

**Р. Р. Обертюх**  
**А. В. Слабкий**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ  
МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Р. Р. Обертюх**  
**А. В. Слабкий**

# **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

Електронний навчальний посібник

Видання 2-ге, перероблене та доповнене

Вінниця  
ВНТУ  
2025

**УДК 621.1.016(075)**  
**О-13**

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 28.11.2024 р.)

Рецензенти:

**В. М. Гурський**, доктор технічних наук, професор, НУ «Львівська політехніка»

**Л. К. Поліщук**, доктор технічних наук, професор, ВНТУ

**С. І. Сухоруков**, кандидат технічних наук, доцент, ВНТУ

**Обертюх, Р. Р.**

О-13 Математичне моделювання механічних систем : навчальний посібник [Електронний ресурс] / Р. Р. Обертюх, А. В. Слабкий. – [Вид. 2-ге, перероб. та доп.]. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – 119 с.

У навчальному посібнику викладено основи фізичного (динамічного) та математичного моделювання механічних систем і динамічних процесів, що в них відбуваються, а також елементи математичних методів оптимізації процесів і механічних систем та їх ланок. В кінці посібника для закріплення вивченого матеріалу наведено перелік запитань для самоперевірки, а також в посібнику розміщено практикум із задач, складених за теоретичним змістом розділів посібника, та тестів для самоконтролю знань, набутих під час вивчення дисципліни «Математичне моделювання механічних систем».

Зміст посібника відповідає програмі дисципліни «Математичне моделювання механічних систем» освітньої програми «Галузеве машинобудування» здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти, які навчаються за спеціальністю 133 Галузеве машинобудування. Посібник може бути використаний для підготовки з питань математичного моделювання механічних систем здобувачами другого (магістерського) рівня вищої освіти інших спеціальностей, наприклад, 131 Прикладна механіка.

Посібник призначено для здобувачів другого рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	6
1 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ТЕОРІЇ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ.....	8
1.1 Розділи вищої математики, на яких ґрунтується математичне моделювання механічних систем .....	8
1.2 Елементи матричного числення .....	9
2 ВИДИ МОДЕЛЕЙ ТА РІВНІ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ .....	16
2.1 Фізичні ( динамічні ) моделі механічних систем та їхніх функціональних частин .....	16
2.2 Математичні моделі як абстрактні моделі.....	21
2.3 Рівні моделювання: структурний (імітаційний); логічний; кількісний (аналіз). Характеристики стану системи в математичних моделях. Види математичних моделей та структурна схема (загальна) побудови математичних моделей .....	22
3 ОДНОМАСОВІ ТА БАГАТОМАСОВІ ДИНАМІЧНІ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ.....	25
3.1 Одномасові та багатомасові динамічні моделі механічних систем.....	25
3.2 Характеристика рушійних сил і сил опору, що діють в механічних системах .....	25
3.3 Побудова математичних моделей механічних систем на основі їх динамічних моделей.....	29
4 МЕТОДИ АНАЛІЗУ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ .....	32
4.1 Методи спрощення математичних моделей механічних систем. Структура припущень під час побудови математичних моделей.....	32
4.2 Адекватність математичної моделі та об'єкта досліджень .....	38

5 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОІМПУЛЬСНИХ ПРИВОДІВ, ГІДРАВЛІЧНА ЛАНКА ЯКИХ ПРЕДСТАВЛЕНА ЯК ТІЛО КЕЛЬВІНА – ФОЙГТА .....	41
5.1 Основні співвідношення в гідравлічних ланках, представлених як тіло Кельвіна – Фойгта .....	41
5.2 Приклад побудови математичної моделі простого гідроімпульсного привода на основі його динамічної моделі, де гідравлічна ланка, представлена як тіло Кельвіна – Фойгта .....	43
6 ВИДИ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	48
6.1 Основні поняття та означення оптимізації. Критерії оптимальності (цільові функції) .....	48
6.2 Математичні методи оптимізації (класифікація). Загальний алгоритм процесу оптимізації .....	49
6.3 Способи задавання цільової функції.....	51
7 БЕЗУМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ .....	53
7.1 Методи безумовної оптимізації – класифікація.....	53
7.2 Приклади використання методів послідовної безумовної оптимізації: внутрішнього; зовнішнього; комбінованого-внутрішньо-зовнішнього.....	53
8 УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ .....	58
8.1 Загальна характеристика методів умовної оптимізації: проекції градієнта $\psi_0^T(b)$ цільової функції $\psi_0(b)$ ; найшвидшого спуску з компенсацією обмежень $\psi_i(b)$ цільової функції; проекції градієнта Розена для лінійних обмежень цільової функції $\psi_0(b)$ .....	58
8.2 Приклади застосування умовної оптимізації для розв'язування задач з простими цільовими функціями та їх обмеженнями.....	59
9 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА АНАЛІТИЧНИХ І ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ .....	64
9.1 Загальна характеристика аналітичних методів розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку.....	64
9.2 Огляд числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядків .....	69
10 ПРАКТИКУМ.....	76
10.1 Перелік запитань для самоперевірки .....	76

10.2 Типові умови задач для практичних занять і самостійної роботи для здобувачів вищої освіти.....	80
10.3 Приклади розв'язування задач.....	87
10.4 Тести для самоконтролю ступеня засвоєння дисципліни.....	101
ЛІТЕРАТУРА .....	115
Українсько-англійський словник найбільш вживаних термінів .....	117

## ВСТУП

Математичне моделювання механічних систем – обов’язкова (професійна) дисципліна підготовки здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти, які навчаються за спеціальністю 133 – «Галузеве машинобудування», з теоретичних основ фізичного (динамічного) та математичного моделювання механічних систем і динамічних процесів, що в них відбуваються, а також з елементів математичних методів оптимізації процесів і механічних систем та їх ланок.

Професійна діяльність майбутніх фахівців (магістрів) за спеціальністю «Галузеве машинобудування» пов’язана з конструюванням та експлуатацією машин, обладнання і устаткування для різних галузей народного господарства, наприклад, оброблення матеріалів різанням і тиском, переробних виробництв тощо. Магістри за вказаною спеціальністю також можуть працювати в науково-дослідних установах, які проводять теоретичні та експериментальні дослідження механічних систем.

Щоб проєктувати машини та механізми з врахуванням сучасних досягнень та методологій в сфері конструювання машин і обладнання машинобудівної галузі народного господарства майбутні фахівці – машинобудівники мають за час вивчення фахових дисциплін набути стійких навичок та умінь практичного використання отриманих знань під час розв’язування науково-дослідних, дослідно-конструкторських і виробничих задач, що виникатимуть під час їх професійної діяльності.

Математичне моделювання механічних систем має особливе значення під час проведення пошукових, науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт зі створення та розроблення конструкцій нових машин, механізмів, пристроїв та обладнання для реалізації різноманітних технологічних процесів, наприклад, оброблення металів різанням і тиском, виготовлення різноманітних виробів методами порошкової металургії тощо. Стосовно розроблення конструкцій нових машин, механізмів і пристроїв математичне моделювання цих систем є основою для створення науково-обґрунтованих методик їх проєктного розрахунку.

Навчальний посібник складається з дев’яти розділів, в першому наведено короткі відомості про основні розділи математики та елементи матричного числення, на яких ґрунтується математичне моделювання механічних систем, в другому, третьому та четвертому розділах наведено інформацію про види та розроблення ідеалізованих динамічних і математичних моделей механічних систем, а п’ятий розділ присвячено методу математичного моделювання гідроімпульсних приводів, гідравлічна ланка яких представлена як тіло Кельвіна – Фойгта. В шостому, сьомому та восьмому розділах посібника викладено елементи параметричної оптимізації механічних конструкцій, а в дев’ятому розділі дано загальну характеристику аналітичних методів розв’язування диференціальних рівнянь другого порядку та зроблено короткий

огляд числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядків.

В десятому розділі посібника розміщено практикум, що складається з переліку запитань для самоперевірки, типових умов задач для практичних занять і самостійної роботи для здобувачів вищої освіти, складених за теоретичним змістом розділів посібника, прикладів розв'язування задач та тестів для самоконтролю знань, набутих під час вивчення дисципліни «Математичне моделювання механічних систем».

Для більш глибокого ознайомлення з окремими питаннями математичного моделювання механічних систем посібник містить список літератури, а також в кінці посібника наведено українсько-англійський словник найбільш вживаних термінів.

# 1 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ТЕОРІЇ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

## 1.1 Розділи вищої математики, на яких ґрунтується математичне моделювання механічних систем

Математичне (mathematical) моделювання (simulation) механічних систем (system) ґрунтується на таких розділах вищої математики:

- вища алгебра ( комплексні числа, багаточлени, визначники, матричне числення, системи лінійних рівнянь);
- диференціальне (differential) числення (calculation) (границі та числові ряди, похідні та диференціали, формула Тейлора, степеневі ряди, функції декількох змінних);
- інтегральне (integral) числення (невизначений інтеграл і основні табличні невизначені інтеграли, визначений інтеграл, інтеграли від функцій декількох змінних тощо);
- диференціальні рівняння, насамперед звичайні першого та другого порядків і способи їх розв'язування;
- системи диференціальних рівнянь;
- числові методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і їх систем;
- комплексний аналіз (комплексні функції, ряд Фур'є, інтеграл Фур'є, операційне числення тощо);
- теорія ймовірностей і математична статистика (statistics) (випадкові події, випадкові величини, математична статистика тощо).

Звичайно ж, під час побудови та аналізу математичних моделей широко використовуються розділи елементарної математики. Це різні види множин, планиметрія, стереометрія, геометричні та алгебраїчні перетворення, тригонометричні формули, алгебраїчні рівняння різних типів і видів (лінійні та нелінійні, показникові, логарифмічні та тригонометричні тощо), різні види нерівностей тощо. В загальному випадку під час розроблення та аналізу математичних моделей процесів і динамічних систем можуть застосовуватись будь-які математичні залежності та формули як елементарної, так і вищої математики.

Навчальні плани та програми з вищої математики під час підготовки фахівців зі спеціальностей 131 Прикладна механіка і 133 Галузеве машинобудування передбачають достатньо глибокий курс з диференціального та інтегрального числення. Звичайним диференціальним рівнянням першого та другого порядків і методам їх розв'язування також в навчальних програмах відведено немало годин.

Деякі види рівнянь і методи їх розв'язування розглядаються і під час викладення загальноінженерних і спеціальних дисциплін, таких, наприклад, як «Деталі машин і основи конструювання» ( виведення формули Ейлера для пасових

передач), «Теплотехніка» ( рівняння теплопровідності чи конвективного або променевого теплообміну, числовий метод скінченних різниць тощо) та ін.

В курсах вищої математики для механічних спеціальностей окремим розділам математичного аналізу мало приділено уваги в навчальних планах і програмах з вищої математики, наприклад, матричному численню, які в деяких випадках використовуються під час моделювання та параметричної оптимізації механічних систем

## 1.2 Елементи матричного числення

Основним поняттям матричного числення є поняття матриці [1, 2].

Матриця (matrix) розмірів  $m \times n$  – система чисел (елементів матриці), які розташовані в прямокутній таблиці з  $m$  рядків і  $n$  стовпців.

Позначають матриці таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

або

$$A = (a_{ij})_{mn}, \text{ чи: } A = (a_{ij}); A = [a_{ij}]_{mn}; A = [a_{ij}]. \quad (1.2)$$

Множину матриць розміром  $m \times n$  записують як  $P_{mn}$ . Якщо  $A = (a_{ij})$ , а  $B = (b_{ij}) \in P_{mn}$  (символ « $\in$ » означає «належить»), то  $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$  (символи « $\Leftrightarrow$ » і « $\forall$ », відповідно, означають: «рівносильно» та «будь-який»).

Деякі спеціальні матриці мають спеціальну назву та відповідне позначення:

нульова матриця  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.3)$

матриця протилежна  $A$   $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$

Трапецієподібна (ступінчаста) матриця за умов  
 $(a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, r)$  (1.5)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Матриця – рядок  $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ . (1.7)

Матриця – стовпець  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ . (1.8)

$\forall a_{ij} \in R$  – дійсна матриця ( $R$  – множина дійсного простору); (1.9)

$\exists a_{ij} \in C$  – комплексна матриця ( $C$  – множина комплексних чисел; символ « $\exists$ » – означає «існує»); (1.10)

$m = n$  – квадратна матриця порядку  $n$  або  $n \times n$ ; множина квадратних матриць порядку  $n$  позначається  $P_n$ .

Інші типи матриць:

верхня трикутна матриця  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ; (1.11)

нижня трикутна матриця  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ; (1.12)

діагональна матриця  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ; (1.13)

скалярна матриця  $\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ ; (1.14)

одинична матриця 
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

В деяких підручниках і довідниках з матричного числення одинична матриця позначається символом  $I$ , а сама матриця не круглими дужками  $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ , а у вигляді подвійних прямих ліній  $\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$ . Коротко одиничну матрицю можна записати так:  $E = (\delta_{ij})$ ,

де  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = j, \\ 0, \text{ якщо } i \neq j \end{cases}$  – символ Кронекера (1.16)

Матриці можна додавати, якщо  $A = (a_{ij})$  та  $B = (b_{ij}) \in P_{mn}$ , то  $C = (c_{ij}) \in P_{mn}$  є сума матриць  $A$  і  $B$  ( $C = A + B$ ), а  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall ij$ .

Додавання матриць має такі властивості:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = B + A; \\ (A + B) + C = A + (C + B); \\ A + 0 = A; \\ A + (-A) = 0. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

для  $\forall A, B, C \in P_{mn}$ .

Також матриці можна віднімати:

$$A - B = A + (-B) \quad (1.18)$$

і множити на число, наприклад,  $\alpha$ :

якщо  $A = (a_{ij}) \in P_{mn}$ , то  $B = (b_{ij}) \in P_{mn}$  є добуток матриці  $A$  на число  $\alpha$  ( $B = \alpha A$ ), якщо  $b_{ij} = \alpha a_{ij} \forall i, j$ . Множення матриці на число  $\alpha$  має такі властивості:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = A\alpha(\beta A) = A(\alpha\beta); \\ (A + B)\alpha = \alpha A + \alpha B; (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \end{array} \right. \quad (1.19)$$

для  $\forall A, B \in P_{mn}$  та  $\forall \alpha, \beta$ .

