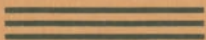
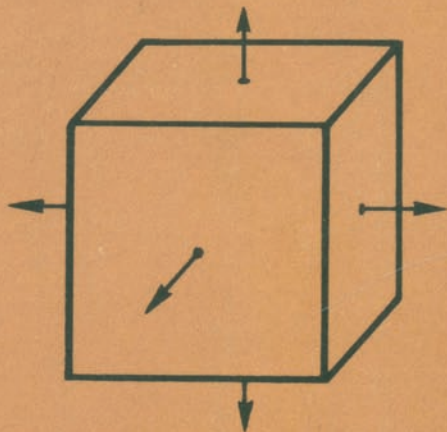


В. Г. Нехайчук,  
В. А. Матвійчук,  
Д. В. Чернілевський

# ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Книга 2 

# ОПІР МАТЕРІАЛІВ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ  
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ ВИЩОЇ ОСВІТИ

В.Г.Нахайчук, В.А.Матвійчук,  
Д.В.Чернілевський

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Книга 2

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

За редакцією Д.В.Чернілевського

Затверджено Міністерством освіти  
України як підручник для студентів  
технологічних спеціальностей вузів  
та механічних спеціальностей коледжів

Київ НМК ВО 1992

УДК 539.31.8/07/

Технічна механіка. Книга 2. Опір матеріалів / В.Г.Нахайчук, В.А.Матвійчук, Д.В.Чернілевський; За ред. Д.В.Чернілевського. - К.: НМК ВО, 1992. - 272 с.

Підручник написаний згідно з діючою програмою вивчення курсу опору матеріалів для технологічних спеціальностей вузів і є органічною складовою частиною комплексу "Технічна механіка" / "Теоретична механіка", "Опір матеріалів", "Теорія машин та механізмів", "Деталі машин"/. У кожному розділі, крім докладних теоретичних відомостей, наводяться різноманітні задачі з ґрунтовними поясненнями їх розв'язань, а також контрольні запитання й завдання. Завдяки цьому підручник може бути використаний студентами як стаціонарної, так і заочної форми навчання для самостійного опрацювання курсу опору матеріалів.

Призначається для студентів технологічних спеціальностей вузів та механічних спеціальностей коледжів.

Іл. 156. Табл. 6. Бібліогр.: 8 назв.

Робота над текстом розподілялася так: розд. 1 написав Д.В.Чернілевський, розд. 2, 3, 5-7 - В.Г.Нахайчук, розд. 4, 8 - спільно В.Г.Нахайчук і В.А.Матвійчук, розд. 9, 10 - В.А.Матвійчук, розд. II - спільно Д.В.Чернілевський і В.А.Матвійчук.

Рецензенти: Б.І.Ковальчук, д-р техн.наук, проф. /КНІ/  
Л.Г.Лазарева /Київський індустріально-педагогічний коледж/

ISBN 6-7763-1326-0



В.Г.Нахайчук, В.А.Матвійчук,  
Д.В.Чернілевський, 1992

## ВСТУП

За своєю специфікою діяльність інженера пов'язана побудовою і експлуатацією різноманітних машин, приладів, механізмів, будівель, які, сприймаючи різні навантаження, мають забезпечити цілий ряд вимог: бути досить надійними, працездатними, технологічними, економічними і мати естетичний вигляд. Вимога надійності, що оцінюється критеріями міцності, жорсткості, зносостійкості, з одного боку, та економічності з другого, суперечать одна одній. Дійсно, надійність конструкції вимагає збільшення розмірів, а її економічність в процесі виготовлення і експлуатації – мінімальної матеріаломісткості. Таку задачу неможливо розв'язати без допомоги спеціальної науки – опору матеріалів.

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість деталей машин, механізмів і споруд. Через розрахунок деталей вона дає можливість розраховувати міцні і красиві інженерні споруди, визначати їх надійні розміри.

Розрахувати конструкцію – це означає підібрати оптимальні форми і розміри її елементів і забезпечити міцність конструкції в цілому. Під міцністю розуміють здатність деталей машин та механізмів, не руйнуючись, чинити опір дії зовнішніх сил.

Проте, міцність конструкції ще не гарантує надійність останньої в цілому. Конструкція в цілому може не руйнуватись, але під дією зовнішніх сил деякі її елементи можуть так деформуватись, що подальше її використання стає неможливим. Отже, конструкцію необхідно розраховувати і на обмеження деформації її елементів під дією зовнішніх сил /інакше можуть виникнути перекося, заклинювання і таке інше, що виключить нормальну роботу машин/, тобто необхідно проводити розрахунки на жорсткість.

Жорсткість - це здатність деталей машин та механізмів протидіяти зовнішнім силам з точки зору допустимих змін розмірів та форми, тобто деформації.

Деякі елементи конструкцій мають особливу форму і працюють під дією характерних навантажень, наприклад тонкі і довгі стержні при стиску, тонкостінні циліндричні конструкції в процесі закручування і ін. Такі конструкції під навантаженням без будь-яких зовнішніх причин раптово втрачають пружну рівновагу /або стійкість/. Після втрати рівноваги процес руйнування конструкції відбувається вже так швидко, що стає неможливим відвернути катастрофу. У наведених прикладах втрата стійкості виявляється у викривленні стиснутого стержня і короблани закрученого циліндра.

Втрата стійкості в таких конструкціях відбувається під дією сил, набагато менших від отриманих із розрахунків на міцність і жорсткість. Тому деякі конструкції та їх елементи необхідно спеціально розраховувати на стійкість. Під стійкістю розуміють здатність елементів конструкції зберігати положення пружної рівноваги під дією зовнішніх сил.

На практиці доводиться мати справу з розрахунками конструкцій складних форм, але всі вони вміщують чотири види простих елементів: брус, пластина, оболонка і масивне тіло. Брусом будемо називати елемент конструкції, у якого один із геометричних розмірів /довжина/ набагато перевищує два інших /поперечних/; це, наприклад, стержні, троси, труби, балки і ін.

Оболонка - це викривлена пластина. Прикладами оболонок є стінки цистерн, баків, куполи будівель тощо.

Масивним тілом будемо вважати елемент конструкції, у якого всі три виміри одного порядку. Це фундаменти, масивні колони тощо.

Опір матеріалів виділився в самостійну науку ще в першій половині ХУІ століття. В цей час /так звана епоха Відродження/ бурхливий розвиток мореплавства, техніки торгівлі, військової справи, будівництва вимагали наукових обґрунтувань, розрахунків на міцність конструкцій та машин. Засновником науки опору матеріалів вважають італійського вченого Галілео Галілея /1564-1642/. Оpubлікований ним в 1638 р. науковий трактат "Бесіди і математичні доведення, що відносяться до двох нових галузей науки - механіки та місцевого руху" поклав початок розвитку науки опору матеріалів. Робота була присвячена розв'язанню задачі про залежність між розмірами бруса і зусиллями, які він може витримати. Розрахунки Галілея принесли значну користь у будівництві великих кораблів і споруд.

Подальший розвиток науки опору матеріалів йшов паралельно з роз-

в'ятком інших точних наук - фізики, математики, матеріалознавства тощо.

Її обсяг поповнювався вкладом зарубіжних і вітчизняних вчених та інженерів.

## І. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

### І.1. Зовнішні і внутрішні сили. Деформація

Як відомо з курсу загальної фізики, силою називають взаємодію тіл /або їх частин/, в результаті якої виникають прискорення цих тіл або зміна їх форми /розмірів/ - деформація. В опорі матеріалів розрізняють зовнішні і внутрішні сили.

Зовнішніми називають сили, які виникають під час взаємодії даного тіла /елемента конструкції/ з іншими, зв'язаними з ним тілами. Наприклад, залізобетонна ферма мосту сприймає від коліс вагу автомобіля і передає її на бетонні опори; останні, в свою чергу, передають це навантаження /вагу/ на фундамент, а потім на його основу.

Класифікацію зовнішніх сил проводять за кількома факторами: за часом дії, елементами поверхні тіла, на які передається дія, за величиною і напрямом дії і ін. Найчастіше в розрахунковій практиці зустрічаються зосереджені сили і розподілені навантаження.

Зосередженою називають силу, яка діє на розглядуваний елемент конструкції по площі, розмірами якої порівняно з розмірами конструкції можна знехтувати. Зосередженою можна вважати силу тиску коліс вагона на рейку, тиск людини своєю вагою на підлогу тощо. Зосереджену силу позначають буквою  $F$ , в системі СІ вона вимірюється в ньтонах (Н), кілоньтонах (кН); в технічній системі - в кілограмах (кг), тоннах (т).

Розподіленими називають сили, які прикладені на деякій довжині або площі поверхні тіла, порівнянній з його розмірами. Прикладами таких сил є тиск шару снігу однакової товщини на поверхню покритті, що являє собою навантаження, рівномірно розподілене по поверхні; власна вага провідника лінії електропередачі - це навантаження, розподілене по лінії /лінійно розподілене навантаження/.

Навантаження, розподілене по лінії, позначається літерою  $q$  і має одиниці в системі СІ ньтон на метр (Н/м), кілоньтон на метр (кН/м), меганьтон на метр (МН/м), в технічній системі - кілограм на метр (кг/м), тонна на метр (т/м).

Крім того, зовнішні сили за часом дії поділяють також на статичні, динамічні, повторно-змінні і т. ін.

Розглянемо поняття внутрішніх сил. Як відомо, довільне тіло складається з молекул і атомів, між якими існують сили взаємного притягання і взаємного відштовхування. Ці сили взаємодії у фізиці називають внутрішніми. Внаслідок наявності внутрішніх сил тіла намагаються зберегти свою форму як єдине ціле; ці сили протидіють всякій зміні взаємного розташування молекул і атомів тіла. Наприклад, під час розтягу стержня сили взаємного притягання між молекулами і атомами протидіють розтягу, а під час стиску стержня виникають сили взаємного відштовхування, які протидіють стиску.

В цілому, якщо зовнішні сили намагаються змінити форму тіла, то внутрішні сили протидіють намаганням деформувати тіло. Відповідно до цього, чим більші зовнішні сили, тим більша і протидія, тобто більші внутрішні сили. Звідси випливає що внутрішні сили навантаженого і ненавантаженого елемента конструкції неоднакові.

У науці опору матеріалів ті внутрішні сили, які діють між молекулами і атомами ненавантаженого бруса, не розглядають. В подальшому під внутрішніми силами розумітимемо ту їх змінну частину, яка виникає лише під дією зовнішніх сил, тобто будемо вважати, що у ненавантаженому брусі внутрішні сили відсутні. Зрозуміло також, що в навантаженому брусі виникають внутрішні сили, які намагаються повернути частинки твердого тіла в ті положення, які вони займали до навантаження, тобто до деформації.

Під деформацією будемо розуміти всяку зміну початкової форми і розмірів тіла під час дії на нього зовнішніх сил.

Деформація, яка повністю зникає після припинення дії зовнішньої сили, називається пружною. Деформація, що залишається в точці після припинення дії зовнішніх сил, називається пластичною /або залишковою/.

В опорі матеріалів мають справу переважно з пружними деформаціями, що діють в реальних конструкціях.

Залежно від характеру дії зовнішніх сил елементи конструкцій можуть набувати таких видів простих деформацій: розтяг або стиск, зсув, кручення і згин. За наявності в тілі кількох видів простих деформацій вважають, що таке тіло має складну деформацію або чинить складний опір.

Деформацію розтягу /або стиску/, наприклад, має стержень, до якого прикладено зовнішні сили вздовж його осі. Такої деформації зазнають троси, канати, штоки поршнів двигунів тощо. Зсув виникає тоді, коли на тіло діють паралельні і протилежно напрямлені сили, зміщуючи

плоскі перерізи твердого тіла один відносно одного. Деформації зсуву зазнає брус в разі розрізу його ножицями, вона виникає в клепа-них, шпонкових і частково болтових з'єднаннях.

Деформація кручення виникає тоді, коли зовнішні сили утворюють пари сил, які розміщені в площині, перпендикулярній до осі бруса. Такій деформації підлягають вали, свердла і інші елементи конструкцій.

Згин бруса трапляється у випадку дії зовнішніх сил, напрямлених перпендикулярно до осі бруса. Внаслідок згину вісь стержня викривляється або змінює початкову кривизну. Таку деформацію мають балки, осі, зуби зубчастих коліс тощо.

## 1.2. Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів

В опорі матеріалів неможливо обійтись без деякої ідеалізації матеріалів, умовностей під час зображення дії зовнішніх сил, спрощень в процесі аналізу деформації тіл. Якщо цього не зробити, то предмет опору матеріалів був би настільки громіздкий, настільки насичений математичними викладками та реальними деталями /фактами/, що практично було б неможливо провести необхідні розрахунки. Отже, припущення необхідні, але вони мають бути такими, щоб не спотворювалась реальна картина опору тіла дії зовнішніх навантажень.

Численні експериментальні дослідження та інженерна практика підтверджують можливість і доцільність таких гіпотез і припущень.

Розглянемо основні гіпотези і припущення, що найчастіше використовуються під час вивчення різних розділів опору матеріалів.

1. Гіпотеза про неперервність матеріалу. Згідно з цією гіпотезою вважають, що матеріал повністю і рівномірно заповнює зайнятий ним об'єм тіла, без будь-яких порожот /в дійсності в тілі є раковини, тріщини і т.д./. В зв'язку з цим механічні, фізичні та інші властивості матеріалів не залежать від вибору величини об'єму цього матеріалу.

2. Гіпотеза однорідності і ізотропності матеріалу. Вважається, що фізико-механічні властивості матеріалу однакові в будь-якій частині тіла і не залежать від вибору їх вимірювання. Ця гіпотеза припустима для полікристалічних матеріалів, але неприпустима, наприклад, для дерева як безумовно анізотропного матеріалу.

3. Гіпотеза малості і лінійності деформації тіла. Вважається, що зміщення частин, ліній чи перерізів тіла /деформації/ в елементах конструкції малі порівняно з розмірами цих елементів і що ці зміщення прямо пропорційні значенням внутрішніх сил. В межах дії цієї гі-

позези виконується закон Гука, згідно з яким величина пружної деформації прямо пропорційна величині прикладеного до тіла навантаження. Так, якщо під дією сили  $F$  стержень довжиною  $l$  видовжується на величину  $\Delta l$ , то під дією сили  $2F$  видовження цього стержня становитиме  $2\Delta l$  і т.д.

4. Гіпотеза ідеальної пружності: Згідно з цією гіпотезою вважається, що матеріали мають властивість повністю відновлювати первинну форму і розміри тіл після припинення дії зовнішніх сил.

5. Гіпотеза суперпозиції дії сил: однорідні величини /внутрішні сили, напруги, деформації/ від дії кількох зовнішніх сил додаються. Це припущення надзвичайно важливе тим, що дозволяє у випадку складного опору знаходити загальні деформації додаванням деформацій, спричинених окремим видом навантаження.

В опорі матеріалів важливий елемент розрахунків - розрахункова схема, яка є певною ідеалізацією реальних конструкцій, споруд тощо. Всякий розрахунок конструкції починається з вибору і складання цієї розрахункової схеми. Правильно вибрана розрахункова схема враховує найголовніше для розрахунку конструкції в цілому. На рис.1.1, а показана частина трубопроводу довжиною  $l$ , по якому самопливом тече рідина. Під час розрахунку необхідної товщини труби перш за все складають розрахункову схему, що показана на рис.1.1,б, де  $q$  розподілено за довжиною навантаження, яке складається з ваги одиниці довжини труби і рідини в ній.

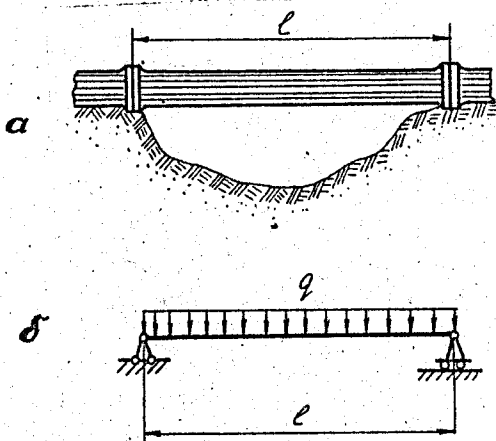


Рис.1.1. Ділянка трубопроводу /а/ та її розрахункова схема /б/

Перш ніж розв'язувати реальну задачу, необхідно уважно поміркувати над тим, щоб відокремити суттєве від несуттєвого, тобто правильно вибрати розрахункову схему.

### 1.3. Метод перерізів. Поняття про епюри внутрішніх силових факторів

У довільно вибраному об'ємі елемента конструкції під дією зовнішніх сил, як зазначалося, виникають внутрішні сили. Для визначення внутрішніх сил у перерізах бруса користуються методом перерізів.

Розглянемо певний брус, навантажений довільною системою зрівноважених зовнішніх сил /рис.1.2/. У довільному місці перетнемо

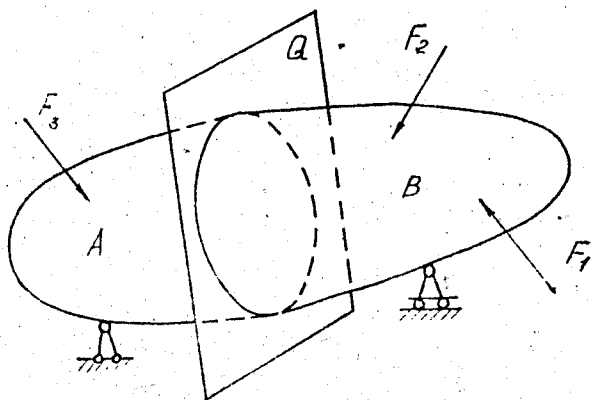


Рис.1.2. Брус, навантажений системою зовнішніх сил

поперечною площиною  $Q$  цей брус і розглянемо взаємодію отриманих частин  $A$  і  $B$ . Через те що зв'язки між поділеними частинами відсутні, для фактичної рівноваги частин необхідно дію правої частини  $B$  на ліву  $A$  або лівої  $A$  на праву  $B$  замінити зрівноважуючою системою сил у перерізі, тобто внутрішніми силами. Відповідно до гіпотези неперервності матеріалу внутрішні сили в перерізі діють у кожній точці і мають довільний напрям. Суть методу полягає в тому, що кожна з відрізнаних частин, будучи під дією зовнішніх і внутрішніх сил у перерізі, перебуває в стані рівноваги, наприклад, ліва частина  $A$  /рис.1.3/.

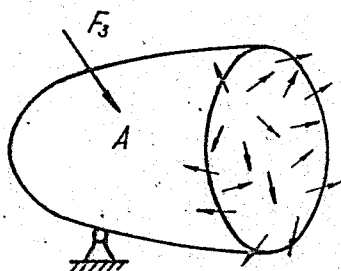


Рис. 1.3. Ліва частина розрізаного бруса, зрівноваженого зовнішніми і внутрішніми силами

В будь-якому іншому перерізі бруса внутрішні сили будуть, звичайно, іншими.

Повернемося до розгляду рівноваги, наприклад, лівої відрізаної частини бруса  $A$  /рис. 1.3/. Виберемо систему координат  $x, y, z$  /рис. 1.4/. Початок координат сумістимо з центром ваги поперечного перерізу  $O$ , вісь  $x$  напрямляємо перпендикулярно до перерізу, осі  $y$  і  $z$  збігаються з площиною перерізу.

Зведемо систему внутрішніх сил в перерізі до рівнодійної в центрі ваги перерізу  $O$ . Тоді отримаємо головний вектор внутрішніх сил  $\vec{R}$  і головний момент цих сил  $\vec{M}$  /рис. 1.4/.

Спроектуємо головний вектор сили  $\vec{R}$  і головний момент  $\vec{M}$  на осі координат, дістанемо відповідно три проєкції сили  $\vec{R}$  і три проєкції момента  $\vec{M}$  /рис. 1.5/. Ці шість проєкцій називаються внутрішніми силовими факторами, три проєкції вектора  $\vec{R}$  на координатні осі ще називаються зусиллями. Проєкція головного вектора сили  $\vec{R}$  на вісь  $x$  називається

нормальною силою і позначається літерою  $N$ . Проєкції головного вектора сили  $\vec{R}$  на осі  $y$  і  $z$  називаються поперечними силами і позначаються відповідно  $Q_y$  і  $Q_z$ .

Рис. 1.4. Рівнодійна сила  $\vec{R}$  і рівнодійний момент внутрішніх сил у перерізі бруса

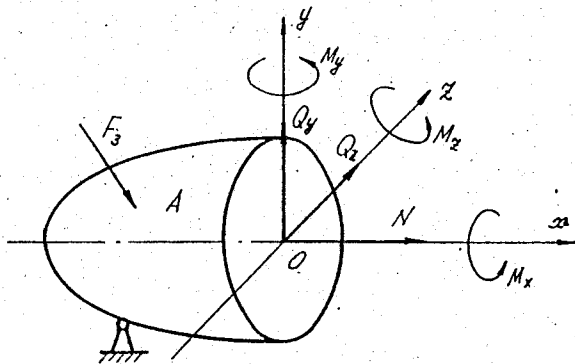


Рис. 1.5. Внутрішні силові фактори в перерізі бруса

Проекція головного моменту  $\vec{M}$  на вісь  $x$  називається крутним моментом і позначається  $M_x$  або  $M_\kappa$ . Аналогічно проєкції головного моменту  $\vec{M}$  на осі  $y$  і  $z$  називаються згинаючими моментами і позначаються відповідно  $M_y$  і  $M_z$ .

Оскільки кожна з відрізнаних частин бруса знаходиться в рівновазі, цю обставину використовують для обчислення внутрішніх силових факторів через діючі зовнішні сили /активні і реактивні/. Тоді згідно з рівнянням статика нормальна сила  $N$  у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь  $x$  бруса всіх зовнішніх сил, що діють на одну із частин розрізаного тіла. Аналогічно можна сформулювати правила для обчислення поперечних сил  $Q_y$  і  $Q_z$ .

Крутний момент  $M_\kappa$  у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь  $x$  бруса всіх моментів зовнішніх сил, що діють на одну із частин розрізаного бруса. Аналогічно можна обчислити внутрішні моменти  $M_y$  і  $M_z$ .

Підбиваючи підсумки, підкреслимо, що метод перерізів дозволяє визначити і обчислити зусилля  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  і внутрішні моменти  $M_\kappa$ ,  $M_y$  і  $M_z$  через діючі на брус зовнішні сили. Для цього необхідно:

1/ розсікти брус поперечною площиною в тому місці, де необхідно обчислити силові фактори;

2/ відкинути одну із розрізаних частин бруса /доцільно ту його частину, яка навантажена більшим числом зовнішніх сил/;

3/ замінити дію відкинутої частини бруса на залишену внутрішніми силами;

4/ скласти необхідні рівняння рівноваги залишеної частини;

5/ розв'язуючи рівняння рівноваги для залишеної частини, обчислити внутрішні силові фактори.

Звичайно, внутрішні силові фактори в різних перерізах того ж бруса можуть мати різні значення. В зв'язку з цим будують графіки, що показують розподіл внутрішніх сил вздовж стержня, тобто характеризують залежність внутрішніх силових факторів від координати  $x$ .

Графік, що характеризує зміну внутрішнього силового фактора в разі переходу від одного перерізу бруса до іншого, називається епюрою. Для кожного внутрішнього силового фактора будується своя /окрема/ еюра. Під час побудови епюр внутрішніх силових факторів користуються такими правилами.

1. Вісь абсцис, на якій будують епюру /її називають базовою лінією епюри/ проводять паралельно осі бруса за межами розрахункової схеми.

2. Від базової лінії епюри відкладають ординати, що зображають у вибраному масштабі величину зусилля, з урахуванням його знака /додатні значення - угорі або праворуч, від'ємні - вниз або ліворуч/.

3. Штрихують епюри лініями, перпендикулярними до базової.

4. На полях епюр проставляють знак, обведений колом, а навпроти базової лінії вказують позначення і одиницю зусилля.

Крім цього, на межах ділянок епюр проставляють числові значення внутрішнього силового фактора.

Найнебезпечнішими є ті перерізи /або ділянки/ бруса, в яких внутрішні силові фактори досягають найбільшого значення. Небезпечні ділянки або перерізи бруса можна визначити лише після побудови епюри зусилля. В зв'язку з цим вміння правильно будувати епюри внутрішніх сил вважається одним із найважливіших завдань предмета опору матеріалів.

#### 1.4. Поняття про напругу. Зв'язок напруги із зусиллями

Метод перерізів дозволяє обчислити результуючі внутрішні силові фактори в перерізах. Між тим руйнування деталі починається з точки, і щоб йому запобігти, треба вміти обчислювати внутрішні сили в точках

стержня /деталі/. Для визначення характеру розподілу внутрішніх сил в окремих точках перерізу необхідно ввести нову величину - інтенсивність розподілених внутрішніх сил у точці. Ця величина, що кількісно характеризує зусилля, віднесене до одиниці площі, називається напругою.

Розглянемо переріз певного бруса. Координатні осі  $x$ ,  $y$  і  $z$  в перерізі бруса розмістили так, як показано на рис.1.6.

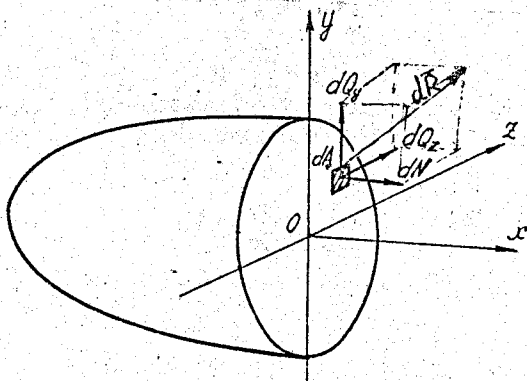


Рис.1.6. Внутрішні силові фактори  $dQ_y$ ,  $dQ_z$ ,  $dN$  на елементарній площадці  $dA$  перерізу та їх рівнодія  $d\vec{R}$

Виділимо в перерізі елемент площі  $dA$ , настільки малий, щоб внутрішні сили на ньому були однакові. Рівнодія внутрішніх сил на площадці  $dA$  нехай буде  $d\vec{R}$ ; напрям може бути довільний /рис.1.6/. Проекції сили  $d\vec{R}$  на осі  $x$ ,  $y$  і  $z$  дадуть, як уже відомо, елементарні зусилля  $dN$ ,  $dQ_y$  і  $dQ_z$ . Оскільки площа  $dA$  мала, то рівнодіяний момент на цій площадці дорівнює нулю.

Відношення рівнодіяної  $d\vec{R}$  до площі  $dA$  є векторна величина, називається повною напругою в точці і позначається  $\vec{p}$ :

$$\vec{p} = d\vec{R}/dA. \quad 1.1.1$$

Одиниці повної напруги в системі СІ: Па ( $\text{Н}/\text{м}^2$ ), МПа ( $\text{МН}/\text{м}^2$ ).

Поняттям повної напруги в опорі матеріалів користуються порівняно рідко - переважно тільки в теоретичному плані. Проте проєкції векто-

ра  $\vec{p}$  на координатні осі  $x$ ,  $y$  і  $z$  для розрахунків елементів конструкцій на міцність мають важливе значення.

Проекцію повної напруги на вісь  $x$  називають нормальною напругою і позначають  $\sigma$ . Оскільки проекція сили  $dR$  на вісь  $x$  є  $dN$ , то

$$\sigma = \frac{dN}{dA} \quad /1.2/$$

Аналогічно проекції повної напруги  $\vec{p}$  на осі  $y$  і  $z$  називаються дотичними напругами і позначаються відповідно  $\tau_y$  і  $\tau_z$ . Дотичні напруги також можуть бути визначені через  $dQ_y$  і  $dQ_z$ :

$$\tau_y = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA} \quad /1.3/$$

На рис. 1.7 показані нормальна  $\sigma$  і дотичні  $\tau_y$  і  $\tau_z$  напруги.

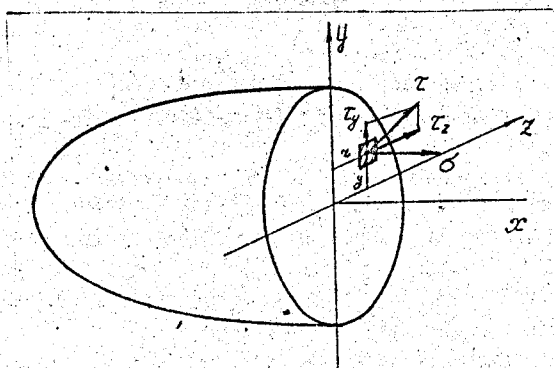


Рис. 1.7. Нормальна  $\sigma$  та дотична  $\tau$  напруги в точці поперечного перерізу бруса

Іноді виникає необхідність користуватись повною дотичною напругою, яку позначають літерою  $\tau$ . Знаючи  $\tau_y$  і  $\tau_z$ , повна дотична напруга можемо визначити за формулою

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} \quad /1.4/$$

На основі викладеного повна напруга

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2} \quad /1.5/$$

Відшукаємо зв'язок між внутрішніми силовими факторами в перерізі бруса і напругами в точках цього перерізу. Для цього формули /1.2/ і /1.3/ перепишемо у вигляді

$$dN = \sigma dA; \quad dQ_y = \tau_y dA; \quad dQ_z = \tau_z dA. \quad /1.6/$$

Зінтегрувавши отримані вирази за площею перерізу  $A$ , дістанемо такі зусилля:

$$N = \int_A \sigma dA, \quad /1.7/$$

$$Q_y = \int_A \tau_y dA, \quad /1.8/$$

$$Q_z = \int_A \tau_z dA. \quad /1.9/$$

Для визначення через напруги решти внутрішніх силових факторів  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  запишемо величину елементарних моментів, що створюються зусиллями  $dN$ ,  $dQ_y$  і  $dQ_z$  відносно осей  $x$ ,  $y$  і  $z$ :

$$dM_x = dQ_z y - dQ_y z = (\tau_z y - \tau_y z) dA = \tau \rho dA,$$

$$dM_z = dN_y = \sigma y dA,$$

$$dM_y = dN_z = \sigma z dA.$$

Зінтегруємо отримані вирази по площі перерізу  $A$  бруса, тоді

$$M_x = M_{\kappa} = \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA = \int_A \tau \rho dA, \quad /1.10/$$

$$M_z = \int_A \sigma y dA, \quad /1.11/$$

$$M_y = \int_A \sigma z dA. \quad /1.12/$$

Рівняння /1.7/ - /1.12/, що пов'язують внутрішні силові фактори в поперечному перерізі бруса з напругами, називаються інтегральними рівняннями рівноваги і використовуються для обчислення напруги за внутрішніми силовими факторами.

Аналізуючи інтегральні рівняння рівноваги, можна зазначити, що нормальні напруги  $\sigma$  в точках перерізу утворюють нормальну силу  $N$  і згинальні моменти  $M_y$  і  $M_z$ , а дотичні напруги  $\tau$  - крутний момент  $M_x$  і поперечні сили  $Q_y$  і  $Q_z$ .

#### Запитання для самоперевірки

1. Визначити основні завдання курсу опору матеріалів.
2. Що розуміють під міцністю, жорсткістю і стійкістю матеріалів?
3. Як в опорі матеріалів класифікуються зовнішні сили?
4. Дати визначення внутрішніх сил. Чим відрізняється поняття внутрішніх сил у курсі опору матеріалів від означення цих сил у фізиці? Які ви знаєте внутрішні силові фактори?
5. Розкажіть про призначення і сутність методу перерізів.
6. Що таке епюра внутрішніх силових факторів? Розкажіть правила побудови епор.
7. Які гіпотези використовують у курсі опору матеріалів?
8. Що таке деформація тіла? Які види деформацій вам відомі?
9. Що таке напруга в точці перерізу тіла? Її одиниці.

## 2. РОЗТЯГ І СТИСК

### 2.1. Побудова епор нормальних сил

Розтяг або стиск бруса здійснюється зрівноваженими зовнішніми силами, що діють вдовж його осі. Надалі брус, який працює на розтяг або стиск, називатимемо стержнем. Під час дії зовнішніх зрівноважених осьових сил в поперечних перерізах стержня діє внутрішня нормальна сила  $N$  /інші п'ять внутрішніх силових факторів -  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  і  $M_z$  - відсутні/.

Порядок визначення значення нормальної сили в перерізах стержня розглянемо на прикладі.

На стержень довжиною  $l$  /рис.2.1/ в перерізах А, В, С і Д прикладені зовнішні зосереджені чотири сили  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  і  $F_4$ . Визначимо перерізи, в яких нормальна сила досягає найбільших значень.

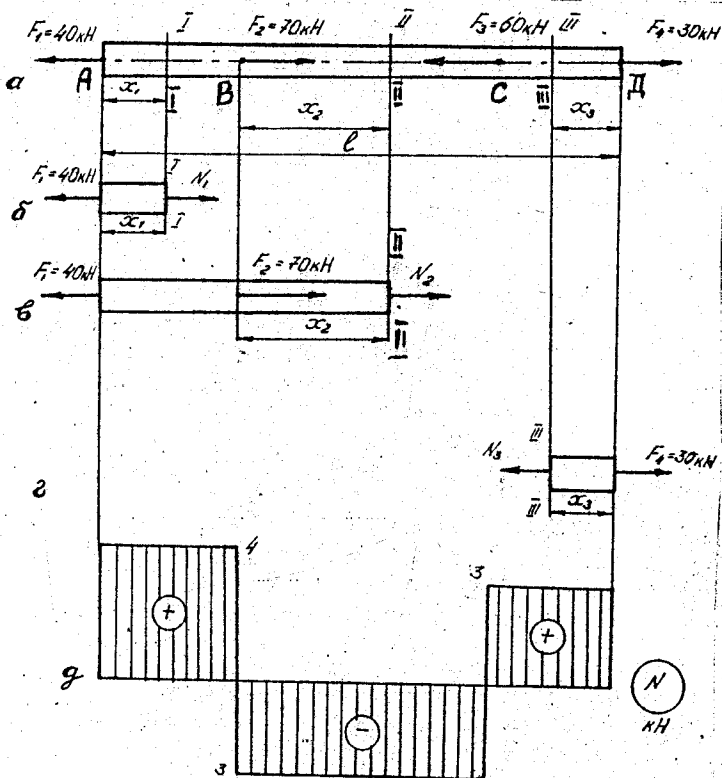


Рис.2.1. Епора нормальної сили  $N$ .

Побудуємо епору нормальної сили. Для цього скористаємося методом перерізів і загальними правилами побудови епор, наведеними в підрозд. 1.4.

Поділимо стержень на силові ділянки  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$ . Силову ділянкою є частина стержня, в межах якої нормальна сила змінюється за одним законом, а межами ділянок є перерізи, в яких прикладені зовнішні сили.

Для побудови епюри нормальних сил  $N$  проведемо під розрахунковою схемою базову лінію. Значення нормальних сил у вибраному масштабі відкладаємо перпендикулярно до базової лінії, причому додатні значення  $N$  /розтяг/ відкладаємо вгору, а від'ємні /стиск/ - униз від бази. Епюру штрихуємо тонкими лініями, перпендикулярними до базової лінії.

Для визначення нормальної сили в перерізах, згідно з методом перерізів, розсікають стержень в будь-якому місці ділянки і розглядають в рівновазі одну з відрізанних частин стержня. У цьому разі нормальну силу в перерізі завжди напрямляють від перерізу /рис.2.1,б, в, г/.

При визначенні знака зусилля  $N$  слід користуватися таким правилом: нормальна сила  $N$  в перерізі додатна, якщо прикладені зовнішні сили, розміщені по один із боків цього перерізу, спричиняють розтяг, і від'ємна - якщо спричиняють стиск.

На силовій ділянці  $AB$ , на відстані  $x$  від перерізу  $A$ , розтинаємо стержень площиною  $I-I$  і розглядаємо ліву відрізану частину /рис.2.1,б/. Нормальну силу  $N$  у перерізі напрямляємо від перерізу. Оскільки сила  $F_1$  розтягує відрізану частину стержня відносно площини перерізу, то  $N_1 = F_1 = 40 \text{ кН}$ .

На ділянці  $BC$  площиною  $II-II$  на відстані, наприклад,  $x_2$  від перерізу  $B$  розрізуємо стержень на дві частини. Розглядаємо знову ліву відрізану частину /рис.2.1,в/. Сила  $F_1$  відносно перерізу  $II-II$  розтягує стержень, а сила  $F_2$  його стискує, тому

$$N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 70 = -30 \text{ кН}.$$

Аналогічно обчислимо значення нормальної сили  $N_3$  на силовій ділянці  $CD$ . Розтинаємо стержень площиною  $III-III$  в межах цієї ділянки і розглядаємо праву, менш навантажену, частину стержня /рис.2.1,г/. Користуючись тим же правилом, дістаємо:  $N_3 = F_4 = 30 \text{ кН}$ .

Епюра нормальної сили  $N$  навантаженого стержня зображена на рис.2.1. В точках прикладання зосереджених сил на епюрі  $N$  нормальна сила зазнає стрибкоподібних змін, причому величина "стрибка"

за абсолютною величиною дорівнює значенню зовнішньої сили, прикладеної в цьому перерізі.

З побудованої епюри видно, що найбільше /за абсолютною величиною/ зусилля буде на ділянці  $AB$ :  $N_{max} = 40$  кН. Якраз це значення і слід брати до уваги при розрахунках стержня на міцність чи жорсткість, хоч максимальна зовнішня сила  $F_2 = 70$  кН набагато перевищує  $N_{max}$ .

Нормальна сила  $N$  виникає також і тоді, коли врахувать вагу вертикального стержня.

**Приклад 2.1.** Побудувати епюру нормальної сили  $N$  з урахуванням власної ваги стержня /рис.2.2/, якщо  $\gamma = 80$  кН/м<sup>3</sup>,  $A_1 = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $A_2 = 20 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $l_1 = 80$  м,  $l_2 = 50$  м,  $F = 10$  кН.

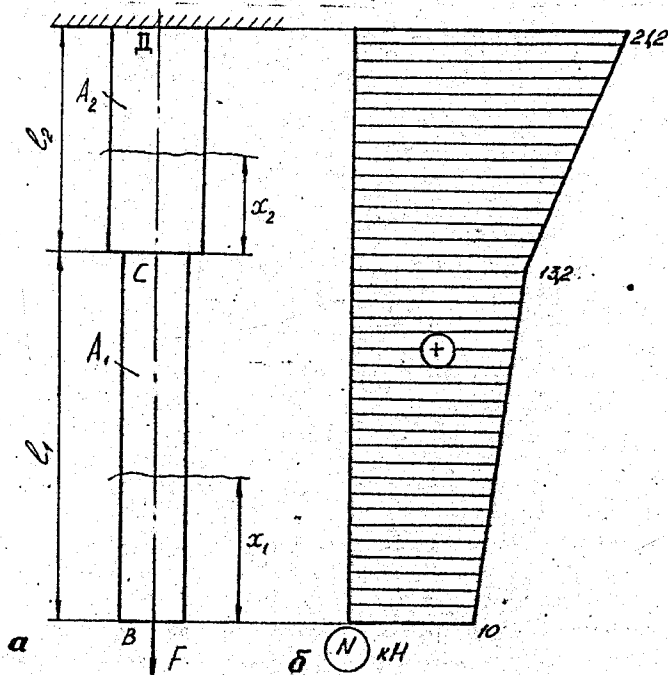


Рис.2.2. Епюра нормальної сили  $N$  з урахуванням власної ваги стержня.

Розв'язання. Поділимо стержень на силові ділянки, межами яких будуть: переріз  $B$  - точка прикладання сили  $F$ , переріз  $C$  - місце зміни площі поперечного перерізу стержня і переріз  $D$  - місце закріплення стержня. В довільному перерізі ділянки  $IBC$  на відстані  $x_1$  від вільного кінця стержня визначаємо нормальну силу як суму проєкцій зовнішніх сил, розташованих нижче від розглядуваного перерізу /див.рис.2.2,а/. Аналогічно діємо на ділянці  $II$   $CD$ .

Ділянка I (BC):  $0 \leq x_1 \leq 80$  м.

$$N_1 = F + \gamma A_1 x_1 = 10 + 80 \cdot 5 \cdot 10^{-4} x_1 = 10 + 0,04 x_1.$$

Якщо  $x_1 = 0$  /переріз  $B$  /,  $N_1 = 10$  кН; якщо  $x_1 = 80$  м /переріз  $C$  /,  $N_1 = 10 + 3,2 = 13,2$  кН.

Ділянка (CD) II:  $0 \leq x_2 \leq 50$  м.

$$N_2 = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 x_2 = 13,2 + 0,16 x_2.$$

Якщо  $x_2 = 0$  /переріз  $C$  /,  $N_2 = 13,2$  кН; якщо  $x_2 = 50$  м /переріз  $D$  /,  $N_2 = 13,2 + 8 = 21,2$  кН. Втора нормальних сил зображена на рис.2.2,б. Найбільшого значення нормальна сила досягає в перерізі закріплення:

$$N_{max} = 21,2 \text{ кН.}$$

## 2.2. Напряга при розтягу /стиску/

Як уже зазначалось, під час розтягу або стиску, в поперечних перерізах стержня із шести внутрішніх силових факторів відмінна від нуля лише нормальна сила, яка відповідно до означення /підрозд.1.4/ в кожній точці перерізу утворює нормальну напрягу  $\sigma$ . Дотичні напруги  $\tau$  в точках перерізу в цьому разі відсутні, бо відсутні поперечні сили і крутний момент.

Нормальна сила пов'язана з нормальними напругами в точках поперечного перерізу інтегральними рівняннями /1.7/. Для з'ясування закону розподілу нормальних напруг по площі поперечного перерізу необхідно використати відповідні гіпотези і припущення.

Уявимо собі, що довільний стержень складається з безмежної кількості волокон, розміщених паралельно його осі. Під час розтягу стержня такі волокна видовжуються, а під час стиску - скорочуються, в цьому

разі можна вважати, що в процесі деформування волокна не надавлюють одне на одне. На поролоновій моделі стержня /рис.2.3/ волокна можна уявити, якщо провести на його поверхні систему ліній, паралельних осі. Виконаємо на цій же моделі ряд умовних поперечних перерізів.

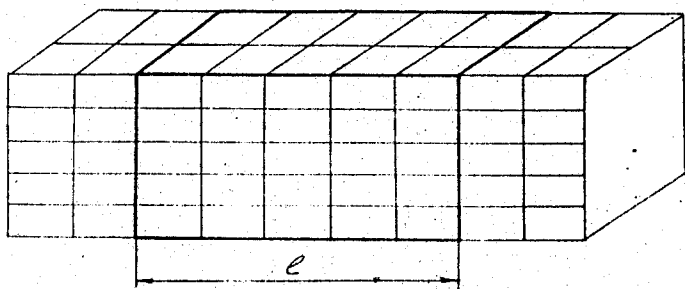


Рис.2.3. Модель стержня до деформації

Сліди цих перерізів на поверхні моделі утворять систему поперечних ліній по контуру моделі, перпендикулярних до II осі.

В разі розтягування такої моделі стержня можна переконатись у справедливості гіпотези плоских перерізів /гіпотеза Бернуллі/, сутність якої полягає в тому, що поперечні перерізи тіла, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї.

Уявно виділимо із моделі /див.рис.2.3/ деякий елемент, всі волокна якого до деформації мають однакову довжину  $l$  /рис.2.4/. При-

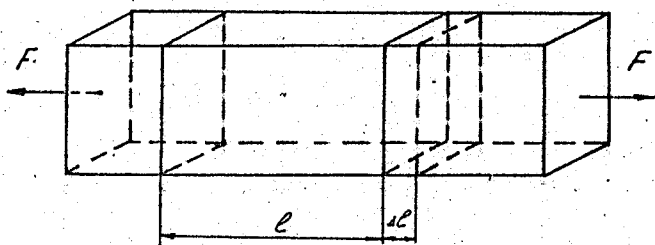


Рис.2.4. Подовження стержня при розтягу

клавши зовнішні сили  $F$ , розтягнемо стержень. Після деформації, згідно з гіпотезою плоских перерізів, усі волокна виділеного елемента видовжаться на однакову величину  $\Delta l$ . На рис.2.4 показано переміщення правого кінця виділеного елемента відносно лівого, уявно закріпленого.

Відносна деформація всіх волокон стержня також буде однаковою, тобто

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const.} \quad /2.1/$$

На підставі гіпотези малості і лінійності деформацій /див.під-розд. 1.3/ зв'язок між напругами і деформаціями в тілі встановлюється законом Гука. Для деформації розтягу або стиску цей закон формулюється так: відносне видовження  $\epsilon$  прямо пропорційне нормальній напрузі  $\sigma$ , тобто

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad /2.2/$$

У цій формулі  $E$  - величина, стала для даного матеріалу, називається модулем поздовжньої пружності, або модулем пружності першого роду /модулем Юнга/, і є однією з найважливіших механічних характеристик матеріалів. Модуль пружності, як і напругу, виражають в паскалях (Па). Для сталей в цілому можна взяти  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Значення  $E$  для різних матеріалів є в довідковій літературі.

Виразимо значення  $\sigma$  із /2.2/ і підставимо в інтегральне рівняння /1.7/, отримаємо

$$N = \int_A E \epsilon dA. \quad /2.3/$$

Модуль пружності  $E$  як сталу величину /характеристика даного матеріалу/, незалежну від площі поперечного перерізу, можна винести за знак інтеграла. Згідно з формулою /2.1/ відносна деформація  $\epsilon$  як незалежна від  $A$  величина може бути винесена за знак інтеграла. Тоді, зінтегрувавши вираз /2.3/, за умови, що  $E \epsilon = \text{const}$ , дістанемо  $N = E \epsilon A$  або  $N = \sigma A$ .

Одержаний вираз дозволяє обчислити нормальні напруги в точках поперечних перерізів стержня:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad /2.4/$$

На основі формул /2.1/, /2.3/, /2.4/ можна зробити висновок, що під час розтягу /стиску/ стержня нормальні напруги однакові в кожній точці поперечного перерізу. Епюри нормальних напруг під час розтягу силами  $F$ , наприклад в перерізі  $n-n$  стержня, показані на рис.2.5, а, а під час стиску - на рис.2.5, б.

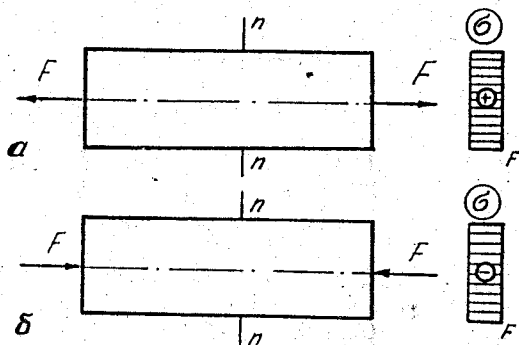


Рис.2.5. Епюри нормальних напруг в поперечному перерізі стержня: а - при розтягу, б - при стиску

На кінцях стержня, в області, де відбувається безпосереднє передавання сили  $F$  на стержень, деформація розтягу волокон розподіляється неоднаково між окремими ділянками перерізу. Ті волокна, до яких прикладена сила  $F$ , переважені, а більш віддалені - недовантажені. Відповідно і напруги: ті точки перерізу, до яких прикладені зосереджені сили, мають більші нормальні напруги порівняно з точками перерізу, віддаленими від центральних.

Тому, визначаючи нормальні напруги в точках поперечних перерізів під час розтягу або стиску, користуються принципом Сен-Венана\*: якщо тіло навантажене статичною системою сил і область прикладання цих сил незначна порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, достатньо

\* Барре де Сен-Венан /1797-1886/, член Паризької академії наук, один із основоположників сучасної теорії пружності. Розробив теорію кручення і згину призматичних стержнів, вніс вагомий внесок у розвиток теорії пластичності, теорії коливань. Сформулював принцип, який суттєво спрощує постановку задачі теорії пружності і опору матеріалів.

віддалених від місця прикладання сил, напруга не залежить від способу навантаження.

Відповідно до цього принципу вважають, що вже на невеликих відстанях від місця прикладання зовнішніх сил напруга в поперечних перерізах тонких і довгих стержнів вирівнюється і настає її рівномірний розподіл.

### 2.3. Деформація і переміщення

З формул /2.2/ і /2.4/ можна отримати вираз відносної деформації через нормальну силу:

$$\epsilon = \frac{N}{EA} \quad /2.5/$$

Абсолютна деформація стержня  $\Delta e$  згідно з формулою /2.1/ має вигляд

$$\Delta e = \frac{Nl}{EA} \quad /2.6/$$

Добуток  $EA$  називається жорсткістю поперечного перерізу стержня, одиниці якої ньютон /Н/, кілоньютон /кН/, кілограм /кг/. Вираз  $EA/l$  називається жорсткістю стержня під час розтягу або стиску:

$$c = \frac{EA}{l} \quad /2.7/$$

Згідно з /2.7/ формула /2.6/ може бути переписана так:

$$N = c \Delta e, \quad /2.8/$$

тобто, абсолютна деформація стержня прямо пропорційна розтягуючому зусиллю. Це і є закон Гука\*, що сформульований ним у 1678 р.

\* Роберт Гук /1635-1703/ - член Лондонського Королівського товариства. Наукові розробки Р.Гука надзвичайно різноманітні. Розробив теорію капілярності, відкрив закон прямої пропорційної залежності між силою і деформацією і т.ін.

Якщо стержень має змінну за довжиною площу поперечного перерізу /наприклад, стержень конусної поверхні /або нормальну силу  $N$ , що залежить від координати  $x$  /див.рис.2.2/, то в загальному вигляді формула /2.6/ записується так:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int \frac{N(x)dx}{EA(x)} \quad /2.9/$$

В цій формулі інтегрування слід проводити в межах кожної силової ділянки стержня  $l_i$ , а загальна деформація складається із суми деформацій всіх ділянок.

З деформацією стержня тісно пов'язане поняття переміщення поперечного перерізу стержня, яке позначимо  $\lambda$ .

Якщо будь-який із поперечних перерізів стержня уявно закріпити, то інший, що перебуває від нього на відстані  $x$ , під час розтягу /стиску/ переміститься; таке переміщення визначається формулою

$$\lambda = \int_0^x \frac{N(x)dx}{EA(x)} \quad /2.10/$$

Коли за умовно закріплений переріз стержня взяти один із його кінців, то переміщення деякого перерізу дорівнює абсолютній деформації тієї частини стержня, яка розміщена між цими перерізами. Щоб наочно уявити переміщення перерізів стержня по його довжині, уявно закріплюють один із його кінців і будують ешпору переміщень.

Експериментально встановлено /наприклад, на тій же поролонівій моделі/, що під час розтягу або стиску стержень деформується не лише в напрямках прикладених сил, а і в поперечних. Під час розтягу стержень видовжується в напрямі дії сил і звужується в поперечних напрямках, під час стиску - навпаки, скорочується в напрямі дії сил і збільшується в розмірах в поперечних напрямках, тобто поздовжня і поперечна деформація завжди мають протилежні знаки. Наприклад, якщо до деформації циліндричний стержень /рис.2.6/ мав довжину  $l_0$  і діаметр  $d_0$ , то після розтягу силами  $F$  довжина його стане  $l_1$ , а діаметр -  $d_1$ . За аналогією з поздовжньою деформацією  $\Delta l$  назвемо абсолютною поперечною деформацією різницю  $\Delta d = d_0 - d_1$ , тоді відносна поперечна деформація

$$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d_0 - d_1}{d} \quad /2.11/$$

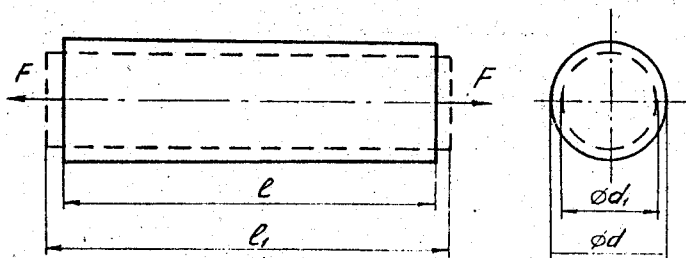


Рис. 2.6. Розміри циліндричного стержня: — лінія контура до деформації, ---- лінія контура після деформації розтягу

Поперечна  $\varepsilon'$  і поздовжня  $\varepsilon$  відносні деформації стержня пов'язані законом поперечної деформації, який формулюється так: відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації для даного матеріалу є величина стала. Математичний вираз цього закону такий:

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \text{const.} \quad /2.12/$$

На підставі чого зв'язок між відносними деформаціями має вигляд

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon. \quad /2.13/$$

Знак "мінус" у формулі /2.13/ означає, що відносні поздовжня і поперечна деформації мають протилежні знаки. Величина  $\mu$  називається коефіцієнтом поперечної деформації, або коефіцієнтом Пуассона.

Коефіцієнт Пуассона як стала для матеріалу величина є однією із найважливіших характеристик матеріалу в розрахунках стержня на жорсткість. Для різних матеріалів коефіцієнт Пуассона  $\mu$  має різне значення - від 0 /для пробкового дерева/ до 0,5 /для каучуку/. Для ста-

лей залежно від марки  $\mu = 0,25 \dots 0,35$ , для цинку  $\mu = 0,27$ , для свинцю  $\mu = 0,42$ .

**Приклад 2.2.** Побудувати епюри нормальних сил, напруг і переміщень за довжиною ступінчастого стержня, навантаженого на кінці силою  $F$  /рис. 2.7, а/.

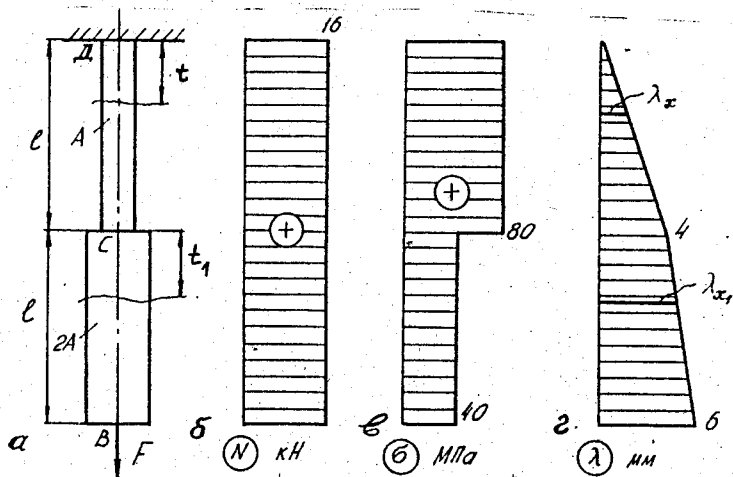


Рис. 2.7. Епюри нормальних сил ( $N$ ), напруг ( $\sigma$ ) і переміщень ( $\lambda$ )

Визначити найбільші значення напруги і переміщення, якщо  $F = 16$  кН,  $A = 2$  см<sup>2</sup>,  $l = 10$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Розв'язання.** Сила  $F$  набагато перевищує вагу стержня, тому значенням останньої в розрахунках можна знехтувати.

Нормальна сила  $N$  в довільному поперечному перерізі дорівнює  $F$ . Епюра нормальних сил  $N = F = 16$  кН показана на рис. 2.7, б.

Нормальна напруга в перерізах стержня, згідно з формулою /2.4/ прямо пропорційна нормальній силі  $N$  і обернено пропорційна площі поперечного перерізу. На ділянці ступінчастого стержня  $BC$  площа поперечного перерізу дорівнює  $2A = 4$  см<sup>2</sup> =  $4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, тому  $\sigma_{BC} = N / 2A = 15 \cdot 10^3 / 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 = 40$  МПа; на ділянці  $CD$  площа вдвічі менша, тому  $\sigma_{CD} = N / A = 15 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 = 80$  МПа. Епюра нормальних напруг в перерізах стержня за його довжиною зображена на рис. 2.7, в.

Визначимо переміщення  $\lambda$  кожного перерізу стержня за напрямом сили  $F$ . Переміщення  $t$ -го перерізу дорівнює видовженню відрізка стержня довжиною  $t$ . Тому згідно з формулою /2.10/ для ділянки  $DC$  маємо

$$\lambda_t = \int_0^t \frac{N(x)dx}{EA} = \frac{Ft}{EA}$$

Переміщення перерізу  $C$  визначимо, підставивши значення величин, наведених в умові задачі, в отриману формулу  $\lambda_c = 4$  мм. Переміщення  $\lambda_{t_1}$ -го перерізу на ділянці  $CB$  стержня

$$\lambda_{t_1} = \lambda_c + \int_0^{t_1} \frac{N(x)dx}{EA} = \lambda_c + \frac{Ft_1}{2EA}$$

Аналогічно визначимо переміщення перерізу  $B$  стержня:

$\lambda_B = \lambda_c + Ft_1/2EA = 4 + 2 = 6$  мм. Епюра переміщень перерізів показана на рис.2.7,г. Аналізуючи побудовані епюри, зазначимо, що найбільші напруги утворюються в кожній точці поперечних перерізів на ділянці  $CD$  ( $\sigma_{max} = 8$  МПа), а найбільше переміщення має переріз стержня, в якому прикладена сила  $F$  ( $\lambda_{max} = 6$  мм).

#### 2.4. Умова міцності і жорсткості

Розрахунки на міцність і жорсткість - основні питання опору матеріалів. Забезпечити міцність і жорсткість конструкції - значить попередити можливе її руйнування або відмову в роботі. Порушення міцності /руйнування/ конструкції настає, як правило, в найнебезпечнішій зоні. Такою зоною вважається точка перерізу /або перерізів/, в якій досягаються найбільші напруги. В зв'язку з цим небезпека початку руйнування не завжди характеризується внутрішніми силовими факторами: для цього треба враховувати і площу перерізу /поперечні розміри стержня/.

З фізичної точки зору очевидно, що матеріал не може витримати довільно велику напругу. Для матеріалу необхідно підібрати такі напруги /вони називаються допустимими напругами/, за яких елемент конструкції із цього матеріалу буде працювати надійно і довготривало. Нормальні допустимі напруги позначаються  $[\sigma]$ , а дотичні  $[\tau]$ . Для кількісного

визначення допустимих напруг необхідно знати ті їх значення, які спричиняють небезпеку руйнування даного матеріалу. Якщо небезпечні нормальні напруги позначити  $\sigma$ , а дотичні -  $\tau$ , то допустимі значення напруг можна визначити відношенням

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{S}, \quad [\tau] = \frac{\tau^0}{S}, \quad /2.14/$$

де  $S$  - коефіцієнт запасу міцності /число, більше від одиниці/.

Знаючи допустимі напруги, умову міцності під час розтягу /стиску/ можна записати у вигляді

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]. \quad /2.15/$$

Умову міцності формулюють так: нормальна напруга в небезпечному перерізі /що обчислюється за формулою  $\sigma_{max} = N_{max} / A$  /, має бути меншою за допустиму.

Якщо матеріал неоднаково чинить опір розтягу і стиску, то в формулу /2.15/ замість  $[\sigma]$  треба підставляти  $[\sigma_p]$  для матеріалу, що працює на розтяг, і  $[\sigma_c]$  - у випадку стиску.

Користуючись умовою міцності /2.15/, можна розв'язувати три типи задач розрахунків на міцність:

1. Перевірний розрахунок, коли задані навантаження на конструкцію /стержень/ і її розміри. Користуючись формулою /2.15/, переконаються, чи ліва частина формули /2.15/, тобто максимальна робоча напруга  $\sigma_{max}$ , не перевищує праву /допустиму напругу  $[\sigma]$ /.

2. Проектний розрахунок, згідно з яким визначають необхідні розміри /площу поперечного перерізу/ стержня під необхідне навантаження:

$$A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]}. \quad /2.16/$$

3. Визначити допустиме найбільше навантаження на заданий стержень:

$$N_{max} \leq A[\sigma]. \quad /2.17/$$

Аналогічно умові міцності записують умову жорсткості під час розтягу або стиску:

$$\Delta e_{\max} = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N(x)dx}{EA(x)} \leq [\Delta e]. \quad /2.18/$$

Умову жорсткості можна сформулювати так: максимальна деформація /видовження або скорочення/ навантаженого стержня не повинна переважати допустимого значення  $[\Delta e]$ . Допустиму деформацію  $[\Delta e]$  визначають, виходячи з технологічних особливостей конструкції або особливостей її роботи.

Користуючись умовою жорсткості /2.18/, можна розв'язувати ті самі три типи розрахункових задач, що і за умовою міцності - це розрахунок: 1/ перевірний; 2/ проектний; 3/ допустимого /найбільшого/ навантаження.

Стержневі конструкції розраховують переважно за умовою міцності, а умову жорсткості використовують як перевірний розрахунок.

**Приклад 2.3.** Вантаж вагою  $F = 40$  кН утримується двома сталевими стержнями /рис.2.8/ однакового поперечного перерізу  $A$ . Стержні утворюють з вертикальним напрямом кути  $\alpha_1 = 30^\circ$ , і  $\alpha_2 = 45^\circ$ . Користуючись умовою міцності, визначити площу поперечного перерізу стержнів, якщо  $[\sigma] = 160$  МПа.

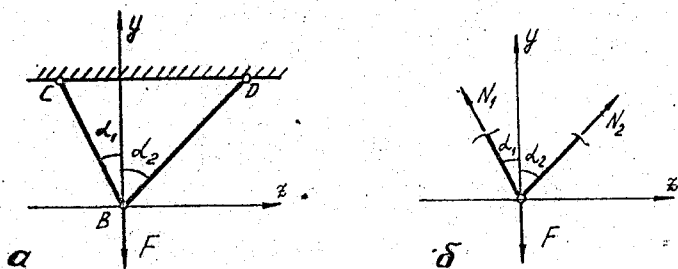


Рис.2.8. Статично визначна стержнева система

**Розв'язання.** Розрізаємо стержні  $BC$  і  $BD$ , замінюємо дію відкинутих частин внутрішніми силами  $N_1$  і  $N_2$  і отримуємо розрахункову схему, показану на рис.2.8,б. Складаючи рівняння рівноваги, дістаємо:

$$a/ \sum F_x = 0; \quad -N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 = 0; \quad N_1 = \sqrt{2} N_2;$$

$$b/ \sum F_y = 0; \quad N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 = F; \quad \sqrt{3} N_1 + \sqrt{2} N_2 = 2F.$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} N_1 = \sqrt{2} N_2; \\ \sqrt{3} N_1 + \sqrt{2} N_2 = 2F, \end{cases}$$

знаходимо  $N_1 = 0,735 F$ ;  $N_2 = 0,52 F$ .

Порівнюючи  $N_1$  і  $N_2$ , дістаємо,  $N_{max} = N_1 = 0,735 F$ .

Користуючись формулою /2.16/, визначаємо необхідну площу поперечного перерізу стержнів

$$A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]} = \frac{0,735 \cdot 40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 184 \text{ мм}^2;$$

а діаметри стержнів  $d = \sqrt{4A/\pi} = 4 \cdot 184/3,14 = 15,3 \text{ мм}$ .

## 2.5. Діаграми розтягу і стиску матеріалів

Необхідні в інженерній практиці характеристики матеріалів, такі як модуль пружності  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\mu$  і інші, отримують дослідним шляхом. Для цього виготовляють стандартні зразки із досліджуваного матеріалу і проводять на них досліді на розтяг, стиск, зріз, кручення, згин тощо. Досліді виконують на спеціальних машинах, характерні особливості яких наведено в лабораторних практикумах з опору матеріалів.

В цьому підрозділі розглянемо лише результати, які отримують під час проведення найпоширенішого виду механічних досліджень - дослідів на розтяг зразків при статичних навантаженнях.

Для порівняння результатів досліджень різних матеріалів, досліді на розтяг проводять на спеціальних стандартних зразках. Форми найпоширеніших зразків на розтяг показані на рис.2.9.

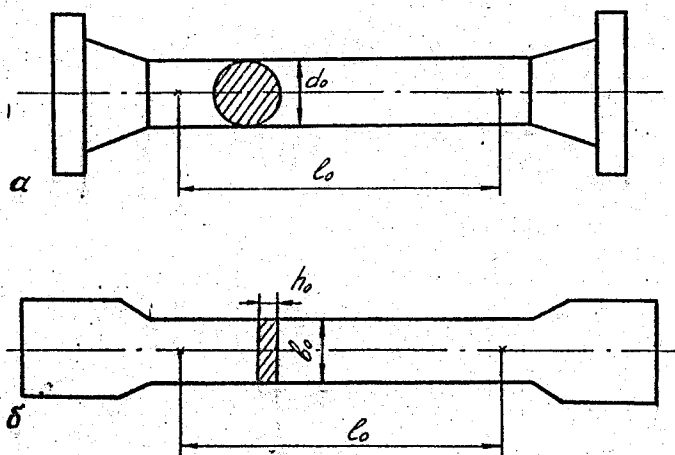


Рис.2.9. форми зразків для випробувань на розтяг:  
а - круглий зразок, б - плоский

Зразок закріплюють в спеціальних затискачах машини і розтягують повільно зростаючою силою. В процесі дослідження спеціальний пристрій автоматично викреслює графік залежності видовження зразка  $\Delta l$  від сили розтягу  $F$ , тобто записує так звану діаграму розтягу  $F-\Delta l$ .

Для визначення механічних властивостей матеріалу /незалежно від розмірів зразка/ використовують умовну діаграму розтягу  $\sigma-\epsilon$ . Для цього всі значення сили розтягу  $F$  ділять на початкову площу поперечного перерізу  $A_0$ , а видовження зразка  $\Delta l$  - на початкову розрахункову довжину  $l_0$  /див.рис.2.9/.

На рис.2.10 показана умовна діаграма розтягу маловуглецевої сталі, що має декілька характерних ділянок.

На ділянці  $OB$  відрізок діаграми - пряма лінія. Ця ділянка відображає закон Гука: відносна деформація  $\epsilon$  прямо пропорційна напруженню  $\sigma$ . Значення напруження, що відповідає точці  $B$ , називається границею пропорційності  $\sigma_{пч}$ :

$$\sigma_{пч} = \frac{F_{пч}}{A_0} \quad /2.19/$$

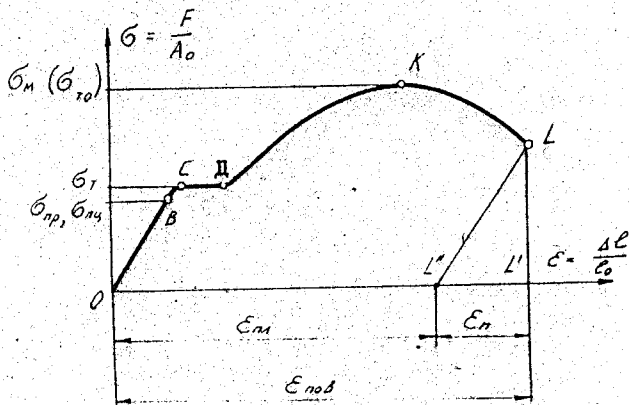


Рис.2.10. Діаграма розтягу зразка із м'якої вуглецевої сталі

Границя пропорційності - це найбільша напруга, за якої ще справджується закон Гука. Наприклад, для м'якої вуглецевої сталі 20 значення  $\sigma_{\text{пр}} = 200$  МПа.

