусса.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Тепер переходимо до другого етапу, зворотного ходу Гаусса, під час якого послідовно обчислюються значення невідомих, починаючи з останнього рівняння.

$$\text{Маємо } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \\ z = 3 \end{array} \right. , \text{ звідки знаходимо: } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Різновидом методу Гаусса є метод Жордана-Гаусса, де нулі отримують як нижче головної діагоналі, так і вище неї. Для цього після першого ж віднімання методом Гаусса від першого рівняння віднімають друге, помножене на  $a_{1n}'/a_{2n}'$ , так, щоб в першому рівнянні зникло  $X_n$ . Далі аналогічно від третього віднімають друге, помножене на  $a_{3n}'/a_{2n}'$ , і далі, поки не зникне  $X_n$  у всіх рівняннях крім останнього. Дії ліквідації перших та останніх невідомих виконуються по чергово:  $x_1$  і  $x_n$ ,  $x_2$  і  $x_{n-1}$  ... тощо. В результаті виконаних операцій система приймає вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & = b_1' \\ & a_{22}x_2 & & & = b_2' \\ & & a_{33}x_3 & & = b_3' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{nn}^{(n+1)}x_n & = b_n^{(n+1)} \end{cases}$$

Видно, що з цієї системи відразу ж можна знайти будь-яку невідому.

**Метод Крамера.** Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь відмінний від 0 ( $\Delta \neq 0$ ), тоді система має розв'язок і до того ж цей розв'язок єдиний. Розв'язок можна знайти за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де  $\Delta_j (j=1,2,3)$  – допоміжні визначники, що утворюються з  $\Delta$  в результаті заміни  $j$ -го стовпця на стовпець вільних членів.

**Приклад.** Розв'язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10, \end{cases}$$

### Розв'язання

Обчислюємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4.$$

Оскільки  $\Delta \neq 0$ , то система має єдиний розв'язок

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2.$$

**Приклад.** Знайти розв'язок системи 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

### Розв'язання

Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 88 - 33 - 24 + 33 - 48 + 44 = 60;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 64 + 22 + 22 + 44 + 44 - 16 = 180;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 88 - 33 - 24 - 48 + 33 + 44 = 60.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{180}{60} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1.$$

**Відповідь.** (3; 1; 1).

### Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь

Систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді матричного рівняння вигляду

$$AX = B,$$

де  $A$  – матриця, яка складається з коефіцієнтів,

$X$  – матриця-стовпець, що складається з невідомих,

$B$  – матриця-стовпець, складена з вільних членів.

Тоді матриця  $X$  знаходиться за формулою  $X = A^{-1} \cdot B$ ,

**Приклад.** Дослідити на розв'язок нижчевказану систему лінійних рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

### Розв'язання

Складаємо такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Матрицю  $A^{-1}$  записуємо за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$
$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 6 + 6 + 12 + 12 - 8 = 60$$

Обчислюємо відповідні алгебраїчні доповнення

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -18; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \\ A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11; \end{aligned}$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 64 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Можна виконати перевірку для  $A^{-1}$  ( $A \cdot A^{-1} = E$ ):





дорівнював рангу розширеної матриці. Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок. Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Отже, якщо  $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(\tilde{A})$ , то система (7) несумісна, тобто розв'язків не має. Якщо  $\text{rang}(A) = \text{rang}(\tilde{A}) = r$ , то система (7) сумісна, і загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь визначається за формулою

$$X_{з.н.} = X_{ч.н.} + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_{n-r} X_{n-r},$$

де  $X_{ч.н.}$  – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи,  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  – фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь,

$C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$  – довільні сталі.

Щоб знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ , скористаємось результатами, викладеними вище.

Стовпець вільних членів  $B$  розширеної матриці є лінійною комбінацією базисних стовбців матриці  $A$ . Додаючи до цього виразу решту стовпців з нульовими коефіцієнтами, отримуємо розклад стовпця вільних членів за всіма стовпцями матриці  $A$ . Коефіцієнти цього розкладу утворюють частинний розв'язок неоднорідної системи  $X_{ч.н.}$ .

Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь має вигляд

$$X_{з.н.} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X_{ч.н.} + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_{n-r} X_{n-r}.$$

### Приклади розв'язання типових задач

**Приклад 1.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

#### Розв'язання

Запишемо подану систему в матричній формі. Для цього введемо матрицю системи  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , вектор-стовпець вільних членів цієї сис-

теми  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  і вектор-стовпець невідомих  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . В результаті система лінійних алгебраїчних рівнянь прийме вигляд матричного рівняння  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ .

Для розв'язання отриманого рівняння помножимо його на матрицю  $A^{-1}$ :  $A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ . Маємо  $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ . Зауважимо, що, оскільки матриця  $A^{-1}$  має розмір  $(3 \times 3)$ , а вектор-стовпець  $\vec{b}$ , відповідно  $(3 \times 1)$ , то  $A^{-1}$  є узгодженою з  $\vec{b}$ , і тому добуток  $A^{-1} \cdot \vec{b}$  існує.

Знайдемо добуток  $A^{-1} \cdot \vec{b}$ ,

$$A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , тобто,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ .

**Приклад 2.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 = 3. \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 6x_1 + 9x_2 = 3. \end{cases}$$

**Розв'язання**

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 = 10. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи і визначники  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4. \quad \text{Оскільки } \Delta \neq 0, \text{ то сис-}$$

тема має єдиний розв'язок  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5$ ,  $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$ .

Геометрично це означає, що прямі  $2x_1 - 3x_2 = 4$  і  $4x_1 - 5x_2 = 10$  перетинаються в точці  $M(5; 2)$ .

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 = 3. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи і визначники  $\Delta_1, \Delta_2$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3. \quad \text{Оскільки } \Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \text{ то система несумісна.}$$

Геометрично це означає, що прямі  $2x_1 + 3x_2 = 1$  і  $4x_1 + 6x_2 = 3$  не перетинаються.

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 6x_1 + 9x_2 = 3. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи і визначники  $\Delta_1, \Delta_2$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Оскільки } \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0, \text{ то}$$

система має безліч розв'язків.

Геометрично це означає, що прямі  $2x_1 + 3x_2 = 1$  і  $6x_1 + 9x_2 = 3$  збігаються, тобто, координати будь-якої точки прямої  $2x_1 + 3x_2 = 1$  задовольняють обидва рівняння системи.

**Приклад 3.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0; \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18; \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5; \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5; \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 27. \end{cases}$$

### Розв'язання

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0; \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18; \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases}$$

Виключимо з другого та третього рівнянь невідому  $x_1$ . Для виключення  $x_1$  з другого рівняння помножимо перше рівняння системи на  $-\frac{3}{2}$  і додамо до другого. Аналогічно, для виключення  $x_1$  з третього рівняння помножимо перше рівняння системи на  $-\frac{5}{2}$  і додамо до третього. Перше рівняння залишимо без змін.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0; \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18; \\ \frac{15}{2}x_2 - \frac{33}{2}x_3 = 39. \end{cases}$$

Виключимо невідому  $x_2$  з третього рівняння. Помножимо друге рівняння системи на  $-\frac{15}{7}$  і додамо до третього. Перше і друге рівняння залишимо без змін.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0; \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18; \\ -\frac{3}{7}x_3 = \frac{3}{7}. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0; \\ 7x_2 - 15x_3 = 36; \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

На цьому прямий хід методу Гаусса закінчено. В результаті зворотного ходу послідовно знаходимо значення всіх невідомих. Дійсно, підставимо значення  $x_3 = -1$  в друге рівняння для знаходження  $x_2$ . Отже,  $x_2 = 3$ . Знайдені значення  $x_1, x_2$  підставляємо в перше рівняння. Звідки знаходимо  $x_1 = -4$ .

Отже, розв'язком системи є  $x_1 = -4, x_2 = 3, x_3 = -1$ . Система лінійних алгебраїчних рівнянь є сумісною і визначеною.

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5; \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Для виключення невідомої  $x_1$  з другого та третього рівнянь повторимо перший крок методу Гаусса з пункту а). Отримаємо таку систему.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ \frac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7; \\ -\frac{15}{2}x_2 + 3x_3 = -19. \end{cases}$$

Виключимо невідому  $x_2$  з третього рівняння. Додамо друге рівняння до третього. Перше і друге рівняння залишимо без змін.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ \frac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7; \\ 0x_3 = -26. \end{cases}$$

Наявність у системи рівняння  $0x_3 = -26$ , яке не має розв'язків, вказує на те, що система є несумісною.

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5; \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 27. \end{cases}$$

Виконуючи перший крок методу Гаусса стосовно виключення  $x_1$  з другого та третього рівнянь, отримаємо систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ \frac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7; \\ -\frac{15}{2}x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Додамо друге рівняння до третього. Перше і друге рівняння залишимо без змін.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8; \\ \frac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7; \\ 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Наявність у системі рівняння  $0x_3 = 0$ , яке має безліч розв'язків, вказує на те, що система є сумісною і невизначеною.

Введемо позначення  $x_3 = t$  – вільна невідома ( $t \in R$ ). Невідомі  $x_1$ ,  $x_2$  є залежними або базисними. Тоді остання система прийме вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4t = 8; \\ \frac{15}{2}x_2 - 3t = -7. \end{cases}$$

Виразимо з останнього рівняння отриманої системи невідому  $x_2$ .  
 Маємо  $x_2 = -\frac{14}{15} + \frac{2}{5}t$ . Підставимо отриманий вираз в перше рівняння і  
 знайдемо  $x_1$ , тобто,  $x_1 = \frac{19}{3} + t$ .

Таким чином, множину розв'язків системи можна подати у вигляді  
 $x_1 = \frac{19}{3} + t$ ,  $x_2 = -\frac{14}{15} + \frac{2}{5}t$ ,  $x_3 = t$ ,  $t \in R$ . Надаючи параметру  $t$  довільних  
 значень, можна отримати множину часткових розв'язків.

**Приклад 4.** Знайти загальний розв'язок однорідної системи лінійних  
 рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

#### Розв'язання

Запишемо матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю до нижченаведеного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 & -3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перший і другий стовпці отриманої матриці лінійно незалежні, а решта є їх лінійними комбінаціями. Тому перший і другий стовпці – базисні. Оскільки  $\text{rang}(A)=2$ , то розмірність простору розв'язків  $d=n-r=5-2=3$ , і фундаментальна система розв'язків складається з трьох лінійно незалежних розв'язків. Змінні  $x_1, x_2$  – базисні,  $x_3, x_4, x_5$  – вільні.

Запишемо систему рівнянь, що відповідає отриманій матриці і перенесемо вільні змінні в праві частини рівнянь системи

$$\begin{cases} x_1 = -5/2x_3 + 3/2x_4 - 2x_5 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}.$$

Для першого набору вільних змінних  $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$  перший розв'язок має вигляд

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для другого набору вільних змінних  $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$  другий розв'язок має вигляд

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для третього набору вільних змінних  $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$  третій розв'язок має вигляд

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку, підставивши ці розв'язки у вихідну систему рівнянь, а також переконаємось, що розв'язки лінійно незалежні (ранг матриці, що складається зі стовпців  $X_1, X_2, X_3$ , дорівнює 3). Отже,  $X_1, X_2, X_3$  утворюють базис в просторі розв'язків, тобто фундаментальною системою розв'язків є

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної системи має вигляд

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 = C_1 \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де  $C_1, C_2, C_3$  – довільні сталі.

**Приклад 5.** Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_5 = 5; \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Запишемо основну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ ранг якої } \text{rang}(A) = 2, \text{ та розширену матрицю}$$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5/2 & -3/2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{rang}(\bar{A}) = 2.$$

Оскільки ранги основної та розширеної матриць рівні, то за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна. Оскільки  $n - r = 5 - 2 = 3$ , то загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь визначається формулою

$$X_{3.н.} = X_{ч.н.} + C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3,$$

де  $X_{ч.н.}$  – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи,

$X_1, X_2, X_3$  – фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи лінійних рівнянь,

$C_1, C_2, C_3$  – довільні сталі.

Випишемо відповідну однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$$

фундаментальна система розв'язків якої

$$X_1 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо який-небудь частинний розв'язок неоднорідної системи. Стовець вільних членів  $B$  розширеної матриці є лінійною комбінацією базисних стовпців матриці  $A$ , тобто стовпців  $A_1, A_2$ ,

$$B = 2 \cdot A_1 - A_2.$$

Додаючи до цього виразу решту стовпців з нульовими коефіцієнтами, отримуємо

$$B = 2 \cdot A_1 - A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 + 0 \cdot A_5.$$

Коефіцієнти в цьому розкладі утворюють частинний розв'язок неоднорідної системи

$$X_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остаточно, загальний розв'язок системи має вигляд

$$X_{\text{з.н.}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де  $C_1, C_2, C_3$  - т - довільні сталі.

### Завдання для самостійної роботи до теми «Системи лінійних рівнянь»

**Завдання 1.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь: **а)** за формулами Крамера; **б)** матричним методом, **в)** методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33; \\ 7x_1 - 5x_2 = 24; \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12; \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33; \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
4. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6; \\ 5x_2 + 4x_3 = -20; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases} \\
7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \quad 9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases} \\
10. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases} \quad 11. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases} \\
13. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36; \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases} \quad 15. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases} \\
16. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad 17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases} \quad 18. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases} \\
19. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15; \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases} \quad 21. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases} \\
22. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases} \quad 23. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases} \quad 27. \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases} \\
28. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases} \quad 29. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 16; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}
\end{array}$$

**Завдання 2.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4; \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9; \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7; \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9; \\ 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7; \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
17. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases} \\
19. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases} \\
21. \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases} \\
23. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3; \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15. \end{cases} \\
27. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases} \\
29. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -3; \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases} \\
18. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} \\
20. \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \\
22. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -4; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases} \\
24. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 28; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \\
26. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases} \\
28. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases} \\
30. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -5; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}
\end{array}$$

**Завдання 3.** Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь або, у випадку несумісності системи, знайти загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

$$1. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 1; \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 27x_4 - 3x_5 = -1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4; \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_4 = 14; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + 6x_3 + x_4 + 3x_5 = 14; \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 22x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -1; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 5; \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 22x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 3; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2; \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -x_2 + 4x_3 + 8x_4 - x_5 = 1; \\ 2x_1 - 9x_2 - 2x_3 + x_5 = 7; \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 - x_3 - 3x_4 = 3; \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 4; \\ 2x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 1; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3; \\ 6x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 5. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 1; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -1; \\ 6x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 2; \\ 23x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 23x_4 - 4x_5 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2; \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 2. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 3x_1 - 8x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2; \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 25x_5 = 4. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 6. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -4; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

### Зразок виконання завдання до теми «Системи лінійних рівнянь»

Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

- а) за правилом Крамера;  
 б) матричним методом;  
 в) методом Гаусса.

#### Розв'язання

а) Для використання формул Крамера обчислимо визначник системи  $\Delta$ . Користуючись властивостями визначника додаємо до елементів I рядка відповідні елементи III рядка, далі, за теоремою Лапласа, розкладаємо визначник за елементами I рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 3 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 = 6 \neq 0.$$

*I p. + III p.*

Оскільки  $\Delta \neq 0$ , то система має єдиний розв'язок. Обчислимо допоміжні визначники  $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ .

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

*Шп. + Ір.*

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a_{22}A_{22} = (-2)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1-2) = 6;$$

*Іс. - Іс.*

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{23}A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-3-3) = 6.$$

*Ір. + Шп.*

Застосовуючи формули Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1.$$

Отже,  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

б) Запишемо подану систему рівнянь  $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$  в матричній

формі. Для цього введемо матрицю системи  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , матрицю

вільних членів даної системи  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  і матрицю невідомих  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . В

результаті система лінійних алгебраїчних рівнянь набуває вигляду  $A \cdot X = B$ , розв'язком якої є  $X = A^{-1} \cdot B$ , де  $A^{-1}$  матриця, обернена до матриці  $A$ .

Оскільки визначник системи  $\Delta = 6 \neq 0$ , то матриця  $A$  є невиродженою і для неї існує обернена матриця.

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\
A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \\
A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \\
A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо  $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$  – розв’язок цієї системи.

в) Складемо розширену матрицю системи  $\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$ .

Зведемо отриману матрицю до трикутного вигляду за допомогою тождних перетворень: від другого рядка віднімемо перший рядок, далі помножимо перший рядок на 2-й і віднімемо його від третього рядка. Після цих перетворень отримаємо матриці рівносильних систем

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

*IIp. – Ip.*

*IIIp. – 2Ip.*

Помножимо другий рядок останньої матриці на 3 і віднімемо його від третього рядка. Отримаємо

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

*IIIp. – 3IIIp.*

Остання матриця відповідає системі 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ x_2 - 3x_3 = -2; \text{ з останнього} \\ 6x_3 = 6; \end{cases}$$

рядка якої знаходимо значення  $x_3 = 1$ . Підставимо це значення в друге рівняння для знаходження  $x_2$ . Маємо,  $x_2 = 1$ . Знайдені значення  $x_1, x_2$  підставляємо в перше рівняння. Звідки знаходимо  $x_1 = 1$ . Отже, розв'язком системи є  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

**Відповідь.**  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

### Запитання для самоконтролю

1. Що називається лінійним рівнянням?
2. Які типи систем лінійних алгебраїчних рівнянь Ви знаєте?
3. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
4. Які системи називаються сумісними?
5. Які системи називаються несумісними?
6. Які системи називаються визначеними?
7. Які системи називаються невизначеними?
8. Що таке ранг матриці?
9. Які є методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
10. Які системи називаються однорідними?
11. Які системи називаються неоднорідними?

## 1.6 РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE

В Maple розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) можна отримати за допомогою команди `solve`, що вбудована в ядро системи та доступна відразу після запуску програми.

► Знайти розв'язок системи.

```
# Задаємо систему рівнянь
2*x + 3*y = 7;eq1 :=%;
4*x - y = 5;eq2 :=%;
# Знаходимо та зберігаємо розв'язок системи рівнянь у
змінну sol, одночасно виводячи результат
solve({eq1, eq2}, {x, y});sol := %:
      2 x + 3 y = 7,
      4 x - y = 5.
      {x = 11/7, y = 9/7}.

# Перевірка правильності розв'язку
subs(sol, [eq1, eq2]);
      [7 = 7, 5 = 5]
```

У останньому параметрі команди `subs` (у цьому прикладі список рівнянь `[eq1,eq2]`) ліві частини рівнянь із послідовності рівностей `sol` замінюються на відповідні праві. Тобто, ми підставили значення знайдених змінних в рівняння системи та отримали тотожності, що підтверджує правильність знайденого розв'язку. ◀

► Знайти розв'язок системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь.

```
# Задаємо систему рівнянь
x + y+z = 6;eq1 :=%;
2*x - y+z =3;eq2 :=%;
x + y-z = 0;eq3 :=%;
# Знаходимо та зберігаємо розв'язок системи рівнянь у
змінну sol, одночасно виводячи результат
solve({eq1, eq2,eq3}, {x, y,z});sol := %:
      x + y + z = 6
      2 x - y + z = 3
      x + y - z = 0
      {y = 2, z = 3, x = 1}

# Перевірка правильності розв'язку
subs(sol, [eq1,eq2,eq3]);
      [6 = 6, 3 = 3, 0 = 0]. ◀
```

► # Задаємо систему рівнянь

```

-2*x[1]+6*x[2]+2*x[3]+2*x[4] = -66;eq1:=%:
-x[1]+5*x[2]+3*x[3]-2*x[4] = -65;eq2:=%:
x[1]+4*x[2]+5*x[3]+3*x[4] = -45;eq3:=%:
3*x[1]+2*x[2]-2*x[3]+x[4] = 14;eq4:=%:

```

$$-2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -66,$$

$$-x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -65,$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -45,$$

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 14.$$

# Знаходимо та зберігаємо розв'язок системи рівнянь у змінну sol, одночасно виводячи результат

```

solve({eq1, eq2, eq3, eq4}, {x[1], x[2], x[3], x[4]}); sol
:= %:

```

# Виводимо результат

$$\{x_1 = 6, x_2 = -8, x_3 = -5, x_4 = 2\}.$$

# Перевірка правильності розв'язку

```

subs(sol, [eq1, eq2, eq3, eq4]);

```

```

[-66 = -66, -65 = -65, -45 = -45, 14 = 14] ..

```

Для спрощення засвоєння методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь розроблено спеціальні навчальні процедури: Maple тренажери.

### Демонстрація результатів роботи Maple тренажерів з розв'язування СЛАР за методом Крамера

► Розв'язати систему двох лінійних рівнянь методом Крамера.

```

A:=matrix([[2,3], [4,-2]]):

```

```

B:=matrix(2,1,[7,5]):

```

```

CramerSolver(A,B);

```

Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

за формулами Крамера.

-----  
Розв'язування.

Крок 1: Запис матриці коефіцієнтів.

Матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь виглядає так:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Крок 2: Обчислення детермінанта матриці коефіцієнтів.

Обчислимо визначник матриці

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = \{2\} \{-2\} - \{3\} \{4\},$$
$$\det(A) = -16.$$

Крок 3: Формування допоміжних матриць Крамера та обчислення їх детермінантів для знаходження змінних.

Замінімо відповідні стовпці матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів.

Для знаходження першої змінної замінімо 1-ий стовпець матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів,

для знаходження другої змінної замінімо 2-ий стовпець матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів і т.д.

Отримаємо:

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$
$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо кожен із визначників.

Обчислимо визначник матриці

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$
$$\det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \{7\} \{-2\} - \{3\} \{5\},$$
$$\det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = -29$$

Обчислимо визначник матриці

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \{2\} \{5\} - \{7\} \{4\},$$
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -18.$$

Отже

$$\Delta = -16, \Delta_1 = -29, \Delta_2 = -18.$$

Крок 5: Обчислення значень змінних

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$x_1 = \left[ \frac{[-29]}{(-16)} = \frac{29}{16} \right], x_2 = \left[ \frac{[-18]}{(-16)} = \frac{9}{8} \right].$$

► Розв'язати систему трьох лінійних рівнянь методом Крамера.

**A:=matrix([[1,1,1], [2,-1,1], [1,1,-1]]):**

**B:=matrix(3,1,[6,3,0]):**

**CramerSolver(A,B);**

-----  
Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

за формулами Крамера.

-----  
Розв'язування.

Крок 1: Запис матриці коефіцієнтів

Матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь виглядає так:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Крок 2: Обчислення детермінанта матриці коефіцієнтів.  
Для обчислення всіх детермінантів ми далі застосуємо метод занулення.

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число -2.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число -1.

Дістаємо матрицю A2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A2),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \{-3\} \{-2\} - \{-1\} \{0\},$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 6,$$

$$\det(A) = \{1\} \{6\}, \det(A) = 6.$$

Крок 3: Формування допоміжних матриць Крамера та обчислення їх детермінантів для знаходження змінних.

Замінімо відповідні стовпці матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів.

Для знаходження першої змінної замінімо 1-ий стовпець матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів,

для знаходження другої змінної замінімо 2-ий стовпець матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів і т.д.

Отримаємо:

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кожен із визначників:

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число 1.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число -1.

Дістаємо матрицю A2.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A2),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \{9\} \{-2\} - \{2\} \{-6\},$$

$$\det \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = -6,$$

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \{-1\} \{-6\}, \det \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 6.$$

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число -2.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число -1.

Дістаємо матрицю A2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A2),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \{-9\} \{-2\} - \{-1\} \{-6\},$$

$$\det \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = 12,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \{1\} \{12\}, \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 12.$$

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число -2.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 1 помножені на число -1.