Матриці можна множити одна на одну, наприклад, якщо  $A = (a_{ik}) \in P_{mn}$ , а  $B = (b_{kj}) \in P_{mn}$ , то  $C = (c_{ij}) \in P_{mn}$  є добуток матриць  $A$  і  $B$  ( $C = A \cdot B$ ), якщо для  $\forall i, j$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (1.20)$$

Множення матриць має такі властивості (за умови, що наведені нижче операції мають смисл):

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot E = E \cdot A = A; A \cdot O = O \cdot A = 0; \\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C); \alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A(\alpha \cdot B); \\ (A + B) \cdot C = AC + BC; \\ C(A + B) = CA + CB. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Кожній матриці  $A = (a_{ij})$  розмірністю  $m \times n$  відповідає матриця  $A^T = (a_{ji})$  розмірністю  $n \times m$ , яка називається транспонованою відносно  $A$  (в деяких роботах з вищої математики транспонована матриця позначається  $A'$ ):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Транспонована матриця має такі властивості:

$$(A^T)^T = A; (\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T; (A + B)^T = A^T + B^T; \quad (1.23)$$

Є ряд спеціальних квадратних матриць, які мають важливе значення в математичному аналізі:

$$\text{– симетричні матриці } A = A^T, \quad (1.24)$$

де  $A^T$  матриця симетрична  $A = (a_{ij})$  тому, що  $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$ ;

$$\text{– кососиметричні матриці } A = -A^T; \quad (1.25)$$

$$\text{– ортогональні матриці } A = A \cdot A^T = E,$$

якщо  $\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ ;

$$\text{– невивроджені (неособливі) матриці, для яких } \det A \neq 0; \quad (1.26)$$

$$\text{– вивроджені (особливі) матриці, для яких } \det A = 0, \quad (1.27)$$

де  $\det A = \det(a_{ij}) = |a_{ij}| = \Delta$  – детермінант (determinant) (визначник (determinant) квадратної матриці  $A = (a_{ij})$ , що є числом

$$\Delta = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} [(-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n}], \quad (1.28)$$

(тут  $I(k_1, k_2 \dots k_n)$  – число інверсій переставлення  $k_1, k_2 \dots k_n$  чисел  $1, 2, \dots, n$ , під якими розуміють кількість пар елементів, що становлять інверсію, тобто число пар  $k_i, k_j$ , для яких  $i < j$ , але  $k_i > k_j$ ).

Парність переставлення визначається парністю числа  $I$ , наприклад для:  $n = 2$

$$\begin{aligned} \Delta = a_{12} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2)} \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^{I(2,1)} \cdot a_{12} \cdot a_{21} = \\ &= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}; \end{aligned} \quad (1.29)$$

$n = 3$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2,3)} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^{I(2,3,1)} \times \\ &\times a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^{I(3,1,2)} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^{I(3,2,1)} \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + \\ &+ (-1)^{I(2,1,3)} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^{I(1,3,2)} \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ &- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Розкрити визначник 3-го порядку ( $n = 3$ ) можна графічно за правилом Саррюса (рис. 1.1) [2 – 4] (тут:  $\rightarrow$  – напрям множення пар  $a_i$  і  $a_j$ ;  $\Pi$  – початок; ----- – початок іншої пари чисел  $a_i$ ;  $a_j$ ).

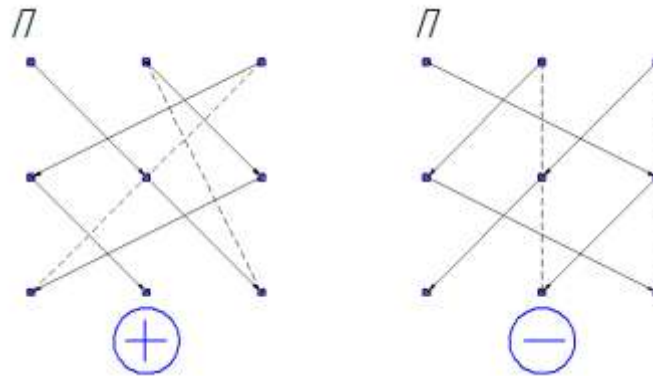


Рисунок 1 – Правило Саррюса

Обернена матриця  $A^{-1}$  для матриці  $A$  буде за умови  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ . (1.31)

Для матриці  $A \in P_n$   $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

де  $A_{ij}$  – алгебраїчне доповнення елементів  $a_{ij}$  матриці  $A$ .

Обернена матриця має такі властивості:

$$(A^{-1})^{-1} = A ; (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} ; \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad (1.33)$$

Застосовуючи матричне числення можна в дуже компактній формі записувати системи алгебраїчних і диференціальних рівнянь. Наприклад: є система алгебраїчних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 ; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n , \end{cases} \quad (1.34)$$

де  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) – коефіцієнти системи;

$b_i$  – вільні члени;

$x_1, x_2, \dots, x_n$  – змінні;

$m, n \in N$  ( $N$  – множина натуральних чисел).

За допомогою матричного числення цю систему можна записати у вигляді:

$$A \cdot X = B, \quad (1.35)$$

де  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  – матриця системи;  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  – матриця –

стовпець (вектор-стовпець) змінних;  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  – матриця-стовпець вільних

членів.

Аналогічно (1,31) в матричній формі можна записати, наприклад, систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x); \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x); \\ \dots \\ \dot{y}_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \quad (1.36)$$

де  $y_i = \frac{dy_i}{dx}$  – перші похідні функцій  $y_i = y(x)$ ;  $f_i(x)$  – функція «неоднорідності» рівняння (1.36).

В матричній (векторній) формі система (1.36) матиме вигляд

$$dY/dX = A \cdot Y + F. \quad (1.37)$$

де  $A$  – матриця коефіцієнти системи (див. (1.36);  $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$  – матриця-

стовпець залежних змінних  $y_i = y(x)$ ;  $dY/dX = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}$  – матриця-стовпець

похідних  $\dot{y}_i = (x)$ ;  $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$  – матриця-стовпець функцій  $f_i(x)$ .

Розроблені також і способи розв'язування рівнянь типу (1.35) і (1.37) методами матричного числення.

В автоматичі та технічній кібернетиці широко використовується варіаційне числення – це розділ вищої математики, що досліджує на екстремум змінні величини, які називаються **функціоналами** (functional). Особливість функціоналів та, що в них аргументами завжди є **функції** (function), які іноді називають **функціональними аргументами**.

## 2 ВИДИ МОДЕЛЕЙ ТА РІВНІ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

### 2.1 Фізичні (динамічні) моделі механічних систем та їхніх функціональних частин

**Моделювання** в загальному сенсі цього поняття – це процес адекватного (adequate) відображення найбільш суттєвих сторін досліджуваного об'єкта або явища з точністю, яка необхідна для практичних потреб людини [5, 6]. Теоретичною базою моделювання є **теорія подібності** [7].

Іншими словами, моделювання – це процес зображення об'єкта досліджень **адекватною (подібною) йому моделлю** [6] та проведення експериментів з моделлю для отримання інформації про об'єкт досліджень. В процесі моделювання модель є і засобом, і об'єктом досліджень, який знаходиться у відносинах подібності з об'єктом, що моделюється.

Коротко: **модель** (model) – це фізична (physical) чи абстрактна система, що є зображенням об'єкта досліджень. Розрізняють фізичні моделі та абстрактні (abstract) моделі.

**Фізичні моделі в загальному вигляді** утворюються із сукупності матеріальних об'єктів. Будуються фізичні моделі шляхом використання різних фізичних властивостей об'єктів досліджень, причому природа матеріальних елементів, що застосовується в моделі, не обов'язково та сама, що й в досліджуваному об'єкті. Прикладом фізичної моделі в широкому розумінні цього поняття є макет (діючий чи не діючий) якоїсь реальної системи, механічної та таке ін.

Ідеалізовану фізичну модель механічної системи (машини, механізму, привода машини, пристрою тощо) можна зобразити як систему мас її ланок (або моментів інерції мас), зазвичай, зосереджених, які взаємодіють між собою через пружні та дисипативні ланки чи в'язі під впливом зовнішніх сил, як постійних, так і змінних, причому ці сили можуть змінюватись за певними законами.

Пружні та дисипативні ланки (link) чи в'язі цієї системи спричиняють виникнення сил опору рухові мас (моментів інерції мас) цієї системи, який в різні проміжки часу роботи механічної системи може бути неусталеним і усталеним.

Таку ідеалізовану фізичну модель механічної системи прийнято називати її **динамічною (dynamic) моделлю** [8, 9, 12 – 14].

Поняття механічної системи – відносне поняття, яке залежить від ступеня детальності розгляду системи як цілого [5, 6, 8 – 12]. Наприклад, металорізальний верстат як механічна система загалом може складатись з таких основних ланок: джерело механічної енергії – електродвигун; привод головного руху; шпindelний вузол; привод механізму подач (різця, фрези тощо); система керування; система змащування, подачі ЗОР тощо. Кожна з цих ланок за більш деталізованого розгляду сама є механічною системою, яка може складатись також з механічних систем нижчого порядку. Ці частини великої механічної сис-

теми є її функціональними частинами, які також можна зобразити ідеалізованими фізичними моделями – **динамічними моделями**.

Щоб скласти динамічну модель механічної системи потрібно мати її структурну схему та, наприклад кінематичну, гідравлічну, пневматичну принципів схеми чи їх комбінації, в яких виділені вхідні ланки, зв'язані з двигуном – джерелом механічної енергії (руху) та виконавчі ланки (робочі), до яких прикладено сили корисного опору.

Як вже відмічалось, динамічна модель – це ідеалізована фізична модель. Вид динамічної моделі залежить від способу ідеалізації реальної системи. Найбільш простий спосіб ідеалізації – це перехід від реальних ланок системи (механізмів, деталей тощо) до ланок **жорстких** [8, 9].

Цей перехід ґрунтується на таких припущеннях:

- всі ланки системи є абсолютно (absolute) твердими тілами;
- гнучкі ланки (паси, ланцюги, троси тощо) вважаються такими, що не розтягуються;
- текучі (рідкі) ланки, наприклад в гідроприводах, пневмоприводах, гідротата пневмопередачах є нестисливими;
- кінематичні пари ідеально реалізують ті рівняння зв'язків, якими вони описуються, а саме – в шарнірах і поступальних парах відсутні зазори та деформації поверхонь дотику, поверхні вищих кінематичних, які дотикаються між собою, точно виготовлені та не деформуються під час передачі зусиль і т. п.

Динамічна модель механічної системи, складена із жорстких ланок, називається динамічною моделлю машини (системи) із жорсткими ланками. В такій моделі координати всіх матеріальних точок є функції однієї змінної – узагальненої координати  $q$  [8]:

$$x_i = f(q); (i = 1, \dots, n), \quad (2.1)$$

де  $x_i$  – декартові координати окремих ланок моделі, які розглядаються як абсолютно тверді тіла.

Пружна (resilient) та дисипативні (dissipation) ланки реальної механічної системи часто мають малі маси (моменти інерції мас) порівняно з рухомими ланками. В таких випадках ці ланки вважаються **пружно-дисипативними безінерційними елементами, тобто безмасовими**.

Якщо кожне з абсолютно твердих тіл такої системи через накладені в'язі має один ступінь вільності, то динамічна модель такої механічної системи з пружними ланками називається **одновимірною**. Приклади такого типу моделей зображено на рисунку 2.1, а), б), в).

На рисунку 2.1, а), б) відмічено:  $m$  – маса жорсткої ланки системи;  $k, c$  – відповідно, жорсткість пружного елемента та коефіцієнт дисипативного опору, наприклад, в'язкого тертя;  $F$  – рушійна сила;  $x \equiv q$  – узагальнена координата переміщення маси  $m$ ;  $I_m$  – момент інерції (inertia) маси диска;  $k_\varphi$  – крутильна

жорсткість пружного елемента;  $C_\varphi$  – крутильний коефіцієнт дисипативного опору;  $T$  – рушійний обертальний момент;  $\varphi \equiv q$  – кут повороту диска – узагальнена координата обертального руху диска.

Динамічна модель, зображена на рис. 2.1, в) складається з чотирьох жорстких ланок – ротора двигуна  $O$ , пари зубчастих коліс 1 і 2 та виконавчої ланки 3.

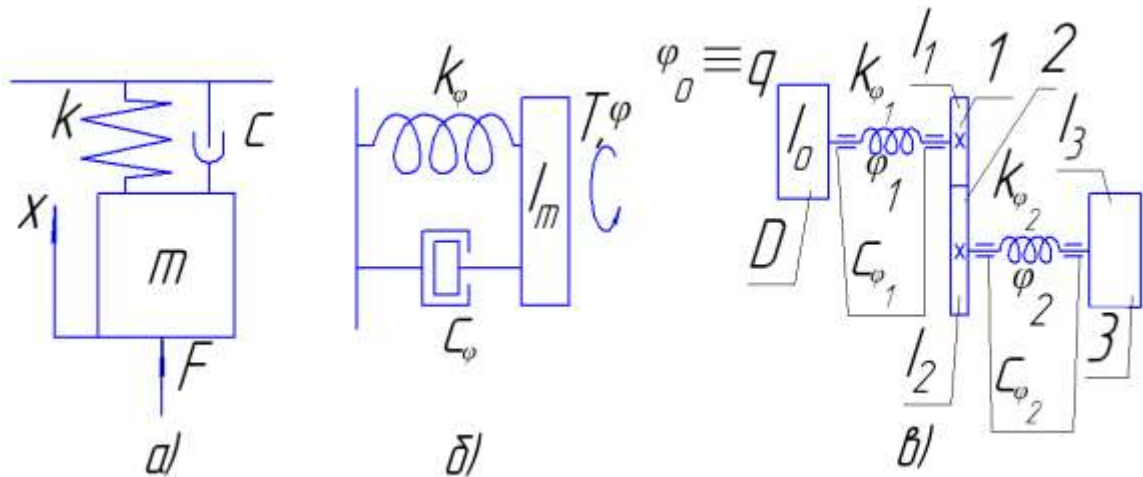


Рисунок 2.1 – Одновимірні динамічні моделі

Вали цієї системи вважаються безінерційними пружними елементами з коефіцієнтами крутильної жорсткості відповідно  $k_{\varphi_1}$  та  $k_{\varphi_2}$ , а підшипники – безінерційні дисипативні елементи, що характеризуються коефіцієнтами опору  $C_{\varphi_1}$  та  $C_{\varphi_2}$ . Ця модель має три ступеня вільності – кут  $q \equiv \varphi_0$  повороту ротора двигуна та кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  закручування валів. Якщо зубчасті колеса (вищі кінематичні пари) складаються з елементів, що не деформуються, то  $\varphi_1 = f_1(q)$  і  $\varphi_2 = f_2(q)$ , а це означає, що динамічна модель, зображена на рис. 1, в) є також **одновимірною**.