Точка  $B$  практично відповідає ще одній границі, так званій границі пружності. Границею пружності  $\sigma_{\text{пр}}$  називають найбільшу напругу, до якої деформації залишаються пружними.

Відрізок діаграми  $CD$  - паралельний /або майже паралельний/ осі абсцис  $\epsilon$ . За напруги, що відповідає відрітку  $CD$  діаграма, зразок деформується /видовжується/ в разі постійного навантаження. В такому випадку кажуть, що матеріал "тече". Напруга, що відповідає інтенсивній деформації матеріалу при її постійному значенні, називається границею текучості і позначається  $\sigma_T$ :

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}, \quad /2.20/$$

де  $F_T$  - сила розтягу, за якої тече матеріал.

В разі досягнення границі текучості попередньо полірована поверхня зразка стає матовою, оскільки на ній з'являється система ліній сковзання Чернова\*, нахилених до осі під кутом близько  $45^\circ$ .

\* Д.К.Чернов /1839-1921/ - видатний російський металург. Засновник сучасного матеріалознавства. Відкрив явище фазових перетворень у сталі в процесі нагрівання і встановив критичні точки.

За подальшого розтягу зразок знову набуває здатності чинити опір зростаючому видовженню. Ділянка  $DK$  називається зоною наклепу.

Найбільшу напругу, яку може витримати досліджуваний матеріал, називають границею міцності  $\sigma_M$ , або тимчасовим опором  $\sigma_{T0}$ :

$$\sigma_M = \frac{F_{max}}{A_0} \quad /2.21/$$

В разі досягнення границі міцності на видовженому зразку утворюється місцеве звуження - так звана шийка. На рис.2.11 показана частина зразка з утвореною шийкою, де  $d_0$  - діаметр початкового /недеформованого/ зразка,  $d_u$  - діаметр зразка в шийці в момент розриву.



Рис.2.11. Зона утворення "шийки" при розтягу зразка із пластичного матеріалу

Після утворення шийки все видовження зразка вже йде виключно за рахунок зменшення діаметра шийки і її видовження.

Для подальшої деформації зразка після утворення шийки досить зусилля  $F \leq F_{max}$ , тому ділянка діаграми  $KL$  знижується.

Розриву зразка відповідає точка  $L$  діаграми. Повна деформація зразка  $\epsilon$  на діаграмі відповідає абсцисі точки  $L$ , тобто відрізьку  $OL$ . Деформація  $\epsilon_{пов}$  складається з пружної  $\epsilon_p$  і пластичної  $\epsilon_{пл}$  деформацій. Визначення пружної і пластичної деформацій подано в підрозд.1.2. Якщо через точку  $L$  діаграми провести лінію, паралельну відрізьку  $OB$ , до перетину її з віссю абсцис, то отриманий відрізок  $L''L'$  відповідає в масштабі пружній деформації. На діаграмі розтягу пластичній деформації розірваного зразка відповідає відрізок  $OL$ .

Користуючись діаграмою розтягу, встановлюють деформаційні /так звані пластичні/ характеристики матеріалів.

1. Відносне видовження, %:

$$\delta = \frac{l - l_0}{l_0} 100, \quad /2.22/$$

де  $l$  - довжина зразка після розриву;  $l_0$  - його початкова довжина.

2. Відносне звуження, %:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} 100, \quad /2.23/$$

де  $A_0$  - площа перерізу зразка до деформування;  $A_{\text{ш}}$  - площа перерізу зразка в області шийки після розриву.

Відповідно до значень  $\delta$  і  $\psi$  роблять висновки про міру пластичності матеріалів. Чим більші значення  $\delta$  і  $\psi$ , тим матеріали пластичніші. Наприклад, для маловуглецевої сталі 10 ці величини становлять  $\delta = 31\%$  і  $\psi = 63\%$ . В зв'язку з цим вважають, що така маловуглецева сталь - високопластичний матеріал.

Матеріали, які мають відносне видовження або відносне звуження, менше за 5%, називають крихкими. Таке означення крихких матеріалів, очевидно, є умовним. За звичайної температури крихкими матеріалами є чавун, скло, граніт тощо. Під час розтягу зразки із крихких матеріалів руйнуються за малих деформацій. На рис.2.12 /крива I/ показана діаграма розтягу чавуну. Видно, що навіть за незначних деформацій спостерігається відхилення від закону Гука, а залишкова відносна деформація в разі розриву не перевищує 0,015%.

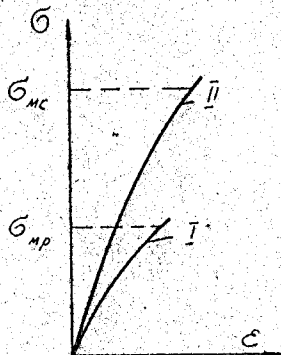


Рис.2.12. Діаграма розтягу /крива I/ і стиску /крива II/ зразка із крихкого матеріалу /чавуну/

Якщо діаграма стиску більшості пластичних матеріалів приблизно збігається з діаграмою розтягу, то для всіх крихких матеріалів характерна значна відмінність таких діаграм. Так, діаграма розтягу чавуну /рис.2.12, крива I/ за характером схожа з діаграмою стиску /рис.2.12, крива II/, але границя міцності чавуну при стиску  $\sigma_{MC}$  приблизно в 3-4,5 разів більша за границю міцності цього ж матеріалу при розтягу  $\sigma_{MP}$ . В цих випадках говорять, що крихкі матеріали набагато краще працюють при стиску, ніж при розтягу.

## 2.6. Енергія деформованого тіла при розтягу або стиску

Повернемося до розгляду ділянки діаграми розтягу  $OB$  /див.рис.2.10/. Ця ділянка відтворює закон Гука - відносна деформація прямо пропорційна напрузі. Зовнішні сили на спричинених ними деформаціях /переміщеннях/ виконують роботу  $W$ .

Знайдемо роботу зовнішньої сили  $F$ , виконану за пружного деформування стержня довжиною  $l$  на переміщенні нижнього його кінця  $\Delta l$  /рис.2.13/. Сила  $F$  до стержня прикладена статично, тобто дія сили повільно зростає від нуля до деякого найбільшого значення  $F'$ , /не перевищуючи в цьому разі значення границі пропорційності/. Внаслідок такої дії сили абсолютна деформація стержня також зростає від 0 до  $\Delta l$ .



Рис.2.13. Видовження зразка довжиною  $l$  під дією сили  $F$

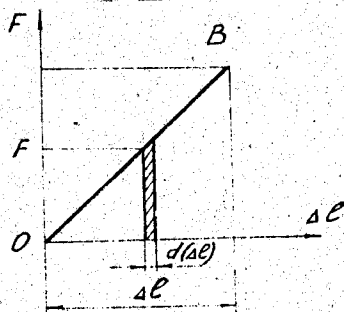


Рис.2.14. Графік залежності видовження ( $\Delta l$ ) від навантаження  $F$  в межах пружності

Оскільки величина деформації на цій ділянці діаграми прямо пропорційна прикладеній силі  $F$ , то графік залежності  $\Delta \ell$  від  $F$  має вигляд, зображений на рис. 2.14. Вважатимемо, що нескінченно малий приріст деформації  $d(\Delta \ell)$  спричинений деяким значенням сили  $F$ . Значить, елементарна робота цієї сили

$$dW = Fd(\Delta \ell). \quad /2.24/$$

Щоб визначити всю роботу за розтягу стержня на величину  $\Delta \ell$ , необхідно зінтегрувати вирази /2.24/ від 0 до  $\Delta \ell$ , тобто

$$W = \int_0^{\Delta \ell} Fd(\Delta \ell). \quad /2.25/$$

Відповідно до закону Гука /2.8/  $F = c\Delta \ell$ , тоді

$$W = \int_0^{\Delta \ell} c\Delta \ell d(\Delta \ell) = \frac{c(\Delta \ell)^2}{2},$$

або

$$W = \frac{F\Delta \ell}{2}. \quad /2.26/$$

Виконана зовнішніми силами робота  $W$  акумулюється у деформованому стержні як потенціальна енергія деформації  $u$ . Якщо знехтувати незначними втратами цієї роботи /наприклад, на нагрівання стержня, то можна вважати, що вона повністю перетворюється в потенціальну енергію деформації  $W = u_N$ , тобто, враховуючи, що  $F = N$ , дістаємо  $u_N = N\Delta \ell/2$ ,

$$u_N = \frac{N^2 \ell}{2EA}, \quad /2.27/$$

де замість  $\Delta \ell$  підставлено його значення із формули /2.6/.

В деяких випадках зручно користуватись питомою потенціальною енергією деформації  $u$ , тобто потенціальною енергією деформації, що нагромаджується в одиниці об'єму стержня:

$$u = \frac{u_N}{V}.$$

Враховуючи, що об'єм стержня  $V = Al$ , отримуємо формулу для  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{N^2}{2EA^2},$$

або, з урахуванням /2.4/

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad /2.28/$$

## 2.7. Визначення допустимої напруги при розрахунках на міцність

Щоб мати уявлення проміцність того чи іншого елемента конструкції, необхідно знати механічні характеристики матеріалу, з якого їх виготовляють. За механічними характеристиками матеріали поділяють на пластичні і крихкі, тому вибір допустимих напруг, про які йшлося в підрозд. 2.4, необхідно проводити окремо.

Більшість деталей машин і механізмів працюють в умовах, за яких виключаються залишкові деформації. Якщо елементи /деталі/ цих машин виробляють із пластичних матеріалів, то їх навантажують так, щоб вони працювали за напруг, які не перевищують границі текучості. Тому небезпечною напругою для пластичних матеріалів вважають напругу текучості, тобто  $\sigma = \sigma_T$ . Виходячи з цього, допустиму напругу для елементів конструкцій, виготовлених із пластичних матеріалів, визначають відношенням

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{S}, \quad /2.29/$$

де  $S$  - коефіцієнт запасу міцності.

Вибору значення коефіцієнта запасу міцності надають особливого значення, бо від цього залежить витрата матеріалу на машину. В різних галузях техніки для одних і тих самих матеріалів його призначають дещо різним. Здебільшого на основі практики конструювання, розрахунків машин і споруд беруть запас міцності пластичних матеріалів  $S = 1,4 \dots 1,6$ .

Діаграми розтягу і стиску крихких матеріалів не мають площини текучості. Основною характеристикою міцності крихких матеріалів є границя міцності: при розтягу  $\sigma_{MP}$ , при стиску  $\sigma_{MC}$  /див.рис. 2.12/; ці величини і беруть за небезпечні напруги  $\sigma$ . Оскільки напруги

$\sigma_{MP}$  і  $\sigma_{MC}$  для крихких матеріалів значно відрізняються одна від одної, то допустимі напруги при розтягу і стиску визначають окремо:  
 а/ при розтягу

$$[\sigma_P] = \frac{\sigma_{MP}}{S}; \quad /2.90/$$

б/ при стиску

$$[\sigma_C] = \frac{\sigma_{MC}}{S}. \quad /2.91/$$

Коефіцієнт запасу міцності крихких матеріалів беруть значно більшим, ніж для пластичних матеріалів:  $S = 2,5 \dots 3,0$ .

### 2.8. Статично невизначені системи

Елементи конструкції і споруд розраховують після обчислення внутрішніх силових факторів, які визначають через дію зовнішніх сил, у тому числі і реакцій. Реакції встановлюють на основі рівнянь рівноваги за законами теоретичної механіки. Є стержневі системи, у яких кількість реакцій перевищує число незалежних рівнянь статика, і тоді таку задачу неможливо розв'язати тільки методами теоретичної механіки.

Так, стержнева система, яку ми розглядали в підрозд.2.4, приклад 2.3 /див.рис.2.8/, є статично визначеною, оскільки зусилля  $N_1$  і  $N_2$  ми змогли знайти з рівнянь статика. В той же час стержнева система /рис.2.15/ є вже статично невизначеною, бо три невідомих зусилля  $N_1$ ,  $N_2$  і  $N_3$  неможливо обчислити, використовуючи лише рівняння статика, яких тут можна скласти тільки два.

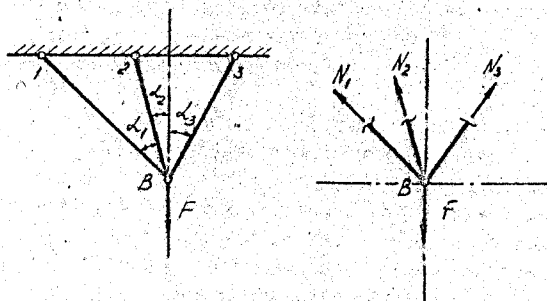


Рис.2.15. Один раз статично невизначена стержнева система

Статично невизначеними називаються такі системи, зусилля /реакції/ яких неможливо обчислити тільки в рівнянь статики. Ступінь статичної невизначеності підраховується як різниця між кількістю невідомих зусиль /реакцій/ і числом рівнянь статики. Наприклад, стержнева система, зображена на рис.2.15, є один раз статично невизначеною, на рис.2.16 – двічі статично невизначена і т.д.

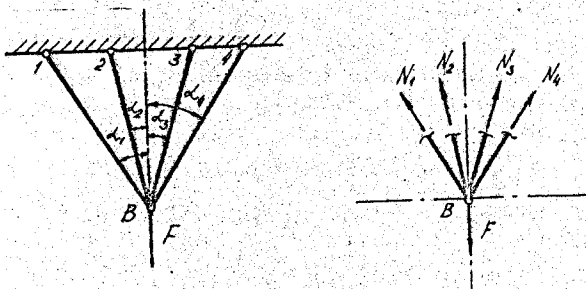


Рис.2.16. Двічі статично невизначена стержнева система

В курсі опору матеріалів розраховуються реальні системи, які здатні деформуватися під дією зовнішніх сил, і ця обставина використовується для складання потрібних /додаткових до статичних/ рівнянь.

Доки, поки діючі сили не призвели до зруйнування конструкцію, деформації її елементів взаємозв'язані. Довільний елемент такої системи не може деформуватися ізольовано, незалежно від деформації інших елементів. Встановивши взаємозв'язок між деформаціями окремих елементів стержнів і беручи до уваги закон Гука, отримують додаткові рівняння /до рівнянь статики/, що зв'язують вже внутрішні сили /або реакції/.

Отже, для розв'язання статично невизначених систем необхідно поряд із рівняннями статики розглянути додаткові рівняння, складені на основі геометричної і фізичної сторін цієї задачі. В цьому розділі статично невизначені стержневі конструкції, елементи яких працюють на розтяг або стиск, будемо розв'язувати в такій послідовності.

1. Визначаємо ступінь статичної невизначеності /пояснено раніше/.
2. Розглядаємо статичну сторону задачі, складаємо ті рівняння статики, в які входять невідомі зусилля /реакції/. Їх кількість визначається системою дії зовнішніх сил.

3. Геометрична сторона задачі. Виявляємо і записуємо математичний зв'язок між деформаціями окремих стержнів /елементів/ системи. Таких рівнянь запишемо стільки, скільки раз статично невизначена система.

4. Фізична сторона задачі. Записуємо фізичний зв'язок між деформацією і причиною, яка її зумовила. Це може бути закон Гука /2.6/ або закон розширення /стиснення/ матеріалу під час нагрівання /охолодження/.

5. Синтез. Розв'язуючи систему із статичних рівнянь і рівнянь, отриманих на основі геометричної і фізичної сторін задачі, визначаємо невідомі зусилля /реакції/ в окремих стержнях /елементах стержня/.

Розглянемо приклади розрахунку статично невизначених стержневих конструкцій.

Приклад 2.4. Жорсткий брус  $OD$  /рис.2.17,а/, деформацією якого знехтуємо, шарнірно закріплений у стіні і підвішений горизонтально на двох шарнірно закріплених сталевих стержнях, що мають однакову довжину  $l = 1$  м.

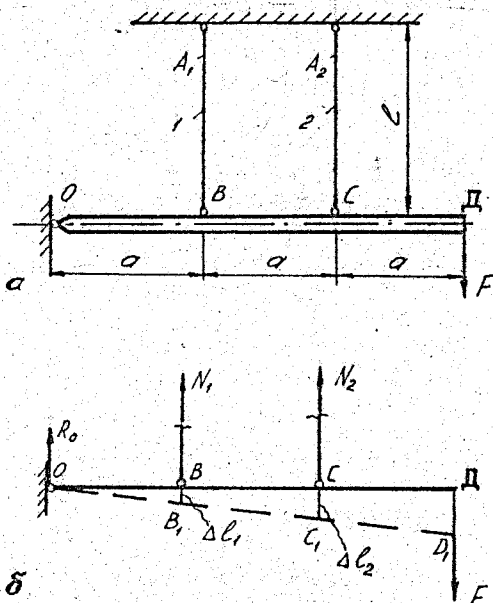


Рис.2.17. Схема статично невизначеної стержневої системи (а) та геометрична сторона задачі даної схеми (б)

В точці  $D$  на брус діє сила  $F = 40$  кН. Визначити площі поперечних перерізів стержнів, якщо  $A_1 = A_2$ , допустима напружка для сталі  $[\sigma] = 160$  МПа. Модуль пружності для стержнів можна прийняти однаковим.

Розв'язання. Як відомо, для плоскої системи паралельних сил статика дає лише два рівняння рівноваги. Невідомих в системі три: реакція  $R_0$  і зусилля  $N_1$ ,  $N_2$ . Отже, задача один раз статично невизначена.

Статична сторона задачі. В задачі необхідно визначити зусилля в стержнях  $N_1$  та  $N_2$  і за ними обчислюються площі перерізів, тому з двох рівнянь статички складаємо лише одне - те, в яке входять потрібні невідомі  $N_1$  і  $N_2$  і відсутня зайва для розрахунків реакція опори

$$\sum M_0 = 0; N_1 a + N_2 2a - F 3a = 0,$$

$$N_1 + 2N_2 = 3F.$$

Геометрична сторона задачі. Під дією сили  $F$  жорсткий брус, не деформуючись, повернеться відносно опори  $O$  і займе положення  $OD_1$ . В цьому разі обидва стержні розтягнуться, деформація першого стержня буде  $BB_1 = \Delta l_1$ , а другого  $CC_1 = \Delta l_2$ . З подібності трикутників  $BOB_1$  і  $CO C_1$  встановимо зв'язок між цими деформаціями:

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a}; \quad \Delta l_1 = \frac{1}{2} \Delta l_2.$$

Фізична сторона задачі. Деформації стержнів  $(\Delta l_1, \Delta l_2)$  і зусилля в них  $(N_1, N_2)$  зв'язані законом Гука (2.6), а саме:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_2}.$$

Синтез. Спочатку підставляємо фізичні рівняння в геометричне:

$$\frac{N_1 l}{EA_1} = \frac{1}{2} \frac{N_2 l}{EA_2},$$

Враховуючи, що  $A_1 = A_2$ , дістаємо  $N_1 = N_2 / 2$ .

Розв'язуючи останнє рівняння разом із рівняннями статки, маємо  $N_1 = 0,6 F$ ;  $N_2 = 1,2 F$ . Для визначення площі поперечного перерізу стержнів скористаємося умовою міцності /2.15/. Оскільки, більше зусилля розвивається в другому стержні, то  $N_{max} = N_2 = 1,2 F$  !

$$A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]} = \frac{1,2 F}{[\sigma]} = \frac{1,2 \cdot 40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 300 \text{ мм}^2$$

Отже, для того щоб обидва стержні витримали навантаження  $F = 40 \text{ кН}$ , вони повинні мати діаметра

$$d \geq \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 300}{3,14}} = 19,5 \text{ мм}.$$

**Приклад 2.5.** Брус жорстко закріплений обома кінцями між двома стінками і навантажений силою  $F = 50 \text{ кН}$  /рис.2.18, а/. Частина бруса  $BC$  - сталевая,  $A_c = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $l_c = 0,4 \text{ м}$ ,  $E_c = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , частина  $CD$  - бронзова;  $A_d = 15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $l_d = 0,6 \text{ м}$ ,  $E_d = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Визначити зусилля в частинах бруса; побудувати епюри нормальних сил і напруг.

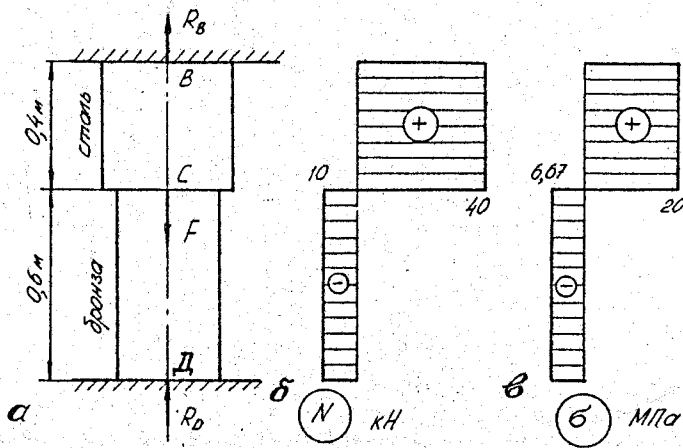


Рис.2.18. Епюра нормальної сили ( $N$ ) і напруги ( $\sigma$ ) у статично невизначеному стержні

Розв'язання. Задачі такого типу також відносяться до розряду статично невизначених.

Статична сторона задачі. Під дією зовнішньої сили виникають опорні реакції  $R_B$  і  $R_D$ . Для системи сил, що діють по одній прямій, статика дозволяє скласти лише одне рівняння рівноваги:  $R_B + R_D = F$ . Невідомих два:  $R_B$  і  $R_D$ , а рівнянь статички лише одне - задача один раз статично невизначена.

Геометрична сторона задачі. Оскільки кінці бруса закріплені, то результуюча деформація стержня дорівнює нулю, тобто  $\Delta l_c + \Delta l_d = 0$ . Фізична сторона задачі. Із закону Гука маємо

$$\Delta l_c = \frac{N_c l_c}{E_c A_c}, \quad \Delta l_d = \frac{N_d l_d}{E_d A_d}$$

Синтез. Спочатку, використовуючи метод перерізів, виражаємо зусилля в перерізах через невідомі реакції:

а/ на силевій ділянці BC:  $N_c = R_B$ ;

б/ на силевій ділянці CD:  $N_d = -R_D$ .

Підставляємо фізичні рівняння в геометричне:

$$R_B = R_D \frac{E_c A_c l_d}{E_d A_d l_c} = R_D \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 0,6}{1 \cdot 10^{11} \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4} = 4 R_D$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} R_B + R_D = F, \\ R_B = 4 R_D, \end{cases}$$

дістаємо

$$R_D = F/5 = 10 \text{ кН}; \quad R_B = 4 R_D = 40 \text{ кН}.$$

Зусилля в частинах становлять  $N_c = 40 \text{ кН}$ ,  $N_d = 10 \text{ кН}$ .

Вібра нормальних сил бруса показана на рис. 2.18, б.

Визначаємо напруги в точках поперечних перерізів частин бруса:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_c}{A_c} = \frac{40 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 20 \text{ МПа}; \quad \sigma_{CD} = \frac{N_d}{A_d} = \frac{10 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = -6,67 \text{ МПа}.$$

Вібра нормальних напруг зображена на рис. 2.18, в.

## 2.9. Монтажні і температурні напруги

Під час виготовлення стержневих конотрукцій важко забезпечити абсолютну точність довжин їх елементів. Здебільшого доводиться мати справу з невеликими відхиленнями від розрахункових розмірів стержнів. Всяка така неточність при монтажі конструкції спричиняє в ній додаткові напруги, які називаються монтажними.

Уявімо собі, що в стержневій системі /рис.2.19,а/ стержень 2 коротший, ніж потрібно, на величину  $\Delta$ . Щоб зібрати цю систему, потрібно

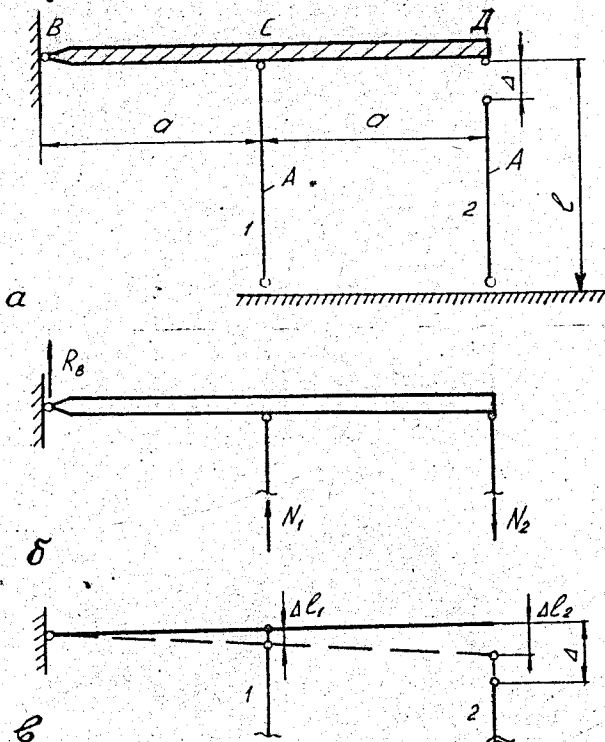


Рис.2.19. Схема утворення монтажних напруг в стержневій системі /а/; визначення напрямку нормальних сил у монтажній стержневій системі /б/; та геометрична сторона задачі стержневих систем /в/

стержень 1 стиснути, а стержень 2 розтягнути. Тоді в цій системі ще до основного навантаження виникнуть напруги, які можуть досягти значних величин. Якщо прикласти зовнішнє навантаження, то спрячені ним робочі напруги, додавшись до монтажних, можуть привести до руйнування системи, хоч значення робочих напруг і буде меншим за допустимі.

Водночас у статично визначених системах монтажні напруги не виникають.

Методика розрахунку монтажних напруг - така ж, як і розрахунків статично невизначених систем в цілому.

Розглянемо розрахунок монтажних напруг на прикладі. Нехай необхідно вмонтувати стержеву систему /рис. 2.19, а/, що має неточні початкові розміри стержнів. Якщо не було стержня 1, то система була б статично визначеною і в ніяких монтажних напруг не виникало б. Наявність же стержня 1 протидіє вільному повороту бруса навколо опори В на величину  $\Delta$ , щоб дати змогу приріпяти до неї стержень 2.

Отже, в заданій системі брус займе деяке проміжне положення. У стервні 1 виникне стискаюча  $N_1$ , а у стервні 2 - розтягуюча сила  $N_2$ , як це показано на рис. 2.19, б. Для  $N_1$  і  $N_2$  розрахуємо за тією ж методикою.

1. Ступінь статичної невизначеності. Плоска паралельна система сил дозволяє скласти два рівняння статика. Невідомих сил - три ( $R_B$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ), тому розглянута система один раз статично невизначена.
2. Статична сторона задачі. Для зв'язування зв'язку між  $N_1$  та  $N_2$  досить використати одне рівняння статика  $\sum M_A = 0$ ,  $N_1 a - N_2 2a = 0$ , звідки  $N_1 = 2N_2$ .

Остаточо маємо рівняння

$$\frac{2N_1 e}{EA} + \frac{N_2 e}{EA} = \Delta \quad \text{або} \quad 2N_1 + N_2 = \frac{EA \Delta}{e}$$

Розв'язуючи це рівняння разом з рівнянням статика, дістаємо:

а/ розтягуюче зусилля в стервні 2

$$N_2 = \frac{EA \Delta}{5e};$$

б/ стискаюче зусилля в стервні 1

$$N_1 = \frac{2EA \Delta}{5e}$$

Нехай у розглянутій конструкції обидва стержні сталі  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа мають однакові площі поперечного перерізу  $A = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>. Проектна довжина стержнів  $l = 2$  м, але другий стержень коротший від першого на 1 мм, тобто  $\Delta = 1$  мм. Визначимо монтажні напруги в точках поперечних перерізів стержнів.

$$\text{Зусилля в стержні 1 } N_1 = \frac{2EA\Delta}{5l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 2} = 0,4 \cdot 10^5 = 40 \text{ кН};$$

$$\text{в стержні 2 } N_2 = 0,5 N_1 = 0,5 \cdot 40 = 20 \text{ кН}.$$

Відповідно напруга в стержнях:

$$\sigma_{(1)} = -\frac{N_1}{A} = -\frac{40 \cdot 10^3}{10^{-3}} = -40 \text{ МПа}; \quad \sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 20 \text{ МПа}.$$

Отже, порівняно незначна неточність у довжині в процесі виготовлення одного із стержнів призводить до значних монтажних напруг. Якщо взяти для конструкційної сталі Ст 3 за допустиму напругу  $[\sigma] = 160$  МПа, то монтажна напруга, наприклад, в першому стержні /40 МПа/ вже становить 25% від  $[\sigma]$ .

В елементах статично невизначених систем напруги виникають також і під час зміни температури; такі напруги називаються температурними.

Методика розрахунку температурних напруг аналогічна розрахункам статично невизначених систем за дії силового навантаження; дещо змінюється тільки фізична сторона задачі.

Визначимо, наприклад, температурні напруги в стержні, затиснутому нерухомо між двома стінками /рис.2.20/, одна половина якого мідна, а інша – сталева, якщо його нагріта на  $\Delta t = 30$  °С. Візьмемо

$$E_M = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E_C = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad A = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad l = 1 \text{ м},$$

$$\text{температурні коефіцієнти лінійного розтягу для сталі } \alpha_C = 125 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1},$$

$$\text{для міді } \alpha_M = 165 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}.$$

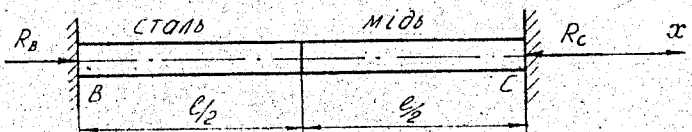


Рис.2.20. Схема стержневої системи, в якій виникають температурні напруги

Якщо температура підвищується, стержень видовжується і розширає стінки. Оскільки стінки непіддатливі, то в місцях закріплення стержня виникнуть стискувачі зусилля, що зумовлює появу реакцій  $R_B$  і  $R_C$ .

1. Статичний бік задачі. Для такої системи можна скласти лише одне рівняння статки:  $\sum F_x = 0$ ;  $R_B - R_C = 0$  або  $R_B = R_C$ .

2. Геометричний бік задачі. Оскільки температурне розширення стержня компенсується стиском його внаслідок непіддатливості стінок, то  $\Delta l_t = \Delta l_\sigma$ .

3. Фізичний бік задачі. Видовження від нагрівання визначається за формулою  $\Delta l_c = \alpha_c \Delta t \cdot l/2 + \alpha_M \Delta t \cdot l/2 = (\alpha_c + \alpha_M) \Delta t \cdot l/2$ .

Деформацію стиску знаходимо за законом Гука:

$$\Delta l_\sigma = \frac{Nl}{2EA_M} + \frac{Nl}{2EA_C} = \left( \frac{1}{E_M} + \frac{1}{E_C} \right) \frac{Nl}{2A}$$

4. Синтез. Підставимо фізичні рівняння в геометричне, дістанемо

$$(\alpha_M + \alpha_C) \frac{\Delta t l}{2} = \left( \frac{1}{E_M} + \frac{1}{E_C} \right) \frac{Nl}{2A};$$

$$N = -R_A = - \frac{(\alpha_M + \alpha_C) \Delta t A E_C E_M}{E_C + E_M}; \quad /2.32/$$

$$N = \frac{290 \cdot 10^{-7} \cdot 30 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^{11}} = -116 \text{ кН.}$$

Напряга в обох частинах стержня через однакову площу їх перерізу в них буде однаковою і становитиме

$$\sigma = \frac{N}{A} = - \frac{116 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -58 \cdot 10^6 \text{ Па} = -58 \text{ МПа.}$$

Формулу температурних напруг можна отримати з /2.32/:

$$\sigma = \frac{(\alpha_M + \alpha_C) E_C E_M}{E_C + E_M} \Delta t. \quad /2.33/$$

Отже, як видно з /2.33/, температурна напруга, що виникає в стержні з жорстко зчепленими кінцями, не залежить від довжини стержня.

### Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклади деталей, що піддаються деформації розтягу або стиску.

2. Для чого будують шари нормальних сил? Правила їх побудови і характерні особливості.

3. Який характер розподілу напруги по площі поперечного перерізу при розтягу стержня? Навести формулу для визначення нормальних напруг у поперечних перерізах стержня при розтягу.

4. Сформулюйте і запишіть закон Гука при розтягу /стиску/. Який фізичний зміст модуля Юнга; його розмірність?

5. Абсолютна і відносна деформації при розтягу; їх визначення. Знаходження переміщення перерізу при розтягу.

6. Запишіть і розкрийте зміст умови міцності при розтягу /стиску/.

7. Перелічіть механічні характеристики матеріала, які знаходять в процесі побудови діаграми розтягу. Дайте їх визначення.

8. Що таке допустима напруга? Як визначається допустима напруга для пластичних і крихких матеріалів?

9. Дайте визначення статично невизначених систем. Розкажіть порядок розкриття статичної невизначеності.

## 3. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ. ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

### 3.1. Напружений стан в точці

Відповідно до гіпотези неперервності матеріалів, кожна точка бруса оточена великою кількістю інших точок. Внаслідок дії зовнішніх сил, між точками виникають внутрішні сили взаємодії. Ці сили утворюють напруги в точці, визначення яких подано в гл. 1.

Для того щоб охарактеризувати напругу в деякій точці навантаженого тіла, проведемо через дану точку переріз площиною  $Q_1$  /рис.3.1/. Величина і напрям повної напруги  $P_1$  у точці перерізу залежать від величини і напрямку рівнодіяної на елементарній площадці  $dA$  внутрішніх сил  $dR$  /див. гл. 1/, яка в свою чергу визначається через діючі на тіло зовнішні зусилля. Якщо через точку  $B$  провести інший переріз /наприклад, площиною  $Q_2$  /рис.3.1,а/, то очевидно, що на аналогічній площадці  $dA$  цього ж перерізу може змінитись напрям рівно-

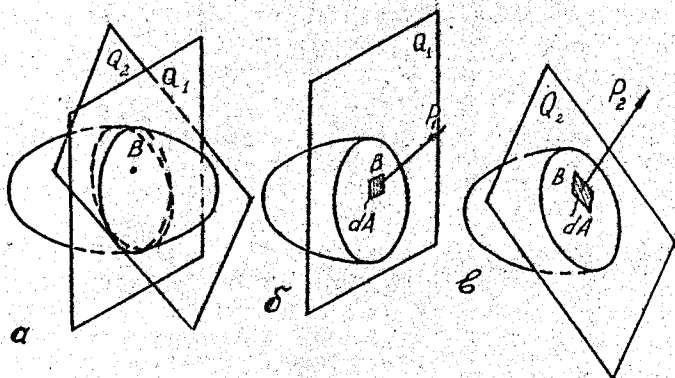


Рис.3.1. Означення напруг  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  в точці  $B$  на різних площадках перерізу  $Q_1, Q_2$ , що проходять через цю точку

дійної  $d\vec{R}$ . Значить, і напруга /позначимо її  $\vec{P}_2$ / також буде мати інший напрям і величину. З наведених міркувань можна зробити висновок, що повна напруга в точці змінюється за величиною і напрямом залежно від орієнтації перерізу, проведеного через цю точку. Оскільки через одну точку можна провести безліч площин, то в ній буде і безліч значень напруг.

Сукупність напруг, які виникають на безлічі площадок, що перетинають брус в досліджуваній точці, називається напруженим станом у цій точці. Проте, щоб обчислити напружений стан у точці, немає необхідності проводити через неї безліч площадок і на кожній із них знаходити напругу. В теорії пружності матеріалів доведено, що достатньо знати напруги на трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через досліджувану точку, і тоді, користуючись відповідними математичними формулами, можна розрахувати напругу в цій точці на довільно орієнтованій площадці.

Проводячи аналіз напруженого стану, в області досліджуваної точки вирізають нескінченно малий паралелепіпед. Вектори напруг  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ , що діють на гранях виділеного паралелепіпеда в області досліджуваної точки, повністю характеризують напружений стан у цій точці /рис.3.2/.

Паралелепіпед розглядають у прямокутній системі координат. Осі координат спрямовують у напрямі трьох ребер, що мають спільну вершину. Тоді зовнішні нормалі до трьох видимих граней паралелепіпеда  $n_1, n_2, n_3$  збігаються з додатними напрямками осей координат  $x, y, z$  /див.рис.3.2/. Напруги на трьох інших гранях паралелепіпеда не показані.

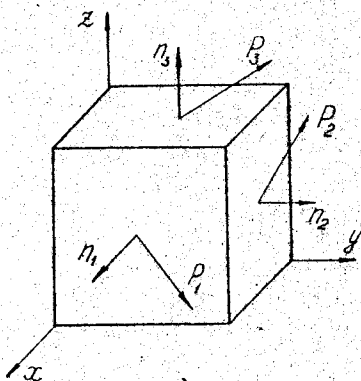


Рис.3.2. Повні напруги на трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через деяку точку.

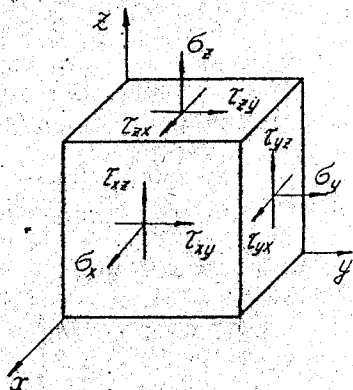


Рис.3.3. Компоненти напруженого стану в тівці!

Розглянемо проєкції повних напруг  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  на напрям осей  $x, y, z$  /рис.3.3/. Проєкція напруги  $\vec{p}_1$  на вісь  $x$ , паралельну нормалі  $n_1$ , називається нормальною напругою і позначається  $\sigma_x$ . Аналогічно проєкції  $\vec{p}_2, \vec{p}_3$  на осі  $y, z$  відповідно утворюють нормальні напруги  $\sigma_y, \sigma_z$ . Проєкція напруги  $\vec{p}_1$  на осі  $y, z$ , що лежать на грані з нормаллю  $n_1$ , утворює дотичні напруги, які позначають відповідно  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$ . Таким чином, дотичні напруги позначаються з двома індексами. Перший індекс означає вісь, яка паралельна нормалі до грані з розглядуваною напругою, другий індекс - вісь, якій паралельна дана дотична напруга. Аналогічно проєкції напруг  $\vec{p}_2, \vec{p}_3$  на відповідні осі утворюють дотичні напруги  $\tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ .

Отже, на гранях паралелепіпеда, виділеного в області досліджуваної точки навантаженого тіла, діють дев'ять проєкцій напруг. Ці проєкції називаються компонентами напруженого стану в точці і цілком його характеризують.

Звернемо увагу на правило знаків для компонент напруг. Нормальні напруги вважають додатними, якщо вони розтягують виділений паралелепіпед, і від'ємними, якщо стискають його. На рис.3.3 всі показані нормальні напруги  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  додатні.

Знак дотичних напруг пов'язаний не тільки з напрямом осей координат, а й з напрямом зовнішніх нормалей до відповідних граней паралелепіпеда. Якщо зовнішня нормаль до грані збігається з додатним напрямом осі, то дотичні напруги будуть додатними тоді, коли вони збігатимуться з додатними напрямками інших осей одєїєї координат, відносно яких вони паралельні. У випадку, коли дотичні напруги напрямлені протилежно паралельним їм осям координат, вони від'ємні. На рис.3.3 всі дотичні напруги на видимих трьох гранях мають знак "плюс". На невидимих же гранях паралелепіпеда зовнішні нормалі протилежно напрямлені відносно координатних осей. Якщо зовнішні нормалі до граней паралелепіпеда протилежно напрямлені координатним осям, то дотичні напруги будуть додатними в тому випадку, коли вони також протилежно напрямлені відносно паралельних їм координатних осей. У протилежному разі дотичні напруги будуть від'ємними.

З умови рівноваги виділеного паралелепіпеда випливає, що на взаємно перпендикулярних гранях дотичні напруги, які напрямлені до спільного ребра, рівні за абсолютною величиною /рис.3.3/, тобто:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad /3.1/$$

Рівності /3.1/ відображають закон парності дотичних напруг. Отже, з дев'яти компонент напруг незалежними є лише шість.

Якщо змінюється орієнтація системи координат, а відповідно, і орієнтація паралелепіпеда, компоненти напруг на його гранях також змінюють значення і знак. Існує і таке положення паралелепіпеда, за якого на його гранях відразу всі дотичні напруги дорівнюють нулю. Нормальні напруги на гранях такого паралелепіпеда називаються головними і позначаються  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , а площадки, що відповідають цим граням, — головними площадками. У теорії пружності доведено, що головні напруги є екстремальними і між ними існує співвідношення

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad /3.2/$$

Так, якщо одна з головних напруг дорівнює 70 МПа, а дві інші відповідно 100 і -130 МПа, то їх обов'язково слід позначити так:  $\sigma_1 = 100$  МПа,  $\sigma_2 = 70$  МПа,  $\sigma_3 = -130$  МПа.

Неважно побачити, що напружений стан можна характеризувати головними напругами. В цьому разі можливі випадки, коли одна чи дві головні напруги дорівнюють нулю. В зв'язку з цим розрізняють три види напружених станів у точці:

1/ якщо тільки одна із головних напруг відмінна від нуля, то напружений стан у точці називається лінійним або одновісним /рис.3.4,а/;

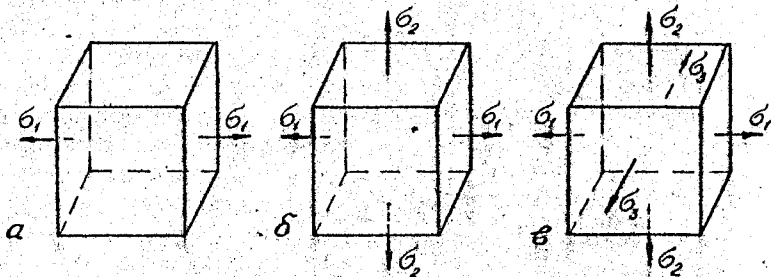


Рис.3.4. Напружений стан у точці: а - лінійний; б - плоский, в - об'ємний

2/ якщо тільки одна із головних напруг дорівнює нулю, то напружений стан у такій точці називається плоским, або двовісним /рис.3.4,б/;

3/ якщо всі три головні напруги відмінні від нуля, то такий напружений стан називається об'ємним, або тривісним /рис.3.4,в/.

Розглянемо більш детально кожний із трьох видів напруженого стану в точці.

### 3.2. Лінійний напружений стан

Лінійний напружений стан має місце в точках стержня, який розтягують або стискають поздовжняю силою. Розглянемо стержень призматичної форми з площею поперечного перерізу  $A$ , навантажений зосередженими розтягуючими силами  $F$  /рис.3.5/. На достатній відстані від місця прикладання сили /відповідно до принципу Сен-Венана /виберемо точку  $B$  і проведемо через цю точку поперечний переріз. Нормальна напруга в будь-якій точці цього перерізу, в тому числі і в точці  $B$ , визначається за отриманою раніше формулою

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad /3.3/$$

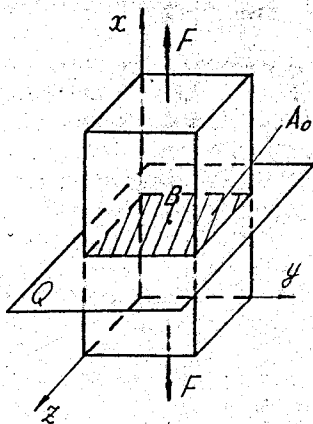


Рис.3.5. До визначення напруги в точці  $B$  при лінійному напруженому стані

Оскільки при розтягу стержня його напружений стан однорідний, то для дослідження напруг на різних похилих площадках уявно вирізаний паралелепіпед може бути довільних розмірів, в тому числі і такий, що має за грань поперечний переріз стержня  $A_0$ . На верхній і нижній гранях паралелепіпеда, паралельних площині  $A_0$ , діють розтягуючі напруги, які визначаються формулою /3.3/. На всіх бічних гранях нормальні напруги відсутні, тому що відсутні діючі сили. Дотичні напруги на всіх гранях дорівнюють нулю, оскільки розтягуючі сили  $F$  не утворюють зсуву виділених граней паралелепіпеда.

Оскільки на гранях паралелепіпеда відсутні дотичні напруги, то нормальні напруги тут будуть головними, і відповідно до формули /3.2/ дістанемо  $\sigma_1 = \sigma = F/A_0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$ , тобто кожна точка виділеного паралелепіпеда перебуває в лінійному напруженому стані /рис.3.6,а/. Надалі елемент, що перебуває в лінійному або плоскому напруженому стані, будемо зображати перерізом паралелепіпеда у вигляді плоскої фігури /рис.3.6,б/.

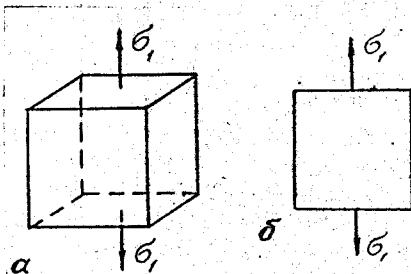


Рис.3.6. Зображення лінійного напруженого стану: а - в просторі, б - на площині

У такий спосіб зображення лінійного і плоского напружених станів можна ввести більш просте правило знаків для дотичних напруг, не пов'язане з вибором системи координат: дотичні напруги на площині додатні, якщо вони намагаються повернути розглядуваний елемент відносно довільної точки, взятої всередині елемента, за ходом годинникової стрілки, і від'ємні - якщо проти годинникової стрілки.

Розглянемо, як розподілені напруги на площині похилого перерізу. Для цього проведемо площину, нормаль  $n_\alpha$  до якої з віссю  $x$  паралельно леда утворює кут  $\alpha$  /рис.3.7/.

На похилій площині  $A_\alpha$  повну напругу  $P_\alpha$  зумовлену силами  $F$ , можна визначити за формулою

$$P_\alpha = \frac{F}{A_\alpha} \quad /3.4/$$

Оскільки площа  $A_\alpha$  зв'язана з  $A_0$  співвідношенням

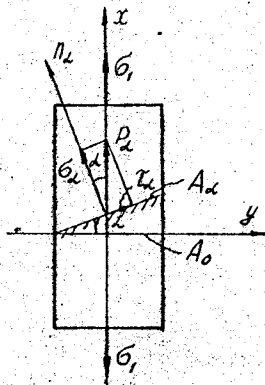
$$A_\alpha = A_0 / \cos \alpha, \text{ то}$$

$$P_\alpha = \frac{F}{A_0} \cos \alpha =$$

$$= \sigma_1 \cos \alpha, \quad /3.5/$$

де враховано, що  $F/A_0 = \sigma_1$ . Проекція повної напруги  $P_\alpha$  на нормаль  $n_\alpha$  утворює нормальну напругу  $\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha$ , або на підставі /3.5/

Рис.3.7. Визначення напруг  $\sigma_\alpha$  і  $\tau_\alpha$  при лінійному напруженому стані



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha. \quad /3.6/$$

Користуючись рівнянням /3.6/, можна простежити за зміною значень нормальної напруги на площадках, що мають різний нахил. Так, із збільшенням кута  $\alpha$  від  $0$  до  $90^\circ$  напруга  $\sigma_\alpha$  зменшується від значення  $\sigma_\alpha = \sigma_1$  при  $\alpha = 0$  до нуля при  $\alpha = 90^\circ$ . Отже, найбільше значення нормальної напруги маємо на головній площадці, де  $\sigma_\alpha = \sigma_1 = \sigma_{max}$  (при  $\alpha = 0$ ).

Проекція напруги  $\rho_\alpha$  на площадку  $A_\alpha$  утворює на ній дотичну напругу  $\tau_\alpha$ , яку можна визначити за формулою  $\tau_\alpha = \rho_\alpha \sin \alpha$  або згідно з /3.5/

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad /3.7/$$

Відповідно до формули /3.7/ найбільші дотичні напруги виникають на площадці з  $\sin 2\alpha = 1$ , тобто для якої  $2\alpha = 90^\circ$  і  $\alpha = 45^\circ$ . Значить, на площадці, нормаль до якої з напрямом поздовжньої осі  $x$  утворює кут  $45^\circ$ , дотичні напруги досягають найбільших значень

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}. \quad /3.8/$$

При стиску головні напруги мають значення  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -F/A_0$ . Тоді напружений стан у точці стержня визначається, як і при розтягу, формулами /3.6/ і /3.7/, лише в них замість  $\sigma_1$  необхідно підставляти  $\sigma_3$ .

**Приклад 3.1.** Визначити нормальні і дотичні напруги в точці  $B$  перерізу 1-1 і в точці  $C$  перерізу 2-2 стержня, якщо його площа поперечного перерізу  $A_0 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 40^\circ$ . Стержень навантажений зовнішніми силами  $F_1 = 40 \text{ кН}$  і  $F_2 = 72 \text{ кН}$  так, як показано на рис.3.8,а.

**Розв'язання.** Перш за все розбиваємо стержень на ділянки і, використовуючи метод перерізів, визначимо значення поздовжніх сил  $N_1$ ,  $N_2$  на кожній із них:  $N_1 = F_1 = 40 \text{ кН}$  /розтяг/,  $N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 72 = -32 \text{ кН}$  /стиск/. Побудуємо епюру нормальних сил /рис.3.8,б/.

Знайдемо нормальну напругу в поперечному перерізі, що проходить через точку  $B$ :

$$(\sigma_3)_B = \frac{N_2}{A_0} = - \frac{32 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = -16 \text{ МПа.}$$

Зазначимо, що оскільки на даній ділянці виділений елемент підлягає стиску, то в точці  $B$  маємо напругу  $\sigma_x = \sigma_3$ .

Аналогічно напруга в поперечному перерізі, що проходить через точку  $C$ , буде

$$(\sigma_1)_C = \frac{N L}{A_0} = \frac{40 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 20 \text{ МПа.}$$

Елементи, виділені на ділянках точок  $B$  і  $C$ , головні напруги  $\sigma_3$  і  $\sigma_1$ , а також похилі площини та невідомі поки напруги на них, показані на рис.3.9, 3.10. Визначимо нормальні  $\sigma_{\alpha 1}$  і дотичні  $\tau_{\alpha 1}$  напруги на похилій площині, утвореній перерізом 1-1.

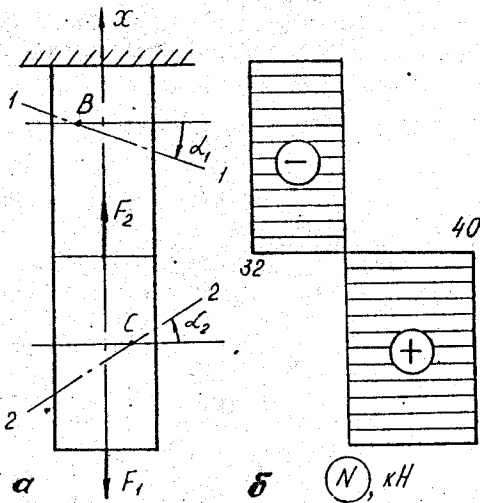


Рис.3.8. Вправа нормальній сили  $N$  в стержні, навантаженому силами  $F_1$  і  $F_2$

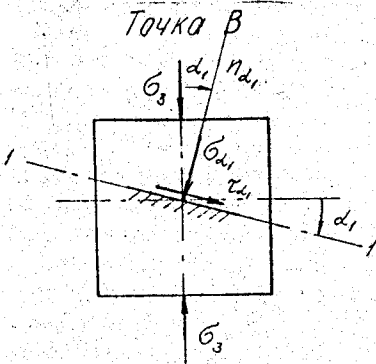


Рис.3.9. Схема до визначення напруг  $\sigma_{\alpha 1}$  і  $\tau_{\alpha 1}$  в точці  $B$  стержня, зображеного на рис.3.8

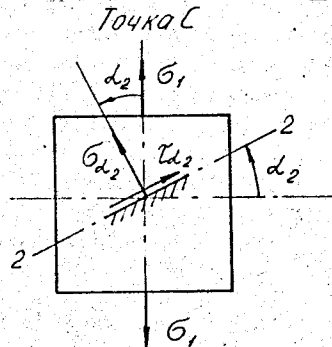


Рис.3.10. Схема до визначення напруг  $\sigma_{\alpha 2}$  та  $\tau_{\alpha 2}$  в точці  $C$  стержня, зображеного на рис.3.8

Відносно напрямку осі  $x$  /або  $\sigma_3$  / нормаль  $\pi_{\alpha_1}$ , утворює кут  $\alpha_1$ , який відраховується за годинниковою стрілкою. Тому, підставляючи кут в формули /3.6/ і /3.7/, його необхідно брати із знаком "мінус". Тоді за формулами /3.6/ і /3.7/

$$(\sigma_{\alpha_1})_B = \sigma_3 \cos^2 \alpha_1 = -16 \cdot 10^6 \cdot \cos^2 (-30^\circ) = -12 \text{ МПа},$$

$$(\tau_{\alpha_1})_B = \frac{\sigma_3}{2} \sin 2\alpha_1 = -8 \cdot 10^6 \cdot \sin(-60^\circ) = 6,94 \text{ МПа}.$$

Аналогічно, враховуючи знак кута  $\alpha_2$ , визначаємо напруги на похилій площині, яка утворена перерізом 2-2:

$$(\sigma_{\alpha_2})_C = \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 = 20 \cdot 10^6 \cos^2 40^\circ = 11,8 \text{ МПа},$$

$$(\tau_{\alpha_2})_C = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha_2 = \frac{\sigma_1}{2} \sin 80^\circ = 9,9 \text{ МПа}.$$

### 3.3. Плоский і об'ємний напружені стани

В процесі роботи механізмів і конструкцій часто зустрічаються види навантажень, за яких у точці реалізується плоский або об'ємний напружений стан. Розглянемо спочатку плоский напружений стан. Для цього в області досліджуваної точки умовно виріжемо елемент і розмістимо його так, як показано на рис.3.11. Нехай на бічних гранях виділеного елемента діють головні напруги  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . Знайдемо нормальні і дотичні напруги на площині, нормаль  $\pi_{\alpha}$  до якої в напрямом осі  $x$  /або  $\sigma_1$  / утворює кут  $\alpha_1$ , а з віссю  $y$  /або  $\sigma_2$  / - кут  $\alpha_2$ . В подальшому викладі будемо називати її  $\alpha$  - плошадком. На цій площадці діють нормальні  $\sigma_{\alpha}$  і дотичні  $\tau_{\alpha}$  напруги, які залежать від  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ . Згідно з принципом суперпозиції за формулою /3.6/

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2. \quad /3.9/$$

Оскільки  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ , а  $\cos(\alpha_1 + 90^\circ) = -\sin \alpha_1$ ,

то, опускаючи індекс у позначенні кута, рівняння /3.9/ переписуємо у вигляді

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad /3.10/$$

Міркуючи аналогічно, з допомогою формули /3.7/ визначаємо дотичну напругу на  $\alpha$ -площині:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha_1 + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha_1 + \right. \\ &\left. + \sigma_2 \sin (2\alpha_1 + 180^\circ) \right]. \end{aligned}$$

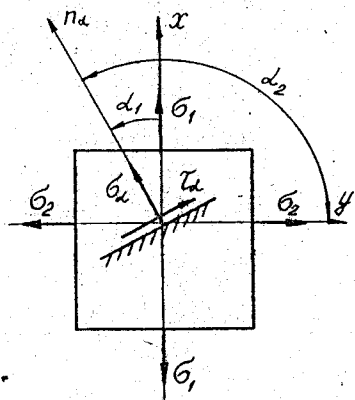


Рис.3.11. Схеми до визначення напруг  $\sigma_{\alpha}$  та  $\tau_{\alpha}$  при плоскому напруженому стані

Спростивши вираз і врахувавши, що  $\alpha_1 = \alpha$ , отримаємо

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad /3.11/$$

Слід пам'ятати, що у формулах /3.10/ і /3.11/  $\alpha$  - це кут, який відлічується від осі, вдовж котрої діє максимальна напруга, тобто  $\sigma_1$ .

Користуючись формулами /3.10/ і /3.11/, знайдемо нормальні і дотичні напруги на площині, перпендикулярній до  $\alpha$ -площини. Позначимо таку площину  $\beta$ -площиною /рис.3.12/, а нормальні і дотичні напруги на ній відповідно  $\sigma_{\beta}$  і  $\tau_{\beta}$ . Нормаль до  $\beta$ -площини позначимо  $n_{\beta}$ . Кут, що утворює нормаль з віссю  $x$  /або з напрямом дії напруги/ буде кутом  $\beta$ . Тоді за формулою /3.10/ отримаємо  $\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta$ . А оскільки  $\beta = \alpha + 90^\circ$ , то після підстановки дістанемо

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha. \quad /3.12/$$

Аналогічно одержимо розрахункову формулу для дотичних напруг:

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta =$$

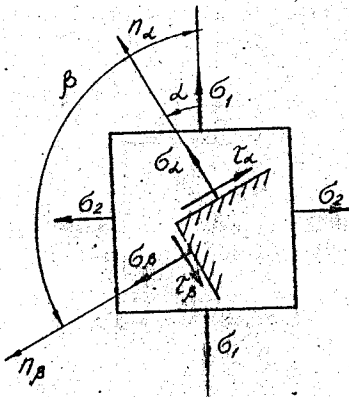
$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ),$$

або

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. /3.13/$$

Для встановлення властивостей напруженого стану на взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через досліджувану точку, проведемо

Рис. 3.12. Схема до визначення напруг  $\sigma_{\alpha}$  та  $\tau_{\alpha}$  при плоскому напруженому стані



аналіз отриманих формул /3.10/ - /3.13/.

Очевидно, що якщо додати формули /3.10/ і /3.12/, то одержимо:  $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2$ . Таким чином, при повороті елемента навколо осі, перпендикулярної площині рисунка, сума нормальних напруг на взаємно перпендикулярних гранях залишається сталою.

Порівнюючи формули /3.11/ і /3.13/, помічаємо, що  $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$ , тобто підтверджується закон парності дотичних напруг, а знак "мінус" відповідає правилу, наведеному в підрозд. 3.2.

Найбільші дотичні напруги, як виходить з аналізу формули /3.11/, маємо на площадках при  $\sin 2\alpha = 1$ , тобто тоді, коли  $2\alpha = 90^\circ$  або  $\alpha = 45^\circ$ . Значить, коли  $\alpha = 45^\circ$ , то

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad /3.14/$$

Необхідно зауважити, що згідно з прийнятим позначенням напруг, при плоскому напруженому стані головні напруги  $\sigma_1$  або  $\sigma_2$  зокрема можуть дорівнювати нулю. Тоді під час використання формул для аналізу напруженого стану необхідно замість  $\sigma_1$  підставляти  $\sigma_{max}$ , а замість  $\sigma_2$  -  $\sigma_{min}$ .

Розглянемо тепер об'ємний напружений стан, який має місце, коли на гранях виділеного елемента всі три головні напруження відмінні від нуля /рис.3.13,а/. Проведемо довільний переріз елемента так, щоб площина перерізу перетнула всі три координатні осі /рис.3.13,б/.

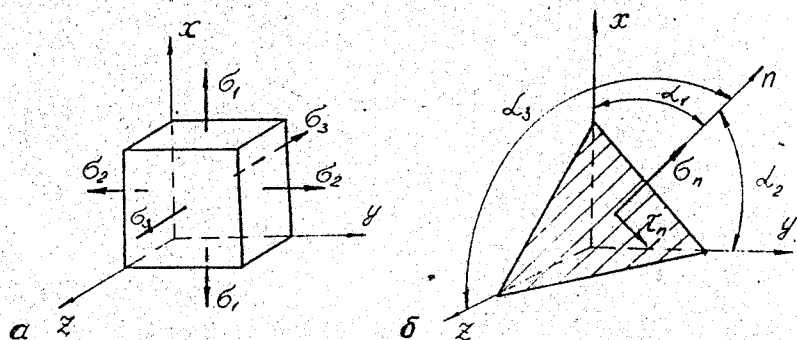


Рис.3.13. Об'ємний напружений стан в точці: а - головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ; б - визначення напружень  $\sigma_n$  та  $\tau_n$  у точці площини перерізу з нормаллю  $n$ .

Нормаль  $n$  до цієї площини утворює з координатними осями  $x, y, z$  відповідно кути  $\alpha_1, \alpha_2$  і  $\alpha_3$ . Нормальна напруження  $\sigma_n$  на такій площині визначається формулою, отриманою в теорії пружності і аналогічною формулі /3.9/:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3. \quad /3.15/$$

Дотичні напруження на цій площині обчислюють за формулою

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_n^2}. \quad /3.16/$$

Екстремальні значення нормальних напружень:  $\sigma_n^{\max} = \sigma_1, \sigma_n^{\min} = \sigma_3$ .  
Максимальні значення дотичних напружень

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad /3.17/$$

Особливі значення в розрахунках на міцність відіграють нормальні і дотичні напруги на площадці, яка має однаковий нахил до всіх координатних осей, тобто у випадку, коли  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$  /рис.3.13,б, 3.14/.

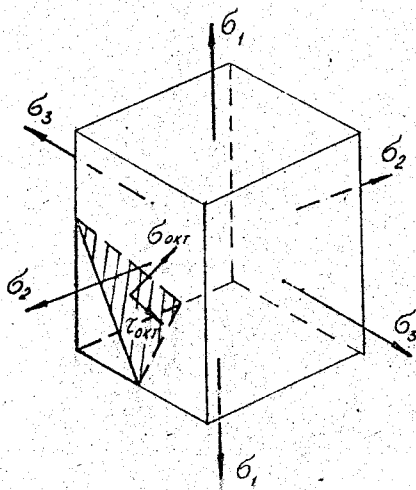


Рис.3.14. Октаедричні напруги  $\tau_{окт}$  і  $\sigma_{окт}$  при об'ємному напруженому стані

таедрична дотична напруга

Така площадка називається октаедричною, а напруги на ній - октаедричними напругами, що позначаються  $\sigma_{окт}$  і  $\tau_{окт}$ .

Відомо, що в ортогональній системі координат  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ .

Тоді для октаедричної площадки  $\cos^2 \alpha_1 = \cos^2 \alpha_2 = \cos^2 \alpha_3 = 1/3$ ,

і формула октаедричної нормальної напруги, згідно з /3.16/ має вигляд

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad /3.18/$$

Якщо використати формулу /3.16/, то ок-

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad /3.19/$$

у теорії пружності і пластичності користуються узагальнюючою характеристикою напруг, яку називають інтенсивністю напруг і позначають  $\sigma_i$ . Інтенсивність напруг  $\sigma_i$ , виражена через головні напруги, лише числовим коефіцієнтом відрізняється від  $\tau_{окт}$ :

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad /3.20/$$

тобто

$$\sigma_i = 3 \tau_{окт} / \sqrt{2}$$

З інтенсивністю напруг  $\sigma_y$  пов'язують момент початку текучості матеріалів, які працюють в умовах об'ємного напруженого стану.

**Приклад 3.2.** За заданими головними напругами, що діють на виділений елемент:  $\sigma_1 = 80$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -20$  МПа, знайти нормальну  $\sigma_y$  і дотичну  $\tau_y$  напруги на площині, нормаль якої з напрямом  $\sigma_1$  утворює кут  $\gamma = -30^\circ$ . Визначити також найбільші дотичні напруги в елементі.

**Розв'язання.** Навантажений елемент і  $\gamma$  - площадку, на якій діють напруги  $\sigma_y$  і  $\tau_y$ , зображено на рис.3.15. Користуючись формулами /3.10/ і /3.11/, знаходимо

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \\ &= 80 \cos^2 (-30^\circ) + (-20) \sin^2 (-30^\circ) = \\ &= 60 - 5 = 55 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_y &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{80 - (-20)}{2} \sin (-60^\circ) = \\ &= 50 \cdot (-\sqrt{3}/2) = -43,2 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

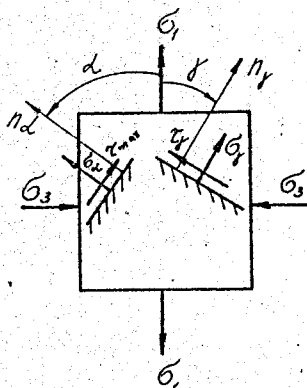


Рис.3.15. Схема до визначення напруг на довільних площадках при плоскому напруженому стані

Значення максимальної дотичної напруги визначимо за формулою /3.11/, враховуючи, що  $\tau_{max}$  буде на площадці, якщо  $\alpha = 45^\circ$  /рис.3.15/. Тоді

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{80 - (-20)}{2} = 50 \text{ МПа}.$$

**Приклад 3.3.** Знайти октаедричні нормальну та дотичну напруги для елемента, у якого головні напруги становлять:  $\sigma_1 = 12$  МПа,  $\sigma_2 = 10$  МПа,  $\sigma_3 = 8$  МПа.

**Розв'язання.** Заданий елемент і октаедрична площадка з напругами на ній показані на рис.3.14. Значення напруг визначаємо згідно з формулами /3.18/ і /3.19/:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{12 + 10 + 8}{3} = 10 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{4 + 16 + 4} = 1,63 \text{ МПа}.$$

### 3.4. Теорії міцності

Під дією зовнішніх сил матеріал може перебувати в різних механічних станах. Так, при незначних навантаженнях виникають пружні деформації, і матеріал перебуває в пружному стані. Наростаючі навантаження приводять до появи пластичних деформацій. В такому випадку говорять, що матеріал переходить у пластичний стан. За великих навантажень утворюються перші тріщини, і матеріал переходить у стан руйнування.

Всі ці механічні стани матеріалу ми вже спостерігали в процесі побудови діаграми розтягу маловуглецевої сталі. В опорі матеріалів момент появи пластичних деформацій /або ознака крихкого руйнування/ хоча б в одній точці матеріалу конструкції розглядається як порушення міцності в цілому. Розрахунки на міцність, що ґрунтуються на такому уявленні, називаються розрахунками за допустимими напругами.

Знаходження допустимих напруг у випадку лінійного напруженого стану /при розтягу або стиску/ не викликає труднощів. При плоскому /або об'ємному/ напруженому стані знаходження небезпечних напруг становить надзвичайно складну задачу. Справа в тому, що небезпечний напружений стан у точці залежить від співвідношення між головними напругами, а таких співвідношень по суті безліч. Крім цього, великі труднощі утворення і сама можливість реалізації і дослідження в лабораторних умовах величезної кількості різноманітних складних напружених станів.