Дістаємо матрицю A2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A2),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \{-3\} \{-6\} - \{-9\} \{0\},$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = 18,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \{1\} \{18\}, \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 18.$$

Отже

$$\Delta = 6, \Delta_1 = 6, \Delta_2 = 12, \Delta_3 = 18.$$

Крок 5: Обчислення значень змінних

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$x_1 = \left[ \frac{[6]}{(6)} = 1 \right], x_2 = \left[ \frac{[12]}{(6)} = 2 \right], x_3 = \left[ \frac{[18]}{(6)} = 3 \right].$$

► Розв'язати систему чотирьох лінійних рівнянь методом Крамера.

**A:=matrix([[5, -3, 5, 6], [-3, 2, 5, 1], [6, -1, 5, 3], [0, 1, -3, 2]]):**

**B:=matrix(4,1,[42, 10, 19, 7]):**

**CramerSolver(A,B);**

Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 42 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 10 \\ 6x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 19 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

за формулами Крамера.

Розв'язування.

Крок 1: Запис матриці коефіцієнтів

Матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь виглядає так:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Крок 2: Обчислення детермінанта матриці коефіцієнтів. Для обчислення всіх детермінантів ми далі застосуємо метод занулення.

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -6.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -3.

Дістаємо матрицю A2.

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -2.

Дістаємо матрицю A3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -25 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -25 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 15 & -7 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A3 = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -25 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 15 & -7 & -10 & 0 \\ 6 & -3 & -13 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A3),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{2+4} \det \begin{pmatrix} 23 & -15 & -25 \\ 15 & -7 & -10 \\ 6 & -3 & -13 \end{pmatrix}.$$

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число -5.

Дістаємо матрицю B1.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число -7/3.

Дістаємо матрицю B2.

$$B = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -25 \\ 15 & -7 & -10 \\ 6 & -3 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow BI = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 40 \\ 15 & -7 & -10 \\ 6 & -3 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow B2 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 40 \\ 1 & 0 & \frac{61}{3} \\ 6 & -3 & -13 \end{bmatrix},$$

$$\det(B) = \det(B2),$$

$$\det(B) = \{-3\} (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} -7 & 40 \\ 1 & \frac{61}{3} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} -7 & 40 \\ 1 & \frac{61}{3} \end{pmatrix} = \{-7\} \left\{ \frac{61}{3} \right\} - \{40\} \{1\},$$

$$\det \begin{pmatrix} -7 & 40 \\ 1 & \frac{61}{3} \end{pmatrix} = \frac{-547}{3},$$

$$\det(A) = \{1\} \{3\} \left\{ \frac{-547}{3} \right\}, \det(A) = -547.$$

Крок 3: Формування допоміжних матриць Крамера та обчислення їх детермінантів для знаходження змінних.

Замінімо відповідні стовпці матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів.

Для знаходження першої змінної замінімо 1-ий стовпець матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів,

для знаходження другої змінної замінімо 2-ий стовпець матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів і т.д.

Отримаємо:

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 42 & -3 & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ 19 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 42 & 5 & 6 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 6 & 19 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 5 & -3 & 42 & 6 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 6 & -1 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_4 = \det \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 42 \\ -3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кожен із визначників:

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{bmatrix} 42 & -3 & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ 19 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -6.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -3.

Дістаємо матрицю A2.

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -2.

Дістаємо матрицю A3.

$$A = \begin{bmatrix} 42 & -3 & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ 19 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} -18 & -15 & -25 & 0 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ 19 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} -18 & -15 & -25 & 0 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ -11 & -7 & -10 & 0 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A3 = \begin{bmatrix} -18 & -15 & -25 & 0 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ -11 & -7 & -10 & 0 \\ -13 & -3 & -13 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A3),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{2+4} \det \begin{pmatrix} -18 & -15 & -25 \\ -11 & -7 & -10 \\ -13 & -3 & -13 \end{pmatrix}.$$

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число -5.

Дістаємо матрицю B1.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число -7/3.

Дістаємо матрицю B2.

$$B = \begin{bmatrix} -18 & -15 & -25 \\ -11 & -7 & -10 \\ -13 & -3 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow B1 = \begin{bmatrix} 47 & 0 & 40 \\ -11 & -7 & -10 \\ -13 & -3 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow B2 = \begin{bmatrix} 47 & 0 & 40 \\ \frac{58}{3} & 0 & \frac{61}{3} \\ -13 & -3 & -13 \end{bmatrix},$$

$$\det(B) = \det(B2),$$

$$\det(B) = \{-3\} (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 47 & 40 \\ \frac{58}{3} & \frac{61}{3} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 47 & 40 \\ \frac{58}{3} & \frac{61}{3} \end{pmatrix} = \{47\} \left\{ \frac{61}{3} \right\} - \{40\} \left\{ \frac{58}{3} \right\},$$

$$\det \begin{pmatrix} 47 & 40 \\ \frac{58}{3} & \frac{61}{3} \end{pmatrix} = \frac{547}{3},$$

$$\det \begin{pmatrix} 42 & -3 & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ 19 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \{1\} \{3\} \left\{ \frac{547}{3} \right\}, \quad \det \begin{pmatrix} 42 & -3 & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & 1 \\ 19 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 547.$$

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{bmatrix} 5 & 42 & 5 & 6 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 6 & 19 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -6.

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -3.

Дістаємо матрицю A2.

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число -2.

Дістаємо матрицю A3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 42 & 5 & 6 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 6 & 19 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 23 & -18 & -25 & 0 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 6 & 19 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A2 =$$

$$\begin{bmatrix} 23 & -18 & -25 & 0 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 15 & -11 & -10 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A3 = \begin{bmatrix} 23 & -18 & -25 & 0 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 15 & -11 & -10 & 0 \\ 6 & -13 & -13 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A3),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{2+4} \det \begin{pmatrix} 23 & -18 & -25 \\ 15 & -11 & -10 \\ 6 & -13 & -13 \end{pmatrix}.$$

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $-23/6$ .

Дістаємо матрицю B1.

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $-5/2$ .

Дістаємо матрицю B2.

$$B = \begin{pmatrix} 23 & -18 & -25 \\ 15 & -11 & -10 \\ 6 & -13 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow B1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{191}{6} & \frac{149}{6} \\ 15 & -11 & -10 \\ 6 & -13 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow B2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{191}{6} & \frac{149}{6} \\ 0 & \frac{43}{2} & \frac{45}{2} \\ 6 & -13 & -13 \end{pmatrix},$$

$$\det(B) = \det(B2),$$

$$\det(B) = \{6\} (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} \frac{191}{6} & \frac{149}{6} \\ \frac{43}{2} & \frac{45}{2} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{191}{6} & \frac{149}{6} \\ \frac{43}{2} & \frac{45}{2} \end{pmatrix} = \left\{ \frac{191}{6} \right\} \left\{ \frac{45}{2} \right\} - \left\{ \frac{149}{6} \right\} \left\{ \frac{43}{2} \right\},$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{191}{6} & \frac{149}{6} \\ \frac{43}{2} & \frac{45}{2} \end{pmatrix} = \frac{547}{3},$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 42 & 5 & 6 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 6 & 19 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \{1\} \{6\} \left\{ \frac{547}{3} \right\}, \quad \det \begin{pmatrix} 5 & 42 & 5 & 6 \\ -3 & 10 & 5 & 1 \\ 6 & 19 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 1094.$$

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 42 & 6 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 6 & -1 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число  $-6$ .

Дістаємо матрицю A1.

До членів рядка 3 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число  $-3$ .

Дістаємо матрицю  $A2$ .

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 2 помножені на число  $-2$ .

Дістаємо матрицю  $A3$ .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 42 & 6 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 6 & -1 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -18 & 0 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 6 & -1 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -18 & 0 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 15 & -7 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A3 = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -18 & 0 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 15 & -7 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & -13 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A3),$$

$$\det(A) = \{1\} (-1)^{2+4} \det \begin{bmatrix} 23 & -15 & -18 \\ 15 & -7 & -11 \\ 6 & -3 & -13 \end{bmatrix}.$$

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $-5$ .

Дістаємо матрицю  $B1$ .

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $-7/3$ .

Дістаємо матрицю  $B2$ .

$$B = \begin{bmatrix} 23 & -15 & -18 \\ 15 & -7 & -11 \\ 6 & -3 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow B1 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 47 \\ 15 & -7 & -11 \\ 6 & -3 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow B2 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 47 \\ 1 & 0 & \frac{58}{3} \\ 6 & -3 & -13 \end{bmatrix},$$

$$\det(B) = \det(B2),$$

$$\det(B) = \{-3\} (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} -7 & 47 \\ 1 & \frac{58}{3} \end{bmatrix},$$

$$\det \begin{bmatrix} -7 & 47 \\ 1 & \frac{58}{3} \end{bmatrix} = \{-7\} \left\{ \frac{58}{3} \right\} - \{47\} \{1\},$$

$$\det \begin{bmatrix} -7 & 47 \\ 1 & \frac{58}{3} \end{bmatrix} = \frac{-547}{3},$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 & -3 & 42 & 6 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 6 & -1 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \{1\} \{3\} \left\{ \frac{-547}{3} \right\}, \quad \det \begin{pmatrix} 5 & -3 & 42 & 6 \\ -3 & 2 & 10 & 1 \\ 6 & -1 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = -547.$$

Для обчислення визначника матриці

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 42 \\ -3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

застосуємо метод занулення.

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $-3$ .

Дістаємо матрицю  $A1$ .

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $2$ .

Дістаємо матрицю  $A2$ .

До членів рядка 4 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $1$ .

Дістаємо матрицю  $A3$ .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 42 \\ -3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow A1 = \begin{bmatrix} -13 & 0 & -10 & -15 \\ -3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow A2 = \begin{bmatrix} -13 & 0 & -10 & -15 \\ 9 & 0 & 15 & 48 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow A3 = \begin{bmatrix} -13 & 0 & -10 & -15 \\ 9 & 0 & 15 & 48 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 6 & 0 & 2 & 26 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = \det(A3),$$

$$\det(A) = \{-1\} (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} -13 & -10 & -15 \\ 9 & 15 & 48 \\ 6 & 2 & 26 \end{pmatrix}.$$

До членів рядка 1 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $5$ .

Дістаємо матрицю  $B1$ .

До членів рядка 2 додаємо відповідні члени рядка 3 помножені на число  $-15/2$ .

Дістаємо матрицю  $B2$ .

$$B = \begin{bmatrix} -13 & -10 & -15 \\ 9 & 15 & 48 \\ 6 & 2 & 26 \end{bmatrix} \rightarrow B1 = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 115 \\ 9 & 15 & 48 \\ 6 & 2 & 26 \end{bmatrix} \rightarrow B2 = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 115 \\ -36 & 0 & -147 \\ 6 & 2 & 26 \end{bmatrix},$$

$$\det(B) = \det(B2),$$

$$\det(B) = \{2\} (-1)^{3+2} \det\left(\begin{bmatrix} 17 & 115 \\ -36 & -147 \end{bmatrix}\right),$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 17 & 115 \\ -36 & -147 \end{bmatrix}\right) = \{17\} \{-147\} - \{115\} \{-36\},$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 17 & 115 \\ -36 & -147 \end{bmatrix}\right) = 1641,$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 42 \\ -3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}\right) = \{1\} \{-2\} \{1641\}, \quad \det\left(\begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 42 \\ -3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}\right) = -3282$$

Отже

$$\Delta = -547, \Delta_1 = 547, \Delta_2 = 1094, \Delta_3 = -547, \Delta_4 = -3282.$$

Крок 5: Обчислення значень змінних

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta},$$

$$x_1 = \left[ \frac{[547]}{(-547)} = -1 \right], x_2 = \left[ \frac{[1094]}{(-547)} = -2 \right], x_3 = \left[ \frac{[-547]}{(-547)} = 1 \right],$$

$$x_4 = \left[ \frac{[-3282]}{(-547)} = 6 \right]$$

### Демонстрація результатів роботи Maple тренажерів з розв'язування СЛАР матричним методом

► Розв'язати систему двох лінійних рівнянь матричним методом.

**A:=matrix([ [2,3], [4,-2] ]):**

**B:=matrix(2,1,[7,5]):**

**MatInvSolver(A,B);**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Стовпець вільних членів

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Стовпець невідомих

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = -16.$$

Детермінант матриці системи відмінний від нуля, отже система має розв'язок.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці А

$$A'_{1,1} = [-1]^{1+1} \det[-2], A'_{2,1} = [-1]^{1+2} \det[3],$$

$$A'_{1,2} = [-1]^{2+1} \det[4], A'_{2,2} = [-1]^{2+2} \det[2].$$

Знаходимо обернену матрицю коефіцієнтів системи рівнянь

$$A^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$X = A^{-1} B,$$

$$X = \frac{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}}{\det(A)},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 29 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{cases} x_1 = \frac{-29}{16} \\ x_2 = \frac{-9}{8} \end{cases}.$$

► Розв'язати систему трьох лінійних рівнянь матричним методом.

**A:=matrix([[1,1,1], [2,-1,1], [1,1,-1]]):**

**B:=matrix(3,1,[6,3,0]):**

**MatInvSolver(A,B);**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Стовпець вільних членів

$$B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Стовпець невідомих

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = 6.$$

Детермінант матриці системи відмінний від нуля, отже система має розв'язок.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$\begin{aligned}
 'A'_{1,1} &= [-1]^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, 'A'_{2,1} = [-1]^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\
 'A'_{3,1} &= [-1]^{1+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 'A'_{1,2} &= [-1]^{2+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, 'A'_{2,2} = [-1]^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\
 'A'_{3,2} &= [-1]^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 'A'_{1,3} &= [-1]^{3+1} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, 'A'_{2,3} = [-1]^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 'A'_{3,3} &= [-1]^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Знаходимо обернену матрицю коефіцієнтів системи рівнянь

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \\
 X &= A^{-1} B, \\
 X &= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}{\det(A)}, \\
 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

► Задано матрицю коефіцієнтів системи з чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь. Потрібно знайти розв'язки цієї системи для різних стовпців вільних членів.

Розв'язати систему чотирьох лінійних рівнянь матричним методом.

```

A:=matrix([[5, -3, 5, 6], [-3, 2, 5, 1], [6, -1, 5, 3], [0, 1, -3, 2]]):
B:=matrix(4,1,[42, 10, 19, 7]):
MatInvSolver(A,B);

```

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 42 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 10 \\ 6x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 19 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{array} \right.$$

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Стовпець вільних членів

$$B = \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \\ 19 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Стовпець невідомих

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -547$$

Детермінант матриці системи відмінний від нуля, отже система має розв'язок.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$\begin{aligned} 'A'_{1,1} &= [-1]^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, & 'A'_{2,1} &= [-1]^{1+2} \det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \\ 'A'_{3,1} &= [-1]^{1+3} \det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, & 'A'_{4,1} &= [-1]^{1+4} \det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \\ 'A'_{1,2} &= [-1]^{2+1} \det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, & 'A'_{2,2} &= [-1]^{2+2} \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \\ 'A'_{3,2} &= [-1]^{2+3} \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, & 'A'_{4,2} &= [-1]^{2+4} \det \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
'A'_{1,3} &= [-1]^{3+1} \det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & 'A'_{2,3} &= [-1]^{3+2} \det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
'A'_{3,3} &= [-1]^{3+3} \det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & 'A'_{4,3} &= [-1]^{3+4} \det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
'A'_{1,4} &= [-1]^{4+1} \det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, & 'A'_{2,4} &= [-1]^{4+2} \det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \\
'A'_{3,4} &= [-1]^{4+3} \det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, & 'A'_{4,4} &= [-1]^{4+4} \det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Знаходимо обернену матрицю коефіцієнтів системи рівнянь

$$A^{-1} = -\frac{1}{547} \begin{bmatrix} 61 & 44 & -120 & -25 \\ 135 & -73 & -149 & -145 \\ -3 & -47 & -21 & 64 \\ -72 & -34 & 43 & -105 \end{bmatrix},$$

$$X = A^{-1} B,$$

$$X = \frac{\begin{bmatrix} 61 & 44 & -120 & -25 \\ 135 & -73 & -149 & -145 \\ -3 & -47 & -21 & 64 \\ -72 & -34 & 43 & -105 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 42 \\ 10 \\ 19 \\ 7 \end{bmatrix}}{\det(A)},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{547} \begin{bmatrix} 547 \\ 1094 \\ -547 \\ -3282 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 6 \end{bmatrix}.$$

В багатьох практичних задачах, пов'язаних з оптимізацією та підбором параметрів різних систем виникає потреба розв'язання систем лінійних рівнянь багаторазово для різних стовпців вільних членів з однією і тією ж матрицею коефіцієнтів.

► Задана матриця коефіцієнтів системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайти розв'язки системи для заданих різних стовпців вільних членів.

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = b_1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = b_2 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 6x_4 = b_3 \\ -2x_2 - x_3 + 5x_4 = b_4 \end{array} \right.$$

Знайти розв'язки системи для заданих різних стовпців вільних членів:

$$B1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}, B2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 18 \\ 1 \end{bmatrix}, B3 = \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**MatInvSolver(A, B1);**

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 14 \\ -2x_2 - x_3 + 5x_4 = 2 \end{array} \right.$$

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Стовпець вільних членів

$$B1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Стовпець невідомих

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = -1205$$

Детермінант матриці системи відмінний від нуля, отже система має розв'язок.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$\begin{aligned}
'A'_{1,1} &= [-1]^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, 'A'_{2,1} = [-1]^{1+2} \det \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \\
'A'_{3,1} &= [-1]^{1+3} \det \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, 'A'_{4,1} = [-1]^{1+4} \det \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \\
'A'_{1,2} &= [-1]^{2+1} \det \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, 'A'_{2,2} = [-1]^{2+2} \det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \\
'A'_{3,2} &= [-1]^{2+3} \det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, 'A'_{4,2} = [-1]^{2+4} \det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \\
'A'_{1,3} &= [-1]^{3+1} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}, 'A'_{2,3} = [-1]^{3+2} \det \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \\
'A'_{3,3} &= [-1]^{3+3} \det \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}, 'A'_{4,3} = [-1]^{3+4} \det \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \\
'A'_{1,4} &= [-1]^{4+1} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, 'A'_{2,4} = [-1]^{4+2} \det \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \\
'A'_{3,4} &= [-1]^{4+3} \det \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, 'A'_{4,4} = [-1]^{4+4} \det \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Знаходимо обернену матрицю коефіцієнтів системи рівнянь

$$A^{-1} = -\frac{1}{1205} \begin{bmatrix} -23 & -186 & -134 & 91 \\ -163 & 44 & -59 & 121 \\ 66 & 167 & -87 & 158 \\ -52 & 51 & -41 & -161 \end{bmatrix},$$

$$X = A^{-1} B$$

$$X = \frac{\begin{bmatrix} -23 & -186 & -134 & 91 \\ -163 & 44 & -59 & 121 \\ 66 & 167 & -87 & 158 \\ -52 & 51 & -41 & -161 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}}{\det(A)},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1205} \begin{bmatrix} -1205 \\ -1205 \\ -1205 \\ -1205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{bmatrix}.$$

Приблизно 90–95% загальних обчислень у матричному методі припадає на знаходження оберненої матриці  $A^{-1}$ . Операція множення оберненої матриці на матрицю-стовпець вільних членів є значно менш затратною.

Знайдемо розв'язки для інших значень вільних членів.

```

det_A:=-1205:
adjA:=matrix([[-23, -186, -134, 91], [-163, 44, -59,
121], [66, 167, -87, 158], [-52, 51, -41, -161]]):
X = `(1/det(A))*evalm(adjA)*`*`*evalm(B2);
Xk:=evalm(adjA*B2):
matrix(4,1,[seq(x[k],k=1..4)]) = 1/det_A*evalm(Xk),
zip(x,y) -
>x=y,matrix(4,1,[seq(x[k],k=1..4)]),evalm(Xk/det_A);

```

$$X = \left( \frac{1}{\det(A)} \right) \begin{bmatrix} -23 & -186 & -134 & 91 \\ -163 & 44 & -59 & 121 \\ 66 & 167 & -87 & 158 \\ -52 & 51 & -41 & -161 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 18 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1205} \begin{bmatrix} -1205 \\ -1205 \\ -2410 \\ -1205 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 1 \end{bmatrix}.$$

```

X = `(1/det(A))*evalm(adjA)*`*`*evalm(B3);
Xk:=evalm(adjA*B3):
matrix(4,1,[seq(x[k],k=1..4)]) = 1/det_A*evalm(Xk),
zip(x,y) -
>x=y,matrix(4,1,[seq(x[k],k=1..4)]),evalm(Xk/det_A);

```

$$X = \left( \frac{1}{\det(A)} \right) \begin{bmatrix} -23 & -186 & -134 & 91 \\ -163 & 44 & -59 & 121 \\ 66 & 167 & -87 & 158 \\ -52 & 51 & -41 & -161 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1205} \begin{bmatrix} -1205 \\ 1205 \\ -1205 \\ -1205 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{bmatrix}.$$

Матричний метод і формули Крамера мають важливе теоретичне, методологічне та історичне значення, проте їх практичне застосування обмежене через високу обчислювальну складність. У реальних обчисленнях для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) зазвичай використовують різновиди методу Гауса, зокрема LU-розклад, QR-розклад та ітераційні методи, які є більш ефективними для великих систем.

## Демонстрація результатів роботи Maple-тренажерів з розв'язування СЛАР методом Гаусса

Розглянемо одну з найпростіших варіацій методу Гаусса – схему єдиного ділення, що спрощує обчислення шляхом поступового зменшення порядку системи на кожному кроці прямого ходу та послідовного знаходження змінних у процесі зворотного ходу. Додаткове спрощення полягає у виборі першого діагонального коефіцієнта як головного елемента на кожному кроці. Якщо цей елемент дорівнює нулю, виконується перестановка рядків, щоб на його місце потрапив ненульовий елемент, забезпечуючи коректність обчислень.

```
restart:  
read "read "d:\\Maple\\My_gauss_Now.m";  
read "read "d:\\Maple\\My_gauss.m";
```

► Розв'язати систему двох лінійних рівнянь методом Гаусса.

```
A:=matrix([[2,3],[4,-2]]):  
B:=matrix(2,1,[7,5]):  
n:=linalg[rowdim](A):  
X:=matrix(n,1,[seq(x[k],k=1..n)]):  
c:=evalm(A*X):  
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]));  
My_gauss_Now(A,B,'x');
```

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Прямий хід методу виключення Гаусса – схема єдиного ділення.

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & B \\ -16 & -18 \end{bmatrix}$$

Множимо рівняння № 1 на (-1).

Ділимо рівняння № 1 на 2.

$$\begin{bmatrix} x_2 & B \\ -16 & -18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & B \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Зворотний хід

$$8x_2 = 9,$$

$$2x_1 + 3x_2 = 7, \rightarrow \left[ x_1 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x_2 \right], x_1 = \frac{29}{16}$$

Відповідь

$$x_1 = \frac{29}{16}, x_2 = \frac{9}{8}$$

► Розв'язати систему трьох лінійних рівнянь методом Гаусса.

```
A:=matrix([[1,1,1], [2,-1,1], [1,1,-1]]):
B:=matrix(3,1,[6,3,0]):
n:=linalg[rowdim](A):
X:=matrix(n,1,[seq(x[k],k=1..n)]):
c:=evalm(A*X):
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]));
My_gauss_Now(A,B,'x');
```

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & B \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Множимо рівняння № 1,2 на (-1).

Ділимо рівняння № 2 на 2.

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Крок 2

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & B \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Зворотний хід

$$\begin{aligned} x_3 &= 3, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \rightarrow \left[ x_2 = 3 - \frac{1}{3}x_3 \right], x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \rightarrow [x_1 = 6 - x_2 - x_3], x_1 = 1. \end{aligned}$$

Відповідь

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3. \quad \blacktriangleleft$$

► Розв'язати систему чотирьох лінійних рівнянь методом Гаусса.

```
A:=matrix([[5, -3, 5, 6], [-3, 2, 5, 1], [6, -1, 5, 3], [0, 1, -3, 2]]):
B:=matrix(4,1,[42, 10, 19, 7]):
n:=linalg[rowdim](A):
```

```

X:=matrix(n,1,[seq(x[k],k=1..n)]):
c:=evalm(A*X):
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]));
My_gauss_Now(A,B,'x');

```

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 42 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 10 \\ 6x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 19 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 5 & -3 & 5 & 6 & 42 \\ -3 & 2 & 5 & 1 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 3 & 19 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & 40 & 23 & 176 \\ 13 & -5 & -21 & -157 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Крок 2

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & 40 & 23 & 176 \\ 13 & -5 & -21 & -157 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ -525 & -320 & -2445 \\ -43 & -21 & -169 \end{bmatrix}$$

Множимо рівняння № 1,2 на (-1).