Якщо ж будь-яка із ланок динамічної моделі (жорстких) має більше одного ступеня вільності, то така динамічна модель називається **багатовимірною**. Наприклад, якщо в динамічній моделі, зображеній на рис. 2.1, в), врахувати податливість підшипників чи зубчастих вінців коліс, то така модель стане **багатовимірною**.

В динамічних моделях, зображених на рисунках 2.1, в) і 2.2 всі жорсткі ланки з'єднані послідовно пружними та дисипативними елементами. Такі моделі пружних машин називаються ланцюговими. Модель, зображена на рис. 2.2, є одновимірною з **двома ступенями** (degree) **вільності** (fluency). Ланцюгові динамічні моделі можуть бути **розгалужені незамкненими** та **замкненими** (рис. 2.3, а), б).

На рис. 2.3, а), б) зображено дві динамічні моделі механічних приводів: рис. 2.3, а) – розгалужена одновимірна ланцюгова модель, де двигун з  $I_0$  і  $q \equiv \varphi_0$

(всі позначення на схемах рис. 2.3, а), б) мають такий самий зміст, як і на схемі, що зображена на рис. 2.1, в) приводить в рух дві виконавчі ланки 1 та 2. Друга динамічна модель (див. рис. 2.3, б) – це замкнена система з попереднім натягом зубчастих коліс, призначена для приведення в рух виконавчої ланки 1.

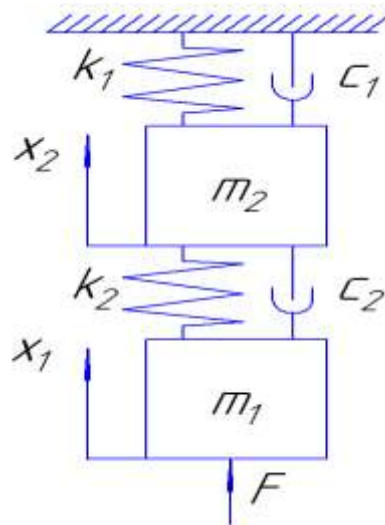


Рисунок 2.2 – Ланцюгова динамічна модель

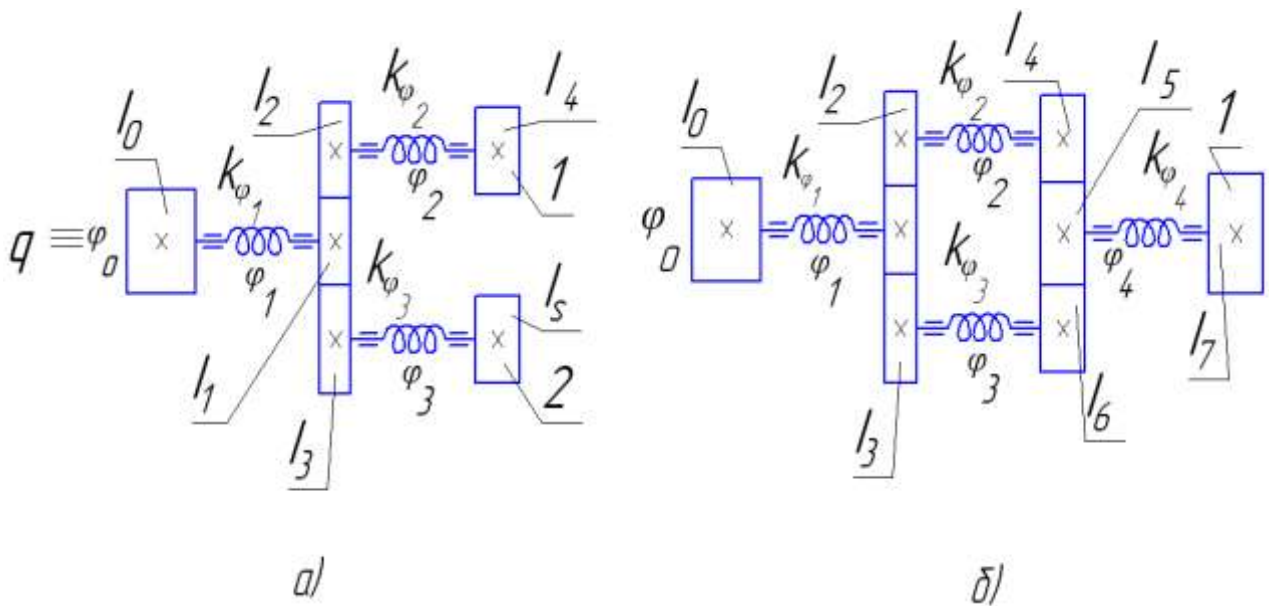


Рисунок 2.3 – Розгалужені одновимірні ланцюгові динамічні моделі

Такого типу механізми застосовуються в пристроях для вибирання зазорів, наприклад, в механізмах подач верстатів. У вигляді розгалуженої схеми можна зображати не тільки динамічні моделі механізмів обертального руху, а й з іншим видом переміщення ланок, наприклад, для двокаскадного генератора імпульсів тиску (ГІТ) гідроімпульсного привода гідравлічна ланка зображена як безінерційне тіло Кельвіна – Фойгта (рис. 2.4).

На рис. 2.4 позначено:  $m_1$  та  $m_2$  – маси клапанів першого і другого каскадів ГІТ;  $k_1, k_2, C_1, C_2$  – відповідно коефіцієнти жорсткості пружин, що навантажують клапани, і коефіцієнти дисипативного опору переміщенню цих клапанів;  $k_0$  і  $C_0$  – відповідно жорсткість і коефіцієнт дисипативного опору деформації гідравлічної безінерційної ланки (тіло Кельвіна – Фойгта);  $\dot{x}_{or}$  – швидкість деформації (deformation) гідравлічної ланки. Якщо яке-небудь з твердих тіл, що входять в механічну систему, має більше одного ступеня вільності, то динамічна модель такої системи називається **багатовимірною**. Наприклад, якщо в моделях, зображених на рис. 2.1, в) і рис. 2.3, а, б врахувати податливість опор (підшипників), то

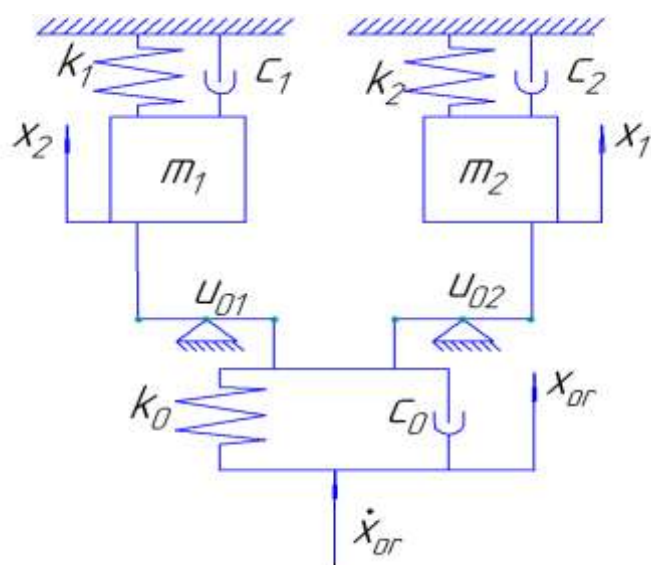
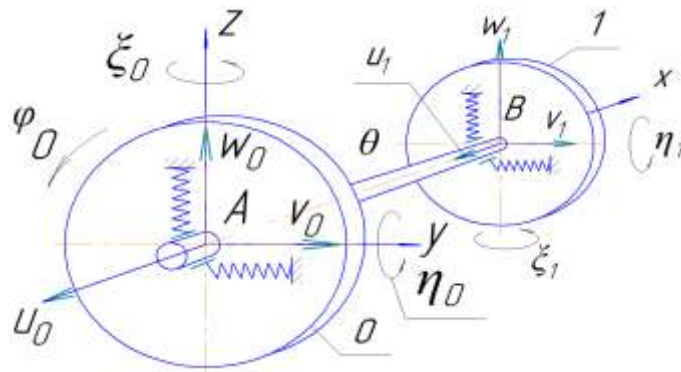


Рисунок 2.4 – Динамічна модель двокаскадного генератора імпульсів тиску (ГІТ) гідроімпульсного привода

зубчасті колеса набудуть додаткових ступенів вільності, що, відповідно, приведе до збільшення числа узагальнених координат і ці моделі стануть **багатовимірними**. В багатовимірних моделях може бути, наприклад, одна узагальнена координата та багато, так званих, «деформаційних (deformation) координат (coordinate)», оскільки будь-яке вільне тіло має шість ступенів вільності. Якщо такі тіла з'єднати в систему з  $n$  мас безінерційними елементами, то число ступенів вільності такої системи буде  $6n$ .

Приклад динамічної моделі простої двомасової багатовимірної механічної системи, що має 12 ступенів вільності за однієї узагальненої координати та 11 «деформаційних координат», зображено на рисунку 2.5. У багатовимірних системах пружні елементи, що з'єднують тверді тіла, знаходяться в складних напружених станах.

Динамічні моделі механічних систем, що складаються з абсолютно твердих тіл, називаються **дискретними**.



$u_0, v_0, w_0$  – переміщення т. А;  $\varphi_0, \xi_0$  – кути повороту тіла 0 навколо осей  $x, y, z$ ;  $u_1, v_1, w_1$  – переміщення т. В;  $\theta$  – кут закручування вала;  $\eta_1, \xi_1$  – кути повороту тіла 1.

Рисунок 2.5 – Динамічна модель простої двомасової багатовимірної механічної системи

В інженерній практиці та під час наукових досліджень бувають випадки, коли таке зображення механічної системи є неадекватне реальному об'єкту. В таких системах пружно-дисипативні елементи вже не можна вважати безінерційними (безмасовими). Динамічна модель системи, де пружно-дисипативні елементи наділені масами, а в жорстких ланках враховується їх деформовуваність, називається **динамічною моделлю із розподіленими параметрами**. Наприклад, такою системою стане динамічна модель, зображена на рис. 2.5, якщо в ній врахувати масу пружного вала або деформовуваність тіл 0 і 1.

## 2.2 Математичні моделі як абстрактні моделі

Виявити причинно-наслідкові зв'язки в досліджуваному об'єкті (object), насамперед найбільш суттєві, можна за допомогою **відповідної концептуальної моделі** [5, 6], різновидом якої є **математична модель об'єкта, складена на основі його динамічної моделі**.

**Математична модель – абстрактна (abstract) модель** [5, 6, 10], наприклад, механічної системи, зображена у вигляді функціональних математичних залежностей між ланками і параметрами динамічної моделі. Ці залежності конкретизують причинно-наслідкові зв'язки, виявлені в динамічній чи концептуальній моделі, та кількісно їх характеризують.

Таким чином, **математична модель – це спеціальний об'єкт** [5, 6], який певним чином замінює **оригінал** реальної механічної системи.

Не може бути в принципі математичної моделі, яка б була повним еквівалентом оригінала механічної системи. Будь-яка модель, динамічна чи математична, відображає тільки окремі сторони оригінала. В цьому й полягає складність процесу моделювання, оскільки виникає проблема вибору таких причинно-наслідкових зв'язків в об'єкті досліджень, які б дозволили отримати найбі-

льше достовірних знань про об'єкт і його поведінку за різних факторів зовнішнього впливу на нього.

Станом на сьогодні під час аналізу та синтезу складних систем, зокрема і механічних, найбільш розвиненим є **системний підхід** [5, 6], який відрізняється від класичного підходу, котрий ще називають **індуктивним**. Згідно з класичним підходом механічну систему, чи іншу складну систему, розглядають з позицій переходу від окремого до загального та синтезують (конструюють) систему шляхом злиття її елементів, які розробляють окремо. **Системний же підхід передбачає послідовний перехід від загального до окремого**, коли в основі розгляду лежить **мета** [5, 6], причому досліджуваний об'єкт виділяється з навколишнього середовища.

**Системний підхід дозволяє розв'язати проблему побудови** складної механічної чи іншої складної системи із врахуванням всіх факторів і можливостей, пропорціональних їх значущості, на всіх етапах дослідження системи та побудови її моделі, динамічної та математичної. Системний підхід означає, що кожна система є **інтегрованим цілим** [5, 6] навіть тоді, коли вона складається з окремих роз'єднаних підсистем. Таким чином, в основі системного підходу лежить розгляд системи як інтегрованого цілого, причому цей розгляд під час розробки системи починається з головного – **формулювання мети** (goal) [5, 6] функціонування системи.

Побудова математичної моделі системи відноситься до числа системних задач, розв'язок яких синтезують на базі великого числа вихідних даних. За таких умов розв'язку системний підхід дозволяє не тільки побудувати математичну модель системи реального об'єкта, але й на базі цієї моделі вибрати необхідну кількість керівної інформації в реальній системі, оцінити показники її функціонування і через це шляхом моделювання знайти найбільш ефективний варіант побудови та оптимальний режим роботи самої реальної системи.

Методика моделювання реальної системи безпосередньо залежить від рівня моделювання, тобто від ступеня деталізації опису об'єкта моделювання.