В зв'язку з цим виникла необхідність, на основі дослідів при розтягу і стиску, теоретично визначити міцність матеріалів при довільних плоских і об'ємних напружених станах. В такому разі результати дослідів при лінійному напруженому стані ставть еталонем міцності. В результаті за допомогою такого еталона – так званої еквівалентної напруги /її позначають  $\sigma_{\text{екв}}$  / – обґрунтовується міцність матеріалів при довільних напружених станах.

Зрозуміло, що еквівалентною напругою має бути така сукупна характеристика напруги /стан  $B$  на рис. 3.16, б/, яку необхідно створити в розтягнутому елементі, щоб його стан був би однаково небезпечним з досліджуванним плоским чи об'ємним напруженим станом /стан  $A$  на рис. 3.16, а/.

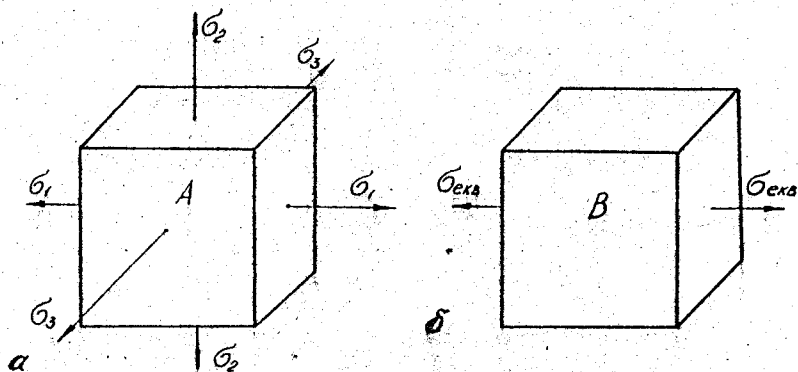


Рис. 3.16. Об'ємний напружений стан /а/ і еквівалентний йому лінійний напружений стан /б/ з напругою  $\sigma_{ekB}$

Для обґрунтування еквівалентної напруги вводять різні гіпотези про переважаючий вплив того чи іншого фактора на міцність матеріалів при довільному напруженому стані. Теорії, які обґрунтовують ознаки однакової безпеки руйнування матеріалів при різних напружених станах, називаються теоріями міцності. Математично довільну теорію міцності можна охарактеризувати залежністю

$$\sigma_{ekB} \leq [\sigma] = \frac{\sigma^0}{S}, \quad /3.21/$$

де  $\sigma^0$  - небезпечна нормальна напруга, отримана експериментально під час побудови діаграми розтягу /стиску/. За таку небезпечну напругу взято для пластичних матеріалів границю текучості  $\sigma^0 = \sigma_T$ , а для крихких - границю міцності  $\sigma^0 = \sigma_M$ .

З великої кількості запропонованих на даний час теорій розглянемо ті, які найбільш обгрунтовані експериментально і набули широкого застосування.

1. Теорія найбільших дотичних напруг /третя теорія міцності/. Згідно з цією теорією вважають, що пластична деформація виникає внаслідок необоротних зсувів у матеріалі, які спричиняються дотичними напругами.

За об'ємного напруженого стану найбільші дотичні напруги визначаються згідно з /3.17/:  $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$ . Отже, якщо величина  $\tau_{max}$  досягла деякого небезпечного значення  $\tau^0$ , властивого даному матеріалу і визначеного при простому розтягу, то незалежно від виду напруженого стану матеріал переходить до пластичного стану. Тоді умова небезпечного стану має вигляд  $\tau_{max} = \tau^0$ , а умова міцності записується співвідношенням

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{\tau^0}{S}. \quad /3.22/$$

На підставі /3.17/, а також тому, що  $\tau^0$  при лінійному напруженому стані можна виразити через  $\sigma_r$  /див./3.8/, умову міцності можна записати через головні напруги:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad /3.23/$$

Із формули /3.23/ виходить, що еквівалентна напруга за третьою теорією міцності

$$\sigma_{екв III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad /3.24/$$

В еквівалентній нарузі /3.24/ не врахована середня за значенням головна напруга  $\sigma_2$  - це і є основним недоліком третьої теорії міцності. Перевага ж цієї теорії полягає в тому, що вона добре підтверджується різними дослідженнями при плоскому і об'ємному напружених станах над матеріалами, що однаково працюють на розтяг і стиск. Експериментально установлено, що похибка в оцінюванні міцності через знехтування впливом  $\sigma_2$  не перевищує 15%.

2. Теорія питомої потенціальної енергії зміни форми тіла /четверта теорія міцності/. Згідно з цією теорією вважають, що граничний стан для матеріалу, незалежно від виду напруженого стану, настає тоді,

коли питома енергія зміни форми  $\mathcal{U}_\varphi$  в одиниці об'єму матеріала досягає свого небезпечного значення  $\mathcal{U}_\varphi^0$ , обчислюємо за простого розтягу/. Умову міцності у цьому разі можна записати так:

$$\mathcal{U}_\varphi \leq [\mathcal{U}_\varphi] . \quad /3.25/$$

Якщо величини, що входять до нерівності /3.25/, виразити через головні напруги, то отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma^0}{S} . \quad /3.26/$$

Ліва частина нерівності /3.26/ відома нам з формули /3.20/, вона виражає інтенсивність напруги  $\sigma_i$ . Тоді еквівалентна напруга за четвертою теорією міцності має вигляд

$$\sigma_{екв IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sigma_i . \quad /3.27/$$

Отже, четверта теорія міцності враховує всі три головні напруги, що, безперечно, є її перевагою. Зазначена теорія добре підтверджується дослідями над пластичними матеріалами.

3. Теорія міцності Мора. Ця теорія дозволяє встановити критерій міцності для крихких матеріалів, які по-різному чинять опір розтягу і стиску. Вона ґрунтується на систематизації великої кількості експериментальних даних, яка показує, що середня головна напруга  $\sigma_2$  несуттєво впливає на оцінку міцності матеріалів. На цій підставі Мор\* запропонував такий критерій міцності:

$$\sigma_{екв M} = \sigma - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \leq [\sigma_p] , \quad /3.28/$$

де  $[\sigma_p]$  і  $[\sigma_c]$  - допустимі напруги відповідно при розтягу і стиску.

\* Мор Христіан Отто /1835-1918/, професор. Створив теорію розрахунку статично невизначених систем методом сил, запропонував аналізувати напружений стан у точці графічно у вигляді кругів, розробив теорію міцності, яка називається його ім'ям.

Критерій міцності Мора широко використовується в процесі розрахунків конструкцій із крихких матеріалів. Для пластичних матеріалів  $[\sigma_p] = [\sigma_c]$ , тому теорія міцності Мора для них збігається з третьою теорією міцності /3.23/.

### 3.5. Розрахунок тонкостінних резервуарів

Розглянемо розрахунок тонкостінного резервуара, елемента якого працює за плоского напруженого стану. Резервуар має вигляд тонкостінної оболонки з формою тіла обертання. До таких конструкцій належать: водонапірні резервуари, повітряні і газові балони, цистерни тощо.

Знайдемо необхідну товщину  $t$  стінки циліндричного тонкостінного резервуара /рис.3.17/, всередині якого створено тиск. Під час розрахунків будемо користуватись, наприклад, четвертою теорією міцності.

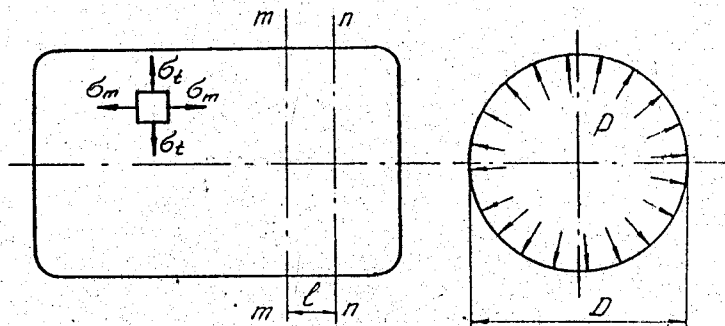


Рис.3.17. Схема навантаження циліндричного резервуара внутрішнім тиском

Очевидно, що внутрішній тиск на дніще буде відривати його від циліндричної частини резервуара або розривати резервуар за поперечним перерізом. Тиск на бокові стінки розриватиме циліндричну оболонку за твірними напрямками резервуара.

Отже, якщо вирізати з циліндричної частини резервуара прямокутний елемент /рис.3.17, 3.18/, то в ньому виникнуть розтягуючі напруги в двох взаємно перпендикулярних напрямках: меридіональні-нормальні напруги  $\sigma_m$ , у напрямі твірної циліндричної поверхні, і тангенціальні

напруги  $\sigma_t$ , у напрямі поперечних перерізів резервуара. В зазначених напрямках відсутні зсуви і перекоси елемента, а значить, на його гранях будуть відсутні дотячні напруги, тобто напруги  $\sigma_t$  і  $\sigma_m$  будуть головними. Третьою головною напругою, що діє на стінку резервуара в радіальному напрямі, можна знехтувати, оскільки вона мала порівняно з  $\sigma_t$  і  $\sigma_m$ . Отже, в точках стінки резервуара реалізується плоский напружений стан.

Для визначення напруг  $\sigma_t$  і  $\sigma_m$  використаємо метод перерізів. Площиною  $m-m$  розріжемо резервуар на дві частини /рис.3.17/ і розглянемо рівновагу, наприклад, правої його частини /рис.3.18,а/. В цьому разі тиск на дніще праворуч замінимо рівнодійною силою  $F$ , яка становить  $F = \rho \pi D^2 / 4$ . Зрівноважує силу  $F$  нормальна сила  $N$ , що утворюється напругою  $\sigma_m$  в кільцевому перерізі товщиною  $t$  і довжиною  $\pi D$ . Враховуючи, що  $N = \sigma_m \cdot t \cdot \pi D$  і прирівнюючи  $F$  до  $N$ , тобто  $\rho \pi D^2 / 4 = \sigma_m \cdot t \cdot \pi D$ , дістаємо співвідношення для визначення напруги  $\sigma_m$ :

$$\sigma_m = \frac{\rho D}{4t} \quad /3.29/$$

З цією ж метою проведемо на відстані  $l$  від перерізу  $m-m$  ще один переріз площиною  $n-n$  /див. рис.3.17/. В свою чергу, отримане кільце шириною  $l$  розріжемо на дві частини меридіональним перерізом, що збігається з поздовжньою віссю резервуара, і розглянемо рівновагу нижньої частини вирізаного кільця /рис.3.18,б/. В цьому разі тиск на стінки виділеної частини кільця можна замінити тиском на діаметральну площу  $A = D \cdot l$ . Тоді силу тиску можна визначити формулою  $F = \rho D l$ . Зазначена сила зрівноважується нормальною силою  $N_t$ , яка є результатом напруги  $\sigma_t$  по площі  $2t \cdot l$ . Враховуючи, що елемент кільця перебуває в рівновазі, тобто  $N_t = F$ , або  $\rho D l = \sigma_t \cdot 2t \cdot l$ , маємо

$$\sigma_t = \frac{\rho D}{2t} \quad /3.30/$$

Зазначимо, що тангенціальні напруги  $\sigma_t$  виявились удвічі більшими за меридіональні  $\sigma_m$ . Враховуючи нерівність /3.2/, запишемо значення головних напруг:

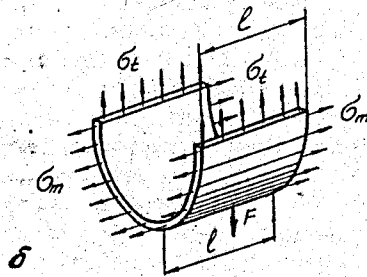
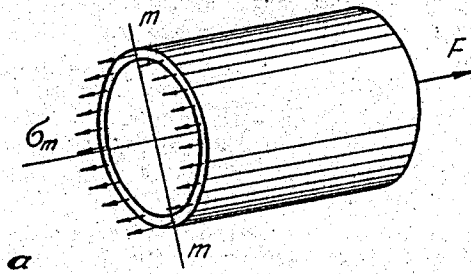


Рис.3.18. Поперечний /а/ і меридіональний /з поперечним/ /б/ розріз циліндричної поверхні резервуара

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\rho D}{2t}; \quad \sigma_3 = \frac{\rho D}{4t}; \quad \sigma_3 = 0.$$

/3.31/

Для визначення товщини стінки резервуара відповідно до поставленої задачі використаємо четверту теорію міцності. Підставимо значення головних напруг /3.31/ у /3.26/. Тоді

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{\sqrt{3} \rho D}{4t} \leq [\sigma],$$

звідси

$$t \geq \frac{\sqrt{3} \rho D}{4[\sigma]}.$$

Отже, користуючись теоріями міцності, можна виконувати розрахунки на міцність різноманітних деталей, що працюють в умовах плоского та об'ємного напружених станів.

### 3.6. Контактні напруги

Прикладом об'ємного напруженого стану може бути робота матеріалу в процесі передавання зусилля в шарикових і роликових підшипниках, зубчастих колесах, елементах кулачкового механізму тощо /так звані контактні задачі /.

Деформації і напруги, які виникають внаслідок взаємного тиску двох стичних тіл, називають контактними.

В основі розв'язання контактних задач лежать такі припущення:

а/ матеріал стичних тіл однорідний і ізотропний, а поверхні їх досить гладкі;

б/ сили, прикладені до тіл, утворюють у зоні контакту лише пружні деформації, які можуть бути визначені за законом Гука;

в/ площі контакту дуже малі порівняно із загальною поверхнею стичних деталей;

г/ сили тиску перпендикулярні до поверхні стичних тіл;

д/ силами тертя по поверхні контакту нехтують.

Внаслідок незначної деформації стичних тіл, дотик елементів конструкцій відбувається по дуже малих площинах. Розглянемо деякі приклади взаємодії контактних тіл.

Стиск двох куль. У випадку взаємного стиску силами  $F$  двох куль радіусами  $R_1$  і  $R_2$  /рис.3.19,а/ утворюється кругла площадка контакту, радіус якої визначається за формулою

$$r = 0,88 \sqrt[3]{F \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) / \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad * \quad /3.32/$$

де  $E_1, E_2$  - модулі пружності матеріалів куль.

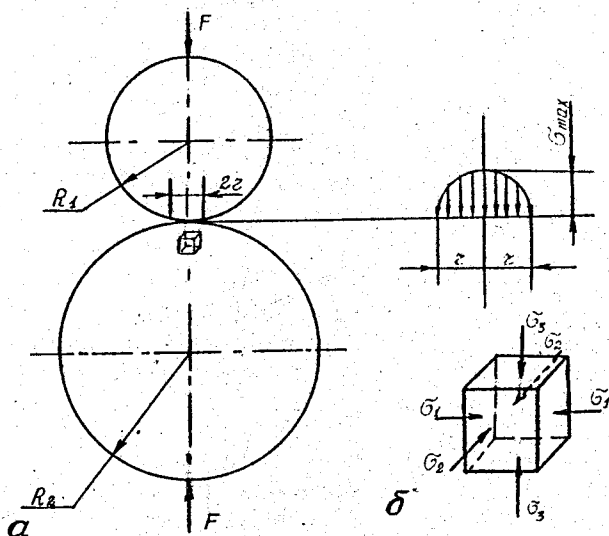


Рис.3.19. Контакт двох циліндрів /а/ | евра розподілу нормальних напруг на площі контакту /б/

\* Виведення формул цього параграфа виходить за межі програми даного курсу, подається в підручниках з теорії пружності!

Матеріал, який перебуває під площиною контакту, подається всебічною стиску. Причому експериментально доведено, що контактні напруги швидко зменшуються в міру віддалення від місця контакту. В одній з куль умовно виріжемо безкінечно малий паралелепіпед /рис.3.19,а/ так, щоб центр верхньої його грані збігався з центром площадки дотаку куль і вертикальна вісь симетрії паралелепіпеда проходила через центр круга дотаку. Впора стискувчої напруги по площі контакту розподілена так, як показано на рис. 3.19,б. Найбільша стискувча нормальна напруга розміщена в центрі площадки контакту і визначається за формулою

$$\sigma_{max} = 1.5F/\sqrt{\pi r^2} = 0,388 \sqrt{[4FE_1^2 E_2^2 (R_1 + R_2)^3] / [R_1^2 R_2^2 (E_1 + E_2)^2]}. \quad /3.33/$$

Головні стискувчі напруги, що діють на грані вирізаного паралелепіпеда /рис.3.19,б/, становлять

$$\sigma_3 = -|\sigma_{max}|; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = -0,8|\sigma_{max}|. \quad /3.34/$$

Дослідно виявлено, що найнебезпечнішою є точка матеріалу, яка розміщена приблизно на глибині 0,5 ч. Головні напруги в цій точці такі:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,1\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0,8\sigma_{max}. \quad /3.35/$$

Замінивши у формулі /3.33/ знак при  $R_2$  на протилежний, отримаємо значення  $\sigma_{max}$  для випадку тиску кульки радіусом  $R_1$  на вгнутій сферичній поверхні /рис.3.20/:

$$\sigma_{max} = 0,388 \sqrt{[4FE_1^2 E_2^2 (R_1 - R_2)^3] / [R_1^2 R_2^2 (E_1 + E_2)^2]}. \quad /3.36/$$

Стиснуті циліндри. При взаємному стиску двох циліндрів з паралельними твірними і радіусами  $R_1$  і  $R_2$  рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  утворюється прямокутна площадка контакту шириною  $b$ , яка визначається за формулою

$$b = 2,15 \sqrt{q \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) / \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}, \quad /3.37/$$

де  $E_1, E_2$  - модулі пружності матеріалів циліндрів. Найбільша стискувча напруга виникає в точках осі площадки контакту:

$$\sigma_{max} = 1,27 \frac{Q}{B} = 0,418 \sqrt{[2qE_1E_2(R_1+R_2)]/[R_1R_2(E_1+E_2)]} \quad /3.38/$$

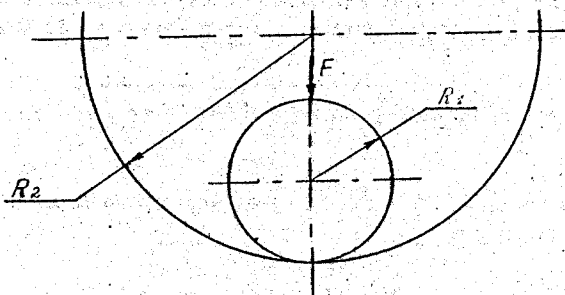


Рис.3.20. Схема утворення контактних напруг на вгнутій сферичній поверхні!

Найнебезпечніша точка матеріалу розміщена на вертикальній осі на глибині, що дорівнює приблизно  $0,48$ . Головні напруги в цій точці мають значення:

$$\sigma_1 = -0,18\sigma_{max}; \quad \sigma_2 = -0,288\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0,78\sigma_{max} \quad /3.39/$$

Наведені формули отримані, якщо  $\mu = 0,3$  /де  $\mu$  - коефіцієнт Пуассона/. Проте на практиці вони справедливі і для інших значень  $\mu$ .

Розрахунки на міцність матеріалів, які зазнають контактних напруг, проводяться за третьою /3.23/ або четвертою /3.26/ теоріями міцності. Вносячи до формул /3.23/ і /3.26/ значення головних напруг у небезпечній точці, виражені через  $\sigma_{max}$  в центрі площадки контакту, умови міцності переписують у такому вигляді:

$$\sigma_{екв} = m \sigma_{max} \leq [\sigma]$$

або

$$\sigma_{max} \leq \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{конт}, \quad /3.40/$$

де  $[\sigma]_{\text{конт}}$  - допустиме значення найбільшої напруги в місці контакту. Значення коефіцієнта  $\eta$  визначається залежно від вибраної теорії міцності. Допустимі значення контактних напруг наведені в довідниках з опору матеріалів. Наприклад, для роликкових і шарикових підшипників із хромистої сталі беруть

$$[\sigma]_{\text{конт}} = /3500 \dots 4000/ \text{ МПа.}$$

**Приклад 3.4.** Шарик підшипника зазнає найбільшої стискуючої сили  $F = 100 \text{ Н}$ . Вважаючи, що шарик підшипника розміщено на вгнутій сфері радіуса  $R = 100 \text{ мм}$ , визначити розміри площі контакту, а також найбільшу напругу в центрі контактної площі. Перевірити міцність шарико-підшипника, використавши четверту теорію міцності, якщо діаметр шарика  $d = 20 \text{ мм}$ , матеріал шарика і сферичної поверхні виготовлені із сталі 30ХГСА, для якої  $[\sigma] = 1000 \text{ МПа}$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Розв'язання. Стиск шарика, який розміщений на вгнутій сферичній поверхні, зображено на рис.3.20, де  $R_1 = \frac{d}{2} = 10 \text{ мм}$ ,  $R_2 = -R = -100 \text{ мм}$ .

Розміри контакту /радіус  $r$  круглої площадки/ визначимо за формулою /3.32/, враховуючи, що  $E_1 = E_2 = E$ :

$$r = 0,88 \sqrt[3]{\frac{2ER_1R_2}{E(R_2 + R_1)}} = 0,88 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot (-100) \cdot 10^{-3}}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot (-90) \cdot 10^{-3}}} =$$

$$= 0,88 \cdot 10^{-4} \sqrt[3]{200/18,9} = 1,93 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,193 \text{ мм.}$$

Значення найбільшої напруги на цій площадці визначаємо за формулою /3.33/

$$\sigma_{\text{max}} = 1,5 \frac{F}{\pi r^2} = 1280 \text{ МПа.}$$

Головні напруги в найбільш небезпечній точці шарико-підшипника знаходимо за співвідношеннями /3.35/. Підставивши значення  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  в /3.27/, дістанемо

$$\sigma_{\text{екв IV}} = 0,62 \sigma_{\text{max}} \leq [\sigma],$$

або

$$\sigma_{\text{max}} \leq \frac{[\sigma]}{0,62} = \frac{1000}{0,62} = 1613 \text{ МПа.}$$

Оскільки  $\sigma_{max} = 1280$  МПа менша за допустиму  $[\sigma]_{конт} = 1613$  МПа, то міцність шарикопідшипника забезпечена.

#### Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення лінійного, плоского і об'ємного напружених станів. Навести приклади.
2. Які правила знаків вводяться для нормальних і дотичних напруг?
3. Доведіть, що сума нормальних напруг на двох довільних взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через дану точку навантаженого тіла, величина стала.
4. Що таке головні площини і головні напруги?
5. Що таке октаедричні нормальна і дотична напруги та інтенсивність напруг? Для чого ці величини використовують в опорі матеріалів?
6. Що розуміють під небезпечним станом навантаженого тіла? Яка точка перерізу тіла називається небезпечною?
7. Що розуміють під гіпотезами міцності? Перелічіть відомі вам теорії міцності.
8. Сутність і область використання третьої теорії міцності? Напишіть умову міцності за третьою теорією.
9. Сутність і область використання четвертої теорії міцності? Напишіть умову міцності за четвертою теорією.

#### 4. ЗСУВ. ПРАКТИЧНІ РОЗРАХУНКИ НА ЗРІЗ І ЗМІНАННЯ

##### 4.1. Напружений стан при зсуві

Деформація зсуву виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельні перерізи стержня один відносно одного при незмінній відстані між ними. Деформації зсуву зазнають частини листового матеріалу під час різання його ножицями /рис.4.1,а,б/. При зсуві з шести внутрішніх силових факторів /див. підрозд.1.2/ відмінною від нуля залишається тільки поперечна сила  $Q_y$  або  $Q_z$ . Надалі, опускаючи індекси, поперечну силу позначатимемо  $Q_y$ . Приклади деталей машин, які працюють на зсув: шпонкові, штифтові, заклепочні, зварні, паєні і клеєні з'єднання тощо.

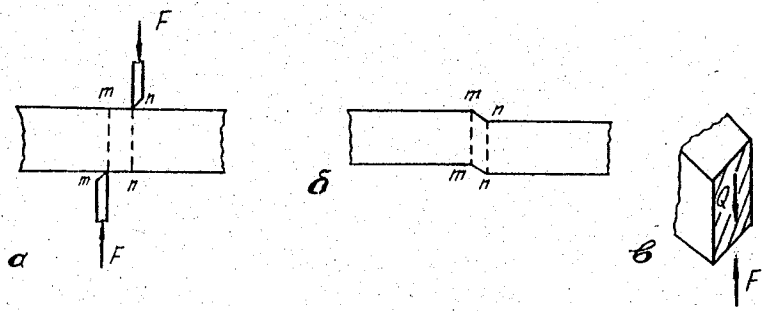


Рис.4.1. Схема дії сил при зсуві /а/, вигляд деформованого елемента /б/ і напрям поперечної сили  $Q$  при зсуві

Використовуючи метод перерізів, розріжемо стержень на ділянці зсуву між площинами  $m-m$  і  $n-n$  /рис.4.1,в/ і визначимо значення поперечної сили. Із умови рівноваги  $Q = F$ . Оскільки поперечні сили в перерізах спричиняють дотичні напруги, то відповідно до інтегральних рівнянь рівноваги /1.8/ маємо

$$Q = \int_A \tau dA. \quad /4.1/$$

Вважають, що при зсуві дотичні напруги розподілені на площі поперечного перерізу стержня рівномірно. Тоді із /4.1/ знаходимо

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \quad /4.2/$$

На ділянці стержня, де відбувається деформація зсуву, виріжемо елемент  $ABCD$ ,  $B, C, D$ , /рис.4.2,а/ з розміром ребра  $a$  і покажемо його у збільшеному вигляді /рис.4.2,б/. Для наочного уявлення про деформацію зсуву закріпимо, наприклад, нижню грань  $AA, D, D$  елемента. На гранях  $DCC, D$  і  $ABB, A$  діють дотичні напруги, величину яких ми вже визначили за формулою /4.2/. Відповідно до закону парності дотичних напруг, такі ж дотичні напруги  $\tau$  діють і на

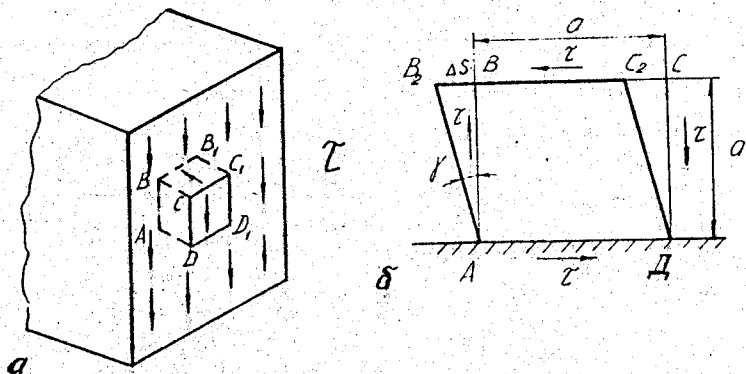


Рис.4.2. Встановлення напруженого стану в точці поперечного перерізу при зсуві /а/ і ілюстрація визначення абсолютного ( $\Delta S$ ) і відносного ( $\gamma$ ) зсуву /б/

гранях  $BB_2C_2C_1$  і  $AA_2D_2D_1$ . Внаслідок дії дотичних напруг елемент перекоситься, і видима на рис.4.2,б грань  $ABCD$  займе положення  $A_2B_2C_2D_2$ . На гранях же  $ABCD$  і  $A_2B_2C_2D_2$  /рис.4.2,а/ нормальні і дотичні напруги відсутні, оскільки відсутні на них внутрішні зусилля. На підставі результатів аналізу робимо висновок, що розглядуваний елемент перебуває в плоскому напруженому стані.

Напружений стан у точці, коли на гранях вирізаного навколо неї елемента відсутні нормальні, а діють лише дотичні напруги, називається частим зсувом.

Назвемо грань елемента  $DCC_2D_1$   $\alpha$ -площадкою, а грань  $BB_2C_2C_1$ , що перпендикулярна до неї,  $\beta$ -площадкою. В цьому разі на  $\alpha$ -площадці діють напруги  $\tau_\alpha = \tau$ ,  $\sigma_\alpha = 0$ , на  $\beta$ -площадці  $\tau_\beta = -\tau$ ,  $\sigma_\beta = 0$ . Користуючись нерівністю /3.2/, обчислимо головні напруги такого плоского напруженого стану:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau. \quad /4.3/$$

Величина  $\Delta S / BB_2$  або  $CC_2$  /рис.4.2,б/, на яку змістилась грань елемента внаслідок деформації зсуву, називається абсолютним зсу-

вом. Кут  $\beta_2 AB$  між гранями елемента до і після деформації зсуву називається відносним зсувом. Відносний зсув позначається літерою  $\gamma$  і вимірюється в радіанах.

Абсолютний і відносний зсуви взаємозв'язані. Так, з трикутника  $\beta_2 AB$  маємо  $\tan \gamma = \Delta S / a$ . Внаслідок мализни кута  $\gamma$  вважають, що  $\tan \gamma = \gamma$ , тоді

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a} \quad /4.4/$$

В межах пружності між відносним зсувом  $\gamma$  і дотичними напруженнями  $\tau$  існує зв'язок. Цей зв'язок виражається законом Гука, який для деформації зсуву формулюється так: відносний зсув матеріалу прямо пропорційний дотичним напругам, що спричиняють цей зсув, тобто

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau \quad /4.5/$$

Коефіцієнт пропорційності  $G$  називається модулем зсуву, або модулем пружності другого роду. Для ізотропних матеріалів він пов'язаний з іншими механічними характеристиками співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad /4.6/$$

де  $E$  - модуль пружності першого роду;  $\mu$  - коефіцієнт Пуассона.

Виразимо абсолютний зсув  $\Delta S$  через поперечну силу. Для цього в формулу /4.4/ підставимо /4.5/ і /4.2/, тоді

$$\Delta S = \frac{Qa}{GA} \quad /4.7/$$

Формула /4.7/ виражає закон Гука для абсолютного зсуву.

Аналогічно формулі /2.26/ потенціальна енергія деформації при зсуві визначається формулою

$$u_a = \frac{Q \Delta S}{2},$$

або після підстановки значення  $\Delta S$  формули /4.7/

$$u_a = \frac{Q^2 a}{2GA} \quad /4.8/$$

Цяому потенціальну енергію деформації при зсуві можна отримати з формули /4.8/, поділивши її на об'єм елемента  $V = Aa$ , тобто

$$\nu_a = \frac{u}{V} = \frac{\tau^2}{2G} \quad /4.9/$$

#### 4.2. Розрахунки деталей на зріз і зминання

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають зрізом. Окремим випадком зрізу є сколювання дерев'яних елементів вздовж волокон деревини. Крім того, деформація зсуву часто супроводжується зминанням елементів деталі. Тому деталі, що працюють на зсув, необхідно вміти розраховувати на міцність при зрізі і зминанні.

Розглянемо приклад розрахунку на міцність заклепочного з'єднання /рис.4.3,а/.

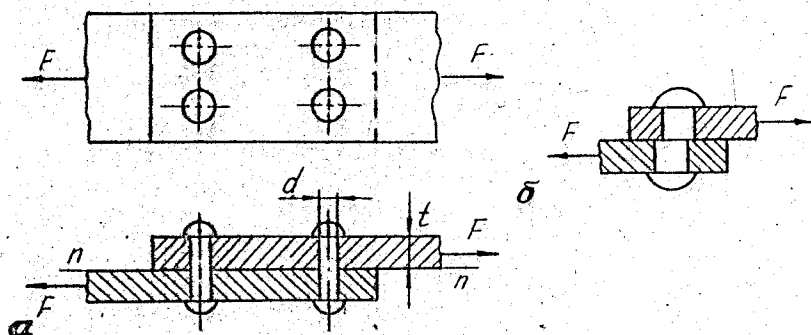


Рис.4.3. Вид /а/ і деформація зсуву /б/ заклепочного з'єднання

Чотири заклепки, розміщені в два ряди, з'єднують між собою два листи. Під дією сили  $F$  ці листи намагаються зсунути один відносно одного, чому запобігають заклепки. По площині з'єднання листів /ця площина на рис.4.3,б позначена через  $n$ - $n$ / відбувається деформація зсуву в заклепках. Якщо діаметр заклепки  $d$ , то дотична напруга в її поперечному перерізі згідно з формулою /4.2/

$$\tau = \frac{F}{nA} = \frac{4F}{n\pi d^2},$$

де  $n$  - кількість заклепок;  $A = \pi d^2/4$  - площа поперечного перерізу однієї заклепки.

Якщо допустиму дотичну напругу при зрізі позначити через  $[\tau]$ , то умова міцності на зріз заклепочного з'єднання запишеться у вигляді

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{n \pi d^2} \leq [\tau] \quad /4.10/$$

З цієї умови визначають необхідний діаметр заклепки або їх кількість:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{n \pi [\tau]}}, \quad /4.11/$$

$$n \geq \frac{4F}{\pi d^2 [\tau]}$$

Умова міцності /4.10/ отримана для з'єднання листів однозрізними заклепками. Бувають випадки, коли з'єднання перекриваються двома накладками /рис.4.4/.

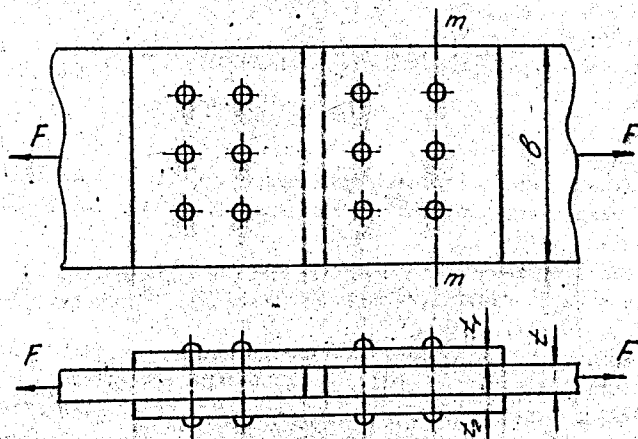


Рис.4.4. Схема до розрахунку заклепочного з'єднання

В такому випадку площа зрізу збільшується вдвічі, і дотичні напруги визначаються за формулою

$$\tau = \frac{F}{2nA} = \frac{2F}{n\pi d^2} \quad /4.12/$$

В загальному випадку багатозрізних заклепок умова міцності набирає вигляду

$$\tau = \frac{F}{knA} = \frac{4F}{kn\pi d^2} \leq [\tau] \quad , \quad /4.13/$$

де  $k$  - число зрізів.

Аналогічно виконують розрахунки на зріз і при інших видах з'єднань.

При розрахунках на зріз допустимі дотичні напруги  $[\tau]$  обчислюють за допустимими нормальними напругами  $[\sigma]$ , для чого використовують розглянуті раніше гіпотези міцності. Оскільки за чистого зсуву  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau$ , то окориставшись умовою /3.23/, за третьою теорією міцності знайдемо

$$[\tau] = 0,5 [\sigma] \quad . \quad /4.14/$$

Згідно з четвертою теорією міцності /3.26/

$$[\tau] = 0,6 [\sigma] \quad . \quad /4.15/$$

Оскільки деталі з'єднань виготовляють з пластичних матеріалів, то для визначення допустимих дотичних напруг  $[\tau]$  найбільше підходить вираз /4.15/.

У машинобудуванні для штифтів, шпонок і т.п. допустимі дотичні напруги на зріз часто приводять у довідниках або беруть на практиці

$$[\tau] = (0,25 \dots 0,35) \sigma_r \quad .$$

Виконання умови міцності на зріз не завжди гарантує міцність і надійність заклепного, шпоночного чи іншого з'єднання. Напруги, які виникають на поверхнях отвору і з'єднувальних елементів, приводять також до змінання цих поверхонь /рис. 4.5, а/. Вони називаються напругами змінання і позначаються  $\sigma_{3M}$ . Тиск на циліндричну поверхню заклепки, штифта чи іншої з'єднуючої деталі розподіляється нерівно-

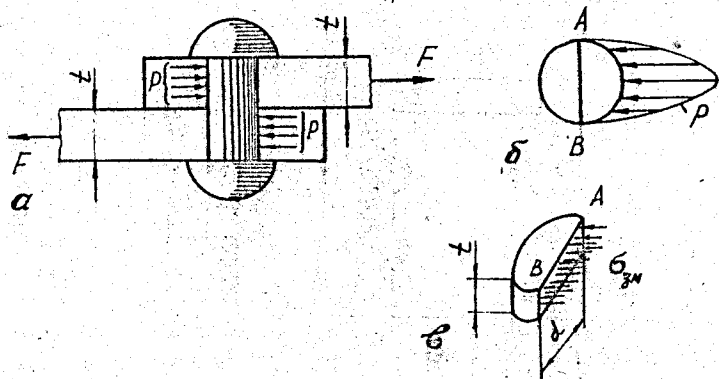


Рис.4.5. Схема до розрахунку заклепного з'єднання на зминання при зсуві

мірно /рис.4.5,б/. В практичних розрахунках цей тиск проєктують на меридіональну площу перерізу, що змінюється /рис.4.5,в/, і усереднюють за цією площею.

Розрахунок, який забезпечує вибір розмірів деталей за відсутності виникнення пластичної деформації стінок отворів і з'єднуючих елементів, називають розрахунком на зминання. Розрахункова формула умови міцності на зминання має вигляд

$$\sigma_{3M} = \frac{F}{A_{3M}} \leq [\sigma_{3M}], \quad /4.16/$$

де  $A_{3M}$  - площа зминання.  
Допустимі напруги на зминання

$$[\sigma_{3M}] = (1,7 \dots 2,0) [\sigma]. \quad /4.17/$$

Враховуючи, що отвори під з'єднувальні елементи ослаблюють листи /рис.4.6/, останні необхідно перевірити також на розтяг в найбільш послабленому перерізі за умовою міцності /2.15/.

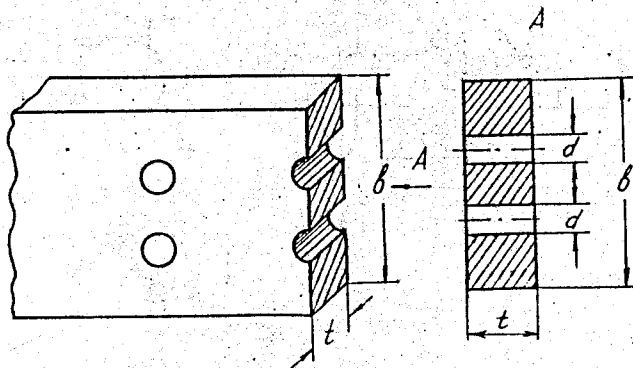


Рис.4.6. Послаблення площі поперечного перерізу листа при зсуві

**Приклад 4.1.** Два сталеві листи /рис.4.4/ шириною  $b = 200$  мм і товщиною  $t = 10$  мм з'єднані за допомогою шести заклепок і двох накладок шириною 200 мм і товщиною  $t_1 = 8$  мм. Діаметри заклепок  $d = 20$  мм. Перевірити міцність з'єднання, якщо листи розтягуються силами  $F = 200$  кН, допустимі напруги для листа і накладок на розтяг  $[\sigma] = 160$  МПа, на зріз  $[\tau] = 60$  МПа, на зминання  $[\sigma_{зм}] = 200$  МПа.

**Розв'язання 1.** Обчислимо напруги в листах в найбільш послабленому перерізі, наприклад  $m-m$ . Визначаємо площу перерізу  $A = bt - ndt = 200 \cdot 10 - 3 \cdot 20 \cdot 10 = 1400$  мм<sup>2</sup>. Тоді

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^3}{1400 \cdot 10^{-6}} = 143 \cdot 10^6 \text{ Па} = 143 \text{ МПа.}$$

Оскільки нормальна напруга  $\sigma = 143$  МПа не перевищує допустимої  $[\sigma] = 160$  МПа, міцність листів при їх розтягу забезпечена.

2. Перевіряю міцність з'єднання на зріз, враховуючи, що заклепки двозрізні  $K = 2$ :

$$\tau = \frac{4F}{K n d t} = \frac{4 \cdot 200 \cdot 10^3}{2 \cdot 6 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 53 \cdot 10^6 \text{ Па} = 53 \text{ МПа.}$$

Дотичні напруги в заклепках при зсуві  $\tau = 53$  МПа не перевищують допустимих дотичних напруг для матеріалу заклепки  $[\tau] = 60$  МПа, тому міцність заклепочного з'єднання на зріз також забезпечена.

3. Перевіряємо міцність заклепочного з'єднання на зминання, враховуючи, що

$$\sigma_{3M} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d t} = \frac{200 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} = 167 \cdot 10^6 \text{ Па} = 167 \text{ МПа.}$$

Оскільки  $\sigma_{3M} < [\sigma_{3M}]$ , то міцність заклепочного з'єднання забезпечена.

**Приклад 4.2.** Вал передає обертальний момент  $T = 400$  Н·м за допомогою шпоночного з'єднання (рис.4.7). Діаметр вала  $d = 42$  мм. Розміри шпонки згідно з СТ СЗВ 189-75 для даного діаметра вала: ширина  $b = 12$  мм, висота  $h_2 = 8$  мм, глибина заходу шпонки у вал  $t_1 = 5$  мм, робоча довжина шпонки  $l_p = 50$  мм. Перевірити міцність шпоночного з'єднання, якщо допустима напруга на зминання  $[\sigma_{3M}] = 140$  МПа, на зріз  $[\tau_{зр}] = 90$  МПа.

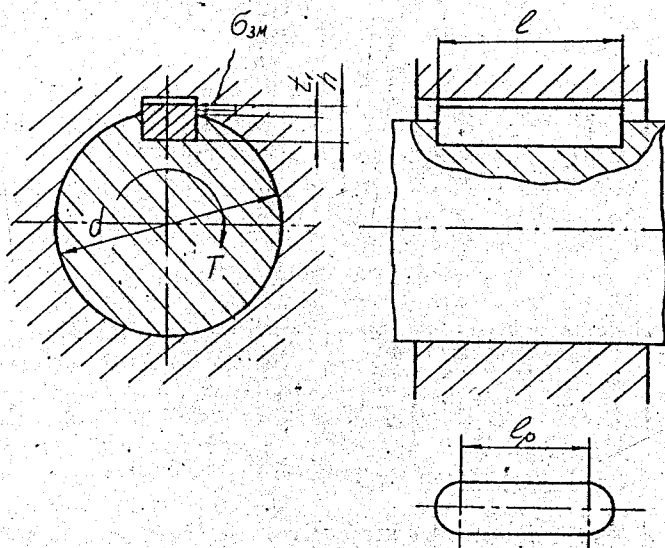


Рис.4.7. Схема до розрахунку шпоночного з'єднання на зріз і зминання

Розв'язання. 1. Перевіримо міцність з'єднання на зминання

$$\sigma_{3M} = \frac{F}{A_{3M}} = \frac{2T}{d(h-t)l_p} = \frac{2 \cdot 400}{0,042(0,08-0,05) \cdot 0,05} = 167 \cdot 10^6 \text{ Па} = 167 \text{ МПа.}$$

Напруга зминання  $\sigma_{3M} = 126,9 \text{ МПа}$  не перевищує допустимої напруги  $[\sigma_{3M}] = 140 \text{ МПа}$ ; значить, міцність при зминанні забезпечена.

2. Перевіримо міцність з'єднання на зріз

$$\tau = \frac{F}{A_{3p}} = \frac{2T}{d l_p} = \frac{2 \cdot 400}{0,042 \cdot 0,012 \cdot 0,05} = 31,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31,7 \text{ МПа.}$$

Оскільки  $\tau < [\tau] = 90 \text{ МПа}$ , то міцність шпоночного з'єднання забезпечена.

Приклад 4.3. Сталевий стержень діаметром  $d = 20 \text{ мм}$  з головкою  $D = 30 \text{ мм}$ , навантажений поздовжньою силою  $F = 35 \text{ кН}$  /рис.4.8/.

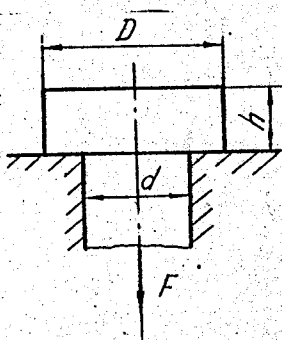


Рис.4.8. Схема до розрахунку головки болта на розтяг і зминання

Перевіряти, чи витримуються умови міцності стержня на розтяг та зминання, і знайти необхідну висоту головки  $h$ , якщо  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma_{3M}] = 170 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 70 \text{ МПа}$ .

Розв'язання. 1. Перевіримо міцність стержня на розтяг:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot 35 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 20^2 \cdot 10^{-6}} = 111,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 111,5 \text{ МПа.}$$

Оскільки  $\sigma = 111,5 < [\sigma] = 120$ , то умова міцності при розтягу задовольняється.

2. Перевіримо міцність конструкції на зминання:

$$\sigma_{3M} = \frac{F}{A_{3M}} = \frac{4F}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{4 \cdot 35 \cdot 10^3}{3,14(30^2 - 20^2) \cdot 10^{-6}} = 89,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 89,2 \text{ МПа.}$$

Отже, і  $\sigma_{3M} = 89,2 < [\sigma_{3M}] = 170$  МПа і міцність при зминанні забезпечена.

3. Висоту головки стержня  $h$  знайдемо із умови міцності на зріз. Очевидно, що площа зрізу  $A = \pi d h = 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} h = 62,8 \cdot 10^{-3} h$ . Із умови міцності на зріз  $F/A_{зр} \leq [\tau]$  дістанемо

$$h \geq \frac{F}{[\tau] \pi d} = \frac{35 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6 \cdot 62,8 \cdot 10^{-3}} = 7,96 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Беремо  $h = 8$  мм.

#### Запитання для самоперевірки

1. Який напружений стан називається чистим зсувом? Навести приклади.
2. Навести приклади деталей, які працюють на зріз і зминання.
3. Запишіть закон Гука для зсуву.
4. Що таке умовна площа зминання деталі?
5. Запишіть в загальному вигляді умову міцності при зрізі і при зминанні.

#### 5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Основним об'єктом вивчення в курсі опору матеріалів, як вже зазначалось, є брус. Його міцність і жорсткість значною мірою залежить не тільки від механічних характеристик матеріалу, а й від конфігурації площі поперечного перерізу і орієнтації відносно зовнішніх сил. Так, під час розрахунків на розтяг, стиск, а також на зсув основною геометричною характеристикою бруса була його площа поперечного перерізу. При опорі бруса деформаціям кручення і згину врахування площі поперечного перерізу вже стає недостатнім. Останнє видно на такому простому досліді. Якщо учнівську лінійку затиснути одним кінцем в горизонтальній площині, а другий навантажити деякою силою  $F$  у вертикальному напрямі /рис.5.1/, то легко переконатися, що під дією однієї і тієї ж сили  $F$  переміщення  $\Delta_1$  /рис.5.1,а/ набагато більше за  $\Delta_2$  /рис.5.1,б/. В обох випадках площа поперечного перерізу лінійки однакова, а опір її згину - різний.

В зв'язку з цим, перш ніж вивчати деформації кручення і згину, необхідно розглянути відповідні їм геометричні характеристики плоских перерізів: статичні моменти площі перерізу і моменти інерції перерізу.

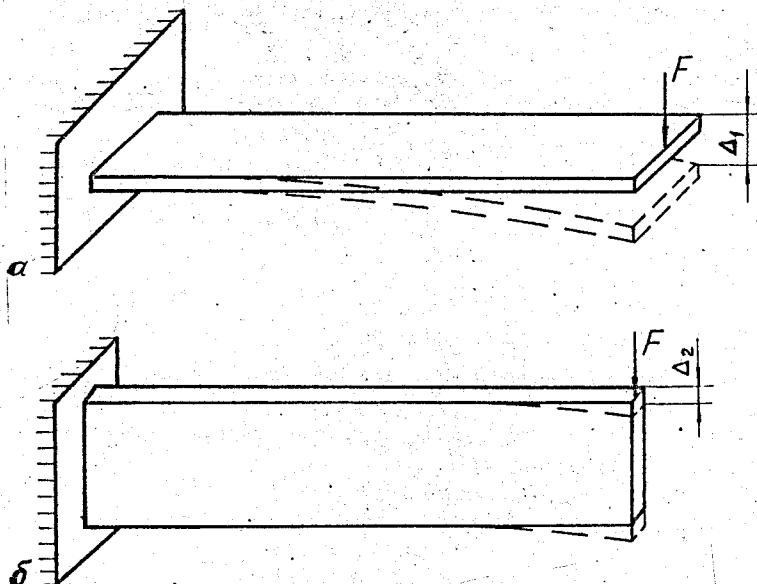


Рис.5.1. Схема до залежності прогину балки під дією сили  $F$  від розміщення площі поперечного перерізу

### 5.1. Статичні моменти площі

Статичним моментом площі перерізу відносно деякої координатної осі називається взятий по цій площі інтеграл добутків елементарних площадок  $dA$  на їх відстань до цієї осі /рис.5.2,а/, тобто

$$S_z = \int_A y dA ; \quad S_y = \int_A z dA \quad /5.1/$$

Перший інтеграл називається статичним моментом площі відносно осі  $z$ , а другий - статичним моментом площі відносно осі  $y$ . Одиниці статичних моментів:  $m^3$  або  $cm^3$ .

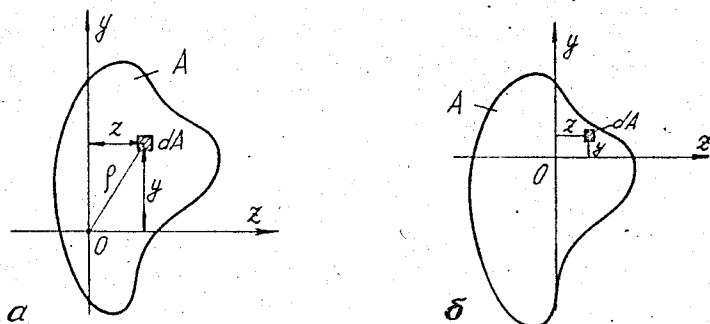


Рис.5.2. Схема до визначення статичного момента площі поперечного перерізу

Для перерізу, що складається з  $n$  простих частин, статичний момент площі відносно осей  $z$  і  $y$  можна записати так:

$$S_z = \int_A y dA = \sum_{i=1}^n S_{zi};$$

$$S_y = \int_A z dA = \sum_{i=1}^n S_{yi},$$

/5.2/

тобто статичний момент площі складного перерізу відносно деякої осі дорівнює сумі статичних моментів всіх частин цього перерізу відносно тієї ж осі. Залежно від вибору системи координат статичний момент може бути як додатним, так і від'ємним, а також дорівнювати нулю. Наприклад, на рис.5.2,а система координат  $yOz$  вибрана так, що статичні моменти  $S_z$  і  $S_y$  відносно осей  $z$  і  $y$  додатні, а на рис.5.2,б - обидва статичні моменти від'ємні.

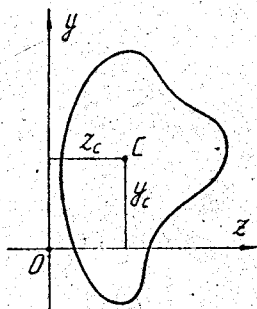
Отже, можна вибрати і таку систему координат для поперечного перерізу, щоб статичні моменти площі відносно відповідних осей цієї системи дорівнювали нулю.

Система координат, відносно осей якої статичні моменти площі дорівнюють нулю, називається центральною, а початок координат такої системи - центром ваги площі /позначається літерою  $C$ /.

Якщо відносно деякої системи координат  $zOy$  /рис.5.3/ відомо положення центра ваги площі, то статичні моменти площі відносно осей  $z$  і  $y$  цієї системи на підставі теореми про рівноділину можуть бути визначені за формулами

$$S_z = y_c A, \quad S_y = z_c A, \quad (5.3)$$

де  $y_c$  і  $z_c$  координати центра ваги площі в системі координат  $zOy$ .



Якщо переріз складної форми можна розбити на  $n$  простих елементів, центри ваги яких легко визначити в деякій допоміжній системі координат, то статичні моменти такої площі становитимуть

$$S_z = y_c A = \sum_{i=1}^n y_{c_i} A_i; \quad (5.4)$$

$$S_y = z_c A = \sum_{i=1}^n z_{c_i} A_i,$$

Рис.5.3. Встановлення центра ваги площі поперечного перерізу бруса

де  $y_{c_i}$  і  $z_{c_i}$  - координати центра ваги  $A_i$  - і простої фі-

гури у вибраній системі координат.

Формули /6.4/ використовують переважно для визначення центра ваги складних плоских фігур.

Наприклад, визначимо положення центра ваги плоскої фігури  $LBMDK$ , показаної на рис.5.4. Продовжимо лінію  $DM$  до перетину з  $LB$  в точці  $N$ . Внаслідок цього складну фігуру  $LBMDK$  можна розглядати як складену з двох простих: трикутника  $NBM$  з площею  $A_1 = 3a \cdot 6a/2 = 9a^2$  і прямокутника  $LNMDK$  з площею  $A_2 = 6a \cdot 2a = 12a^2$ .

Виберемо деяку допоміжну систему координат  $zOy$ , відносно якої будемо визначати положення центра ваги складної фігури. Координати центрів ваги трикутника і прямокутника в вибраній системі  $zOy$  складуться такі:

а/ трикутника  $y_{c_1} = 4a, \quad z_{c_1} = a;$

б/ прямокутника  $y_{c_2} = a, \quad z_{c_2} = 3a.$

Згідно з формулами /5.4/ знаходимо центр ваги площі складної фігури

$$y_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{ci} A_i}{A} = \frac{4a \cdot 9a^2 + a \cdot 12a^2}{9a^2 + 12a^2} =$$

$$= 2,29a;$$

$$z_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^2 z_{ci} A_i}{A} =$$

$$= \frac{a \cdot 9a^2 + 3a \cdot 12a^2}{9a^2 + 12a^2} =$$

$$= 2,14a,$$

де  $A = A_1 + A_2$  - загальна площа плоскої фігури.

Положення центра ваги фігури  $\angle BMDK$  з координатами  $y_c = 2,29a$  і  $z_c = 2,14a$  показано на рис.5.4.

Визначення положення центра ваги складної фігури можна деякою мірою спростити, якщо допоміжну систему координат повднати з центральними осями однієї з простих фігур.

На основі розглянутого можна скласти алгоритм визначення положення центра ваги площі складної фігури:

1. Складну плоску фігуру необхідно розбити на прості, положення центрів ваги яких можна легко визначити.

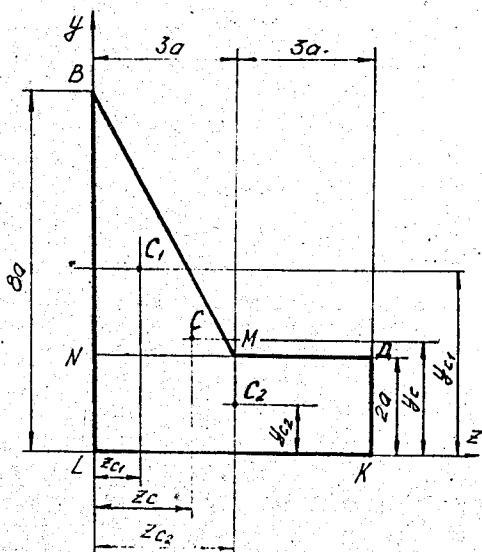


Рис.5.4. Визначення центра ваги площі поперечного перерізу складної фігури

2. Вибрати допоміжну систему координат, яку бажано сумістити з центральною системою координат однієї із простих складових фігур.

3. Визначити площі  $A_z$  простих фігур і координати їх центрів ваги в допоміжній системі координат.

4. Користуючись формулами /5.4/, визначити положення центра ваги площі складної фігури.

## 5.2. Моменти інерції плоских фігур

До геометричних характеристик плоских фігур, які широко використовують у курсі опору матеріалів, належать моменти інерції. Розрізняють осьовий, полярний і відцентровий моменти інерції плоских фігур.

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі:

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A z^2 dA, \quad /5.5/$$

де  $J_z, J_y$  - осьові моменти інерції відносно осей  $z$  і  $y$  відповідно. Одиниця осьового моменту інерції

$$[J_z] = [y^2][A] = M^2 M^2 = M^4.$$

Полярним моментом інерції плоскої фігури  $J_p$  відносно полюса, наприклад точки  $O$  /див.рис.5.2,а/, який лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площині суму добутків елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad /5.6/$$

Якщо полюс збігається з початком осей координат, то  $\rho^2 = z^2 + y^2$ , отже,

$$J_p = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA$$

або

$$J_p = J_z + J_y. \quad /5.7/$$

Отже, сума осьових моментів інерції плоскої фігури відносно довільних взаємно перпендикулярних осей є величина стала, не залежить від орієнтації цих осей і дорівнює полярному моменту інерції.

Із аналізу формул /5.5/ і /5.6/ випливає, що осьові і полярний моменти інерції завжди додатні, оскільки складові наведених формул піднесені до квадрата.

Відцентровим моментом інерції плоскої фігури  $J_{xy}$  називають взятю по всій площі фігури суму добутків елементарних площадок на добуток відстаней цих площадок від двох даних взаємно перпендикулярних осей /рис.5.2,а/:

$$J_{xy} = \int_A xy \, dA. \quad /5.8/$$

Очевидно, що відцентровий, полярний і осьовий моменти інерції мають однакові одиниці:  $m^4$ .

Знак відцентрового моменту інерції залежить від положення осей координат, тому він може бути додатним, від'ємним, а також рівним нулю. Знак відцентрового моменту інерції фігури часто можна визначити і без обчислення. Дійсно, частини площі, які перебувають у першому і третьому квадрантах, забезпечать складову в формулі /5.8/ зі знаком "плюс", а частини, розміщені в другому і четвертому квадрантах - "мінус". Залежно від того, складові від яких квадрантів переважають, відцентровий момент інерції має той чи інший знак.

Очевидно, що при повороті і координатних осей навколо іх початку на деякий кут  $\alpha_0$  /рис.5.5/ відцентровий момент інерції фігури стане рівним нулю. Система координат, відносно осей якої відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називається головною.

Осі головної системи координат позначатимемо  $u$  і  $v$ . Осьові моменти інерції відносно головних осей називаються головними моментами інерції і позначаються  $J_u$  і  $J_v$ . Якщо при цьому початок координат збігається з центром ваги плоскої фігури,

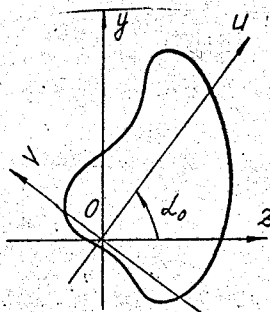


Рис.5.5. Схема до визначення головної системи координат

то осьові моменти називаються головними центральними моментами інерції. Зазначимо, що згідно з формулою /5.7/ сума осьових моментів інерції фігури не залежить від орієнтації координатних осей. Проте окремі головні центральні моменти інерції мають екстремальні значення порівняно з іншими центральними моментами інерції.

Очевидно, що ортогональна система координат, у якій хоч би одна із двох осей є віссю симетрії фігури /рис.5.6/, завжди є головною.

Згідно з рис.5.6 на додатне значення виразу  $zydA$  завжди знайдеться таке ж від'ємне значення  $-zydA$  на другому боці від осі симетрії  $y$ . Отже, внаслідок додавання добутоків елементарних площадок на однаковій відстані від осей по всій площі фігури відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю. Оскільки в техніці переважно використовують симетричні профілі, то далі обмежимося розглядом лише симетричних фігур. Обчислимо осьові моменти інерції деяких простих фігур.

1. Прямокутник  $b \times h$  /рис.5.7/.

Виділимо нескінченно малу площадку  $dA$  у вигляді смужки, що має ширину  $b$  і висоту  $dy$ , тоді  $dA = bdy$ :

Рис.5.6. Система координат, одна із осей якої - вісь симетрії, є головною

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12} \quad /5.9/$$

Обчислюючи осьовий момент інерції фігури відносно осі  $y$ , отримуємо

$$J_y = \frac{hb^3}{12} \quad /5.10/$$

2. Круг розміром  $d$  /рис.5.8/.

Нескінченно малу площадку  $dA$

виділимо у вигляді кільця шириною  $d\rho$ , яке розміщене на змінній відстані  $\rho$  від полюса; тоді  $dA = 2\pi\rho d\rho$ . Обчислимо полярний момент інерції:

$$J_p = \int_{d/2}^d \rho^2 dA = \int_{d/2}^d \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32} \cdot 15.11/$$

Визначимо значення осевих моментів інерції круга. Оскільки внаслідок симетрії для круга  $J_x = J_y$

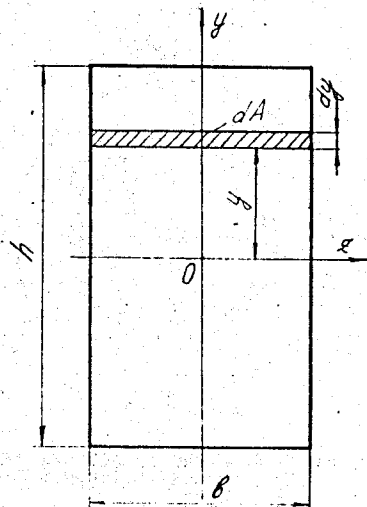


Рис.5.7. Схема до визначення моментів інерції площі прямокутника

то

$$J_x + J_y = J_p = \pi d^4 / 32,$$

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \quad /5.12/$$

3. Кільце, що має розміри  $D \times d$  /рис.5.9/.

Полярний момент інерції для кільця отримаємо аналогічно кругу, якщо зінтегруємо вираз полярного момента інерції в межах від  $d/2$  до  $D/2$ :

$$J_p = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 \pi \rho d\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \quad /5.13/$$

де  $c = d/D$  - відношення внутрішнього діаметра кільця до зовнішнього.

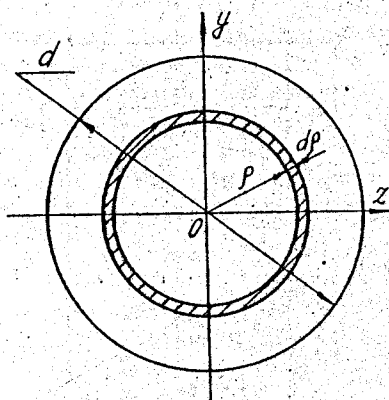


Рис.5.8. Схема до визначення моментів інерції площі круга

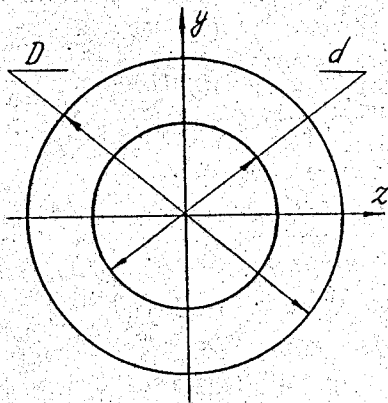


Рис.5.9. Схема до визначення моментів інерції площі кільцевого поперечного перерізу

Аналогічно маємо

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4) \quad /5.14/$$

Моменти інерції і інші геометричні характеристики простих плоских фігур, а також поперечних перерізів стандартних виробів – кутників /рівнобічних і нерівнобічних/, двотаврів, швелерів тощо, наведені в довідковій літературі з опору матеріалів.

### 5.3. Визначення моментів інерції складних плоских фігур

Під час обчислення моментів інерції фігур, які можна розбити умовно на прості, виникає необхідність визначення моментів інерції відносно паралельних осей.

Нехай для деякого поперечного перерізу /рис.5.10/ відомі моменти інерції відносно центральних осей  $J_x$ ,  $J_y$  і  $J_{xy}$ . Визначимо моменти інерції цього перерізу відносно осей  $x_1$  і  $y_1$ , які паралельні центральним осям  $x$  і  $y$  і розміщені від останніх на відстанях  $a$  і  $b$ . Оскільки  $y_1 = y + a$ ,  $z_1 = z + b$ , то відцентровий  $J_{z_1 y_1}$  і осеві  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$  моменти інерції згідно з формулами /5.5/, /5.8/ будуть такі:

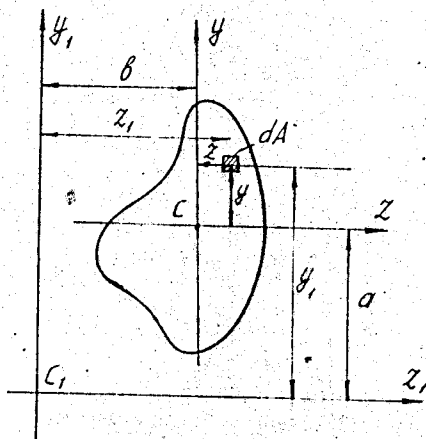


Рис.5.10. Схема до визначення моментів інерції площі відносно осей, паралельних центральним

$$J_{z_1, y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z + e)(y + a) dA =$$

$$= \int_A z y dA + e \int_A y dA + a \int_A z dA + a e \int_A dA;$$

/5.15/

$$J_{z_1, y_1} = J_{z, y} + a e A,$$

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + a \int_A y dA + a^2 \int_A dA,$$

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A. \quad /5.16/$$

Тоді

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A. \quad /5.17/$$

Тут враховано, що осі  $z$  і  $y$  - центральні, тому

$$\int_A z dA = S_{y_1} = 0 \quad \text{і} \quad \int_A y dA = S_z = 0.$$

Отже, осьовий момент інерції відносно будь-якої осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, паралельної даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.

На основі формул /5.16/ і /7.17/ можна запропонувати такий порядок обчислення головних моментів інерції складних фігур, що мають вісь симетрії.

1. Розбити складну фігуру на прості, геометричні характеристики /центр ваги, моменти інерції/, яких легко визначити.

2. Провести допоміжну систему координат /бажано в цьому разі поєднати її з центральною системою координат однієї із простих складових частин фігури.

3. Визначити положення центра ваги складної фігури і провести центральні головні осі  $u$  і  $v$ , враховуючи, що вісь симетрії є однією із головних осей.

4. Користуючись формулами /5.15/ і /5.17/, визначити головні центральні моменти інерції  $J_u$  і  $J_v$ .

Приклад 5.1. Обчислити головні моменти інерції тавра /рис.5.11/.