Ділимо рівняння № 1 на 5.

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ -525 & -320 & -2445 \\ -43 & -21 & -169 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 105 & 64 & 489 \\ 43 & 21 & 169 \end{bmatrix}$$

Крок 3

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 105 & 64 & 489 \\ 43 & 21 & 169 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_4 & B \\ -547 & -3282 \end{bmatrix}$$

Множимо рівняння № 1 на (-1).

Ділимо рівняння № 1 на 547.

$$\begin{bmatrix} x_4 & B \\ -547 & -3282 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_4 & B \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Зворотний хід

$$x_4 = 6,$$

$$105x_3 + 64x_4 = 489, \rightarrow \left[ x_3 = \frac{163}{35} - \frac{64}{105}x_4 \right], x_3 = 1,$$

$$x_2 + 40x_3 + 23x_4 = 176, \rightarrow [x_2 = 176 - 40x_3 - 23x_4], x_2 = -2,$$

$$5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 42, \rightarrow \left[ x_1 = \frac{42}{5} + \frac{3}{5}x_2 - x_3 - \frac{6}{5}x_4 \right], x_1 = -1.$$

Відповідь

$$x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 6.$$

► Розв'язати систему з п'яти лінійних рівнянь методом Гаусса.

```
A:=matrix([[1,2,-1,1,1], [3,-1,4,-2,1], [2,3,1,-1,2],
[4,-1,2,1,-1], [-1,5,-3,2,3]]):
B:=matrix(5,1,[14,-6,16,-8,37]):
n:=linalg[rowdim](A):
X:=matrix(n,1,[seq(x[k],k=1..n)]):
c:=evalm(A*X):
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]));
My_gauss_Now(A,B,'x');
```

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 14 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 16 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 37 \end{array} \right. .$$

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

Крок 1

$$\left[ \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & B \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 14 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 & 16 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & -1 & -8 \\ -1 & 5 & -3 & 2 & 3 & 37 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & B \\ -7 & 7 & -5 & -2 & -48 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & -12 \\ -9 & 6 & -3 & -5 & -64 \\ 7 & -4 & 3 & 4 & 51 \end{array} \right] .$$

Крок 2

$$\left[ \begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & B \\ -7 & 7 & -5 & -2 & -48 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & -12 \\ -9 & 6 & -3 & -5 & -64 \\ 7 & -4 & 3 & 4 & 51 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} x_3 & x_4 & x_5 & B \\ -14 & 16 & -2 & 36 \\ 21 & -24 & 17 & 16 \\ -21 & 14 & -14 & -21 \end{array} \right] .$$

Ділимо рівняння № 1 на 2.

Ділимо рівняння № 3 на 7.

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & B \\ -14 & 16 & -2 & 36 \\ 21 & -24 & 17 & 16 \\ -21 & 14 & -14 & -21 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & B \\ -7 & 8 & -1 & 18 \\ 21 & -24 & 17 & 16 \\ -3 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Крок 3

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & B \\ -7 & 8 & -1 & 18 \\ 21 & -24 & 17 & 16 \\ -3 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_4 & x_5 & B \\ 0 & -98 & -490 \\ 10 & 11 & 75 \end{bmatrix}.$$

Переставляємо місцями рівняння 1 та 2

$$\begin{bmatrix} x_4 & x_5 & B \\ 0 & -98 & -490 \\ 10 & 11 & 75 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_4 & x_5 & B \\ 10 & 11 & 75 \\ 0 & -98 & -490 \end{bmatrix}.$$

Множимо рівняння № 2 на (-1).

Ділимо рівняння № 2 на 98.

$$\begin{bmatrix} x_4 & x_5 & B \\ 10 & 11 & 75 \\ 0 & -98 & -490 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_4 & x_5 & B \\ 10 & 11 & 75 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Крок 4

$$\begin{bmatrix} x_4 & x_5 & B \\ 10 & 11 & 75 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_5 & B \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Зворотний хід

$$x_5 = 5,$$

$$10x_4 + 11x_5 = 75, \rightarrow \left[ x_4 = \frac{15}{2} - \frac{11}{10}x_5 \right], x_4 = 2,$$

$$-7x_3 + 8x_4 - x_5 = 18, \rightarrow \left[ x_3 = -\frac{18}{7} + \frac{8}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 \right], x_3 = -1,$$

$$-7x_2 + 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -48, \rightarrow \left[ x_2 = \frac{48}{7} + x_3 - \frac{5}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_5 \right], x_2 = 3,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 14, \rightarrow [x_1 = 14 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5], x_1 = 0.$$

Відповідь

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5. \quad \blacktriangleleft$$

► Дано систему з двох лінійних рівнянь, у якій як коефіцієнти, так і вільні члени задані символно. Потрібно знайти її розв'язок методом Гаусса.

**n:=2:**

**a:=matrix(n,n):A:=a:**

**B:=matrix(n,1,[seq(b[k],k=1..n)]):**

```

X:=matrix(n,1,[seq(x[k],k=1..n)]):
c:=evalm(A*X):
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]));
My_gauss_Now(A,B,'x');

```

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

Множимо рівняння № 1, 2 на (-1).

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ -a_{1,1} & -a_{1,2} & -b_1 \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & -b_2 \end{bmatrix}$$

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ -a_{1,1} & -a_{1,2} & -b_1 \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & -b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & x_2 & & B \\ a_{1,1} & a_{2,2} & -a_{1,2} & a_{2,1} & a_{1,1} & b_2 - a_{2,1} & b_1 \end{bmatrix}$$

Множимо рівняння № 1 на (-1).

$$\begin{bmatrix} & x_2 & & B \\ a_{1,1} & a_{2,2} & -a_{1,2} & a_{2,1} & a_{1,1} & b_2 - a_{2,1} & b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & x_2 & & B \\ -a_{1,1} & a_{2,2} + a_{1,2} & a_{2,1} & -a_{1,1} & b_2 + a_{2,1} & b_1 \end{bmatrix}$$

Зворотний хід

$$\begin{aligned} (-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) x_2 &= -a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 \\ -a_{1,1} x_1 - a_{1,2} x_2 &= -b_1, \rightarrow \left[ x_1 = -\frac{-b_1 + a_{1,2} x_2}{a_{1,1}} \right], \\ x_1 &= -\frac{-b_1 + \frac{a_{1,2} (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)}{-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}}}{a_{1,1}} \end{aligned}$$

Відповідь

$$x_1 = -\frac{-b_1 + \frac{a_{1,2} (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)}{-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}}}{a_{1,1}}, x_2 = \frac{-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1}{-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}}$$

► Дано систему з трьох лінійних рівнянь, у якій як коефіцієнти, так і вільні члени задані символічно. Потрібно знайти її розв'язок методом Гаусса.

**n:=3:**

```

a:=matrix(n,n):A:=a:
B:=matrix(n,1,[seq(b[k],k=1..n)]):
X:=matrix(n,1,[seq(x[k],k=1..n)]):
c:=evalm(A&*X):
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]));
My_gauss_Now(A,B,'x');

```

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.  
 Множимо рівняння № 1, 2, 3 на (-1).

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & B \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & B \\ -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & -b_1 \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & -b_2 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} & -b_3 \end{bmatrix}$$

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & B \\ -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & -b_1 \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & -b_2 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} & -b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ a_{1,1} & a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} & a_{1,1} a_{2,3} - a_{2,1} a_{1,3} & a_{1,1} b_2 - a_{2,1} b_1 \\ a_{1,1} & a_{3,2} - a_{3,1} a_{1,2} & a_{1,1} a_{3,3} - a_{3,1} a_{1,3} & a_{1,1} b_3 - a_{3,1} b_1 \end{bmatrix}$$

Множимо рівняння № 1, 2 на (-1).

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ a_{1,1} & a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} & a_{1,1} a_{2,3} - a_{2,1} a_{1,3} & a_{1,1} b_2 - a_{2,1} b_1 \\ a_{1,1} & a_{3,2} - a_{3,1} a_{1,2} & a_{1,1} a_{3,3} - a_{3,1} a_{1,3} & a_{1,1} b_3 - a_{3,1} b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -x_2 & -x_3 & -B \\ -a_{1,1} & -a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1} & -a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3} & -a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 \\ -a_{1,1} & -a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2} & -a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3} & -a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1 \end{bmatrix}$$

Крок 2

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ -a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1} & -a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3} & -a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 \\ -a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2} & -a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3} & -a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1 \end{bmatrix}$$

->

$$[x_3, B]$$

$$\begin{aligned} & [(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\ & - (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\ & - (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)] \end{aligned}$$

Множимо рівняння № 1 на  $(-1)$ .

$$[x_3, B]$$

$$\begin{aligned} & [(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\ & - (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\ & - (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)] \rightarrow \end{aligned}$$

$$[x_3, B]$$

$$\begin{aligned} & [(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})], \end{aligned}$$

$$-(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1)$$

$$+ (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)]$$

Зворотний хід

$$\begin{aligned} & (-(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) x_3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1) \end{aligned}$$

$$(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) x_2 + (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3}) x_3 =$$

$$-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1,$$

$$\rightarrow \left[ x_2 = \frac{-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 - (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3}) x_3}{-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}} \right], x_2 =$$

$$(-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 - (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) ($$

$$\begin{aligned}
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1) \Big/ ( \\
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) \Big/ ( \\
& -a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) \\
& -a_{1,1} x_1 - a_{1,2} x_2 - a_{1,3} x_3 = -b_1, \\
& \rightarrow \left[ x_1 = - \frac{-b_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3}{a_{1,1}} \right], x_1 = -(-b_1 + a_{1,2} ( \\
& -a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 - (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3}) ( \\
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)) \Big/ ( \\
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) \Big/ ( \\
& -a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) + a_{1,3} ( \\
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)) \Big/ ( \\
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) \Big/ a_{1,1}
\end{aligned}$$

Відповідь

$ \begin{aligned} x_1 = & -(-b_1 + a_{1,2} (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 - (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3}) ( \\ & -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)) \Big/ ( \\ & -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) \Big/ ( \\ & -a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) + a_{1,3} ( \\ & -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)) \Big/ ( \\ & -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) \Big/ a_{1,1} \end{aligned} $
$ \begin{aligned} x_2 = & (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1 - (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3}) ( \\ & -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\ & + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)) \Big/ ( \end{aligned} $

$$\begin{aligned}
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3})) / ( \\
& -a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) \\
x_3 = & (-(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} b_3 + a_{3,1} b_1) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} b_2 + a_{2,1} b_1)) / ( \\
& -(-a_{1,1} a_{2,2} + a_{1,2} a_{2,1}) (-a_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,3}) \\
& + (-a_{1,1} a_{3,2} + a_{3,1} a_{1,2}) (-a_{1,1} a_{2,3} + a_{2,1} a_{1,3}))
\end{aligned}$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь третього порядку в загальному вигляді є громіздким і важким для сприйняття. Водночас Maple без труднощів оперує навіть значно складнішими виразами. ◀

► Методом Гаусса знайти обернену матрицю до заданої квадратної матриці:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$	б) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$
---	--

**Розв'язання.** Для знаходження оберненої матриці потрібно застосувати метод Гаусса до системи лінійних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої є заданою матрицею  $A$ , а стовпець вільних членів заданий символічно.

а).  $n:=3$ :

$B:=\text{matrix}(n,1,[\text{seq}(b[k],k=1..n)])$  :

$X:=\text{matrix}(n,1,[\text{seq}(x[k],k=1..n)])$  :

$c:=\text{evalm}(A*X)$  :

$\text{print}(\text{Plt\_PW}([\text{seq}(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]))$  ;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = b_3 \end{cases}$$

$\text{My\_gauss\_Now}(A,B,'x')$  ;

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & B \\ 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & -1 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ -3 & -1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}$$

Множимо рівняння № 1,2 на  $(-1)$ .

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ -3 & -1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & b_3 - b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ 3 & 1 & -b_2 + 2b_1 \\ 0 & 2 & -b_3 + b_1 \end{bmatrix}.$$

Крок 2

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ 3 & 1 & -b_2 + 2b_1 \\ 0 & 2 & -b_3 + b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & B \\ 2 & -b_3 + b_1 \end{bmatrix}.$$

Зворотний хід

$$2x_3 = -b_3 + b_1,$$

$$3x_2 + x_3 = -b_2 + 2b_1, \rightarrow \left[ x_2 = -\frac{1}{3}b_2 + \frac{2}{3}b_1 - \frac{1}{3}x_3 \right],$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6}b_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_1, \rightarrow [x_1 = b_1 - x_2 - x_3], x_1 = \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3.$$

Відповідь

$$x_1 = \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3, x_2 = -\frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{6}b_3, x_3 = -\frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}b_1.$$

Коефіцієнти при вільних невідомих і є елементами оберненої матриці: перший рядок – у рівнянні для  $x_1$ , другий рядок – у рівнянні для  $x_2$  тощо. Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \text{matrix}(\left[ \left[ 0, 2, 2 \right], \left[ 3, -2, 1 \right], \left[ 3, 0, -3 \right] \right]);$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

a).  $n:=4$ :

```
> B:=matrix(n,1,[seq(b[k],k=1..n)]):
```

```
X:=matrix(n,1,[seq(x[k],k=1..n)]):
```

```
c:=evalm(A*X):
```

```
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..n)]));
```

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = b_1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = b_2 \\ 6x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = b_3 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = b_4 \end{cases}.$$

```
My_gauss_Now(A,B,'x');
```

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 5 & -3 & 5 & 6 & b_1 \\ -3 & 2 & 5 & 1 & b_2 \\ 6 & -1 & 5 & 3 & b_3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & b_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & 40 & 23 & 5b_2 + 3b_1 \\ 13 & -5 & -21 & 5b_3 - 6b_1 \\ 1 & -3 & 2 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Крок 2

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & 40 & 23 & 5b_2 + 3b_1 \\ 13 & -5 & -21 & 5b_3 - 6b_1 \\ 1 & -3 & 2 & b_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ -525 & -320 & 5b_3 - 45b_1 - 65b_2 \\ -43 & -21 & b_4 - 5b_2 - 3b_1 \end{bmatrix}.$$

Множимо рівняння № 1, 2 на (-1).

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ -525 & -320 & 5b_3 - 45b_1 - 65b_2 \\ -43 & -21 & b_4 - 5b_2 - 3b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 525 & 320 & -5b_3 + 45b_1 + 65b_2 \\ 43 & 21 & -b_4 + 5b_2 + 3b_1 \end{bmatrix}.$$

Крок 3

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 525 & 320 & -5b_3 + 45b_1 + 65b_2 \\ 43 & 21 & -b_4 + 5b_2 + 3b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_4 & B \\ -2735 & -525b_4 - 170b_2 - 360b_1 + 215b_3 \end{bmatrix}.$$

Множимо рівняння № 1 на (-1).

$$\begin{bmatrix} x_4 & B \\ -2735 & -525b_4 - 170b_2 - 360b_1 + 215b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_4 & B \\ 2735 & 525b_4 + 170b_2 + 360b_1 - 215b_3 \end{bmatrix}.$$

Зворотний хід

$$2735 x_4 = 525 b_4 + 170 b_2 + 360 b_1 - 215 b_3,$$

$$\begin{aligned}
525 x_3 + 320 x_4 &= -5 b_3 + 45 b_1 + 65 b_2, \\
\rightarrow \left[ x_3 &= -\frac{1}{105} b_3 + \frac{3}{35} b_1 + \frac{13}{105} b_2 - \frac{64}{105} x_4 \right], \\
x_3 &= \frac{21}{547} b_3 + \frac{3}{547} b_1 + \frac{47}{547} b_2 - \frac{64}{547} b_4, \\
x_2 + 40 x_3 + 23 x_4 &= 5 b_2 + 3 b_1, \\
\rightarrow [x_2 &= 5 b_2 + 3 b_1 - 40 x_3 - 23 x_4], \\
x_2 &= \frac{73}{547} b_2 - \frac{135}{547} b_1 + \frac{149}{547} b_3 + \frac{145}{547} b_4, \\
5 x_1 - 3 x_2 + 5 x_3 + 6 x_4 &= b_1, \rightarrow \left[ x_1 = \frac{1}{5} b_1 + \frac{3}{5} x_2 - x_3 - \frac{6}{5} x_4 \right], \\
x_1 &= -\frac{61}{547} b_1 - \frac{44}{547} b_2 + \frac{120}{547} b_3 + \frac{25}{547} b_4
\end{aligned}$$

Відповідь

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{61}{547} b_1 - \frac{44}{547} b_2 + \frac{120}{547} b_3 + \frac{25}{547} b_4, \\
x_2 &= \frac{73}{547} b_2 - \frac{135}{547} b_1 + \frac{149}{547} b_3 + \frac{145}{547} b_4, \\
x_3 &= \frac{21}{547} b_3 + \frac{3}{547} b_1 + \frac{47}{547} b_2 - \frac{64}{547} b_4, \\
x_4 &= \frac{105}{547} b_4 + \frac{34}{547} b_2 + \frac{72}{547} b_1 - \frac{43}{547} b_3
\end{aligned}$$

Коефіцієнти при вільних невідомих і є елементами оберненої матриці: перший рядок – у рівнянні для  $x_1$ , другий рядок – у рівнянні для  $x_2$  тощо. Отже,

$A^{-1} = -1/547 * \text{matrix}([[61, 44, -120, -25], [135, -73, -149, -145], [-3, -47, -21, 64], [-72, -34, 43, -105]]);$

$$A^{-1} = -\frac{1}{547} \begin{bmatrix} 61 & 44 & -120 & -25 \\ 135 & -73 & -149 & -145 \\ -3 & -47 & -21 & 64 \\ -72 & -34 & 43 & -105 \end{bmatrix}$$

У процесі порівняння елементів оберненої матриці з коефіцієнтами при символічних вільних членах слід особливо уважно стежити за порядком розташування цих символів. Це зумовлено тим, що в правих частинах рівнянь для змінних доданки впорядковані за таким принципом: першим стоїть символ з індексом рівним індексу відповідної змінної, а решта доданків, в більшості випадків, розміщені у порядку зростання індексів. Також

слід звернути увагу: перший доданок у рівнянні для  $x_1$  дорівнює  $-\frac{61}{547}b_1$ .

Проте знак мінус можна легко не помітити, оскільки він зливається з дробовою рисою. ◀

► Обчислити ранг заданої матриці двома способами:

- 1) за допомогою стандартної команди `rank` системи Maple;
- 2) без використання цієї команди, застосовуючи методи елементарних перетворень матриць.

```
A:=matrix([[4,2,0,1],[2,1,2,3],[0,3,1,1],[4,2,4,6]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

### Розв'язання

а) `rank(A)=linalg[rank](A);`

$$\text{rank}(A) = 3.$$

б) У пакеті `linalg` системи Maple є декілька команд для виконання елементарних перетворень над матрицями. Ось основні з них.

Розглянемо команди Maple, які використовуватимемо для елементарних перетворень матриці.

Команди `addrow(A, i, j, m)` і `addcol(A, i, j, m)`:

`addrow(A, i, j, m)`: множить  $i$ -й рядок матриці  $A$  на скаляр  $m$  і додає його до  $j$ -го рядка.

`addcol(A, i, j, m)`: множить  $i$ -й стовпець матриці  $A$  на скаляр  $m$  і додає його до  $j$ -го стовпця.

Команда `swarow(A, i, j)` (`swarcol(A, i, j)`) – міняє місцями  $i$ -й і  $j$ -й рядки (стовпці) матриці  $A$ .

Команда `mulrow(A, i, m)`, (`mulcol(A, i, m)`) – множить  $i$ -й рядок матриці  $A$  на скаляр  $m$ .

Команда `linalg[delrows](A, i..j)`, (`linalg[delcols](A, i..j)`) – повертає підматрицю матриці  $A$ , отриману шляхом видалення рядків (стовпців) від  $i$  до  $j$ .

Виконаємо такі елементарні перетворення: від 1-го та 4-го рядків віднімаємо 2-ий рядок, помножений на 2. Іншими словами, множимо другий рядок на  $(-2)$  і додаємо його до 1-ого та 4-ого рядків:

```
linalg[addrow](A, 2, 1, -2);A1:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

```
linalg[addrow](A1, 2, 4, -2);A2:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ділимо перший стовпець на 2 та міняємо місцями 1-й та 2-й рядки

```
linalg[mulcol](A2, 1, 1/2);  
linalg[swaprow](%, 1, 2);A3:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

і в отриманій матриці також міняємо 2-й та 3-й рядки

```
linalg[swaprow](A3, 3, 2);A4:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вилучаємо четвертий рядок, що складається лише з нулів.

```
linalg[delrows](A4, 4..4);A5:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Помножимо елементи першого стовпця на -1, -2 та -3, а отримані значення додамо до відповідних елементів другого, третього та четвертого стовпців. Очевидно, що в результаті в першому рядку всі елементи, крім першого, стануть нулями, тоді як елементи другого та третього рядків залишаться незмінними. Щоб отримати нову матрицю після цих перетворень просто оновимо значення елементів першого рядка:

```
A6:=A5;  
for j from 2 to 4 do  
  A6[1,j]:=0  
end do;  
evalm(A6);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Поділимо другий стовпець на 3, потім помножимо його на -1 та додамо до третього і четвертого стовпців

```
linalg[mulcol](A6,2, 1/3);  
linalg[addcol](%, 2, 3, -1);  
linalg[addcol](%, 2, 4, -1);A7:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Поділимо третій та четвертий стовпці на -4 та -5 відповідно

```
linalg[mulcol](A7,3, -1/4);  
linalg[mulcol](%,4, -1/5);A8:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Помножимо третій стовпець на -1 та додамо до четвертого

```
linalg[addcol](A8, 3, 4, -1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вилучаємо четвертий стовпець, що складається лише з нулів

```
linalg[delcols](A8, 4..4);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки ми отримали одиничну матрицю третього порядку, це означає, що ранг вихідної матриці дорівнює  $r=3$ . ◀

► Обчислити ранг заданої матриці двома способами:

а) за допомогою стандартної команди rank системи Maple;

б) без використання цієї команди, застосовуючи методи елементарних перетворень матриць.