### **2.3 Рівні моделювання: структурний (імітаційний); логічний; кількісний (аналіз). Характеристики стану системи в математичних моделях. Види математичних моделей та структурна схема (загальна) побудови математичних моделей**

Залежно від ступеня деталізації опису складних систем і їх елементів можна виділити **три основних рівні моделювання** [5, 6]:

1) рівень (level) структурного або імітаційного моделювання складних систем з використанням їхніх алгоритмічних моделей (моделюючих алгоритмів) і застосуванням спеціалізованих мов моделювання, теорії множин, алгоритмів, формальних граматики, графіків, масового обслуговування, статистичного моделювання;

2) рівень логічного моделювання функціональних схем елементів і вузлів складних систем, моделі яких зображаються у вигляді рівнянь безпосередніх зв'язків між елементами та вузлами (логічних рівнянь) і будуються із застосуванням апарата двозначної або багатозначної алгебри логіки [3];

3) рівень кількісного моделювання (аналізу) принципів схем елементів складних систем, математичні моделі яких зображаються у вигляді систем нелінійних алгебраїчних, або інтегрально-диференціальних (differential) рівнянь (equation) і досліджуються із застосуванням методів функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної статистики [5, 6, 12 – 14] тощо.

Сукупність моделей об'єкта на структурному, логічному та кількісному рівнях моделювання є ієрархічною системою, що розкриває взаємозв'язок різних сторін опису об'єкта та забезпечує системну зв'язність його елементів і властивостей на всіх стадіях процесу проєктування об'єкта.

Як підсумок нашої лекції дамо таке, якоюсь мірою завершене, формулювання поняття **математичної моделі**.

**Математична модель системи, зокрема і механічної**, – це сукупність математичних співвідношень (формул, нерівностей, рівнянь, логічних співвідношень), що визначають характеристики станів системи залежно від її параметрів, умов однозначності (геометричних, фізичних, початкових і межових), вихідних сигналів, включно й випадкові, та часу.

Характеристики стану системи в математичних моделях можуть визначатись у вигляді [5, 6]:

1) явних функцій від параметрів системи, вхідних сигналів, початкових умов, інших умов однозначності та часу;

2) системи рівнянь відносно характеристичних станів системи та вихідних сигналів, причому параметри системи входять в коефіцієнти рівнянь, а вхідні сигнали – в праві частини цих рівнянь.

Залежно від специфіки зв'язків характеристик стану системи з її параметрами, вхідними сигналами тощо, розрізняють [5, 6]:

– детерміновані математичні моделі системи, в яких в заданий момент часу характеристики стану однозначно визначаються через вказані величини;

– ймовірнісні (стохастичні) математичні моделі системи, в яких за допомогою математичних співвідношень можна визначити лише розподілення характеристик стану системи за заданими ймовірнісними характеристиками (розподіленнями) її параметрів, вхідних сигналів, початкових умов тощо.

За ознакою подальшого використання математичні моделі можуть бути **аналітичними** (analytical) та **імітаційними** (imitative) [5, 6].

**Аналітичні моделі забезпечують** достатньо високий ступінь деталізації системи, але не завжди дозволяють отримати висновки загального характеру про функціонування системи.

**В імітаційній математичній моделі** можуть враховуватись такі особливості складних систем, як наявність в одній і тій самій системі елементів неперервної та дискретної дії, нелінійні співвідношення будь-якого характеру, що

описують зв'язки між елементами, вплив багаточисельних випадкових факторів складної фізичної природи тощо.

Загальний процес побудови математичної моделі системи чи явища можна зобразити у вигляді такої схеми ( рис. 2.6 ).

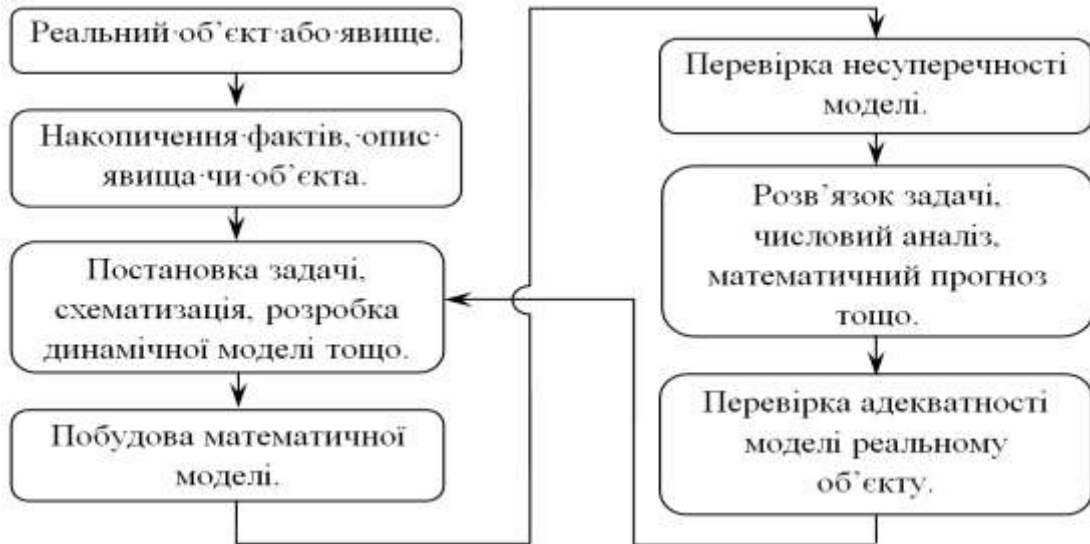


Рисунок 2.6 – Загальна схема побудови математичної моделі

Якщо перевірка адекватності математичної моделі реальному об'єкту досліджень не підтверджує цієї адекватності, то потрібно повернутись в пункт «постановки задачі» (рис. 2.6), внести відповідні корективи та повторити процес побудови математичної моделі системи чи явища.

## 3 ОДНОМАСОВІ ТА БАГАТОМАСОВІ ДИНАМІЧНІ І МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

### 3.1 Одномасові та багатомасові динамічні моделі механічних систем

Визначення та загальна характеристика динамічних моделей механічних систем для зворотно-поступального і обертального руху жорстких ланок механічних систем наведено в розділі 2.

На жорсткі ланки механічної системи, крім сил пружно-дисипативного опору та рушійних сил, як було показано в прикладах розділу 2, можуть також діяти технологічні сили, які виникають під час виконання робочою ланкою механічної системи своїх функцій, та сили, наприклад, сухого тертя. Приклади такого типу динамічних моделей, одномасової та двомасової, наведено на рисунку 3.1, а), б).

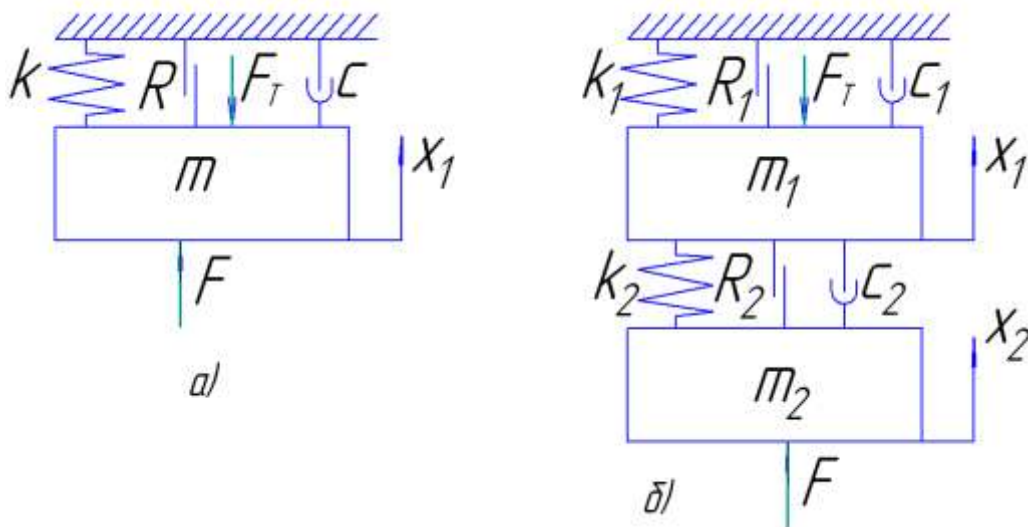


Рисунок 3.1 – Одномасова та двомасова динамічні моделі механічних систем

На рисунку 3.1, а), б) позначено:  $k, k_1, k_2$  – коефіцієнти жорсткості безінерційних пружних елементів динамічних моделей;  $C, C_1, C_2$  – коефіцієнти опору дисипативних безінерційних ланок динамічної моделі;  $R, R_1, R_2$  – сили сухого тертя, що виникають під час руху мас  $m, m_1$  і  $m_2$ ;  $F_T$  – сила технологічного опору, що виникає під час виконання робочою ланкою механічної системи корисної роботи;  $x, x_1, x_2$  – узагальнені координати переміщення мас  $m, m_1, m_2$ .

### 3.2 Характеристика рушійних сил і сил опору, що діють в механічних системах

Сили (force)  $F$ , які приводять в рух жорсткі (rigid) ланки (link) механічної системи (маси  $m, m_1, m_2$ , див. рис. 3.1, а), б) називаються **рушійними** або **ак-**

**тивними** силами. В загальному випадку ці сили можуть залежати від часу, вихідних параметрів механічної системи та їх похідних за часом, наприклад, узагальнених координат [5, 11, 15]:

$$F_r \equiv F = F_r(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n), \quad (3.1)$$

де  $r = 1, \dots, n$ .

Функції типу (3.1) можуть бути знайдені як результат досліджень робочих процесів різних механічних систем, але це виходить за межі. Формула (3.1) є певною ідеалізацією робочого процесу системи.

Активні сили за величиною та напрямком можуть бути постійними і змінними. До постійних сил, наприклад, відносяться сили ваги ланок системи або вага в транспортних машинах вантажів, що переміщуються.

Якщо рушійними ланками механічної системи є, наприклад, пружини, то такі активні сили називаються **позиційними** (positional) [8, 11, 15], величина (модуль) яких залежить від координат рухомих ланок механічної системи. Іншим прикладом такого типу рушійної сили може бути сила, яка приводить в рух поршень, наприклад, двигуна внутрішнього згорання (рис. 3.2). Сила, що приводить в рух поршень 1, є добутком тиску  $p$  в циліндрі 4 на площу поперечного перерізу  $A$  поршня. Ця сила  $F = pA$  змінюється в процесі переміщення поршня 1 залежно від робочого ходу  $x_p$  та швидкості  $\dot{x}_p$  і зміни тиску  $p$ , тобто сила є функцією типу

$$F = f(x_p, \dot{x}_p, p). \quad (3.2)$$

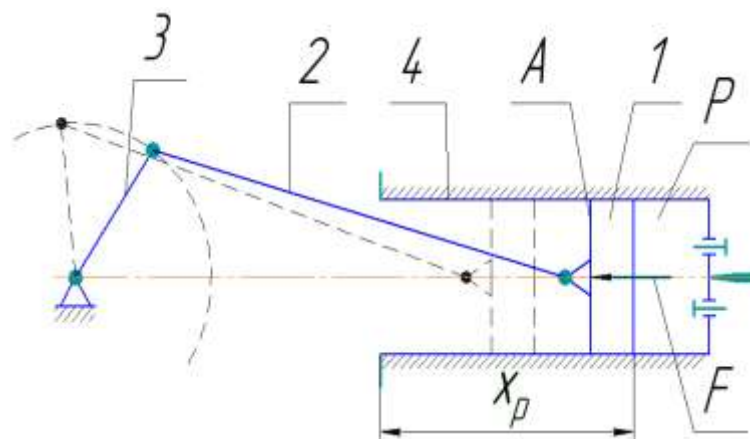


Рисунок 3.2 – Схема дії рушійної сили у двигуні внутрішнього згорання

Вид функції (3.2) загалом визначається термодинамічним (thermodynamic) процесом, що здійснюється в циліндрі 4 і геометричними параметрами кривошипно-повзунного механізму (поршень 1 – шатун 2 – кривошип 3 – колінчастий вал двигуна).

В інших випадках активні сили можуть бути тільки функціями швидкості виконавчої ланки механічної системи. Наприклад, обертальний момент на валу електродвигуна залежить тільки від кутової швидкості його ротора.

Рушійним (активним) силам в механічній системі протидіють сили опору (resistance), які можуть бути:

- постійними, наприклад, сили ваги та сили сухого тертя (friction);
- позиційними – сили опору, що створюються різного виду пружними елементами;
- сили, які є функціями швидкості (speed) ланок механічної системи, наприклад сили в'язкого тертя.

Сили технологічного опору, що виникають під час здійснення виконавчою ланкою робочого процесу, за своєю фізичною природою можуть бути функціями координат виконавчої ланки, її швидкості, положення та інших її параметрів. Ці функції визначаються видом технологічного процесу, що реалізується під час руху виконавчої ланки механічної системи.

Сили  $F_f$  тертя **визначаються фізичною природою тертя** [5, 6, 8, 11, 15]. Ці сили можуть бути постійними за модулем – сухе тертя  $F_f \equiv R = const$ , які направлені проти руху ланки механічної системи і змінюють свій напрям, коли змінюється напрям руху ланки (вектор (vector)  $\dot{x}$  змінює свій напрям). У цьому випадку в рівняннях руху силу тертя  $R$  записують у вигляді:

$$R = R_0 \cdot \operatorname{sgn} \dot{x}, \quad (3.3)$$

де функція  $\operatorname{sgn} \dot{x}$ , (читається «знак»  $\dot{x}$  чи «сігнум»  $\dot{x}$ ) є одиничною функцією, знак аргументу якої для:  $\dot{x} > 0$ ,  $\operatorname{sgn} \dot{x} = 1$ ;  $\dot{x} < 0$ ,  $\operatorname{sgn} \dot{x} = -1$ ;  $\dot{x} = 0$ ,  $\operatorname{sgn} \dot{x} = 0$ .