Розв'язання. Розбиваємо тавр на два простих прямокутники. Перший прямокутник площею  $A_1 = 6a \cdot 2a = 12a^2$  має центр ваги в точці  $C_1$ , його центральні осі позначимо  $z_1$  і  $y_1$ . Відносно цих осей, користуючись формулами /5.9/ і /5.10/, визначимо осьові моменти інерції прямокутника:

$$J_{z_1} = \frac{6a \cdot (2a)^3}{12} = 4a^4; \quad J_{y_1} = \frac{2a \cdot (6a)^3}{12} = 36a^4.$$

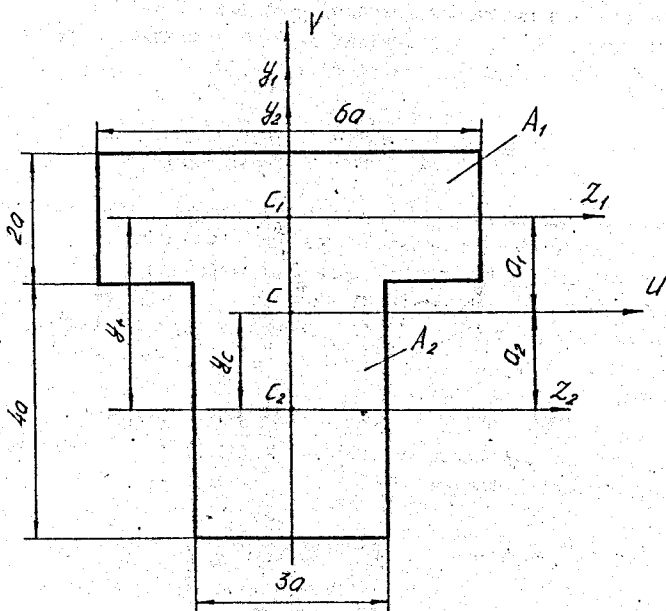


Рис.5.11. Схема до обчислення моментів інерції складної площі поперечного перерізу

Другий прямокутник має площу  $A_2 = 4a \cdot 3a = 12a^2$ , його центр ваги -  $C_2$  і центральні осі  $z_2$ ,  $y_2$ . Центральні моменти інерції другого прямокутника

$$J_{z_2} = \frac{3a(4a)^3}{12} = 16a^4, \quad J_{y_2} = \frac{4a \cdot (3a)^3}{12} = 9a^4.$$

За одну з головних центральних осей інерції  $V$  беремо вісь симетрії тавра. Оскільки осі  $y_1$  і  $y_2$  збігаються в головній віссі  $V$ , то момент інерції тавра відносно осі  $V$  буде

$$J_V = J_{y_1} + J_{y_2} = 36a^4 + 9a^4 = 45a^4.$$

Для визначення положення головної центральної осі  $u$  встановимо центр ваги тавра  $C$ . За допоміжну систему координат візьмемо осі  $V$  і  $z_2$ . Тоді ордината центра ваги фігури

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3a \cdot 12a^2}{12a^2 + 12a^2} = 1,5a.$$

Абсциса центра ваги площі фігури розміщена на центральній осі  $V$ . Визначене таким чином положення центра ваги  $C$  показано на рис.5.11. Провівши через точку  $C$  пряму, перпендикулярну до осі симетрії, матимемо другу головну центральну вісь  $u$ .

Позначимо відстані від осі  $u$  до паралельних їй осей  $z_1$  і  $z_2$  відповідно через  $a_1$  і  $a_2$ . Головний центральний момент інерції тавра відносно осі  $u$  визначимо за формулою  $J_u = J_u^I + J_u^{II}$ , де  $J_u^I$  і  $J_u^{II}$  - моменти інерції відповідно першого і другого прямокутника відносно осі  $u$ . Використовуючи формулу /5.16/, дістаємо

$$J_u^I = J_{z_1} + a_1^2 A_1 = 4a^4 + 2,25a^2 \cdot 12a^2 = 31a^4;$$

$$J_u^{II} = J_{z_2} + a_2^2 A_2 = 16a^4 + 2,25a^2 \cdot 12a^2 = 43a^4;$$

$$J_u = J_u^I + J_u^{II} = 31a^4 + 43a^4 = 74a^4.$$

**Приклад 5.2.** Визначити положення головних центральних осей і обчислити головні центральні моменти інерції фігури /рис.5.12/, якщо  $R = 2r = 10$  см.

**Розв'язання.** Оскільки вісь  $y$  є віссю симетрії фігури, то вона буде також центральною головною віссю  $V$ .

Знайдемо положення центральної осі  $u$ . Проведемо допоміжну вісь  $z$ , сумістивши її з  $z_2$ . Центр ваги фігури розміщено на осі симетрії  $V$ , його положення визначається за формулою

$$y_c = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2},$$

$$\text{де } A_1 = \pi R^2 = 314 \text{ см}^2; \quad A_2 = \pi r^2 = 78,6 \text{ см}^2,$$

$$y_1 = r = 5 \text{ см}; \quad y_2 = 0. \quad \text{Тоді } y_c = 6,67 \text{ см}.$$

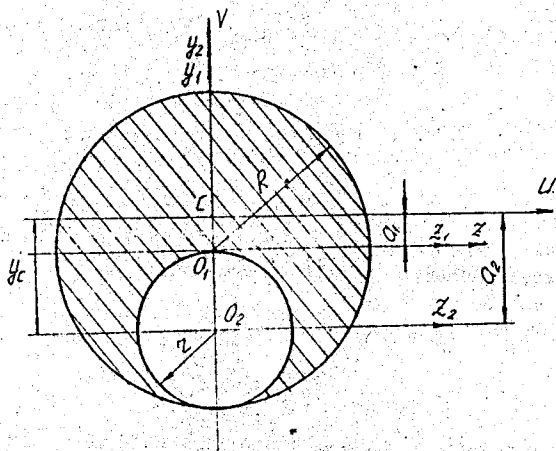


Рис.5.12. Схема до визначення центральних осей і моментів інерції складної площі перерізу

Момент інерції фігури відносно осі  $V$  визначимо як різницю моментів інерції великого і малого кругів:

$$\begin{aligned}
 J_V &= J_{y_1} - J_{y_2} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (2R)^4}{64} - \frac{\pi R^4}{64} = \\
 &= \frac{15\pi}{64} R^4 = \frac{15 \cdot 3,14}{64} \cdot 10^4 = 7360 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Момент інерції плоскої фігури відносно осі  $u$  становитиме

$$J_u = J_u^I - J_u^{II} = (J_{z_1} + a^2 A_1) - (J_{z_2} + a^2 A_2) =$$

$$= \frac{\pi(2 \cdot 10)^4}{64} + (-1,67)^2 \cdot 314 - \frac{\pi \cdot 10^4}{64} + (-6,67)^2 \cdot 78,6 = 4700 \text{ см}^4;$$

де

$$\alpha_1 = -(y_c - r) = -1,67 \text{ см}; \quad \alpha_2 = -y_c = -6,67 \text{ см}.$$

#### 5.4. Радіус і еліпс інерції плоскої фігури

Радіусом інерції площі відносно осі називається квадратний корінь із частки момента інерції відносно цієї осі та площі поперечного перерізу, тобто

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}}. \quad /5.18/$$

За визначеними радіусами інерції будуть еліпс інерції. На головних осях, наприклад, прямокутного перерізу /рис.5.13/ відкладають радіуси  $i_u$ ,  $i_v$ , причому на осі  $u$  відкладають радіус  $i_v$ , а на осі  $v$  —  $i_u$ . Побудований на осях  $2i_u$  і  $2i_v$  еліпс називається еліпсом інерції.

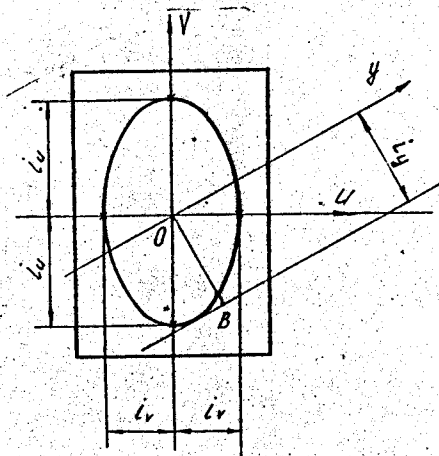


Рис.5.13. Радіуси інерції ( $i_u, i_v, i_y$ ) площі поперечного перерізу

Радіус інерції відносно будь-якої центральної осі  $y$  за допомогою еліпса інерції визначають як перпендикуляр  $OB$  (див. рис. 5.13), проведений з центра еліпса на дотичну, паралельну осі  $y$ . Відрізок  $OB$ , в масштабі побудованого еліпса інерції, дорівнює радіусу інерції  $i_y$ . Користуючись його числовими значеннями, знаходять момент інерції  $J_y$  за формулою

$$J_y = i_y^2 A. \quad /5.19/$$

**Приклад 5.3.** Побудувати еліпс інерції для тавра /рис. 5.14/.

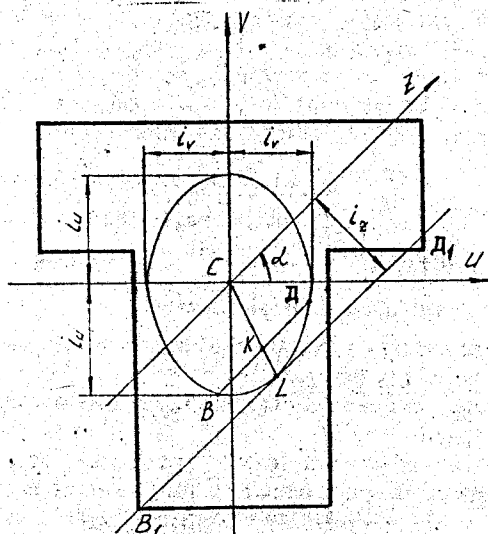


Рис. 5.14. Схема до побудови радіуса інерції складної площі поперечного перерізу

Визначити осьовий момент інерції відносно центральної осі  $z$ , яка утворить кут  $\alpha = 45^\circ$  з віссю  $u$ . Необхідні дані для розв'язання задачі взяти з умови задачі 5.1 /рис. 5.11/.

Розв'язання. Визначимо радіуси інерції  $i_u$  і  $i_v$ :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{74a^4}{24a^2}} = 1,85a;$$

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{45a^4}{24a^2}} = 1,37a.$$

На отриманих півосях  $i_u$  і  $i_v$  будемо еліпс інерції.

Проводимо через центр ваги площі  $C$  вісь  $z$  під кутом  $\alpha = 45^\circ$  до осі  $u$ . Паралельно осі  $z$  проводимо довільну хорду  $BD$ . Середину хорди  $BD$  / точку  $K$  / з'єднуємо з центром ваги  $C$  і продовжуємо до перетину з еліпсом в точці  $L$ . Ця точка є точкою дотику лінії  $BD$  / дотичної до еліпса і паралельної осі  $z$ .

Відстань між віссю  $z$  і дотичною  $BD$ , дорівнює радіусу інерції  $i_z$ . У визначеному масштабі із рис. 5.14 знаходимо  $i_z = 1,58a$ . Тоді момент інерції

$$J_z = i_z^2 A = (1,58)^2 \cdot 24a^2 = 60a^2.$$

Порівнюючи  $J_z$  з екстремальними головними моментами  $J_u$  і  $J_v$ , зауважимо, що він має проміжне значення.

#### Запитання для самоперевірки

1. Перелічити та дати визначення основних геометричних характеристик поперечних перерізів бруса.
2. Як найбільш раціонально визначити координати центра ваги складної плоскої фігури?
3. Як визначаються моменти інерції трикутника, прямокутника, круга?
4. Як змінюються моменти інерції в разі паралельного перенесення осей?
5. Осеві моменти інерції двох кругів вносяться як 16:1. Як вносяться їх площі?
6. Що розуміють під головними осями інерції?
7. Як визначити осевий момент інерції площі через еліпс інерції?

## 6. КРУЧЕННЯ

### 6.1. Основні поняття. Випри крутних моментів

Крученням називається такий вид деформації, за якого в довільному поперечному перерізі бруса, перпендикулярному до його осі, із шести внутрішніх силових факторів відмінним від нуля є тільки крутний момент  $M_x = M_k$ .

Прямий брус, що працює на кручення, називається валом. Деформації кручення зазнають вали гребних гвинтів, колінчасті вали двигунів внутрішнього згоряння, вали гідро- та газотурбін, пружини, болти під час закручування гайки, ключем тощо.

Кручення вала відбувається внаслідок його навантаження зовнішніми крутільними моментами, які на відміну від внутрішнього силового фактора - крутного моменту  $M_k$ , будемо позначати  $T$ . Крутільні моменти утворюються парами сил, прикладеними в площинах, перпендикулярних до осі вала. Зображують крутільні моменти на валах так, як показано на рис. 6.1, а або на рис. 6.1, б.



Рис. 6.1. Умови позначення крутільних моментів

Часто на практиці бувають задані не крутільні моменти  $T_i$ , а потужності  $N_i$ , що передаються на вал, і кутові швидкості обертання вала  $\omega_i$  або число обертів за хвилину  $n_i$ . Тоді через  $N_i$  та  $\omega_i$  / або  $n_i$  / необхідно визначити моменти  $T_i$ . При кутовій швидкості  $\omega_i$  робота крутільного моменту  $T_i$  за одну секунду, тобто потужність  $N_i$ , як це відомо з курсу теоретичної механіки, становитиме  $N_i = T_i \omega_i$ . Якщо кутову швидкість виразити через число обертів за хвилину, тобто  $\omega_i = 2\pi n_i / 60 = \pi n_i / 30$ , то

$$T_i = \frac{30 N_i}{\pi n_i}$$

/6.1/

Якщо одиниці всіх фізичних величин підставити у формулу /6.1/ у системі СІ, тобто потужність  $N$  - Вт,  $n$  - об/хв, то крутільний момент матиме одиницю Н·м.

У тому разі, коли не всі крутільні моменти відомі, для знаходження невідомих використовують рівняння рівноваги. На рис.6.2 показаний

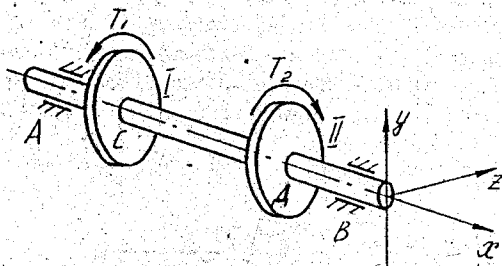


Рис.6.2. Схема дії крутільних моментів на вал

вал  $AB$ , на який в перерізах  $C$  та  $D$  насажені два шкві  $I$  і  $II$ , що передають енергію від джерела до приймача: наприклад, шків  $I$  передає валу крутільний момент  $T_1$  від електродвигуна, а шків  $II$  передає цей крутільний момент /позначимо його  $T_2$ / токарному верстату. Напрями крутільних моментів  $T_1$  і  $T_2$  показані на шківях стрілками. Рівновага вала характеризується рівномірним його обертанням, тоді алгебраїчна сума крутільних моментів на валу дорівнює нулю. Нехтуючи втрати енергії в процесі обертання /наприклад, в підшипниках/, знаходимо  $T_1 - T_2 = 0$ , або  $T_1 = -T_2$ .

Для визначення величини крутного моменту в перерізах вала на відрізьку  $CD$  використовують метод перерізів. Крутний момент  $M_K$  /рис.6.3/ у довільному поперечному перерізі відрізка  $CD$  дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутільних моментів  $T_i$ , розміщених по один бік /лівий ( $M_K = T_1$ ), чи правий ( $M_K = T_2$ ) від перерізу вала.

В розрахунках на міцність і жорсткість знак крутного момента немає значення, але для зручності побудови епюр дотримуються такого правила знаків: крутний момент  $M_K$  вважається додатним /рис.6.4,а/, якщо при спостереженні з торця в напрямі осі відсіченої частини він намагається повертати переріз вала за годинниковою стрілкою, і від'ємний - якщо проти годинникової стрілки /рис.6.4,б/.

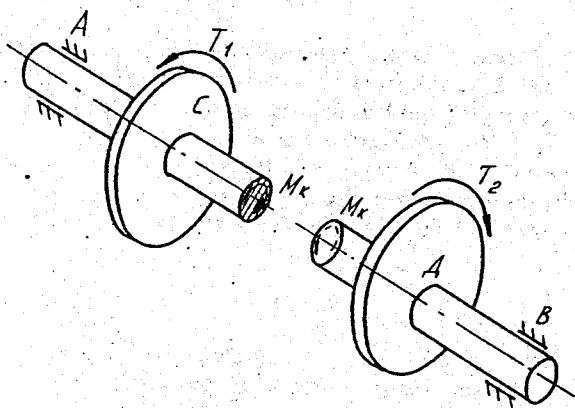


Рис.6.3. Зображення дії крутного момента  $M_k$  в поперечному перерізі вала

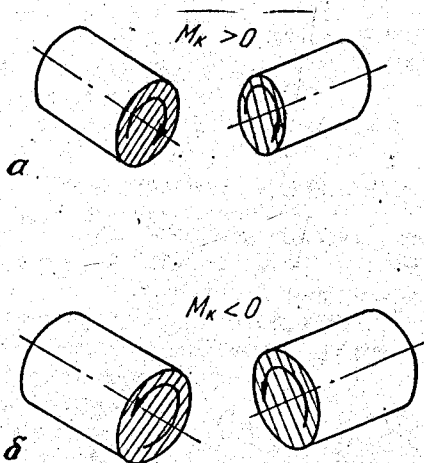


Рис.6.4. Схема до встановлення знака крутного момента  $M_k$ :  
 $\alpha / M_k > 0$ ;  $\beta / M_k < 0$

Розглянемо методику побудови епюр крутних моментів на прикладі. Нехай вал  $AB$  /рис.6.5,а/ обертается рівномірно. Тоді алгебраїчна сума крутильних моментів, прикладених до шківів, дорівнює нулю:  $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0$ . Розбиваємо вал на силові ділянки:  $\bar{I}$ ,  $\bar{II}$ ,  $\bar{III}$ ,  $\bar{IV}$ ,  $\bar{V}$ . Межами кожної з них є перерізи, на яких розміщені шківів, а також початок і кінець вала. Оскільки тертя в підшипниках нехтуємо, то в довільному перерізі на ділянках  $\bar{I}$  і  $\bar{V}$  крутний момент дорівнює нулю, тобто  $M_{\kappa I} = 0$ ,  $M_{\kappa V} = 0$ .

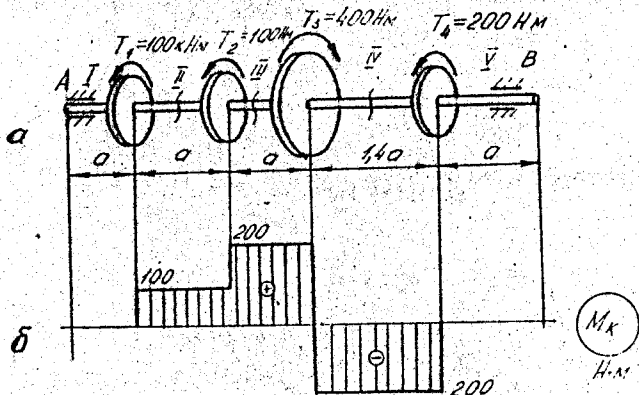
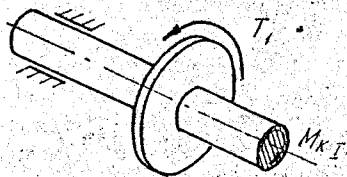


Рис.6.5. Епюра крутних моментів навантаженого вала

Проведемо довільний поперечний переріз на ділянці  $\bar{II}$  вала в межах  $0 \leq x_{II} \leq a$ . Частина вала зліва від перерізу /рис.6.6/ буде розміщена в рівновазі під дією крутильного момента  $T_1$  і крутного моменту в перерізі  $M_{\kappa II}$ ; тоді згідно з правилами знаків для  $M_{\kappa}$  маємо:  $M_{\kappa II} = T_1 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Аналогічно, розглядаючи праву відсічену



частину вала /рис.6.7/, знаходимо, що крутний момент у тому ж перерізі буде  $M_{\kappa II} = -T_2 + T_3 - T_4 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$  тобто такий же, як і зліва.

Рис.6.6. Схема до визначення величини крутного моменту в перерізі через крутильні моменти /ліва відрізана частина вала/

Користуючись визначеним крутним моментом на другій ділянці, можна сформулювати такий порядок визначення  $M_{\kappa}$  в поперечних перерізах вала.

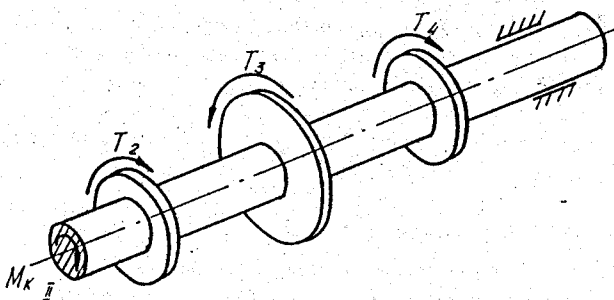


Рис.6.7. Схема до визначення величини крутного моменту в перерізі через крутільні моменти /права відрізана частина вала/

1. Площиною, перпендикулярною до осі вала, розтинають його в потрібному перерізі.
2. Записують крутільний момент у перерізі як алгебраїчну суму крутільних моментів, розміщених по один із боків перерізу. В цьому разі в рівняння для  $M_k$  крутільний момент  $T$  записують із знаком "плюс", якщо, дивлячись на переріз, він повертає відсічену частину вала проти годинникової стрілки, із знаком "мінус" – якщо за годинниковою стрілкою.

Провівши довільні розтини на інших силових ділянках вала, отримаємо відповідно:

на III ділянці

$$\text{/зліва/ } (0 \leq x_3 \leq a), M_{kIII} = T_1 + T_2 = 200 \text{ Нм,}$$

на IV ділянці

$$(0 \leq x_4 \leq 1,4a), M_{kIV} = T_1 + T_2 - T_3 = -200 \text{ Нм.}$$

Значення крутільних моментів на різних ділянках вала зручно зображати в вигляді епюри, тобто графіка, що показує, як змінюється крутільний момент під час переходу від перерізу до перерізу вздовж вала. Під час побудови епюри крутільних моментів користуються загальними правилами побудови епюри, наведених в підрозд.1.4.

На рис.6.5,б зображена епюра крутних моментів вала, що показаний на рис.6.5,а. Аналізуючи побудовану епюру, звертаємо увагу на те, що до вала прикладено крутильний момент  $T_3 = 400$  Нм, найбільший крутильний момент в перерізах вала не перевищує 200 Нм. Саме цю величину, а не  $T_3 = 400$  Нм необхідно використати в розрахунках на міцність і жорсткість вала.

## 6.2. Напруги при крученні

При крученні крутильний момент є єдиним силовим фактором і лежить у площині поперечного перерізу, тому в точках такого перерізу діють лише дотичні напруги [1.10]. Проте слід пам'ятати, що небезпека початку руйнування при крученні характеризується не значенням  $M_K$ , а значенням найбільшої дотичної напруги, що виникає в найбільш небезпечних точках перерізу вала.

З'ясуємо зв'язок між крутним моментом  $M_K$  і дотичними напругами в точках поперечного перерізу вала. Розглянемо вал круглого /або кільцевого/ поперечного перерізу. Нехай в поперечному перерізі вала /рис.6.8/ діє крутильний момент  $M_K$  /напряма  $M_K$  на рис.6.8 показано стрілкою/. Сила, що діє на елементарну площадку  $dA$  перерізу, дорівнює  $\tau dA$ . Крутильний момент цієї елементарної сили  $\tau dA$  відносно

центра ваги перерізу дорівнює добутку цієї сили на відстань  $\rho$  сили до центра ваги перерізу, тобто  $dM_K = \tau dA \rho$ . Для визначення повного значення крутного моменту в перерізі необхідно зінтегрувати  $dM_K$  за всією площею поперечного перерізу.

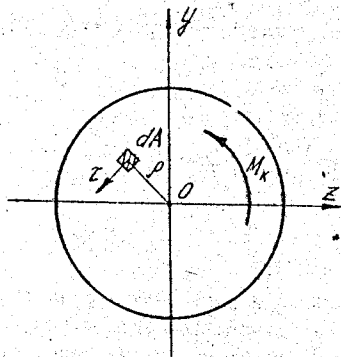


Рис.6.8. Схеми до встановлення зв'язку між крутним моментом і дотичними напругами в поперечному перерізі вала

$$M_K = \int_A \tau \rho dA. \quad 16.2/$$

Отриманий вираз встановлює зв'язок між крутним моментом  $M_K$  і напругою  $\tau$  в інтегральній формі, тому формулу 16.2/ називають інтегральним рівнянням рівноваги при крученні.

З рівняння /6.2/ знайти  $\tau$  безпосередньо неможливо, бо невідомий закон розподілу дотичних напруг по поперечному перерізу вала /невідомо функція  $\tau = f(A)$ /. Характер розподілу напруги в перерізі вивчимо, якщо розглянемо геометричну картину деформації вала при крученні. Для наочності виготовимо гумову модель циліндричного вала /рис.6.9,а/. На її поверхню нанесемо сітку з малих прямокутників, утворених поперечними колами і поздовжніми твірними. Один кінець /лівий/ моделі закріпимо, а до другого /правого, вільного/ прикладемо крутильний момент  $T$ , що діє в площині, перпендикулярній до осі моделі /рис.6.9,б/. З розгляду скрученої гумової моделі можна зробити такі висновки:

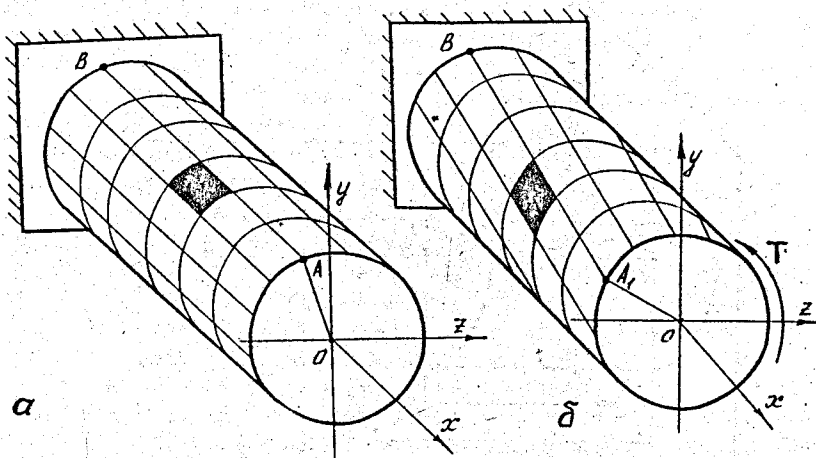


Рис.6.9. Модель вала: ненавантаженого /а/; навантаженого /б/ крутильним моментом

1. Радіуси поперечних перерізів не викривляються в процесі закручування і зберігають свою початкову довжину /наприклад, радіуси  $OA$  і  $OA_1$  вільного кінця моделі/.
2. Відстані між сусідніми паралельними колами не змінюються.
3. Всі поперечні перерізи в процесі деформації залишаються плоскими і перпендикулярними до осі бруса /гіпотеза плоских перерізів/.
4. Нанесені до деформування твірні лінії обертаються на один і той же кут і перетворюються в гвинтові лінії.

6. Не змінюють своєї форми і розміщення поперечні лінії /поперечні перерізи в процесі деформування обертаються навколо своєї осі/. Виділений елемент сітки /рис.6.9/, що перебуває між двома сусідніми твірними і колами, зазнаючи деформації зсуву, перекошується.

Введемо кількісну характеристику деформації кручення валів. Для цього розглянемо кручення вала /рис.6.10/, один /лівий/ кінець якого закріплений, а до другого /правого/ прикладено крутільний момент  $T$ .

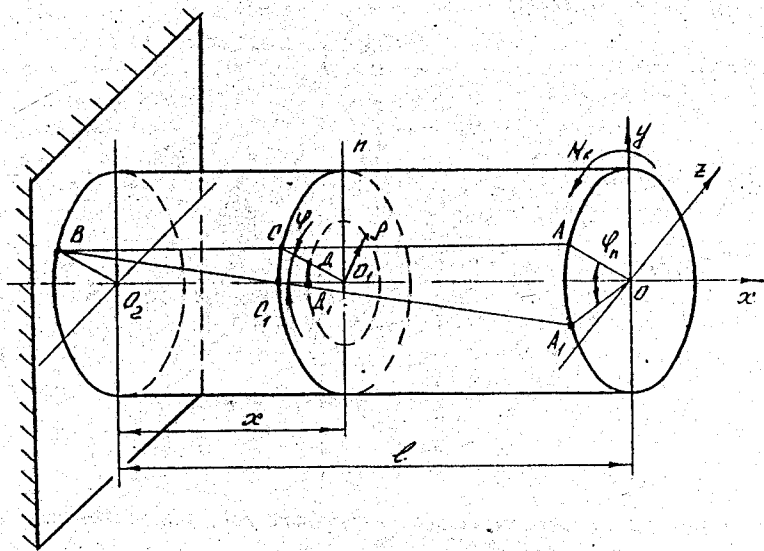


Рис.6.10. Схема до визначення деформації вала при крученні

Твірна  $BA$  в цьому разі перетвориться в елемент гвинтової лінії  $BA_1$ . Кут  $ABA_1$ , утворений твірною до і після деформування, називається кутом зсуву  $\gamma$ . Внаслідок мализни кута зсуву елемент гвинтової лінії можна вважати прямою лінією, а тому кут  $\gamma$  залишається сталим для всіх твірних цього вала або їх частин.

Довільний переріз /наприклад,  $n-n$ /, проведений перпендикулярно до осі вала на відстані  $x$  від закріплення, повернеться відносно лівого, закріпленого, на кут  $\varphi$  /кут  $CO_1C_1$ , утворений радіусами  $O_1C_1$  до деформації і  $O_1C_1$ , - після неї/.

Кут повороту одного перерізу відносно другого, умовно закріпленого /як правило, крайнього лівого/, називається кутом закручування і позначається літерою  $\varphi$ .

Чим більший крутильний момент  $T$ , тим більший кут закручування  $\varphi$ . Цю залежність можна перевірити на дослідних машинах. Аналогічно розтягу, можна побудувати діаграму кручення - залежність кута закручування  $\varphi$  від прикладеного крутильного момента  $T$ . На практиці значення крутильного момента не перевищує значення, за якого порушується пряма пропорційна залежність між  $T$  і  $\varphi$ . Цим самим розрахунки на міцність і жорсткість при крученні обмежуються областю використання закону Гука.

Із рис. 6.10 видно, що кут закручування  $\varphi$  зростає із збільшенням розміру  $x$ ; для закріпленого перерізу  $O_2$  кут закручування дорівнює нулю, а найбільше значення цього кута має правий торцевий переріз  $O$ . Кут закручування  $\varphi$  правого кінцевого перерізу називається повним кутом закручування бруса /кут, утворений радіусами  $OA$  і  $OA_1$ /. Водночас для одного і того самого перерізу кут закручування вала довільного радіуса  $\rho$ , крім  $\rho = 0$ , залишається постійним /кут  $CO_1C_1$ , дорівнює кутам  $\angle DO_1D_1$ /.

На відстані  $dx$  від перерізу  $n-n$  перерізом  $m-m$ /рис. 6.11/ віримо з вала циліндр довільного радіуса  $\rho$ . Кут повороту перерізу  $m-m$  відносно закріпленого лівого /кінцевого/ перерізу вала становить  $\varphi + d\varphi$ , а відносно перерізу буде  $n-n-d\varphi$ . Кут зсуву, як вважалося, залишається незмінним - це кут  $\angle M_1DM_1$ . Тоді з трикутника  $M_1DM_1$  дістанемо:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{MM_1}{M_1D} = \frac{\rho d\varphi}{dx} = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho \theta. \quad /6.3/$$

Тут згідно з рис. 6.11  $MM_1 = \rho d\varphi$ ,  $d\varphi/dx$ , - відношення кута закручування  $d\varphi$  до довжини відрізка вала  $dx$ . Це відношення називається відносним кутом закручування і позначається літерою  $\theta$ .

Внаслідок малості кута зсуву  $\gamma$  можна вважати, що  $\operatorname{tg} \gamma = \gamma$ , тоді

$$\gamma = \theta \rho. \quad /6.4/$$

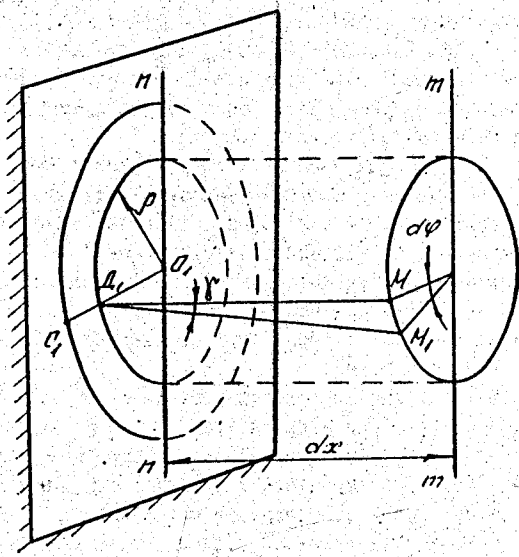


Рис.6.11. Схема до встановлення зв'язку між абсолютним кутом закручування  $\varphi$  і кутом зсуву  $\gamma$

Скористаємося законом Гука для деформації зсуву, згідно з яким  $\tau = G\gamma$ ; тоді за формулою /6.4/ знайдемо зв'язок відносного кута закручування  $\theta$  і дотичної напруги  $\tau$ :

$$\tau = G\theta\rho. \quad /6.5/$$

Підставивши /6.5/ в /6.2/, дістанемо

$$M_{\kappa} = \int G\theta\rho^2 dA. \quad /6.6/$$

При інтегруванні по площі  $A$  поперечного перерізу величини  $G$  і  $\theta$ , як незалежні від  $A$ , можна винести за знак інтеграла, тоді

$$M_{\kappa} = G\theta \int \rho^2 dA = G\theta J_{\rho}, \quad /6.7/$$

де  $J_p = \int \rho^2 dA$  - полярний момент інерції /5.6/,  $m^4$  або  $cm^4$ .

Підставимо добуток  $G\theta$  з /6.7/ в /6.5/ і остаточно отримаємо зв'язок дотичної напруги з крутним моментом  $M_k$  :

$$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p} \quad /6.8/$$

формула /6.8/ становить закон розподілу дотичних напруг за поперечним перерізом вала при крученні.

Із /6.8/ виходить, що дотичні напруги при заданому значенні крутного момента в перерізі лінійно залежать від радіуса  $\rho$  /рис.6.12/.

В точках кола, що мають однаковий  $\rho$ , дотичні напруги однакові, наприклад, в точках  $A$  і  $B$  при значенні  $\rho = 0$  /точка  $O$ / дотична напруга дорівнює нулю.

Найбільші дотичні напруги мають місце в точках поверхні вала при  $\rho = d/2$  :

$$\tau_{max} = \frac{M_k \frac{d}{2}}{J_p} = \frac{M_k}{W_p} \quad /6.9/$$

де  $W_p = \frac{J_p}{d/2}$  - геометрична характеристика поперечного перерізу вала,  $m^3$  або  $cm^3$ , яка називається полярним моментом опору і є характеристикою міцності бруса при крученні.

Знайдемо значення полярного момента опору для вала суцільного круглого перерізу. Враховуючи /5.11/ і рис.5.8, маємо

$$W_p = \frac{J_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} ; \quad /6.10/$$

для кільцевого перерізу згідно з /5.12/

$$W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \quad /6.11/$$

де  $D$  і  $d$  - зовнішній і внутрішній діаметри кільцевого перерізу /див.рис.5.9/;  $c = d/D$ .

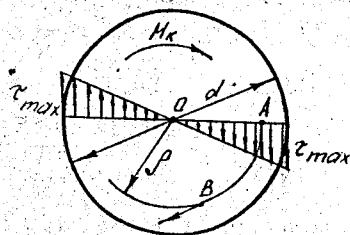


Рис.6.12. Розподіл дотичних напруг по діаметру вала

З рис.6.12 видно, що в точках перерізу, близько розміщених до осі вала, дотичні напруги невеликі: крученню чинять опір в основному матеріал, що розміщений біля поверхні вала. Тому з метою економії матеріалу вали великих діаметрів іноді роблять трубчастими.

**Приклад 6.1.** Максимальні дотичні напруги біля поверхні вала  $\tau_{max} = 90$  МПа. Чому дорівнюють дотичні напруги в точках того ж поперечного перерізу на відстані третина радіуса від поверхні вала?

**Розв'язання.** Дотичні напруги в точках поперечного перерізу прямо пропорційні радіусу  $\rho$  - відстані до них від центра ваги перерізу.

Для точок поверхні вала  $\rho = r$ ,  $\tau_r = \frac{M_k r}{J_p}$ ; для точок, що розміщені від поверхні вала на третину відстані радіуса, тобто при  $\rho = \frac{2r}{3}$ ,  $\tau_\rho = \frac{M_k 2r/3}{J_p}$ .

Поділимо друге рівняння на перше, отримаємо

$$\frac{\tau_\rho}{\tau_{max}} = \frac{M_k 2r/3}{J_p} \frac{J_p}{M_k r} = \frac{2}{3},$$

отже, якщо  $\rho = \frac{2}{3} r$ , то  $\tau_\rho = \frac{2}{3} \tau_{max} = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$  МПа.

### 6.3. Розрахунки на міцність при крученні

З формули /6.9/ видно, що максимальні дотичні напруги  $\tau_{max}$  прямо пропорційні крутному моменту  $M_k$  і обернено пропорційні полярному моменту опору  $W_p$ . Для забезпечення міцності вала необхідно, щоб найбільші дотичні напруги  $\tau_{max}$  не перевищували деякої допустимої дотичної напруги, характерної для матеріала, з якого виготовлений вал, тобто

$$\tau_{max} = \frac{M_k^{max}}{W_p} \leq [\tau], \quad /6.12/$$

де  $M_k^{max}$  - найбільше за абсолютною величиною значення крутного моменту, яке визначається з побудованої епюри крутних моментів навантаженого вала. Допустима дотична напруга  $[\tau]$  має зв'язок з допустимою нормальною напругою при розтягу  $[\sigma]$ . На базі аналізу дослідних даних беруть, наприклад, для сталей  $[\tau] = 0,5 \dots 0,6 [\sigma]$  /згідно з /4.14/, /4.15/.

Умова міцності /6.12/ дає можливість розв'язувати три типи задач на міцність: здійснювати проектний розрахунок; визначати допустиме навантаження  $[T]$  і виконувати перевіряючий розрахунок.

Для проведення проектного розрахунку перш за все з умови міцності /6.12/ визначають полярний момент опору:

$$W_p \geq \frac{M_{\kappa}^{\max}}{[\sigma]}$$

Потім, враховуючи формули /6.10/ і /6.11/, знаходять діаметри:

1/ для вала суцільного круглого перерізу

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^{\max}}{[\sigma] \pi}}$$

2/ для вала кільцевого поперечного перерізу

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^{\max}}{\pi [\sigma] (1-c^4)}}$$

Найбільший крутний момент, який може безпечно витримати вал заданого поперечного перерізу /вантажопідйомність/, визначають за формулою

$$[M_{\kappa}] \leq [\sigma] W_p \quad /6.13/$$

Витрата матеріалу на виготовлення валів однакової довжини з одного й того ж матеріалу, очевидно, прямо пропорційна площі поперечного перерізу  $A$ . Вантажопідйомність, як це випливає з /6.13/, прямо пропорційна полярному моменту опору  $W_p$ . Отже, чим більше відношення  $W_p/A$  для обраного вала, тим раціональнішою буде його форма. Введемо поняття коефіцієнта вантажопідйомності вала як відношення полярного моменту опору до площі поперечного перерізу:

$$\Gamma = \frac{W_p}{A} \quad /6.14/$$

Підставивши у формули /6.10/ і /6.11/ значення  $W_p$  і відповідні площі поперечного перерізу, отримуємо: для вала суцільного круглого поперечного перерізу коефіцієнт вантажопідйомності  $\Gamma = d/4$ ; для вала кільцевого поперечного перерізу  $\Gamma = D(1+c^2)/4$ , де  $d$  і  $D$  -

відповідно діаметр суцільного і зовнішній діаметр кільцевого поперечного перерізу. Підставимо формулу /6.14/ у /6.13/, дістанемо

$$[M_K] = \Gamma A [\tau].$$

Коефіцієнтом вантажопідйомності зручно користуватись, якщо при виборі валів маємо деякі альтернативні варіанти.

Порівняємо, для прикладу, вали круглого суцільного і кільцевого поперечного перерізів. Так, якщо задано вантажопідйомність  $[M]$  вала, то його вага /або площа поперечного перерізу  $A$  при тій же довжині/ обернено пропорційна коефіцієнту вантажопідйомності:

$$\pi = \frac{P_c}{P_K} = \frac{A_c}{A_K} = \frac{\Gamma_K}{\Gamma_c} \quad /6.15/$$

Підставимо значення коефіцієнтів вантажопідйомності круглого суцільного  $\Gamma$  і кільцевого  $\Gamma_K$  поперечного перерізу і, враховуючи, що  $W_{PK} = W_{PC}$ , матимемо

$$\pi = \frac{1+c^2}{\sqrt{1-c^4}}$$

Якщо ж необхідно вибрати рівновеликий вал /вал однакової площі поперечного перерізу/ під максимальне навантаження, то

$$\pi = \frac{[M_K]_K}{[M_C]_C} = \frac{\Gamma_K}{\Gamma_c}$$

Підставляючи в отримане співвідношення величини  $\Gamma_c$  і  $\Gamma_K$  і враховуючи, що для рівновеликих валів  $A_c = A_K$ , маємо

$$\pi = \frac{1+c^2}{\sqrt{1-c^4}}$$

Наприклад, при  $c = 0,8$  маємо  $S = 2,73$ . Це означає, що вал кільцевого поперечного перерізу з відношенням внутрішнього діаметра до зовнішнього 0,8, може безпечно витримати навантаження в 2,73 рази більше, ніж вал суцільного круглого поперечного перерізу, на виготовлення якого витрачено таку саму кількість матеріалу.

Часто в інженерній практиці буває необхідним проводити перевірки розрахунки валів, навантажених крученням. У цьому випадку задані крутильні моменти на валу і його розміри. Перевірний розрахунок відповідно до умови міцності /6.12/ виконують у такій послідовності.

1. Будують епюру крутильних моментів навантаженого вала і знаходять переріз вала, де  $M_{\kappa} = M_{\kappa}^{max}$ .

2. Визначають полярний момент опору вала  $W_p$  і максимальну дотичну напругу  $\tau^{max}$  за формулою /6.9/.

3. Для матеріалу, з якого виготовлено вал, визначають допустиму дотичну напругу  $[\tau]$ .

4. Порівнюють значення  $\tau^{max}$  і  $[\tau]$ , використовуючи співвідношення /6.12/; якщо  $\tau^{max} > [\tau]$ , необхідно або збільшити діаметр вала, або зменшити на нього навантаження.

Приклад 6.2. На сталевий вал через чотири шківні діють пари сил /рис.6.13, а/.

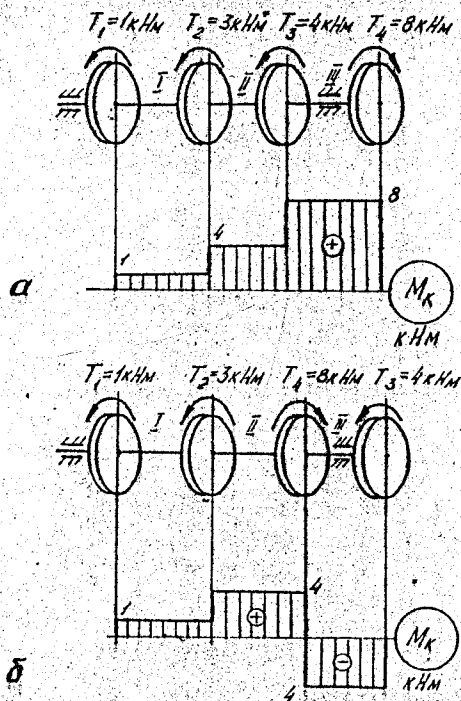


Рис.6.13. Епюра крутильних моментів

Побудувати ешпуру крутних моментів, підібрати діаметр суцільного круглого вала, якщо  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ . Поміняти місцями третю і четверту пари сил і знайти діаметр вала в цьому випадку. Порівняти отримані результати.

Розв'язання. Використовуючи метод перерізів, визначаємо

$$M_{\kappa I} = T = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{\kappa II} = T + T = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{\kappa III} = T + T + T = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

У межах кожної ділянки ешпура обмежена прямими, паралельними осі вала. Ешпура  $M$  показана на рис. 6.13, а. Найбільш навантаженим є III ділянка вала, де  $M_{\kappa III} = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Згідно з умови міцності /6.12/ для проектного розрахунку маємо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^8}} = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Поміняємо місцями третій і четвертий шків /рис. 6.13, б/ і знайдемо значення крутних моментів на ділянках. Ешпура крутних моментів для цього випадку зображена на рис. 6.13, де видно, що найбільший крутний момент на вал становить лише 4 кН·м. Користуючись тією самою умовою міцності, дістаємо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}^{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^8}} = 5,78 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Отже, помінявши місцями шківів, добились значного зменшення навантаження на вал, а з ним зменшення діаметра вала і витрати матеріалу. З цього робимо висновок: найбільший крутильний момент  $T_{\max}$  на валу слід розмістити так, щоб інші моменти  $T_i$ , що передають навантаження на вал зліва і справа від  $T_{\max}$ , були по можливості однаковими.

Приклад 6.3. Лебідка підіймає  $P = 20 \text{ кН}$  із швидкістю 0,5 м/с. Вважаючи, що вал лебідки навантажений тільки крученням і нехтуючи тертям в підшипниках, знайти діаметр суцільного круглого вала, що обертається з швидкістю 120 об/хв при допустимій напрузі  $[\tau] = 40 \text{ МПа}$ .

Розв'язання. Потужність, що передає вал становить  $N = P v = 20 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = 10 \text{ кВт}$ . Швидкість обертання вала  $\omega = \pi n / 30 = 30 = 3,14 \cdot 120 / 30 = 12,56 \text{ рад/с}$  маємо.

Крутильний момент на валу  $T = N_t / \omega = 10^4 / 12,56 = 798 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Крутильний момент в перерізі вала  $M_\kappa = T$ , тоді з умови міцності /6.12/ визначимо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_\kappa^{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 798}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^7}} = 4,66 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 46,6 \text{ мм}.$$

Згідно з нормальним рядом діаметрів беремо  $d = 50 \text{ мм}$ .

**Приклад 6.4.** Суцільний вал діаметром 100 мм замінюють валом кільцевого поперечного перерізу, в якого внутрішній діаметр на 10% менший зовнішнього ( $c = 0,9$ ). Знайти зовнішній  $D$  і внутрішній  $d$  діаметри кільцевого вала при тому ж значенні допустимої напруги  $[\tau]$ . Порівняти вагу суцільного і кільцевого валів.

**Розв'язання.** Оскільки зовнішнє навантаження на вали залишається незмінним, то, згідно з умовою міцності /6.12/, полярний момент опору суцільного вала  $W_{\rho c}$  дорівнює полярному моменту опору кільцевого вала  $W_{\rho \kappa}$ , тоді зовнішній діаметр вала визначимо з умови  $\pi d^3 / 16 =$

$$D = \frac{d}{\sqrt[3]{1-c^4}} = \frac{100}{\sqrt[3]{1-0,9^4}} = 143 \text{ мм}.$$

Внутрішній діаметр вала  $d_\kappa = c D = 0,9 \cdot 143 = 129 \text{ мм}$ . Оскільки суцільний і кільцевий вали виготовлені з одного матеріалу і мають однакову довжину, то згідно з формулою /6.15/ маємо

$$m = \frac{\rho_c}{\rho_\kappa} = \frac{\Gamma_\kappa}{\Gamma_c} = \frac{D(1+c^2)}{d} = \frac{143 \cdot 1,81}{100} = 2,58,$$

тобто вал круглого суцільного перерізу в 2,58 раза важчий за вал кільцевого перерізу.

**Приклад 6.5.** Знайти вантажопідйомність  $[T]$  сталевого стержня круглого поперечного перерізу діаметром 20 мм, якщо допустима дотична напруга  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

**Розв'язання.** Вантажопідйомність вала визначаємо за формулою /6.15/

$$[M_\kappa] = [T] \leq [\tau] W_\rho = \frac{[\tau] \pi d^3}{16} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{16} = 157 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

#### 6.4. Деформації і розрахунки на жорсткість при крученні

Мірою деформації при крученні, як зазначалося, є кут закручування  $\varphi$  і відносний кут закручування  $\theta$ . На підставі формул /6.3/ і /6.7/ кут закручування  $\varphi$  відрізка вала довжиною  $l$  становитиме

$$\varphi = \int_a^l \theta dx = \int_0^l \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} dx. \quad /6.16/$$

Якщо на відрізку циліндричного вала довжиною  $l$  значення крутного моменту стало, то

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p}; \quad \theta = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p}. \quad /6.17/$$

Добуток  $GJ_p$  називається жорсткістю перерізу вала при крученні і має одиницю  $\text{РН} \cdot \text{м}^2$ .

Якщо вал сталого діаметра на ділянках навантажений різними  $T_i$ , то

$$\varphi = \frac{1}{GJ_p} \sum_{i=1}^n M_{\kappa i} l_i. \quad /6.18/$$

За значенням кутів закручування  $\varphi_i$ , обчислених для кожної ділянки вала, визначаємо результуючий кут закручування всього вала:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_i + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Аналогічно розрахункам на міцність проводять розрахунки вала на жорсткість. Умова жорсткості вала формулюється так: найбільший відносний кут закручування  $\theta_{\max}$  не має перевищувати деякої допустимої величини  $[\theta]$ , яка визначається головним чином особливостями конструкції. Допустимий відносний кут закручування для різних конструкцій і режимів роботи вала змінюється в досить широких межах. Залежно від призначення валів  $[\theta]$  беруть таким: навантаження статичні - 0,3 град, змінні - 0,25 град і ударні - 0,16 град на 1 м довжини вала. Умова жорсткості має вигляд

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\kappa}^{\max}}{GJ_p} \leq [\theta]. \quad /6.19/$$

Користуючись умовою /6.19/, можна розв'язувати ті самі три типи задач, що й під час розрахунків на міцність.

Діаметр вала, згідно з умовою /6.19/ на підставі формул /5.11/ і /5.13/ такий:

1/ для вала суцільного круглого перерізу

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_{\kappa}^{\max}}{\pi G [\theta]}}; \quad /6.20/$$

2/ для вала кільцевого поперечного перерізу

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\kappa}^{\max}}{\pi G [\theta] (1-c^4)}}. \quad /6.21/$$

Для валів характерно те, що задовольняючи умову міцності, вони недостатньо жорсткі, тобто будуть закручуватись на значний кут під дією крутильних моментів. Внаслідок цього такий вал буде передавати момент нерівномірно, що може спричинити виникнення небезпечних крутильних коливань і в подальшому руйнування вала. Тому для відповідальних конструкцій виконують розрахунки валів водночас на міцність і на жорсткість; обчислюючи діаметр, з двох його значень беруть більше, а встановлюючи навантаження, із двох отриманих крутильних моментів беруть менший.

**Приклад 6.6.** Знайти потужність турбіни, якщо кут закручування обертового суцільного сталюого вала на довжині 6 м дорівнює  $0,8^{\circ}$ . Діаметр вала  $20 \cdot 10^{-4}$  м, швидкість його обертання 300 об/хв. Обчислити також найбільші дотичні напруги в валі.

**Розв'язання.** Відносний кут закручування  $\theta = \varphi / l = 0,8 / 5,57,5 = 2,79 \cdot 10^{-3}$  рад/м. Крутильний момент отримаємо з формулою /6.17/:

$$M_{\kappa} = G \theta J_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot 2,79 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 3,14 / 32 = 35,7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Користуючись формулою /6.1/ і враховуючи, що  $M = T$ , визначаємо потужність на валу:  $N = M_{\kappa} \pi / 30 = 35,7 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 300 / 30 = 1120$  кВт. Найбільші дотичні напруги:  $\tau_{\max} = M_{\kappa} / W_p = 16 \cdot 35,7 \cdot 10^3 / 3,14 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 89,8$  МПа.

**Приклад 6.7.** Підібрати діаметр вала /рис.6.14/, навантаженого моментами  $T_1 = 2$  кН·м;  $T_2 = 10$  кН·м;  $T_3 = 1$  кН·м;  $T_4 = 9$  кН·м. Допустимий кут закручування для вала  $[\theta] = 0,2$  град/м, а допустима дотична напруга  $[\tau] = 50$  МПа. Побудувати епюри моментів  $M_{\kappa}$  і кутів закручування  $\varphi$  за довжиною вала, вважаючи, що лівий кінець нерухомий. Модуль зсуву матеріалу вала  $G = 8 \cdot 10^{10}$  МПа.

Розв'язання. Користуючись методом перерізів, знаходимо  $M_{\kappa}$  на відрізках вала:  $M_{\kappa I} = -T_1 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_{\kappa II} = -T_1 + T_2 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_{\kappa III} = -T_1 + T_2 + T_3 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Як видно з епюри  $M_{\kappa}$  /рис.6.14/, найбільш навантаженою є ділянка СД : на ній  $M_{\kappa}^{\max} = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Використовуючи умову жорсткості /6.19/, за формулою /6.20/ знаходимо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{4 \sqrt{32 M_{\kappa}^{\max}}}{\pi G [\theta]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \sqrt{32 \cdot 9 \cdot 10^3 \cdot 57,5}}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,2}} = 0,1 \text{ м} = 100 \text{ мм}.$$

Перевіримо підібраний діаметр вала відповідно до умови міцності /6.12/:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}^{\max}}{W_p} = \frac{16 M_{\kappa}^{\max}}{\pi d^3} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 10^{-3}} = 46 \text{ МПа};$$

$\tau_{\max} < [\tau] = 60 \text{ МПа}$ , отже підібраний вал задовольняє як умову жорсткості, так і умову міцності.

Визначимо кути закручування вала  $\varphi_i$  на відрізках.

Кут закручування відрізка АВ :

$$\varphi_1 = \frac{M_{\kappa I} a}{G J_p} = -\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 10^3} = -1,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

кут закручування відрізка ВС :

$$\varphi_2 = \frac{M_{\kappa II} b}{G J_p} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

кут закручування відрізка СД :

$$\varphi_3 = \frac{M_{\kappa III} c}{G J_p} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 10^3} = 6,75 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Якщо лівий кінець вала вважати закріпленим, то кут закручування правого перерізу /відносно до лівого/ буде:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -1,25 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3} + 6,75 \cdot 10^{-3} = 13,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Епюра кутів закручування  $\varphi$  зображена на рис.6.14.

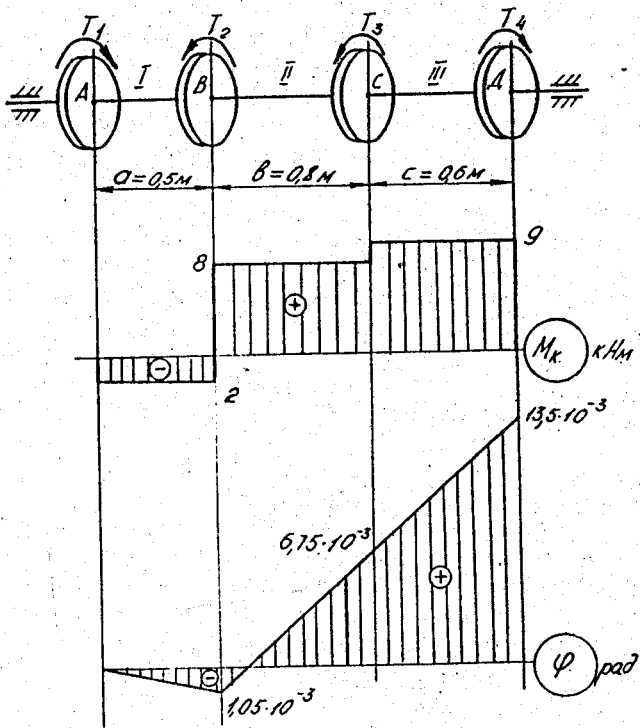


Рис.6.14. Епюри крутних моментів  $M_k$  і кути закручування  $\varphi$

## 6.5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин

Циліндричні гвинтові пружини широко застосовуються в техніці. Їх виготовляють з високоякісного пружинного сталевго дроту круглого перерізу і використовують в основному як амортизатори - для пом'якшення ударних поштовхів машин і механізмів. Циліндричні гвинтові пружини працюють в основному на розтяг або стиск, при якому в поперечних перерізах дроту пружини виникають три /з шести/ внутрішніх силових фактори: крутний момент, поперечна сила і згинальний момент. В зв'язку з цим точний розрахунок напруг і деформацій в перерізах пружини є складною задачею і в даному посібнику не розглядається. Обмежимося розглядом циліндричних пружин з малим кроком витка, тобто з малою, порівняно з діаметром витка, відстанню між витками. За такого нахилу витків до площини, перпендикулярно до осі пружини, можна знехтувати дією згинального моменту.

Розглянемо пружину, на яку діє сила розтягу  $F$ , направлена вздовж осі пружини /рис.6.15/.

Введемо позначення:  $D = 2R$  - середній діаметр витка пружини;  $d = 2r$  - діаметр дроту, з якого навито пружину;  $F$  - сила розтягу;  $n$  - число робочих витків;  $G$  - модуль зсуву матеріалу пружини /дроту/.

Для з'ясування внутрішніх силових факторів пружини скористаємось методом перерізів. Розріжемо виток пружини площиною, яка проходить через вісь пружини, і розглянемо одну із відрізаних частин, наприклад, нижню /рис.6.16/. Дію відкинutoї /верхньої/ частини пружини на ту, що залишилася /нижню/, можна зрівноважити, приклавши поперечну силу  $Q = F$  і крутний момент  $M = FR$  /див.рис.6.16/. Поперечна сила і крутний момент в точках перерізу дроту спричиняють дотичні напруги, тому в точках отриманого перерізу пружини результуючі дотичні напруги визначаються, як сума двох векторів:  $\vec{\tau} = \vec{\tau}' + \vec{\tau}''$ , де  $\vec{\tau}''$  - дотичні напруги в точках перерізу /рис.6.17,а/, зумовлені поперечною силою  $Q$  :

$$\tau' = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}, \quad /6.22/$$

$\tau''$  - дотичні напруги в тих же точках поперечного перерізу дроту /рис.6.17,б/, утворені крутним моментом  $M_k$  :

$$\tau'' = \frac{M_k \rho}{J_p}. \quad /6.23/$$

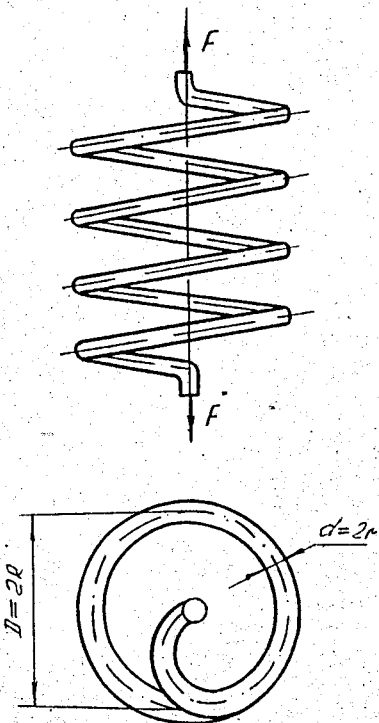


Рис.6.15. Навантаження  
циліндричної  
пружини при розтягу

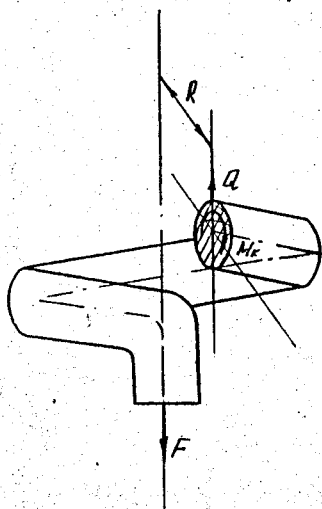


Рис.6.16. Схема дії внутрішніх  
силових факторів у пере-  
різі розтягнутої  
циліндричної пружини

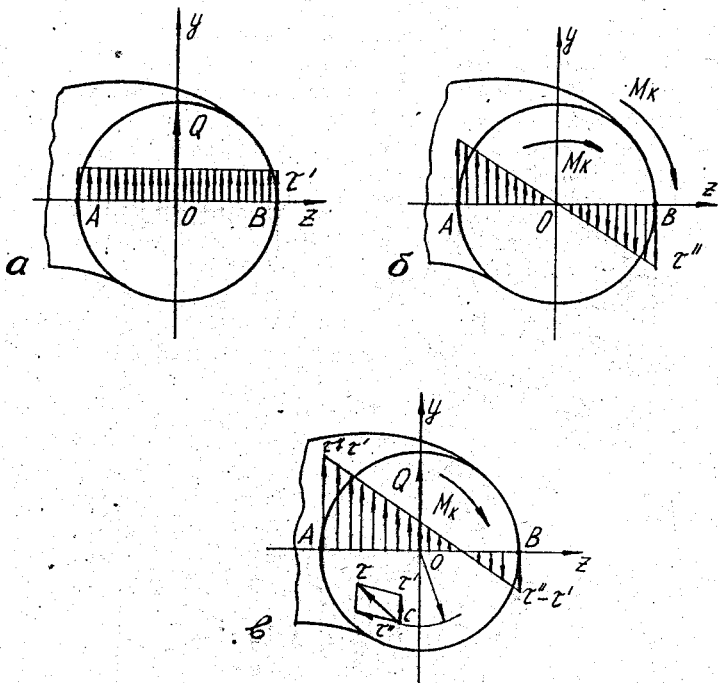


Рис.6.17. Випри дотичних напруг у перерізі розтягнутої пружини: а - від поперечної сили  $Q$ ; б - від крутного момента  $M_k$ ; в - результувача напруга

З формули /6.22/ і рис.6.17,а видно, що дотичні напруги не залежать від координат у поперечному перерізі, тобто однакові в кожній точці перерізу пружини.

Дотичні напруги, спричинені крутним моментом, згідно з формулою /6.23/ прямо пропорційні радіусу  $\rho$  точки перерізу. Як видно з рис.6.17,б, дотична напруга при  $\rho = 0$  дорівнює нулю; найбільшого значення дотичні напруги досягають на поверхні витка при  $\rho = d/2$ , тобто

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{16FR}{\pi d^3}$$

У кожній точці перерізу дроту результуюча дотична напруга визначається за правилом паралелограма /наприклад, в деякій точці  $C$  перерізу, рис.6.17/, і тільки на діаметрі  $AB=d$  сумарні дотичні напруги направлені по одній лінії; на радіусі  $OB$   $\tau'$  і  $\tau''$  мають протилежний напрям, а на радіусі  $OA$  збігаються за напрямом /див.рис.6.17,а і рис.6.17,б/. В точці  $A$  перерізу дроту /див.рис.6.17,в/, що найближче розміщена до осі пружини, сумарні дотичні напруги найбільші: тут  $\tau'$  і  $\tau''$  додаються арифметично, до того ж  $\tau''$  тут досягають свого максимального значення:

$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad /6.24/$$

Відношення середнього діаметра пружини  $D$  до діаметра дроту  $d$  називають індексом пружини і позначають  $C_n$ , тобто  $C_n = D/d$ . В більшості практичних випадків  $C_n > 5$ , тому величиною  $1/2 C_n$  нехтують порівняно з одиницею і умова міцності пружини має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad /6.25/$$

Допустимі напруги  $[\tau]$  під час розрахунків сталевих пружин вибирають залежно не тільки від матеріалу, а і від діаметра пружинного дроту.

При розрахунках амортизаційних можливостей пружини необхідно оцінювати зміщення витків - осідання пружини, яке позначають  $\lambda_n$ . У циліндричних пружинах, у яких індекс  $C_n \geq 5$ , осідання визначається порівняно просто і з достатньою точністю.

Розглянемо циліндричну пружину, у якій двома меридіональними площинами  $m-m$  і  $n-n$ , що проходять через вісь пружини, вирізано елемент довжиною  $dS$  /рис.6.18/. Згідно з умовою, що площина витка перпендикулярна до осі пружини, можна вважати, що елемент  $dS$  має єдиний центр кривизни  $C$ , розміщений на осі пружини  $OO_1$ . Прикладений до елемента пружини  $dS$  крутний момент  $M_\kappa$  поверне один переріз /наприклад,  $m-m$ / відносно до другого, уявно закріпленого ( $n-n$ ), на кут  $d\varphi$ . Цей кут згідно з /6.18/ пов'язаний з крутним моментом  $M_\kappa$  співвідношенням

$$d\varphi = \frac{M_\kappa dS}{G J_p} \dots \quad /6.26/$$

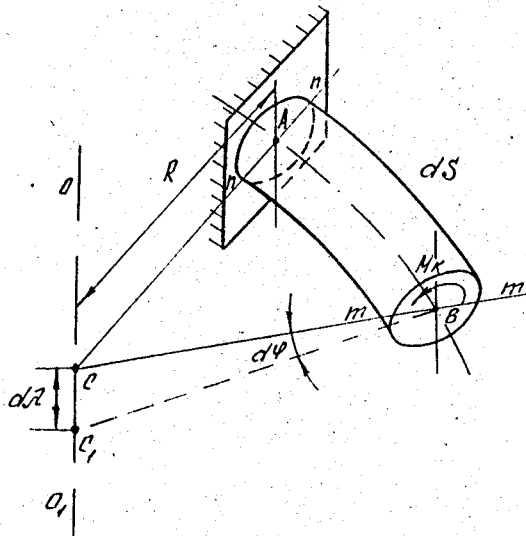


Рис.6.18. Схема до визначення деформації пружини при розтягу

В цьому разі жорстко зв'язаний з точкою  $B$  перерізу дроту радіус  $BC$  обернеться на той самий кут  $d\varphi$ , а центр  $C$  витка пружини зміститься по осі в точку  $C_1$  на відстань  $CC_1 = d\lambda_n$ ;  $d\lambda_n$  - це відстань, на яку розтягнеться пружина внаслідок закручування елемента пружини  $dS$ . З трикутника  $BC_1$ , див.рис.6.18/ видно, що  $d\lambda = R d\varphi$ . Підставимо значення  $d\lambda_n$  в 6.26/ і враховуючи, що  $M_\kappa = FR$ , дістанемо

$$d\lambda_n = \frac{FR^2 dS}{GJ_p}$$

Повне осідання пружини отримаємо, якщо зінтегруємо за довжиною всіх елементів  $dS$ , тобто за довжиною дроту  $l = 2\pi Rn$ , тоді

$$\lambda_n = \frac{FR^2}{GJ_p} l, \quad /6.27/$$

або

$$\lambda_n = \frac{64FR^3n}{Gd^4} = \frac{8FDn^3}{Gd^4}, \quad /6.28/$$

де враховано, що  $J_p = \pi d^4/32$ .