```
A:=matrix([ [2,3,5,-3,-2], [3,4,3,-1,-3], [5,6,-1,3,-5] ] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

**Розв'язання**

а)

```
rank(A)=linalg[rank](A);
```

$$\text{rank}(A) = 2.$$

б) Виконаємо такі елементарні перетворення: до елементів 1-го та 2-го рядків додамо елементи 3-го рядка, помножені на 5 та 3 відповідно

```
linalg[addrow](A, 3, 1, 5);  
linalg[addrow](%, 3, 2, 3);A1:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 27 & 33 & 0 & 12 & -27 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 27 & 33 & 0 & 12 & -27 \\ 18 & 22 & 0 & 8 & -18 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Подумки множимо елементи третього стовпця на певне число та додаємо до кожного з інших стовпців таким чином, щоб у третьому рядку відповідних стовпців утворилися нульові значення. Для отримання результату просто присвоїмо нульові значення вказаним елементам

```
A2:=A1;  
for j to 5 do  
  A2[3,j]:=0  
end do:A2[3,3]:=1:  
evalm(A2);A3:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 27 & 33 & 0 & 12 & -27 \\ 18 & 22 & 0 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поділимо елементи 1-го рядка на 3, а 2-го – на 2:

```
linalg[mulrow](A3, 1, 1/3);  
linalg[mulrow](%, 2, 1/2);A4:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 0 & 4 & -9 \\ 18 & 22 & 0 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 0 & 4 & -9 \\ 9 & 11 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Віднімемо від елементів 2-го рядка відповідні елементи 1-го рядка:

```
linalg[addrow](A4, 1, 2, -1);A5:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вилучаємо другий рядок, що складається лише з нулів

```
linalg[delrows](A5, 2..2);A6:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поділимо елементи 1-го стовпця на 9:

```
linalg[mulcol](A6, 1, 1/9);A7:=%:
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подумки множимо елементи першого стовпця на певне число та додаємо до кожного з інших стовпців таким чином, щоб у першому рядку відповідних стовпців утворилися нульові значення. Для отримання результату просто присвоїмо нульові значення вказаним елементам

```
A8:=A7:
```

```
for j from 2 to 5 do
```

```
  A8[1,j]:=0
```

```
end do:
```

```
evalm(A8);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вилучаємо другий, четвертий та п'ятий стовпці, що складаються лише з нулів

```
linalg[delcols](A8, 4..5);
```

```
linalg[delcols](%, 2..2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки ми отримали одиничну матрицю 2-го порядку, це означає, що ранг вихідної матриці дорівнює  $r=2$ . ◀

► Для заданої однорідної системи лінійних рівнянь

```
restart:
```

```
read "d:\\Maple\\My_gauss.m";
```

```

read "d:\\Maple\\My_gauss_Now.m";
A:=matrix(3,5,[[0,1,2,-3,0],[2,-1,3,0,4],[2,0,5,-3,4]]):
B:=matrix(3,1,[0$3]):
nr:=linalg[rowdim](A):
nc:=linalg[coldim](A):
X:=matrix(nc,1,[seq(x[k],k=1..nc)]):
c:=evalm(A&*X):
sys:=seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..nr);SYS[1..2];
print(Plt_PW([sys]));

```

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

- Знайти ранг матриці системи та переконатися, що одне з рівнянь є лінійною комбінацією двох інших.
- Визначити загальний розв'язок системи за допомогою стандартних команд Maple, розглянувши різні варіанти вибору базисних змінних.
- Перевірити, чи можна змінні  $x_1, x_5$  взяти як базисні. Обґрунтувати результат, надавши відповідні пояснення та коментарі.
- Записати фундаментальну систему розв'язків у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.
- Знайти частинні розв'язки системи для таких значень вільних змінних  $x_3 = x_4 = x_5 = 1$  та  $x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 0$ .
- Знайти загальний розв'язок методом Гаусса.

### Розв'язання

а) Маємо систему з трьох рівнянь із п'ятьма невідомими. Визначимо ранг  $r$  матриці системи  $A$

```

A:=evalm(A);
r:=linalg[rank](A);

```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$r = 2.$$

Це означає, що одне з трьох рівнянь системи є лінійною комбінацією двох інших. Це рівняння можна б було визначити зведенням матриці  $A$  до одиничної матриці за допомогою елементарних перетворень. Отже, фактично маємо систему з двох рівнянь і п'ятьма невідомими. З такої системи можна визначити тільки дві змінні, виразивши їх через інші три.

b)

```
solve({sys},{x[1],x[2]});
```

$$\{x_2 = -2x_3 + 3x_4, x_1 = -\frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 - 2x_5\}.$$

Ми отримали загальний розв'язок системи однорідних рівнянь. Той самий розв'язок, але у відмінній формі, можна знайти, вибравши інші базисні змінні:

```
solve({sys},{x[1],x[3]});
```

$$\{x_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4, x_1 = \frac{5}{4}x_2 - \frac{9}{4}x_4 - 2x_5\}.$$

Будь-яку іншу форму загального розв'язку можна отримати, виходячи з однієї з уже знайдених, без повторного розв'язання системи. Наприклад, перехід від першої форми до другої можна здійснити двома кроками:

1) розв'язуємо рівняння для  $x_2$  відносно  $x_3$ , що є елементарним

```
isolate(x[2] = -2*x[3]+3*x[4],x[3]);
```

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4;$$

2) підставляємо отриманий вираз у рівняння для  $x_1$

```
subs(%,x[1] = -5/2*x[3]+3/2*x[4]-2*x[5]);
```

$$x_1 = \frac{5}{4}x_2 - \frac{9}{4}x_4 - 2x_5.$$

Отримали ті самі рівняння, що і за допомогою команди solve, якщо задавати змінні  $x_1, x_3$  як базисні.

с) Аналогічно можна отримати загальний розв'язок відносно будь-яких двох базисних змінних із п'яти, за винятком  $x_1, x_5$ . Це означає, що 1-ий і 5-ий стовпці не є базисними. Відповідно, будь-який мінор 2-го порядку, утворений з елементів 1-го та 5-го стовпців у будь-яких двох рядках матриці системи, дорівнює нулю. Наприклад, розглянемо визначник 2-го порядку, утворений з елементів на перетині 1-го та 5-го стовпців і 2-го та 3-го рядків:

```
det(linalg[submatrix](A,[2,3],[1,5]))=linalg[det](linalg[submatrix](A,[2,3],[1,5]));
```

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Так само і для інших комбінацій двох рядків, наприклад, 1-го і 2-го або 1-го і 3-го, отримаємо той самий результат:

```
det(linalg[submatrix](A,[1,2],[1,5]))=linalg[det](linalg[submatrix](A,[1,2],[1,5]));
```

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Якщо ж у процесі використання команди `solve` як базисні задати змінні  $x_1, x_5$ , що, як показано вище, не можуть бути базисними, Maple не видасть жодного результату:

```
solve({sys}, {x[1], x[5]});
```

d) Запишемо загальний розв'язок в матричному вигляді

```
X=evalm(X), evalm(X)=matrix(5,1, [-5/2*x[3]+3/2*x[4]-2*x[5], -2*x[3]+3*x[4], x[3], x[4], x[5]]); #, matrix(5,1, [X[1,1]=-5/2*x[3]+3/2*x[4]-2*x[5], X[2,1]=-2*x[3]+3*x[4], X[3,1]=x[3], X[4,1]=x[4], X[5,1]=x[5]]);
```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 - 2x_5 \\ -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

або подамо його у більш наочному вигляді, позначивши вільні змінні  $x_3, x_4, x_5$  через  $C_1, C_2, C_3$ :

```
evalm(X)=matrix(5,1, [[-5/2,*`C[1], +, 3/2,*`C[2], -, 2,*`C[3]], [-2,*`C[1], +, 3,*`C[2], +, 0,*`C[3]], [1,*`C[1], +, 0,*`C[2], +, 0,*`C[3]], [0,*`C[1], +, 1,*`C[2], +, 0,*`C[3]], [0,*`C[1], +, 0,*`C[2], +, 1,*`C[3]]]);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} * C_1 + \frac{3}{2} * C_2 - 2 * C_3 \\ -2 * C_1 + 3 * C_2 + 0 * C_3 \\ 1 * C_1 + 0 * C_2 + 0 * C_3 \\ 0 * C_1 + 1 * C_2 + 0 * C_3 \\ 0 * C_1 + 0 * C_2 + 1 * C_3 \end{bmatrix}.$$

Можемо записати фундаментальну систему розв'язків, що складається з трьох лінійно незалежних розв'язків, у вигляді лінійної комбінації базисних векторів  $X_1, X_2, X_3$

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3,$$

```
X=C[1]*matrix(5,1,[-5/2,-
2,1,0,0])+C[2]*matrix(5,1,[3/2,3,0,1,0])+C[3]*matrix(
5,1,[-2,0,0,0,1]);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

е) Знайдемо частинні розв'язки системи. Нехай  $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ :

```
subs(C[1]=1,C[2]=1,C[3]=1,%);
evalm(%);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$C_1 = 3, C_2 = 5, C_3 = 0$ :

```
subs(C[1]=3,C[2]=5,C[3]=0,eq1);
evalm(%);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

f)

```
A:=matrix(2,2,[[0,1],[2,-1]]):
B:=matrix(2,1,[-2*x[3]+3*x[4],[-3*x[3]-4*x[5]])
nr:=linalg[rowdim](A):
nc:=linalg[coldim](A):
X:=matrix(nc,1,[seq(x[k],k=1..nc)]):
c:=evalm(A*X):
SYS:=seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..nr):
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..nr)]));
My_gauss_Now(A,B,'x');
```

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -3x_3 - 4x_5 \end{cases}.$$

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

Переставляємо місцями рівняння 1 та 2

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ 0 & 1 & -2x_3 + 3x_4 \\ 2 & -1 & -3x_3 - 4x_5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ 2 & -1 & -3x_3 - 4x_5 \\ 0 & 1 & -2x_3 + 3x_4 \end{bmatrix}.$$

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ 2 & -1 & -3x_3 - 4x_5 \\ 0 & 1 & -2x_3 + 3x_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & B \\ 1 & -2x_3 + 3x_4 \end{bmatrix}.$$

Зворотний хід

$$\begin{aligned} x_2 &= -2x_3 + 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 &= -3x_3 - 4x_5, \rightarrow \left[ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_2 \right], \\ x_1 &= -\frac{5}{2}x_3 - 2x_5 + \frac{3}{2}x_4 \end{aligned}.$$

Відповідь

$$x_1 = -\frac{5}{2}x_3 - 2x_5 + \frac{3}{2}x_4, x_2 = -2x_3 + 3x_4.$$

► Для заданої неоднорідної системи лінійних рівнянь

**restart:**

```

read "d:\\Maple\\My_gauss.m";
read "d:\\Maple\\My_gauss_Now.m";
A:=matrix(3,5,[[0,1,2,-3,0],[2,-1,3,0,4],[2,0,5,-3,4]]);
B:=matrix(3,1,[-1,5,4]);
nr:=linalg[rowdim](A);
nc:=linalg[coldim](A);
X:=matrix(nc,1,[seq(x[k],k=1..nc)]);
c:=evalm(A&*X);
sys:=seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..nr);SYS[1..2];
print(Plt_PW([sys]));

```

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 5 \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases} .$$

- Знайти ранг матриці системи та ранг розширеної матриці.
- Знайти загальний розв'язок системи за допомогою стандартних команд Maple.
- Записати структуру загального розв'язку неоднорідної системи, знайти довільний частинний розв'язок (фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи можна взяти з попереднього прикладу). На основі цього записати загальний розв'язок заданої неоднорідної системи рівнянь.
- Визначити загальний розв'язок методом Гаусса, послідовно виконуючи елементарні перетворення рядків.

### Розв'язання

```

a)
r[A]=linalg[rank](A);
AB=linalg[augment](A,B);
r[AB]=[r[A]=linalg[rank](rhs(%))];

```

$$r_A = 2,$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & -3 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$r_{AB} = [r_A = 2].$$

Оскільки ранги основної та розширеної матриць збігаються, то, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, система є сумісною.

```

b)
solve({sys},{x[1],x[2]});
subs(x[4]=1,x[5]=1,x[3]=1,%);

```

$$\{x_2 = -2x_3 + 3x_4 - 1, x_1 = -\frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 - 2x_5 + 2\}.$$

с) Оскільки кількість змінних  $n - r_{AB} = 5 - 2 = 3$ , загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь має вигляд

$$X_{з.н.} = X_{ч.н.} + C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3,$$

де  $X_{ч.н.}$  – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи,

$X_1, X_2, X_3$  – фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи лінійних рівнянь,

$C_1, C_2, C_3$  – довільні сталі.

Лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3,$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

відповідної системи однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

отримано в попередньому прикладі.

Нагадаємо, що довільні сталі  $C_1, C_2, C_3$  відповідають вільним змінним  $x_3, x_4, x_5$ . Визначимо довільний частинний розв'язок неоднорідної системи, поклавши вільні змінні (а отже, й відповідні довільні сталі) рівними нулю:

```
print(plt_PW([subs(x[3]=0, x[4]=0, x[5]=0, [sys[1], sys[3]]))]);
```

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ 2x_1 = 4 \end{cases}.$$

Знайдений частинний розв'язок записується у такій формі:

```
X[чн]=evalm(X), evalm(X)=matrix(nc, 1, [2, -1, 0, 0, 0]);
```

$$\tilde{O}_{\neq i} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи рівнянь можна подати у вигляді:  
`evalm(X)=matrix(nc,1,[2,-1,0,0,0])+C[1]*matrix(5,1,[-5/2,-2,1,0,0])+C[2]*matrix(5,1,[3/2,3,0,1,0])+C[3]*matrix(5,1,[-2,0,0,0,1]);`

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d)

```
A:=matrix(2,2,[[0,1],[2,-1]]):
B:=matrix(2,1,[-1-2*x[3]+3*x[4],5-3*x[3]-4*x[5]]):
nr:=linalg[rowdim](A):
nc:=linalg[coldim](A):
X:=matrix(nc,1,[seq(x[k],k=1..nc)]):
c:=evalm(A*X):
SYS:=seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..nr):
print(Plt_PW([seq(c[i,1]=B[i,1],i=1..nr)]));
My_gauss_Now(A,B,'x');
```

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 + 3x_4 - 1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 - 3x_3 - 4x_5 \end{cases}$$

Прямий хід методу Гаусса - схема єдиного ділення.

Переставляємо місцями рівняння 1 та 2

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ 0 & 1 & -2x_3 + 3x_4 - 1 \\ 2 & -1 & 5 - 3x_3 - 4x_5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ 2 & -1 & 5 - 3x_3 - 4x_5 \\ 0 & 1 & -2x_3 + 3x_4 - 1 \end{bmatrix}.$$

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & B \\ 2 & -1 & 5 - 3x_3 - 4x_5 \\ 0 & 1 & -2x_3 + 3x_4 - 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & B \\ 1 & -2x_3 + 3x_4 - 1 \end{bmatrix}.$$

Зворотний хід

$$x_2 = -2x_3 + 3x_4 - 1,$$

$$2x_1 - x_2 = 5 - 3x_3 - 4x_5, \rightarrow \left[ x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_2 \right],$$

$$x_1 = -\frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 - 2x_5 + 2$$

Відповідь

$$x_1 = -\frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 - 2x_5 + 2, x_2 = -2x_3 + 3x_4 - 1.$$



## 2 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

### Система координат у площині

Хай маємо дві числові прямі  $OX$  та  $OY$ :



Вибравши на кожній з них однаковий масштаб, встановлюємо взаємно однозначну відповідність між точками кожної з цих прямих та дійсними числами. Дійсні числа називають координатами відповідних точок.

Розташуємо ці дві прямі під прямим кутом одну до одної з перетином у точці  $O$  (рис. 2.1). Отримаємо так звану прямокутну систему координат на площині. Ця система дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між точками площини  $XOY$  та (впорядкованими) парами дійсних чисел. Справді, візьмемо на площині довільну точку  $M$  і опустимо з неї перпендикуляри на числові прямі  $OX$  і  $OY$ . Координати основ цих перпендикулярів позначимо  $x$  і  $y$  (рис. 2.2). За цим правилом кожній т.  $M$  відповідатиме єдина впорядкована пара чисел  $(x; y)$ . Навпаки, виконавши вказані дії у зворотному порядку, з кожною впорядкованою парою чисел  $(x; y)$  пов'яжемо цілком певну точку площини. Числа  $x$  і  $y$  називають, відповідно, абсцисою та ординатою т.  $M$ , а впорядковану пару чисел  $(x; y)$  – координатами т.  $M$  у площині  $XOY$ . Числові прямі  $OX$  та  $OY$  називають осями координат ( $OX$  – вісь абсцис;  $OY$  – вісь ординат). Точку  $M$  з координатами  $(x; y)$  позначають  $M(x; y)$ .

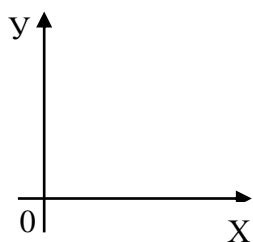


Рисунок 2.1

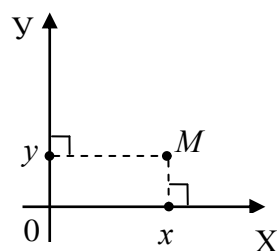


Рисунок 2.2

Так побудовану систему координат на площині називають прямокутною або декартовою (на честь французького математика Рене Декарта (1596–1650)).

Встановивши у площині систему координат можемо задавати положення кожної точки прою дійсних чисел – її координатами, а їхнє взаємне розташування – співвідношеннями між цими координатами

### Відстань між двома точками

Хай маємо точки  $M_1(x_1; y_1)$  та  $M_2(x_2; y_2)$ . Як знайти відстань  $M_1M_2$ ?

Із  $\triangle M_1M_2K$  (рис. 2.3) маємо

$$M_1M_2^2 = M_1K^2 + KM_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Звідси  $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

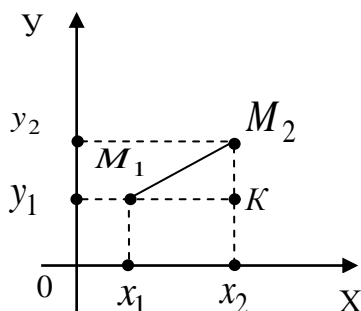


Рисунок 2.3

### Поділ відрізка у даному відношенні

Хай маємо точки  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$  і фіксоване додатне число  $\lambda$ .

Як знайти точку  $K(x; y)$ , що ділить відрізок  $M_1M_2$  у відношенні  $\lambda$ , тобто,  $\frac{M_1K}{KM_2} = \lambda$ ? За теоремою Фалеса (рис. 2.4):  $\frac{AC}{CM_2} = \frac{M_1K}{KM_2}$ , тобто,

$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$ , звідки  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ . Аналогічно,  $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ . Отже, шукана

точка має координати:  $K\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$ .

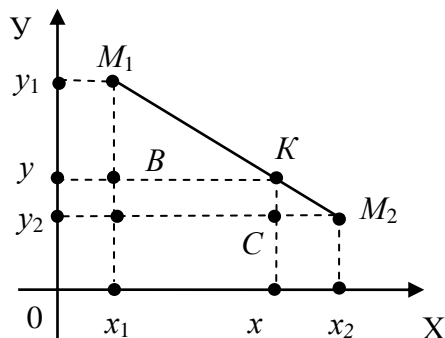


Рисунок 2.4

## Прямокутна система координат у просторі

Розташуємо у просторі взаємно перпендикулярно одну до одної три числові прямі  $OX$ ,  $OY$  і  $OZ$ , на яких вибрано однаковий масштаб, з перетином у спільній початковій точці  $O$  (рис. 2.5). Отримаємо прямокутну систему координат у просторі, яка дає змогу визначити місце будь-якої точки  $M$  впорядкованою трійкою чисел  $(x; y; z)$  – її координатами. Справді, опустимо перпендикуляр із т.  $M$  на площину  $XOY$ . Його основою є т.  $M'$ . Позначимо її координати  $(x; y)$ . Це є перші дві координати (абсциса й ордината) точки  $M$ . Третю її координату (аплікату) отримаємо, опустивши перпендикуляр із точки  $M$  на вісь  $OZ$  (рис. 2.6). Точку  $M$  з координатами  $(x; y; z)$  записують  $M(x; y; z)$ .

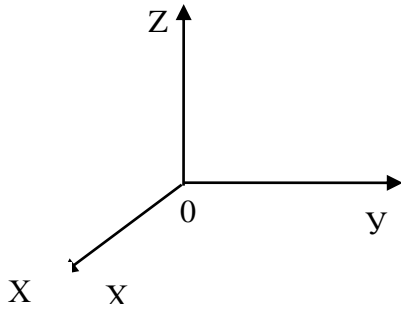


Рисунок 2.5

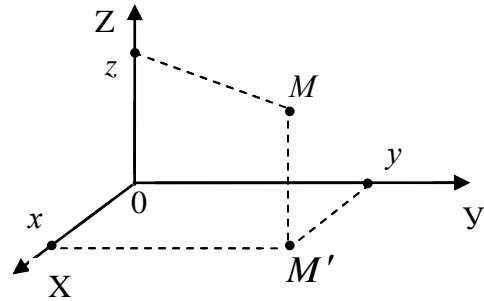


Рисунок 2.6

Встановивши у просторі прямокутну систему координат, ми отримуємо можливість арифметично описувати не лише положення точок, а й їхнє взаємне розташування.

Наприклад, відстань між двома точками  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  та  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  обчислюють за формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

## Вектори

Усі фізичні величини можна розділити на два класи: скалярні і векторні. Скаляр – це величина, яку після вибору одиниці вимірювання можна виразити дійсним числом. Такими величинами є, наприклад, робота, температура, маса, об'єм, довжина тощо. До класу векторних належать такі величини, як швидкість, сила, прискорення, напруженість електромагнітного поля тощо. Вони визначаються додатним дійсним числом (після вибору одиниці вимірювання) і напрямом дії.

**Приклад.** Результат руху автомобіля залежить не тільки від величини його швидкості, а й від її напрямку: вздовж чи впоперек дороги.

Будь-яку векторну величину, або просто «вектор», можемо уявляти як відрізок, на якому вказано напрям. Зокрема напрям на відрізку збігається з напрямом дії векторної величини, а його довжина у вибраному масштабі виражає її міру.

**Приклад.** Якщо відрізок завдовжки 1 см означає швидкість 1 м/сек, то відрізок завдовжки 2 см означатиме швидкість 2 м/сек.

Ми вивчатимемо вектори безвідносно до їх фізичного тлумачення. Мова йтиме про загальні властивості векторів, що залишаються правильними при будь-якій інтерпретації (швидкість, прискорення, сила і т. ін.). В цьому, власне, і полягає універсальність математичних методів як інструмента найрізноманітніших наук. Вивчивши властивості векторів, ми отримаємо інформацію про те, як у розрахунках поводитися з силами, швидкостями, напруженостями, загалом, довільними векторними величинами.

Отже, переходимо до означення і вивчення вектора, абстрагувавшись від його фізичного змісту.

**Означення.** З'єднаємо на площині дві точки  $A$  і  $B$  і задамо на отриманому відрізку один із двох можливих напрямків (наприклад, від  $A$  до  $B$ ). Відрізок із вказаним на ньому напрямком назвемо напрямленим. Вектором називають напрямлений відрізок. Точку  $A$  називають початком вектора, а точку  $B$  – його кінцем. Вектор з початком  $A$  і кінцем  $B$  позначають  $\overrightarrow{AB}$  (рис. 2.7).

**Зауваження.**

1) На рис. 2.8  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{CD}$  – той самий вектор.

2) Для даних вектора  $\overrightarrow{AB}$  і точки  $O$  (рис. 2.9) існує одна-єдина точка  $M$ , для якої  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ . Цю властивість формулюють ще так: від будь-якої точки можна відкласти будь-який вектор.

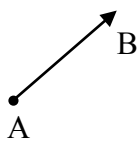


Рисунок 2.7

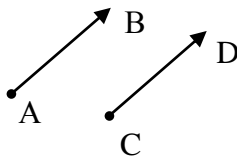


Рисунок 2.8

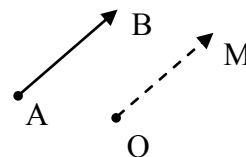


Рисунок 2.9

### Додавання векторів

Існує два рівнозначні за результатом способи додавання векторів.

#### 1) Правило трикутника

Щоб додати вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  слід поєднати кінець першого вектора з початком другого. Сумою буде вектор  $\overrightarrow{AC}$ , чий початок збігається з початком першого вектора, а кінець – з кінцем другого (рис. 2.10).

#### 2) Правило паралелограма

Відкладемо вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  від однієї точки і побудуємо на них паралелограм (рис. 2.11). Сумою буде вектор  $\overrightarrow{AC}$ .