Сили тертя  $F_f$  можуть залежати від швидкості ланки [5, 8, 11, 15]:  $F_f = c \cdot \dot{x}^m$ , де  $c$  – коефіцієнт в'язкого тертя, що може бути в загальному випадку змінною величиною і залежати від багатьох факторів;  $m$  – показник степеня, значення якого визначається фізичною природою тертя. Найпростіший випадок, коли сила тертя пропорційна швидкості ланки в першому степені:

$$F_f = c \cdot \dot{x}, \quad (3.4)$$

де  $c = const$ .

Сила тертя  $F_f$  може бути пропорційною зміщенню ланок механічної системи. Це, так зване, **позиційне тертя** [11]. Фізичну природу такого тертя пояснимо на прикладі системи, зображеної та рис. 3.3. Система складається з вантажу масою  $m$ , жорстко закріпленого в ластових ресорах 1, 2 і 3, зібраних без попереднього натягу. Від положення рівноваги маса  $m$  може відхилитись вправо або вліво на якусь зміщення  $x$ . Під час відхилення маси  $m$  на  $x$  листові ресори будуть тертись між собою, причому сила цього тертя є пропорційною контактному тиску між ресорами, який виникає під час відхилення маси і є також пропорційним зміщенню  $x$ .

В межах пружної деформації листів ресор залежність між силою реакції  $F$  цієї системи ресор і зміщенням  $x$  маси  $m$  лінійна (рис. 3.4).

Позначимо через:  $k_1$  – жорсткість (rigidity) системи під час збільшення зміщення  $x$  за модулем;  $k_2$  – жорсткість системи під час зменшення абсолютного значення;  $k_0 = 0,5(k_1 + k_2)$  – жорсткість пружного елемента системи за відсутності тертя. Потрібно зауважити, що жорсткість  $k_1 > k_2$ , оскільки під час навантаження (loading) цієї системи ресор шляхом відхилення маси  $m$  на  $x$  зростає сила пружності, що спричиняє й зростання сили тертя між листами ресор, а під час розвантаження (unloading) (зменшення  $x$ ) сили пружності і тертя між ресорами зменшується, що зменшує й  $k_2$ .

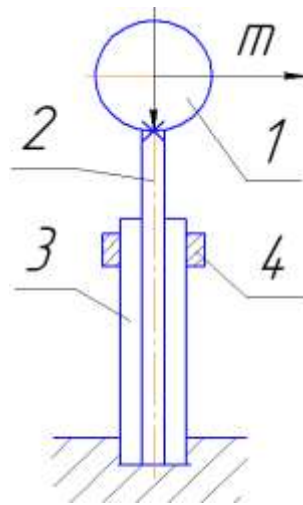


Рисунок 3.3 – Схема механічної системи з позиційним тертям

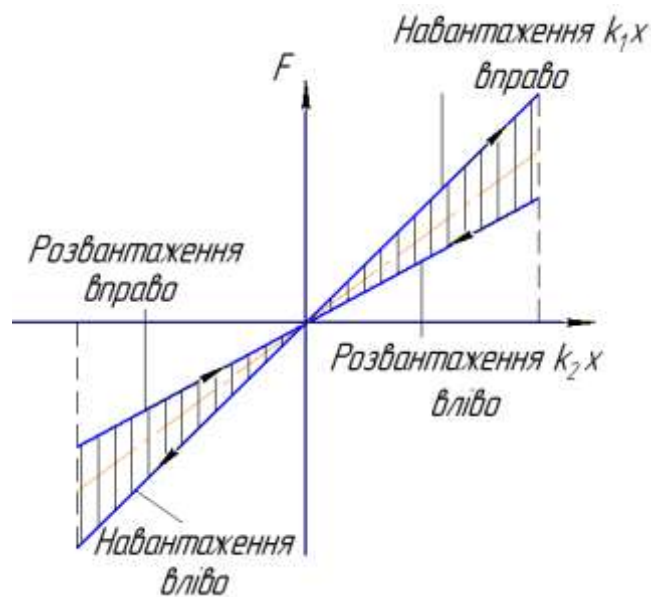


Рисунок 3.4 – Графічна залежність між силою реакції  $F$  системи ресор і зміщенням  $x$  маси  $m$

Іншими словами, під час навантаження розглянутої системи шляхом її зміщення на  $x$  від положення рівноваги, необхідно до маси  $m$  прикласти силу, більшу за суму сил пружності ресор і тертя між ними. Якщо масу  $m$  відпустити, то в положення рівноваги вона почне рухатись під дією сили пружності ресор, яка зменшена на величину сили тертя між ними.

В теорії коливань доводиться, що як і сухе та в'язке тертя, пропорційне тертя практично не впливає на частоту (frequency) власних (вільних) коливань пружних систем. Так для розглянутої системи за даними робіт [8, 11] частоти власних коливань системи, зображеної на рисунку 3, можна визначити за формулами для:

$$\text{навантаження} \quad \omega_{01} = \omega_0 \sqrt{1 + 0,5\delta}; \quad (3.5)$$

$$\text{розвантаження} \quad \omega_{02} = \omega_0 \sqrt{1 - 0,5\delta}, \quad (3.6)$$

де  $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$  – власна частота коливань системи в стані рівноваги (консервативної системи);  $\delta = \ln(k_1/k_2) \approx (k_1 - k_2)/k_0$  – логарифмічний декремент затухання коливань системи. За малого затухання ( $C_1 - C_2 \ll C_0$ ) і  $\omega_{01}$  та  $\omega_{02}$  за таких умов мало відрізняються від  $\omega_0$  (на величину другого порядку малості).

### 3.3 Побудова математичних моделей механічних систем на основі їхніх динамічних моделей

Для побудови математичних моделей динамічних систем (моделей), наприклад, зображених на рисунку 3.1, а), б) можна використовувати різні методи, що розглядаються в курсі теоретичної механіки. Найбільш загальними є методи, які ґрунтуються на застосуванні варіаційного принципу Гамільтона або рівнянь Лагранжа II-го роду чи принципу Д'Аламбера [11, 15].

Щоб скористатись принципом Гамільтона або рівняннями Лагранжа II-го роду, необхідно попередньо скласти вирази для кінетичної (kinetic) енергії (energy)  $E_k$  системи, її потенціальної енергії  $E_n$  та віртуальної роботи  $\delta A_B$ , що діють на систему **неконсервативних** (non-conservative) сил.

**Неконсервативні сили** – це сили, робота яких залежить не тільки від початкового та кінцевого станів системи, але й від того, яким чином відбувався перехід від одного положення ланок системи до іншого. До неконсервативних сил відносяться, зокрема, сили тертя та зовнішні збуджувальні (рушійні) сили, що залежать від часу.

Величина потенціальної енергії  $E_n$  залежить від узагальнених координат  $x_r$  системи, а величина кінетичної енергії  $E_k$  – від координат  $x_r$  і узагальнених швидкостей  $\dot{x}_r = dx_r/dt$ .

Віртуальна робота подається у вигляді:

$$dA_B = \sum_r F_r dx_r, \quad (3.7)$$

де  $F_r$  узагальнені сили, які можуть залежати від координат, швидкостей і часу.

Згідно з принципом Гамільтона поряд з дійсним законом зміни узагальнених координат  $x_r(t)$  в інтервалі часу  $t_1 \ll t \ll t_2$  розглядається варіативний закон  $x_r(t)_B = x_r(t) + dx_r(t)$ , причому на межах інтервалу  $t_1$  та  $t_2$  координати не варіюються, тобто для  $t = t_1$  і  $t = t_2$   $dx_r = 0$ .

Гамільтоном встановлено, що за таких умов виконується рівність:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{d[E_K - E_{II}] + dA_B\} dt = 0. \quad (3.8)$$

Оскільки  $E_K$ ,  $E_{II}$  і  $\delta A_B$  залежать від законів зміни в часі узагальнених координат, то ці закони можна визначити методами варіаційного числення. Відповідно до зробленого зауваження, для кожної узагальненої координати  $x_r(t)$  має виконуватись диференціальне рівняння, аналогічне відомому з варіаційного числення рівнянню Ейлера [15]:

$$\frac{\partial}{\partial x_r} (E_K - E_{II}) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}_r} (E_K - E_{II}) \right] - F_r = 0. \quad (3.9)$$

Якщо врахувати, що потенціальна енергія залежить тільки від координат і не залежать від швидкостей, то з (9) отримаємо рівняння Лагранжа II-го роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_r} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial x_r} + \frac{\partial E_{II}}{\partial x_r} - F_r = 0. \quad (3.10)$$

Найчастіше для складання рівнянь руху ланок механічних систем використовують квазістатичні способи, що ґрунтуються на застосуванні принципу Д'Аламбера, який полягає в тому, що розглядають рівновагу динамічної системи з **прикладеними до неї силами інерції** (inertial).

Застосуємо наведені принципи складання рівняння руху для динамічної моделі, зображеної на рисунку 3.1, а).

**Принцип Лагранжа.** Кінетична енергія маси  $m_1$ , під час її руху в напрямку  $x$ ,  $E_K = m_1 \dot{x}_r^2 / 2$  (тут  $x_r = x$  – узагальнена координата руху маси  $m_1$ ). Потенціальна енергія динамічної моделі  $E_{II} = m_1 g x + kx^2 / 2$ . узагальнена сила  $F_r = F - F_T - R - c \cdot \dot{x}$  (тут  $c \cdot \dot{x}$  – сила в'язкого тертя,  $R = Rsgn\dot{x}$ ). Знаходимо:

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} \right) = m_1 \ddot{x}; \quad \frac{\partial E_K}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial E_{II}}{\partial x} = m_1 g + kx.$$

Отримані залежності підставляємо в рівняння (3.10), звідки знайдемо рівняння руху маси  $m_1$ :

$$m_1 \ddot{x} + m_1 g + kx = F - F_T - Rsgn\dot{x} - c\dot{x} \quad (3.11)$$

або

$$m_1 \ddot{x} = F - kx - c\dot{x} - F_T - Rsgn\dot{x} - m_1 g. \quad (3.12)$$

**Принцип Д'Аламбера.** Сила інерції  $F_{ін} = m\ddot{x}$ , що виникає під час прискореного (уповільненого) руху маси  $m_1$ . Ця сила  $F_r$  діятиме проти напрямку руху маси  $m_1$ . Сили позиційні – пружного опору та ваги – знаходяться за відомими залежностями:  $F_{пр} = kx$  і  $F_g = m_1g$ . Сили тертя: сухого  $-R = Rsgn\dot{x}$ ; в'язкого  $-R_{ТВ} = c\dot{x}$ . За принципом рівноваги сил в статиці проектуємо всі названі сили на напрям  $x$ :

$$-m_1\ddot{x} - kx - Rsgn\dot{x} - c\dot{x} - F_T - m_1g + F = 0 \quad (3.13)$$

або

$$m_1\ddot{x} = F - kx - c\dot{x} - F_T - Rsgn\dot{x} - m_1g. \quad (3.14)$$

Для динамічних систем, коли не складно математично описати характер сил, що діють в системі, принцип Д'Аламбера для складання рівнянь руху є більш простим. Якщо ж знаходження виразів для кінетичної та потенціальної енергії, а також узагальненої неконсервативної сили і координати не викликає значних інтелектуальних затрат, то можна також використовувати рівняння Лагранжа II-го роду.

## 4 МЕТОДИ АНАЛІЗУ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

### 4.1 Методи спрощення математичних моделей механічних систем. Структура припущень під час побудови математичних моделей

Реальні механічні системи або будь-які інші динамічні системи та їх функціонування можуть бути дуже складними. Врахувати всі фактори, що визначають хід динамічних процесів в таких системах, а описати їх повною мірою в математичній моделі може бути дуже складно або практично неможливо. В таких випадках математичні моделі, як правило, спрощують. Найбільш поширеними є такі методи спрощення математичних моделей [5, 6, 13, 14]:

- розчленування складної системи на більш прості підсистеми – **декомпозиція** (decomposition);
- виділення суттєвих властивостей і дій (впливів) за умови врахування несуттєвих або неврахованих властивостей і впливів в параметричній (parametric) формі – **метод макромодельовання**;
- лінеаризація (linearization) нелінійних (nonlinear) процесів в деякій області зміни змінних загальноприйнятим методом малих відхилень;
- зведення систем з розподіленими параметрами до систем із зосередженими параметрами;
- нехтування динамічними властивостями процесів, що описуються в математичній моделі.

В загальному випадку кінцевою метою метода декомпозиції є розбиття простору змінних  $\{y_1, y_2, \dots, y_q, x_1, x_2, \dots, x_p, V_1, V_2, \dots, V_r, f_1, f_2, \dots, f_s\}$ , де  $\vec{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ,  $\vec{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$  – відповідно збурення, які можна спостерігати та які не можна контролювати, на  $q$  підпросторів менших розмірностей ( $\dots$ ), в яких враховується тільки зв'язок заданого виходу  $y_i$  з відповідними змінними. **Якщо ж будь-який вихід  $y_i$  має зв'язок з іншими виходами, то в цьому випадку декомпозиція практично неможлива.**

У випадку застосування для спрощення вихідної математичної моделі методу **макромодельовання** у вихідному просторі змінних залишаються (враховуються) тільки ті з них, які впливають на вихідні змінні найбільш сильно. Інші невраховані впливи можуть бути враховані в параметричній формі шляхом зміни коефіцієнтів біля врахованих змінних для випадку мультиплікативних впливів або шляхом введення вільних членів рівнянь для випадку адитивних впливів (таких, що додаються).

Для побудови спрощених математичних моделей, в яких враховуються тільки суттєві впливи, широко використовують метод **адаптивної (adaptive) моделі**. В цій моделі коефіцієнти рівнянь підлаштовуються таким чином, щоб міра розходження (відхил) – виходів моделі та об'єкта досліджень мала **припустимі (мінімальні) значення**. Якоюсь мірою метод макромодельовання широко використовується в теплофізиці та гідродинаміці шляхом застосування теорії

подібності (similarity), коли вплив декількох факторів враховується через числа (критерії) подібності [7], наприклад, число Рейнольдса  $Re = V \cdot d/\nu$ , Пекле  $Pe = V \cdot d/a$  (тут  $V$  – швидкість потоку (stream);  $d$  – діаметри труби – характерний розмір;  $\nu = \mu/\rho$  – кінематична в'язкість рідини;  $\mu$  – динамічна в'язкість рідини;  $\rho$  – густина рідини;  $a = \lambda/(c_p \cdot \rho)$  – коеф. температуропровідності;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності тіла (рідкого);  $c_p$  – питома теплоємність рідини за сталого тиску (pressure)).