Крім циліндричних, в різних механізмах і машинах зустрічається велика кількість і інших конструкцій пружин: Призматичні, конічні, бочкоподібні і т.д. Методи розрахунків таких пружин досить складні; основні параметри таких і інших спеціальних пружин наведено в довідковій літературі з опору матеріалів і деталей машин.

#### Запитання для самоперевірки

1. Який вид деформації називається крученням? Яка величина є кількісною характеристикою деформації кручення?
2. Сформулюйте правило знаків для крутного моменту  $M_k$ .
3. Як визначається напруження в поперечному перерізі вала при крученні? Який характер її розподілу по площі поперечного перерізу?
4. Запишіть умову міцності при крученні. Які три типи задач вона дозволяє розв'язувати?
5. Що таке жорсткість перерізу при крученні?
6. Напишіть формулу для визначення відносного і повного кута закручування.
7. Поясніть, чому вал кільцевого перерізу при крученні економічніший за вал суцільного перерізу.
8. Порядок розрахунку вала на міцність і жорсткість.
9. Як обчислити величину осідання циліндричної гвинтової пружини при стиску?
10. Як зміняться дотичні напруження в пружині /за інших однакових величин/, якщо діаметр дроту збільшити /зменшити/ удвічі?

## 7. ЗГИН

Брус зазнає деформації згину, якщо в площинах, які проходять через вісь бруса, діють пари сил або сили, перпендикулярні до його осі. В цьому разі вісь бруса як геометричне місце точок центрів ваги площ поперечних перерізів міняє свою кривизну.

Брус, який працює на згин, називається балкою. В розрахунках на міцність як балку беруть ваги, осі, зуби зубчастих коліс, пальці муфт тощо. Розглянемо найпростіший випадок згину - плоский згин балки.

### 7.1. Реакції опор балок і їх визначення при плоскому згині

Плоским називається згин, за якого всі зовнішні сили і пари сил розміщені в одній площині /така площина називається силовою/, причому ця площина збігається з однією з головних площин перерізу. Головними називають площини, які проходять через вісь бруса і одну із головних центральних осей поперечного перерізу.

Випадок плоского згину показано на рис.7.1,а. В головній площині балки  $yOx$  діє пара сил  $M_0$ , зосереджена сила  $F$  і розподілена навантаження  $q$ . Оскільки всі зовнішні сили розміщені в одній площині, яка проходить через поздовжню вісь балки, то надалі навантажені балки будемо зображати схематично так, як показано на рис.7.1,б. Тобто, замість балки показують її вісь, а силову площину суміщують з площиною рисунка. Опорні реакції, які зрівноважують прикладені до балки зовнішні сили, також розміщені в тій же силевій площині і відносяться до діючих зовнішніх сил на балку.

Розглянемо види опор балок і порядок їх визначення.

За конструктивними особливостями розрізняють три види опор: шарнірно-рухомі, шарнірно-нерухомі і жорстко затиснені.

На рис.7.2,а показані варіанти схематичного зображення шарнірно-рухомої опори, яка перешкоджає переміщенню балки в одному напрямі. В цьому разі виникає реакція дії опори на балку  $R_A$ , де  $A$  - індекс, яким позначають опору.

Шарнірно-нерухома опора /рис.7.2,б/ перешкоджає балці переміщатися в двох взаємно перпендикулярних напрямках, в яких і виникають опорні реакції  $R_A$  і  $H_A$ .

Жорстко заземленою називається опора /рис.7.2,в/, у якій, крім обмеження переміщенню в двох взаємно перпендикулярних напрямках, додається також обмеження повороту навколо осі опори. Взагалі в разі затиснення можуть виникнути три реакції опори ( $R_A$ ,  $H_A$ ,  $M_A$ ).

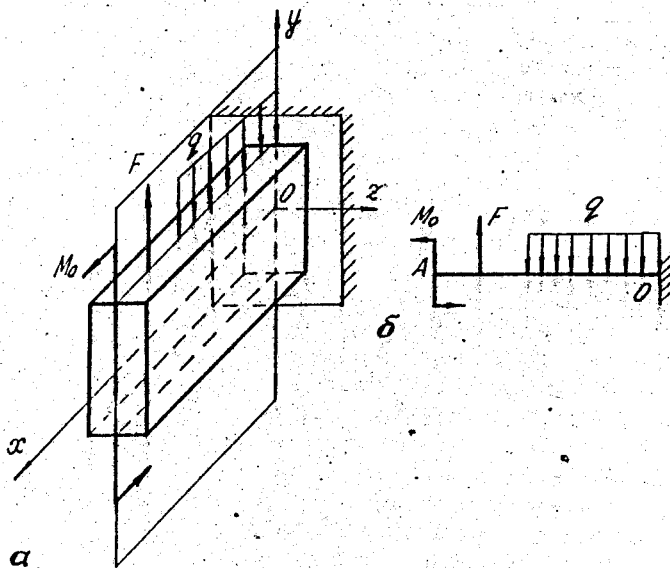


Рис.7.1. Плоский изгиб балки

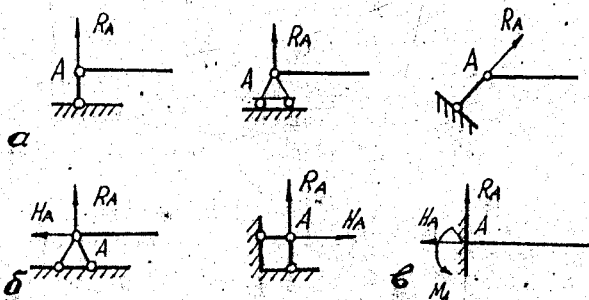


Рис.7.2. Виды опор: а - шарнирно-рухома; б - шарнирно-нерухома; в - жорстке зацземлення

Приклади навантажених балок, у тому числі й напрями реактивних сил на опорах, показані на рис.7.3. Балка, зачеплена одним кінцем без додаткових опор /рис.7.1,б/, або звисаюча за опору частина балки /ділянка  $BC$  на рис.7.3,б/ називається консолю. Балка, зображена на рис.7.3,а, називається двохопornoю з одним прогоном.

Для визначення невідомих опорних реакцій користуються методами статички, вважаючи при цьому, що навантажена балка перебуває в стані рівноваги. Оскільки всі активні і реактивні сили розміщені в одній площині, то для плоскої системи сил можна скласти три лінійно незалежних рівняння статички. Ці три рівняння дають змогу визначити три невідомих реакції. Тому балка, в якій можуть виникнути три реакції /наприклад, балка на рис.7.3/, називається статично визначеною.

Якщо ж реакцій у балці більше трьох, то рівнянь статички буде недостатньо для їх визначення, і балка називається статично невизначеною. Розрахунок таких систем присвячуються спеціальні розділи курсу опору матеріалів і в даній роботі не розглядаються.

Проте слід зазначити, що в розд.2 була розглянута методика розв'язання статично невизначених стержневих систем. Викладена в підрозд. 2.8 методика може бути використана і для розрахунків статично невизначених балок.

Методика обчислення реакцій в статично визначених системах розглянута в курсі теоретичної механіки. В даній роботі розглянемо лише особливості обчислення реакцій у навантажених балках.

Розглянемо прийоми визначення реакцій у балці, зображеній на рис.7.3,а. Напрями реактивних сил на опорах  $A$  і  $B$  позначимо  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $H_B$  і проставляємо на рисунку. Зазначимо, що наперед відома тільки лінія дії реакції, тому, якщо після обчислення реакції мають додатні значення, то напрями вибрано правильно. Якщо ж внаслідок обчислення деякої реакції отримали знак "мінус", то необхідно змінити на рис.7.3,а напрям цієї реакції на протилежний і в подальшому вважати її додатною.

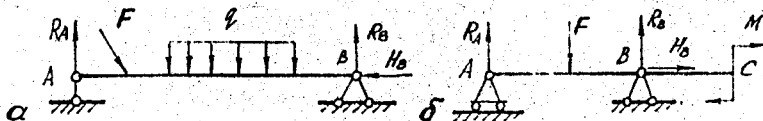


Рис.7.3. Схеми навантаження балок

З рівняння  $\sum F_x = 0$  знаходять горизонтальну реакцію  $H_B$ . Для визначення реакцій  $R_A$  і  $R_B$  складають і розв'язують відповідно рівняння статки  $\sum M_A = 0$  та  $\sum M_B = 0$ . Зауважимо, що в процесі використання цих рівнянь реакції  $R_A$  і  $R_B$  визначаються незалежно одна від одної, тому для перевірки правильності їх визначення використовують рівняння статки  $\sum F_y = 0$ .

Часто на практиці використовують балки, в яких навантаження діють тільки перпендикулярно до осі, тобто в таких балках відсутні поздовжні сили, а отже, горизонтальні реакції  $H_A$ ,  $H_B$  дорівнюють нулю і у використанні рівняння статки  $\sum F_x = 0$  немає необхідності.

Підводячи підсумки, можна рекомендувати таку послідовність визначення реактивних сил при плоскому згині.

1. Вертикальні реакції  $R_A$  і  $R_B$  обчислюють незалежно одна від одної, використовуючи рівняння рівноваги  $\sum M_A = 0$  і  $\sum M_B = 0$ .
2. Для перевірки правильності визначення вертикальних реакцій використовують рівняння  $\sum F_y = 0$ .
3. Якщо на деякій силевій ділянці прикладене розподілене навантаження  $q$ , його замінюють рівнодієюю, яку прикладають у центрі ваги опори розподіленого навантаження.

**Приклад 7.1.** Обчислити реакції опор двохопорної балки з консолю, навантаженою так, як показано на рис. 7.4.

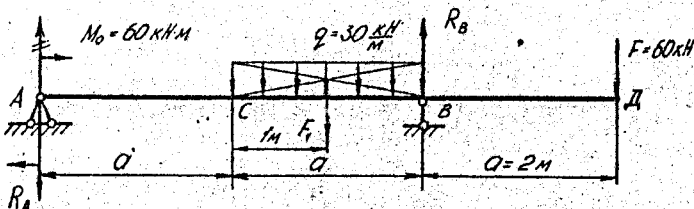


Рис. 7.4. Схема до обчислення реакцій навантажених балок

**Розв'язання.** Оскільки всі зовнішні сили напрямлені перпендикулярно до осі балки, то горизонтальна реакція в опорі  $A$   $H_A = 0$ . Вертикальні реакції спрямовуємо вгору. Знаходимо рівнодіючу силу  $F_1$  розподіленого навантаження на ділянці  $CB$ :  $F_1 = qa = 30 \cdot 2 = 60$  кН. Точка прикладання сили  $F_1$  - в центрі ваги прямокутника опори розподіленого навантаження.

Складаємо рівняння статки і визначаємо реакції опор:

$$\sum M_A = 0; -M_0 - F_1,5a - F_3a + R_B 2a = 0;$$

$$R_B = \frac{M_0 + F_1,5a + F_3a}{2a} = \frac{60 + 180 + 360}{4} = 150 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -M_0 + Fa/2 - R_A 2a - Fa = 0;$$

$$R_A = \frac{-M_0 + \frac{Fa}{2} - Fa}{2a} = \frac{-60 + 60 - 120}{4} = -30 \text{ кН}.$$

Реакція  $R_A$  виявилась від'ємною, тому початковий напрям  $R_A$  на рис.7.4 перекреслюємо двома рисочками, спрямовуємо реакцію вниз і про stavляємо вже додатне значення, оскільки знак "мінус" означає протилежний напрям дії реакції.

Перевіряємо правильність визначення реакцій за рівнянням  $F_y = 0: R_B - 9a - R_A - F = 0; 150 - 150 \neq 0$ , а значить, реакції  $R_A$  і  $R_B$  визначені правильно.

## 7.2. Внутрішні силові фактори при згині балок

При плоскому згині відмінними від нуля в поперечному перерізі балки із шести силових факторів можуть бути: поздовжня сила  $N$ , поперечна сила  $Q_y$  і згинаючий момент  $M_z$ . Тому надалі при поперечному згині позначатимемо їх без індексів, тобто  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ . Причому розглядатимемо тільки прямолінійні балки з навантаженням, прикладеним перпендикулярно до  $Ox$  осі, тому  $N = 0$ .

Під час розрахунків балки на міцність і жорсткість необхідно визначати перерізи, в яких  $M$  і  $Q$  досягають максимальних значень. Для цього будуть епюри поперечних сил і згинаючих моментів у балках.

Величини  $Q$  і  $M$  у перерізах балки визначаються методом перерізів /підрозд.1.4/. Згідно з цим методом значення згинаючого моменту в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил, які діють на одну із частин розітнутого бруса, відносно головної центральної осі  $z$ . Згинаючий момент вважається додатним /переріз  $m-m$  на рис.7.5/, якщо зовнішня сила чи момент, що спричиняють згин, згинають балку так, що стиснуті волокна розміщуються вгорі балки, і від'ємним, якщо стиснуті нижні волокна балки.

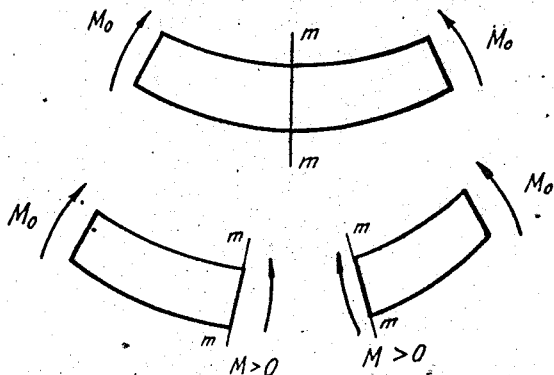


Рис.7.5. Схема до визначення знака згинаючого моменту при згині

Поперечна сила в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь  $y$  балки всіх зовнішніх сил, що діють по один з боків перерізу. Знак поперечної сили визначають за таким правилом. Поперечна сила в перерізі  $n-n$  на рис.7.6/ - додатна, якщо зовнішня

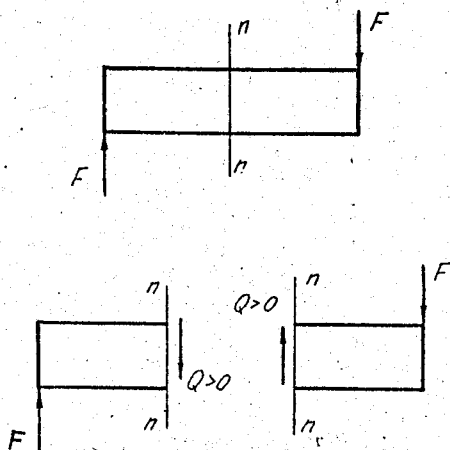


Рис.7.6. Схема до визначення знака поперечної сили при згині

сила намагається зсунути ліву від перерізу частину балки відносно правої вгору або праву відносно лівої вниз, і від'ємна, коли навпаки.

Для обчислення значень внутрішніх силових факторів у перерізах зручніше користуватись практичними правилами визначення знаків  $Q$  і  $M$  у балках.

Поперечна сила  $Q$ : якщо зовнішня сила відносно розглянутого перерізу  $m-m$  намагається повернути відрізану частину балки за годинниковою стрілкою /рис.7.7,а/, то вона входить в алгебраїчне рівняння для визначення  $Q$  із знаком "плюс", якщо проти годинникової стрілки /рис.7.7,б/ - то із знаком "мінус"

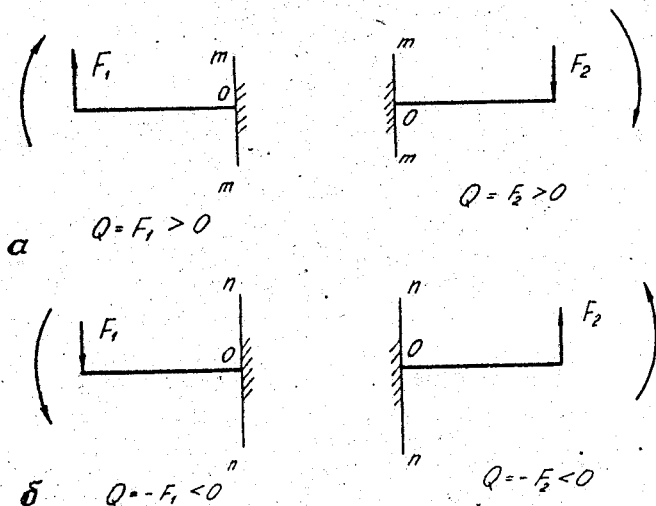


Рис.7.7. Схема до визначення знака поперечної сили при згині:  
а - поперечна сила  $Q > 0$ , б - поперечна сила  $Q < 0$

Згинаючий момент  $M$ : якщо зовнішнє навантаження відносно розгляданого перерізу створює момент, який згинає балку вгору /верхні волокна стиснуті/, то момент входить в алгебраїчне рівняння для визначення згинаючого моменту із знаком "плюс" /рис.7.8,а/, якщо ж зовнішні сили, утворюючи момент, згинають відрізану частину балки вниз, то із знаком "мінус" /рис.7.8,б/.

### 7.3. Диференціальні залежності при згині

Розглянемо консольну балку /рис.7.9,а/, навантажену розподіленим зусиллям  $q$  так, щоб утворений ним згинаючий момент  $M$  у перері-

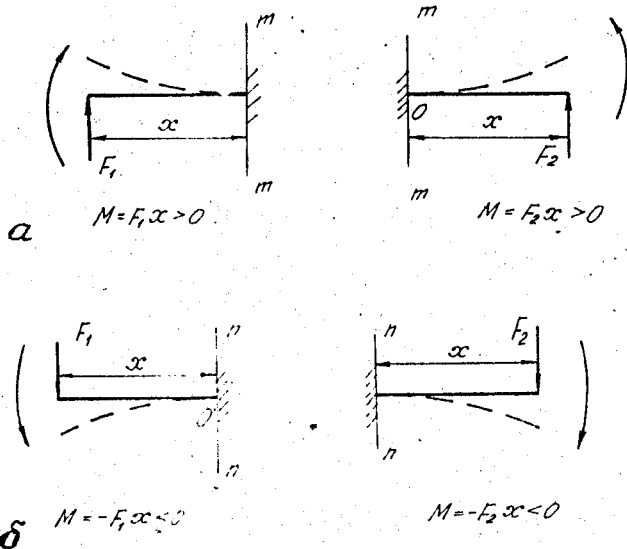


Рис. 7.8. Схема до визначення знака згинаючого моменту при згині: а - згинаючий момент  $M_{зг} > 0$ ; б - згинаючий момент  $M_{зг} < 0$

зах був додатним. На відстані  $x$  від правого кінця балки вирізуємо двома перерізами  $m-m$  і  $n-n$  елемент довжиною  $dx$ . Цей елемент перебуває в рівновазі /рис. 7.9, б/ під дією зовнішнього навантаження  $q$ , поперечних сил і згинаючих моментів у перерізах  $m-m$  і  $n-n$ .

Вважаємо, що в загальному випадку  $Q$  і  $M$  залежать від координати  $x$ . Якщо в перерізі  $m-m$  поперечна сила і згинаючий момент дорівнюють  $Q$  і  $M$ , то в перерізі  $n-n$ , на відстані  $dx$  від перерізу  $m-m$  маємо  $Q+dQ$  і  $M+dM$ .

Запишемо рівняння рівноваги виділеного елемента, тобто прирівняємо до нуля суму проєкцій всіх сил на вісь  $y$  і суму моментів відносно точки  $B$ :  $qdx + Q - (Q+dQ) = 0$ ;

$$M + qdx + dx/2 + Qdx - (M+dM) = 0.$$

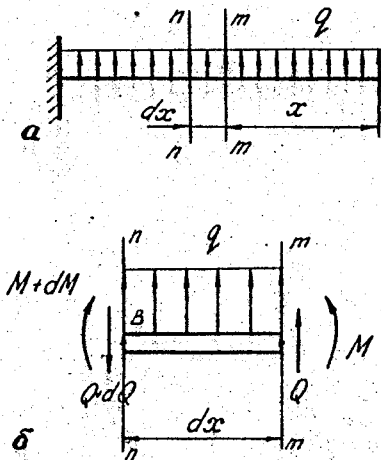


Рис.7.9. Схема до виведення диференціальних залежностей при згині

Виконуючи спрощення і нехтуючи виразом  $q dx^2 / 2$ , як величиною вищого порядку мализни, отримуємо

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \quad /7.1/$$

або, об'єднавши ці формули, дістанемо

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q. \quad /7.2/$$

Оскільки введені раніше правила знаків для  $Q$  і  $M$  мають фізичний зміст, то рівняння /7.1/ і /7.2/ для різних випадків навантаження балок справедливі в точності до знака, тобто

$$\frac{dM}{dx} = \pm Q; \quad \frac{dQ}{dx} = \pm q; \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = \pm q. \quad /7.3/$$

формули /7.3/ називаються диференціальними залежностями при згині. Їх використовують переважно для перевірки правильності побудови епюр  $Q$  і  $M$ .

Користуючись рівняннями /7.3/ можна визначити загальні взаємозв'язки між епюрами  $Q$  і  $M$ . Так, якщо на деякій ділянці балка має однаково розподілене навантаження інтенсивністю  $q = \text{const}$ , то поперечна сила на цій ділянці лінійно залежить від  $x$ , а епюра згинаючого моменту має вигляд квадратичної параболи. Особливий інтерес становить випадок, коли епюра  $Q$  змінює знак, тобто епюра перетинає базову лінію ( $Q = 0$ ). В цьому випадку згинаючий момент має екстремум, оскільки згідно з /7.3/  $dM/dx = 0$ , а це і є умова екстремума функції  $M(x)$ .

На ділянках, де відсутнє розподілене навантаження ( $q = 0$ ), поперечна сила стала, а згинаючий момент  $M$  лінійно залежить від координати  $x$ .

#### 7.4. Побудова епюр $Q$ і $M$ у балках

Відповідно до загальних правил побудови епюр внутрішніх силових факторів /див. підрозд. 1.4/, навантажену балку розбивають на ділянки. Ділянку вважається частина балки /або вся балка/, в межах якої поперечна сила і згинаючий момент змінюються за одним законом. Межами ділянок є перерізи, в яких прикладені зосереджені сили, моменти /пари сил/, початок і кінець розподіленого навантаження або відбувається зміна його інтенсивності.

Значення  $Q$  і  $M$  у перерізах визначаються методом перерізів на підставі правил знаків, викладених у підрозд. 7.2.

На кожній ділянці береться довільний переріз на відстані  $x$  від початку координат і складається рівняння для  $Q$  і  $M$  як функцій абсциси  $x$ , тобто  $Q = f(x)$  і  $M = \varphi(x)$ . За початок координат можна обрати лівий чи правий кінець балки, а також початок ділянки. Надаючи аргументу  $x$  кілька значень на кожній ділянці, отримують відповідні значення  $Q$  і  $M$ , за якими і будують епюри.

Базові лінії епюр  $Q$  і  $M$  проводять паралельно осі балки. Додатні значення поперечної сили відкладають вгору від базової лінії, від'ємні - вниз.

При побудові епюр згинаючих моментів користуються дещо іншим правилом. Цю епюру будуватимемо на стиснутих волокнах балки. Тоді згідно з правилом для  $M$ , додатні значення згинаючого момента також будуть розміщені вгорі базової лінії, а від'ємні - внизу.

Розглянемо деякі характерні приклади побудови епюр  $Q$  і  $M$  у балках.

1. Консольна балка навантажена зосередженою силою  $F$  /рис.7.10,а/.

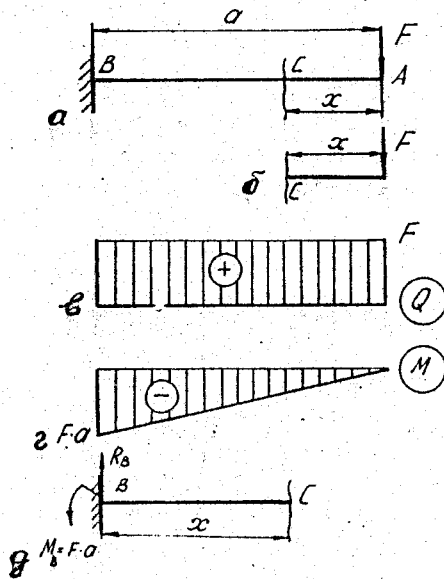


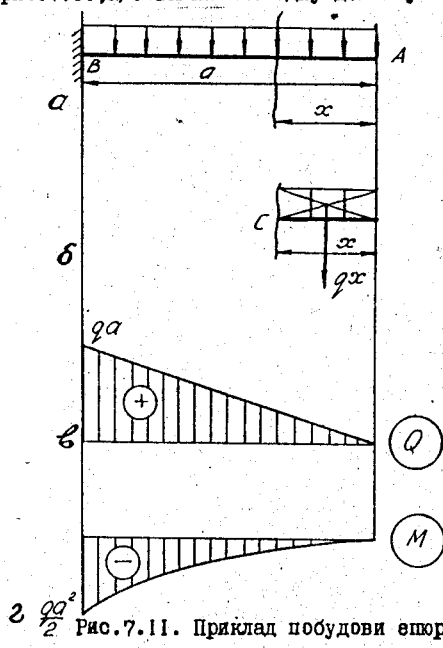
Рис.7.10. Приклад побудови епюр  $Q$  і  $M_{3r}$

Балка має одну ділянку  $AB$ . За початок координат беремо точку  $A$  - правий кінець балки. У довільному перерізі  $C$  ділянки  $AB$  уявно закріплюємо відрізану праву частину балки /рис.7.10,б/. Використовуючи правила знаків, знаходимо значення  $Q$  і  $M$  у перерізі  $C$ :  $Q = F$  - сила  $F$  у рівнянні для  $Q$  входить із знаком "плюс", оскільки вона відносно перерізу  $C$  намагається повернути відрізану /праву/ частину балки за годинникову стрілкою. Оскільки  $Q = F = \text{const}$ , то графік - лінія, паралельна базовій, а епюра має вигляд прямокутника /рис.7.10,в/. Момент сили  $F$  входить в рівняння для  $M$  із знаком "мінус"  $M = -F \cdot x$ , оскільки він згинає відрізану /праву/ частину

балки відносно перерізу  $C$  вниз. Оскільки  $M$  на ділянці  $AB$  лінійно залежить від  $x$ , то для побудови епюри згинаючих моментів достатньо визначити ординати  $M$  у двох точках: якщо  $x = 0$ , то  $M = 0$ , і якщо  $x = a$ , то  $M = -Fa$ . Відкладаючи в відповідному масштабі отримані значення моментів, будемо епюру  $M$  /рис.7.10,г/.

Такий же результат отримуємо, якщо будемо розглядати ліву відрізану частину балки /рис.7.10,д/. Проте в цьому разі перш за все необхідно визначити реакції в закріпленні балки. Співвідношення для визначення  $Q$  і  $M$  у перерізі  $C$  матимуть такий вигляд:  $Q = R_B = F = \text{const}$ ,  $M = -M_B + R_B x = Fx - Fa$ . Епюри поперечних сил і згинаючих моментів на ділянці  $AB$  збігаються з побудованими раніше епюрами /рис.7.10, в, г/.

2. Консольна балка, на яку діє рівномірно розподілене навантаження  $q$  /рис.7.11,а/. Балка має одну ділянку  $AB$  ( $0 \leq x \leq a$ ).



За початок координат візьмемо правий вільний кінець балки, тобто точку  $A$ . На відстані  $x$  виконаємо на ділянці поперечний переріз балки. Розглянемо праву відрізану частину, де відомі всі зовнішні сили /рис.7.11,б/. Тоді в перерізі  $C$  маємо  $Q = qx$ ,  $M = -qx \cdot x/2 =$

$= qa^2/2$ , тобто  $Q$  змінюється на ділянці за лінійним законом, а згинаючий момент  $M$  - за законом квадратичної параболи.

Для побудови епюри  $Q$  обчислимо ординати на межах ділянки: якщо  $x = 0$ , то  $Q = 0$ , а якщо  $x = a$ , то  $Q = qa$ . Вибравши відповідний масштаб, побудуємо епюру  $Q$  /рис.7.11,в/.

Оскільки  $M$  нелінійно залежить від  $x$ , то для побудови епюри необхідно обчислити ординати  $M$  у кількох /мінімум у трьох/ точках ділянки: якщо  $x = 0$ , то  $M = 0$ ; якщо  $x = a/2$ , то  $M = qa^2/8$ ; якщо  $x = a$ , то  $M = qa^2/2$ .

Знову, вибравши відповідний масштаб, з допомогою лекала побудуємо параболу /рис.7.11,г/.

3. Зосереджена сила  $F$  прикладена до двохопорної балки /рис.7.12,а/.

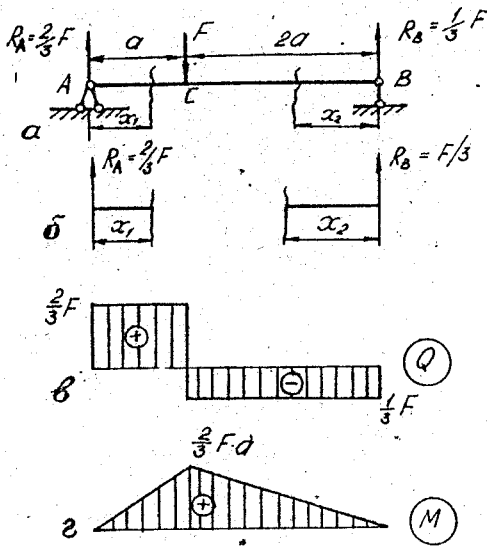


Рис.7.12. Приклад побудови епюр  $Q$  і  $M_{gr}$

Балка має дві ділянки AC і CB.

Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_A = 0; -Fa + R_B 3a = 0; R_B = F/3;$$

$$\sum M_B = 0; F2a - R_A 3a = 0; R_A = 2F/3.$$

Виконаємо перевірку правильності визначення реакцій:

$$\sum F_y = 0, \quad R_A + R_B - F = 0.$$

Ділянка  $AC$  ( $0 \leq x_1 \leq a$ ). Виконавши в межах ділянки переріз на відстані  $x$  від точки  $A$ , розглянемо ліву відрізану частину балки /рис.7.12,б/. Запишемо формули для визначення  $Q$  і  $M$ :

$$Q_1 = R_A = 2F/3; \quad M_1 = R_A x_1 = 2Fx_1/3.$$

Поперечна сила  $Q_1$  стала на ділянці, для побудови епюри  $M$  необхідно знайти значення згинаючих моментів у двох перерізах - межах ділянки: якщо  $x_1 = 0$  /переріз  $A$  /, то  $M_1 = 0$ ; якщо  $x_1 = a$  /переріз  $C$  /,  $M_1 = \frac{2}{3}Fa$ , у вибраному масштабі будемо епюри  $Q$  і  $M$  на ділянці  $AC$  /рис.7.12,в, г/. Аналогічно будемо епюри  $Q$  і  $M$  на силевій ділянці  $CB$  ( $0 \leq x_2 \leq 2a$ ). Виконавши на ділянці переріз, відкинемо ліву частину як більш навантажену. Для правої частини балки /рис.7.12,б, справа/ відносно точки перерізу маємо

$$Q_2 = -R_B = -F/3; \quad M_2 = R_B x_2 = Fx_2/3.$$

Якщо  $x_2 = 0$  /переріз  $B$  /, то  $M_2 = 0$ , якщо  $x_2 = 2a$  /переріз  $C$  /, то  $M_2 = \frac{2}{3}Fa$ . Зберігаючи той самий масштаб, що і на ділянці  $AC$ , будемо епюри  $Q$  і  $M$  на другій ділянці /див. рис.7.12, в, г/.

4. Розподілене рівномірне навантаження  $q$ , прикладено до двох-опорної балки /рис.7.13,а/. Оскільки розподілене навантаження рівномірно прикладене по всій довжині балки, то вертикальні реакції опор  $R_A$  і  $R_B$  однакові і кожна з них дорівнює половині рівнодійної розподіленого навантаження, тобто  $R_A = R_B = qa/2$ .

Балка має одну силеву ділянку  $AB$  ( $0 \leq x \leq a$ ). Виконавши на ділянці поперечний переріз, розглянемо, наприклад, ліву відрізану частину навантаженої балки /рис.7.13, б/. Рівняння поперечної сили має вигляд  $Q = R_A - qx$ . Отримана формула для визначення  $Q$  в перерізах балки лінійно залежить від координати  $x$ . Тому для побудови епюри  $Q$  достатньо визначити ординати в двох перерізах. Звичайно, в таких випадках визначають ординати на межах силової ділянки: якщо  $x = 0$  /переріз  $A$  /, то  $Q = R_A = qa/2$ , якщо  $x = a$  /переріз  $B$  /, то  $Q = R_A - qa = -qa/2$ . Відповідно до вибраного масштабу будемо епюру  $Q$  /рис.7.13,в/.

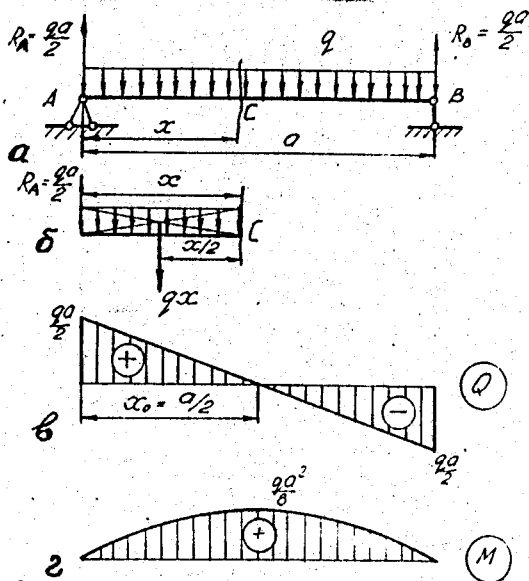


Рис. 7.13. Приклад побудови епюр  $Q$  і  $M_{зг}$

Рівняння згинаючого моменту  $M$  у перерізі  $C$ :  $M = R_A x - qx^2/2$  - це рівняння параболи. Для побудови  $M$  необхідно визначити ординати, принаймні в трьох перерізах балки.

Перш за все звертаємо увагу на ту обставину, що на ділянці  $AB$  епюра поперечної сили  $Q$  змінює знак, тобто в деякому перерізі  $Q$  дорівнює нулю. А це означає, що в перерізі, де  $Q = 0$  згідно з 17.3/ згинаючий момент досягає екстремального значення. Оскільки  $dM/dx = \pm Q$  а  $Q = 0$ , то отримуємо умову екстремуму функції!

$$\frac{dM}{dx} = 0.$$

Визначимо абсцису  $x_0$  - переріз балки, в якому  $M$  досягає екстремуму:

$$\frac{dM}{dx} = R - qx_0 = 0,$$

$$x_0 = \frac{R}{q} = \frac{a}{2}.$$

У цьому перерізі  $M$ , має максимальне значення, тобто  $M|_{x_0=a/2} = M_{\max}$ , оскільки  $d^2M/dx^2 = -q < 0$ .

$$M_{\max}|_{x=x_0} = R_A \frac{a}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{qa^2}{8}.$$

Два інших значення  $M$  визначаємо в перерізах: якщо  $x = 0$ , то  $M = 0$ , якщо  $x = a$ ,  $M = 0$ . Епора  $M$  у вибраному масштабі зображена на рис. 7.18, г.

5. Двохопorna балка навантажена посередині моментом  $M_0$  /рис. 7.14, а/.

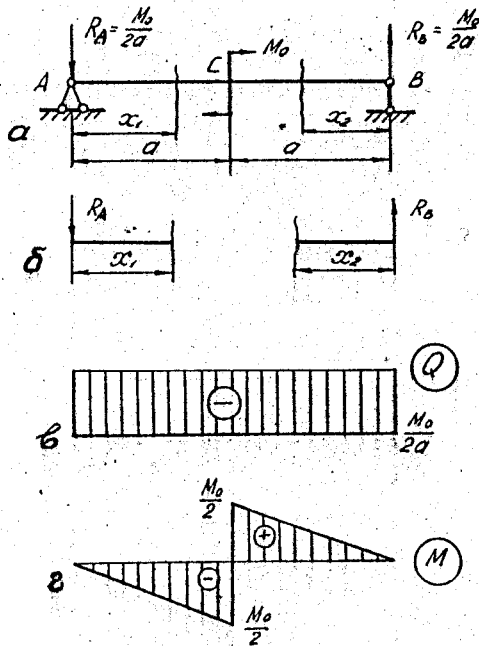


Рис. 7.14. Приклад побудови епор  $Q$  і  $M$ .

Опорні реакції:

$$\sum M_A = 0, \quad -M_0 + R_A 2a = 0, \quad R_B = \frac{M_0}{2a};$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A 2a - M_0 = 0, \quad R_A = \frac{M_0}{2a}.$$

$$\text{Перевірка } \sum F_y = 0, \quad R_B - R_A = 0, \quad \frac{M_0}{2a} - \frac{M_0}{2a} = 0.$$

Навантажена балка має дві силові ділянки  $AC$  і  $CB$ . Складаємо рівняння для  $Q$  і  $M$  у довільному перерізі ( $0 \leq x \leq a$ ) на ділянці  $AC$  /рис.7.14,б/:  $Q_1 = -R_A = -M_0/2a = \text{const}$ ; ; тобто в довільному перерізі ділянки  $AC$  поперечна сила стала, а її епора має вигляд прямокутника /рис.7.14,в/. Рівняння згинаючого момента:

$$M_1 = -R_A x = -\frac{M_0}{2a} x.$$

Оскільки  $M$  лінійно залежить від  $x$ , то при  $x = 0$  /переріз  $A$  /,  $M_1 = 0$ , при  $x_1 = a$  /переріз  $C$  /  $M_1 = R_A a = -M_0/2$ .

Виконавши довільний переріз /рис.7.14,б в межах другої силовій ділянці  $BC$  ( $0 \leq x_2 \leq a$ ) , складемо рівняння для правої відрізаної частини балки:

$$Q_2 = -R_B = -\frac{M_0}{2a}, \quad M_2 = R_B x_2 = \frac{M_0}{2a} x_2.$$

Тобто епора  $Q$  на першій і другій ділянках однакова. Графік  $M$  змінюється за лінійним законом, тому: якщо  $x_2 = 0$  /переріз  $B$  /,  $M_2 = 0$ ; якщо  $x_2 = a$  /переріз  $C$  /,  $M_2 = M_0/2$ .

Епюри  $Q$  і  $M$  для балки зображені на рис.7.14, в, г.

Зазначимо, що в перерізах, де до балки прикладена пара сил  $M_0$ , на епюрі поперечної сили немає ніяких змін, а на епюрі згинаючих моментів – стрибок на величину момента  $M_0$ .

### 7.5. Особливості побудови епор $Q$ та $M$

Диференціальні залежності в разі згину /7.3/, а також розглянуті в попередньому підрозділі приклади дозволяють встановити ряд особливостей при побудові епор  $Q$  і  $M$ . Ці особливості необхідно врахувати

вати при найрізноманітніших навантаженнях на балку. Перелічимо деякі із характерних особливостей.

1. На ділянці, де відсутні розподілені навантаження  $q = 0$ , епюра  $Q$  - це пряма, паралельна базовій лінії, а епюра  $M$  - похила пряма /див.рис.7.10, 7.12, 7.14/.

2. В перерізах, де прикладено зосереджену силу  $F$  /див.рис.7.10, 7.12/ на епюрі  $Q$  маємо стрибок на величину цієї сили, а на епюрі  $M$  - злам епюрі: в цьому разі вістря злому напрямлене назустріч прикладеній силі  $F$ .

3. В перерізах, де до балки прикладено момент  $M_0$  /див.рис.7.14/ на епюрі  $M$  відбувається стрибок на величину цього моменту  $M_0$ , а на епюрі  $Q$  не відбувається ніяких змін.

4. На силевій ділянці з прикладеним до балки рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  маємо: епюра  $Q$  - похила до бази лінія, а епюра  $M$  - квадратична парабола, кривизна якої напрямлена назустріч дії розподіленого навантаження, тобто назустріч стрілкам  $q$ . Для побудови параболи необхідно визначити ординати  $M$  принаймні в трьох точках силової ділянки, причому дві з них - на її межах.

Якщо епюра поперечної сили на ділянці, де  $q \neq 0$ , перетинає базову лінію /точка, де  $Q = 0$  /, то в цьому перерізі згинаючий момент має екстремальне значення.

5. Для перевірки правильності побудови епюр  $Q$  і  $M$  можна користуватися і таким правилом. Якщо розглядати побудовані епюри зліва направо, то: при додатному значенні  $Q$  згинаючий момент  $M$  зростає, при від'ємному  $Q$ , згинаючий момент  $M$  зменшується, а при  $Q = 0$  епюра  $M$  - стала, паралельна базовій лінії.

Побудуємо епюри  $Q$  і  $M$  для балки, навантаженої так, як показано на рис.7.15,а. Візьмемо  $a = 1$  м,  $F = 1$  кН,  $M_0 = 2$  кНм,  $q = 1$  кН/м. Для визначення опорних вертикальних реакцій  $R_A$  і  $R_B$  складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; -4qa^2 - Fa + M_0 + R_B 3a = 0; \quad R_B = 2 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; 4qa^2 + M_0 - Fa - R_A 3a = 0; \quad R_A = 3 \text{ кН}.$$

Виконуємо перевірку:  $\sum F_y = 0$ ;

$$R_A + R_B - F - 4qa = 3 + 2 - 1 - 4 \cdot 1 = 0.$$

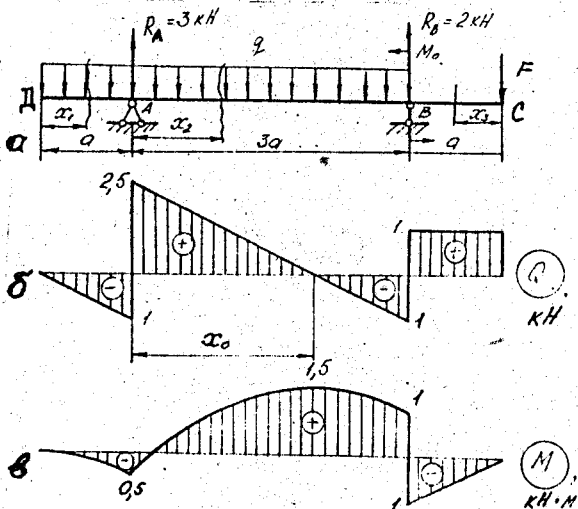


Рис. 7.15. Приклад побудови епюр  $Q$  і  $M_{3r}$

Балка має три силових ділянки:  $DA$ ,  $AB$  і  $BC$ . В довільних перерізах кожної з ділянок складаємо рівняння для  $Q$  і  $M$ , перевіряючи при цьому, чи виконуються диференціальні залежності /7.3/ і особливості побудови епюр  $Q$  і  $M$ .

Для силової ділянки  $DA$  ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):  $Q_1 = -qx_1 = -x_1$ . Епюра  $Q$  на ділянці - пряма похила до бази ліній, тому якщо  $x_1 = 0$ ,  $Q_1 = 0$ , якщо  $x_1 = a = 1$  м,  $Q_1 = -1$  кН.

$M_1 = -qx_1^2/2 = -0,5x_1^2$ . Епюра  $M$  - парабола, для її побудови визначимо значення  $M$  в трьох точках: якщо  $x_1 = 0$ ,  $M_1 = 0$ , якщо  $x_1 = 0,5a = 0,5$  м,  $M_1 = -0,125$  кН·м, якщо  $x_1 = 1$  м, то  $M_1 = -0,5$  кН·м. Екстремуму на цій ділянці немає, оскільки епюра  $Q$  не перетинає базову ліній.

Для силової ділянки  $AB$  ( $0 \leq x_2 \leq 3a$ ):  $Q_2 = -q(x_2 - a) + R_B = -(x_2 + 1) + 3 = 2 - x_2$ . Епюра  $Q$  на ділянці  $AB$  прямолінійна. Для її побудови визначимо значення  $Q$  на межах ділянки: якщо  $x_2 = 0$ ,  $Q_2 = 2$  кН, якщо  $x_2 = 3$  м,  $Q_2 = -1$  кН.

$$M_2 = -\frac{q(x_2+a)^2}{2} + R_1 x_2 = -0,5x_2^2 + 2x_2 - 0,5, \text{Еюра } M_2 \text{ на ділян-$$

ці  $AB$  - парабола. Для її побудови встановимо значення моментів на межах ділянки: якщо  $x_2 = 0$ ,  $M_2 = -0,5$  кН, якщо  $x_2 = 3$  м,

$M_2 = -4,5 + 6 - 0,5 = 1$  кН·м. Оскільки еюра  $Q$  на ділянці  $AB$  перетинає базову лінію, то в точці, де  $Q_2 = 0$ , функція  $M(x)$  досягає максимального значення /оскільки  $d^2M/dx^2 = -1 < 0$ :/

$$\frac{d^2 M(x_2)}{dx_2^2} = -x_0 + 2 = 0; \quad x_0 = 2 \text{ м};$$

$$M(x_0) = -0,5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 0,5 = 1,5 \text{ кНм.}$$

Для силової ділянки  $BC$  ( $0 \leq x_3 \leq a$ ):  $Q = F = 1$  кН. Еюра  $Q$  - пряма паралельна базовій лінії.  $M = -Fx = -x_3$ ; при  $x_3 = 0$ ,  $M_3 = 0$ ; якщо  $x_3 = 1$  м,  $M_3 = -1$  кН·м. Еюри  $Q$  і  $M$  зображені на рис. 7.15, б, в.

Користуючись характерними особливостями еюр поперечних сил і згинаючих моментів, в багатьох випадках згину можна побудувати ці еюри, не складаючи рівнянь  $Q(x)$  і  $M(x)$  для довільних перерізів балок. Цей метод називається експрес-методом побудови еюр  $Q$  і  $M$ . Його суть полягає ось у чому.

1. Визначають реакції опор.
2. Балку розбивають на силові ділянки і на межах цих ділянок визначають поперечні сили  $Q$ . Послідовно розглядаючи ділянки балки по стрибках і нахилах, будують еюру  $Q$ .
3. Встановлюють характерні перерізи балки для побудови еюри  $M$ . Такими слід вважати межі ділянок, а також місце перетину еюрою  $Q$  базової лінії. Визначають в характерних перерізах значення  $M$  і, користуючись викладеними раніше особливостями, будують еюру згинаючих моментів.

Для прикладу розглянемо навантажену балку, зображену на рис. 7.16, а, де  $M_0 = 4$  кН/м,  $F = 3$  кН,  $q = 2$  кН/м,  $a = 1$  м. Побудуємо еюри  $Q$  і  $M$  експрес-методом.

1. Опорні реакції:  $M_A = 0$ ,  $M_0 - F \cdot 2a + R_B \cdot 3a - qa \cdot 3,5a +$   
 $+ F \cdot 4a = 0$ ;  $R_B = -1$  кН;  
 $\Sigma M_B = 0$ ;  $-R_A \cdot 3a + M_0 + F \cdot 4a + Fa - qa \cdot 3,5a = 0$ ;  $R_A = 3$  кН.  
 Перевірка:  $\Sigma F_x = 0$ ;  $R_A - F - R_B - qa + F = 3 - 3 - 1 + 2 + 3 = 0$ .

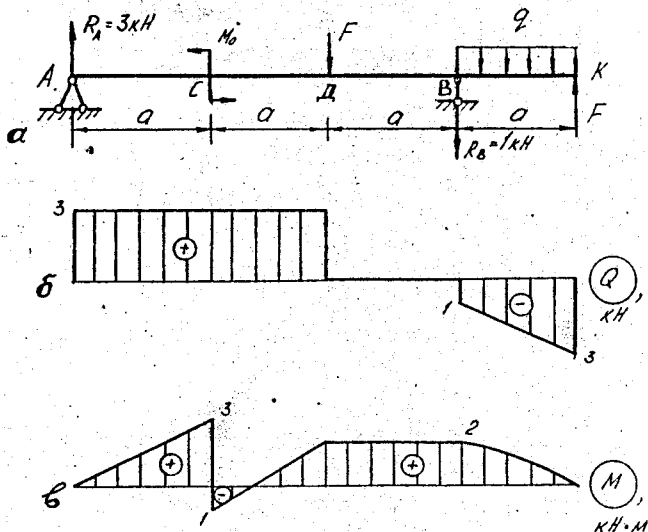


Рис. 7.16. Приклад побудови епюр  $Q$  і  $M$

2. Балка має чотири силових ділянки  $AC$ ,  $CD$ ,  $DB$  і  $BK$ . На межах ділянок поперечна сила становить:  $Q_A = 3$  кН,  $Q_C = 3$  кН,  $Q_D = 3$  кН /ліворуч/,  $Q_E = 0$  /праворуч/,  $Q_B = 0$  /ліворуч/,  $Q_V = -1$  кН /праворуч/, і  $Q_K = -3$  кН. Епюра  $Q$  з урахуванням стрибків і нахилів показана на рис. 7.16, б.

3. Характерні перерізи для побудови епюри  $M$ :  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $B$  і  $K$ . Встановимо  $M$  в характерних перерізах:  $M_A = 0$ ,  $M_C = R_A a = 3$  кН·м /ліворуч/,  $M_C = R_A a - M_0 = -1$  кН·м /праворуч/,  $M_D = R_A a - M_0 = 2$  кН·м,  $M_B = 0$ ,  $M_K = F a - q a^2 / 2 = 2$  кН·м. На ділянках  $AC$ ,  $CD$  і  $DB$  епюра  $M$  лінійно залежить від  $x$ , тому використовуємо значення  $M$  на межах, за стрибками і нахилами будуємо епюру згинаючих моментів. На ділянці  $BK$  епюра  $M$  - парабола, кривизну якої спрямовуємо назустріч стрілкам  $q$ . Екстремуму  $M$  на ділянці немає, оскільки епюра  $Q$  на цій ділянці не перетинає базової лінії. Епюра  $M$  показана на рис. 7.16, в.

### 7.6. Нормальні напруги при чистому згині

В загальному випадку плоского згину /поняття плоского згину наведено в підрозд. 7.1/ в поперечних перерізах бруса виникають поперечні сили  $Q$  і згинаючі моменти  $M$ . Відповідно до висновків, поперечні сили в точках поперечних перерізів балки утворюють дотичні напруги  $\tau$ , а згинаючі моменти  $M$  – нормальні напруги  $\sigma$ .

Розглянемо найпростіший випадок прямого згину – чистий згин. Чистим будемо називати такий вид прямого згину, за якого в поперечних перерізах бруса відмінними від нуля будуть тільки згинаючі моменти  $M$  /поперечні сили  $Q = 0$ /. Оскільки поперечні сили за чистого згину відсутні, то і дотичні напруги в точках поперечних перерізів також дорівнюють нулю. Випадок чистого згину був, наприклад, реалізований в навантаженій балці на силовій ділянці  $DB$  /див.рис.7.16/.

Якщо до двохопорної балки прикласти однакові пари сил  $M_0$ , як показано на рис.7.17, то в довільних перерізах такої балки  $Q = 0$ , а  $M = \text{const}$ . Отже, на всій довжині балки  $l$  реалізується чистий згин. Розглянемо довільний поперечний переріз балки  $m-m$  /рис.7.18/.

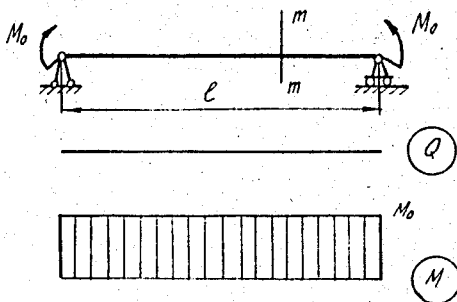


Рис.7.17. Приклад чистого згину  $Q = 0$ ,  
 $M_{зг} \neq 0$

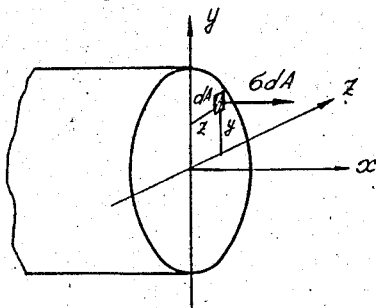


Рис.7.18. Схема до встановлення залежностей між внутрішніми силовими факторами  $N, M_y, M_z$  і нормальними напруженнями  $\sigma$

Систему координат в цьому перерізі виберемо так, щоб головна площина  $x = 0$   $y$  збігалася з силовою площиною. Вісь  $z$  проведемо поки довільно, але перпендикулярно до осей  $y$  і  $x$ . Відділимо елементарну

площадку  $dA$  з координатами  $y$  і  $z$ . В межах площадки  $dA$  нормальні напруги  $\sigma$  вважаємо рівномірно розподіленими по площадці, тоді нормальна сила, що діє на площадці  $dA$ , буде  $dN = \sigma dA$ . Із шести інтегральних рівнянь рівноваги /1.7/ - /1.12/ добутки  $\sigma dA$  входять тільки до трьох:

$$N = \int_A \sigma dA; \quad M_y = \int_A z \sigma dA; \quad M_z = \int_A y \sigma dA.$$

Оскільки при чистому згині із шести внутрішніх силових факторів відмінним від нуля є лише  $M = M_z$ , то

$$\int_A \sigma dA = 0; \quad \int_A \sigma z dA = 0; \quad \int_A \sigma y dA = M. \quad /1.3/$$

Закономірності деформації балки при згині можна встановити, якщо за модель балки взяти поролоновий брусок прямокутного поперечного перерізу, на бічні грані якого нанести сітку ліній, паралельних осі бруса і перпендикулярних до неї /рис.7.19,а/. До кінців бруса прикладемо моменти  $M$  /рис.7.19,б/, силова площина яких збігається з головною площиною бруса  $xOy$ . Під дією моментів  $M$  брусок зазнає чистого згину. В цьому разі спостерігаються такі особливості деформованого стану балки.

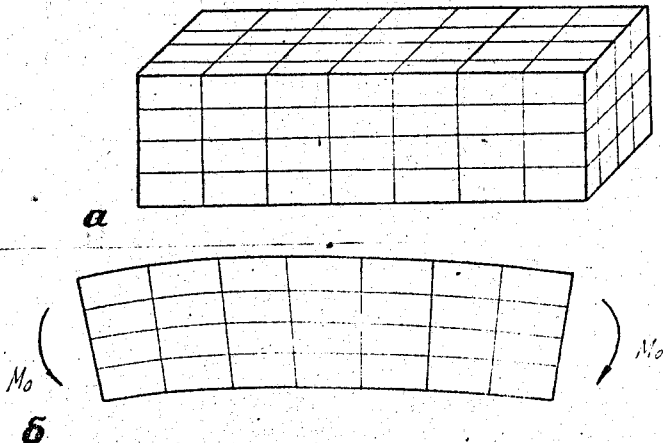


Рис.7.19. Модель балки: а - ненавантаженої; б - деформованої при чистому згині

1. Поперечні прямі лінії залишаються прямими, але дещо повертаються назустріч одна одній.

2. Твірні лінії /до деформації/ прямі, паралельні осі бруса/ викривляються і перетворюються в дуги кругів.

3. Лінії контурів поперечних перерізів /поперечні прямі/ перетворюються з викривленими твірними під прямим кутом.

Отже, при чистому згині, як і при деформаціях розтягу /стиску/ або кручення валів, справедлива гіпотеза плоских перерізів. Волокна матеріалу, розміщені на опуклій частині балки /рис.7.19,б/, розтягуються, а ті, що лежать на вгнутий частині - стискаються. Це означає, що існують такі волокна, які, викривляючись внаслідок згину, не змінюють своєї початкової довжини, тобто не стискаються і не розтягуються. По товщині балки такі волокна утворюють цілий шар матеріалу - він називається нейтральним шаром. Зазначимо, що нейтральний шар розміщений перпендикулярно до силової площини. Лінія перетину нейтрального шару і поперечного перерізу балки називається нейтральною лінією /н.л./ Оскільки нейтральна лінія також перпендикулярна до силової площини, то вона паралельна осі  $Z$ . В подальшому аналізі деформації при згині сумістимо нейтральну лінію перерізу з віссю  $Z$  поперечного перерізу.

Розглянемо кількісну характеристику деформації балки при чистому згині. З цієї метою двома поперечними перерізами  $\pi_1 - \pi_1$  і  $\pi_2 - \pi_2$  виділимо із балки елемент довжиною  $dx$ . Цей елемент у недеформованому і деформованому станах показаний відповідно на рис.7.20, а, б.

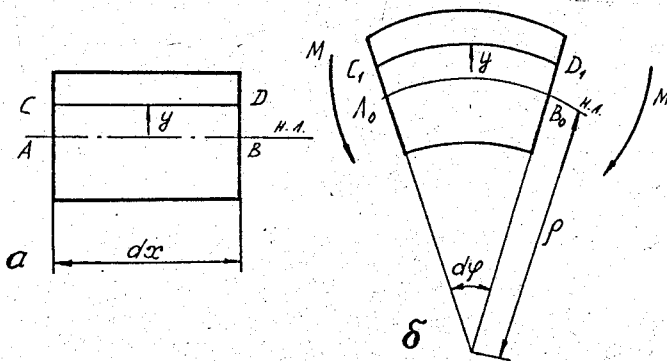


Рис.7.20. Схема до аналізу деформованого стану балки

В процесі деформації перерізи  $m-m$  і  $n-n$ , залишаючись плоскими, повернуться так, що утворять кут  $d\varphi$ . Довжина волокна нейтрального шару  $AB = dx$  / рис. 7.20, а/ не зміниться внаслідок згину, а перетвориться в елемент кола  $A_0 B_0$  / рис. 7.20, б/ з радіусом  $\rho$ . Отже,  $AB = A_0 B_0 = \rho d\varphi$ . Деяке волокно  $CD$  / див. рис. 7.20, а/; що перебуває на відстані  $y$  від нейтрального шару, в процесі деформації видовжується / див. рис. 7.20, б/ і також перетворюється в частину кола з радіусом  $\rho + y$ , довжина якого дорівнює:  $C_1 D_1 = (\rho + y)d\varphi$ . Визначимо відносне видовження волокна  $CD$ :

$$\epsilon = \frac{C_1 D_1 - CD}{CD} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}, \quad /7.4/$$

де враховано, що  $CD = AB = dx = \rho d\varphi$ . Нормальні напруги, які виникають під час розтягу, згідно із законом Гука /2.2/ визначаються за формулою  $\sigma = E\epsilon$ . Тоді, на підставі /7.4/ маємо

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad /7.5/$$

З аналізу формули /7.5/ випливає, що при чистому згині нормальні напруги  $\sigma$  в точках поперечних перерізів балки змінюються пропорційно координаті  $y$ .

Підставимо /7.5/ в перші два рівняння зв'язку напруг із силовими факторами /7.3/, враховуючи при цьому, що  $E$  і  $\rho$  не залежить від площі поперечного перерізу  $A$ :

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0; \quad \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0.$$

Оскільки  $E/\rho \neq 0$ , то дістанемо

$$\int_A y dA = 0; \quad /7.6/$$

$$\int_A yz dA = 0. \quad /7.7/$$

Інтеграл /7.6/ є статичним моментом площі поперечного перерізу балки відносно осі  $Z$ . А оскільки статичний момент дорівнює нулю, то значить нейтральна лінія /яка збігається з віссю  $Z$  /проходить через центр ваги перерізу.

Інтеграл /7.7/ є відцентровим моментом інерції перерізу  $J_{xy}$  відносно осей координат  $y$  і  $z$ . Рівність його нулю означає, по осі  $y$  і  $z$  є головними осями перерізу. Тобто, якщо силова площина збігається з однією з головних центральних осей перерізу, то згин буде плоским і нейтральна лінія перерізу збігатиметься з другою головною віссю. Цим доведено, що при прямому згині балки силова і нейтральна лінії взаємно перпендикулярні.

Підставимо /7.5/ в останнє з рівнянь /7.3/ й отримаємо  $\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M$ .

Оскільки інтеграл  $\int_A y^2 dA$  є момент інерції перерізу відносно осі  $z$ , то останню формулу можна переписати в вигляді

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E J_z} \quad /7.8/$$

Формула /7.8/ виражає залежність кривизни балки від згинаючого момента і тлумачиться як закон Гука при згині: кривина балки постійної жорсткості прямо пропорційно залежить від згинаючого момента  $M$ .

Добуток  $E J_z$  називається жорсткістю перерізу при згині і має одиницю  $\text{Н} \cdot \text{м}^2$  або  $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ . При  $E J_z = \text{const}$ ,  $M = \text{const}$ , тобто балка згинається по дузі круга, оскільки  $1/\rho = \text{const}$ .

Підставивши /7.8/ в /7.5/, знайдемо вираз для нормальних напруг  $\sigma$  в точках поперечного перерізу балки через значення згинаючого момента  $M$ :

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y \quad /7.9/$$

Формула /7.9/ дає можливість визначити нормальні напруги в довільній точці поперечного перерізу балки при згині. Величина  $\sigma$  зростає в міру віддалення цих точок від нейтральної лінії ( $y = 0$ ). При цьому всі точки перерізу, що мають координату  $y$  /це лінії паралельні осі  $z$  /, мають однакові нормальні напруги  $\sigma$ . Впорядку нормальних напруг у перерізах балок зображена на рис.7.21,а. Закон розподілу нормальних

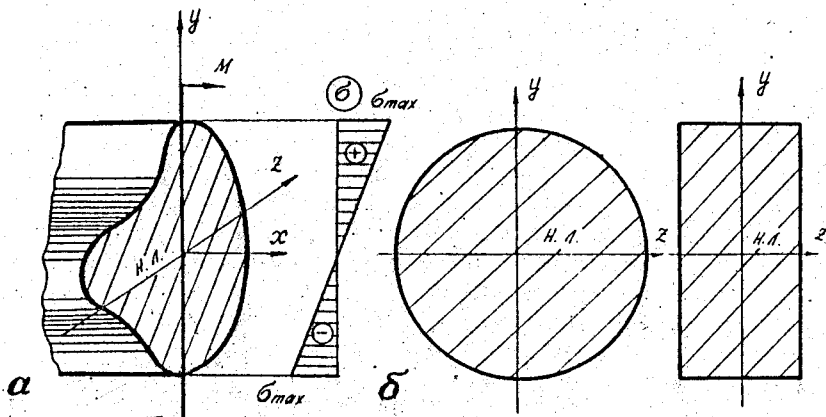


Рис.7.21. Впра нормальних напруг  $\sigma$  при згині балки.  
Положення нейтральної лінії при чистому згині

напруг /7.8/ дозволяє зробити деякі висновки щодо раціональної форми поперечного перерізу балки при згині. З аналізу рис.7.21 видно, що матеріал балки, який розміщений навколо нейтральної лінії, навантажений мало. Найбільшому навантаженню піддаються частини перерізу, найвіддаленіші від нейтральної лінії. Це значить, що з метою економії матеріалу і збільшення його вантажопідйомності необхідно вибирати такі форми поперечних перерізів балки, за яких більша частина площі була б якомога далі розміщена від нейтральної лінії.

До таких раціональних профілів відносяться двотаври /рис.7.22/ таври, швелери, труби тощо. Порівняно з ними балки із суцільним круглим і прямокутним перерізом /див. рис.7.21,б/ менш доцільні і мають у техніці обмежене використання.

За поперечного згину ( $M \neq 0$ ,  $Q \neq 0$ ) перерізи балки, внаслідок виникнення в них дотячних напруг, викривляються. В цьому разі порушуються гіпотези, закладені в основу виведення формули /7.9/, зокрема гіпотеза плоских перерізів. Проте численними дослідженнями встановлено, що формулу /7.9/ з достатньою для практичних розрахунків точністю можна використовувати і для визначення нормальних напруг у випадку поперечного згину.

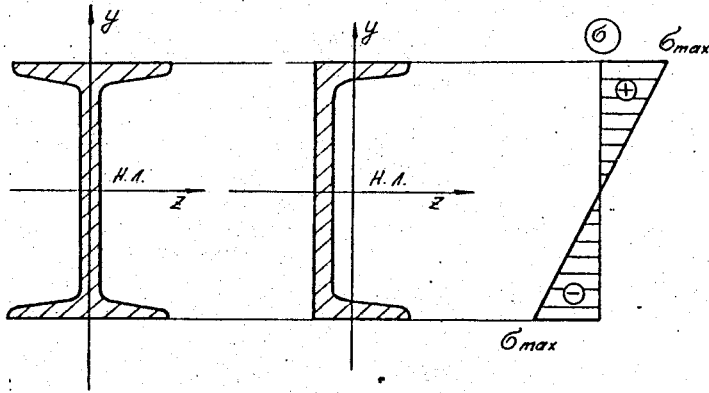


Рис.7.22. Двутавр і швелер як найбільш раціональні профілі перерізу балки при згині

### 7.7. Розрахунки на міцність при згині

Розрахунки балок на міцність виконують за найбільших нормальних напруг, які виникають у поперечних перерізах при згині. Якщо найбільші нормальні напруги позначити  $\sigma_{max}$ , то умову міцності можна записати у вигляді

$$\sigma_{max} \leq [\sigma],$$

тобто найбільші нормальні напруги  $\sigma_{max}$  в балці не мають перевищувати допустимих  $[\sigma]$ . Допустимі напруги  $[\sigma]$  залежать від матеріалу балки і умов її роботи. Детальніше про вибір допустимих напруг було сказано в підрозд.2.7.

Найбільші нормальні напруги при плоскому згині визначають за формулою /7.9/, для чого, користуючись епурою  $M$ , знаходять переріз, в якому згинаючий момент досягає максимального значення ( $M = M_{max}$ ). Далі визначають найбільш напружені /найвіддаленіші лінії/ точки перерізу і обчислюють у них нормальні напруги:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{J_z} y_{max} \quad /7.10/$$

Частка  $J / y_{max}$  називається моментом опору балки  $W_x$  відносно осі  $x$ .

Враховуючи введене позначення, умову міцності записують співвідношенням

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad /7.11/$$

формулу /7.11/ називають основною умовою міцності балки при згині.

В підрозд. 5.2 нами отримані формули для визначення моментів інерції деяких найпростіших перерізів. Знайдемо, користуючись даними підрозд. 5.2, значення осевих моментів опору для прямокутного, круглого і кільцевого перерізів балок.

1. Балка прямокутного поперечного перерізу /див.рис.5.10/. Оскільки абсолютною величиною  $y_{max} = h/2$  і  $J_x = bh^3/12$ , то момент опору балки прямокутного перерізу відносно осі  $x$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{bh^2}{6}. \quad /7.12/$$

Аналогічно визначається момент опору балки відносно осі  $y$ :

$$W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{b^2h}{6}, \quad /7.13/$$

де  $J_y = bh^3/12$ ,  $x_{max} = b/2$ .