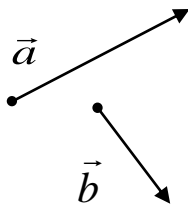


Рисунок 2.10

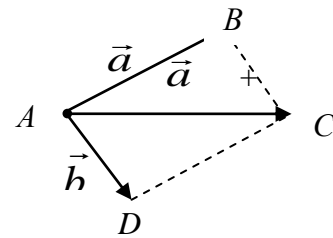
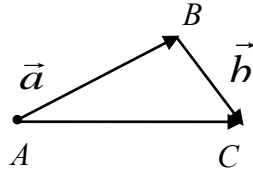


Рисунок 2.11

**Зауваження.** Правило додавання не є штучно придуманим. Воно узагальнює експериментальні результати, які стосуються конкретних фізичних величин.

### Приклади

1. Хай на матеріальну точку  $A$  одночасно діють дві сили  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Чи існує така сила  $\vec{c}$ , результат дії якої на точку  $A$  буде таким самим, що й для сил  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ?

Відповідь ствердна. Цю силу можна знайти, додавши сили  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  за правилом 1) чи 2).

2. Хай  $\vec{V}_1$  – швидкість течії річки,  $\vec{V}_2$  – власна швидкість човна. Як рухається човен відносно дна річки (чи відносно берега)?

Швидкість цього руху – сума  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ , утворена за правилом 1) чи 2).

### Властивості дії додавання векторів

Додавання підлягає асоціативному (сполучному)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  та комутативному (переставному)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  законам (рис. 2.12 та 2.13).

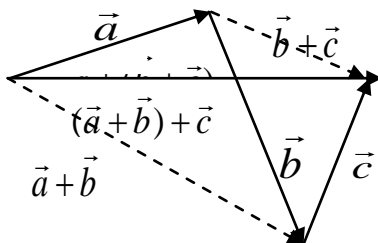


Рисунок 2.12

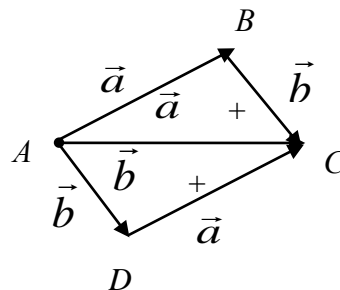


Рисунок 2.13

Вектор, кінець якого збігається з початком, називають нульовим і позначають  $\vec{0}$ . Нульовий вектор не визначає ніякого напрямку, а його довжина вважається рівною нулю. Із правил додавання 1) і 2) випливає, що він поводить себе нейтрально при додаванні векторів, тобто для довільного вектора  $\vec{a}$ :  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

Для кожного конкретного вектора  $\vec{a}$  існує протилежний вектор, тобто такий вектор  $\vec{b}$ , що  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ . Справді, розглянемо вектор  $\overrightarrow{AB}$ . Протилежним до нього є вектор  $\overrightarrow{BA}$ , бо  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ .

Вектор, протилежний вектору  $\vec{a}$ , позначають  $-\vec{a}$ .

Наявність для кожного вектора протилежного дозволяє запровадити дію віднімання: відняти вектор означає додати протилежний йому вектор.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Довжиною вектора  $\overrightarrow{AB}$  називають довжину відрізка  $AB$  і позначають  $|\overrightarrow{AB}|$  (модуль вектора  $\overrightarrow{AB}$ ).

**Правило множення числа на вектор.**

1) Якщо  $\lambda$  – додатне дійсне число, а  $\vec{a}$  – вектор, то добутком  $\lambda\vec{a}$  є такий вектор  $\vec{b}$ , що а)  $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$  ( $\vec{b}$  і  $\vec{a}$  співнапрямлені); б)  $|\vec{b}| = \lambda|\vec{a}|$ .

2) Якщо  $\lambda > 0$ , то добутком  $(-\lambda)\vec{a}$  є вектор, протилежний векторові  $\lambda\vec{a}$ .

3) Добутком числа 0 на будь-який вектор  $\vec{a}$  є нульовий вектор:  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .

*Геометричний зміст правила множення:* видовження вектора  $\vec{a}$  у  $\lambda$  разів, якщо  $\lambda > 0$ , і видовження у  $|\lambda|$  разів разом зі зміною напрямку вектора на протилежний, якщо  $\lambda < 0$ .

**Властивості дії множення числа на вектор.**

1) Для будь-яких чисел  $\alpha$ ,  $\beta$  і довільного вектора  $\vec{a}$  справджується рівність  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ .

2) Множення чисел на вектори пов'язане з дією додавання векторів дистрибутивним (розподільним) законом  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ .

3) Множення чисел на вектори пов'язане розподільним законом також із додаванням чисел  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ .

Розглянемо множину  $V_1$  векторів, паралельних деякій прямій. Такі вектори називають колінеарними. Із правил додавання векторів та множення чисел на вектори випливає, що сума векторів з множини  $V_1$  знову

буде вектором із  $V_1$  і добуток числа на вектор із  $V_1$  також буде вектором із  $V_1$ . Інакше кажучи, множина  $V_1$  замкнена відносно обох згаданих дій.

**Твердження 1.** Множина  $V_1$  складається з усіх векторів, кратних одному ненульовому векторові цієї множини.

*Доведення.* Нехай  $\vec{a}$  – довільний вектор із  $V_1$ , причому  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Із сказаного вище випливає, що усі вектори  $\alpha\vec{a}$  ( $\alpha$  – число) належать до  $V_1$ . Упевнимся тепер, що в  $V_1$  немає інших векторів. Розглянемо довільний вектор  $\vec{b} \in V_1$ . Якщо  $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ , то  $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ . Справді, цей вектор має потрібні довжину і напрям. Якщо ж  $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$  ( $\vec{b}$  і  $\vec{a}$  протилежно напрямлені), то  $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ . Нарешті,  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$ .

Зауважимо, що для будь-якого вектора  $\vec{b} \in V_1$  зображення  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$  єдине. Хай це не так:  $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}$  і  $\vec{b} = \lambda_2\vec{a}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Якщо  $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ , то вектори  $\lambda_1\vec{a}$  і  $\lambda_2\vec{a}$  мають різну довжину; якщо ж  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , то ці вектори протилежні. Отже, насправді  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Дане твердження можна сформулювати інакше: будь-який ненульовий вектор прямої утворює базис у множині векторів цієї прямої.

### Вектори на площині

Позначимо через  $V_2$  множину усіх векторів деякої площини. Такі вектори називають компланарними. З правил додавання векторів та множення чисел на вектори випливає, що множина  $V_2$  замкнена відносно обох цих дій.

**Твердження 2.** Хай  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  – довільні неколінеарні вектори в множині  $V_2$ . Тоді будь-який вектор  $\vec{c} \in V_2$  можна одним-єдиним способом подати у формі

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \quad (8)$$

*Доведення.* Відкладемо вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$  від однієї точки  $O$  (рис. 2.14).

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}.$$

Оскільки вектори  $\overrightarrow{OA_1}$  і  $\overrightarrow{OB_1}$  колінеарні, відповідно, з векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , то за твердженням 1  $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB_1} = \beta\vec{b}$ , а тому  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ .

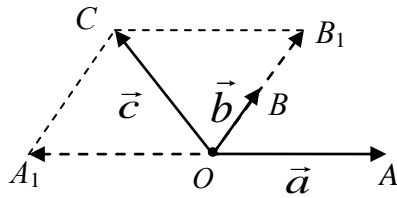


Рисунок 2.14

Хай вектор  $\vec{c}$  виражається через  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  ще одним способом

$$\vec{c} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}.$$

Якщо  $\gamma \neq \alpha$ , то з рівності  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$  матимемо  $\vec{a} = \frac{\delta - \beta}{\alpha - \gamma} \cdot \vec{b}$ ,

що суперечить умові твердження про неколінеарність векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$

Твердження 2 часто формулюють іншим способом: будь-які два неколінеарні вектори площини утворюють базис у множині векторів цієї площини; кожний вектор площини однозначно виражається через базисні вектори формулою (8). Числа  $\alpha$  і  $\beta$  називають координатами вектора  $\vec{c}$  в базисі  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ . Вибравши базис, ми встановлюємо взаємно однозначну відповідність між векторами  $\vec{c}$  площини  $V_2$  і парами дійсних чисел  $(\alpha; \beta)$  – координатами векторів у цьому базисі. Тому замість виразу (8) часто пишуть коротко  $\vec{c} = (\alpha; \beta)$ .

**Твердження 3.** Щоб додати вектори, слід додати їхні відповідні координати. Щоб помножити число на вектор, слід помножити на це число обидві координати вектора.

*Доведення.* Хай  $\vec{c}_1 = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ ,  $\vec{c}_2 = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 + \vec{c}_2 &= (\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}) + (\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}) = (\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{a}) + (\beta_1\vec{b} + \beta_2\vec{b}) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{b}. \end{aligned}$$

$$\lambda\vec{c}_1 = \lambda(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}) = \lambda(\alpha_1\vec{a}) + \lambda(\beta_1\vec{b}) = (\lambda\alpha_1)\vec{a} + (\lambda\beta_1)\vec{b}.$$

### Ортонормований базис

Поняття кута між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  ілюструє рис. 2.15. Цей кут завжди лежить у межах від 0 до  $\pi$ .

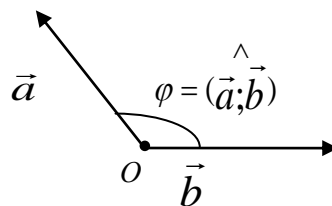


Рисунок 2.15

**Означення.** Ортонормованим базисом в  $V_2$  називають базис, вектори якого взаємно перпендикулярні і мають довжину, рівну одиниці.

Хай  $\vec{i}, \vec{j}$  – такий базис і  $\vec{c} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ . Координату  $x$  називають ортогональною проєкцією вектора  $\vec{c}$  на напрям  $\vec{i}$  і позначають  $Pr_{\vec{i}}\vec{c}$ . Аналогічно,  $y$  – ортогональна проєкція вектора  $\vec{c}$  на напрям  $\vec{j}$   $y = Pr_{\vec{j}}\vec{c}$ .

Якщо вектор  $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{i}$ , то вважаємо, що  $Pr_{\vec{b}}\vec{c} = Pr_{\vec{i}}\vec{c}$ . Іншими словами, насправді йдеться про проєкцію вектора на напрям.

Із твердження 3 випливає, що

$$Pr_{\vec{b}}(\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = Pr_{\vec{b}}\vec{c}_1 + Pr_{\vec{b}}\vec{c}_2, \quad Pr_{\vec{b}}(\lambda\vec{c}) = \lambda Pr_{\vec{b}}\vec{c}.$$

Проєкція одиничного вектора  $\vec{e}$  ( $|\vec{e}| = 1$ ) на напрям  $\vec{b}$  називається косинусом кута між цими векторами:  $Pr_{\vec{b}}\vec{e} = \cos(\widehat{\vec{b}; \vec{e}})$ .

Хай  $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{e}$  (рис. 2.16),  $\alpha = (\widehat{\vec{b}; \vec{c}}) = (\widehat{\vec{b}; \vec{e}})$ . Якщо  $\vec{c} = \lambda\vec{e}$ , то

$Pr_{\vec{b}}\vec{c} = \lambda \cos(\widehat{\vec{b}; \vec{e}})$  (згідно з твердженням 3). Оскільки  $|\vec{e}| = 1$ , то  $|\vec{c}| = |\lambda\vec{e}| = \lambda|\vec{e}| = \lambda$ .

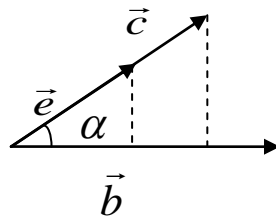


Рисунок 2.16

Отже,  $Pr_{\vec{b}}\vec{c} = |\vec{c}| \cos(\widehat{\vec{b}; \vec{c}})$ . Ця формула надзвичайно важлива.

**Твердження 4.** Проєкція довільного вектора  $\vec{c}$  на напрям іншого вектора  $\vec{b}$  дорівнює добуткові довжини проєктованого вектора на косинус кута між обома векторами.

## Скалярний добуток векторів

**Означення.** Скалярним добутком векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називають число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}).$$

### Властивості скалярного добутку

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  тоді і тільки тоді, коли:

а) один з векторів нульовий, або б)  $\vec{a}$  перпендикулярний до  $\vec{b}$   
(в обох випадках вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називаються ортогональними).

2.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ . Справді,  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{a}}) = |\vec{a}|^2 \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ .

3.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

Нижчезказані властивості показують як скалярне множення пов'язане з додаванням векторів і множенням чисел на вектори.

4.  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$ .

Рівність поширюється також на більшу кількість доданків.

5.  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

Наслідок властивостей 3–5.

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \cdot (\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \beta_3 \vec{b}_3) = \alpha_1 \beta_1 (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1) + \alpha_1 \beta_2 (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2) + \dots + \alpha_2 \beta_3 (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3)$$

6. Вигляд скалярного добутку в ортонормованому базисі.

Хай  $\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}$ . Тоді  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$ .

Скалярний добуток в ортонормованому базисі дорівнює сумі добутків відповідних координат.

$$\begin{aligned} \text{Зокрема,} \quad |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}; \\ \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}. \end{aligned}$$

## Координати точок і векторів

Якщо точка  $O$  – початок системи координат, то вектор  $\overrightarrow{OM}$  називають радіус-вектором точки  $M$ . Цілком зрозуміло, що кожна точка площини має свій радіус-вектор, і навпаки, кожний вектор з початком у точці  $O$  вказує на єдину точку площини – свій кінець. Іншими словами, точки площини та їхні радіус-вектори взаємно визначають одні одних.

Якщо  $\vec{i}, \vec{j}$  – ортонормований базис, узгоджений з системою координат (його вектори співнапрямлені з осями координат), а пара чисел  $(x; y)$  –

координати точки  $M$ , то  $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (x; y)$  (рис. 2.17). Тобто, точка площини та її радіус-вектор мають однакові координати.

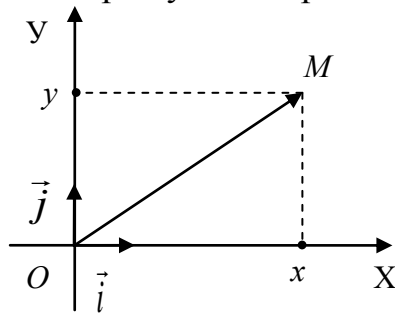


Рисунок 2.17

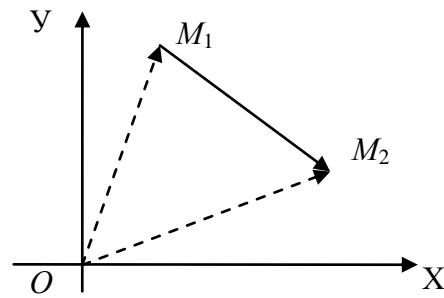


Рисунок 2.18

Хай початком вектора є точка  $M_1(x_1; y_1)$ , а кінцем – точка  $M_2(x_2; y_2)$ . Які координати матиме вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ? Із рис. 2.18 видно, що  $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ .

Але  $\overrightarrow{OM_1} = (x_1; y_1)$ ,  $\overrightarrow{OM_2} = (x_2; y_2)$ . Тож виходить, що  $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2; y_2) - (x_1; y_1) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ .

### Вектори у просторі

Позначимо через  $V_3$  множину всіх векторів простору. Вона замкнена відносно додавання векторів і множення чисел на вектори.

**Твердження 5.** Хай  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$  – довільні некопланарні вектори простору. Тоді будь-який вектор  $\vec{d} \in V_3$  можна єдиним способом подати у вигляді  $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$ .

Інакше кажучи, будь-які три некопланарні вектори утворюють базис у множині векторів простору. Впорядкована трійка чисел  $(\alpha; \beta; \gamma)$  називається координатами вектора  $\vec{d}$  у базисі  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

Трійка векторів  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  з множини  $V_3$  утворює ортонормований базис, якщо  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$  і кожні два вектори взаємно перпендикулярні. Цей базис є узгодженим із системою координат у просторі, якщо його вектори співнапрямлені з осями координат (рис. 2.19).

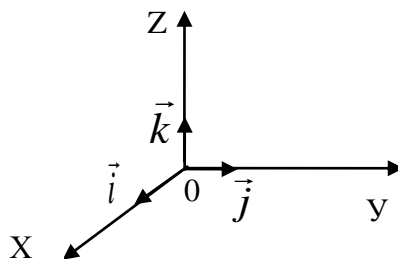


Рисунок 2.19

Для векторів простору, так само, як і для векторів площини, вводять поняття проєкції вектора та скалярного добутку двох векторів. Формули змінюються лише з урахуванням додаткової координати.

**Означення.** Векторним добутком вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  називають такий вектор  $\vec{c}$ , що:

- 1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\hat{\vec{a}; \vec{b}})$ ;
- 2)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  і  $\vec{c} \perp \vec{b}$ , тобто вектор  $\vec{c}$  перпендикулярний до площини векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;
- 3) напрям вектора  $\vec{c}$  визначається за правилом «правого гвинта» (рис. 2.20).

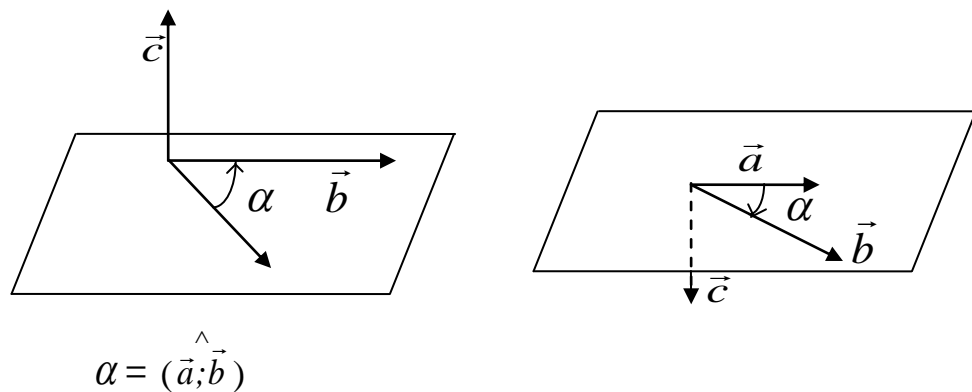


Рисунок 2.20

Позначають векторний добуток  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$  символом  $[\vec{a}\vec{b}]$ , або  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

**Властивості векторного добутку**

1)  $[\vec{b}\vec{a}] = -[\vec{a}\vec{b}]$ .

Справді, вектори  $[\vec{b}\vec{a}]$  і  $[\vec{a}\vec{b}]$  мають однакову довжину, але протилежно напрямлені.

2) Якщо вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні, то  $[\vec{a}\vec{b}] = 0$ , адже у цьому випадку  $\sin(\hat{\vec{a}; \vec{b}}) = 0$  і  $|\vec{a}\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$ .

3) Із першого пункту означення випливає, що модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі  $S$  побудованого на них паралелограма (рис. 2.21).

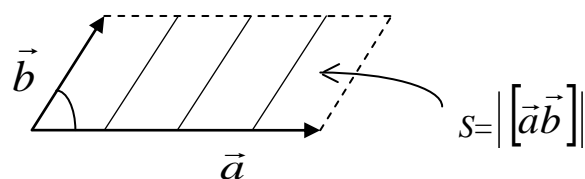


Рисунок 2.21

4) Зв'язок векторного добутку з додаванням векторів і множенням чисел на вектори

$$\begin{aligned} [(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}] &= [\vec{a}_1\vec{b}] + [\vec{a}_2\vec{b}], \\ [(\lambda\vec{a})\vec{b}] &= \lambda[\vec{a}\vec{b}]. \end{aligned}$$

5) Хай  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – ортонормований базис простору, узгоджений з системою координат і  $\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}$ . Тоді

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}] &= [(\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k})(\beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k})] = \alpha_1\beta_1[\vec{i}\vec{i}] + \alpha_1\beta_2[\vec{i}\vec{j}] + \alpha_1\beta_3[\vec{i}\vec{k}] + \\ &+ \alpha_2\beta_1[\vec{j}\vec{i}] + \alpha_2\beta_2[\vec{j}\vec{j}] + \alpha_2\beta_3[\vec{j}\vec{k}] + \alpha_3\beta_1[\vec{k}\vec{i}] + \alpha_3\beta_2[\vec{k}\vec{j}] + \alpha_3\beta_3[\vec{k}\vec{k}] = \\ &= \alpha_1\beta_2\vec{k} - \alpha_1\beta_3\vec{j} - \alpha_2\beta_1\vec{k} + \alpha_2\beta_3\vec{i} + \alpha_3\beta_1\vec{j} - \alpha_3\beta_2\vec{i} = \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \cdot \vec{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) \cdot \vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Скориставшись поняттям визначника, можемо цей результат записати як

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k},$$

або

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Ми отримали просту формулу для знаходження векторного добутку двох векторів, заданих координатами в ортонормованому базисі.

### Мішаний добуток векторів

Тут йтиметься про добуток трьох векторів. Маючи у розпорядженні правила скалярного та векторного множення, три вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  можна послідовно множити з різним кінцевим результатом. Справді,  $\vec{a} \cdot [\vec{b}\vec{c}]$  – число,  $(\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}$  – вектор,  $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$  – інший вектор тощо.

**Означення.** Мішаним добутком трьох векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  називають число  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$  (векторний добуток першого вектора на другий помножити скалярно на третій вектор).

**Властивості мішаного добутку.**

1) Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (рис. 2.22).

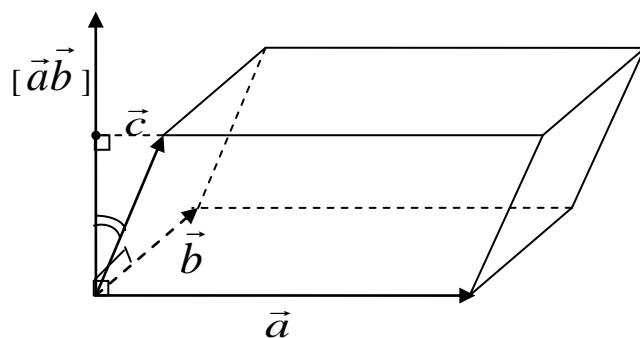


Рисунок 2.22

$$\text{Справді, } |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \left| \left[ \vec{a}\vec{b} \right] \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \left( \left[ \vec{a}\vec{b} \right]; \vec{c} \right) \right| = \left[ \vec{a}\vec{b} \right] \cdot \left| \text{Пр}_{\left[ \vec{a}\vec{b} \right]} \vec{c} \right|.$$

Вектор  $[\vec{a}\vec{b}]$  перпендикулярний до площини векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , тобто, до основи паралелепіпеда. Отже,  $|\text{Пр}_{[\vec{a}\vec{b}]} \vec{c}|$  дорівнює його висоті; число  $[\vec{a}\vec{b}]$  дорівнює площі його основи. Таким чином, об'єм паралелепіпеда

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

2)  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$ , тобто, кільцева перестановка векторів не змінює мішаного добутку (рис. 2.23).

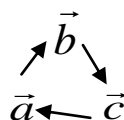


Рисунок 2.23

3) Будь-яка інша перестановка векторів мішаного добутку дає протилежне  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  число  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ .

4) Мішаний добуток векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли вони компланарні. Справді, рівність  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$  означає, що об'єм відповідного паралелепіпеда дорівнює нулю, тобто, вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  лежать в одній площині.

5) Хай вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  задані прямокутними координатами:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}, \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}, \quad \vec{c} = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}.$$

Тоді

$$\left[ \vec{a}\vec{b} \right] = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Множимо цей вектор скалярно на вектор  $\vec{c}$

$$[\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \gamma_3 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Ми отримали дуже просту для запам'ятовування формулу мішаного добутку у координатній формі

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

### Розв'язування типових прикладів

**Приклад 1.** Дано точки  $A(3;6;-4)$  і  $B(4;-7;9)$ . Знайти координати вектора  $\vec{AB}$  та його довжину  $|\vec{AB}|$ .