Для лінеаризації нелінійних процесів в математичних моделях застосовують різні способи. Часто використовують спосіб прямої лінеаризації, наприклад, під час аналізу математичних моделей, що описують коливальні процеси в механічних системах [11, 16]. Пояснимо метод (спосіб прямої лінеаризації на такому прикладі. **Вільні (власні) коливання** (oscillation) системи [16], зображеної на рис. 4.1, а), під дією узагальненої відновлювальної сили  $F(x_r)$  здійснюються за законом, графік якого наведено на рис. 4.1, б).

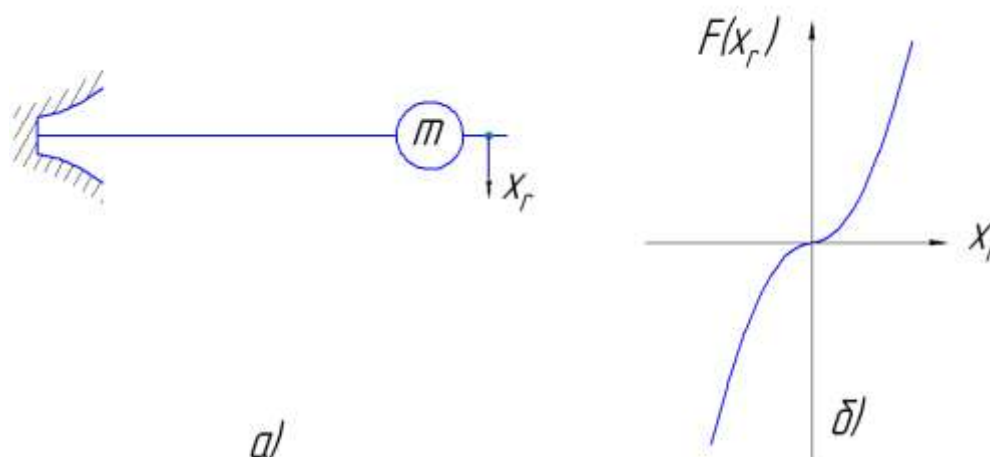


Рисунок 4.1 – Динамічна система а) та графік б) її вільних (власних) коливань

В загальному випадку цю динамічну модель можна описати диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x}_r + F(x_r) = 0, \quad (4.1)$$

де  $F(x_r) = \partial E_{\text{п}}/\partial x_r$  називають квазіупругою характеристикою або характеристикою жорсткості системи;

$m$  – зведена маса системи.

Згідно з рис. 4.1, б), математична модель (4.1) нелінійна.

Спосіб прямої лінеаризації ґрунтується на заміненні нелінійної характеристики  $F(x_r)$  деяким еквівалентним лінійним виразом

$$F_*(x_r) = kx, \quad (4.2)$$

де  $k$  – коефіцієнт лінеаризації, значення якого знаходять за такими міркуваннями. Відхилення лінійної характеристики (4.2) від  $F(x_r)$  залежить від узагальненої координати  $x_r$  (рис. 4.2):

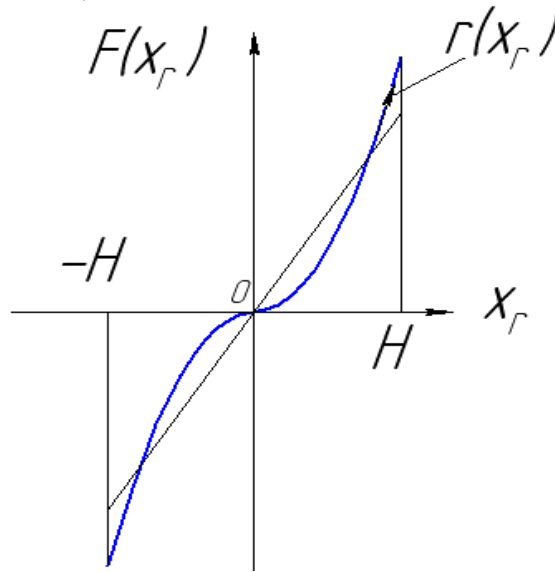


Рисунок 4.2 – Схема заміни нелінійної характеристики  $F(x_r)$  лінійною  $F_*(x_r) = kx$

$$r(x_r) = F(x_r) - kx_r, \quad (4.3)$$

яке, очевидно, залежить від вибору параметра  $k$ .

З рис. 4.2 очевидно, що відхилення  $r(x_r)$  будуть більш суттєвими за великих значень координати  $x_r$ . Візьмемо за міру відхилення добуток:

$$rx_r = [F(x_r) - kx_r]x_r. \quad (4.4)$$

Розглянемо інтегральне (integral) квадратичне відхилення в межах  $[-H, H]$ :

$$S = \int_{-H}^H (rx_r)^2 dx_r. \quad (4.5)$$

Мінімізація цього відхилення знаходиться відомим способом:

$$\frac{dS}{dk} = \frac{d\left(\int_{-H}^H \{F(x_r) - kx_r\}^2 dx_r\right)}{dk} = 0. \quad (4.6)$$

З (4.6), отримаємо:

$$k = \frac{5}{2H^5} \int_{-H}^H F(x_r) x_r^3 dx_r = \frac{5}{H^5} \int_0^H F(x_r) x_r^3 dx_r. \quad (4.7)$$

В теорії коливань [11, 16] також широко використовується методи гармонічного балансу, коли нелінійну функцію відновлювальної сили  $F(x_r)$  розкладають в ряд Фур'є і зберігають тільки перший член розкладення, а інші прирівнюють до нуля. Для лінеаризації вихідних нелінійних диференціальних рівнянь коливних систем також застосовують метод амплітуд, що повільно змінюються (метод осереднення), запропонований Балтазаром Ван дер Полем і розвинутий М. М. Криловим, М. М. Боголюбовим і Митропольським Ю. А. для широкого круга важливих задач динаміки. Метод ґрунтується на припущенні, що рух коливальної системи настільки мало відрізняється від гармонічного, що впродовж одного періоду коливань цією різницею можна знехтувати, але із зауваженням, що від періоду до періоду амплітуда та фаза коливання повільно змінюються.

Спосіб (method) зведення системи з розподіленими параметрами до системи із зосередженими пояснимо на простому прикладі (рис. 4.3). На валу 1 встановлено деталь 2, яка навантажена радіальною силою  $F_r$ . Довжина контактної поверхні деталі з відповідною поверхнею вала  $l$ . Інші розміри (необхідні) вказані на рис. 4.3. Необхідно на основі цієї моделі скласти **статичну** систему для визначення реакцій (reaction) в опорах вала та розрахунку згинального моменту в його небезпечному перерізі, а також побудувати відповідну цій системі математичну модель.

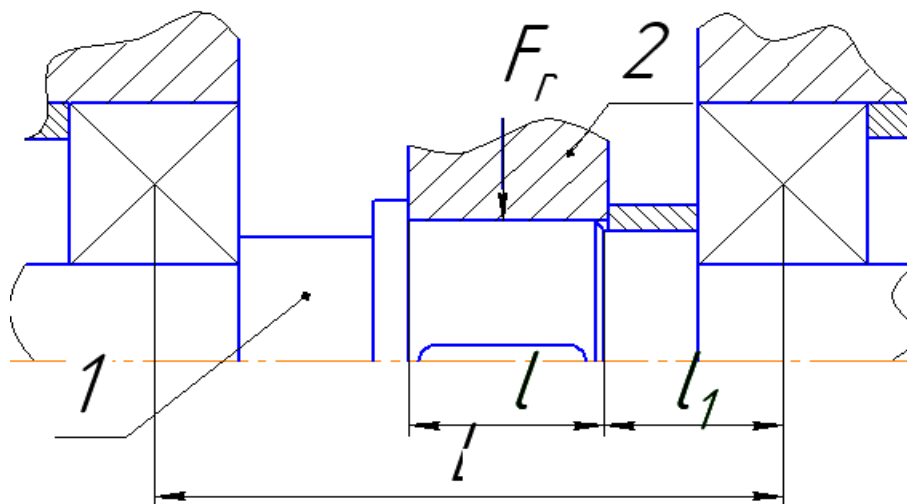


Рисунок 4.3 – Конструктивна схема вала для визначення реакцій в його опорах

Залежно від потрібної точності розрахунку цю просту задачу можна розв'язати принаймні двома способами:

1) точна статична (static) модель (рис. 4.4), в якій сила  $F$  розподіляється по довжині  $l$  поверхні контакту деталей 2 і 1 з інтенсивністю  $q = F/l$  (тут  $l_1 = 0,5(L - l)$ );

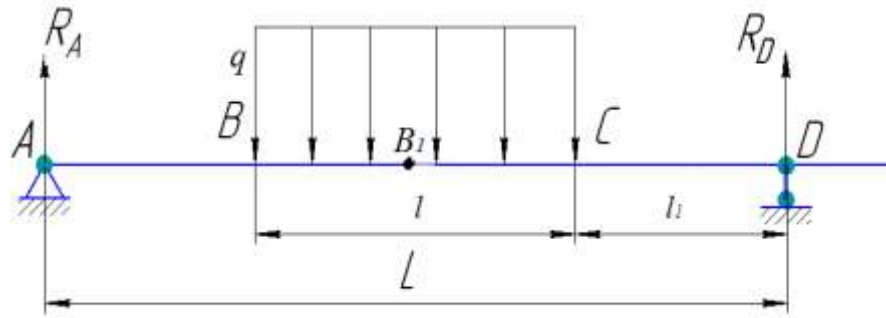


Рисунок 4.4 – Схема навантаження вала розподіленою силою  $q$

2) з метою спрощення розрахунку опорних реакцій в опорах  $A$  і  $D$  систему з розподіленням  $F$  по  $l$  можна замінити на систему із зосередженою силою  $F$ , прикладеною по середині довжини  $l$  (рис. 4.5).

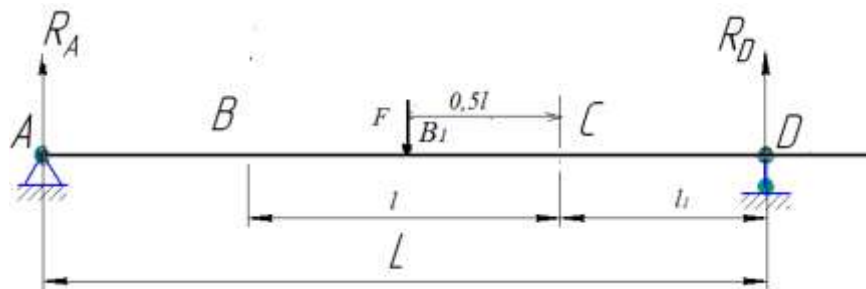


Рисунок 4.5 – Схема навантаження вала зосередженою силою  $F$

Нескладний розрахунок показує, що в обох системах  $R_A = R_D = 0,5F$ , а згинальний момент в небезпечному перерізі (т.  $B_1$  – на середині балки  $AD$ ) буде різним для:

- системи, показаної на рис. 4.4 –

$$M_{B_1} = 0,25 \cdot F \cdot (L - 0,25l); \quad (4.8)$$

- системи, наведеної на рис. 4.5 –

$$M_{B_1} = 0,25 \cdot F \cdot L. \quad (4.9)$$

Згинальний момент в поперечному перерізі вала в т.  $B_1$ , розрахований за (4.8), буде меншим знайденого за (4.9) на  $0,0625Fl$ . Якщо  $F = 3l$ , то похибка розрахунку згинального моменту за (4.9) становитиме 2,3 %.

Під час побудови математичних моделей, зазвичай, структуру вибирають відповідно до припущень. В загальному випадку структуру вибирають на основі **якісного аналізу фізики процесу з орієнтовною оцінкою значущості діючих факторів за їх ступенем впливу на динамічні та інші параметри системи, за заданою точністю розрахункових даних і за заданими межами їх зміни.**

Ця структура припущень перевіряється під час аналізу (дослідження) математичної моделі об'єкта, метою якого є визначення області найбільш ефективного використання моделі під час розв'язування інженерних задач і визначення меж зміни змінних, в яких ця модель справедлива.

Ефективність використання математичних моделей для дослідження реальних об'єктів проілюструємо на такому прикладі дослідження вимушених гармонічних коливань динамічних моделей осциляторів, зображених на рис. 4.6, *a*), *б*). Якщо розглядати коливання однієї маси  $m$  (рис. 4.6, *a*) під дією вимушеної гармонічної сили  $F(t) = F \sin \omega t$ , то на основі принципу Д'Аламбера можна скласти таку математичну модель:

$$m\ddot{x} + kx = F \sin \omega t, \quad (4.10)$$

де  $k$  – коефіцієнт жорсткості пружини (spring), на якій підвішено масу  $m$ ;

$F$  – амплітуда збуджувальної сили;

$x$  – поточна координата положення маси  $m$ ;

$\omega$  – кругова частота зовнішнього збудження.

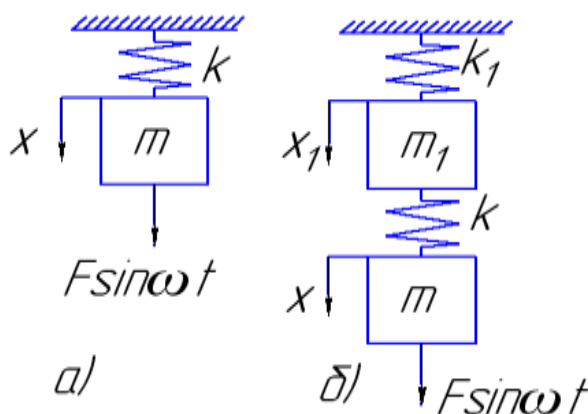


Рисунок 4.6 – Динамічні моделі осциляторів, здійснюючих вимушені гармонічні коливання

Після закінчення перехідного процесу, маса  $m$  буде коливатись з амплітудою (отримано після розв'язання (4.10):

$$H_0 = \frac{F}{|k - m\omega^2|}. \quad (4.11)$$

Якщо до маси  $m$ , що коливається, приєднати масу  $m_1$ , то математична модель такої динамічної моделі (рис. 4.6, *б*) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} mx + kx + k_1(x - x_1) = F \sin \omega t; \\ m_1 x_1 + k_1(x_1 - x) = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

де  $k_1$  – жорсткість пружини на якій підвішено до стояка масу  $m_1$ ;

$x_1$  – поточна координата маси  $m_1$ .