2. Балка круглого поперечного перерізу /рис.5.11/. Для круга  $y_{max} = x_{max} = d/2$ , момент інерції  $J_x = J_y = \pi d^4/64$ , тому осевий момент опору балки круглого поперечного перерізу при згині

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad /7.14/$$

3. Балка кільцевого поперечного перерізу /див.рис.5.12/. Як і для балки круглого поперечного перерізу, для кільця маємо

$$y_{max} = x_{max} = D/2, \quad J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4).$$

Осьовий момент опору балки кільцевого поперечного перерізу визначимо за формулою

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4) \approx 0,1 D^3 (1 - c^4). \quad /7.15/$$

Користуючись умовою міцності /7.11/, в загальному випадку розв'язують три типи розрахункових задач.

1. Проектний розрахунок балки. Його виконують тоді, коли під задане навантаження необхідно підібрати балку оптимальних розмірів. Для цього з формули /7.11/ визначають необхідний мінімальний момент опору

$$W_x \leq \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad /7.16/$$

2. Перевірний розрахунок. Знаючи матеріал балки /а значить,  $[\sigma]$ /, навантаження на неї і форму поперечного перерізу, перевіряють умову міцності. Якщо умова міцності не виконується і ліва частина нерівності /7.11/ перевищує праву більш, ніж на 5%, то необхідно зменшити навантаження на балку /тобто  $M_{max}$ /, або збільшити момент опору  $W_x$ .

3. Розрахунок вантажопідйомності балки. В цьому випадку, користуючись формулою /7.11/, визначають значення найбільшого навантаження, яке може витримати балка заданого поперечного перерізу:

$$M_{max} \geq [\sigma] W_x. \quad /7.17/$$

З формули /7.17/ випливає, що чим більший осьовий момент опору має балка, тим більша її вантажопідйомність, тобто тим більший згинаючий момент вона може витримати. Осьовий момент опору в цьому разі характеризує вплив розмірів і форми перерізу балки на її міцність, в чому і полягає зміст момента опору.

#### 7.8. Дотичні напруги при згині

Оскільки за плоского згину в поперечних перерізах балки мають місце також поперечні сили  $Q$ , то вони утворюють в точках перерізу дотичні напруги  $\tau$ .

Формула для визначення дотичних напруг при поперечному згині отримана видатним російським вченим і інженером Д.І.Журавським у вигляді

$$\tau = \frac{Q S_x(y)}{b(y) J_x}, \quad /7.18/$$

де  $S_x(y)$  - статичний момент відносно нейтральної лінії /осі  $x$  / тієї частини площі поперечного перерізу, яка перебуває між лінією, що проходить через досліджувану точку паралельно осі  $x$  і краєм перерізу /на рис.7.23 - заштрихована частина площі/, надалі цю частину площі будемо називати відрізаною і позначати  $A_{\text{виг}}$ ;  $b(y)$  - ширина поперечного перерізу балки в точках з ординатою  $y$ , для яких визначається дотична напруга  $\tau$ ;  $J_x$  - осьовий момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі  $x$ .

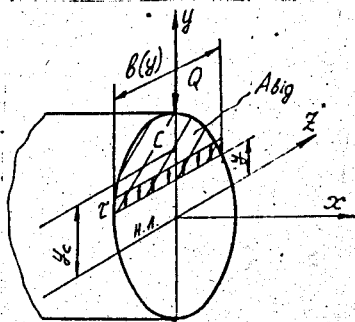


Рис.7.23. Схема до визначення дотичних напруг при прямому згині

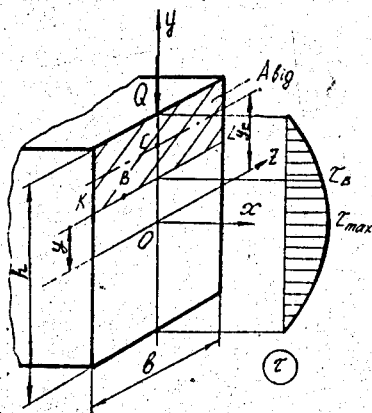


Рис.7.24. Емпіра розподілу дотичних напруг  $\tau$  за висотою прямокутного поперечного перерізу балки

Із аналізу формули Журавського /7.18/ випливає, що дотичні напруги в поперечному перерізі балки розподілені нерівномірно. Побудуємо емпіру дотичних напруг у балці прямокутного поперечного перерізу з розмірами  $b$  і  $h$  /рис.7.24/.

Визначимо дотичну напругу в деякій точці  $B$  перерізу  $\tau_B$ , ордината якої  $y$ . Згідно з формулою /7.18/ таке саме значення  $\tau_B$  матимуть усі точки лінії  $KL$  з ординатою  $y$ . Для визначення дотичних напруг у точках лінії  $KL$  необхідно у формулу /7.18/ підставити такі величини:  $b(y) = b$  - ширина балки;  $J_z = bh^3/12$  - момент інерції прямокутника відносно осі  $z$ ;  $S_{z(y)} = A y_c$  - статичний момент відсіченої площі поперечного перерізу. Оскільки

$A_{\text{виг}} = b \left( \frac{h}{2} - y \right)$  і центр ваги цієї площі  $y_c = y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)$ ; то статичний момент відсіченої площі визначається за формулою

$$S_{z(y)} = \frac{bh^2}{8} \left[ - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right].$$

Підставивши значення  $S_{z(y)}$ ,  $b(y)$  і  $J_z$  в /7.18/, отримаємо формулу для визначення дотичних напруг в точках прямокутного поперечного перерізу балки:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right]. \quad /7.19/$$

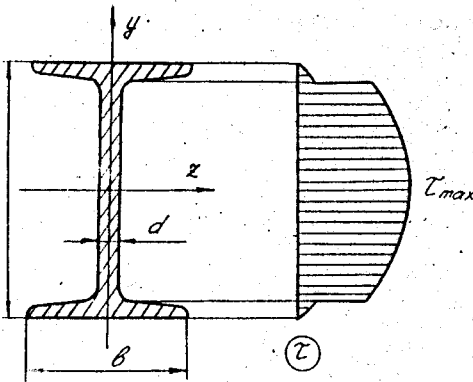
З формули /7.19/ видно, що дотичні напруги змінюються за висотою перерізу згідно із законом квадратичної параболи. Якщо  $y = \pm h/2$ , дотичні напруги дорівнюють нулю, найбільші дотичні напруги мають місце в точках нейтральної лінії, тобто, якщо  $y = 0$ :  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = 1,5 Q/A$ , де  $A = bh$  - площа поперечного перерізу балки. Еюра дотичних напруг у балці прямокутного поперечного перерізу зображена на рис.7.24 праворуч.

Аналогічний розподіл дотичних напруг за висотою стінки має балка двотаврового перерізу. Еюра дотичних напруг у точках поперечного перерізу двотаврової балки показана на рис.7.25. Максимальні дотичні напруги  $\tau_{\max}$  мають точки нейтральної лінії перерізу і визначаються за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_z}{\alpha J_z}, \quad /7.20/$$

де  $S_z$  - статичний момент половини перерізу двотаврової балки;  $\alpha$  -

товщина стінки двотавра;  $J_x$  - момент інерції перерізу відносно осі  $x$ . Значення величин  $S_x$ ,  $J_x$  і  $d$  для відповідного номера двотаврового перерізу наведено в таблицях сортаменту. Використовуючи формулу Журавського, можна скласти умову міцності за дотичними напругами при згині:



$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_x}{b J_x} \leq [\tau] \quad /7.21/$$

Рис.7.25. Екюра розподілу дотичних напруг  $\tau$  за висотою поперечного перерізу балки із двотавра

Умова /7.21/ в основному використовується для перевірки міцності вибраної балки, розміри якої, як це зазначалося в підрозд.7.7, визначаються за основною умовою міцності /див.формулу /7.11/.

### 7.9. Деформації при згині

Зазначимо, що вісь балки /наприклад,  $OA$  на рис.7.1,а/ є лінією перетину двох головних площин  $xOx$  і  $yOy$ . При плоскому згині викривлена вісь балки розміщена в силоній площині, яка в цьому разі збігається з однією з головних осей перерізу. Викривлену вісь балки надалі називатимемо зігнутою віссю або пружною лінією.

На рис.7.26 показана вісь балки до /суцільною лінією/ і після /штриховою лінією/ прикладання сили  $F$ , яка збігається з головною площиною  $xOy$  і утворює плоский згин балки. Розглянемо переріз балки на відстані  $x$  від правого кінця. Центр ваги перерізу  $O$  переміститься в точку  $O_1$ , поперечний переріз  $\pi-\pi$  обернеться, залишаючись перпендикулярним до зігнутої осі балки, і займе положення  $\pi_1-\pi_1$ .

Введемо кількісні величини, що характеризують деформацію балки при згині. В цьому разі зазначимо, що за різних навантажень на балку

завжди виконується гіпотеза малих деформаций і лінійності деформацій. Згідно з цими гіпотезами деформації в балках нескінченно малі порівняно з розмірами балок. Відповідно до цього будемо вважати, що переміщення перерізу  $00$ , відбувається по прямій, перпендикулярній до осі бруса  $z$  напрямі осі  $y$ . Таке переміщення центрів ваги перерізів називається прогином і позначається  $y(x)$ , оскільки прогин є функцією абсциси  $x$ . Прогин вважається додатним, якщо він збігається з додатним напрямом осі  $y$  і від'ємним - якщо напрямлений протилежно цій осі.

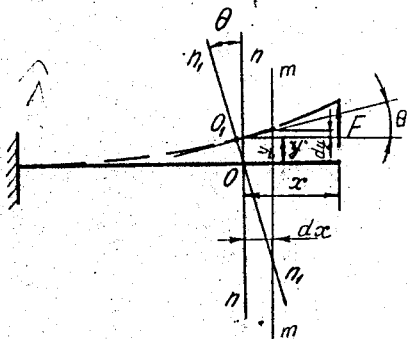


Рис. 7.26. Схема до встановлення зв'язку між лінійним ( $y$ ) і кутовим ( $\theta$ ) переміщенням балки при згині!

Кут, на який повертається площина поперечного перерізу балки внаслідок зовнішнього навантаження, називається кутом повороту і позначається  $\theta$ . В загальному випадку кут повороту також залежить від абсциси  $x$ . Кут  $\theta$  - додатний, якщо поворот перерізу відбувається проти годинникової стрілки, і від'ємний - якщо за стрілкою годинника. На рис. 7.26 прогин  $y$  і кут повороту  $\theta$  перерізу  $n-n$  - додатні.

Кут повороту  $\theta$  і прогин  $y$  взаємозв'язані, отже, згідно рис. 7.26 маємо

$$\theta = \frac{dy}{dx}, \quad /7.22/$$

тобто для визначення деформацій  $y$  і  $\theta$  балки в довільному перерізі необхідно встановити рівняння пружної лінії.

У підрозд. 7.6 отримано рівняння /7.6/, яке пов'язує кривизну пружної лінії  $(1/\rho)$  і згинаючий момент  $M$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}. \quad /7.23/$$

З курсу аналітичної геометрії відома функція кривизни довільної плос-  
кої кривої:

$$\rho = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad /7.24/$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь /7.23/ і /7.24/, а також враховую-  
чи /7.22/, дістаємо

$$\pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \theta^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EJ_z} \quad /7.25/$$

В реальних випадках навантаження балок кут повороту не переви-  
щує 0,02 рад, тому у формулі /7.25/ з достатньою для практичних роз-  
рахунків точністю значенням  $\theta^2$  можна знехтувати порівняно з одини-  
цею. Враховуючи також, що знак другої похідної і момента збігаються,  
рівняння /7.25/ можна значно спростити:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ_z} \quad /7.26/$$

або

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad /7.27/$$

Вираз /7.27/ називається основним диференціальним рівнянням пруж-  
ної лінії балки, користуючись яким знаходять кут повороту  $\theta$  довіль-  
ного поперечного перерізу при згині:

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = \int M dx + C \quad /7.28/$$

і прогин балки

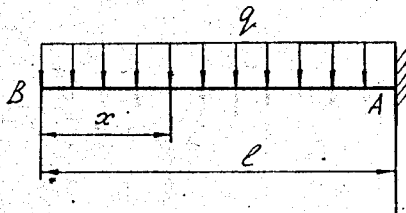
$$EJ_z y = \int \left[ \int M dx + C \right] dx + D \quad /7.29/$$

Якщо підставити в /7.28/ і /7.29/ значення згинаючих моментів  $M = M(x)$ , можна отримати рівняння пружної лінії  $y = y(x)$  і кутів повороту  $\theta = \theta(x)$  перерізів балки на різних силових ділянках. Сталі інтегрування  $C$  і  $D$  визначають з умов кріплення балки /граничних умов/.

**Приклад 7.2.** Визначити кут повороту  $\theta$  і прогин вільного кінця консольної балки, на яку діє рівномірно розподілене навантаження  $q$  /рис.7.27/, якщо жорсткість балки стала ( $EJ_z = const$ ).

**Розв'язання.** Згинаючий момент у довільному поперечному перерізі на відстані  $x$  від вільного кінця має вигляд

$$M = -\frac{qx^2}{2}.$$



Підставимо це значення в рівняння /7.27/, дістанемо

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Рис.7.27. Схема до визначення лінійних і кутових переміщень перерізів консольної балки

Інтегруємо один раз це диференціальне рівняння, знайдемо вираз для кута повороту:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2} \int x^2 dx + C = -\frac{qx^3}{6} + C,$$

$$EJ \theta(x) = C - \frac{qx^3}{6}.$$

При  $x = l$  балка жорстко закріплена, тому в цьому перерізі кут його повороту, незалежно від виду навантаження, дорівнює нулю. Користуючись такою граничною умовою, із рівняння /7.28/ знаходимо сталу

Інтегрування  $C: 0 = C - \frac{qx^3}{6}$ , звідси  $C = \frac{qx^3}{6}$ . Загальний вираз кутів повороту різних перерізів має вигляд

$$EJ_x \theta(x) = \frac{ql^3}{6} - \frac{qx^3}{6} = \frac{q}{6}(l^3 - x^3).$$

Переріз вільного кінця балки ( $x=0$ ) повернеться на кут

$$\theta = \frac{ql^3}{6EJ_x}.$$

Інтегруємо загальне рівняння кута повороту:

$$EJ_x y(x) = \int \left[ \frac{ql^3}{6} - \frac{qx^3}{6} \right] dx + D = \frac{ql^3 x}{6} - \frac{qx^4}{24} + D.$$

Для визначення сталої інтегрування  $D$  використаємо умову, за якої, якщо  $x=l$ , вертикальне переміщення балки також дорівнює нулю, тоді:

$$0 = \frac{ql^4}{6} - \frac{ql^4}{24} + D, \quad D = -\frac{1}{8}ql^4.$$

Загальний вираз для вертикального переміщення довільного перерізу:

$$EJ_x y(x) = \frac{qx^3 l^3}{6} - \frac{qx^4}{24} - \frac{1}{8}ql^4,$$

а переміщення вільного кінця консольної балки /перерізу  $B$  при  $x=0$  становить

$$y_B = -\frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

## 7.10. Потенціальна енергія деформації балки при згині

З курсу теоретичної механіки відомо, що робота пари сил, яка діє на брус, дорівнює добутку цієї пари на кут повороту бруса. Якщо значення пари сил зростає від нуля до деякого скінченного значення  $M$ ,

робота такої пари дорівнює половині добутку величини  $M$  на величину кута повороту, утвореного цим моментом, тобто

$$u = \frac{1}{2} M \varphi. \quad /7.30/$$

Робота внутрішнього силового фактора /в нашому випадку згинаючого момента  $M$  /чисельно дорівнює потенціальній енергії деформації балки, яку вона набуває при згині.

Визначимо потенціальну енергію, яку набуває деякий елемент балки /рис.7.28/ довжиною  $dx$ , що зазнає деформації згину.

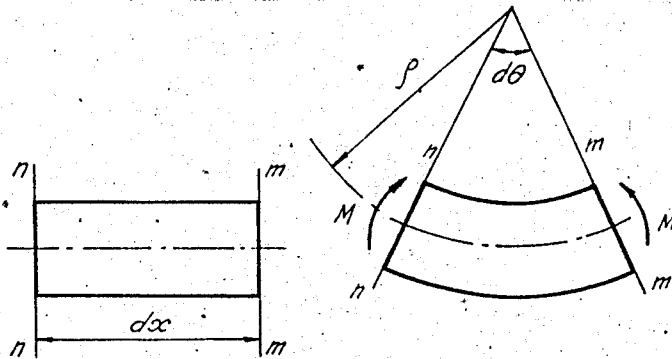


Рис.7.28. Схема до визначення потенціальної енергії деформації балки при згині

За аналогією до формули /7.30/, її значення становитиме

$$dW = \frac{M d\theta}{2}, \quad /7.31/$$

де  $d\theta$  - кут повороту одного перерізу ( $n-n$ ) віділеного елемента відносно другого ( $m-m$ ). Довжина волокна нейтрального шару дорівнює початковій довжині елемента, тобто  $dx$ , тому  $dx = \rho d\theta$ , або  $d\theta = dx / \rho$ . Підставимо отриманий вираз в /7.31/, тоді, враховуючи формулу /7.8/, маємо

$$dW = \frac{M^2 dx}{2EJ_x}. \quad /7.32/$$

Зінтегрувавши вираз /7.32/ за довжиною кожної силової ділянки і підсумувавши за кількістю цих ділянок, отримуємо повну потенціальну енергію балки, якої вона набуває внаслідок деформації згину:

$$W = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M^2(x_i) dx_i}{2EJ_x}, \quad /7.33/$$

де  $n$  - кількість силових ділянок;  $M(x_i)$  - вираз згинаючого моменту на  $i$ -й ділянці як функція її довжини. Якщо жорсткість балки стала по всій довжині ( $EJ_x = \text{const}$ ), то вираз /7.34/ значно спрощується:

$$W = \frac{1}{2EJ_x} \sum_{i=1}^n \int_{l_i} M^2(x_i) dx_i. \quad /7.34/$$

При поперечному прямому згині з урахуванням поперечних сил  $Q$  потенціальна енергія деформації має вигляд

$$W = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M^2 dx_i}{2EJ_x} + \sum_{i=1}^n \kappa_y \int_{l_i} \frac{Q^2 dx_i}{2GA}, \quad /7.35/$$

де  $\kappa_y$  - безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який залежить від геометричної форми поперечного перерізу балки. Так, для балки прямокутного поперечного перерізу  $\kappa_y = 1,2$ .

У формулі /7.35/ другою складовою /порівняно з першою/ практично завжди можна знехтувати. Тому, визначаючи потенціальну енергію деформації балки при згині з достатнім для практичних розрахунків ступенем точності, користуються формулою /7.33/ або /7.34/.

## 7.II. Теорема Кастіліано

Існує універсальний метод визначення лінійних деформацій і кутів повороту, що виникають у довільному брусі від довільних навантажень. Цей метод називається енергетичним, оскільки головним у його виконанні є потенціальна енергія деформації бруса від дії навантаження. В основі визначення переміщень бруса лежить теорема Кастіліано, яку приводимо без виведення.

Частинна похідна від потенціальної енергії деформації бруса за силою  $F$  /або моментом сили  $M$  / дорівнює лінійному переміщенню/або куту поворота/ точки прикладання цієї сили за її напрямом, тобто

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial F}, \quad \theta = \frac{\partial W}{\partial M}, \quad /7.35 /$$

де  $\Delta$  - лінійне переміщення, м, мм;  $\theta$  - кут повороту, рад.

Розглянемо приклади застосування цієї теореми в деяких випадках деформації бруса.

1. Розтяг стержня /див.рис.2.4/. Нормальна сила в перерізах стержня  $N = F$ . Потенціальна енергія деформації при розтягу /або стиску/ визначається за формулою

$$W = \frac{N^2 \ell}{2AE} = \frac{F^2 \ell}{2AE}.$$

При розтягу деформація видовження стержня  $\Delta \ell$  згідно з теоремою Кастіліано становитиме

$$\Delta \ell = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{2F\ell}{2AE} = \frac{F\ell}{AE}.$$

Отриманий вираз збігається з виразом закону Гука в абсолютних величинах.

2. Кручення вала /див.рис.6.10/. Потенціальна енергія вала при крученні становить

$$W = \frac{M_{\kappa}^2 \ell}{2GJ_p},$$

де  $M_{\kappa} = M_0$ ,  $GJ_p$  - жорсткість вала при крученні. Візьмемо частинну похідну від  $W$  по  $M_0$ , вважаючи що  $M_{\kappa} = M_0$ , дістанемо

$$\theta = \varphi = \frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{M_0 \ell}{GJ_p}.$$

Отримана формула збігається з виразом /6.17/ для кута закручування, виведеним раніше.

3. Згин балки /див.рис.7.10/. Визначимо вертикальні переміщення вільного кінця консольної балки довжиною  $\ell$ , навантаженої силою  $F$ , при сталій жорсткості ( $EJ = \text{const}$ ). Потенціальна енергія деформації при згині визначається формулою /7.34/. Згинаючий момент  $M$  у перерізі балки  $M = -Fx$ , тоді

$$W = \frac{F^2 \ell^3}{6EJ_x}$$

Користуючись теоремою Кастіліано, визначимо переміщення вільного кінця консолі:

$$y_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{F \ell^3}{3EJ_x} \quad /7.36/$$

За аналогією можна отримати загальну формулу для визначення переміщень точки прикладання сили за довільного навантаження балки:

$$\Delta_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left[ \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M(x) dx}{2EJ_x} \right]$$

Оскільки інтегрування у формулі /7.33/ проводиться за довжиною силових ділянок  $\ell_i$ , а частинне диференціювання за силою  $F$ , яка не залежить від  $x$ , то таке диференціювання функцій можна проводити і під знаком інтеграла, тобто

$$\Delta_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{\partial}{\partial F} \left[ \frac{M(x_i)}{2EJ_x} \right] dx_i = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M(x_i)}{EJ_x} \frac{\partial M(x_i)}{\partial F} dx_i \quad /7.37/$$

Аналогічно визначається кут повороту перерізу, в якому прикладено момент /пара сил/  $M_0$ :

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M_0} = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M(x_i)}{EJ_x} \frac{\partial M(x_i)}{\partial M_0} dx_i \quad /7.38/$$

Визначення переміщень і кутів повороту перерізів балки з використанням формул /7.37/ і /7.38/ називають методом Кастіліано.

### 7.12. Визначення переміщень методом Мора

Використання теореми Кастіліано дає можливість визначити переміщення /або кути повороту/ лише тих перерізів балки, в яких прикладені зовнішні зосереджені сили  $F$  /або пари сил  $M$ /. Неможливість визначення переміщень різних перерізів балки за допомогою метода Кастіліано є основним його недоліком. На практиці здебільшого виникає необхідність визначати переміщення довільних перерізів балки в довільних напрямках. У цьому разі можна скористуватися методом Мора, в основі якого також лежить теорема Кастіліано. Згідно з методом Мора в перерізі, де необхідно визначити переміщення, до балки прикладають фіктивну силу  $\bar{F}$ . Напрямок цієї сили має збігатися з напрямком шуканого переміщення балки. Згинаючий момент у будь-якому перерізі балки становитиме:  $M = M^F(x) + M_{\bar{F}}(x)$ ; де  $M^F(x)$  - згинаючий момент від дії реальних сил;  $M_{\bar{F}}(x)$  - додатковий згинаючий момент від дії фіктивної сили  $\bar{F}$ . Додатковий згинаючий момент в перерізі балки очевидно пропорційний силі  $\bar{F}$ , тобто  $M_{\bar{F}}(x) = M(x) \bar{F}$ .

Якщо  $\bar{F} = 1$ , то  $M_{\bar{F}}(x) = \bar{M}(x)$ , тобто  $\bar{M}(x)$  - це згинаючий момент, що виникає в поперечному перерізі балки під дією одиничної сили, прикладеної за напрямом шуканого переміщення балки.

Потенціальна енергія деформації з урахуванням фіктивної сили  $\bar{F}$  визначатиметься співвідношенням

$$u = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{[M_{F_i}(x_i) + \bar{M}_i(x_i) \bar{F}]^2}{2EJ_x} dx_i,$$

а переміщення за напрямом сили  $\bar{F}$  буде

$$\Delta_{\bar{F}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{F}} = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_{F_i}(x_i) + \bar{M}_i(x_i) \bar{F}}{EJ_x} \bar{M}_i(x_i) dx_i. \quad /7.39/$$

Згадавши тепер, що насправді фіктивної сили не існує /тобто  $\bar{F}=0$ /, вираз /7.39/ можна переписати так:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{F_i}(x_i) \bar{M}_i(x_i)}{EJ_x} dx_i, \quad /7.40/$$

або, якщо жорсткість балки  $EJ_x = const$ ,

$$\Delta = \frac{1}{EJ_x} \sum_{i=1}^n \int M_{F_i}(x_i) \bar{M}_i(x_i) dx_i, \quad /7.41/$$

де  $M_{F_i}(x_i)$  - вираз згинаючого моменту в перерізі під дією зовнішнього навантаження на балку;  $\bar{M}_i(x_i)$  - вираз згинаючого моменту в перерізі балки від дії одиничного навантаження, прикладеного в тому перерізі  $i$  в тому ж напрямі, де необхідно визначити переміщення;  $i$  - індекс, який відповідає номеру силової ділянки.

Формули /7.40/ і /7.41/ називаються інтегралами Мора, а метод визначення переміщень з допомогою цих інтегралів - методом Мора.

Складаємо загальний алгоритм визначення переміщень методом Мора.

1. Будуємо допоміжну систему, тобто схему реальної балки. В перерізі, в якому потрібно визначити лінійне переміщення  $y$ , допоміжну систему навантажують одиничною силою  $F = 1$ , прикладеною в напрямі переміщення, яке визначаємо. Якщо ж необхідно знайти кут повороту  $\theta$ , то допоміжну систему в досліджуваному перерізі слід навантажити одиничним моментом  $\bar{M} = 1$ .

2. В межах кожної  $i$ -ї силової ділянки складаємо вирази згинаючих моментів для довільного перерізу: в заданій системі - вираз  $M_{F_i}(x_i)$ , в допоміжній системі -  $\bar{M}_i(x_i)$ .

3. Обчислимо інтеграли Мора /7.40/ або /7.41/ по силових ділянках і підсумуємо їх у межах всієї балки.

4. Якщо отримане значення обчисленого переміщення додатне, то це означає, що його напрям збігається з напрямом одиничної сили /для лінійного переміщення  $y$ / чи одиничного момента /для кута повороту  $\theta$ /; якщо результат від'ємний, то відповідні переміщення мають протилежні напрями.

Розглянемо приклад використання метода Мора для визначення переміщень у балках.

Нехай необхідно визначити прогин і кут повороту перерізу  $A$  консольної балки ( $EJ_x = \text{const}$ ), навантаженої рівномірно розподіленою силою  $q$  /рис.7.29,а/.

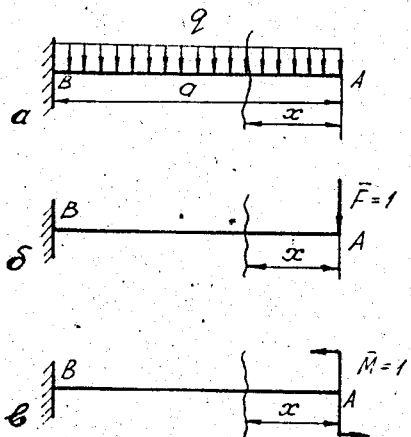


Рис.7.29. Схема до визначення лінійного і кутового переміщень в балці методом Мора

1. Для визначення прогину перерізу  $y_A$  кінця консольної балки навантажимо допоміжну балку /рис.7.29,б/ у перерізі  $A$  одиничною силою  $\bar{F} = 1$ . у довільному перерізі балки ( $0 \leq x \leq a$ ):

$$M_F(x) = -\frac{qx^2}{2}; \quad \bar{M}_1(x) = -x.$$

Підставимо вирази  $M_F(x)$  і  $\bar{M}_1(x)$  в інтеграл /7.41/.

Зінтегрувавши вираз за довжиною балки від 0 до  $a$ , отримаємо шукане переміщення  $y_A$ :

$$\Delta = y_A = \frac{1}{EJ_x} \int_0^a \left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-x) dx = \frac{qa^4}{8EJ_x}.$$

Додатний знак отриманого результату означає, що лінійне переміщення  $y_A$  збігається з переміщенням балки під дією одиничної сили  $F = 1$ . За абсолютною величиною цей вираз збігається з результатом розрахунку прогину консольної балки, отриманого методом безпосереднього розв'язування диференціального рівняння пружної лінії балки /див. підрозд.7.9/.

2. Для визначення кута повороту допоміжну систему /рис.7.29,в/ навантажимо одиничним моментом  $M = 1$ . В довільному перерізі балки ( $0 \leq x \leq a$ ) маємо

$$M_F(x) = -\frac{qx^2}{2}, \quad \bar{M}_1(x) = 1.$$

Обчислимо інтеграл Мора, для чого отримані значення  $M_F(x)$  і  $\bar{M}_1(x)$  підставимо в /7.41/:

$$\theta_A = \frac{1}{EJ} \int_0^a \left(-\frac{qx^2}{2}\right) 1 dx = -\frac{qa^3}{6EJ}.$$

Знак "мінус" означає, що поворот перерізу  $A$  балки направлений проти того, який утворює одиничний момент /див.рис.7.29,в/.

**Приклад 7.3.** Визначити прогин  $y_B$  середини балки і кут повороту  $\theta_A$  на лівій опорі шарнірно опертій балки ( $EJ = 4 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ) навантаженої так, як показано на рис.7.30,а, якщо  $F = 6 \text{ кН}$ ,  $M_0 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

Розв'язання. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = R_B \cdot 2 - Fa - M_0 = 0; \quad \sum M_B = -R_A \cdot 2a + Fa - M_0 = 0.$$

Звідси

$$R_B = 5 \text{ кН}, \quad R_A = 1 \text{ кН}.$$

1. Для визначення прогину посередині балки навантажимо допоміжну балку /рис.7.30,б/ у перерізі  $C$  одиничною зосередженою силою у вертикальному напрямі. Балка має дві силових ділянки  $AC$  і

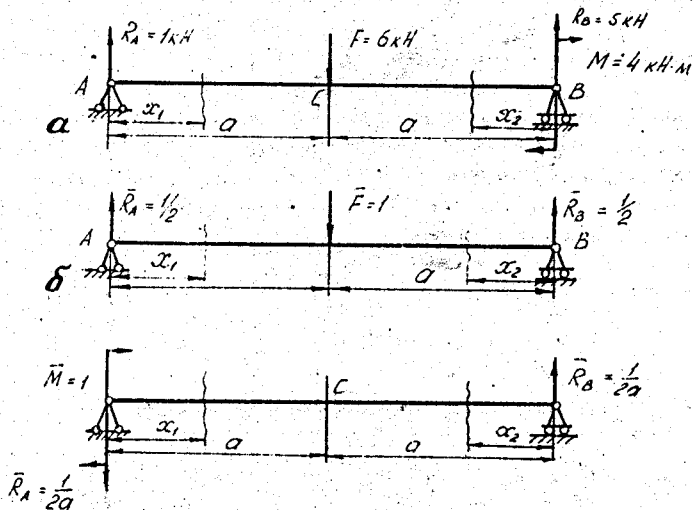


Рис. 7.30. Схема до прикладу визначення переміщень у балці методом Мора

CB. В будь-якому перерізі цих ділянок знаходимо вирази  $M_F(x)$  і  $\bar{M}(x)$ :

на силевій ділянці AC ( $0 \leq x_1 \leq a$ )

$$M_F(x_1) = R_A x_1 = x_1, \quad \bar{M}_1(x_1) = \bar{R}_A x_1 = \frac{1}{2} x_1;$$

на силевій ділянці BC ( $0 \leq x_2 \leq a$ )

$$M_F(x_2) = -M_0 + R_B x_2 = 5x_2 - 4, \quad \bar{M}_2(x_2) = \bar{R}_B x_2 = \frac{1}{2} x_2.$$

Підставляючи вирази  $M_F$  і  $\bar{M}$  у рівняння /7.41/, визначаємо  $y_C$ :

$$y_C = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^a M_F(x_1) \bar{M}_1(x_1) dx_1 + \int_0^a M_F(x_2) \bar{M}_2(x_2) dx_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[ \int_0^a \frac{1}{2} x_1^2 dx_1 + \int_0^a (5x_2 - 4) \frac{1}{2} x_2 dx_2 \right] = 0.$$

2. Аналогічно визначаємо кут повороту перерізу  $A$ . Складаємо допоміжну систему /рис.7.30,в/ і навантажуємо її в перерізі  $A$  одиничним зосередженим моментом  $M=1$ . Як і в попередньому випадку, балка має дві силових ділянки  $AC$  і  $BC$ . Складаємо вирази  $M_F(x)$  і  $\bar{M}(x)$  на цих силових ділянках:

а/ на ділянці  $AC$  :  $(0 \leq x_1 \leq a)$

$$M_F(x_1) = R_{A_1} x_1 = x_1, \quad \bar{M}_1(x_1) = M - R_{A_1} x_1 = 1 - \frac{x_1}{2a};$$

б/ на ділянці  $BC$   $(0 \leq x_2 \leq a)$

$$M_F(x_2) = R_{B_2} x_2 - M_0 = 5x_2 - 4; \quad \bar{M}_2(x_2) = R_{B_2} x_2 = \frac{x_2}{2a}.$$

Визначаємо кут повороту перерізу  $A$  :

$$\theta_A = \frac{1}{EJ_x} \left[ \int_0^a M_F(x_1) \bar{M}_1(x_1) dx_1 + \int_0^a M_F(x_2) \bar{M}_2(x_2) dx_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[ \int_0^a x_1 \left(1 - \frac{x_1}{2a}\right) dx_1 + \int_0^a (5x_2 - 4) \frac{x_2}{2a} dx_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{1}{6} a^2 - a \right) = \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 10^3} = \frac{1}{24} \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ град.}$$

### 7.13. Визначення переміщень способом Верещагіна

Для балок зі сталою жорсткістю, як було зазначено в підрозд.7.12, справедлива формула /7.41/. Перепишемо її у вигляді  $\Delta_F = \mathcal{J} / EJ_x$ , де буквою  $\mathcal{J}$  позначено вираз:

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n \int_0^a M_F(x_i) \bar{M}_i(x_i) dx_i, \quad /7.42/$$

який надалі будемо називати інтегралом Мора. Якщо силові ділянки

балки мають прямолінійні форми, то інтеграл Мора можна обчислити графоаналітичним способом.

Побудуємо епюри  $M_F(x)$  і  $\bar{M}(x)$  на одній із силових ділянок навантаженої балки. Згинаючий момент від дії зовнішнього навантаження може бути довільною функцією від  $x$ , тому епора  $M_F(x)$  може мати довільну форму /рис.7.31,а/. В разі навантаження балки одиничною силою  $F = 1$  або одиничним моментом  $M = 1$  згинаючий момент

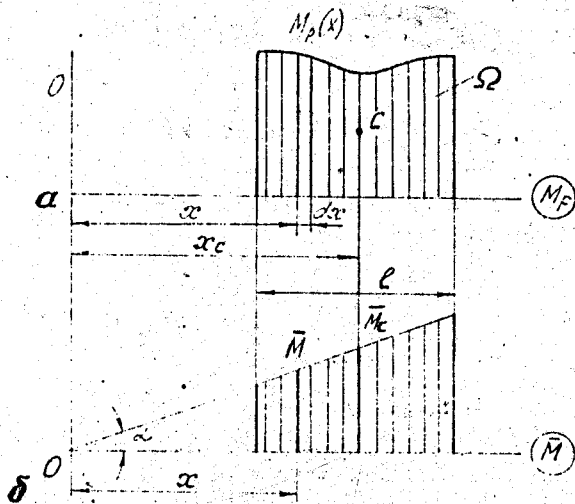


Рис.7.31. Схёма до обчислення інтеграла Мора по способу Верещагіна

на ділянках балки буде лінійною функцією  $M(x)$  або сталою величиною. В такому разі епора  $\bar{M}(x)$  буде мати вигляд трапеції, або трикутника, або прямокутника /рис.7.31,б/.

Позначимо  $\Omega$  площу епюри  $M_F(x)$  на силовій ділянці, а  $C$  - її центр ваги;  $M_c$  - ордината епюри від одиничного навантаження, яка взята під центром ваги епюри  $M_F(x)$ . Добуток  $M_c d\Omega$  можна розглядати як елемент  $d\Omega$  площі епюри  $M_F(x)$  /заштриховано на рис.7.31,а/, тоді ордината одиничної епюри буде  $\bar{M}(x) = x \tan \alpha$ . Підставивши позначені вирази в формулу /7.42/, дістанемо

$$\int_{\Omega} M_F(x) \bar{M}(x) dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{\Omega} x d\Omega. \quad /7.43/$$

Інтеграл  $\int_{\Omega} x d\Omega$  є статичним моментом площі епюри  $M_F(x)$  відносно деякої осі  $O-O$ . Відповідно до властивостей статичних моментів маємо

$$\int_{\Omega} x d\Omega = x \Omega,$$

де  $x_c$  - абсциса центра ваги епюри  $M_F(x)$ . Оскільки  $x_c \operatorname{tg} \alpha = \bar{M}_c$ , то формула /7.43/, ліва частина якої є інтегралом Мора, може бути переписана у вигляді

$$J = \int_{\Omega} M_F(x) \bar{M}(x) dx = \Omega \bar{M}_c.$$

Загальна формула /7.42/ для визначення переміщень у прямолінійних балках постійної жорсткості:

$$\Delta_F = \frac{1}{E J_z} \sum_{i=1}^n \Omega_i \bar{M}_{ci}. \quad /7.44/$$

Якщо жорсткість балки на кожній силевій ділянці різна /але в межах ділянки  $E_i J_{zi} = \text{const}$ /, то формула /7.44/ набере вигляду

$$\Delta_F = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i \bar{M}_{ci}}{E_i J_{zi}}. \quad /7.45/$$

Такий спрощений спосіб обчислення інтеграла Мора запропонував А.Н.Верещагін, чому його і називають способом Верещагіна.

Обчислення інтегралів Мора за способом Верещагіна називається операцією множення епюр. В цьому разі епюру  $M_F(x)$  називають вантажною, а епюру  $\bar{M}(x)$  - одиничною.

Наведемо деякі практичні вказівки щодо застосування правила Верещагіна.

1. Якщо вантажна і одинична епюри розміщені по один бік від базової лінії, то результат множення епюр є величина додатна, якщо ж по різні боки - то від'ємна.

2. Якщо в межах однієї силової ділянки вантажна і одинична епюри прямолінійні, то все одно, площу якої епюри брати і на ординату якої помножити. В цьому разі, якщо відомі значення епюр  $M_F(x)$  і  $M(x)$  на межах силової ділянки /рис.7.32/, то операція множення епюр може бути обчислена за формулою

$$\Omega \bar{M}_c = \frac{l}{6} (2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad /7.46/$$

3. Якщо вантажна епора  $M_F(x)$  на силівій ділянці є квадратична парабола /рис.7.33/, то для визначення добутку  $\Omega \bar{M}_c$  слід скористатися формулою

$$\Omega \bar{M}_c = \frac{l}{6} (a_1 a_2 + 4c_1 c_2 + b_1 b_2), \quad /7.47/$$

де  $c_1$  і  $c_2$  - значення відповідно вантажної і одиничної епюр, взяті посередині силової ділянки. Рівняння /7.46/ і /7.47/ в літературі з опору матеріалів називаються формулами Карнаухова.

4. Якщо в межах силової ділянки одна із епюр неперервна /криво-лінійна/, а інша має перегин, то точку перегину слід вважати межею силової ділянки. Тоді початкову силову ділянку точкою перегину розбивають на дві.

5. Здебільшого епюри згинаючих моментів в межах силової ділянки  $M_F(x)$  і  $M(x)$  можуть бути розбиті на простіші фігури, положення центрів ваги яких і площі легко знайти. Тоді добуток  $\Omega \bar{M}_c$  можна визначити за формулою

$$\Omega \bar{M}_c = \Omega \bar{M}_{c1} + \Omega \bar{M}_{c2} + \dots + \Omega \bar{M}_{cn}, \quad /7.48/$$

де  $n$  - число простих площ, на які розбита складна площа  $\Omega$ . Деякі найпростіші види епюр, їх площі і положення центрів ваги цих площ наведені в табл.7.1.

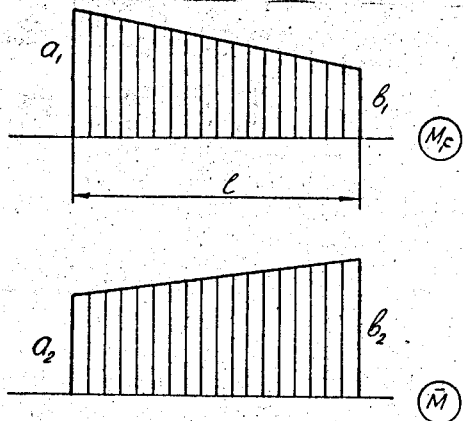


Рис.7.32. Схема до формули Карнаухова /7.46/

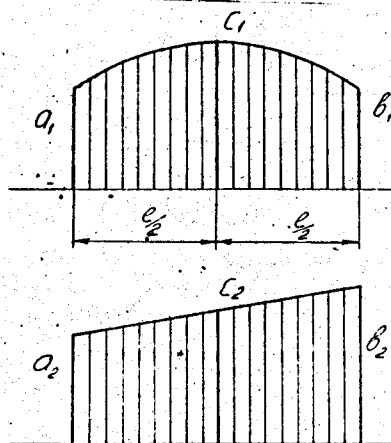
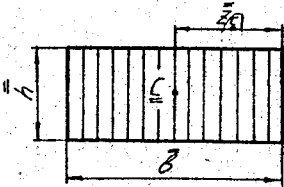
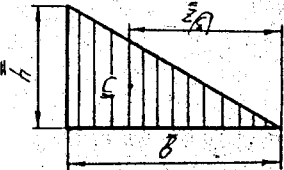
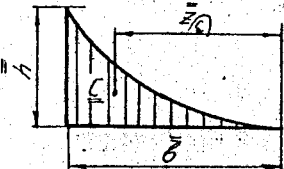
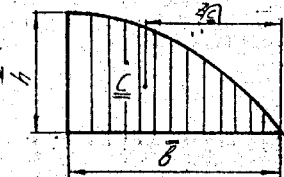


Рис.7.33. Схема до формули Карнаухова /7.47/

Таблиця 7.1

Вид епори	Площа епори $\Omega$	Відстань до центра ваги ( $\bar{x}_c$ )
	$\bar{b}h$	$\frac{1}{2}\bar{b}$
	$\frac{1}{2}\bar{b}h$	$\frac{2}{3}\bar{b}$
	$\frac{1}{3}\bar{b}h$	$\frac{3}{4}\bar{b}$
	$\frac{2}{3}\bar{b}h$	$\frac{5}{8}\bar{b}$

**Приклад 7.4.** Визначити вертикальне переміщення перерізу  $K$  двотаврової балки № 24а ( $J = 3800 \text{ см}^4$ ), навантаженої так, як показано на рис. 7.34, а якщо  $F = 40 \text{ кН}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

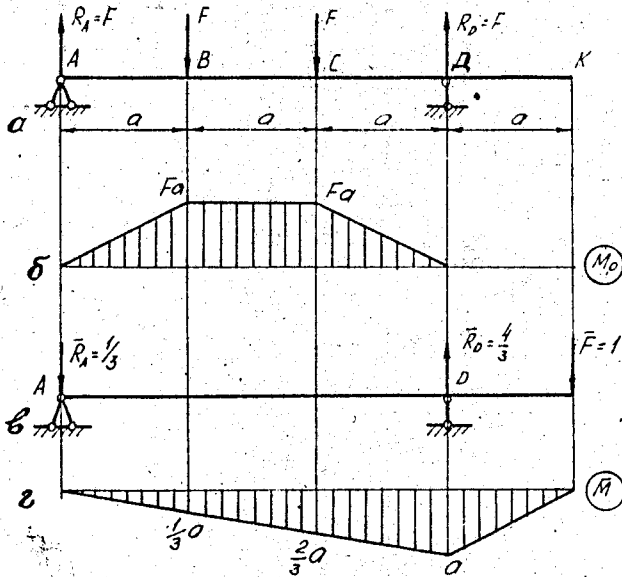


Рис. 7.34. Схема до визначення лінійного переміщення при згині за способом Верещагіна.

**Розв'язання.** Будуємо епюру згинаючих моментів  $M_F(x)$  від заданого навантаження на балку /рис. 7.34, б/.

В перерізі  $K$ , де необхідно визначити прогин, прикладаємо одиничну силу  $\bar{F} = 1$  /рис. 7.34, в/ і будуємо від неї епюру згинаючих моментів  $\bar{M}(x)$  /рис. 7.34, г/.

Згідно з побудованими епюрами  $M_F(x)$  і  $\bar{M}(x)$  балку розбиваємо на чотири силові ділянки /зліва направо/:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $DK$ . Переміщення перерізу  $K$  визначимо за формулою /7.44/

$$y_K = \frac{1}{EJ} \left( \Omega_1 \bar{M}_1 + \Omega_2 \bar{M}_2 + \Omega_3 \bar{M}_3 + \Omega_4 \bar{M}_4 \right).$$

Звернемо увагу на ту обставину, що епюри  $M_F(x)$  і  $\bar{M}(x)$  побудовані по різні боки від базової лінії; тому, згідно з вказівками  $y_K$  буде від'ємною величиною.

Для визначення  $\Omega_1, \bar{M}_{c1}$  використаємо табл. 7.1:  $\Omega_1 = \frac{1}{2} a F a$  - площа трикутника вантажної епюри на ділянці  $AB$ ;

$\bar{M}_{c1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a$  - ордината епюри, взята під центром ваги вантажної епюри, тому

$$\Omega_1 \bar{M}_{c1} = -\frac{1}{2} F a^2 \cdot \frac{2}{3} a = -\frac{1}{3} F a^3.$$

За площу  $\Omega_2$  на другій силевій ділянці  $BC$  візьмемо площу одиничної епюри /вказівка 2/, тобто площу трапеції:

$\Omega_2 = \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3} a\right) \frac{1}{2} a = \frac{a^2}{2}$ . Де  $b$  не був центр ваги трапеції, ордината  $\bar{M}_{c2} = F a$ ; оскільки вантажна епора на другій силевій ділянці має вигляд прямокутника, то

$$\Omega_2 \bar{M}_{c2} = -F a \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2} F a^3.$$

Для визначення  $\Omega_3, \bar{M}_{c3}$  на третій силевій ділянці  $CD$  використаємо формулу Карнаухова /7.46/:

$$\Omega_3 \bar{M}_{c3} = -\frac{a}{6} (2F a \frac{2}{3} a + 2a \cdot 0 + 0 \frac{2}{3} a + F a \cdot a) = -\frac{7}{18} F a^3.$$

На четвертій силевій ділянці  $DK$   $\Omega_4, \bar{M}_{c4} = 0$ , тому що на цій ділянці відсутня епора  $M_F(x)$ . Підставивши отримані значення  $\Omega_i, \bar{M}_{ci}$  в загальну формулу, дістанемо

$$y_K = -\frac{1}{EJ_x} \left( \frac{1}{9} F a^3 + \frac{1}{2} F a^3 + \frac{7}{18} F a^3 \right) = -\frac{F a^3}{EJ_x} =$$

$$= -\frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^8} = -5,26 \text{ мм.}$$

Знак "мінус" в цьому результаті означає, що переміщення перерізу  $K$

напрямене протилежно одиничній силі  $\bar{F}$ , тобто переріз  $K$  переміститься вгору на 5,26 мм.

**Приклад 7.5.** Знайти кут повороту опорного перерізу  $A$  навантаженої балки № 27а ( $J = 5500 \text{ см}^4$ ) /рис. 7.35, а/, якщо  $q = 60 \text{ кН/м}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ ;  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

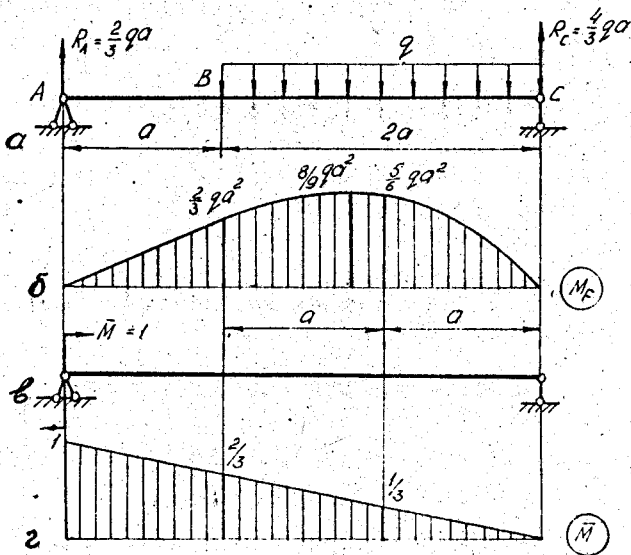


Рис. 7.35. Схема до визначення кута повороту перерізу при згині за способом Верещатіна

**Розв'язання.** Будемо епюру згинаючих моментів  $M_F(x)$  від заданого навантаження на балку /рис. 7.35, б/ у перерізі  $A$ , де необхідно визначити кут повороту балки, прикладаємо одиничний момент  $\bar{M} = 1$  /рис. 7.35, в/ і будемо від нього епюру згинаючого момента  $\bar{M}(x)$  /рис. 7.35, г/.

Аналізуємо побудовані епюри  $M_F(x)$ ,  $\bar{M}(x)$  :

1/ обидві зазначені епюри побудовані по один бік від базової лінії; отже, кут  $\theta_A$  - додатний;

2/ балку розбиваємо на дві силові ділянки  $AB$  і  $BC$ , тоді

$$\theta_A = \frac{1}{EJ_z} (\Omega_1 \bar{M}_1 + \Omega_2 \bar{M}_2).$$

Для визначення добутку  $\Omega_1 \bar{M}_{c_1}$  використаємо формулу /7.44/:

$$\Omega_1 \bar{M}_{c_1} = \frac{a}{6} (2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} qa^2 \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} qa^2) = \frac{14}{9} qa^3.$$

Аналогічно на ділянці  $BC$  добуток  $\Omega_2 \bar{M}_{c_2}$  знайдемо за допомогою формули /7.45/. Для цього необхідно визначити значення  $M_F(x_2)$

і  $\bar{M}(x_2)$  посередині довжини ділянки:

$$x_2 = a: M_F(x_2) = R_c x_2 - qx_2^2 / 2;$$

$$M_F(x_2) \Big|_{x_2=a} = R_c a - \frac{qa^2}{2} = \frac{5}{6} qa^2; \quad \bar{M}_c \Big|_{x=a} = \frac{1}{3},$$

тоді

$$\Omega_2 \bar{M}_{c_2} = \frac{2a}{6} \left( \frac{2}{3} qa^2 \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{5}{6} qa^2 \frac{1}{3} + 0 \right) = \frac{14}{27} qa^3.$$

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{14}{9} qa^3 + \frac{14}{27} qa^3 \right) = \frac{56 qa^3}{27 EJ_x} = \\ &= \frac{56 \cdot 60 \cdot 10^3}{27 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ рад.} \end{aligned}$$

#### 7.14. Розрахунки на жорсткість при згині

Максимальне лінійне переміщення в балці називається стрілою прогину і позначається  $f$ . Якщо позначити допустиме лінійне переміщення в балці  $[f]$ , то умову жорсткості при згині можна записати так:

$$f = \Delta_f \leq [f]. \quad /7.49/$$

Умову жорсткості в балках також можна записати і для кутів повороту перерізів:

$$\theta_{\max} \leq [\theta], \quad /7.50/$$

де  $[\theta]$  - допустимий кут повороту, який визначається технологічними властивостями балки.

Користуючись умовами жорсткості, можна розв'язувати ті самі три типи задач, що під час розрахунків на міцність: добирати площу поперечного перерізу балки /проектний розрахунок/, визначати вантажопідйомність балки ( $M_{max}$ ), перевіряти достатність жорсткості балки.

**Приклад 7.6.** Визначити силу  $F$ , за якої вільний кінець консольної двотаврової балки № 18 ( $J_x = 1290 \text{ см}^4$ ) внаслідок навантаження торкнеться нахилої площини /рис.7.36, а/, якщо  $\delta = 3 \text{ мм}$ ,  $l = 3 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

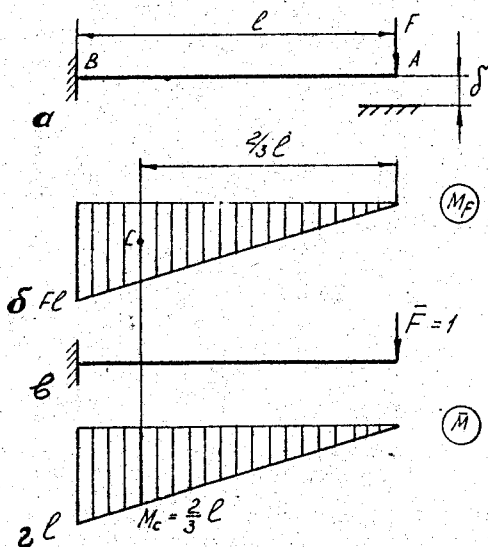


Рис.7.36. Побудова вантажної /б/ і одиничної /г/ епюр згинаючих моментів балки

**Розв'язання.** За допустиме лінійне переміщення в цій задачі слід брати величину  $\delta$ , тобто  $[f] = \delta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Тоді згідно з формулою /7.48/  $y_A \leq \delta$ . Користуючись способом Верещагіна для визначення переміщень, маємо  $y_A = \frac{1}{EJ_x} \Omega M_C$ , де  $\Omega$  - площа епюри зги-

наючого момента від дії сили  $F$  /рис.7.36,а/:  $\Omega = \frac{1}{2} \ell F \ell =$   
 $= F \ell^2 / 2$ ;  $\bar{M}_c$  - ордината згинаючого момента від одиничної сили,  
 прикладеної в точці  $A$  /рис.7.36,в,г/. Підставимо ці значення і  
 знайдемо

$$y_A = \frac{1}{EJ_x} \Omega \bar{M}_c = \frac{1}{EJ_x} \frac{F \ell^2}{2} \frac{2}{3} \ell = \frac{F \ell^3}{3EJ_x}$$

Оскільки переміщення  $y_A$  не має перевищувати  $\delta$ , то

$$y_A = \frac{F \ell^3}{3EJ_x} \leq \delta, \quad F \leq \frac{3EJ_x \delta}{\ell^3} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{27} = 860 \text{ Н},$$

тобто сила  $F$  не має перевищувати 860 Н.

#### Запитання для самоперевірки

1. Балки і їх опори. Види балок і опор. Навести приклади з техніки.
2. Дайте визначення плоского згину.
3. Сформулюйте правила знаків для поперечної сили  $Q$  і згинаючого момента  $M$ , що діють у поперечних перерізах балки. Розкажіть про характерні особливості епюр  $Q$  і  $M$ .
4. Запишіть диференціальну залежність між поперечною силою і згинаючим моментом. Розкрийте сутність використання цієї залежності в процесі побудови епюр внутрішніх силових факторів.
5. Як визначаються нормальні і дотичні напруги в довільній точці поперечного перерізу при плоскому згині?
6. Сформулюйте умову міцності при згині.
7. Які геометричні характеристики плоского перерізу впливають на міцність і жорсткість балки?
8. Розкрийте сутність метода Мора щодо визначення переміщень балки при згині.
9. Як проводиться перемноження епюр за правилом Верещагіна при визначенні переміщень балки?

## 8. СКЛАДНИЙ ОПІР

Під складним опором розуміють різні комбінації простих напружених станів стержня /розтягу, стиску, зсуву, кручення, згину/.

В загальному випадку навантаження стержня в поперечних перерізах можуть діяти шість внутрішніх силових факторів -  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_k$ . Напружений стан при цьому знаходять на основі принципу суперпозиції. Згідно з даним принципом, у досліджуваній точці розраховують окремо напруги від дії кожного силового фактора, після чого їх підсумовують і визначають сумарні компоненти напруг. Зрозуміло, що знаючи напружений стан у точці і використовуючи ту чи іншу теорію міцності, можна провести розрахунки на міцність даного елемента.

На практиці одночасна дія всіх силових факторів зустрічається рідко. Частіше приходиться мати справу з різними їх комбінаціями, які ми і розглянемо.

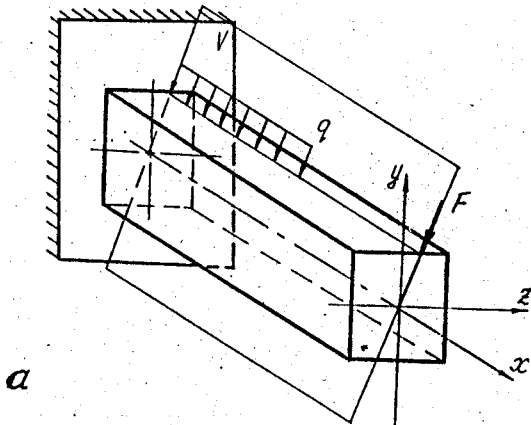
### 8.1. Косий згин

Косим називають згин, за якого площина дії навантажень не збігається з жодною із головних осей перерізу. Наприклад, на рис.8.1,а сила  $F$  і розподілене навантаження  $q$  діють у площині  $V$ ; яка не збігається з головними площинами стержня  $xy$  і  $xz$ .

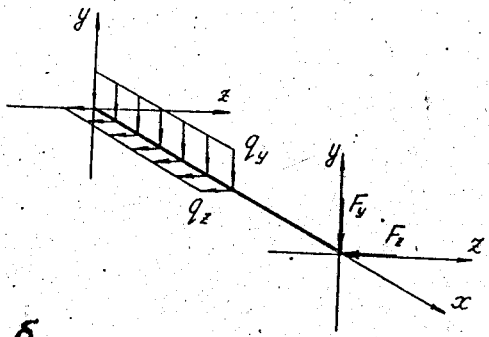
Під час розрахунків кожне із зовнішніх навантажень розкладають на складові частини, що діють у головних площинах /рис.8.1,б/. Отже, косий згин розглядають як суму двох плоских згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Розглянемо консольну балку довжиною  $l$  прямокутного перерізу /рис.8.2/, до кінця якої прикладено силу  $F$ , що утворює з віссю  $y$  кут  $\alpha$ . Розкладемо силу  $F$  на дві складові, направлені вздовж головних осей перерізу:

$$F_y = F \cos \alpha, \quad F_z = F \sin \alpha. \quad /8.1/$$



**a**



**б**

Рис.8.1. Неплоский згин /а/ і схематичне зображення його у вигляді двох плоских /б/

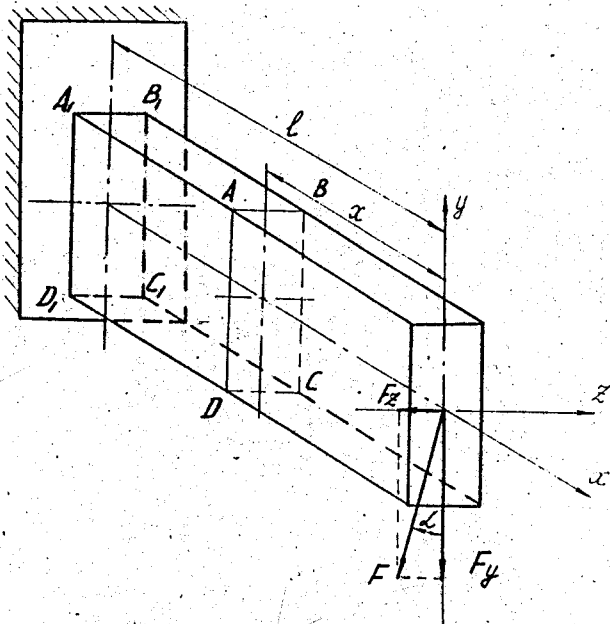


Рис.8.2. Приклад розв'язування задач для балки, навантаженої при плоскому згині!

У поперечних перерізах балки сили  $F_y$  і  $F_z$  утворюють чотири /із шести/ внутрішніх силових фактори:  $Q_y^z$ ,  $Q_z^y$ ,  $M_y^z$  і  $M_z^y$ . У розрахунках на міцність, як і за плоского згину, нехтують поперечними силами  $Q_y$ ,  $Q_z$  і утвореними ними дотичними напругами.

Значення згинаючих моментів у довільному поперечному перерізі балки, взятому на відстані  $x$  від кінця консолі, будуть

$$M_z = F_y \cdot x, \quad M_y = F_z \cdot x. \quad /8.2/$$

Згинаючий момент вважають додатним, якщо в першому квадранті перерізу він розтягує волокна балки, і від'ємним, якщо утворює стиск волокон. У розглядуваному прикладі  $M_z$  і  $M_y$  - додатні. Епюри згинаючих моментів  $M_z$  і  $M_y$  зображені на рис.8.3.

Обчислимо нормальні напруги в довільній точці  $K(z, y)$  поперечного перерізу, взятого на відстані  $x$  від вільного краю консолі.

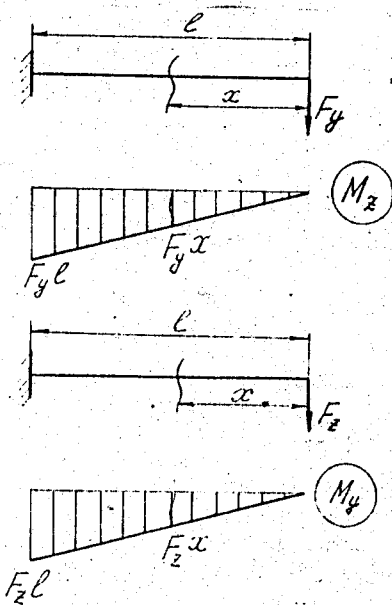


Рис.8.3. Епори згинаючих моментів  $M_y$  і  $M_z$  при неплоскому згині

лі /рис.8.4/. Оскільки кожний із моментів  $M_x$  і  $M_y$  утворює в даній точці нормальну напругу, то повну напругу знайдемо як суму складових:  $\sigma = \sigma' + \sigma''$ .

Тут  $\sigma'$  - нормальна напруга в точці  $K$ , утворена згинаючим моментом  $M_x$ :

$$\sigma' = -\frac{M_x}{J_x} y,$$

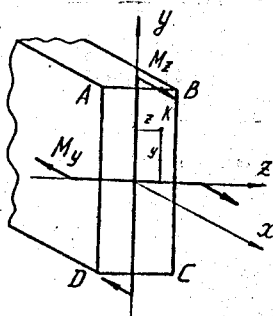


Рис.8.4. Схема до визначення нормальних напруг у поперечному перерізі при неплоскому згині

а  $\sigma''$  - нормальна напруга в тій же точці, утворена згинаючим моментом  $M_y$ :

$$\sigma'' = \frac{M_y}{J_y} z$$

Отже, результуюча нормальна напруга в точці K становитиме

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \quad /8.3/$$

Як було показано, за прямого згину нейтральна лінія збігається з однією із головних осей перерізу і перпендикулярна до силової площини. З рівняння /8.3/ видно, що нормальні напруги при косому згині в центрі ваги перерізу також дорівнюють нулю. Тобто, якщо в /8.3/ підставимо  $y = 0$  і  $z = 0$ , то дістанемо  $\sigma = 0$ . Проте нейтральна лінія не збігається з жодною із головних осей.

Оскільки формула нейтральної лінії описує геометричне місце точок в перерізі, де  $\sigma = 0$ , то із /8.3/ маємо

$$\frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = 0$$

або

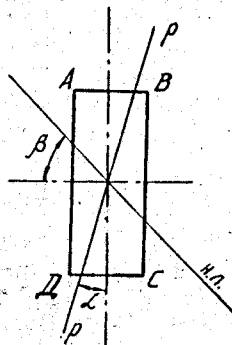
$$y = - \frac{M_y}{M_z} \frac{J_z}{J_y} z \quad /8.4/$$

Це рівняння прямої, що проходить через центр ваги перерізу. Із курсу математики відомо, що положення такої прямої може бути задано кутом її нахилу до однієї з координатних осей. Тобто положення нейтральної лінії визначається кутовим коефіцієнтом:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = - \frac{M_y}{M_z} \frac{J_z}{J_y} \quad /8.5/$$

де  $\beta$  - кут, який утворює нейтральна лінія /н.л./ з віссю  $x$  /рис.8.5/. На цьому ж рисунку показана силова лінія  $\rho - \rho$  як лінія перетину силової площини і поперечного перерізу балки. Із формул /8.1/ і /8.2/ випливає, що

$$\frac{M_y}{M_x} = \frac{F_z x}{F_y x} = \frac{F \sin \alpha}{F \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$



тоді формулу /8.5/ можна переписати у вигляді

Рис.8.5. Взаєморозміщення силової площини  $\rho - \rho$  і нейтральної лінії (н.л.)

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha. /8.6/$$

Отже, положення нейтральної лінії не залежить від значення сили  $F$ , а визначається лише кутом нахилу силової площини до осі  $y$  і формою перерізу. Причому, якщо  $J_z = J_y$ , то із /8.6/ випливає, що  $|\beta| = |\alpha|$ , а значить, нейтральна лінія стає перпендикулярною до силової площини. Оскільки в загальному випадку косою згину моменти інерції  $J_z$  і  $J_y$  не дорівнюють один одному, то і нейтральна лінія не перпендикулярна до силової площини.

Звернемо увагу на те, що на нейтральній лінії нормальні напружки дорівнюють нулю, а максимальних значень вони досягають у точках перерізу, найвіддаленіших від нейтральної лінії. В розглядуваному перерізі /рис.8.5/ найбільш напруженими будуть точки  $B$  і  $D$ . Для знаходження напружок у даних точках необхідно в рівняння /8.3/ підставити із врахуванням знака їх координата, тоді

$$\sigma_B = \frac{M_x}{J_z} y_B + \frac{M_y}{J_y} z_B, \quad \sigma_D = \frac{M_x}{J_z} y_D + \frac{M_y}{J_y} z_D,$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_{A'} = -\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right), \quad /8.7/$$

де  $W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{J_x}{y_B} = -\frac{J_x}{y_{A'}}$  - момент опору перерізу відносно осі  $x$ ;  $W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{J_y}{x_B} = -\frac{J_y}{x_{A'}}$  - момент опору перерізу відносно осі  $y$ .

Для нормальної роботи елемента конструкції максимальні нормальні напруги в небезпечному перерізі не мають бути більшими за допустимі. Небезпечний переріз знаходять із аналізу побудованих епюр  $M_x$  і  $M_y$  /див.рис.8.3/. Очевидно, що в розглянутому випадку небезпечний переріз буде в закріпленні балки /переріз  $A, B, C, D$  на рис.8.2/, а максимальні згинаючі моменти становитимуть:  $M_x^{max} = F_y l$ ,  $M_y^{max} = F_x l$ . Тоді умову міцності при косому згині з урахуванням /8.7/ запишемо у вигляді

$$\sigma_{max} = \sigma_B = \frac{M_x^{max}}{W_x} + \frac{M_y^{max}}{W_y} \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{A'} = \left| \frac{M_x^{max}}{W_x} + \frac{M_y^{max}}{W_y} \right| \leq [\sigma_c], \quad /8.8/$$

де  $[\sigma_p]$  і  $[\sigma_c]$  - допустимі напруги матеріалу балки відповідно на розтяг і стиск.