**Розв'язання.**  $\vec{AB} = (4-3; (-7)-6; 9-(-4)) = (1; -13; 13)$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-13)^2 + 13^2} = \sqrt{338}.$$

**Приклад 2.** Визначити початок вектора  $\vec{a}(2; -3; -1)$ , якщо його кінець збігається з точкою  $(1, -1, 2)$ .

**Розв'язання.** Нехай кінець вектора  $\vec{a}$  міститься в точці  $A(1, -1, 2)$ , а початок в точці  $B(x, y, z)$ ; тоді вектор  $\vec{BA} = \vec{a}$  має координати:  $(2; -3; -1) = (1-x; -1-y; 2-z)$ , звідки  $1-x=2$ ;  $-1-y=-3$ ;  $2-z=-1$ . Отже,  $x=-1$ ;  $y=2$ ;  $z=3$ .

Таким чином, точка  $B$  має координати  $B(-1; 2; 3)$ .

**Приклад 3.** Знайти координати вектора  $\vec{a}$ , якщо відомі кути  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$  які він утворює з осями координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  і його довжина  $|\vec{a}| = 4$ .

**Розв'язання**

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha = 4 \cos 45^\circ = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2};$$

$$a_y = |\vec{a}| \cos \beta = 4 \cos 60^\circ = 4 \frac{1}{2} = 2;$$

$$a_z = |\vec{a}| \cos \gamma = 4 \cos 120^\circ = 4 \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Отже, вектор  $\vec{a} = (2\sqrt{2}; 2; -2)$ .

**Приклад 4.** Чи може вектор утворювати з координатними осями кути  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ?

**Розв'язання.**  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Підставляємо замість  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  їх значення:

$$\cos^2 60 + \cos^2 120 + \cos^2 45 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1.$$

Отже, вектор може утворювати такі кути з осями координат

**Приклад 5.** Визначити при яких  $\alpha$ ,  $\beta$  вектори  $\vec{a}(-6; \beta; 2)$  і  $\vec{b}(\alpha; 4; -1)$  колінеарні.

**Розв'язання.** Умовою колінеарності двох векторів є пропорційність їх відповідних координат. Маємо

$$\frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{4} = \frac{2}{-1} = -2, \text{ тоді } \frac{-6}{\alpha} = -2; \frac{\beta}{4} = -2$$

$$-2\alpha = -6; \beta = -8, \text{ значить } \alpha = 3.$$

Отже,  $\vec{a}(-6; -8; 2)$ ;  $\vec{b}(3; 4; -1)$

**Приклад 6.** Чи колінеарні вектори  $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$  і  $\vec{c}_2 = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ , побудовані на векторах  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  і  $\vec{b} = (-2; 4; -6)$ ? Перевірити це безпосереднім обчисленням.

**Розв'язання**

Послідовно отримуємо

$$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b} = (2; -4; 6) - (-10; 20; -30) = (12; -24; 36),$$

$$\vec{c}_2 = -2\vec{a} + 5\vec{b} = (-2; 4; -6) + (-10; 20; -30) = (-12; 24; -36),$$

$$\frac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2} = \frac{12}{-12} = \frac{-24}{24} = \frac{36}{-36} = -1.$$

Оскільки координати векторів  $\vec{c}_1$  і  $\vec{c}_2$  пропорційні, то ці вектори колінеарні.

**Приклад 7.** Задані точки  $M_1(3; 3; -2)$  та  $M_2(0; 1; 4)$ . Знайти:

а) координати, довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$  ;

б) координати точки  $M$  , яка ділить відрізок  $M_1M_2$  у відношенні

$$\left| \overrightarrow{M_1M} \right| : \left| \overrightarrow{MM_2} \right| = 2 : 3.$$

### Розв'язання

а)  $M_1M_2 = (0-3; 1-3; 4-(-2)) = (-3; -2; 6)$ ,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 6^2} = 7.$$

$$\cos\alpha = \frac{-3}{7}, \quad \cos\beta = \frac{-2}{7}, \quad \cos\alpha = \frac{6}{7}.$$

б) Координати точки  $M(x; y; z)$  знайдемо за формулами

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Маємо  $\lambda = \frac{2}{3}$ ,  $M_1(3; 3; -2)$ ,  $M_2(0; 1; 4)$ . Тоді

$$x_M = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot 0}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9}{5}, \quad y_M = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot 1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{11}{5}, \quad z_M = \frac{-2 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Отже,  $M\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right)$ .

**Приклад 8.** Задано:  $|\vec{a}| = 11$ ;  $|\vec{b}| = 23$ ;  $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$ . Визначити  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

**Розв'язання.**  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$ ,

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Додамо співвідношення

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 \quad \text{звідки}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2,$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 23^2 - 30^2 = 2(11^2 + 23^2) - 30^2,$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2(11^2 + 23^2) - 30^2} = \sqrt{2(121 + 529) - 900} = \sqrt{400},$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 20.$$

**Приклад 9.** У трикутнику з вершинами  $A(0; 2; -1)$ ,  $B(1; 5; 4)$  і  $C(3; 8; 2)$  знайти кут  $\varphi$  при вершині  $A$ .

**Розв'язання.** Шуканий кут  $\varphi$  – це кут між векторами  $\vec{AB} = (1;3;5)$  та  $\vec{AC} = (3;6;3)$ . Тому  $\cos\varphi = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2}} = \frac{36}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{54}}$ ;

$$\varphi = \arccos \frac{36}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{54}}.$$

**Приклад 10.** Знайти модуль векторного добутку  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , якщо  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ;  $|\vec{b}| = 4$ ;  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

**Розв'язання**

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3} \cdot 4 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$

**Приклад 11.** Знайти векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ , якщо  $\vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$

**Розв'язання**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 11 & -10 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \vec{k} = 38\vec{i} - 26\vec{j} - 21\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (38; -26; -21).$$

**Приклад 12.** Знайти площу трикутника, заданого вершинами  $A(-1;2;2)$ ;  $B(-2;3;3)$ ;  $C(0;4;2)$ .

**Розв'язання**

Площа трикутника  $ABC$  дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{AB}$  і  $\vec{AC}$ , тобто,  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ . Обчисли-

мо векторний добуток

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$\text{Шукана площа } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

**Приклад 13.** Задано вектори  $\vec{a} = (1;2;1)$  і  $\vec{b} = (2;3;1)$ . Знайти:

а) кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) скалярний та векторний добутки векторів  $\vec{m} = (2\vec{a} - \vec{b})$  і  $\vec{n} = (\vec{a} + 2\vec{b})$ ;

в) площу паралелограма побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**Розв'язання**

а) довжина вектора  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  обчислюється за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

Напрявні косинуси вектора  $\vec{a}$  знайдемо за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Для вектора  $\vec{a} = (1;2;1)$  ( $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ )

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Для вектора  $\vec{b} = (2;3;1)$  ( $|\vec{b}| = \sqrt{14}$ )

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}; \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}; \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$

б) Для обчислення кута між векторами  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  і  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  скористаємося формулою  $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ , де

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

м;  $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{14}$ , тоді

$$\cos\varphi = \frac{9}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{6 \cdot 14}} = \frac{9}{\sqrt{84}} = \frac{9}{2\sqrt{21}} \text{ і } \varphi = \arccos \frac{9}{2\sqrt{21}}.$$

в) Знайдемо скалярний добуток векторів  $\vec{m} \cdot \vec{n} = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ .  
Розкриємо дужки

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Враховуючи,  $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{14}$  і  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$  маємо:

$$(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 2(\sqrt{6})^2 - 2(\sqrt{14})^2 + 9 = 2 \cdot 6 - 2 \cdot 14 + 9 = -7.$$

Знайдемо векторний добуток векторів  $\vec{m} \times \vec{n} = (2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$ .

Оскільки  $\vec{a} = (1; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 3; 1)$ , то

$$\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} = (2; 4; 2) - (2; 3; 1) = (0; 1; 1),$$

$$\vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b} = (1; 2; 1) + (4; 6; 2) = (5; 8; 3).$$

Тоді

$$\vec{m} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \vec{k} = -5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

г) площа паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  і  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , дорівнює модулю векторного добутку цих векторів

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \text{ де } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \text{ Знайдемо векторний добуток}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (2-3)\vec{i} - (1-2)\vec{j} + (3-4)\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \text{ кв. од.}$$

**Приклад 14.** Знайти висоту  $CD$  трикутника  $ABC$ , якщо його вершинами є точки:  $A(-3; 2)$ ,  $B(-5; -2)$ ,  $C(3; 2)$ .

**Розв'язання**

Площа трикутника  $ABC$  дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{AB}$  і  $\vec{AC}$ , тобто,  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ . З іншого

боку, площа трикутника дорівнює  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|$ , де  $|\vec{CD}|$  – висота  $\Delta ABC$ .

Оскільки трикутник заданий на площині, то третя координата векторів  $\vec{AB}$  і  $\vec{AC}$  дорівнює нулю.  $\vec{AB} = (-2; -4; 0)$ ,  $\vec{AC} = (6; 0; 0)$ . Обчислимо векторний добуток

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 24\vec{k} = 24\vec{k}.$$

$$\text{Шукана площа } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(24)^2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ кв. од.}$$

Із формули  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|$  визначаємо довжину висоти  $|\vec{CD}|$ :

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$|\vec{CD}| = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{|\vec{AB}|} = \frac{2 \cdot 12}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

**Приклад 15.** Встановити чи компланарні вектори

$$\vec{a} = (3; 2; 2), \vec{b} = (1; -1; 3), \vec{c} = (1; 9; -1),$$

**Розв'язання**

Знайдемо мішаний добуток заданих векторів

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 6 + 18 + 2 + 2 - 81 = -50 \neq 0.$$

Оскільки  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$ , то задані вектори не компланарні.

**Приклад 16.** Визначити, якою трійкою (правою, чи лівою) є трійка  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , якщо:

а)  $\vec{a} = (3; -2; -1), \vec{b} = (2; -3; 1), \vec{c} = (1; -2; -3),$

б)  $\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (2; 1; 1), \vec{c} = (1; 1; 2).$

**Розв'язання**

а)

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{cases} I \text{ р.} + II \text{ р.} \\ III \text{ р.} + 3II \text{ р.} \end{cases} = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 7 & -11 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Оскільки  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 20 > 0$ , то трійка права.

$$\text{б) } \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{cases} I \text{ p.} - III \text{ p.} \\ II \text{ p.} - 2I \text{ p.} \end{cases} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Оскільки  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -4 < 0$ , то трійка ліва.

**Приклад 17.** Дано вершини піраміди  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(3; 0; -2)$ ,  $C(5; 2; 7)$ ,  $D(-6; -5; 8)$ . Знайти довжину висоти піраміди, опущеної з вершини  $D$ .

**Розв'язання**

Об'єм піраміди дорівнює

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} H = \frac{1}{6} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|.$$

$$\overline{AB} = (3-1; 0-2; -2-1) = (2; -2; -3),$$

$$\overline{AC} = (5-1; 2-2; 7-1) = (4; 0; 6),$$

$$\overline{AD} = (-6-1; -5-2; 8-1) = (-7; -7; 7).$$

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (-7) \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{7}{3} \cdot (-22) = \frac{154}{3} \text{ куб. од.} \end{aligned}$$

Знайдемо площу основи піраміди  $S_{\Delta ABC}$  за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -12\vec{i} + 24\vec{j} + 8\vec{k}.$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + 24^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{28}{2} = 14 \text{ кв. од.}$$

Підставимо всі відомі параметри у формулу  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} H$ , звідки отримаємо

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{154}{3}}{14} = \frac{154}{14} = 11 \text{ од.}$$

**Приклад 18.** Об'єм піраміди  $V = 5$ , три її вершини лежать в точках  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(3; 0; 1)$ ,  $C(2; -1; 3)$ . Знайти координати четвертої вершини  $D$ , якщо відомо, що вона лежить на осі  $Oy$ .

### Розв'язання

Оскільки точка  $D$  лежить на осі  $Oy$ , то її координати мають вигляд  $(0; y; 0)$ . Знайдемо координати векторів  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ :  $\overline{AB} = (1; -1; 2)$ ,  $\overline{AC} = (0; -2; 4)$ ,  $\overline{AD} = (-2; y-1; 1)$ . Обчислимо об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$|-2 + 8 - 8 - 4(y-1)| = 30; \quad |-2 - 4y + 4| = 30; \quad |2 - 4y| = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 - 4y > 0, \\ 2 - 4y = 30, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - 4y < 0, \\ -2 + 4y = 30, \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y < \frac{1}{2}, \\ y = -7, \end{cases} \\ \begin{cases} y > \frac{1}{2}, \\ y = 8. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, отримали дві точки, які лежать на осі  $Oy$   $D_1(0; -7; 0)$  і  $D_2(0; 8; 0)$ .

### Індивідуальні завдання

**Завдання 1.** Задані точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  та  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Знайти:

- а) координати, довжину та напрямні косинуси вектора  $\overline{M_1M_2}$ ;  
 б) координати точки  $M$ , яка ділить відрізок  $M_1M_2$  у відношенні

$$|\overline{M_1M}| : |\overline{MM_2}| = m : n.$$

1.  $M_1 = (2; 1; 8)$ ,  $M_2 = (-3; 4; -2)$ ,  $m : n = 3 : 2$ .
2.  $M_1 = (-1; 1; 2)$ ,  $M_2 = (3; 5; 7)$ ,  $m : n = 2 : 3$ .
3.  $M_1 = (5; -1; 2)$ ,  $M_2 = (4; -4; -1)$ ,  $m : n = 4 : 3$ .
4.  $M_1 = (-4; 1; 3)$ ,  $M_2 = (6; 1; 4)$ ,  $m : n = 2 : 5$ .
5.  $M_1 = (6; 1; 0)$ ,  $M_2 = (-5; 3; -2)$ ,  $m : n = 3 : 1$ .
6.  $M_1 = (-1; 1; -2)$ ,  $M_2 = (2; 5; 0)$ ,  $m : n = 1 : 3$ .
7.  $M_1 = (0; -1; -6)$ ,  $M_2 = (4; 1; 1)$ ,  $m : n = 5 : 3$ .

- |     |                       |                      |              |
|-----|-----------------------|----------------------|--------------|
| 8.  | $M_1 = (4; -1; 3),$   | $M_2 = (3; 1; -2),$  | $m:n = 5:1.$ |
| 9.  | $M_1 = (1; 1; 1),$    | $M_2 = (-3; 3; -2),$ | $m:n = 5:4.$ |
| 10. | $M_1 = (-1; -1; 2),$  | $M_2 = (-3; 5; 1),$  | $m:n = 4:3.$ |
| 11. | $M_1 = (3; -1; -5),$  | $M_2 = (4; -4; -4),$ | $m:n = 6:1.$ |
| 12. | $M_1 = (8; 1; -5),$   | $M_2 = (6; -1; 2),$  | $m:n = 2:5.$ |
| 13. | $M_1 = (2; 1; 0),$    | $M_2 = (-5; 5; -2),$ | $m:n = 3:1.$ |
| 14. | $M_1 = (-1; 1; -7),$  | $M_2 = (-2; 5; -9),$ | $m:n = 5:2.$ |
| 15. | $M_1 = (10; -1; -3),$ | $M_2 = (1; 1; 1),$   | $m:n = 2:7.$ |
| 16. | $M_1 = (1; -1; -3),$  | $M_2 = (-3; 0; 9),$  | $m:n = 7:2.$ |
| 17. | $M_1 = (-2; 1; 5),$   | $M_2 = (3; 1; -2),$  | $m:n = 3:7.$ |
| 18. | $M_1 = (0; -4; 3),$   | $M_2 = (-3; 6; 7),$  | $m:n = 5:6.$ |
| 19. | $M_1 = (-1; -1; 11),$ | $M_2 = (4; -1; 8),$  | $m:n = 4:3.$ |
| 20. | $M_1 = (-6; 1; 4),$   | $M_2 = (5; 1; -2),$  | $m:n = 4:5.$ |
| 21. | $M_1 = (3; 1; 10),$   | $M_2 = (1; -3; -2),$ | $m:n = 3:5.$ |
| 22. | $M_1 = (-1; 9; -2),$  | $M_2 = (8; 5; 5),$   | $m:n = 1:4.$ |
| 23. | $M_1 = (5; -1; -6),$  | $M_2 = (-4; 1; 5),$  | $m:n = 5:4.$ |
| 24. | $M_1 = (9; -1; 3),$   | $M_2 = (3; 8; -2),$  | $m:n = 6:5.$ |
| 25. | $M_1 = (2; 1; 2),$    | $M_2 = (-3; -7; 2),$ | $m:n = 7:4.$ |
| 26. | $M_1 = (-1; -1; -2)$  | $M_2 = (-3; 2; 5),$  | $m:n = 2:3.$ |
| 27. | $M_1 = (3; -1; 5),$   | $M_2 = (1; -4; -4),$ | $m:n = 1:6.$ |
| 28. | $M_1 = (7; -1; -4),$  | $M_2 = (0; -1; -8),$ | $m:n = 3:5.$ |
| 29. | $M_1 = (-2; 1; 6),$   | $M_2 = (-5; 3; -2),$ | $m:n = 3:2.$ |
| 30. | $M_1 = (-8; 1; -4),$  | $M_2 = (-2; 3; 1),$  | $m:n = 5:3.$ |

**Завдання 2.** Перевірити колінеарність векторів  $\vec{c}_1$  і  $\vec{c}_2$ , побудованих на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

- |    |                         |                          |                                    |                                    |
|----|-------------------------|--------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. | $\vec{a} = (-2; 3; 1);$ | $\vec{b} = (3; -2; -5),$ | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b},$  | $\vec{c}_2 = \vec{b} - 4\vec{a}.$  |
| 2. | $\vec{a} = (1; -1; 5);$ | $\vec{b} = (0; 2; -1),$  | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b},$ | $\vec{c}_2 = -\vec{b} - \vec{a}.$  |
| 3. | $\vec{a} = (3; 4; 6);$  | $\vec{b} = (-5; -2; 3),$ | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 4\vec{b},$ | $\vec{c}_2 = -4\vec{a} + \vec{b}.$ |
| 4. | $\vec{a} = (7; 2; 1);$  | $\vec{b} = (1; -1; 1),$  | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 5\vec{b},$ | $\vec{c}_2 = 2\vec{b} - 3\vec{a}.$ |
| 5. | $\vec{a} = (1; 1; 2);$  | $\vec{b} = (3; 6; 2).$   | $\vec{c}_1 = \vec{a} - 2\vec{b},$  | $\vec{c}_2 = -\vec{a} - \vec{b}.$  |

- |     |                          |                          |                                     |                                    |
|-----|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 6.  | $\vec{a} = (2; -2; 2);$  | $\vec{b} = (-1; -3; 3).$ | $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + \vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 4\vec{b}.$ |
| 7.  | $\vec{a} = (-1; -2; 5);$ | $\vec{b} = (1; 1; 2).$   | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 3\vec{a}.$ |
| 8.  | $\vec{a} = (-3; -6; 9);$ | $\vec{b} = (1; 2; -3).$  | $\vec{c}_1 = -3\vec{a} + 3\vec{b},$ | $\vec{c}_2 = \vec{b} - \vec{a}.$   |
| 9.  | $\vec{a} = (-3; 6; 1);$  | $\vec{b} = (2; 1; 3).$   | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 4\vec{b},$  | $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b}.$  |
|     |                          | $\vec{b} = (7; 1; -1).$  | $\vec{c}_1 = -2\vec{a} + 5\vec{b},$ | $\vec{c}_2 = -2\vec{b} - 3\vec{a}$ |
| 10. | $\vec{a} = (0; 1; 2);$   |                          |                                     | .                                  |
| 11. | $\vec{a} = (7; -1; -2);$ | $\vec{b} = (1; -1; 2).$  | $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 4\vec{a} - \vec{b}.$  |
| 12. | $\vec{a} = (-2; -2; 5);$ | $\vec{b} = (-1; 5; -1).$ | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b},$  | $\vec{c}_2 = -3\vec{a} + 2\vec{b}$ |
| 13. | $\vec{a} = (2; 1; -1);$  | $\vec{b} = (3; -3; 4).$  | $\vec{c}_1 = -3\vec{a} - \vec{b},$  | $\vec{c}_2 = \vec{b} + 2\vec{a}.$  |
| 14. | $\vec{a} = (2; 5; 1);$   | $\vec{b} = (4; 1; 2).$   | $\vec{c}_1 = \vec{a} - 2\vec{b},$   | $\vec{c}_2 = \vec{b} + \vec{a}.$   |
| 15. | $\vec{a} = (3; 6; -2);$  | $\vec{b} = (5; -2; 1).$  | $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 4\vec{b},$  | $\vec{c}_2 = 2\vec{a} + \vec{b}.$  |
| 18. | $\vec{a} = (-5; 10; 5);$ | $\vec{b} = (2; -4; -2).$ | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b},$  | $\vec{c}_2 = 4\vec{b} + 2\vec{a}.$ |
| 18. | $\vec{a} = (1; 7; 3);$   | $\vec{b} = (3; 5; -1).$  | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}.$  |
| 19. | $\vec{a} = (-4; 1; 1);$  | $\vec{b} = (2; 6; 1).$   | $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b},$   | $\vec{c}_2 = \vec{b} - \vec{a}.$   |
| 20. | $\vec{a} = (-2; 1; -1);$ | $\vec{b} = (0; -5; -3).$ | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 4\vec{b},$  | $\vec{c}_2 = \vec{a} + \vec{b}.$   |
| 21. | $\vec{a} = (2; 3; 1);$   | $\vec{b} = (4; 6; 2).$   | $\vec{c}_1 = -2\vec{a} + 5\vec{b},$ | $\vec{c}_2 = -2\vec{b} - 3\vec{a}$ |
| 22. | $\vec{a} = (4; 3; 1);$   | $\vec{b} = (8; 6; 2).$   | $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 4\vec{a} - \vec{b}.$  |
| 23. | $\vec{a} = (3; 2; 2);$   | $\vec{b} = (4; 1; 1).$   | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b},$  | $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$ |
| 24. | $\vec{a} = (-1; 2; 3);$  | $\vec{b} = (3; -6; -9).$ | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}.$ |
| 25. | $\vec{a} = (3; -1; 2);$  | $\vec{b} = (-3; 1; -2).$ | $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b},$   | $\vec{c}_2 = \vec{b} - \vec{a}.$   |
| 26. | $\vec{a} = (2; 2; 3);$   | $\vec{b} = (4; 4; 6).$   | $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - \vec{b},$   | $\vec{c}_2 = \vec{a} + \vec{b}.$   |
| 27. | $\vec{a} = (-3; 0; -5);$ | $\vec{b} = (-1; 2; 1).$  | $\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b},$  | $\vec{c}_2 = 2\vec{b} - 3\vec{a}.$ |
| 28. | $\vec{a} = (1; -2; 4);$  | $\vec{b} = (3; 2; 1).$   | $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 4\vec{a} - \vec{b}.$  |
| 29. | $\vec{a} = (4; -2; 6);$  | $\vec{b} = (-2; 1; -3).$ | $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + \vec{b},$   | $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$ |

**Завдання 3.** Задані вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Знайти:

а) кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

б) скалярний добуток векторів  $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}$  і  $\vec{n} = \vec{b} - 2\vec{a}$ .

в) векторний добуток векторів  $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ ,  $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .

- |    |                         |                         |
|----|-------------------------|-------------------------|
| 1. | $\vec{a} = (2; 3; 1);$  | $\vec{b} = (3; -2; 5).$ |
| 2. | $\vec{a} = (1; -1; 3);$ | $\vec{b} = (4; 2; -1).$ |
| 3. | $\vec{a} = (3; 4; 0);$  | $\vec{b} = (1; -2; 3).$ |

- |                              |                          |
|------------------------------|--------------------------|
| 4. $\vec{a} = (5; -1; 1);$   | $\vec{b} = (1; 1; 1).$   |
| 5. $\vec{a} = (1; 1; 2);$    | $\vec{b} = (3; 1; 2).$   |
| 6. $\vec{a} = (2; 2; 2);$    | $\vec{b} = (-1; -3; 1).$ |
| 7. $\vec{a} = (-1; 2; 5);$   | $\vec{b} = (0; 1; 2).$   |
| 8. $\vec{a} = (-3; 0; 2);$   | $\vec{b} = (1; 2; 1).$   |
| 9. $\vec{a} = (3; 4; 1);$    | $\vec{b} = (0; 1; 3).$   |
| 10. $\vec{a} = (1; 1; 2);$   | $\vec{b} = (2; 1; -1).$  |
| 11. $\vec{a} = (3; -1; -2);$ | $\vec{b} = (4; 1; 1).$   |
| 12. $\vec{a} = (2; -2; 1);$  | $\vec{b} = (-1; 4; -1).$ |
| 13. $\vec{a} = (1; 1; -1);$  | $\vec{b} = (2; -3; 4).$  |
| 14. $\vec{a} = (2; 3; 1);$   | $\vec{b} = (4; 0; 2).$   |
| 15. $\vec{a} = (3; 2; -2);$  | $\vec{b} = (1; -2; 1).$  |
| 16. $\vec{a} = (3; 4; 5);$   | $\vec{b} = (2; 1; 0).$   |
| 17. $\vec{a} = (-2; -1; 1);$ | $\vec{b} = (2; 1; 3).$   |
| 18. $\vec{a} = (1; 3; 2);$   | $\vec{b} = (-1; 4; 0).$  |
| 19. $\vec{a} = (-1; 1; 3);$  | $\vec{b} = (3; 2; -1).$  |
| 20. $\vec{a} = (4; 1; 1);$   | $\vec{b} = (2; 1; 1).$   |
| 21. $\vec{a} = (2; 1; -1);$  | $\vec{b} = (0; -5; 3).$  |
| 22. $\vec{a} = (5; 3; 1);$   | $\vec{b} = (0; 1; 2).$   |
| 23. $\vec{a} = (4; -3; 1);$  | $\vec{b} = (1; 1; 2).$   |
| 24. $\vec{a} = (3; 2; 2);$   | $\vec{b} = (4; 1; 1).$   |
| 25. $\vec{a} = (1; 2; 3);$   | $\vec{b} = (3; 1; 2).$   |
| 26. $\vec{a} = (3; 1; 2);$   | $\vec{b} = (3; 2; 1).$   |
| 27. $\vec{a} = (2; 2; 3);$   | $\vec{b} = (3; 1; 1).$   |
| 28. $\vec{a} = (3; 0; -5);$  | $\vec{b} = (-1; 2; 1).$  |
| 29. $\vec{a} = (1; -2; 4);$  | $\vec{b} = (3; 2; 1).$   |
| 30. $\vec{a} = (4; -2; 1);$  | $\vec{b} = (2; 1; -2).$  |

**Завдання 4.** Дано координати точок  $A, B, C, D$ . Знайти:

- площу  $\triangle ABC$  і його висоту, опущену з вершини  $C$ ;
- перевірити, чи компланарні вектори  $\overline{AB}, \overline{AC}$  і  $\overline{AD}$ . Якщо вектори не компланарні, то знайти:

в) довжину висоти піраміди  $ABCD$ , опущену з вершини  $D$ .

1.  $A(0;1;2)$ ,  $B(1;3;1)$ ,  $C(-2;5;-3)$ ,  $D(-3;4;4)$ .
2.  $A(-2;2;2)$ ,  $B(0;2;4)$ ,  $C(-1;4;4)$ ,  $D(0;4;3)$ .
3.  $A(2;1;3)$ ,  $B(0;3;4)$ ,  $C(1;3;4)$ ,  $D(2;2;4)$ .
4.  $A(-2;4;0)$ ,  $B(0;4;2)$ ,  $C(-2;0;1)$ ,  $D(-1;1;-1)$ .
5.  $A(-1;-1;2)$ ,  $B(-1;4;2)$ ,  $C(1;4;4)$ ,  $D(0;2;2)$ .
6.  $A(-1;3;2)$ ,  $B(-1;5;4)$ ,  $C(1;5;2)$ ,  $D(1;3;4)$ .
7.  $A(1;3;-1)$ ,  $B(2;4;-1)$ ,  $C(4;4;-1)$ ,  $D(0;5;1)$ .
8.  $A(0;1;1)$ ,  $B(2;3;0)$ ,  $C(2;2;1)$ ,  $D(1;3;3)$ .
9.  $A(3;2;1)$ ,  $B(1;0;-1)$ ,  $C(3;4;-1)$ ,  $D(2;4;1)$ .
10.  $A(2;0;2)$ ,  $B(-1;3;5)$ ,  $C(2;2;3)$ ,  $D(0;4;2)$ .
11.  $A(0;1;-1)$ ,  $B(2;4;3)$ ,  $C(5;-1;0)$ ,  $D(1;3;2)$ .
12.  $A(2;2;0)$ ,  $B(4;3;2)$ ,  $C(1;4;1)$ ,  $D(4;1;2)$ .
13.  $A(-1;2;-1)$ ,  $B(-4;3;2)$ ,  $C(-1;-1;-2)$ ,  $D(2;0;2)$ .
14.  $A(-3;-1;3)$ ,  $B(-1;-3;5)$ ,  $C(-1;1;1)$ ,  $D(-1;-3;1)$ .
15.  $A(-3;3;1)$ ,  $B(-1;0;2)$ ,  $C(3;-3;3)$ ,  $D(-1;2;3)$ .
16.  $A(0;-1;2)$ ,  $B(4;5;-2)$ ,  $C(2;3;6)$ ,  $D(3;2;3)$ .
17.  $A(-2;1;4)$ ,  $B(-1;3;3)$ ,  $C(1;-3;5)$ ,  $D(-3;5;-7)$ .
18.  $A(1;1;1)$ ,  $B(3;-3;4)$ ,  $C(1;-1;5)$ ,  $D(4;0;6)$ .
19.  $A(2;1;1)$ ,  $B(4;0;2)$ ,  $C(5;3;3)$ ,  $D(3;-1;2)$ .
20.  $A(3;-1;2)$ ,  $B(4;1;5)$ ,  $C(5;-2;1)$ ,  $D(4;2;6)$ .
21.  $A(0;2;1)$ ,  $B(-2;5;1)$ ,  $C(-2;2;7)$ ,  $D(0;5;9)$ .
22.  $A(1;1;1)$ ,  $B(-1;4;1)$ ,  $C(-1;1;7)$ ,  $D(1;4;9)$ .
23.  $A(1;2;0)$ ,  $B(-10;5;0)$ ,  $C(-1;2;6)$ ,  $D(1;5;8)$ .
24.  $A(0;1;0)$ ,  $B(-2;4;0)$ ,  $C(-2;1;6)$ ,  $D(0;4;8)$ .
25.  $A(1;2;1)$ ,  $B(1;-6;1)$ ,  $C(1;3;-7)$ ,  $D(0;6;9)$ .
26.  $A(0;1;1)$ ,  $B(-2;4;1)$ ,  $C(-2;1;7)$ ,  $D(0;4;9)$ .
27.  $A(2;3;-4)$ ,  $B(5;7;9)$ ,  $C(2;-2;4)$ ,  $D(13;1;2)$ .
28.  $A(3;1;0)$ ,  $B(0;7;2)$ ,  $C(-1;0;-5)$ ,  $D(4;1;5)$ .
29.  $A(0;0;2)$ ,  $B(3;0;5)$ ,  $C(1;1;0)$ ,  $D(4;1;2)$ .
30.  $A(7;-1;-3)$ ,  $B(-3;8;5)$ ,  $C(-1;3;8)$ ,  $D(3;7;1)$ .

### Завдання для самостійної роботи «Елементи векторної алгебри»

**Завдання 1.** Задані точки  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Знайти:

- а) скалярний добуток векторів  $\overline{AB}$  і  $\overline{BC}$  та кут між ними;
- б) проєкцію вектора  $\overline{BC}$  на вектор  $\overline{AB}$ ;
- в) координати точки  $M$ , яка ділить відрізок  $AB$  у відношенні  $m:n$ .

1.	$A(2; 1),$	$B(-3; 4),$	$C(2; -5),$	$m : n = 3 : 2.$
2.	$A(-1; 1),$	$B(3; 5),$	$C(3; 3),$	$m : n = 2 : 3.$
3.	$A(5; -1),$	$B(4; -4),$	$C(2; 2),$	$m : n = 4 : 3.$
4.	$A(-4; 1),$	$B(6; 1),$	$C(4; 5),$	$m : n = 2 : 5.$
5.	$A(6; 1),$	$B(-5; 3),$	$C(4; -5),$	$m : n = 3 : 1.$
6.	$A(-1; 1),$	$B(2; 5),$	$C(2; 7),$	$m : n = 1 : 3.$
7.	$A(0; -1),$	$B(4; 1),$	$C(4; 7),$	$m : n = 5 : 3.$
8.	$A(4; -1),$	$B(3; 1),$	$C(2; 4),$	$m : n = 5 : 1.$
9.	$A(1; 1),$	$B(-3; 3),$	$C(4; 2;),$	$m : n = 5 : 4.$
10.	$A(-1; -1),$	$B(-3; 5),$	$C(-3; -4),$	$m : n = 4 : 3.$
11.	$A(3; -1),$	$B(4; -4),$	$C(1; 3),$	$m : n = 6 : 1.$
12.	$A(8; 1),$	$B(6; -1),$	$C(3; -4),$	$m : n = 2 : 5.$
13.	$A(2; 1),$	$B(-5; 5),$	$C(5; -2),$	$m : n = 3 : 1.$
14.	$A(-1; 1),$	$B(-2; 5),$	$C(2; 6),$	$m : n = 5 : 2.$
15.	$A(10; -1),$	$B(1; 1),$	$C(-1; -2),$	$m : n = 2 : 7.$
16.	$A(1; -1),$	$B(-3; 0),$	$C(1; -3),$	$m : n = 7 : 2.$
17.	$A(-2; 1),$	$B(3; 1),$	$C(4; 6),$	$m : n = 3 : 7.$
18.	$A(0; -4),$	$B(-3; 6),$	$C(2; -2;),$	$m : n = 5 : 6.$
19.	$A(-1; -1),$	$B(4; 1),$	$C(1; 4),$	$m : n = 4 : 3.$
20.	$A(-6; 1),$	$B(5; 1),$	$C(3; 2),$	$m : n = 4 : 5.$
21.	$A(3; 1),$	$B(1; -3),$	$C(5; -6),$	$m : n = 3 : 5.$
22.	$A(-1; 9),$	$B(8; 5),$	$C(1; -3),$	$m : n = 1 : 4.$
23.	$A(5; -1),$	$B(-4; 1),$	$C(4; 6),$	$m : n = 5 : 4.$
24.	$A(9; -1),$	$B(3; 8),$	$C(2; -2),$	$m : n = 6 : 5.$
25.	$A(2; 1),$	$B(-3; -7),$	$C(1; 4),$	$m : n = 7 : 4.$
26.	$A(-1; -1),$	$B(-3; 2),$	$C(3; 2),$	$m : n = 2 : 3.$
27.	$A(3; -1),$	$B(1; -4),$	$C(5; -6),$	$m : n = 1 : 6.$
28.	$A(7; -1),$	$B(0; -1),$	$C(6; 4),$	$m : n = 3 : 5.$
29.	$A(-2; 1),$	$B(-5; 3),$	$C(4; -4),$	$m : n = 3 : 2.$
30.	$A(-8; 1),$	$B(-2; 3),$	$C(2; 2),$	$m : n = 5 : 3.$

**Завдання 2.** Задано чотири вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ . Довести, що вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  утворюють базис та знайти координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

- $\vec{a}(2; -1; 11), \vec{b}(1; 1; 0), \vec{c}(0; 1; 2), \vec{d}(1; 0; 2)$  ;
- $\vec{a}(-2; 4; 7), \vec{b}(0; 1; 2), \vec{c}(1; 0; 1), \vec{d}(-1; 2; 4)$  ;
- $\vec{a}(11; -1; 4), \vec{b}(-1; -1; 2), \vec{c}(3; 2; 0), \vec{d}(-1; 1; 1)$  ;

4.  $\vec{a}(6;12;-1), \vec{b}(1;3;0), \vec{c}(2;-1;10), \vec{d}(0;-1;2)$  ;
5.  $\vec{a}(-1;7;0), \vec{b}(0;3;1), \vec{c}(1;-1;2), \vec{d}(2;-1;0)$  ;
6.  $\vec{a}(1;-4;4), \vec{b}(2;1;-1), \vec{c}(0;3;2), \vec{d}(1;-1;1)$  ;
7.  $\vec{a}(3;1;3), \vec{b}(2;1;0), \vec{c}(1;0;1), \vec{d}(4;2;1)$  ;
8.  $\vec{a}(-9;5;5), \vec{b}(4;1;1), \vec{c}(2;0;-3), \vec{d}(-1;2;1)$  ;
9.  $\vec{a}(8;9;4), \vec{b}(1;0;1), \vec{c}(0;-2;1), \vec{d}(1;3;0)$  ;
10.  $\vec{a}(-5;5;5), \vec{b}(-2;0;1), \vec{c}(1;3;-1), \vec{d}(0;4;1)$  ;
11.  $\vec{a}(23;-14;-30), \vec{b}(2;1;0), \vec{c}(1;-1;0), \vec{d}(-3;2;5)$  ;
12.  $\vec{a}(13;2;7), \vec{b}(5;1;0), \vec{c}(2;-1;3), \vec{d}(1;0;-1)$  ;
13.  $\vec{a}(-15;5;0), \vec{b}(0;5;1), \vec{c}(3;2;-1), \vec{d}(-1;1;0)$  ;
14.  $\vec{a}(-19;-1;7), \vec{b}(0;1;1), \vec{c}(-2;0;1), \vec{d}(3;1;0)$  ;
15.  $\vec{a}(-5;9;-13), \vec{b}(0;1;-2), \vec{c}(3;-1;1), \vec{d}(4;1;0)$  ;
16.  $\vec{a}(3;-3;4), \vec{b}(1;0;2), \vec{c}(0;1;7), \vec{d}(2;-1;4)$  ;
17.  $\vec{a}(-9;-8;-3), \vec{b}(1;4;1), \vec{c}(-3;2;0), \vec{d}(1;-1;2)$  ;
18.  $\vec{a}(3;3;-1), \vec{b}(3;1;0), \vec{c}(-1;2;1), \vec{d}(-1;0;2)$  ;
19.  $\vec{a}(8;1;12), \vec{b}(1;2;-1), \vec{c}(3;0;2), \vec{d}(-1;1;1)$  ;
20.  $\vec{a}(-1;7;-4), \vec{b}(-1;2;1), \vec{c}(2;0;3), \vec{d}(1;1;-1)$  ;
21.  $\vec{a}(3;1;8), \vec{b}(0;1;3), \vec{c}(1;2;-1), \vec{d}(2;0;-1)$  ;
22.  $\vec{a}(6;5;-14), \vec{b}(1;1;4), \vec{c}(0;-3;2), \vec{d}(2;1;-1)$  ;
23.  $\vec{a}(8;0;5), \vec{b}(2;0;1), \vec{c}(-1;0;1), \vec{d}(4;1;2)$  ;
24.  $\vec{a}(6;-1;7), \vec{b}(1;-2;0), \vec{c}(-1;1;3), \vec{d}(1;0;4)$  ;
25.  $\vec{a}(11;5;-3), \vec{b}(1;0;2), \vec{c}(-1;0;1), \vec{d}(2;5;-3)$  ;
26.  $\vec{a}(13;-5;4), \vec{b}(-2;5;0), \vec{c}(3;-2;-4), \vec{d}(1;3;4)$  ;
27.  $\vec{a}(-15;-10;5), \vec{b}(1;-1;1), \vec{c}(-5;-3;1), \vec{d}(2;-1;0)$  ;
28.  $\vec{a}(-3;2;-3), \vec{b}(4;-5;-3), \vec{c}(-2;3;1), \vec{d}(3;-1;2)$  ;
29.  $\vec{a}(0;11;-14), \vec{b}(4;5;-3), \vec{c}(-3;0;-2), \vec{d}(2;-1;4)$  ;
30.  $\vec{a}(14;14;20), \vec{b}(3;1;2), \vec{c}(-4;3;-1), \vec{d}(2;3;4)$  .

**Завдання 3.** Дано координати точок  $A, B, C, D$ . Знайти:

- а) скалярний та векторний добутки векторів  $\vec{n}_1 = 4\vec{AB} - 2\vec{AC}$  і  $\vec{n}_2 = 3\vec{AC} - 2\vec{AB}$ ;
- б) площу  $\Delta ABC$ ;

в) об'єм піраміди  $ABCD$  та довжину висоти, проведеної з вершини  $D$  на площину  $ABC$ .

1.  $A(0;1;2)$ ,  $B(1;3;1)$ ,  $C(-2;5;-3)$ ,  $D(-3;4;4)$ .
2.  $A(-2;2;2)$ ,  $B(0;2;4)$ ,  $C(-1;4;4)$ ,  $D(0;4;3)$ .
3.  $A(2;1;3)$ ,  $B(0;3;4)$ ,  $C(1;3;4)$ ,  $D(2;2;4)$ .
4.  $A(-2;4;0)$ ,  $B(0;4;2)$ ,  $C(-2;0;1)$ ,  $D(-1;1;-1)$ .
5.  $A(-1;-1;2)$ ,  $B(-1;4;2)$ ,  $C(1;4;4)$ ,  $D(0;2;2)$ .
6.  $A(-1;3;2)$ ,  $B(-1;5;4)$ ,  $C(1;5;2)$ ,  $D(1;3;4)$ .
7.  $A(1;3;-1)$ ,  $B(2;4;-1)$ ,  $C(4;4;-1)$ ,  $D(0;5;1)$ .
8.  $A(0;1;1)$ ,  $B(2;3;0)$ ,  $C(2;2;1)$ ,  $D(1;3;3)$ .
9.  $A(3;2;1)$ ,  $B(1;0;-1)$ ,  $C(3;4;-1)$ ,  $D(2;4;1)$ .
10.  $A(2;0;2)$ ,  $B(-1;3;5)$ ,  $C(2;2;3)$ ,  $D(0;4;2)$ .
11.  $A(0;1;-1)$ ,  $B(2;4;3)$ ,  $C(5;-1;0)$ ,  $D(1;3;2)$ .
12.  $A(2;2;0)$ ,  $B(4;3;2)$ ,  $C(1;4;1)$ ,  $D(4;1;2)$ .
13.  $A(-1;2;-1)$ ,  $B(-4;3;2)$ ,  $C(-1;-1;-2)$ ,  $D(2;0;2)$ .
14.  $A(-3;-1;3)$ ,  $B(-1;-3;5)$ ,  $C(-1;1;1)$ ,  $D(-1;-3;1)$ .
15.  $A(-3;3;1)$ ,  $B(-1;0;2)$ ,  $C(3;-3;3)$ ,  $D(-1;2;3)$ .
16.  $A(0;-1;2)$ ,  $B(4;5;-2)$ ,  $C(2;3;6)$ ,  $D(3;2;3)$ .
17.  $A(-2;1;4)$ ,  $B(-1;3;3)$ ,  $C(1;-3;5)$ ,  $D(-3;5;-7)$ .
18.  $A(1;1;1)$ ,  $B(3;-3;4)$ ,  $C(1;-1;5)$ ,  $D(4;0;6)$ .
19.  $A(2;1;1)$ ,  $B(4;0;2)$ ,  $C(5;3;3)$ ,  $D(3;-1;2)$ .
20.  $A(3;-1;2)$ ,  $B(4;1;5)$ ,  $C(5;-2;1)$ ,  $D(4;2;6)$ .
21.  $A(0;2;1)$ ,  $B(-2;5;1)$ ,  $C(-2;2;7)$ ,  $D(0;5;9)$ .
22.  $A(1;1;1)$ ,  $B(-1;4;1)$ ,  $C(-1;1;7)$ ,  $D(1;4;9)$ .
23.  $A(1;2;0)$ ,  $B(-10;5;0)$ ,  $C(-1;2;6)$ ,  $D(1;5;8)$ .
24.  $A(0;1;0)$ ,  $B(-2;4;0)$ ,  $C(-2;1;6)$ ,  $D(0;4;8)$ .
25.  $A(1;2;1)$ ,  $B(1;-6;1)$ ,  $C(1;3;-7)$ ,  $D(0;6;9)$ .
26.  $A(0;1;1)$ ,  $B(-2;4;1)$ ,  $C(-2;1;7)$ ,  $D(0;4;9)$ .
27.  $A(2;3;-4)$ ,  $B(5;7;9)$ ,  $C(2;-2;4)$ ,  $D(13;1;2)$ .
28.  $A(3;1;0)$ ,  $B(0;7;2)$ ,  $C(-1;0;-5)$ ,  $D(4;1;5)$ .
29.  $A(0;0;2)$ ,  $B(3;0;5)$ ,  $C(1;1;0)$ ,  $D(4;1;2)$ .
30.  $A(7;-1;-3)$ ,  $B(-3;8;5)$ ,  $C(-1;3;8)$ ,  $D(3;7;1)$ .

### **Зразок виконання самостійної роботи «Елементи векторної алгебри»**

**Завдання 1.** Задані точки  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Знайти:

- а) скалярний добуток векторів  $\overline{AB}$  і  $\overline{BC}$  та кут між ними;
- б) проєкцію вектора  $\overline{BC}$  на вектор  $\overline{AB}$ ;

в) координати точки  $M$ , яка ділить відрізок  $AB$  у відношенні  $m:n$ .  
Хай  $A(3; -2)$ ,  $B(-1; 4)$ ,  $C(2; -1)$ ,  $m:n = 2:3$ .

### Розв'язання

а) Знайдемо координати векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (-1 - 3; 4 - (-2)) = (-4; 6);$$

$$\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2; y_3 - y_2) = (2 - (-1); -1 - 4) = (3; -5);$$

отже  $\overrightarrow{AB} = (-4; 6)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (3; -5)$ .

За формулою скалярного добутку у координатній формі маємо

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \cdot 3 + 6 \cdot (-5) = -12 - 30 = -42.$$

Кут  $\varphi$  між векторами  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{BC}$  знайдемо, скориставшись означенням скалярного добутку  $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}|}$ .

Обчислимо довжини векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{BC}$ .

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52};$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

$$\text{Отже, } \cos \varphi = \frac{-42}{\sqrt{52} \sqrt{34}} = \frac{-42}{\sqrt{1768}} = \frac{-21}{\sqrt{442}},$$

$$\text{а кут } \varphi = \arccos\left(-\frac{21}{\sqrt{442}}\right).$$

б) Знайти проекцію вектора  $\overrightarrow{BC}$  на вектор  $\overrightarrow{AB}$ .

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}}\right).$$

Оскільки  $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{34}$ ;  $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{-21}{\sqrt{442}}$ , то

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{BC} = \sqrt{34} \cdot \left(-\frac{21}{\sqrt{442}}\right) = -\frac{21}{\sqrt{13}}.$$

в) Знайти координати точки  $M$ , яка ділить відрізок  $AB$  у відношенні  $m:n$ .

Координати точки  $M(x; y)$ , яка ділить відрізок  $AB$  у відношенні  $|AM|:|MB| = m:n$  знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad \left(\lambda = \frac{m}{n}\right).$$

Маємо  $\lambda = \frac{2}{3}$ ,  $A(3; -2)$ ,  $B(-1; 4)$ . Тоді

$$x = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3 - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{-2 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-2 + \frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Отже,  $M\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$ .

**Завдання 2.** Задано чотири вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ . Довести, що вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  утворюють базис та знайти координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі. Хай  $\vec{a} = (5; 4; 3)$ ,  $\vec{b} = (-3; -1; 2)$ ,  $\vec{c} = (-3; 1; 3)$ ,  $\vec{d} = (12; 9; 10)$ .