Розв'язуючи систему (4.12), знайдемо амплітуду усталених коливань мас  $m$  і  $m_1$ , відповідно:

$$H = \frac{F}{\left| k - m\omega^2 - \frac{m_1\omega^2 k_1}{k_1 - m_1\omega^2} \right|}; \quad (4.13)$$

$$H_1 = \frac{F k_1}{\left| (k_1 - m\omega^2 + k)(k_1 - m_1\omega^2) - k_1^2 \right|}. \quad (4.14)$$

Порівняємо значення амплітуд коливань маси  $m$   $H_0$  та  $H$  до і після приєднання маси  $m_1$ . Певним вибором параметрів  $k_1$  і  $m_1$  можна значно зменшити амплітуду коливань  $H$ . Умова такого зменшення ( $H < H_0$ ), легко виводиться за допомогою формул (4.11) і (4.13):

$$\left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right) \left( \frac{k_1}{m_1} - \omega^2 \right) < 0. \quad (4.15)$$

Ця нерівність (4.15) значить, що якщо власна частота  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  початкового осцилятора була більшою за частоту  $\omega$  вимушених коливань, то власна частота  $\omega_{01} = \sqrt{k_1/m_1}$  приєднаного осцилятора має бути меншою за  $\omega$  і навпаки.

Якщо  $k_1 - m_1\omega^2 \rightarrow 0$ , що те ж саме, якщо  $k_1/m_1 \rightarrow \omega^2$ , то амплітуда  $H \rightarrow 0$  (вираз  $(m_1\omega^2 k_1)/(k_1 - m_1\omega^2) \rightarrow \infty$ ), тобто амплітуду можна зменшувати як завгодно.

Таким чином, за умови  $\omega_{01} = \omega$ , маса  $m$ , до якої прикладено збуджувальну силу  $F(t)$ , коливатись не буде, а здійснювати коливальний рух буде маса  $m_1$ , на яку сила  $F(t)$  безпосередньо не діє. Цей висновок справедливий і для такої динамічної моделі з врахуванням тертя (демпфірування). На основі розглянутої динамічної моделі будують **динамічні гасники коливань** (вібрацій), наприклад, кораблів, літаків, космічних апаратів тощо.

З розглянутого прикладу можна зробити ще один важливий висновок: приєднана маса  $m$ , не має бути дуже малою, оскільки з формули (4.14) витікає, що за  $k_1 = m_1\omega^2$  величина  $H_1 = F/|k_1| = F/|m_1\omega^2|$  буде суттєво зростати за малих значень  $m_1$ .

## 4.2 Адекватність математичної моделі та об'єкта досліджень

Адекватність (adequate) математичної моделі та об'єкта досліджень передбачає відтворення моделлю з необхідною точністю всіх властивостей об'єкта, суттєвих для цілей конкретного дослідження.

Оскільки будь-яка модель має характер проекції об'єкта, то поняття адекватності **не абсолютне, а відносне** (relative). Це означає, що оцінка ступеня схожості (подібності) моделі та оригінала об'єкта досліджень може опиратись тільки на оцінку її відмінності від оригінала. Оцінювання відмінності природно

є дуже трудомістким, оскільки неможливо використати об'єкт в дійсній його цілісності для порівняння.

Поняття адекватності моделі ґрунтується на строгих, в математичному сенсі, поняттях **ізоморфізму** (isomorphism) та **гомоморфізму** (homomorphism) [6].

Об'єкт дослідження та його математична модель (дві системи) називаються **ізоморфними**, якщо між ними існує взаємно **однозначна відповідність**.

В загальному випадку забезпечення ізоморфізму моделі та об'єкта може бути не тільки важко виконати, але й надлишковим, оскільки складність математичної моделі в цьому випадку зробить неможливим будь-яке її спрощення.

**Гомоморфізм** на відміну від ізоморфізму не потребує взаємно однозначної відповідності моделі та об'єкта, а висуває вимогу **однозначної** відповідності моделі об'єкту, тоді як відповідність об'єкта моделі **не є однозначною**.

Ізоморфна математична модель має всі риси, що теоретично властиві об'єкту – оригіналу. У випадку намагання побудувати ізоморфну модель головна складність – це відшукування перетворення, яке устанавлює необхідну взаємно однозначну відповідність моделі та об'єкта.

**Приклад:** нехай системи  $S(S_1)$  та  $S(S_2)$  описуються математичними моделями:

$$S(S_1) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y; \\ \frac{dy}{dt} = x - y; \end{cases} \quad (4.16)$$

$$S(S_2) = \begin{cases} \frac{dU}{dt} = -U - V; \\ \frac{dV}{dt} = -U + V. \end{cases} \quad (4.17)$$

Щоб (4.16) і (4.17) були ізоморфними, необхідно здійснити перетворення:

$$R: \begin{cases} U \Rightarrow y; \\ V \Rightarrow -x. \end{cases} \quad (4.18)$$

яке перетворює з точністю до ізоморфізму одну систему в іншу.

Гомоморфізм визначає таку форму зв'язку між двома подібними об'єктами, коли однозначне лише в один бік перетворення дозволяє звести вихідну систему до більш простої, **гомоморфної вихідній**. Таку систему називають **гомоморфним образом** вихідної системи.

Поняття гомоморфної системи пояснимо за допомогою графічної ілюстрації [6], зображеної на рис. 4.7; де  $S(S_1)$  – система (області) точок на площині  $OXY$  (рис. 4.7, а);  $S(S_2)$  – прямокутники (рис. 4.7, б);  $S(S_3)$  – окремі точки (рис. 4.7, в).

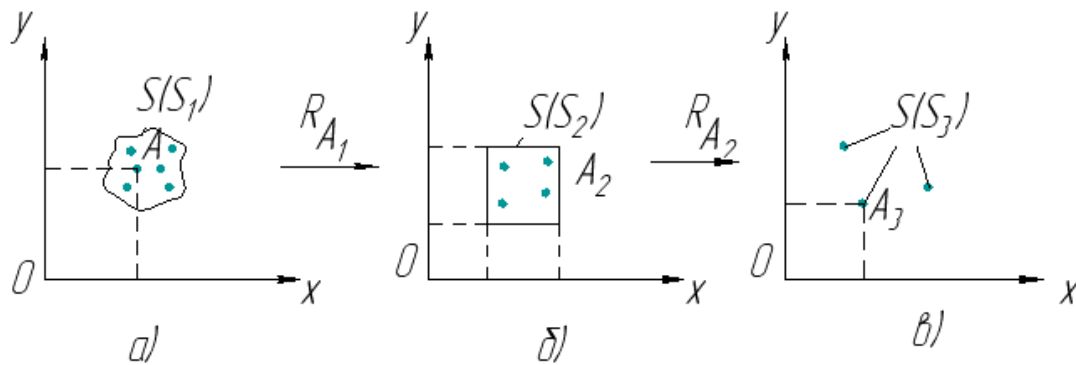


Рисунок 4.7 – Графічна ілюстрація поняття гомоморфної системи

Перетворення  $R_{A_1}$  установлює відповідність між т.  $A_1$  в системі  $S(S_1)$  та т.  $A_2$  прямокутника в системі  $S(S_2)$ , яка містить множину точок, що відповідають точкам з  $S(S_1)$ . Точку  $A_3$ , що відповідає прямокутнику  $S(S_2)$ , знаходимо за допомогою перетворення  $R_{A_2}$ . Таким чином, система  $S(S_3)$  є спрощеним гомоморфним образом системи  $S(S_1)$ . Кожній точці в системі  $S(S_3)$  відповідає множина точок в системі  $S(S_1)$ , тобто точка  $S(S_3)$  має більшу «вагу», ніж в  $S(S_1)$ .

Намагання знайти обернене перетворення  $R'$  з  $S(S_3)$  в  $S(S_1)$  не вдається. Це означає, що система  $S(S_3)$  подібна системі  $S(S_1)$  з точністю до гомоморфізму.

Кількісно ідентичність (адекватність) математичної моделі та об'єкта досліджень установлюється за допомогою кореляційного аналізу. Ступінь ідентичності моделі та об'єкта установлюється шляхом порівняння параметрів, розрахованих за моделлю і знайдених, наприклад, під час експериментальних досліджень об'єкта. Модель буде ідентичною об'єкту, якщо параметри, визначені за моделлю та експериментально, за однакових умов однозначності мінімально відрізняються один від одного, а ступінь відмінності між ними не виходить за межі заданого інтервалу точності.

## 5 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОІМПУЛЬСНИХ ПРИВОДІВ, ГІДРАВЛІЧНА ЛАНКА ЯКИХ ПРЕДСТАВЛЕНА ЯК ТІЛО КЕЛЬВІНА – ФОЙГТА

### 5.1 Основні співвідношення в гідравлічних ланках, представлених як тіло Кельвіна – Фойгта

В гідроімпульсних приводах (ГП) вібраційних технологічних машин (ВТМ) різного призначення, з метою отримання високих частот проходження імпульсів тиску, обмежують об'єм (volume) напірної порожнини (рис. 5.1, а, б). У цьому випадку для побудови динамічних і математичних моделей таких приводів доцільно використати так звану «пружно-зосереджену модель» [9, 12, 13] робочої рідини (енергоносія) (energy carrier), нехтуючи масою рідини в напірній (head) порожнині А. В цій моделі гідравлічну ланку (ГЛ) привода (drive) можна подати у вигляді тіла (body) Кельвіна – Фойгта, [13, 14], складеного з паралельно з'єднаних між собою безінерційних пружного  $k_0$  та дисипативного  $c_0$  елементів (рис. 5.1, б).

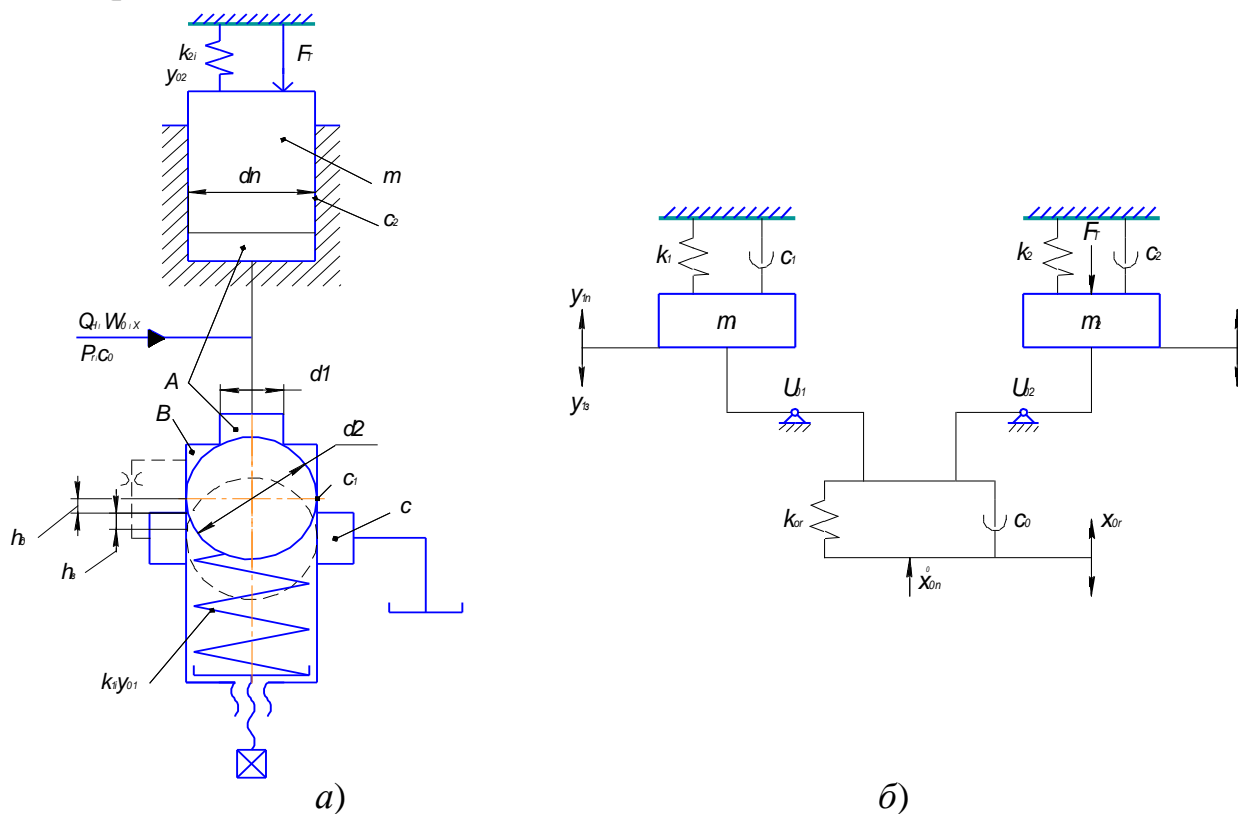


Рисунок 5.1 – Принципова схема а) та динамічна модель б) ГП простої ВТМ

Ця гідравлічна ланка впродовж робочого циклу деформується з певною швидкістю  $\dot{x}_{0r}$  та взаємодіє з рухомих ланками через передатні відношення

$$U_{0i} = A_i^2 \cdot A_0^{-2}, \quad (5.1)$$

де  $A_i$  – площа поперечного перерізу  $i$ -ї рухомої ланки привода;

$A_0$  – площа поперечного перерізу усередненої напірної гідролінії привода:

$$A_0 = \sum_{i=k}^n (l_k \cdot A_k) / \sum_{k=1}^n l_k, \quad (5.2)$$

де  $l_k, A_k$  – відповідно довжина та площа поперечного перерізу  $k$ -го напірного гідроканала (гідролінії) привода (див. рис. 5.1, а);

$\sum_{k=1}^n l_k = L_0$  – довжина ГЛ у вигляді тіла Кельвіна-Фойхта.