Для балок, матеріали яких однаково чинять опір розтягу і стиску, маємо

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} + \frac{M_y^{max}}{W_y} \leq [\sigma], \quad /8.9/$$

де  $W_x = J_x / y_{max}$ ;  $W_y = J_y / x_{max}$ ;  $x_{max}$ ,  $y_{max}$  - координати самої віддаленої від нейтральної лінії точки.

Переміщення центра ваги перерізу балки при косому вигні визначають як результат додавання переміщень при плоских згинах в головних площинах  $yx$  і  $zx$ .

Для знаходження переміщень при косому згані розглянемо той самий приклад згину консольної балки, навантаженої силою  $F$  /рис.8.2/. Переміщення в напрямі осі  $y$  позначимо  $f_y$ , а в напрямі осі  $z$  —  $f_z$ , тоді за аналогією з формулою /7.36/ дістанемо

$$f_y = \frac{F_y e^3}{3EJ_z}; \quad f_z = \frac{F_z e^3}{3EJ_y} \quad /8.10/$$

Повний прогин

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad /8.11/$$

Знайдемо напрям сумарного прогину балки /рис.8.6/:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_z}{f_y} = \frac{F_z J_z}{F_y J_y} = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha \quad /8.12/$$

Тут  $\gamma$  — кут, який утворює результуюче переміщення  $f$  з віссю  $y$ .

Із порівняння формул /8.12/ і /8.6/ випливає, що  $|\gamma| = |\beta|$ , тобто напрям переміщення центра ваги перерізу перпендикулярний до нейтральної лінії. А оскільки  $\gamma \neq \alpha$ , то напрям переміщення не збігається із силовою площиною, причому відхилення напрямку повного прогину від силової площини тим більше, чим більше відношення головних моментів інерції  $J_z / J_y$ .

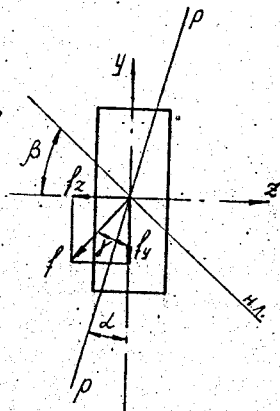


Рис.8.6. Схема до визначення переміщень  $f_y$  і  $f_z$ , а також результуючого переміщення

**Приклад 8.1.** Визначити найбільше значення вильоту різця  $\ell$ , на який у площині  $yOz$  діє сила  $F = 1000$  Н, направлена під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до вертикальної осі /рис.8.7/, якщо допустимий прогин верхньої різця  $[f] = 0,03$  мм.

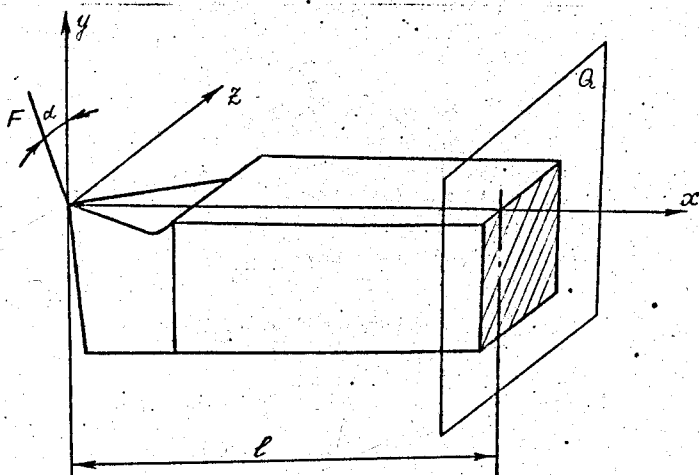


Рис.8.7. Навантаження на різець – приклад неплоского згину балки

Розміри поперечного перерізу різця становлять  $h = 20$  мм,  $b = 10$  мм; модуль пружності матеріалу  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Перевірити міцність тіла різця, якщо допустима напруга  $[\sigma] = 200$  МПа.

**Розв'язання.** Оскільки діюча на різець сила  $F$  направлена перпендикулярно до його поздовжньої осі і водночас під кутом до головних центральних осей перерізу, то різець зазнає деформації косоного згину. Запишемо умову жорсткості для різця, використовуючи вирази /7.48/, /8.10/, /8.11/:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{\left(\frac{F_y \ell^3}{3EJ_x}\right)^2 + \left(\frac{F_z \ell^3}{3EJ_y}\right)^2} =$$

$$= \frac{\ell^3}{3E} \sqrt{\frac{F_y^2}{J_x^2} + \frac{F_z^2}{J_y^2}} \leq [f],$$

звідки

$$\ell_{\max} = \sqrt[3]{\frac{[f] 3E}{\sqrt{\frac{F_y^2}{J_x^2} + \frac{F_z^2}{J_y^2}}}}$$

Визначаємо вертикальну і горизонтальну складові сили  $F$  :

$$F_y = F \cos \alpha = 1000 \cos 30^\circ = 866 \text{ Н};$$

$$F_z = F \sin \alpha = 1000 \sin 30^\circ = 500 \text{ Н}.$$

Осьові моменти інерції для прямокутного перерізу:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6666 \text{ мм}^4;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 10^3}{12} = 1666 \text{ мм}^4.$$

Тоді

$$\ell_{\max} = \sqrt[3]{\frac{0,03 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^5}{\sqrt{\frac{866^2}{6666^2} + \frac{500^2}{1666^2}}}} = 38 \text{ мм}.$$

Перевіримо тіло різця на міцність згідно з /8.9/:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_x^{\max}}{W_x} + \frac{M_y^{\max}}{W_y} = \frac{6F_y \ell}{bh^2} + \frac{6F_z \ell}{hb^2} = \\ &= \frac{6 \cdot 866 \cdot 38}{10 \cdot 20^2} + \frac{6 \cdot 500 \cdot 38}{20 \cdot 10^2} = 106,4 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

тобто умова міцності виконується.

## 8.2. Згин з розтягом /стиском/

Якщо на брус діють зовнішні навантаження, сили площини яких проходять через вісь бруса і викликають поперечні і поздовжні зусилля, то такий вид складного опору називають згином з розтягом /стиском/. В цьому разі в поперечних перерізах бруса мають місце поперечні сили  $Q_y$  і  $Q_x$ , поздовжня сила  $N$  і згинаючі моменти  $M_y$  і  $M_x$ . Як і в випадку косою згину, в цьому разі також нехтують поперечними силами  $Q_y$  і  $Q_x$  і спричиненими ними дотичними напругами  $\tau_y$  та  $\tau_x$ . Для знаходження в точках поперечного перерізу нормальної напруги  $\sigma$  необхідно, використовуючи принцип суперпозиції, додати складові напруги, зумовлені окремо поздовжньою силою  $N$  і згинаючими моментами  $M_y$  і  $M_x$ .

Розглянемо деформацію згину і розтягу на прикладі позacentрового стиску. Позacentровий стиск - це такий вид деформації, коли стискаюча сила паралельна осі бруса, але точка її прикладання не збігається з центром ваги перерізу. Точку перетину будь-якого перерізу бруса з лінією дії сили  $F$  назвемо полюсом сили. Координати полюса сили в системі головних осей поперечного перерізу позначимо  $y_p$  та  $x_p$ . Відстань від полюса сили до центра ваги перерізу називається ексцентриситетом  $e$  /рис.8.8/.

Знайдемо внутрішні сили фактори у довільному перерізі бруса /рис.8.9/. Використовуючи метод перерізів, отримаємо

$$N = F; \quad M_x = F y_p, \quad M_y = F x_p.$$

Нормальні напруги від кожного із внутрішніх силових факторів  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  будуть відповідно

$$\sigma' = \frac{N}{A}, \quad \sigma'' = \frac{M_x}{J_x} y, \quad \sigma''' = \frac{M_y}{J_y} x.$$

Підсумовуючи  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  і  $\sigma'''$ , маємо

$$\sigma = F \left( \frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_x} y + \frac{x_p}{J_y} x \right). \quad /8.13/$$

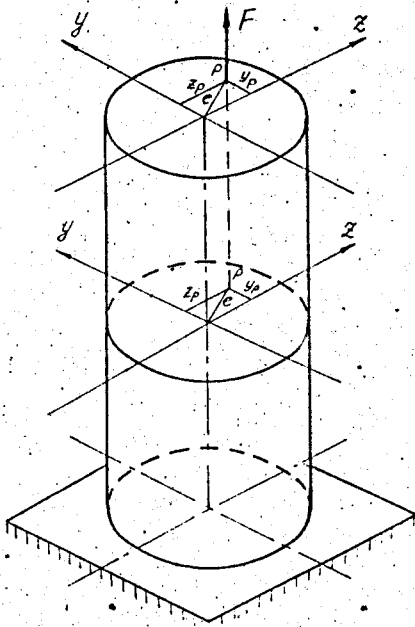


Рис.8.8. Внутрішні сили фактори при позацентровому розтягу бруса

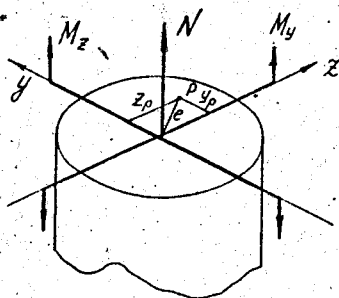


Рис.8.9. Внутрішні сили фактори в довільному перерізі бруса

формулу /8.13/ можна використовувати для визначення напруги при позацентровому розтягу. В разі позацентрового стиску перед правою частиною формули /8.13/ необхідно поставити знак "мінус".

Привівши напругу в формулі /8.13/ до нуля, дістаємо рівняння нейтральної лінії

$$\frac{1}{A} + \frac{y_P}{J_z} y + \frac{z_P}{J_y} z = 0. \quad /8.14/$$

Очевидно, що /8.14/ є рівнянням прямої, яка не проходить через початок координат. Отже, його можна записати також у вигляді  $y = ax + b$ , де  $a = -(J_x z_p) / (J_y y_p)$ ,  $b = -J_x / (A y_p)$ . Для побудови такої прямої необхідно знати хоча б дві точки, які їй належать. Проте простіше на основі рівняння /8.14/ записати формули для визначення величин відрізків, які відокіаються нейтральною лінією на осях координат /рис.8.10/:

якщо  $x = 0$ ,

$$y = y_H = - \frac{J_x}{A y_p}, \quad /8.15/$$

якщо  $y = 0$ ,

$$x = x_H = - \frac{J_y}{A x_p}. \quad /8.16/$$

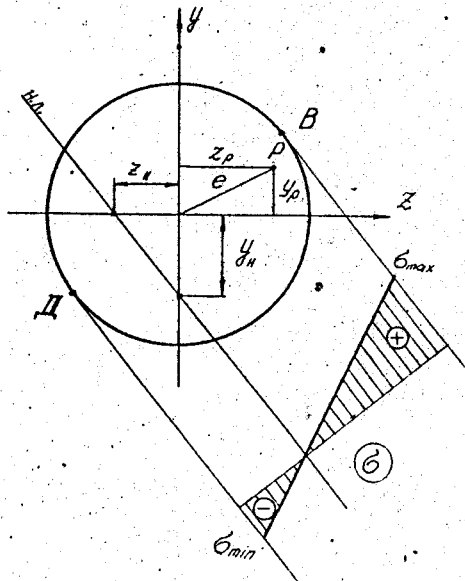


Рис.8.10. Положення нейтральної лінії і епора нормальних напруг при позацентровому розтягу бруса

Очевидно /рис.8.10, формули /8.15/ та /8.16//, що полюс і нейтральна лінія лежать по різні боки від центра ваги перерізу. Причому, якщо ексцентриситет  $e$  збільшується, то нейтральна лінія наближається до центра ваги перерізу, і навпаки. Отже, якщо полюс збігається з центром ваги, то нейтральна лінія віддаляється в нескінченність. В цьому разі згинаючі моменти зникають, тому що координати  $z_p$  і  $y_p$  дорівнюють

нулю, і позацентричний розтяг /стиск/ перетворюється в центральний, закономірності якого розглянуті в розд.3.

В разі позацентричного розтягу /стиску/ нормальна напруга в кожній точці поперечного перерізу бруса пропорційна відстані від цієї точки до нейтральної лінії. Використовуючи цю закономірність, побудуємо епору нормальних напруг, значення яких відкладаються відносно

лінії, перпендикулярної до нейтральної осі /рис.8.10/. Тоді значення максимальних нормальних напруг на ділянці розтягу становитиме

$$\sigma_{max} = \sigma_B = F \left( \frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_x} y_B + \frac{z_p}{J_y} z_B \right),$$

на ділянці стиску

$$\sigma_{min} = \sigma_A = F \left( \frac{1}{A} - \frac{y_p}{J_x} y_A - \frac{z_p}{J_y} z_A \right).$$

Останні рівняння можуть бути використані для складання умови міцності матеріалу при позакентровому розтягу /стиску/. Оскільки для пластичних матеріалів  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ , то умова міцності записується для однієї, найбільш віддаленої від нейтральної лінії точки:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = F \left( \frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_x} y_B + \frac{z_p}{J_y} z_B \right) \leq [\sigma]. \quad /8.17/$$

Для крихких матеріалів  $[\sigma_c] > [\sigma_p]$ , тому, якщо напруги стиску в поперечному перерізі стержня більші від напруг розтягу, розрахунок на міцність ведеться за двома умовами:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{min} \leq [\sigma_c]. \quad /8.18/$$

Приклад 8.2. Розрізана ланка ланцюга /рис.8.11/ виконана із сталевго дроту діаметром  $d = 10$  мм з допустимом напругом для матеріалу  $[\sigma] = 200$  МПа. Визначити значення допустимого навантаження  $[F]$ .

Розв'язання. Матеріал стержня в перерізі А-А буде підлягати позакентровому розтягу. Ексцентриситет прикладання сили  $e = y_p = \alpha + \frac{d}{2}$ . Згідно з вибраною системою координат координати полюса сили становитимуть

$$z_p = 0; \quad y_p = \alpha + \frac{d}{2} = 25 + \frac{10}{2} = 30 \text{ мм.}$$

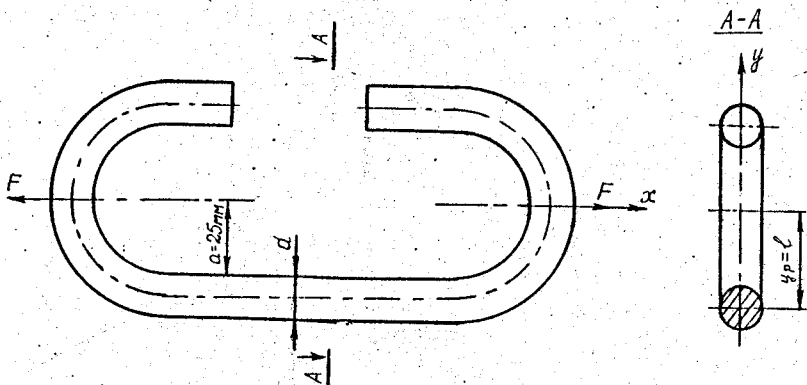


Рис.8.11. Приклад згину з розтягом криволінійного бруса

Умова міцності для перерізу  $A-A$  згідно з /8.13/ запишеться у вигляді:

$$\sigma = F \left( \frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_x} y \right) \leq [\sigma].$$

Звідси можна отримати значення допустимого навантаження:

$$\begin{aligned}
 [F] &= \frac{[\sigma]}{\frac{1}{A} + \frac{y_p}{J_x} y} = \frac{[\sigma]}{\frac{4}{\pi d^2} + \frac{64 y_p}{\pi d^4} \frac{d}{2}} = \\
 &= \frac{200}{\frac{4}{3,14 \cdot 10^2} + \frac{64 \cdot 30}{3,14 \cdot 10^4} \cdot \frac{10}{2}} = 628 \text{ Н.}
 \end{aligned}$$

### 8.3. Згин з крученням

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які звичайно бувають прямими стержнями круглого або кільцевого перерізу. Таке поєднання деформацій валів утворюють сили натягу пасів на шківних пасових передачах, тиску зуб"ів коліс в зубчастих передачах тощо. В поперечних перерізах вала при згині з крученням відмінні від нуля такі силові фактори:  $M_x, M_y, M_z, Q_y, Q_z$ . Ці сили і моменти в точках перерізу вала утворюють нормальні напруги від згину і дотичні напруги від згину і кручення. Впливом поперечних сил  $Q_y$  і  $Q_z$  нехтують, тому що відповідні їм дотичні напруги набагато менші за дотичні напруги кручення і нормальні напруги згину. До того ж в найнебезпечніших точках на поверхні вала дотичні напруги від поперечних сил дорівнюють нулю.

Розглянемо вал, на якому закріплено два шкви  $C$  і  $D$  пасової передачі діаметрами  $D_1$  і  $D_2$  /рис.8.12/. Сили натягу віток пасових

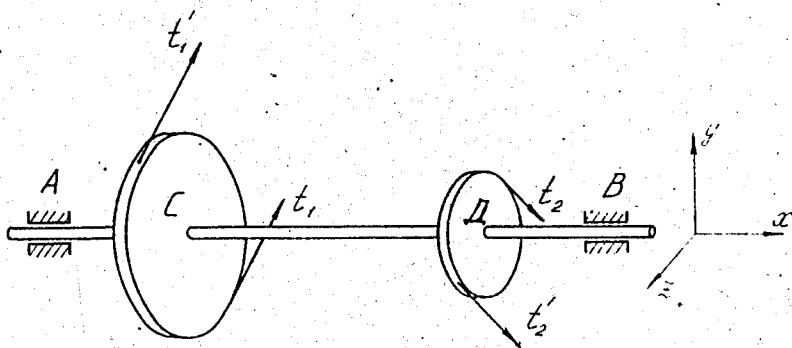


Рис.8.12. Приклад згину з крученням вала

передач позначимо  $t_1, t_1', t_2, t_2'$ . Нехтуючи тертям у підшипниках  $A$  і  $B$ , складемо розрахункову схему. Для цього наведемо всі діючі сили і крутильні моменти на вал до його осі. Під час перенесення сили  $F$  /рис.8.13/ до осі вала необхідно додати ще крутильний момент  $T = F \frac{D}{2}$  /рис.8.13,б/. Якщо на шків діють дві сили, наприклад  $t$  і  $t'$  /рис.8.13,в/, то результуюча сила, що діє на вісь вала,  $F = t + t'$ , а крутильний момент  $T = (t - t')D/2$  /рис.8.13,г/.

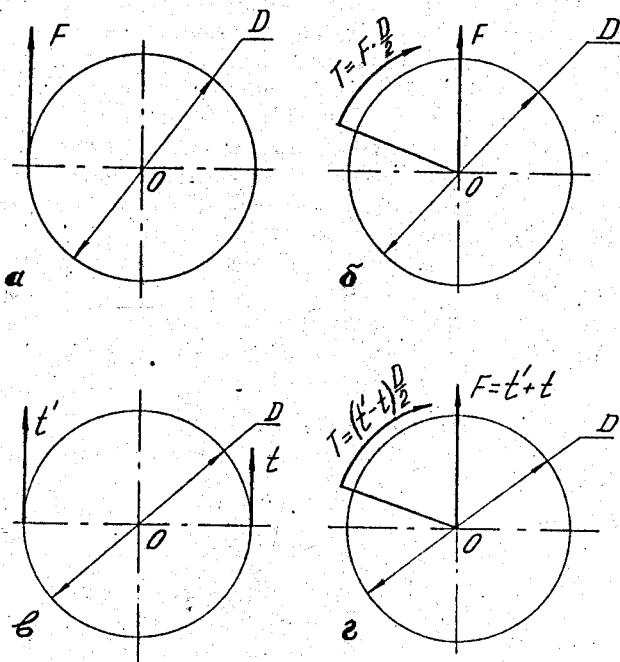


Рис.8.13. Внутрішні сили фактори в поперечних перерізах при згині з крученням вала

За умови, що ведуча вітка паси натягнута вдвічі сильніше від веденої ( $t' = 2t$ ), маємо  $F_1 = t_1 + t_1 = 3t_1$ ,  $F_2 = t_2' + t_2 = 3t_2$ ,

$$T_1 = (t_1' - t_1) D_1 / 2 = t_1 D_1 / 2, \quad T_2 = (t_2' - t_2) D_2 / 2 = T_2 D_2 / 2$$

/див. рис.8.12/. Розрахункова схема вала пасової передачі зображена на рис.8.14,а. Сили  $F_1$  і  $F_2$  розкладають на вертикальні та горизонтальні складові. Вертикальні сили  $F_{1y}$  і  $F_{2y}$  утворюють в підшипниках вертикальні реакції  $R_{Ay}$  і  $R_{By}$ , а горизонтальні сили  $F_{1z}$  і  $F_{2z}$  -

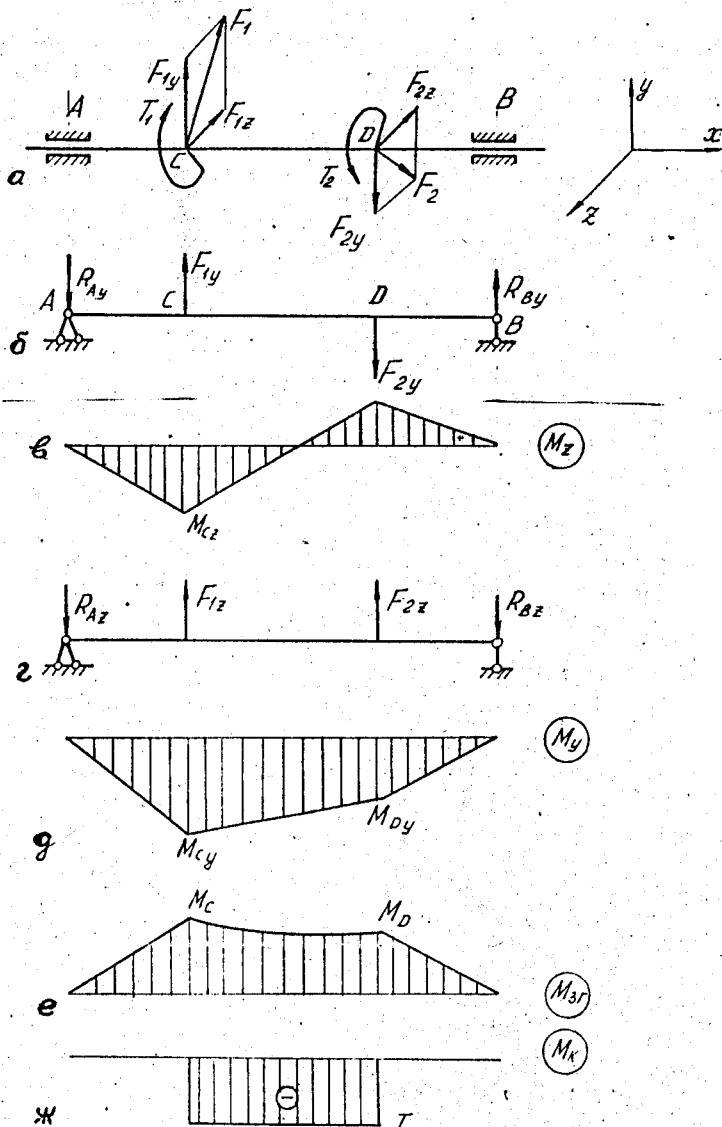


Рис. 8.14. Порядок побудови епюр  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $M_x$  і  $M_k$  при згині з крученням

горизонтальні реакції  $R_{Ax}$  і  $R_{Bx}$ . Величини реакцій в підшипниках вала визначають як для балки; що лежить на двох опорах /див. рис.8.12, б, г/, складаючи рівняння рівноваги.

Еюра згинаючих моментів  $M_z$  побудована від вертикальних сил  $R_{Ay}$ ,  $F_{1y}$ ,  $F_{2y}$ ,  $R_{By}$  і показана на рис.8.14, в. Аналогічно й еюра згинаючих моментів  $M_y$  у горизонтальній площині побудована від горизонтальних сил  $R_{Ax}$ ,  $F_{1x}$ ,  $F_{2x}$  і  $R_{Bx}$  /рис.8.14, д/. Еюри сумарних згинаючих моментів  $M_{3r}$  /рис.8.14, е/ будують на основі еюр  $M_z$  і  $M_y$  за формулою

$$M_{3r} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} \quad /8.19/$$

За рівномірного обертання вала він перебуває в стані рівноваги, тобто  $T_1 + T_2 = 0$ . Еюра крутильних моментів із врахуванням того, що  $T_1 = T_2 = 2T$ , зображена на рис.8.14, ж.

Небезпечний переріз вала розміщено там, де еюри повних згинаючих моментів  $M_{3r}$  і крутильних моментів  $M_k$  досягають найбільших значень. Для вала, показаного на рис.8.14, небезпечним буде переріз С, зображений на рис.8.15. В цьому перерізі діє найбільший згинаючий мо-

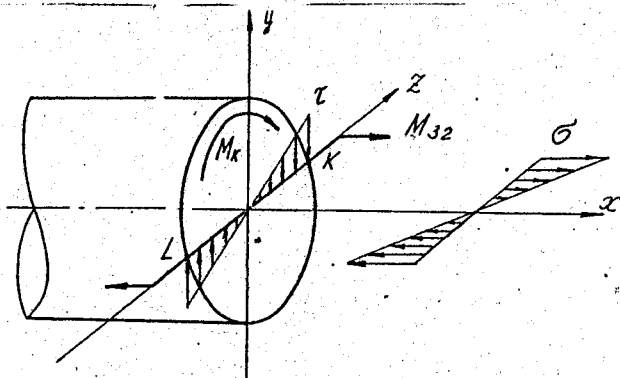


Рис.8.15. Еюри  $\sigma$  і  $\tau$  у поперечному перерізі вала при згині з крученням

мент  $M_{3r}$ , а також максимальний крутильний момент  $M_{\kappa}$ . За вісь  $y$  взята вісь, яка перпендикулярна до площини дії згинаючого моменту  $M_{3r}$ . Отже, вісь  $y$  - це нейтральна лінія перерізу.

Від дії моментів  $M_{3r}$  і  $M_{\kappa}$  у поперечному перерізі виникають нормальні  $\sigma$  і дотичні напруги  $\tau$ , значення яких в будь-якій точці перерізу визначаються за формулами

$$\sigma = \frac{M_{3r}}{J} z ; \quad \tau = \frac{M_{\kappa}}{J_{\rho}} \rho . \quad /8.20/$$

Тут  $J = J_y = J_z$  - осьовий момент інерції вала круглого поперечно-го перерізу.

Епюри нормальних і дотичних напруг зображені на рис.8.15. Максимальні за абсолютною величиною нормальні напруги виникають у найвіддаленіших від нейтральної лінії точках  $K$  і  $L$  :

$$\sigma = \frac{M_{3r}}{W} . \quad /8.21/$$

Найбільші дотичні напруги виникають в точках контура перерізу

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\kappa}}{2W} . \quad /8.22/$$

У формулі /8.22/ враховано, що полярний момент опору для круга  $W_{\rho}$  удвічі більший від осьового  $W = W_x = W_y$ .

Для матеріалів, які однаково чинять опір розтягу і стиску, небезпечними в поперечному перерізі будуть одночасно точки  $K$  і  $L$ .

Для дослідження напруженого стану виріжемо на ділянці точки  $K$  /рис.8.16,а/ елементарний паралелепіпед так, щоб його права грань /заштрихована/ була паралельна площині поперечного перерізу вала. Тоді на гранях паралелепіпеда, паралельних поперечному перерізу вала, діють нормальні  $\sigma$  і дотичні  $\tau$  напруги, значення яких визначаються за формулами /8.21/ і /8.22/.

На підставі закону парності дотичних напруг /підрозд.3.1/ напруги  $\tau$  виникнуть також на верхній і нижній гранях паралелепіпеда. Останні дві грані вільні від напруг, оскільки відсутні сили, що розтягують або стискають вал у напрямі, перпендикулярному до його осі.

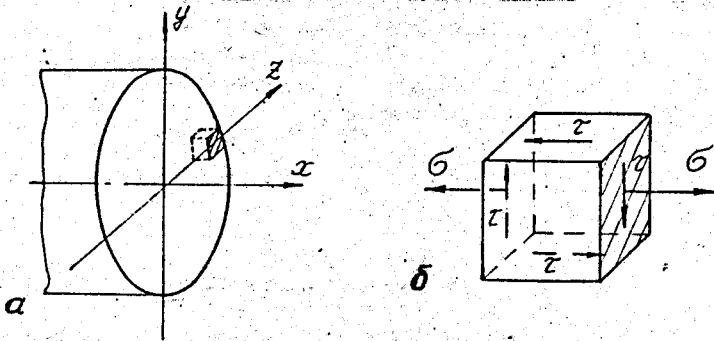


Рис.8.16. Напружений стан в небезпечній точці вала при згині з крученням

Отже, в небезпечній точці  $K$  спостерігаємо випадок плоского напруженого стану. В цьому разі головні напруги визначаються за формулами

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}), \quad /8.23/$$

$$\sigma_{min} = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad /8.24/$$

Оскільки  $\tau \neq 0$ , то  $\sigma_{max} > 0, \sigma_{min} < 0$ , а отже, в результаті маємо

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}),$$

$$\sigma_2 = 0, \quad /8.25/$$

$$\sigma_3 = \sigma_{min} = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Тоді елементарний паралелепіпед, вирізаний на ділянці точки  $K$  головними площинами, буде мати вигляд, зображений на рис.8.17.

Розрахунок вала при згині з крученням проводиться з використанням однієї з теорій міцності. В цьому разі вал із пластичних матеріалів розраховують за третьою /3.23/ або четвертою /3.26/ теоріями міцності. Загальна умова міцності вала матиме вигляд

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma]. \quad /8.26/$$

Тоді за третьою теорією міцності маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{екв III} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \\ &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad /8.27/ \end{aligned}$$

а за четвертою теорією дістанемо

$$\sigma_{екв IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad /8.28/$$

Враховуючи формули /8.21/ та /8.28/, умови міцності /8.27/ і /8.28/ можна замінити однією формулою:

$$\sigma_{екв} = \frac{M_{пр}}{W} \leq [\sigma], \quad /8.29/$$

де  $M_{пр}$  - зведений момент, який визначається за відповідними теоріями міцності:

а/ за третьою теорією міцності:

$$M_{пр III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_k^2}; \quad /8.30/$$

б/ за четвертою теорією міцності:

$$M_{пр IV} = \sqrt{M_z^2 + 0,75M_k^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_k^2}. \quad /8.31/$$

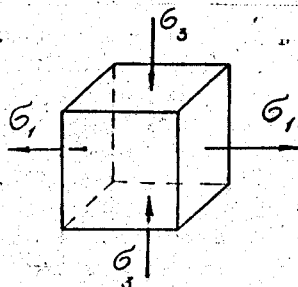


Рис.8.17. Головні напруги в небезпечній точці вала при згині з крученням

Звернемо увагу, що отримані формули справджуються також для розрахунків кільцевого поперечного перерізу.

**Приклад 8.3.** Перевірити на статичну міцність ведучий вал конічного редуктора /рис.8.18/, до якого прикладено крутильний момент

$T = 126 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Середній діаметр шестерні  $d_m = 85,8 \text{ мм}$ . Допустима напруга матеріала вала  $[\sigma] = 60 \text{ МПа}$ . Згідно з геометричними параметрами шестерні, сили, що діють на ній /рис.8.18,б/ мають такі значення: кружна  $F_t = 2938 \text{ Н}$ , радіальна  $F_r = 1020 \text{ Н}$ , осьова  $F_a = 322 \text{ Н}$ .

**Розв'язання.** Оскільки вал зазнає деформації згину з крученням, то його розраховують згідно з методикою, наведеною в підрозд.8.3. Прикладені до шестерні сили діють у двох площинах - вертикальній і горизонтальній. Покажемо горизонтальні і вертикальні складові сил на одній схемі /рис.8.18,б/. В цьому разі зазначимо, що згідно з рис.8.18,а права опора є шарнірно нерухомою, а ліва - шарнірно рухомою. Побудуємо епюри згинаючих моментів окремо в горизонтальній і вертикальній площинах.

#### А. Горизонтальна площина

Реакції опор визначимо, складаючи рівняння рівноваги:

$$\sum M_{Ay} = R_{Bz} L - F_t (L + a) = 0;$$

$$R_{Bz} = \frac{F_t (L + a)}{L} = \frac{2938(118 + 47)}{118} = 4108 \text{ Н};$$

$$\sum M_{Bx} = -R_{Az} L + F_t a = 0;$$

$$R_{Az} = \frac{F_t a}{L} = \frac{2938 \cdot 47}{118} = 1170 \text{ Н}.$$

Будуємо епюри згинаючих моментів у горизонтальній площині. Формули для визначення момента в довільному перерізі ділянок  $AB$  і  $CB$  мають вигляд

$$M_{1y} = -R_{Az} x_1; \quad M_{2y} = -F_t x_2.$$

Побудована на підставі формул епора показана на рис.8.18,в.

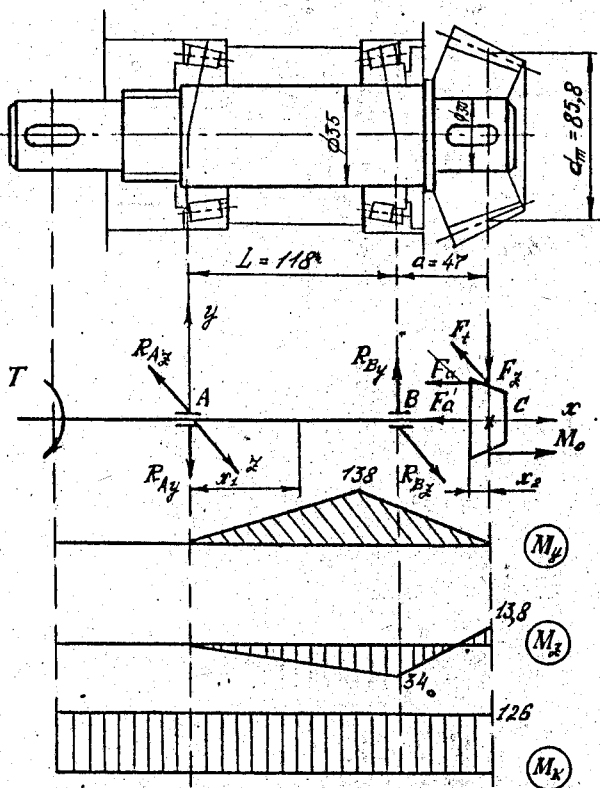


Рис.8.18. Ведущий вал конічного редуктора. Приклад побудови епюр  $M_y, M_x, M_k$

### Б. Вертикальна площина

Дію сил,  $F_a$  на вал заміно на прикладену до центра перерізу вала силу  $F_a = F_a$ , і зосереджений згинаючий момент  $M_o = F_a d / 2 = 322 \cdot 0,0858 / 2 = 13,8$  Н·м. Сила  $F_a$  є нормальною. Напруги від неї на порядок менші за напруги, створені згином, тому цю силу під час розрахунків вала на міцність не враховують.

Знаходимо реакції опор у вертикальній площині:

$$\sum M_{Az} = R_{By} L - F_a (L + a) + M_o = 0;$$

$$R_{By} = \frac{1020 \cdot (118 + 47) - 13800}{118} = 1309 \text{ Н};$$

$$\sum M_{Bz} = R_{Ay} L - F_a a + M_o = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{1020 \cdot 47 - 13800}{118} = 289 \text{ Н}.$$

Вітору згинаючих моментів у вертикальній площині /див.рис.8.18,г/ будемо за формулами

$$M_{1z} = -R_{Ay} x; \quad M_{2z} = M_o - F_a x.$$

Значення крутного момента на ділянках  $AB$  і  $BC$  за методом перерізів становить  $M_k = T = 126$  Н·м. Віюра крутного момента показана на рис.18,д.

Отже, як видно з рис.8.18, найнебезпечнішим є переріз вала в точці  $B$ . В цьому разі сумарний згинаючий момент

$$M_{3z} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{34^2 + 138^2} = 142 \text{ Н·м}.$$

Максимальна нормальна напруга в перерізі

$$\sigma = \frac{M_{3z}}{W} = \frac{M_{3z} \cdot 32}{\pi d^3} = \frac{142 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 35^3} = 34 \text{ МПа},$$

найбільша дотична напруга

$$\tau = \frac{M_K}{W_\rho} = \frac{126 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 35^3} = 15 \text{ МПа.}$$

Згідно з третьою теорією міцності

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{34^2 + 4 \cdot 15^2} = 45 \text{ МПа.}$$

Із умови міцності випливає, що

$$\sigma_{екв} = 45 \text{ МПа} < [\sigma] = 60 \text{ МПа,}$$

тобто міцність вала є достатньою.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення косою згину.
2. Напишіть формулу для визначення нормальних напруг у поперечному перерізі бруса при косому згині.
3. Як визначити положення нейтральної лінії при косому згині?
4. Як визначити положення нейтральної лінії при позацентровому розтягу /стиску/?
5. Як визначити небезпечний переріз вала при згині з крученням? Який напружений стан виникає в поперечному перерізі?
6. Як проводиться розрахунок на міцність при позацентровому розтягу /стиску/?
7. Розкрийте сутність проектного і перевірного розрахунків на міцність вала при згині з крученням.

## 9. СТІЙКІСТЬ СТИСНЕНИХ СТЕРЖНІВ

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка форма рівноваги. Отже, при заданому навантаженні завжди зберігалась початкова форма стержня.

Із курсу загальної фізики відомо, що рівновага тіл може бути стійкою і нестійкою. Наприклад, на дні вгнутої сфери /рис.9.1,а/ кулька перебуває в стані стійкої, а на поверхні опуклої сфери /рис.9.1,б/ - нестійкої рівноваги.

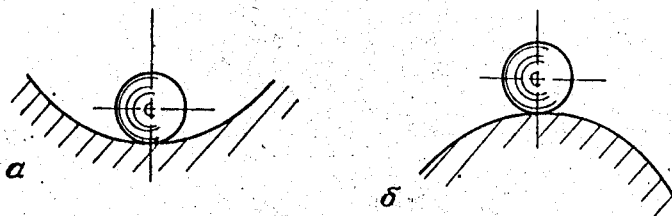


Рис.9.1. Приклад стійкої /а/ і нестійкої /б/ рівноваги

Зникнення стійких або виникнення якісно нових форм рівноваги зустрічається і в деяких конструкціях, навантажених зовнішніми силами. Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного стержня. Справді, за деякого значення стискувочої сили стійка прямолінійна форма стає нестійкою, і стержень різко викривляється. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, пластинок і оболонок. Втрата стійкості, як правило, настає раптово. Деформація конструкції проходить катастрофічно швидко, практично за постійного навантаження. Тому критичний стан, який безпосередньо передє руйнуванню конструкції, не допустимий у реальних умовах експлуатації.

### 9.1. Критична сила. формула Ейлера

Розглянемо тонкий прямий стержень, довжина якого значно більша за поперечні розміри /рис.9.2,а/. В процесі дії на стержень стискувочої сили  $F$  він зберігає прямолінійну стійку форму рівноваги. Малим збудженням цієї форми, яка виникає, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини. Із збільшенням сили до її критичного значення  $F_{кр}$  прямолінійна форма стає нестійкою і стержень раптово викривляється /рис.9.2,б/.

Критичною силою називається найбільше значення стискувочої сили, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня залишається стійкою. Згин, пов'язаний із втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається поздовжнім згином.

Для безпечної роботи конструкції робоче навантаження має бути менше за критичну силу  $F_{кр}$ . Позначимо допустиму стискувочу силу  $[F]$ ,

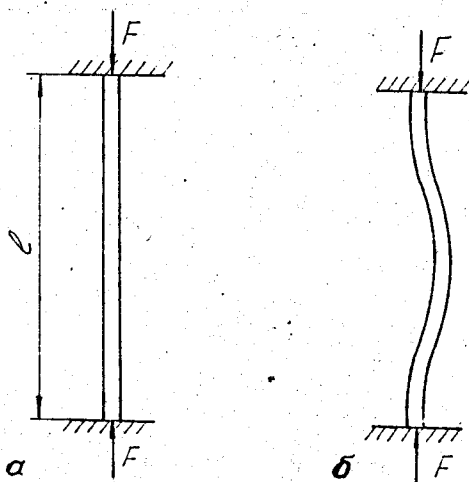


Рис.9.2. Стійка /а/ і нестійка /б/ рівновага стиснутого стержня

тоді  $[F] = F_{кр} / [S_{см}]$ , а умова стійкості матиме вигляд

$$F \leq [F] = \frac{F_{кр}}{[S_{см}]}, \quad /9.1/$$

де  $[S_{см}]$  - допустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Очевидно, що стійкість достатня, якщо  $[S_{см}] > 1$ . Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Звичайно для сталей  $[S_{см}] = 1,8...3$ ; для чавунів  $[S_{см}] = 5...5,5$ ; для дерева  $[S_{см}] = 2,8...3,2$ .

Для визначення критичної сили  $F_{кр}$  розглянемо стержень постійного перерізу /рис.9.3,а/, один кінець якого має шарнірно рухому, а другий шарнірно нерухому опору. Візьмемо стискуючу силу як таку, що досягає критичного значення  $F = F_{кр}$ . За цієї умови стержень поряд з прямолінійною матиме також криволінійну форму рівноваги.

Для розрахунку критичної сили скористаємося основним диференціальним рівнянням викривленої осі балки /7.27/:

$$EJ_{\min} \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x), /9.2/$$

де  $J_{\min}$  - найменший момент інерції поперечного перерізу стержня.

Абсолютна величина згинаючого момента в довільному поперечному перерізі стержня /рис.9.3,б/  $M(x) = Fy$ . Підставивши значення  $M(x)$  в /9.2/, отримаємо

$$EJ_{\min} \frac{d^2 y}{dx^2} = -Fy. /9.3/$$

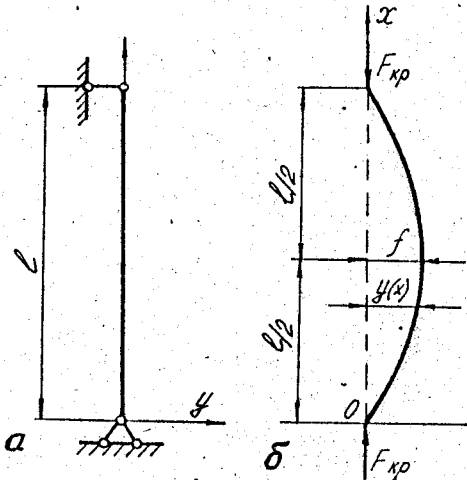


Рис.9.3. Схема до визначення критичної сили стиснутого стержня

Оскільки значення згинаючого момента  $M(x)$  /залежить від напрямку осі  $y$ / і значення другої похідної  $d^2 y/dx^2$  /залежить від напрямку кривизни  $1/\rho$ / завжди протилежні за знаком, незалежно від вибору напрямку осі  $y$ , то в правій частині рівняння /9.3/ поставлено знак "мінус".

Диференціальне рівняння /9.3/ можна записати у вигляді!

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0, /9.4/$$

де

$$k^2 = \frac{F_{кр}}{EJ_{\min}}. /9.5/$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx, \quad /9.6/$$

де  $C_1$  і  $C_2$  - сталі інтегрування.

Значення сталих  $C_1$  і  $C_2$  визначають із граничних умов. Якщо  $x = 0$ , то  $y(0) = 0$ . Щоб задовольнити цю умову, необхідно взяти  $C_1 = 0$ . Тоді формула /9.6/ набере вигляду

$$y(x) = C_2 \sin kx, \quad /9.7/$$

тобто пружна лінія стиснутого силою  $F_{кр}$  стержня має форму синусоїди.

Другу граничну умову отримаємо, враховуючи, що коли  $x = l$ , то  $y(l) = 0$ . Підставивши останнє в /9.7/, матимемо  $0 = C_2 \sin kl$ . Добуток  $C_2 \sin kl$  дорівнює нулю тоді, коли дорівнює нулю один із співмножників. Проте, якщо прирівняти до нуля сталу  $C_2$ , то дістанемо нульовий/тривіальний/ розв'язок. Тобто при  $C_2 = 0$  і  $y(x) = 0$  стержень перебуває в стійкій рівновазі, якщо відсутні будь-які відхилення від прямолінійної форми. Нам же необхідно знайти умову рівноваги викривленої форми стержня, а для цього візьмемо  $C_2 \neq 0$ . Тоді маємо

$$\sin kl = 0, \quad /9.8/$$

Найменше значення аргументу, яке задовольняє умову /9.8/, дістанемо, якщо  $kl = \pi$ . Враховуючи /9.5/, маємо

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad /9.9/$$

Ця формула вперше була отримана академіком Петербурзької Академії наук Леонардом Ейлером /1707-1783/ і тому названа формулою Ейлера.

Формулу /9.9/ використовують в розрахунках для шарнірно закріпленого двома кінцями стержня /рис.9.3,а/. Значення критичної сили за інших способів закріплення стержня визначають шляхом розв'язування диференціального рівняння /9.4/ з відповідними граничними умовами. Формула Ейлера, яка враховує спосіб закріплення кінців стиснутого стержня, має вигляд

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu_3 l)^2},$$

/9.10/

де  $\mu_3$  - коефіцієнт зведення довжини. Добуток  $\mu_3 l$  називають зведеною довжиною стержня і позначають  $l_{зв}$ .

На рис.9.4 наведено приклади стержнів з найхарактернішими способами закріплення кінців і відповідні їм значення коефіцієнтів  $\mu_3$ .

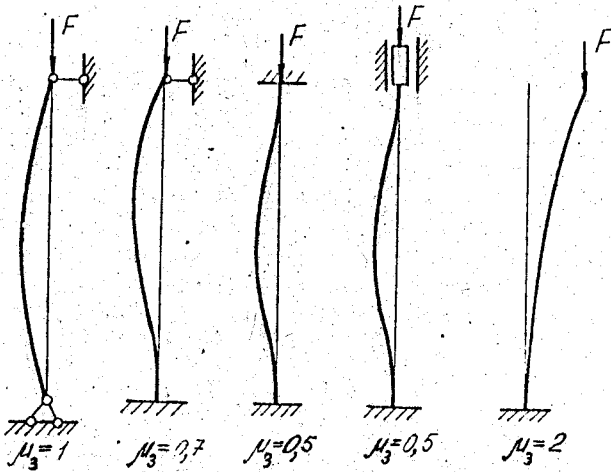


Рис.9.4. Значення коефіцієнта  $\mu_3$  при різних формах закріплення стержня

9.2. Критичні напруги. Розрахунок критичної сили при напругах, що перевищують границю пропорційності

Критичною напругою  $\sigma_{кр}$  називається напруга, яка виникає в поперечному перерізі  $A$  стержня під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu_3 l)^2 A}. \quad /9.11/$$

Враховуючи, що найменший радіус інерції поперечного перерізу стержня  $i_{min} = \sqrt{J_{min}/A}$ , маємо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{min})^2} \quad /9.12/$$

Введемо поняття гнучкості стержня  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad /9.13/$$

Гнучкість стержня - це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стержня і способу закріплення його кінців на здатність чинити опір втраті стійкості.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на підставі диференціального рівняння пружної лінії балки і закону Гука. Тому формулою /9.10/ можна користуватися тільки тоді, коли напруга не перевищує границі пропорційності  $\sigma_{пц}$ , тобто коли виконується умова  $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{пц}$ . Очевидно, що формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стержня більше від деякої величини  $\lambda_{зр}$ , що називається граничною гнучкістю. Підставивши в /9.12/ граничне значення критичної напруги  $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$ , дістанемо

$$\lambda_{зр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} \quad /9.14/$$

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосування формули Ейлера можна записати у вигляді

$$\lambda \geq \lambda_{зр} \quad /9.15/$$

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стержня і стала для даного матеріалу. Наприклад, для сталі 45  $\sigma_{пц} = 270$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, тоді згідно з /9.14/  $\lambda_{зр} = 85$ .  
В координатах  $\sigma_{кр} - \lambda$  залежність /9.12/ подана кривою /рис.9.5/, яка називається гіперболою Ейлера. При гнучкості  $\lambda < \lambda_{зр}$

значення  $\sigma_{кр}$ , обчислені за формулою /9.12/, різко зростають.

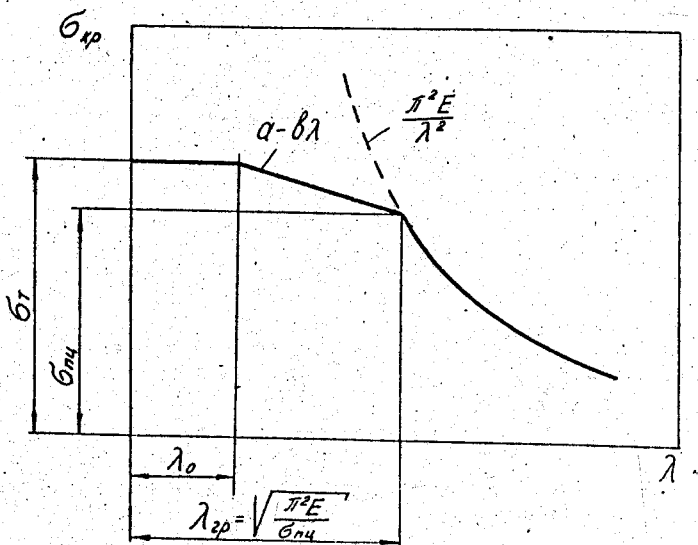


Рис.9.5. Залежність критичної напруги від гнучкості

Дійсні критичні напруги, як показали численні експериментальні дослідження, будуть значно меншими. Отже, підтверджується той факт, що для стержнів, гнучкість яких менша за  $\lambda_{2р}$ , формула Ейлера не застосовна. Тоді в розрахунках використовують формулу Ясинського

$$\sigma_{кр} = \alpha - \beta\lambda, \quad /9.16/$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  - коефіцієнти, які залежать від матеріалу. В табл.9.1 наведені значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$ , а також значення граничної гнучкості  $\lambda_{2р}$  для деяких матеріалів.

Таблиця 9.1

Матеріал	$\lambda_{cp}$	$\alpha$ , МПа	$\beta$ , МПа
Ст.2, Ст.3	100	310	1,14
Ст.5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремниста сталь	100	589	3,82
Дерево /сосна/	110	29,3	0,194
Чавун	80	776	12

Для чавуна користуються параболічною залежністю

$$\sigma_{кр} = \alpha - \beta\lambda + c\lambda^2, \quad /9.17/$$

де  $c = 0,053$ .

Залежність  $\sigma_{кр} - \lambda$ , згідно з формулою Ясинського, показана на рис.9.5 прямою лінією.

За деяких значень гнучкості  $\lambda_0$  величина  $\sigma_{кр}$ , що обчислюється за формулою Ясинського, досягає небезпечної для даного матеріалу напруги:  $\sigma_{кр} = \sigma_T$  для пластичних або  $\sigma_{кр} = \sigma_M$  для крихких матеріалів. Очевидно, що для стержнів, гнучкість яких менша за  $\lambda_0$ , розрахунок на стійкість замінюють розрахунком на міцність. Методика таких розрахунків розглянута в розд.2.

Отже, залежно від величини гнучкості  $\lambda$  стиснуті стержні розраховують так: при малих значеннях:  $\lambda (\lambda < \lambda_0)$  - на простий стиск; при середніх значеннях:  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{cp}$  - за формулою Ясинського, а при великих:  $(\lambda \geq \lambda_{cp})$  - за формулою Ейлера.

### 9.3. Практичні розрахунки на стійкість

Стиснуті стержні розраховують на стійкість за формулою /9.1/, якщо відоме значення коефіцієнта запаса стійкості  $S_{ст}$ . А оскільки під дією зовнішньої сили  $F$  стержень працює на центральний стиск, то умова стійкості в напругах матиме вигляд

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{ст}], \quad /9.18/$$

де  $[\sigma_{CT}]$  - допустима напруга на стійкість;

$$[\sigma_{CT}] = \frac{\sigma_{KP}}{[\sigma_{CT}]} \quad /9.19/$$

Допустима напруга при стиску  $[\sigma_c] = \sigma^0 / S$ .

Допустимі напруги на стійкість /9.19/ і допустимі напруги на міцність при стиску взаємно пов'язані:

$$\frac{[\sigma_{CT}]}{[\sigma_c]} = \frac{\sigma_{KP}}{[S]} \frac{S}{\sigma^0} = \varphi,$$

тоді

$$[\sigma_{CT}] = \varphi [\sigma_c]. \quad /9.20/$$

Тут  $\varphi$  - коефіцієнт поздовжнього згину. Цей коефіцієнт для кожного матеріалу можна обчислити за всіх значень гнучкості  $\lambda$  і подати у вигляді графіка або таблиці. Значення коефіцієнта  $\varphi$  для маловуглецевих сталей, чавуна і дерева наведено в табл.9.2.

Таблиця 9.2

Гнучкість $\lambda$	Коефіцієнт $\varphi$ для матеріалу			
	Ст.2, Ст.3, Ст.4	Ст.5	чавуну	дерева
1	2	3	4	5
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,07
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71

Закінчення табл. 9.2

1	2	3	4	5
70	0,91	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	0,25
120	0,45	0,36	-	0,22
130	0,40	0,33	-	0,18
140	0,36	0,29	-	0,16
150	0,32	0,26	-	0,14
160	0,29	0,24	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,10
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,16	-	0,09

Отже, після підстановки /9.20/ умова стійкості /9.18/ матиме вигляд

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma_c] \quad /9.21/$$

Використовуючи формулу /9.21/, відповідно до мети можна провести три види розрахунків на стійкість стиснутих стержнів:

- 1/ перевірений розрахунок, коли визначають напруги і порівнюють з допустимими на стійкість  $\sigma = F/A \leq \varphi[\sigma_c]$  або знаходять коефіцієнт запасу стійкості і порівнюють з допустимим  $S = F_c / F \geq [S_{cr}]$ ;
- 2/ визначення допустимого навантаження  $[F]: [F] = \frac{F_c}{\varphi[\sigma_c]}$  або  $[F] = F_{кр} / [S_{cr}]$ ;
- 3/ проектний розрахунок.

Пункти 1 та 2 виконуються без будь-яких утруднень.

Проектний розрахунок полягає у виборі площі  $A$  поперечного перерізу стержня під задане навантаження. Труднощі такого розрахунку пов'язані з тим, що в умову /9.21/ входять дві невідомі величини - площа перерізу  $A$  і коефіцієнт  $\varphi$ , який залежить від гнучкості  $\lambda$ , а, отже, і від розмірів поперечного перерізу.

Таким чином, підбір поперечного перерізу стержня зводиться до підбору коефіцієнта  $\varphi$ . Для цього в першому наближенні задаються значенням  $\varphi = 0,5 \dots 0,6$ , що відповідає гнучкості, наприклад, сталевому стержню  $\lambda = 100 \dots 111$  /див.табл.9.2/. За основною допустимою напругою  $[\sigma_c]$  згідно з /9.21/ і відповідно до взятого значення  $\varphi$  обчислюють значення площі перерізу стержня,  $A_1$ . Підібраний переріз перевіряють, визначаючи фактичне значення  $\varphi_1$ . Для цього, знаючи  $A_1$ , обчислюють радіус інерції  $i_{min}$ , після чого за /9.13/ розраховують гнучкість  $\lambda$  і за табл.9.2 -  $\varphi_1$ .

Порівнюють отримане значення  $\varphi_1$  з попередньо взятим  $\varphi$ . Якщо різниця між коефіцієнтами  $\varphi_1$  і  $\varphi$  більша за 5%, беруть нове значення коефіцієнта  $\varphi_2$  як середнє арифметичне значень  $\varphi_1$  та  $\varphi$ , тобто  $\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi) / 2$ .

Повторюють розрахунок при значенні  $\varphi_2$ , визначаючи за /9.2/ площу перерізу  $A_2$ . Внаслідок повторного наближення аналогічно знаходять коефіцієнт  $\varphi_2$ .

Отже, обчислення виконують доти, поки між двома значеннями коефіцієнтів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  не буде збігу у межах  $\pm 5\%$ . Як правило, підбираючи перерізи, необхідно провести не більше трьох наближень.

Приклад 9.1. Підібрати двотавровий поперечний переріз стержня довжиною 5 м, який стискається центральною силою  $F = 300$  кН. Обидва кінці стержня затиснуті. Матеріал - Ст.3. Основна допустима напруга  $[\sigma_c] = 160$  МПа.

Розв'язання. Поперечний переріз підбираємо шляхом послідовних наближень.

Перша спроба: беремо  $\varphi = 0,5$ ; необхідна площа поперечного перерізу

$$A = \frac{F}{\varphi[\sigma_c]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За сортаментом підбираємо двотавр № 24 а з площею  $A = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  і мінімальним радіусом інерції  $i_{\min} = i_y = 0,0263 \text{ м}$ . Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\min}} = \frac{\mu_n \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 5}{0,0263} = 95,1.$$

За табл.9.2 в разі лінійної інтерполяції

$$\varphi'_1 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 95,1 = 0,644 > \varphi_1 = 0,5.$$

Друга спроба: беремо  $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,644}{2} = 0,572$ .

Необхідна площа поперечного перерізу стержня

$$A = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma_c]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,572 \cdot 160 \cdot 10^2} = 32,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За сортаментом підбираємо двотавр № 22 а:  $A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$   
 $i_{\min} = 0,025 \text{ м}$ .

Тоді гнучкість стержня  $\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i_{\min}} = \frac{2,5}{0,025} = 100$ .

За табл.9.2  $\varphi'_2 = 0,60$ .

Третя спроба: беремо  $\varphi_3 = \frac{0,572 + 0,6}{2} = 0,586$ .

Необхідна площа

$$A = \frac{300 \cdot 10^3}{0,586 \cdot 160 \cdot 10^2} = 32 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

За сортаментом цієї площі відповідає двотавр № 22 а, у якого

$$A = 32,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad i_{\min} = 0,025 \text{ м}, \quad \lambda = 100, \quad \varphi = 0,6.$$

Визначимо напругу:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 32,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 152,4 \text{ МПа}.$$

Недовантаження становить

$$\frac{160 - 152,4}{160} \cdot 100 = 4,75\%.$$

Отже, остаточно беремо стержень із двотавра № 22 а.

## Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під критичною силою і критичною напругою тонких прямих стиснутих стержнів?
2. Запишіть формулу Ейлера. Як визначити межі використання цієї формули?
3. Що таке коефіцієнт зведення довжини стержня? Наведіть приклади стержнів з різним  $\mu_3$ .
4. Що таке гнучкість стержня?
5. Що таке коефіцієнт запасу стійкості та коефіцієнт поздовжнього згину?
6. Як проводиться розрахунок на стійкість стержнів за допомогою коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi$ ?

## 10. ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ В ОПОРІ МАТЕРІАЛІВ

В попередніх розділах під час розв'язування задач опору матеріалів ми мали справу тільки із статичним навантаженням. Проте часто при роботі машин зустрічаються навантаження, які спричинюють прискорення руху елементів конструкції. Такі умови роботи пов'язані, в основному, з дією сил інерції, ударним навантаженням та коливанням конструкції. Здатність конструкції чинити опір статичному і динамічному навантаженням, як правило, різна. Відомі випадки, коли споруди і механізми, розраховані із забезпеченням значного запасу міцності на статичне навантаження, руйнувалися під дією порівняно незначних змінних сил. Тому вміння розв'язувати задачі динаміки є дуже важливим під час розрахунків багатьох машин. Зазначимо, що більшість задач динаміки досить складна і в курсі опору матеріалів розв'язується з використанням багатьох додаткових припущень.

### 10.1. Розрахунки на міцність за наявності сил інерції

За прискореного руху в конструкціях виникають додаткові напруги, спричинені силами інерції. Як відомо, сила інерції матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно прискоренню. У розрахунках, пов'язаних з силами інерції, використовують відомий з теоретичної механіки принцип Даламбера: якщо до діючих на точку активних сил і реакцій зв'язків додати силу інерції, напрямлену в бік, протилежний прискоренню точки, то в кожен момент часу отримана система сил буде зрівноваженою, тому задачу динаміки розв'язують методами статички.

Розглянемо простий випадок динамічного навантаження, коли конструкція має сталі прискорення  $a$  — підіймання вантажу  $Q$  сталевим тросом з площею поперечного перерізу  $A$  /вагою троса знехтуємо/.

Визначимо нормальні напруги в будь-якому перерізі троса під час підіймання вантажу з прискоренням  $a$ . І без прискорення і порівняємо отримані результати.

В разі підіймання вантажу без прискорення /рис.10.1,а/ сила натягу троса  $N$  дорівнює за методом перерізу /рис.10.1,б/ вазі вантажу  $Q$ .

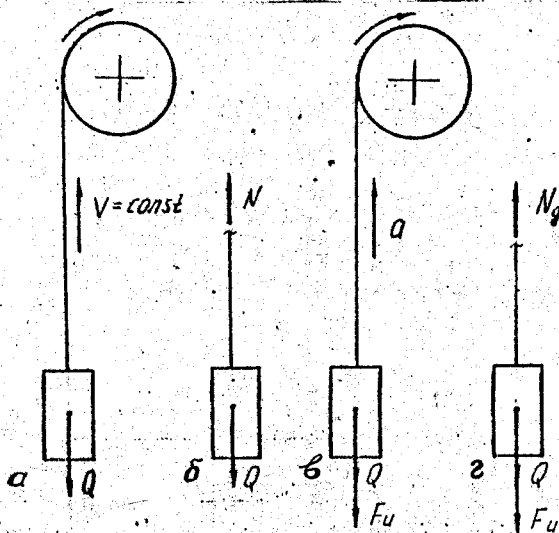


Рис.10.1. Приклад динамічних навантажень троса при русі вантажу без прискорення /а/ і з прискоренням /в/

Тоді нормальні статичні напруги у точках поперечного перерізу троса будуть

$$\sigma_{ст} = \frac{N}{A} = \frac{Q}{A} = \frac{mg}{A}, \quad /10.1/$$

де  $m$  — маса вантажу;  $g$  — прискорення вільного падіння.

В разі піднімання вантажу з прискоренням використовуємо принцип Даламбера і складемо зрівноважену систему сил /рис.10.1,в/. Розріжемо трос у довільному поперечному перерізі /рис.10.1,г/ і обчислимо динамічну нормальну силу в перерізі:  $N_g = Q + F_i$ , де  $F_i = ma$  - сила інерції.

Динамічні нормальні напруги в перерізі троса визначаються аналогічно /10.1/:

$$\sigma_g = \frac{N_g}{A} = \frac{mg + ma}{A} = \frac{mg}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad /10.2/$$

Порівнюючи формули /10.1/ та /10.2/, можна записати

$$\sigma_g = \sigma_{ст} \left(1 + \frac{a}{g}\right). \quad /10.3/$$

Отже, динамічна напруга дорівнює статичній, помноженій на коефіцієнт  $\left(1 + \frac{a}{g}\right)$ , який називається коефіцієнтом динамічності  $\kappa_g$  :

$$\sigma_g = \kappa \sigma_{ст}. \quad /10.4/$$

Умова міцності конструкцій при динамічних навантаженнях матиме вигляд

$$\sigma_g^{max} = \kappa \sigma_{ст}^{max} \leq [\sigma]. \quad /10.5/$$

Звідси випливає, що розрахунки на міцність за наявності сил інерції принципово не відрізняються від розрахунків при статичному навантаженні.

## 10.2. Розрахунки на удар

Під ударом розуміють такий вид взаємодії тіл, при якому за дуже короткий проміжок часу швидкості цих тіл змінюються на скінченну величину. У машинах ударні навантаження часто є наслідками конструктивних факторів /зазори у з'єднаннях деталей, передачах тощо/.

Внаслідок удару тіло отримує значні прискорення, що відповідно спричиняє значні сили інерції. Проте знайти ці сили за формулою  $F=ma$  неможливо, оскільки неможливо з достатньою точністю визначити час співударяння і відповідно прискорення  $a$ .

В основу розрахунків на дію ударного навантаження покладено закон збереження і перетворення енергії. В цьому разі вводиться ряд припущень.

1. При динамічних навантаженнях характеристики міцності ( $\sigma_{nc}$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_M$ ) залишаються такими, як і при статичних навантаженнях.

2. Під час удару виникають тільки пружні деформації, тобто після припинення дії ударного навантаження тіло повертає свої початкові форму і розміри.

3. Для ударного навантаження матеріалів справджується закон Гука.

4. Удар вважають абсолютно непружним, тобто тіло, що ударає, не відскакує після удару від пружної системи, а продовжує в процесі її деформації рухатися разом з нею.

5. Маса пружної системи, яка сприймає удар, мала порівняно з масою ударного тіла, і тому масою пружної системи можна нехтувати.

6. Робота ударного тіла повністю переходить у потенціальну енергію деформації елемента конструкції, який сприймає дію удару.

Ці припущення дають змогу застосовувати наближений метод визначення напруг і деформацій елемента конструкції під час удару і водночас забезпечують достатню точність розрахунків.

Виведення розрахункових формул для визначення динамічних напруг покажемо на прикладі ударного стиску. Нехай жорстке тіло вагою  $Q$ , деформацією якого нехтуємо, падаючи з висоти  $H$  /рис.10.2,а/ ударяється об стержень великої жорсткості ( $\lambda \ll \lambda_0$ ). Розглянемо спочатку деформацію стержня від статичної дії вантажу  $Q_0$  /рис.10.2,б/. Відповідно до закону Гука деформація стиску стержня становитиме

$$\Delta l_{ст} = \frac{Q}{c}, \quad /10.6/$$

де  $c = EF/l$  - жорсткість стержня при стиску /розтягу/.  
Потенціальна енергія деформації стержня

$$u_{ст} = \frac{1}{2} Q \Delta l_{ст}. \quad /10.7/$$

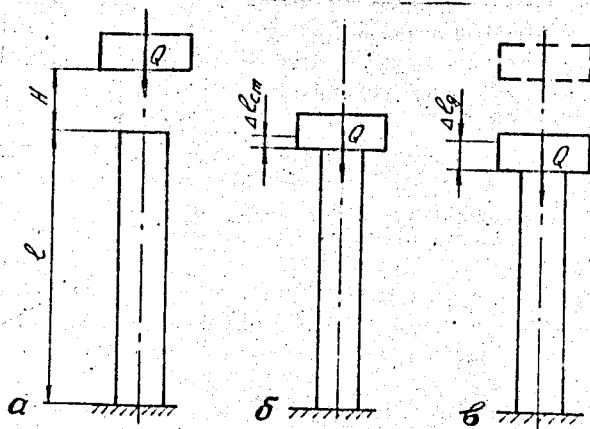


Рис.10.2. Динамічне навантаження в стержні при падінні на нього вантажу  $Q$

За вільного падіння вантажу  $Q$  з висоти  $H$  /рис.10.2,в/ навантаження на стержень збільшується і динамічна деформація буде більшою від статичної ( $\Delta l_d > \Delta l_{ст}$ ). Аналогічно з /10.4/ відношення динамічної деформації при ударі до статичної назвемо коефіцієнтом динамічності, тобто  $K_d = \Delta l_d / \Delta l_{ст}$ .