### Розв'язання

Вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  простору утворюють базис, якщо вони некопланарні (див. «Вектори у просторі»). За властивістю мішаного добутку векторів умова  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$  є достатньою для некопланарності відповідних векторів. Перевіримо її.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -31 \neq 0.$$

Отже, вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  утворюють у просторі базис. Це означає, що існує така трійка чисел  $(x; y; z)$  – координат вектора  $\vec{d}$  у базисі  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  – що

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}.$$

Щоб знайти коефіцієнти  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , подамо цю рівність у координатній

формі 
$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо систему лінійних рівнянь 
$$\begin{cases} 5x - 3y - 3z = 12 \\ 4x - y + z = 9 \\ 3x + 2y + 3z = 10 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -31; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -3 & -3 \\ 9 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -93;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 & -3 \\ 4 & 9 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -62; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 12 \\ 4 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 31.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-93}{-31} = 3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-62}{-31} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{31}{-31} = -1.$$

Отже,

$$\vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}.$$

**Відповідь.** (3; 2; -1) – координати вектора  $\vec{d}$  у базисі  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

**Завдання 3.** Дано координати точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Знайти:

а) скалярний та векторний добутки векторів  $\vec{n}_1 = 4\vec{AB} - 2\vec{AC}$  і  $\vec{n}_2 = 3\vec{AC} - 2\vec{AB}$ ;

б) площу  $\Delta ABC$ ;

в) об'єм піраміди  $ABCD$  та довжину висоти, проведеної з вершини  $D$  на площину  $ABC$ , якщо  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(3; 0; -2)$ ,  $C(5; 2; 7)$ ,  $D(-6; -5; 8)$ .

**Розв'язання**

а) Знайти скалярний та векторний добутки векторів  $\vec{n}_1 = 4\vec{AB} - 2\vec{AC}$  і  $\vec{n}_2 = 3\vec{AC} - 2\vec{AB}$ .

Обчислимо координати векторів  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ :

$$\vec{AB} = (3-1; 0-2; -2-1) = (2; -2; -3),$$

$$\vec{AC} = (5-1; 2-2; 7-1) = (4; 0; 6).$$

Знаходимо далі координати векторів  $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$

$$\vec{n}_1 = 4\vec{AB} - 2\vec{AC} = 4(2; -2; -3) - 2(4; 0; 6) = (8; -8; -12) - (8; 0; 12) = (0; -8; -24),$$

$$\vec{n}_2 = 3\vec{AC} - 2\vec{AB} = 3(4; 0; 6) - 2(2; -2; -3) = (12; 0; 18) - (4; -4; -6) = (8; 4; 24).$$

Скориставшись формулами, які виражають скалярний і векторний добутки векторів через їх координати, отримуємо

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (0; -8; -24) \cdot (8; 4; 24) = 0 \cdot 8 + (-8) \cdot 4 + (-24) \cdot 24 = -608;$$

$$[\vec{n}_1 \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -8 & -24 \\ 8 & 4 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -24 \\ 4 & 24 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -24 \\ 8 & 24 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = -96\vec{i} - 192\vec{j} + 64\vec{k} = (-96; -192; 64).$$

б) Знайти площу  $\Delta ABC$ .

Площа трикутника  $ABC$  дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ , тобто.  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC}]|$ . Оскільки  $\overrightarrow{AB} = (2; -2 \ -3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4; 0; 6)$ , то

$$[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -12\vec{i} + 24\vec{j} + 8\vec{k}.$$

$$|[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(-12)^2 + 24^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC}]| = \frac{28}{2} = 14 \text{ (од. кв.)}$$

в) Знайти об'єм піраміди  $ABCD$  та довжину висоти, проведеної з вершини  $D$  на площину  $ABC$ .

Позначимо  $V_{ABCD}$  – об'єм піраміди  $ABCD$ ,  $V_{нар}$  – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ . Тоді  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{нар}$ . За вла-

стивістю мішаного добутку маємо  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}|$ .

$\overrightarrow{AB} = (2; -2 \ -3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4; 0; 6)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (-6-1; -5-2; 8-1) = (-7; -7; 7)$ , то

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3} \text{ (од. куб.)}$$

З іншого боку  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} H$ , де  $H$  – висота піраміди, опущена з вершини  $D$ . Тоді

$$H = \frac{3 \cdot V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}}$$

Оскільки  $V_{ABCD} = \frac{154}{3}$  (од. куб.),  $S_{\Delta ABC} = 14$  (од. кв.), то

$$H = \frac{3 \cdot \frac{154}{3}}{14} = \frac{154}{14} = 11 \text{ (од.)}$$

**Відповідь.** а)  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -608$ ;  $[\vec{n}_1 \ \vec{n}_2] = (-96; -192; 64)$ ;

б)  $S_{\Delta ABC} = 14$  (од. кв.);

в)  $V_{ABCD} = \frac{154}{3}$  (од. куб.),  $H = 11$  (од.).

### 3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ЗАСОБАМИ MAPLE

► Чи може вектор утворювати з координатними осями кути  $\alpha = 60^0$ ,  $\beta = 120^0$ ,  $\gamma = 45^0$ ?

#### Розв'язання

Напрямні косинуси будь-якого вектора мають задовольняти умову  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Підставимо задані кути та перевіримо цю умову в MAPLE.

```
cos(alpha)^2+cos(beta)^2+cos(gamma)^2=1;
subs(alpha=60*Pi/180,beta=120*Pi/180,gamma=45*Pi/180,
%);
is(%);
```

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 &= 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 &= 1 \\ &\text{true} \end{aligned}$$

Оскільки рівність виконується, то такий вектор існує.

**Відповідь:** Так, вектор може утворювати з координатними осями кути  $\alpha = 60^0$ ,  $\beta = 120^0$ ,  $\gamma = 45^0$ .



Типовою задачею у векторній алгебрі є знаходження координат точки  $M$ , що ділить відрізок  $M_1M_2$  у заданому відношенні  $\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \alpha$ .

Створимо тренажер у середовищі Maple для автоматизованого розв'язання цієї задачі з поясненнями до кожного етапу.

```
restart:
SegmentDivider := proc (M1::vector,M2::vector,
L,illustration::boolean)#Поділ відрізка в даному відношенні
local
lambda,wb,wh,hh,OM,M1M,MM2,LM1M,LM1,LM,LM2,LMM2,gp1,x,y;
wb:=.01:wh:=.04:hh:=.05:
OM:=evalm((M1+L*M2)/(1+L)):
M1M:=evalm(OM-M1):MM2:=evalm(M2-OM):
LM1M:=plottools['arrow'](M1,M1M,wb,wh,hh,
color=black):LM1:=plottools['arrow']([0,0],M1,wb,
.08,hh,
```

```

color=black):LM:=plottools['arrow']([0,0],OM,      wb,
.08, hh, color=black):
LM2:=plottools['arrow']([0,0],  M2,  wb,  wh,  hh,
color=black):
LMM2:=plottools['arrow'](OM,  MM2,  wb,  wh,  hh,
color=black):
gp1:=PLOT(TEXT([- .3,-
.1], 'O', FONT(SYMBOL,12)), TEXT([M1[1]-
.4,2], 'M1', ALIGNLEFT, FONT(SYMBOL,12)), TEXT([evalf(OM[
1]),evalf(OM[2])+.15], 'M', ALIGNLEFT, FONT(SYMBOL,12)),
TEXT([M2[1]+.1,M2[2]+.1], 'M2', ALIGNRIGHT, FONT(SYMBOL,
12))):
printf(`Координати точки M знайдемо за формулами:`);

print(x[M]=(x[1]+lambda*x[2])/(1+lambda), y[M]=(y[1]+l
ambda*y[2])/(1+lambda));
printf(`Задано:`);
printf(`\nКоординати точок:`);
  print(M[1]=evalm(M1), M[2]=evalm(M2));
printf(`Величина відношення`);
print(lambda=abs(M1M)/abs(MM2), lambda=L);
printf(`- - - - -
- - - - -
- - - - -`);
printf(`\nКоординати точки M:`);
print(x[M]=(`` (M1[1])+L*`` (M2[1]))/(`` (1)+L), y[M]=(``
(M1[2])+L*`` (M2[2]))/(`` (1)+L));
print(M=evalm(OM));
if illustration then

plots['display'](LM1, LM1M, LM, LM2, LMM2, gp1, title="Поді
л відрізка в даному відношенні", axes=none)
end if:
end proc:

```

Продемонструємо результати застосування цієї процедури.

- Знайти координати точки  $M$ , яка ділить відрізок  $M_1M_2$  у відношенні

$$\left| \overline{M_1M} \right| : \left| \overline{MM_2} \right| = 2:3.$$

```

# Задаємо систему рівнянь
> OM1:=vector([0,2]):
OM2:=vector([2,0]):
OM1:=vector([3,3]):
OM2:=vector([0,1]):
lambda:=2/3:

```

**Segmentation (OM1, OM2, lambda, true) ;**

Координати точки М знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Задано:

Координати точок:

$$M_1 = [3, 3], M_2 = [0, 1]$$

Величина відношення

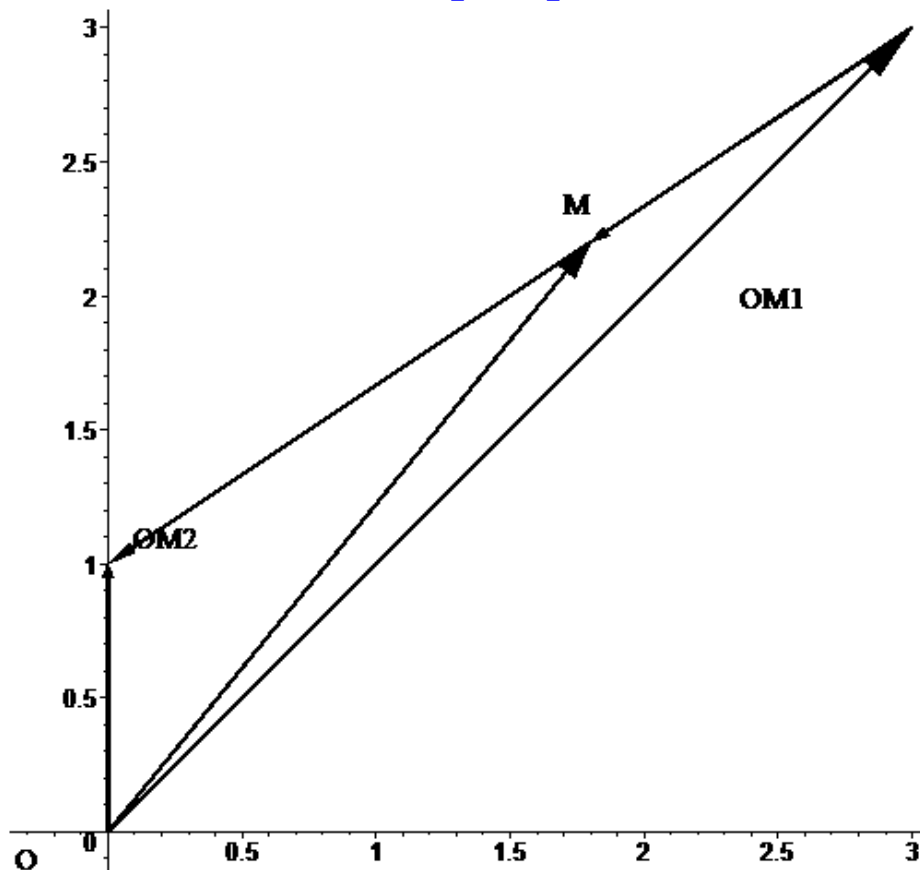
$$\lambda = \frac{|M1M|}{|MM2|}, \lambda = \frac{2}{3}$$

-----

- Координати точки М:

$$x_M = \frac{(3) + \frac{2}{3} (0)}{(1) + \frac{2}{3}}, y_M = \frac{(3) + \frac{2}{3} (1)}{(1) + \frac{2}{3}}$$

$$M = \left[ \frac{9}{5}, \frac{11}{5} \right]$$



Очевидно, що  $\alpha$  може бути будь-яким дійсним числом, окрім  $\alpha \neq 1$ . На рис. 2.24 проілюстровано різні варіанти розташування точки М, залежно від знака величини  $\alpha$  та умов:  $|\alpha| > 1, |\alpha| < 1$ . Аналіз отриманих резуль-

татів показує, що при  $\alpha > 0$  точка  $M$  розташована між точками  $M_1$  і  $M_2$  на відрізьку  $M_1M_2$ , а при  $\alpha < 0$  — поза його межами.

► Знайти векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ , якщо  $\vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ .

**Розв'язання**

```

r1:=[i,j,k]:
av:=[2,11,-10]:
bv:=[3,6,-2]:
a=sum(av[s]*r1[s],s=1..3);
b=sum(bv[s]*r1[s],s=1..3);
A:=matrix([r1,av,bv]):
a*x`*b=det(evalm(A));
evalm(A)=det(linalg[submatrix](A,[2,3],[2,3]))*i-
det(linalg[submatrix](A,[2,3],[1,3]))*j+det(linalg[su
bmatrix](A,[2,3],[1,2]))*k;
a*x`*b=linalg[det](linalg[submatrix](A,[2,3],[2,3]))*i-
linalg[det](linalg[submatrix](A,[2,3],[1,3]))*j+linalg
g[det](linalg[submatrix](A,[2,3],[1,2]))*k;

```

$$a = 2i + 11j - 10k$$

$$b = 3i + 6j - 2k$$

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 11 & -10 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 11 & -10 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} i - \det \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} j + \det \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} k$$

$$a \times b = 38i - 26j - 21k$$

Координати точки М знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Задано:

Координати точок:

$$M_1 = [0, 2], M_2 = [2, 0]$$

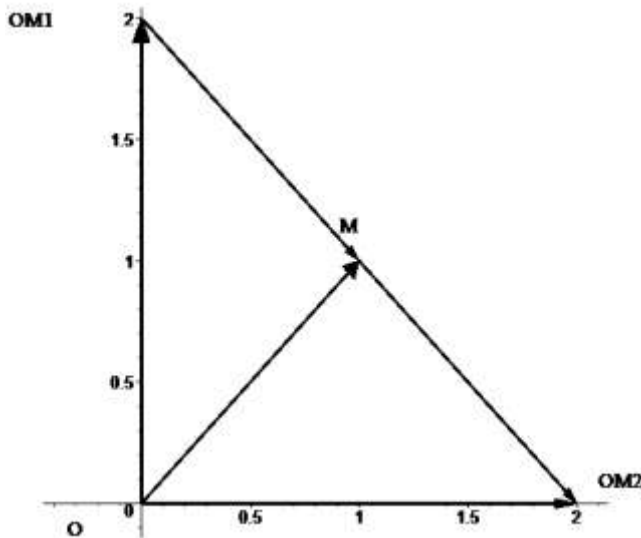
Величина відношення

$$\lambda = \frac{|M1M|}{|MM2|}, \lambda = 1$$

Координати точки М:

$$x_M = \frac{(0) + (2)}{(1) + 1}, y_M = \frac{(0) + (2)}{(1) + 1}$$

$$M = [1, 1]$$



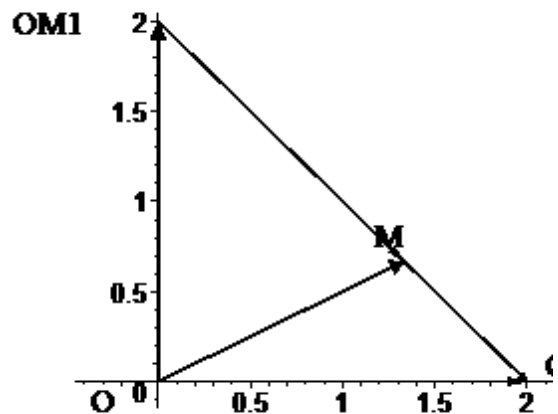
Величина відношення

$$\lambda = \frac{|M1M|}{|MM2|}, \lambda = 2$$

Координати точки М:

$$x_M = \frac{(0) + 2(2)}{(1) + 2}, y_M = \frac{(2) + 2(0)}{(1) + 2}$$

$$M = \left[ \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right]$$



2

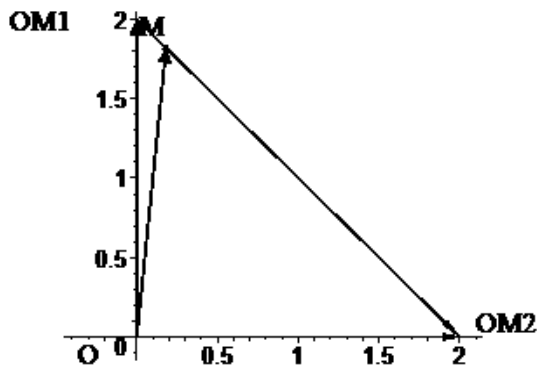
Рисунок 2.24, аркуш 1

$$\lambda = \frac{|MIM|}{|MM2|}, \lambda = \frac{1}{10}$$

Координати точки М:

$$x_M = \frac{(0) + \frac{1}{10}(2)}{(1) + \frac{1}{10}}, y_M = \frac{(2) + \frac{1}{10}(0)}{(1) + \frac{1}{10}}$$

$$M = \left[ \frac{2}{11}, \frac{20}{11} \right]$$

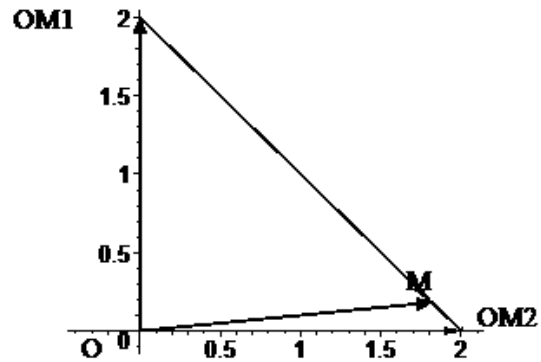


$$\lambda = \frac{|MIM|}{|MM2|}, \lambda = 10$$

Координати точки М:

$$x_M = \frac{(0) + 10(2)}{(1) + 10}, y_M = \frac{(2) + 10(0)}{(1) + 10}$$

$$M = \left[ \frac{20}{11}, \frac{2}{11} \right]$$

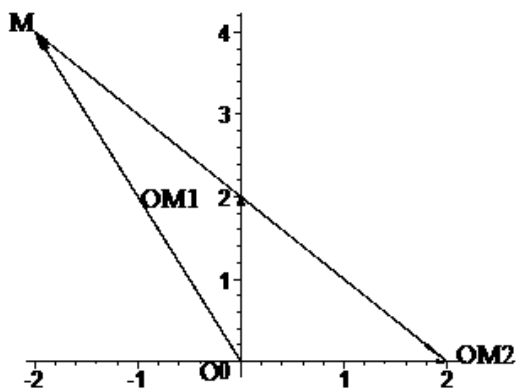


$$\lambda = \frac{|MIM|}{|MM2|}, \lambda = -\frac{1}{2}$$

Координати точки М:

$$x_M = \frac{(0) - \frac{1}{2}(2)}{(1) - \frac{1}{2}}, y_M = \frac{(2) - \frac{1}{2}(0)}{(1) - \frac{1}{2}}$$

$$M = [-2, 4]$$



$$\lambda = \frac{|MIM|}{|MM2|}, \lambda = -10$$

Координати точки М:

$$x_M = \frac{(0) - 10(2)}{(1) - 10}, y_M = \frac{(2) - 10(0)}{(1) - 10}$$

$$M = \left[ \frac{20}{9}, -\frac{2}{9} \right]$$

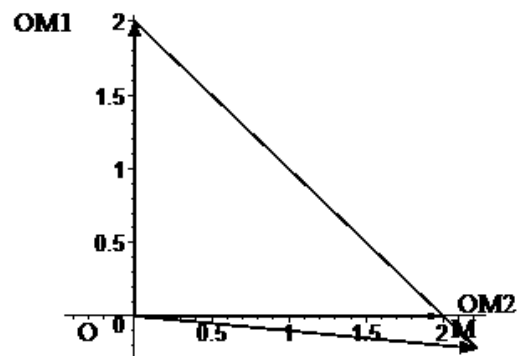


Рисунок 2.24, аркуш 2

► Знайти площу трикутника, заданого вершинами  $A(-1;2;2)$ ;  $B(-2;3;3)$ ;  $C(0;4;2)$ .

### Розв'язання

Площа трикутника  $ABC$  дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{AB}$  і  $\vec{AC}$ , тобто  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$ . Обчисли-

мо векторний добуток:

```
printf(`Знайдемо координати векторів`);
AB*(bv-av) [];
AC*(cv-av) [];
r1:=[i,j,k];
printf(`Обчислимо векторний добуток`);
ABC:=matrix([r1,bv-av,cv-av]);
#AB*`x`*AC=det(matrix([r1,bv-av,cv-av]));
AB*`x`*AC=det(evalm(ABC));
AB*`x`*AC=det(linalg[submatrix](ABC,[2,3],[2,3]))*i-
det(linalg[submatrix](ABC,[2,3],[1,3]))*j+det(linalg[
submatrix](ABC,[2,3],[1,2]))*k;
printf(`Шукана площа`);
S[Delta*ABC]=abs(AB*`x`*AC)/2;
S[Delta*ABC]=sqrt(`` (linalg[det](linalg[submatrix](AB
C,[2,3],[2,3]))^2+`` (-
linalg[det](linalg[submatrix](ABC,[2,3],[1,3]))^2+``
(linalg[det](linalg[submatrix](ABC,[2,3],[1,2]))^2)/
2;
S[Delta*ABC]=sqrt((linalg[det](linalg[submatrix](ABC,
[2,3],[2,3]))^2+(-
linalg[det](linalg[submatrix](ABC,[2,3],[1,3]))^2+(1
inalg[det](linalg[submatrix](ABC,[2,3],[1,2]))^2)/2;
Знайдемо координати векторів
AB(-1,1,1)
AC(1,2,0)
```

Обчислимо векторний добуток

$$AB \times AC = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB \times AC = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} i - \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} j + \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} k$$

Шукана площа

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |AB \times AC|$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-3)^2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. Денисенко Н. Л., Зражевська В. Ф. Вища математика. Елементи лінійної і векторної алгебри, аналітична геометрія : Практикум, Електрон. мереж. навч. вид. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 168 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/d90613a4-0079-47dd-bb6a-8f482ec9ee70/content> (дата звернення: 05.02.2025).
2. Лінійна алгебра. Збірник. Математика в технічному університеті. Том 1 / Алексєєва І. В., ГайдейВ. О., Диховичний О. О, Федорова Л. Б.. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 496 с. – Режим доступу:<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/24338/1/MTU1.pdf>
3. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О. В. Кузьма та ін.; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с. Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310>
4. Михалевич В. М. Вибіркові розділи з дисципліни «Вища математика» з Maple підтримкою / Розроблено в рамках проекту «Erasmus+ (СВНЕ) BioArt «Інноваційна мультидисциплінарна освітня програма зі штучних імплантів для біоінженерії для бакалаврів та магістрів» (586114-EPP- 1-2017- 1- ES- EPPKA2-СВНЕ- JP). Вінниця, ВНТУ, 2020. – Режим доступу: [http://bmi.vntu.edu.ua/bioart/program/НМ\\_lect.pdf](http://bmi.vntu.edu.ua/bioart/program/НМ_lect.pdf). Дата звернення: лютий 2025.
5. Хом'юк В. В., Хом'юк І. В. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум. Вінниця : ВНТУ, 2017. 118 с.
6. Найко Д. А., Краєвський В. О., Коломієць А. А. Вища математика: лінійна алгебра : навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2019. 161 с.

*Електронне навчальне видання*

**Володимир Маркусович Михалевич  
Юлія Анатоліївна Мейш**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА  
З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ.  
ЧАСТИНА 1.  
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ**

Підручник

Рукопис оформив *В. Михалевич*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 14.04.2025 р.  
Гарнітура Times New Roman.  
Зам. № P2025-065.

Видавець та виготовлювач  
Вінницький національний технічний університет,  
Редакційно-видавничий відділ.  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
**press.vntu.edu.ua;**  
Email: [rvv.vntu@gmail.com](mailto:rvv.vntu@gmail.com)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.