Тоді

$$\Delta l_d = K_d \Delta l_{ст} \quad /10.8/$$

Силу удару або динамічну силу позначимо  $F_d$ , тоді відповідно до зроблених припущень запишемо рівняння зв'язку між динамічною деформацією і силою:

$$\Delta l_d = \frac{F_d}{c} \quad /10.9/$$

Потенціальна енергія деформації стержня під час удару

$$u_g = \frac{1}{2} F_g \ell_g;$$

враховуючи /10.9/, маємо

$$u_g = \frac{c \Delta \ell_g^2}{2}. \quad /10.10/$$

Припустивши, що кінетична енергія  $K$  ударного тіла цілком переходить у потенціальну енергію деформації  $u_g$  пружного стержня, отримаємо

$$K = u_g. \quad /10.11/$$

Оскільки в момент максимальної деформації стержня падаюче тіло пройде шлях  $H + \Delta \ell_g$ , то кінетична енергія  $K$  дорівнюватиме потенціальній енергії тіла, що падає з висоти  $H + \Delta \ell_g$ , тобто

$$K = Q(H + \Delta \ell_g). \quad /10.12/$$

Після підстановки в /10.11/ формул /10.10/ і /10.12/ і враховуючи із /10.6/, що  $Q = c \Delta \ell_{ст}$ , маємо

$$\Delta \ell_{ст} (H + \Delta \ell_g) = \frac{\Delta \ell_g^2}{2}.$$

Розкриваємо дужки і переписуємо отримане співвідношення в формі квадратичного рівняння відносно невідомого  $\Delta \ell_g$ :

$$\Delta \ell_g^2 - 2 \Delta \ell_{ст} \Delta \ell_g - 2H \Delta \ell_{ст} = 0.$$

Розв'язок цього рівняння матиме вигляд

$$\Delta \ell_g = \Delta \ell_{ст} \pm \sqrt{\Delta \ell_{ст}^2 + 2H \Delta \ell_{ст}}.$$

Знак "мінус" у цій формулі не має фізичного змісту. Дійсно, оскільки  $H > 0$ , то квадратний корінь двочлена  $\sqrt{\Delta \ell_{ст}^2 + 2H \Delta \ell_{ст}}$

буде більшим від  $\Delta \ell_{ст}$ , що при знакові "мінус" приведе до результату  $\Delta \ell_g < 0$ .

Залишивши перед радикалом знак "плюс", дістанемо:

$$\Delta \ell_g = \Delta \ell_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta \ell_{ст}}} \right)$$

Якщо порівняти отриману формулу з /10.8/, то очевидно, що вираз в квадратних дужках є коефіцієнтом динамічності при ударі:

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta \ell_{ст}}} \quad /10.13/$$

Враховуючи, що  $v^2 = 2gH$ , де  $v$  - швидкість падаючого тіла в момент, що передує удару, динамічний коефіцієнт може бути визначений також за формулою

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \Delta \ell_{ст}}} \quad /10.14/$$

Домножимо частку  $2H / \Delta \ell_{ст}$  у формулі /10.13/ на  $Q$  і перетворимо у вигляді

$$\frac{2H}{\Delta \ell_{ст}} = \frac{QH}{\frac{1}{2} Q \Delta \ell_{ст}} = \frac{K_0}{u_{ст}}$$

Тут  $K = QH$  - кінетична енергія падаючого тіла в момент перед ударом;  $u_{ст}$  - потенціальна енергія деформації стержня від статичної дії вантажу  $Q$ . Тоді формула /10.13/ для визначення коефіцієнта динамічності може бути зведена до вигляду

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{u_{ст}}} \quad /10.15/$$

Оскільки напруги і зусилля за законом Гука пропорційні деформаціям, то

$$\sigma_g = K_g \sigma_{ст} \quad /10.16/$$

$$F_g = K_g Q \quad /10.17/$$

Зауважимо, що коефіцієнти динамічності в формулах /10.16/ і /10.17/ можуть бути визначені за формулами /10.13/, /10.14/ або /10.15/.

Відповідно взятим припущенням, границя текучості  $\sigma_T$  при динамічних навантаженнях залишається такою самою, як і при статичних. А, отже, допустимі напруги при ударних навантаженнях

$$[\sigma_g] = \frac{\sigma_T}{S_g} \quad /10.18/$$

Тут  $S_g$  - коефіцієнт запасу міцності при ударному навантаженні. Для пластичних матеріалів беруть  $S_g = 2$  /тоді як для статичних навантажень  $S = 1,4 \dots 1,6$ /. Тоді умова міцності при ударному навантаженні конструкцій із пластичних матеріалів

$$\sigma_g^{\max} = K_g \sigma_{ст}^{\max} \leq [\sigma_g] = \frac{\sigma_T}{2} \quad /10.19/$$

Як випливає із формул /10.13/ або /10.14/, при зменшенні жорсткості пружних систем /тобто при збільшенні деформації  $\Delta l_{ст}$  /, коефіцієнт динамічності, а відповідно, і динамічні навантаження і напруги, також будуть зменшуватись. Враховуючи це, для пом'якшення ударів у техніці широко використовують амортизатори, пружини, ресори та інші пружні елементи, яким властива значна піддатливість.

Визначення динамічного коефіцієнта через  $K_0$  і  $\Delta l_{ст}$  дає змогу використовувати формулу /10.15/ для розрахунків зіткнення тіл, при ударі горизонтально або довільно рухомого тіла об пружну систему тощо. Отже, отримані формули /10.7/, /10.16/, /10.17/ і /10.19/ можуть бути загальними формулами в розрахунках на удар. Причому їх можна використовувати також і в розрахунках на удар стержнів, що працюють на кручення або згин.

Приклад 10.1. Визначити динамічні напруги, що виникають у стержнях підвіски /рис.10.3/ і перевірити стержні на міцність, якщо вантаж  $Q = 300$  Н падає з висоти  $H = 0,1$  м. Матеріал стержнів - сталь 45,  $\sigma_T = 360$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Діаметр стержнів  $d = 5$  мм, довжина кожного стержня  $l = 2$  м.

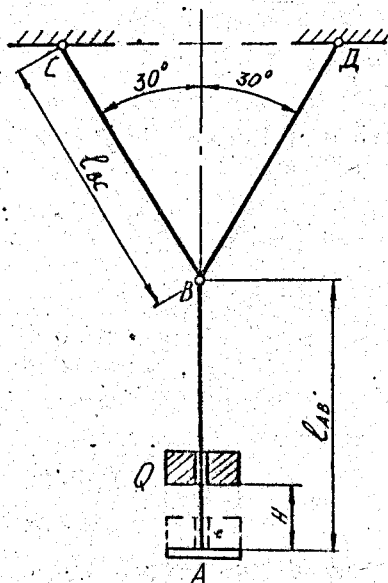


Рис.10.3 Динамічний розтяг стержня

Розв'язання. Динамічна напруга в стержнях визначається за формулою

$$\sigma_g = \kappa \sigma_{г\text{ст}},$$

де

$$\sigma_{г\text{ст}}^{AB} = \frac{Q}{A} = \frac{Q \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{300 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,005^2 \cdot 10^6} = 15,3 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{ст}^{BC} = \sigma_{ст}^{BD} = \frac{Q}{2A \cos 30^\circ} = \frac{300}{2 \cdot 19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,866 \cdot 10^3} = 8,8 \text{ МПа},$$

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\sigma_{ст}}},$$

$$\sigma_{ст} = \sigma_{ст}^{AB} + \sigma_{ст}^{BC} = \frac{Q \ell_{AB}}{EA} + \frac{1}{2} \frac{Q \ell_{BC}}{EA \cos^2 30^\circ} =$$

$$= \frac{300 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 19,6 \cdot 10^{-6}} + \frac{150 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,75} = 2,55 \cdot 10^{-4} \text{ М},$$

$$K_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{2,55 \cdot 10^{-4}}} = 9,9.$$

Напруги в стержнях

$$(\sigma_g)_{AB} = K_g \sigma_{ст}^{AB} = 9,9 \cdot 15,3 = 151,5 \text{ МПа},$$

$$(\sigma_g)_{BC} = (\sigma_g)_{BD} = K_g \sigma_{ст}^{BC} = 9,9 \cdot 8,8 = 87,1 \text{ МПа}.$$

Отже, найбільша напруга буде в стержні АВ. Використовуючи умову міцності, маємо

$$\sigma_g^{\max} = 151,5 \text{ МПа} < [\sigma_g] = 180 \text{ МПа},$$

де

$$[\sigma_g] = \frac{\sigma_r}{S_g} = \frac{360}{2} = 180 \text{ МПа}.$$

Таким чином, умова міцності задовольняється.

Запитання для самоперевірки

1. Які навантаження називають статичними, а які динамічними? Як записується умова міцності за наявності сил інерції?

2. Що таке коефіцієнт динамічності? Як визначається коефіцієнт динамічності при ударі? Яка характеристика деталі конструкції впливає на його значення?

3. Вивести формулу для знаходження коефіцієнта динамічності при ударі у випадку, коли масою системи можна знехтувати.

4. Як визначити напруги і деформації при ударі?

## II. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ЗМІННИХ НАПРУГАХ

### II.1. Відомості про втому матеріалів

Значна кількість деталей машин працює в таких умовах, коли напруги, які виникають у них, періодично змінюються за значенням або за значенням і знаком. Опір конструкції дії навантажень в цьому разі істотно відрізняється від їх опору дії статичного або ударного навантаження. Від тривалої дії змінних напруг деталей може зруйнуватися навіть тоді, коли максимальні робочі напруги значно менші за границі текучості.

До деталей, які зазнають змінних навантажень, належать штоки поршневих машин, обертові осі, вали, зуби зубчастих коліс тощо.

Давно відомо, що деталі машин під дією змінних навантажень, які повторюються багато разів, можуть раптово зруйнуватися. Вважають, що 80-90% всіх випадків поломок деталей на практиці настає внаслідок дії повторно-змінних навантажень. Особливим при змінному навантаженні є також характер поверхні руйнування, який схематично показано на рис. II.1. Ця поверхня, як правило, має дві ділянки: одну гладеньку *A*,

другу - жорстку, грубозернисту *B*. Причому деталі із пластичних матеріалів, у яких досить великі значення залишкового відносного видовження і звуження, а також ударної в'язкості, руйнуються без помітних залишкових деформацій, ніби вони виготовлені із крихких матеріалів.

Руйнування деталей за змінних навантажень розпочали вивчати як явище в першій половині XIX ст. На той час не було ясних уявлень про будову металів, їх структуру. А оскільки поломки відбувалися після значного пе-

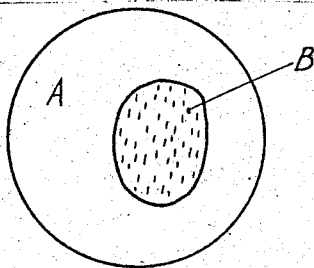


Рис. II.1. Характер поверхні руйнування при втомі

рiоду роботи машини; то природу такого руйнування спочатку пояснювали зміною структури металу. Вважали, що матеріал з часом втрачає свої пластичні властивості, тобто втомлюється від змінного навантаження. Тому руйнування матеріалу, спричинене багаторазовою дією змінних напруг, вважали зумовленим його втомою, а здатність матеріалів протистояти втомленості було названо опором втомі.

Проведені на початку ХХ ст. дослідження структури металів показали, що вона залишається незмінною, а, отже, наведена гіпотеза помилкова. Сучасна природа втоми пояснюється особливостями кристалічної будови металу, який складається із безлічі зерен-кристалітів, що мають анізотропні фізичні і механічні властивості. Важливу роль відіграють також сліди механічної обробки, пошкодження поверхні деталі і конструктивні концентратори напруг. Тому, при тривалій дії повторно-змінних навантажень в окремих небезпечних точках зароджуються мікротріщини. В стані пружної змінної деформації стінки мікротріщин притираються, а самі мікротріщини збільшуються в розмірах і об'єднуються, утворюючи відполіровану ділянку  $A$  рис.11.1. Утворена тріщина послаблює поперечний переріз деталі і стає надрізом, біля дна якого виникає об'ємний напружений стан, що зумовлює крихкий характер руйнування. В ослабленому перерізі при випадковому перевантаженні або ударі відбувається раптове зруйнування відривом на ділянці /рис.11.1/.

## 11.2. Характеристики циклів змінних напруг

Зміна значення напруг у деталях машин може відбуватися внаслідок зміни навантаження або положення деталі під дією постійного навантаження. Взагалі змінні навантаження і спричинені ними напруги можуть з часом змінюватися по-різному і мати як сталий /стаціонарний/, так і не сталий /нестационарний/ режим. В даній роботі розглянемо тільки сталі режими, кожний новий цикл яких є точним повторенням попереднього. За не сталим режимом характер напруг і їх максимальні значення змінюються від циклу до циклу.

Циклом напруг називають сукупність усіх значень напруг  $\sigma$  /або  $\tau$ \*/ за час одного періоду  $t_n$ .

Цикли напруг зображають графіками, на яких по осі абсцис відкладають час  $t$ , а по осі ординат - змінні напруги  $\sigma$  або  $\tau$ . Здебільшого в інженерній практиці період  $t_n$  повторно-змінних навантажень - це величина стала, а закон зміни напруг описується синусоїдою /рис.11.2/. Для характеристики циклу змінних напруг введено ряд параметрів.

\* У цьому розділі розглянуті в основному нормальні напруги  $\sigma$ . Для дотичних напруг  $\tau$  використовують аналогічні виведення, формули і методи розрахунків.

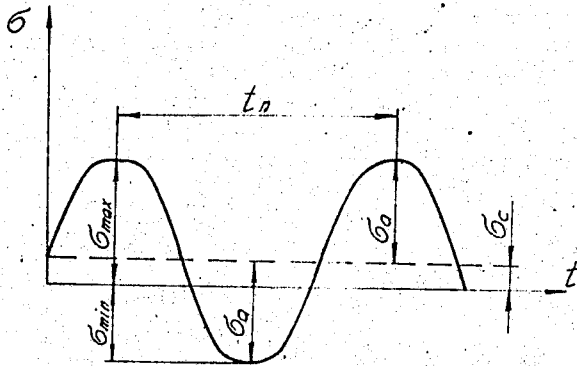


Рис. 11.2. Графік циклу напруг

Найбільша, з врахуванням знака, напруга циклу - максимальна напруга  $\sigma_{max}$ .

Найменша, з врахуванням знака, напруга циклу - мінімальна напруга  $\sigma_{min}$ .

Півсума максимальної  $\sigma_{max}$  і мінімальної  $\sigma_{min}$  напруг циклу називається середньою напругою і позначається  $\sigma_c$ . Середня напруга називається ще статичною складовою циклу і може бути як додатною, так і від'ємною величиною:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad /11.1/$$

Піврізниця максимальної  $\sigma_{max}$  і мінімальної  $\sigma_{min}$  напруг, взята за абсолютною величиною, називається амплітудою циклу  $\sigma_a$ :

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| \quad /11.2/$$

Відношення мінімальної  $\sigma_{min}$  до максимальної  $\sigma_{max}$  напруги циклу називається коефіцієнтом асиметрії циклу

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad /11.3/$$

Коефіцієнт асиметрії циклу при різних повторно-змінних навантаженнях може змінюватися від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Цикли, які мають однаковий коефіцієнт асиметрії, називаються подібними. З наведених формул і рис.11.2 випливає, що

$$\sigma_{max} = \sigma_c + \sigma_a; \quad \sigma_{min} = \sigma_c - \sigma_a \quad /11.4/$$

Коли  $\sigma_{max}$  і  $\sigma_{min}$  однакові за абсолютною величиною, тобто коли  $\sigma_{max} = \sigma$  і  $\sigma_{min} = -\sigma$ , то маємо симетричний цикл напруг /рис.11.3,а/. В цьому разі  $\sigma_c = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma$ ,  $r = -1$ . Симетричний цикл - найбільш небезпечний цикл повторно-змінного навантаження. Такий цикл напруг мають вали, осі тощо.

Цикл напруг, графік якого показано на рис.11.2, називається асиметричним.

На рис.11.3,б зображено віднульовий цикл зміни напруг. За таким циклом працюють, наприклад, зуб'я зубчастих коліс при нереверсивному навантаженні. Для віднульового циклу

$$\sigma_{min} = 0, \quad \sigma_{max} = \sigma, \quad \sigma_c = \sigma_a = \sigma/2, \quad r = 0.$$

Сталу, або статичну, напругу /рис.11.3,в/ можна подати також як окремий випадок змінної напруги з параметрами

$$\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_c = \sigma, \quad \sigma_a = 0, \quad r = 1.$$

### 11.3. Границя витривалості матеріалів при симетричному циклі навантаження

Здатність матеріалів чинити опір руйнуванню при повторно-змінних напругах називається витривалістю. Очевидно, що витривалість деталей залежить від механічних характеристик матеріалу, характеру циклу напруг тощо. Механічні характеристики витривалості встановлюють під час випробовування зразків на спеціальних машинах. Найпоширеніші - випробування на згин при симетричному циклі навантаження.

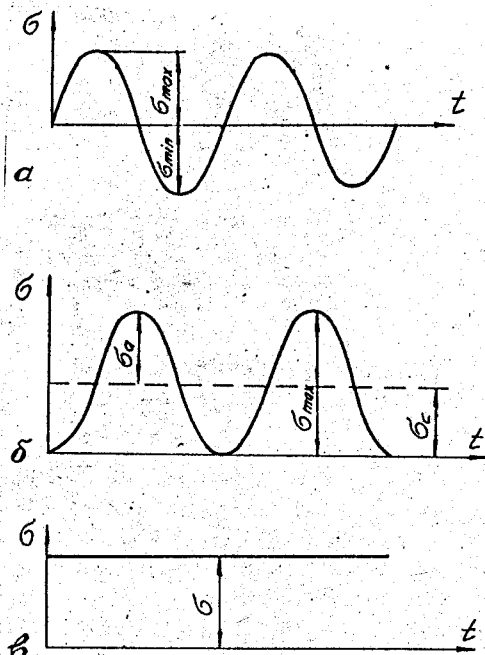


Рис.11.3. Цикли напруг: а - симетричний; б - відмульвий;  
в - статичне навантаження

Для випробування на витривалість виготовляють серію із 10...15 однакових, ретельно відполірованих циліндричних зразків з діаметром робочої частини 5...10 мм. Випробування виконують у такій послідовності. Перший зразок навантажують до значної напруги  $\sigma_{(1)}$ , щоб він зруйнувався за порівняно невеликого числа циклів  $N_1$ . Другий зразок випробовують за меншою напругою  $\sigma_{(2)}$ , тому руйнування настає в разі більшого числа циклів  $N_2$ . Потім поступово, зменшуючи напругу, випробовують решту зразків, які руйнуються, відповідно за зростаючого числа циклів  $N$ . За результатами проб будують криву втоми - криву Вюлера, показану на рис.11.4, на якій є ділянка  $CD$ , що наближається до

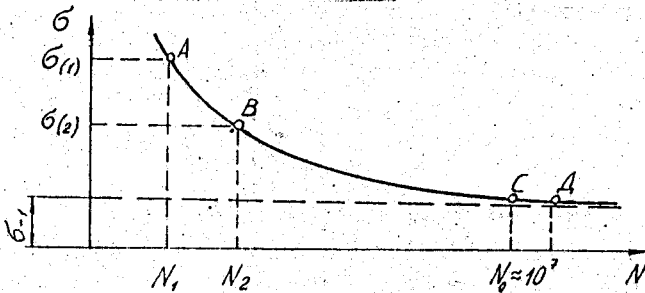


Рис. 11.4. Крива Вюлера

горизонтальної асимптоти. Це означає, що за певної напруги  $\sigma_{-1}$  зразок, не руйнуючись, може витримати нескінченно велику кількість циклів. Ордината цієї асимптоти дає значення границі витривалості.

Границею витривалості  $\sigma_{-1}$  називається максимальне значення періодично-змінної напруги, за якого матеріал може необмежено довго чинити опір руйнуванню.

Практика показує, що сталевий зразок, який витримав  $N_0 = 10^7$  циклів /це число називається базою випробувань/, може витримати і необмежене число циклів. Для кольорових металів границю витривалості визначають, як правило, при базі випробувань  $N_0 = 10^7 \dots 10^8$ .

Границя витривалості значною мірою залежить також від виду деформації. Випробовування на витривалість проти розтягу стиску і кручення проводять рідше, оскільки вони вимагають складнішого обладнання, ніж у разі згину. Тому границі витривалості проти розтягу  $\sigma_{-1}$  і кручення  $\tau_{-1}$  визначають з емпіричних формул за відомою границею витривалості  $\sigma_{-1}$  при симетричному циклі згину:

$$\text{для сталей } \sigma_{-1}^0 = 0,7 \sigma_{-1}; \quad \tau_{-1} = 0,55 \sigma_{-1};$$

$$\text{для чавуну } \sigma_{-1}^0 = 0,65 \sigma_{-1}; \quad \tau_{-1} = 0,8 \sigma_{-1}.$$

Для багатьох матеріалів границі витривалості визначені і наводяться у довідниках.

Коли немає дослідних даних, границі витривалості для симетричного циклу можна обчислити за допомогою характеристик статичної міцності за такими наближеними емпіричними співвідношеннями:

для вуглецевих сталей  $\sigma_{-1} = 0,4 \sigma_M$ ;  $\sigma_{-1}^0 = 0,28 \sigma_M$ ;  $\tau_{-1} = 0,22 \sigma_M$ ;  
 для кольорових металів  $\sigma_{-1} = (0,25 \dots 0,50) \sigma_M$ .

#### 11.4. Границя витривалості матеріалів при несиметричному циклі навантаження

Для визначення опору матеріалів дії змінних напруг з різною асиметрією циклу будуть діаграми граничних напруг. Найпоширенішими є діаграма Сміта /в координатах  $\sigma_{max}(\sigma_{min}) - \sigma_c$  / і діаграма Хей /в координатах  $\sigma_a - \sigma_c$  /.

Розглянемо побудову діаграми Хей як простішої /рис. 11.5/.

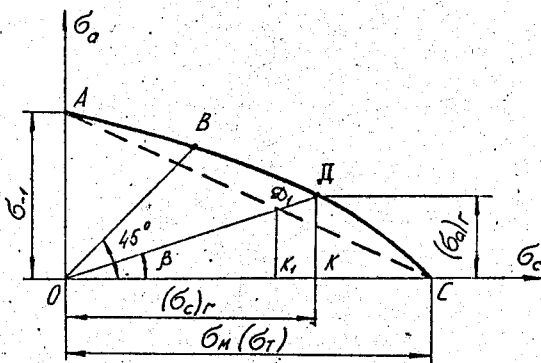


Рис. 11.5. До побудови діаграми Хей

Згідно з зазначеними координатами на осі абсцис діаграми Хей в певному масштабі відкладають значення середньої напруги  $\sigma_c$ , а на осі ординат - значення амплітуди циклу  $\sigma_a$ . Крива  $ABC$  будується на основі експериментів щодо визначення границі витривалості при симетричному циклі ( $\sigma_a = \sigma_{-1}$ ;  $\sigma_c = 0$ ) - точка  $A$ , віднульовому циклі /  $\sigma = 0$ ;  $\beta = 45^\circ$  / - точка  $B$  і статичному навантаженні ( $\sigma_a = 0$ ,  $\sigma_c = \sigma_M$  або  $\sigma_T$ ) - точка  $C$ .

На цій діаграмі пряма, проведена через початок координат під деяким кутом  $\beta$ , характеризує цикли з однаковою асиметрією, оскільки

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(\sigma_a)_r}{(\sigma_c)_r} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{\frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})} = \frac{1-r}{1+r} \quad /11.5/$$

Отже, при сталому  $\beta$  буде сталим і коефіцієнт асиметрії  $r$ .

Для визначення з допомогою діаграми Хейа границі витривалості  $\sigma_r$ , за будь-якого значення коефіцієнта асиметрії  $r$  необхідно з початку координат під кутом  $\beta$ , визначеним за допомогою /11.5/, провести до осі абсцис пряму  $OD$ . Координати точки перетину прямої  $OD$  з кривою  $ABC$  визначають основні характеристики циклу. Так, відрізок  $OK$  становить у вибраному масштабі середню напругу  $(\sigma_c)_r$  циклу з коефіцієнтом асиметрії  $r$ , а відрізок  $KD$  - амплітудне значення циклу  $(\sigma_a)_r$  з тією ж характеристикою.

Границя витривалості для заданого коефіцієнта  $r$  може бути визначена як максимальна напруга циклу за формулою

$$\sigma_r = \sigma_{\max} = (\sigma_a)_r + (\sigma_c)_r \quad /11.6/$$

На основі численних експериментів виявлено, що отримана крива  $AC$  може бути замінена прямою  $AC$  /рис.11.6/. Робоча зона в цьому разі деякою мірою скорочується, що дає похибку в запас міцності.

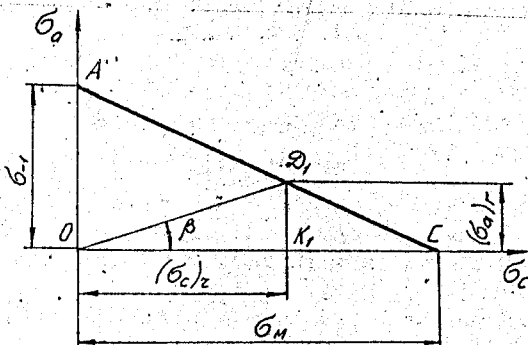


Рис. 11.6. Схематизована діаграма Хейа

Заміна кривої  $AC$  діаграми на пряму  $AC$  називається схематизацією Серенсена - Кінасоввілі. Для побудови схематизованої діаграми достатньо знати границю витривалості при симетричному циклі  $\sigma_{-1}$  і границю міцності  $\sigma_M$  або текучості  $\sigma_T$ . За схематизованою діаграмою Хей /рис.11.6/ із подібності трикутників  $OAC$  і  $K_1D_1C$  можна отримати аналітичну формулу для визначення границі витривалості асиметричного циклу:

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_{+1}\sigma_{-1}}{(1-r)\sigma_{+1} + (1+r)\sigma_{-1}}, \quad /11.7/$$

де  $\sigma_{+1}$  - небезпечні напруження: для крихких матеріалів  $\sigma_{+1} = \sigma_M$ , для пластичних  $\sigma_{+1} = \sigma_T$ .

При виведенні формули /11.7/ враховано, що  $\sigma_{max} = \sigma_r$ , тоді із /11.2/ і /11.3/ витікає:

$$(\sigma_a)_r = 0,5\sigma_r(1-r), \quad (\sigma_c)_r = 0,5\sigma_r(1+r).$$

#### 11.5. Фактори, що зменшують границю витривалості матеріалів

Як було викладено, границя витривалості матеріалу визначалася випробуванням спеціальних еталонних зразків. Ця границя витривалості позначається  $\sigma_r$ , на відміну від границі витривалості деталей  $(\sigma_r)_d$ , виготовлених із того ж матеріалу.

З дослідів встановлено, що крім характеристики циклу, на границю витривалості деталей впливають різні технологічні і конструктивні особливості. До головних з них слід віднести концентрацію напруг, масштабний фактор і стан поверхні деталі.

1. Вплив концентрації напруг. Різкі зміни форми або площі поперечного перерізу деталей /рис.11.7/ призводять до нерівномірного розподілу напруг, спричиняють концентрацію напруг. Причина, яка зумовлює концентрацію напруг /отвір, виточка, галтель тощо/ називається концентратором напруг.

Розглянемо сталеву штабу, яку розтягує сила  $F$  /рис.11.8/. У поперечному перерізі  $A$  штаби діє поздовжня сила  $N = F$ . Нормальна напруга за відсутності концентратора  $\sigma = N/A$ .

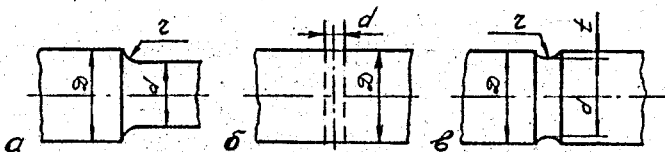


Рис.11.7. Приклади концентраторів напруги

Для компенсації послаблення перерізу за рахунок отвору збільшимо ширину штаби, як показано на рис.11.8, щоб площа поперечного перерізу, проведеного через вісь отвору, дорівнювала  $A$ . В цьому разі характер розподілу напруг зміниться. Така зміна має місцевий характер, оскільки з віддаленням від концентратора як уздовж деталі, так і поперек її, напруги дуже швидко спадають, наближаючись до своїх номінальних значень.

Кількісно концентрацію напруг характеризує теоретичний коефіцієнт напруг  $\alpha_\sigma$ , який дорівнює відношенню найбільшої місцевої напруги біля концентратора напруг  $\sigma_{max}$  до номінальної напруги  $\sigma$ , тобто

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}$$

/11.8/

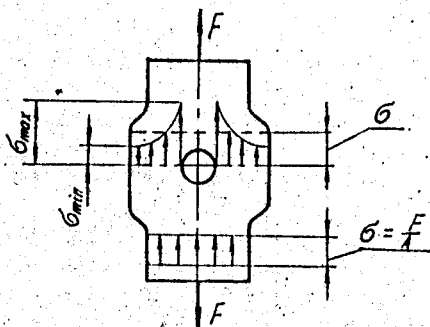


Рис.11.8. Розподіл напруги в зоні концентратора

Теоретичні коефіцієнти концентрації напруг визначають методами теорії пружності. Вони істотно залежать від виду і розмірів концентратора. Докладні відомості про теоретичні коефіцієнти концентрації напруг наведено в довідниках про розрахунки на міцність.

Концентрація напруг по-різному впливає на міцність пластичних і крихких матеріалів. Велике значення в цьому разі має і характер навантаження. Так, при статичному навантаженні пластичні матеріали малочутливі до концентрації напруг, оскільки, якщо збільшуються навантаження, зростання найбільших місцевих напруг припиняється при досягненні границі текучості внаслідок місцевої текучості матеріалу. У крихких матеріалів ділянки текучості відсутні і нерівномірність розподілу напруг внаслідок їх концентрації зберігається на всіх стадіях навантаження. Тому в розрахунках на міцність деталей з крихких матеріалів концентрацію напруг необхідно враховувати.

В разі повторно змінних навантажень напруги значно менші за границі текучості і в процесі навантаження не встигають вирівнюватись в зоні з  $\sigma_{max}$ , тому в даному випадку концентрацію напруг потрібно враховувати як для крихких, так і для пластичних матеріалів.

Теоретичний коефіцієнт концентрації  $\alpha_\sigma$  показує характер розподілу напруг для ідеально пружного матеріалу. Дійсну ж оцінку впливу концентратора при змінних навантаженнях можна дістати, порівнявши границі витривалості, визначені з дослідів над гладенькими зразками ( $\sigma_{-1}$ ) і над зразками з досліджуванним концентратором ( $\sigma_{-1d}$ ) за симетричного циклу. Відношення цих величин називають ефективним коефіцієнтом концентрації напруг  $K_\sigma$  або  $K_T$ :

$$K_\sigma = \sigma_{-1} / (\sigma_{-1d}) \quad /11.9/$$

Ефективні коефіцієнти концентрації напруг  $K_\sigma$  менші за  $\alpha_\sigma$ . Кількісно цю різницю характеризує коефіцієнт чутливості матеріалу до концентрації напруг:

$$q_\sigma = (K_\sigma - 1) / (\alpha_\sigma - 1) \quad /11.10/$$

Знаючи коефіцієнти чутливості  $q_\sigma$ , для яких у довідниках наведено відповідні графіки /рис.11.9/, можна за коефіцієнтом  $\alpha_\sigma$  визначити величину  $K_\sigma$ :

$$K_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1) \quad /11.11/$$

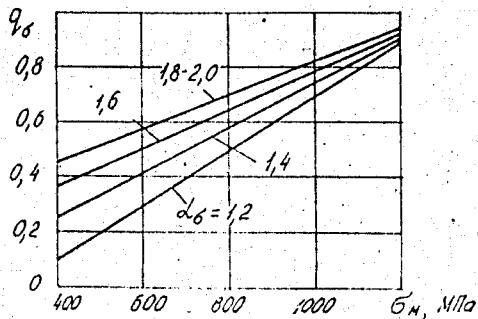


Рис.11.9. Залежність коефіцієнта чутливості матеріалу від теоретичного коефіцієнта, концентрації і границі міцності матеріалу

Значення коефіцієнтів  $\kappa_{\sigma}$  для різних видів концентраторів напруг, в тому числі границі міцності матеріалу  $\sigma_M$ , подано в довідниках як графіки. Такі графіки для стержня з концентратором у вигляді ступінчастого переходу /рис.11.7,а/ з відношенням  $D/d=2$  при  $d=30..50$  мм показано на рис.11.10 /повторно-змінний згин/, рис.11.11 /повторно-змінне кручення/, рис.11.12/ розтяг стиск/.

Зазначимо, що величина впливу концентрації на границю витривалості залежить від виду напруженого стану. Наприклад, при циклічному крученні ефективні коефіцієнти концентрації менші, ніж при згині /рис.11.10 і 11.11/. Співвідношення між коефіцієнтами  $\kappa_{\sigma}$  і  $\kappa_{\tau}$  - при згині і крученні /рис.11.10 і 11.11/ можна виразити наближеною формулою

$$\kappa_{\tau} = 1 + 0,6(\kappa_{\sigma} - 1). \quad /11.12/$$

Значення ефективного коефіцієнта концентрації при розтягу-стиску, як правило, дорівнює коефіцієнту концентрації при згині або трохи більша від нього.

Очевидно, що за відсутності необхідних графіків, значення коефіцієнта  $\kappa_{\sigma}$  можна визначити за формулою /11.11/, якщо відомі  $\alpha_{\sigma}$  /табл.11.1/ і /рис.11.9/, а також за допомогою інших графічних побудов і емпіричних співвідношень, наведених в довідниках і підручниках.

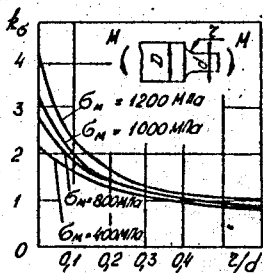


Рис. 11.10. Повторно-змінний згин

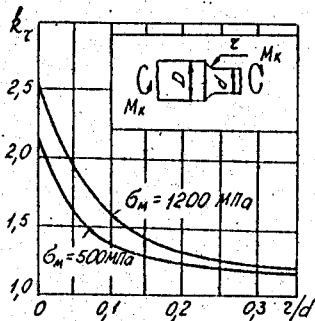


Рис. 11.11. Повторно-змінне кручення

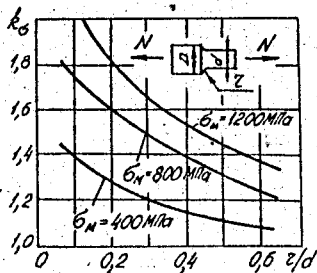


Рис. 11.12. Повторно-змінний розтяг-стиск

поверхні буде розміщено шар металу з більш високим середнім значенням максимальних напруг. Вплив розмірів деталі на границю витривалості враховують масштабним коефіцієнтом  $\epsilon_\sigma$ .

2. Вплив розмірів /масштабний фактор/. З дослідів встановлено, що границя витривалості залежить від абсолютних розмірів поперечного перерізу зразка: із збільшенням розмірів границя витривалості зменшується. Ця закономірність дістала назву масштабного фактора. Вона пояснюється тим, що із збільшенням об'єму матеріалу збільшується ймовірність неоднорідності його структури, а це призводить до виникнення осередків концентрації напруг. Крім того, при збільшенні розмірів деталі у випадку неоднорідного напруженого стану /згин, кручення/ в поперечних перерізах зменшується градієнт напруг. Отже, поблизу

Масштабним коефіцієнтом  $\epsilon_{\sigma}$  називають відношення границі витривалості деталі розміром  $d$  до границі витривалості еталонного зразка схожої форми, який має стандартні розміри  $d = 7...10$  мм:

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}}$$

/11.13/

Масштабний коефіцієнт визначають за допомогою графіків, поданих у довідковій літературі. На рис. 11.13 показано один з таких

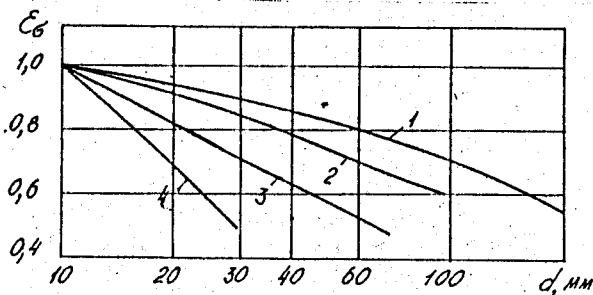


Рис. 11.13. Графік для визначення масштабного коефіцієнта залежно від наявності концентраторів напруг

графіків, де вісь абсцис - це логарифмічна шкала розмірів поперечного перерізу  $d$ , а вісь ординат - масштабний коефіцієнт  $\epsilon_{\sigma}$ . Тут крива 1 відповідає деталям із вуглецевої сталі без концентрації напруг; крива 2 - деталям із легованої сталі /  $\sigma_M = 1000...1200$  МПа/ без концентрації напруг і вуглецевої сталі з помірною концентрацією напруг; крива 3 - деталям із легованої сталі за наявності концентрації напруг; крива 4 - будь-яка сталь при особливо сильних концентраторах типу нарізки.

Отже, збільшення характеристик міцності і наявності концентраторів посилює вплив масштабного фактора на границю витривалості. Особливо сильно це виявляється у неоднорідних металів. Так, у сірого чавуну збільшення розмірів з 5...10 мм до 50 мм може призвести до зменшення  $\sigma_M$  і  $\sigma_{-1}$  на 60 - 70%. Для вуглецевих сталей при діаметрах до 25 мм зменшення границі витривалості не перебільшує 5% і його можна не враховувати.

З: Вплив стану поверхні. Здебільшого шар металу поблизу поверхні деталі за дії циклічних навантажень буває найбільше напруженим /згин, кручення тощо/. Тому жорсткість і стан поверхні деталей помітно впливають на границю витривалості. Експериментально встановлено, що із збільшенням жорсткості поверхні, а також в разі її корозії границя витривалості знижується. Це пояснюється тим, що після виготовлення деталі на її поверхні є риски, подряпини тощо, біля яких спостерігається концентрація напруг.

Вплив стану поверхні деталі на витривалість оцінюють коефіцієнтом якості поверхні  $\beta_{\sigma}$ , який дорівнює відношенню границі витривалості  $(\sigma_{-1})$  зразка із заданим станом поверхні, до границі витривалості  $\sigma_{-1}$  зразка з полірованою поверхнею:

$$\beta_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_r}{\sigma_{-1}} \quad //11.14/$$

Значення коефіцієнта  $\beta_{\sigma}$  залежно від стану поверхні знаходять за допомогою наведених в довідковій літературі графіків і таблиць. На рис. 11.14 зображено графік залежності коефіцієнта якості поверхні  $\beta_{\sigma}$  від виду обробки і границі міцності сталевих деталей: 1 - полірування; 2 - шліфування; 3 - тонке обточування; 4 - грубе обточування; 5 - поверхня з окалиною.

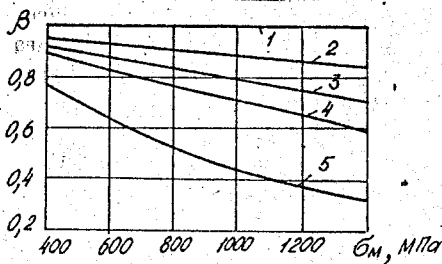


Рис. 11.14. Графік залежності  $\beta_{\sigma}$  від виду обробки та границі міцності сталевих деталей

Звичайно, значення  $\beta_{\sigma} = 0,25 \dots 1,0$ . Поліпшити вплив стану поверхні на витривалість можна за допомогою технологічних методів поверхневого зміцнення деталей: пластичного деформування /обкочування поверхонь деталей роликками або шариками  $\beta_{\sigma} = 1,3 \dots 1,6$ ; обробка сталевим або чавунним дробом  $\beta_{\sigma} = 1,5 \dots 1,7$  тощо; загартування струмами високої частоти  $\beta_{\sigma} = 1,5 \dots 2,0$ ; азотування, цементація, ціанування  $\beta_{\sigma} = 1,5 \dots 1,8$  тощо.

Поряд із зазначеними факторами у багатьох розрахунках на витривалість враховують також вплив пауз навантаження, перевантажень, тренування, температур, додаткових напруг при посадках з натягом тощо.

### 11.6. Розрахунки на витривалість

Розрахунки на міцність при змінних напругах здебільшого перевіряють.

Їх проводять, коли відомі розміри деталі, тип концентраторів, стан поверхні, характеристика циклу напруг тощо.

В розрахунках на міцність використовуємо розглянутий раніше метод розрахунків за допустимими напругами. Згідно з цим методом в разі простих навантажень умова міцності має вигляд  $\sigma_{max} \leq [\sigma]$ , де  $\sigma_{max}$  - максимальні робочі напруги. Для гладких стандартних зразків за граничну напругу беруть границю витривалості  $\sigma_{-1}$ . Тоді умова міцності для симетричного циклу матиме вигляд

$$\sigma_{max} = \sigma_a \leq \frac{\sigma_{-1}}{S_\sigma}, \quad /11.15/$$

де  $n_\sigma$  - коефіцієнт запасу міцності.

При асиметричному циклі для розрахунків використовують різні аналітичні залежності  $(\sigma_a)_r = f(\sigma_c)$ . Найбільшого практичного значення набула лінійна залежність

$$(\sigma_a)_r = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_c, \quad /11.16/$$

де  $\psi_\sigma$  ( $\psi_\sigma$ ) - коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу зразка до симетрії циклу:

$\sigma$	МПа	350...520	520...720	720...1000	1000...1200
$\psi_\sigma^M$		0	0,05	0,1	0,2
$\psi_\sigma^c$		0	0	0,05	0,1

В подальшому замість  $(\sigma_a)_r$  для амплітудної напруги при довільному циклі введемо загальне позначення  $\sigma_a$ . Тоді для гладких

стандартних зразків умова міцності при асиметричному циклі запишеться у вигляді:

$$\sigma_a + \psi \sigma_c \leq \frac{\sigma_{-1}}{S_\sigma} \quad /11.17/$$

Вплив концентрації напруг, масштабного фактора, стану поверхні деталі необхідно відносити, як показали експериментальні дослідження, тільки до змінної складової циклу  $\sigma_a$ . Враховуючи це, маємо:

$$\sigma_a \frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta_\sigma} + \psi \sigma_c \leq \frac{\sigma_{-1}}{S_\sigma} \quad /11.18/$$

За дії дотичних напруг умова опору втотою така:

$$\tau_a \frac{k_\tau}{\epsilon_\tau \beta_\tau} + \psi \tau_c \leq \frac{\tau_{-1}}{S_\tau} \quad /11.19/$$

Під час перевірних розрахунків на витривалість обчислюють фактичні коефіцієнти запасу міцності  $S$ , які порівнюють із допустимими для даної конструкції коефіцієнтами запасу міцності  $[S]$ ; в цьому разі має виконуватися умова  $S \geq [S]$ . Для сталених деталей  $[S] = 1,3 \dots 3$  залежно від виду і призначення деталі, точності розрахунків.

Для загального випадку асиметричного циклу напруг коефіцієнти запасу міцності визначають за формулами Серенсена - Кінашошвілі:

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta_\sigma} + \psi \sigma_c} \quad /11.20/$$

$$S_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \frac{k_\tau}{\epsilon_\tau \beta_\tau} + \psi \tau_c}$$

У випадку поєднання основних деформацій /згину і кручення, кручення і розтягу або стиску/, тобто для спрощеного плоского напруженого стану, загальний коефіцієнт запасу міцності визначається за емпіричною формулою Гафа - Полларда  $1/S^2 = 1/S_\sigma^2 + 1/S_\tau^2$ , звідки

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} \quad /11.21/$$

Крім коефіцієнта запасу міцності відносно границі витривалості, обчислюють коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям

$$S_{\sigma T} = \sigma_T / \sigma_{max} = \sigma_T / (\sigma_a + \sigma_c),$$

$$S_{\tau T} = \tau_T / \tau_{max} = \tau_T / (\tau_a + \tau_c) \quad /11.22/$$

Загальний коефіцієнт запасу міцності за опором пластичним деформаціям  $S_T$  обчислюють за формулою

$$S_T = \frac{S_{\sigma T} S_{\tau T}}{\sqrt{S_{\sigma T}^2 + S_{\tau T}^2}} \quad /11.23/$$

Із обчислених значень  $S$  і  $S_T$  беруть менше і порівнюють з допустимим значенням коефіцієнта запасу міцності  $[S]$ .

#### 11.7. Практичні заходи щодо боротьби з полумками за повторно-змінних навантажень

На основі викладеного можна установити ті практичні заходи, які дають змогу інженерові забезпечити міцність деталей при змінних напругах. Ці заходи умовно поділяються на дві категорії: 1/ використання якісного матеріалу; 2/ грамотне проектування деталей, технології їх виготовлення і обробки поверхні.

Вимоги до матеріалу зводяться до двох основних положень: по-перше, матеріал повинен мати якомога більшу границю міцності при достатній пластичності, що забезпечує високе значення границі витривалості; по-друге, у матеріалі мають бути відсутні внутрішні фактори концентрації, що вимагає однорідної дрібно-зернистої структури, відсутності тріщин, газових бульбашок, вclusions шлаку тощо.

Головна мета конструктора та технолога – зменшити коефіцієнти концентрації напруг, зумовлені різкими змінами контура деталі і дефектами обробки поверхні. Зменшення місцевих напруг досягається плавним окресленням переходів, надрізів, галтелей тощо.

Конструктивні прийоми для збільшення опору валів дії змінних навантажень показані на рис. 11.15. Вони полягають у тому, що в місцях зміни площі поперечного перерізу вала утворюють плавні переходи /галтелі/ з якомога більшим радіусом. Якщо ж різкі переходи усунути неможливо /різьба, канавки тощо/, то необхідно передбачити виточки для розвантаження /рис. 11.15, а, б, в, г/.

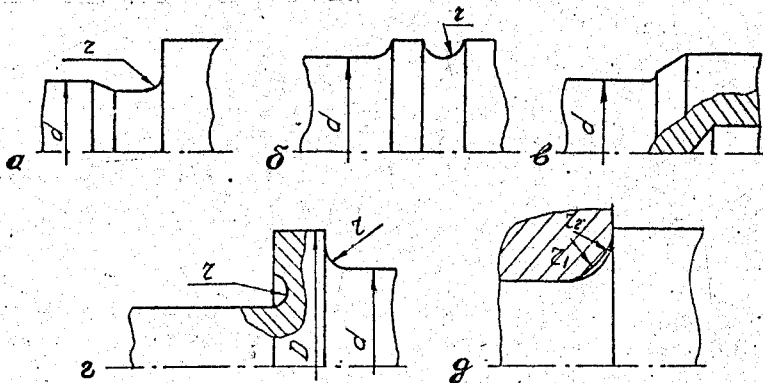


Рис. 11.15. Прийоми поліпшення розподілу напруг в місцях концентраторів деталей

Такі виточки поліпшують розподіл напруг і зменшують їх концентрацію в місці основного надрізу. Значно зменшують концентрації напруг галтелі, показані на рис. 11.15, г. При насадженні деталі на вал радіус деталі  $r$  має бути більшим від радіуса галтелі  $r_1$  /рис. 11.15, д.<sup>2</sup>

Не менш важливу роль, ніж плавність контурів, відіграє і стан поверхні деталі. Тому чистота обробки поверхні, зміцнення поверхневого шару різними методами, а також покриття поверхні шаром захисного матеріалу в разі можливої корозії часто є необхідним заходом щодо гарантування безпечної роботи машини. Зазначимо також, що

особливо ретельної обробки потребують деталі із міцних легованих сталей, які мають високий коефіцієнт чутливості до місцевих напруг.

Приклад 11.1. Шліфований вал з галтеллю /рис.11.7,в/ з маловуглецевої сталі працює на згин а крученням. Діаметри вала  $d = 40$  мм;  $D = 60$  мм; радіус галтелі  $r = 4$  мм. Максимальний сумарний згинаючий момент  $M = 225$  Н·м, крутний момент  $M_k = 125$  Н·м. Характеристики міцності матеріалу:  $\sigma_m = 510$  МПа,  $\sigma_T = 275$  МПа,  $\tau = 147$  МПа,  $\sigma_{-1} = 216$  МПа,  $\tau_{-1} = 128$  МПа. Визначити коефіцієнт запасу міцності за повторно-змінного навантаження.

Розв'язання. Коефіцієнт запасу міцності відносно границі витривалості  $S$ , а також окладові коефіцієнти  $S_\sigma$  і  $S_\tau$  обчислимо відповідно за формулами /11.21/ і /11.20/. В цьому разі осьовий момент опору

$$W_z = \pi d^3 / 32 = 3,14 \cdot 40^3 / 32 = 6,28 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Амплітудна нормальна напруга

$$\sigma_a = \sigma_{max} = M/W = 225 \cdot 10^3 / 6,28 \cdot 10^3 = 36 \text{ Па}.$$

Середня напруга циклу  $\sigma_c = 0$ .

Ефективний коефіцієнт концентрації напруги /рис.11.10/  $K_\sigma = 1,6$ ; масштабний коефіцієнт /рис.11.13/ для вуглецевої сталі при помірних концентраціях напруг  $\epsilon_\sigma = 0,78$ ; коефіцієнт якості поверхні /рис.11.14/  $\beta_\sigma = 0,95$ .

Коефіцієнт запасу міцності за нормальними напругами

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta_\sigma}} = \frac{216}{36 \frac{1,6}{0,78 \cdot 0,95}} = 2,78.$$

Полярний момент опору

$$W_p = \pi d^3 / 16 = 2W_z = 2 \cdot 6,28 \cdot 10^3 = 12,56 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Амплітуда і середня дотична напруга циклу

$$\tau_a = \tau_c = \frac{\tau_{max}}{2} = \frac{M_k}{2W_p} = \frac{125 \cdot 10^3}{2 \cdot 12,56 \cdot 10^3} \approx 5 \text{ Па}.$$

Коефіцієнт запасу міцності за дотичними напругами

$$S_{\tau} = \frac{128}{5 \cdot 1,25 / 0,85 \cdot 0,95} = 16,5$$

Загальний коефіцієнт запасу міцності

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} = \frac{2,78 \cdot 16,5}{\sqrt{2,78^2 + 16,5^2}} = 2,74$$

Теоретичні коефіцієнти концентрації наведено в табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Вид деформації і фактор концентрації напруг	$\alpha_{\sigma} (\alpha_{\tau})$
---	-----------------------------------

### 1. Згин і розтяг

1.1. Півкругла виточка на валу при відношенні радіуса виточки до діаметра вала:

0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1

1.2. Галтель при відношенні радіуса галтелі до висоти перерізу / діаметра вала/:

0,0625	1,75
0,125	1,50
0,25	1,20
0,5	1,10

1.3. Перехід під прямим кутом

2,0

1.4. Гостра  $\sqrt{\quad}$ -подібна виточка

3,0

1.5. Метрична різьба

2,5

1.6. Отвір при відношенні діаметра отвору до поперечного розміру перерізу від 0,1 до 0,33

2,0

1.7. Риски від різця на поверхні деталі

1,2...1,4

### 2. Кручення

2.1. Галтель при відношенні радіуса галтелі до найменшого діаметра вала:

0,02	1,8
0,10	1,2
0,20	1,1

2.2. Шпонкові канавки

1,6...2,0

Дані для розрахунків наведено в дод. 1-6.

### Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під втомою матеріалів? Яка відмінність особливостей руйнування матеріалів при змінних напругах порівняно із статичним навантаженням?

2. Розкажіть про характеристики циклів змінних напруг. Які цикли називаються подібними; які найнебезпечнішими?

3. Що таке границя витривалості матеріалів? Який зв'язок існує між границею витривалості  $\sigma_{-1}$  і механічними характеристиками матеріалу?

4. Як визначається границя витривалості матеріалів при несиметричному циклі навантаження?

5. Які фактори зменшують границю витривалості матеріалів? Як кількісно оцінюють їх вплив?

6. Розкажіть, які практичні заходи дають змогу збільшити витривалість деталей машин?

7. В чому полягають розрахунки на витривалість?

8. Як проводять розрахунки на витривалість за коефіцієнтом запасу міцності?

### ДОДАТКИ

Додаток 1

Механічні характеристики вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	$\sigma_M$	$\sigma_T$	$\epsilon_T$	Відносне видовження $\delta$ , % при 10	Ударна в'язкість КС, кДж/м <sup>2</sup>	$\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1}^0$	$\epsilon_{-1}^x$
	не менше					МПа		
	МПа					МПа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	340	210	140	31	2400	160-220	120-150	80-120
20	420	250	160	25	-	170-220	120-160	100-130
25	460	280	-	23	900	190-250	-	-
30	500	300	170	21	800	200-270	170-210	110-140
35	540	320	190	20	700	220-300	170-220	130-180
40	580	340	-	10	600	230-320	180-240	140-190
45	610	360	220	16	500	250-340	190-250	150-200
50	640	380	-	14	400	270-350	200-260	160-210
55	660	390	-	13	-	-	-	-

Закінчення дод. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	690	410	-	12	-	310-380	220-280	180-220
20Г	460	280	-	24	-	-	-	-
30Г	550	320	-	20	800	220-320	-	-
50Г	660	400	-	13	400	290-360	-	-
20Х	800	650	-	11	600	380	-	170-320
40Х	1000	800	-	10	600	350-380	250	225
45Х	1050	850	-	9	500	400-500	-	-
30ХМ	950	750	-	11	800	310-410	370	230
35ХМ	1000	850	-	12	800	470-510	-	-
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	-	9	500	550	-	-
40ХФА	900	750	-	10	900	380-490	-	-
38ХМФА	1000	850	-	14	900	420-550	-	-
12ХНЗА	950	700	400	11	900	390-470	270-320	220-260
20ХНЗА	950	750	-	12	1000	430-450	300-320	245-255
30ХНЗА	1000	800	-	10	800	520-700	-	320-400
40ХНМА	1000	950	-	12	1000	500-700	-	270-380
30ХГСА	1100	850	-	10	500	510-540	500-535	220-245

Примітка. При використанні сталей за ГОСТ 380-71 необхідно врахувати приблизну відповідність марок: Ст. 3 відповідає сталі 20; Ст. 4 - сталі 25; Ст. 5 - сталі 35; Ст. 6 - сталі 45.

Додаток 2

Механічні характеристики чавуну

Марка чавуну	Границя міцності, МПа				Твердість по Бригеллю HB	Границя витривалості, МПа	
	при розтягу $\sigma_B$	при стиску $\sigma_{сж}$	при згині $\sigma_{зг}$	при крученні $\tau_{кр}$		при згині $\sigma_{-1}$	при крученні $\tau_{-1}$
1	2	3	4	5	6	7	8
СЧ 12	120	500	280	-	143-229	-	-
СЧ 15	150	650	320	240	163-229	70	50
СЧ 18	180	700	360	-	170-229	-	-

## Закінчення дод. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
СЧ 21	210	750	400	280	172-241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187-217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170-241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187-255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	198-269	160	115
СЧ 38	380	1400	600	460	207-269	150	115
ВЧ 40-10	400	1600-1700	-	480-510	156-197	150-170	198
ВЧ 50-1,5	500	1860-2000	-	740-790	187-255	230-270	170-210
ВЧ 60-2	600	2040-2290	-	660-810	197-269	170-230	150-160

## Додаток 3

Орієнтовні значення основних допустимих напруг  
на розтяг і стиск

Матеріал	Допустимі напруги, МПа	
	на розтяг	на стиск
Чавун сірий	28-30	120-150
Сталь: Ст 2		140
Ст 3		160
машинобудівельна /конструкційна/ вуглецева		60-250
машинобудівельна/конструкційна/ легована		100-400 і більше
Мідь		30-120
Датунь		70-140
Бронза		60-120
Алюміній		30-80
Алюмінієва бронза		80-120
Дюралюміній		80-150
Текстоліт		30-40

Допустимі напруги на зріз для заклепочних  
і зварних з'єднань

Тип з'єднання	Напруга на зріз, МПа
<b>Заклепочне:</b>	
Основні елементи із сталі 20	100
заклепка в розсвердлених отворах /клас В/	140
заклепка в протиснених отворах /клас С/	100
<b>Зварне:</b>	
зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою	80
зварювання ручне, електроди з товстою обмазкою	110
автоматичне зварювання	110

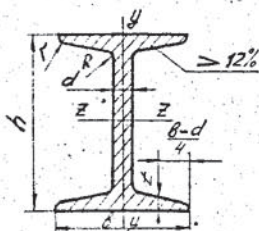
## Модулі пружності і коефіцієнти Пуассона

Матеріал	Модуль пружності, МПа		Коефіцієнт Пуассона $\mu$
	$E$	$G$	
1	2	3	4
Чавун сірий, білий	$/1,15 \dots 1,60 / 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
>> ковкий	$1,55 \cdot 10^5$	-	-
Сталі вуглецеві	$/2,0 \dots 2,1 / 10^5$	$/8,0 \dots 8,1 / 10^4$	0,24...0,28
>> леговані	$/2,1 \dots 2,2 / 10^5$	$/8,0 \dots 8,1 / 10^4$	0,25...0,30
Мідь прокатана	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31...0,34
>> холоднотягнута	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	-
>> лита	$0,84 \cdot 10^5$	-	-
Бронза фосфориста катана	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32...0,35
>> марганцовиста катана	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
>> алюмінієва лита	$1,06 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	-

## Закінчення дод. 5

1	2	3	4
Латунь холоднотягнута	$/0,91...0,99/10^3$	$/3,5+3,7/10^4$	0,32...0,42
Латунь катана	$1,0 \cdot 10^5$	-	0,36
Дріт алюмінієвий тягнута	$0,7 \cdot 10^5$	-	-
Дюралюміній катаний	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	-
Цинк катаний	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинець	$0,17 \cdot 10^5$	$0,70 \cdot 10^4$	0,42
Скло	$0,56 \cdot 10^5$	$22 \cdot 10^4$	0,25
Граніт	$0,49 \cdot 10^5$	-	-
Каучук	$0,00008 \cdot 10^5$	-	0,47
Текстоліт	$/0,06 + 0,1/10^5$	-	-
Гетінакс	$/0,1+0,17/10^5$	-	-

Балки двотаврові / за ГОСТ 8239-72/

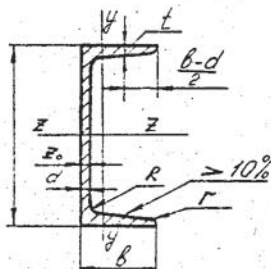


$h$  - висота балки;  $J$  - момент інерції;  
 $b$  - ширина полиці;  $W$  - момент опору;  
 $d$  - товщина стінки;  $i$  - радіус інерції;  
 $t$  - середня товщина полиці;  $S$  - статичний момент половини перерізу;

Номер про- філю	Розміри, мм				Площа пере- різу, см <sup>2</sup>	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	Маса, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,4
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,2	1,88	18,4
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,52	89,8	114	22,8	2,12	19,
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,22	104	115	23,1	2,07	21,0
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	239	9,97	163	198	34,5	3,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	6010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	263	337	59,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	69,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	35962	2035	21,8	1181	1366	151	3,39	92,7
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1481	1725	182	3,54	108

## Балки швелерні /за ГОСТ 8240-72/



Номер про- філю	Розміри, мм				Площа пере- різу, см <sup>2</sup>	$J_z, \text{см}^4$	$W_z, \text{см}^3$	$i_z, \text{см}$	$S_z, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$e_0, \text{см}$	Маса, кг
	h	b	d	t										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,116	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	106	20,0	2,18	2,13	17,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,33	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	23,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,43	24,0
24a	240	95	6,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7930	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - 15-е изд. - М.: Наука, 1976. - 607 с.
2. Дарков А.В., Широ Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высш. шк., 1975. - 654 с.
3. Сопротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С. - 5-е изд. перераб. и доп. - К.: Вища шк., 1986. - 775 с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1979. - 559 с.
5. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1 и 2. - Изд. 2-е. - М.: Наука, 1965.
6. Филин А.Б. Прикладная механика твердого деформируемого тела: В 2-х т. - М.: Наука. - Т.1. 1975. 832 с.; Т.2. 1978. - 661 с.
7. Брделі О.О. Ін. Технічна механіка. - К.: Вища шк., 1983. - 368 с.
8. Ярмацький А.Г. Опір матеріалів. - К.: Техніка, 1971. - 120 с.

## ЗМІСТ

Вступ .....	3
1. Основні положення .....	5
1.1. Зовнішні і внутрішні сили. Деформація .....	5
1.2. Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів.....	7
1.3. Метод перерізів. Поняття про епюри внутрішніх силових факторів .....	9
1.4. Поняття про напругу. Зв'язок напруги із зусиллями...	12
Запитання для самоперевірки.....	16
2. Розтяг і стиск.....	16
2.1. Побудова епюр нормальних сил .....	16
2.2. Напруга при розтягу /стиску/.....	20
2.3. Деформація і переміщення .....	24
2.4. Умова міцності і жорсткості .....	28
2.5. Діаграми розтягу і стиску матеріалів.....	31
2.6. Енергія деформованого тіла при розтягу або стиску....	36
2.7. Визначення допустимої напруги при розрахунках на міцність .....	38
2.8. Статично невизначені системи.....	39
2.9. Монтажі і температурні напруги .....	45
Запитання для самоперевірки .....	49
3. Основи теорії напруженого стану. Теорії міцності та їх застосування .....	49
3.1. Напружений стан в точці .....	49
3.2. Лінійний напружений стан .....	53
3.3. Плоский і об'ємний напружені стани .....	58
3.4. Теорії міцності.....	64
3.5. Розрахунок тонкостінних резервуарів.....	68
3.6. Контактні напруги.....	71
Запитання для самоперевірки .....	76
4. Зсув. Практичні розрахунки на зріз і зминання .....	76
4.1. Напружений стан при зсуві .....	76
4.2. Розрахунки деталей на зріз і зминання .....	80
Запитання для самоперевірки.....	87

5. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	67
5.1. Статичні моменти площі .....	88
5.2. Моменти інерції плоских фігур .....	92
5.3. Визначення моментів інерції складних плоских фігур .....	96
5.4. Радіус і еліпсо інерції плоскої фігури.....	102
Запитання для самоперевірки .....	104
6. Кручення .....	105
6.1. Основні поняття. Впорядкування крутних моментів.....	105
6.2. Напруги при крученні .....	110
6.3. Розрахунки на міцність при крученні .....	116
6.4. Деформації і розрахунки на жорсткість при крученні .....	121
6.5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин .....	126
Запитання для самоперевірки.....	131
7. Згин .....	132
7.1. Реакції опору балок і їх визначення при плоскому згині .....	132
7.2. Внутрішні силові фактори при згині балок.....	136
7.3. Диференціальні залежності при згині .....	138
7.4. Побудова епюр $Q$ і $M$ у балках .....	141
7.5. Особливості побудови епюр $Q$ та $M$ .....	148
7.6. Нормальні напруги при чистому згині .....	163
7.7. Розрахунки на міцність при згині .....	169
7.8. Дотичні напруги при згині .....	161
7.9. Деформації при згині .....	164
7.10. Потенціальна енергія деформації балки при згині .....	168
7.11. Теорема Кастіліано .....	170
7.12. Визначення переміщень методом Мора .....	173
7.13. Визначення переміщень способом Верещагіна .....	178
7.14. Розрахунки на жорсткість при згині .....	187
Запитання для самоперевірки.....	189
8. Складний опір .....	190
8.1. Косий згин .....	190
8.2. Згин з розтягом /стиском/ .....	200
8.3. Згин з крученням .....	205
Запитання для самоперевірки.....	215
9. Стійкість стиснутих стержнів .....	215
9.1. Критична сила. Формула Ейлера.....	216
9.2. Критичні напруги. Розрахунок критичної сили при напругах, що перевищують границю пропорційності.....	220

9.3. Практичні розрахунки на стійкість .....	223
Запитання для самоперевірки.....	228
10. Задачі динаміки в опорі матеріалів .....	228
10.1. Розрахунки на міцність за наявності сил інерції .....	228
10.2. Розрахунки на удар .....	230
Запитання для самоперевірки.....	237
11. Розрахунки на міцність матеріалів	
при змінних напругах .....	238
11.1. Відомості про втому матеріалів .....	238
11.2. Характеристики циклів змінних напруг .....	239
11.3. Границя витривалості матеріалів при симетричному циклі навантаження .....	241
11.4. Границя витривалості матеріалів при несиметричному циклі навантаження .....	244
11.5. Фактори, що зменшують границю витривалості матеріалів ...	246
11.6. Розрахунки на витривалість .....	253
11.7. Практичні заходи щодо боротьби з полумками за повторно-змінних навантажень .....	255
Запитання для самоперевірки.....	259
Додатки .....	259
Список літератури.....	270

Навчальне видання

Нахайчук Віктор Григорович  
Матвійчук Віктор Андрійович  
Чернілевський Дмитро Володимирович

Технічна механіка

Книга 2

Опір матеріалів

Відповідальний редактор Чернілевський Дмитро Володимирович

Темплан 1992, поз.569

Редактор Р.І.Петрова  
Коректори: Б.Д.Кіба  
Н.Ф.Слоніна

Підп. до друку 26.10.92      Формат 60×84<sup>1/16</sup>. Папір  
друк. № 3      Друк офсетний. Ум. др. арк. 15,81. Ум. фарбо-відб. 16,04  
Облік-вид. арк. 16,85      Тираж 2000  
Зам. № 2-1330      Ціна 1кр. 10коп.

НМК ВО Міністерства освіти України  
252070, Київ-70, вул. П. Сагайдачного, 37.

РОВО «Укрвузполіграф».  
252151, Київ, вул. Волинська, 60.