Жорсткість безінерційного пружного елемента ГЛ відносно площі  $A_0$  визначається за відомою залежністю [17]

$$k_{0r} = A_0^2 \kappa W_0^{-1}, \quad (5.3)$$

де  $\kappa$  – ізотермічний (isotherm) модуль пружності енергоносія.

Жорсткість  $k_{0r}$  під час робочого циклу привода змінюється внаслідок зміни об'єму напірної порожнини  $A$  привода через додавання (віднімання) до початкового об'єму  $W_0$  об'ємів енергоносія, що витрачаються на переміщення рухомих ланок енергоносія та на власне його стискання (compressibility) під дією високого тиску енергоносія.

Як показали теоретичні та експериментальні дослідження [12 – 14] ГП, ці добавки до об'єму  $W_0$  енергоносія малі і ними можна знехтувати. Це дозволяє вважати  $k_{0r} = const$ , що суттєво спрощує математичне моделювання ГП.

Зв'язок між тиском енергоносія  $p_r$  та деформацією  $x_{0r}$  ГЛ у формі тіла Кельвіна – Фойхта можна встановити на основі закону (Іав) Гука для рідини [9, 12 – 14, 17]

$$\Delta p = \varepsilon_v \cdot \kappa = \frac{\Delta W \cdot \kappa}{W_0} = \frac{A_0 \cdot x_{0r} \cdot \kappa}{W_0}, \quad (5.4)$$

де  $\Delta p = p_r - p_0$  – перепад (overfell) тиску в напірній порожнині  $A$  привода;

$\varepsilon_v = \Delta W / W_0$  – відносна об'ємна деформація енергоносія в напірній порожнині  $A$ , яку доцільно виразити через лінійну деформацію  $x_{0r}$ :

$$x_{0r} = \varepsilon_v \frac{W_0}{A_0} = var, \quad (5.5)$$

де  $\varepsilon_v = var$ ;  $W_0 = const$ ;  $A_0 = const$ . За  $p_0 = 0$ , формула (5.4) набуде вигляду

$$p_r = x_{0r} \cdot k_{0r} \cdot A_0^{-1}, \quad (5.6)$$

де  $A_0 \kappa W_0^{-1} = k_{0r} \cdot A_0^{-1}$  (див. (5.3)).

Жорсткість  $k_{0r}$  ГЛ привода можна приводити до будь-якої площі поперечного перерізу, зазвичай, рухомої ланки привода за формулою

$$k_{0i} = U_{0i} \cdot k_{0r}, \quad (5.7)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n$  – порядковий номер елементів ланок привода.

Формула (5.1) знаходиться із залежностей (5.3) і (5.7) за умови, що  $k_{0r} = const$  та  $k_{0i} = const$ .

Зважаючи на те, що енергоносій в гідроприводах, зокрема гідроімпульсних, відноситься до ньютонівських (крапельних) рідин, силу  $F_{A0}$  в'язкого опору дисипативного елемента ГЛ можна розраховувати за формулою [12 – 14]

$$F_{A0} = c_0 \cdot \dot{x}_{0r}, \quad (5.8)$$

де  $\dot{x}_{0r} = dx_{0r}/dt$  – швидкість деформації гідравлічної ланки (тіла Кельвіна – Фойгта), за припущення, що ця швидкість дорівнює швидкості потоку в усередненій гідролінії з діаметром умовного проходу  $d_0$ , а  $d_0 = 2\sqrt{(A_0/\pi)} \approx 1,13\sqrt{A_0}$  – діаметр усередненої напірної гідролінії привода;

$c_0 = \pi\mu d_0^2/4 \approx 0,785\mu d_0^2$  – коефіцієнт в'язкого опору деформуванню гідравлічної ланки;

$\mu$  – динамічна в'язкість енергоносія.

Деформацію  $x_{0r}$  та швидкість  $\dot{x}_{0r}$  деформації ГЛ можна приводити на основі формули (5.6) до будь-якої площі поперечного перерізу  $A_i$  рухомих ланок привода за залежностями:

$$\begin{cases} x_{Ai} = x_{0r} \cdot U_{0i}^{-0.5}; \\ \dot{x}_{Ai} = \dot{x}_{0r} \cdot U_{0i}^{-0.5}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Також можна приводити і силу  $F_{A0}$  до будь-якої площі  $A_i$  рухомої ланки привода:

$$F_{Ai} = U_{0i}^{0.25} \cdot c_0(\dot{x}_{Ai} \pm \dot{y}_i), \quad (5.10)$$

де  $\dot{y}_i$  – швидкість руху  $i$ -ї ланки привода; знак «+» ставлять, якщо переміщення ланки збільшує деформацію  $x_{Ai}$ , а «-» – коли зменшує.

## 5.2 Приклад побудови математичної моделі простого гідроімпульсного привода на основі його динамічної моделі, де гідравлічна ланка представлена як тіло Кельвіна – Фойгта

Побудову динамічної та математичної моделей ГП ВТМ, в якому ГЛ представлена як тіло Кельвіна – Фойгта, розглянемо на прикладі простого ГП (див. рис. 5.1, а) [2], що складається з однокаскадного кулькового генератора імпульсів тиску (ГІТ) параметричного типу [13] і виконавчої ланки – плунжерного гідроциліндра.

ГІТ має кульку – запірний елемент (element), який створює два ступеня герметизації за площами поперечного перерізу  $A_1 = \pi d_1^2/4 \approx 0,785d_1^2$  та  $A_2 = \pi d_2^2/4 \approx 0,785d_2^2$  (див. рис. 5.1, а). Кулька ГІТ навантажується пружиною регулятора тиску  $p_1$  «відкриття» ГІТ, жорсткість якої  $k_1$ , а попередня деформація  $y_{01}$ , що може змінюватись за допомогою гвинтового механізму.

До плунжерного гідроциліндра з площею поперечного перерізу плунжера  $A_{\text{п}} = \pi d_{\text{п}}^2/4 \approx 0,785d_{\text{п}}^2$  ГТТ приєднується за схемою «на виході» [13].

Плунжер (plunger) гідроциліндра навантажено пружиною жорсткістю  $k_2$  з попередньою деформацією  $y_{02}$  та технологічним зусиллям  $F_T = \text{const}$ .

Припускаємо, що під час руху запірнього елемента ГТТ та плунжера має місце тільки в'язке (рідинне) тертя, яке характеризується коефіцієнтами в'язкого опору  $c_1$  та  $c_2$ , відповідно.

В дію ГТТ приводиться гідронасосною станцією з постійною подачею (supply)  $Q_H$  енергоносія. Всі рухомі маси  $m_1$  ГТТ та  $m_2$  гідроциліндра зведені до запірнього елемента – кульки ГТТ та плунжера гідроциліндра, відповідно.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – напірна, проміжна ГТТ та зливна порожнини привода, відповідно.

Тиск «відкриття» ГТТ визначається за простою залежністю [13]

$$p_1 \geq k_1 \cdot y_{01}/A_1. \quad (5.11)$$

За досягнення в напірній (head) порожнині  $A$  тиску енергоносія  $p_r \geq p_1$  порушується герметичність першого ступеня герметизації ГТТ і кулька відривається від сідла. Порожнини  $A$  та  $B$  з'єднуються і тиск енергоносія величиною  $p_1$  починає діяти на площу  $A_2$ , що спричиняє прискорений рух кульки ГТТ на шляху додатного перекриття  $h_{\partial}$  (другий – золотниковий рівень герметизації ГТТ). Після проходження додатного перекриття  $h_{\partial}$  порожнини  $A$  та  $B$  сполучаються через від'ємне перекриття  $h_{\text{в}}$  зі зливною порожниною  $C$ , що спричиняє зменшення тиску енергоносія в гідросистемі привода до рівня тиску «закриття» ГТТ [2]:

$$p_2 \leq p_1 A_1 A_2^{-1} + k_1 h_{\Gamma} \cdot A_2^{-1}, \quad (5.12)$$

де  $h_{\Gamma} = h_{\partial} + h_{\text{в}}$  – хід кульки – запірнього елемента ГТТ.

Таким чином в гідросистемі привода збуджуються імпульси тиску енергоносія амплітудою  $\Delta p = p_1 - p_2$  ( $p_2 < p_1$ ), що спричиняє вібраційний режим (regime) руху плунжера гідроциліндра привода.

Використовуючи формулу (5.6), можна встановити зв'язок між рівнями тиску енергоносія  $p_1$  та  $p_2$  і рівнями деформації гідравлічної ланки:

$$x_{01} = p A_0 k_{0r}^{-1}; \quad (5.13)$$

$$x_{02} = p_2 A_0 k_{0r}^{-1} = x_{01} A_1 \cdot A_2^{-1} = x_{01} U_{21}^{0.5}, \quad (5.14)$$

де  $p_2 \approx p_1 A_1 A_2^{-1}$  (друга  $k_1 h_{\Gamma} \cdot A_2^{-1}$  складова частина формули (5.12) мала [4] порівняно з першою);

$U_{21} = A_1^2 \cdot A_2^{-2}$  – внутрішнє передаточне відношення в ГТТ між першим і другим ступенями герметизації його запірнього елемента.

Динамічна модель (див. рис. 5.1, б) ГП, структурна схема якого зображена на рис. 5.1, а) складається з двох зосереджених мас  $m_1$  і  $m_2$ , які взаємодіють з ГЛ у вигляді з'єднаних паралельно пружинного  $k_{0r}$  та дисипативного  $c_0$  елементів через передатні відношення  $U_{01}$  та  $U_{02}$ . ГЛ протягом робочого циклу привода деформується зі змінною швидкістю  $\dot{x}_{0r}$  в напрямках  $x_{0r}$ .

Рухові мас  $m_1$  і  $m_2$  під час їх прямого ( $y_{1п}, y_{2п}$ ) та зворотного ( $y_{1з}, y_{2з}$ ) ходів протидіють сили пружного опору, які характеризуються жорсткостями відповідно  $k_1$  та  $k_2$ , в'язким опором (коєф.  $c_1$  та  $c_2$ ) та технологічним зусиллям  $F_T$ .

Використовуючи принцип розчленування [6], вихідну динамічну модель привода шляхом приведення ГЛ до мас  $m_1$  та  $m_2$ , розділяємо на чотири прості динамічні моделі для прямого (рис. 5.2, а, б) та зворотного (рис. 5.2, в, г) ходів мас  $m_1$  і  $m_2$ .

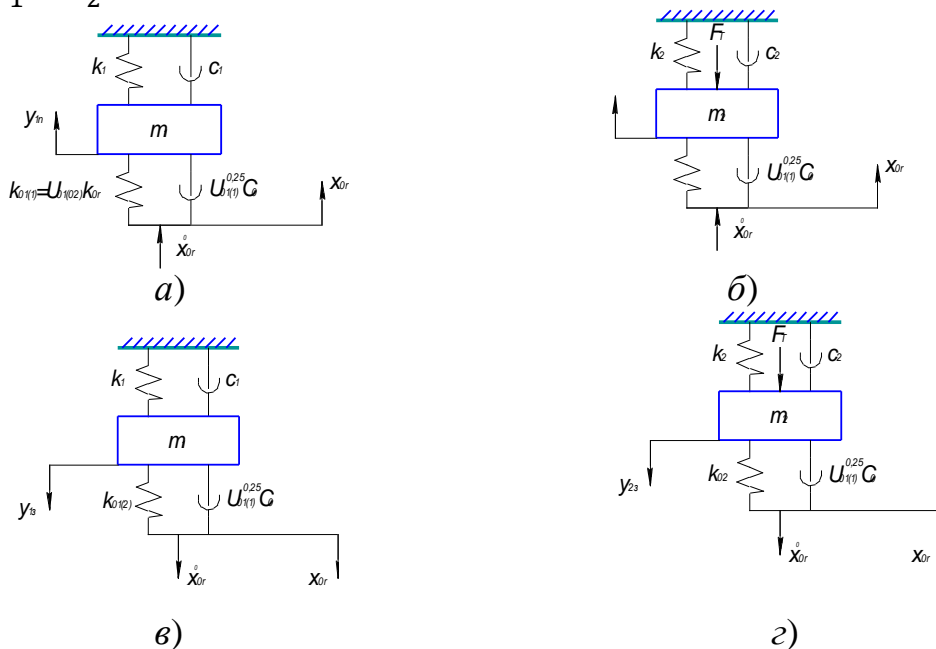


Рисунок 5.2 – Динамічні моделі для прямого (а, б) та зворотного (в, г) ходів мас  $m_1$  і  $m_2$

На основі принципу Д'Аламбера [15] складаємо за допомогою цих динамічних моделей диференціальні рівняння руху для та заперного елемента ГП (маса  $m_1$ ) та виконавчої ланки привода (маса  $m_2$ ) під час ходів:

- прямого ( $x_{01} \geq x_{0n} \geq x_{02}$ ) –

$$\begin{cases}
 m_1 \ddot{y}_{1n} = U_{01(02)} \cdot k_{0r} (x_{A1(1)} - y_{1n}) - k_1 (y_{1n} + y_{01}) - c_1 \dot{y}_{1n} - \\
 - U_{01(02)}^{0,25} c_0 (\dot{x}_{A1(1)} - \dot{y}_{1n}) - m_1 g; \\
 m_2 \ddot{y}_{2n} = U_{02} \cdot k_{0r} (x_{A2} - y_{2n}) - k_2 (y_{2n} + y_{02}) - F_T \\
 - U_{02}^{0,25} \cdot c_0 (\dot{x}_{A2} - \dot{y}_{2n}) - c_2 \dot{y}_{2n} - m_2 g;
 \end{cases} \quad (5.15)$$

- зворотного ( $x_{02} \geq x_{0r} \geq 0$ ) -

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{y}_{13} = k_1(y_{01} + h_\Gamma - y_{13}) - U_{01(02)} k_{0r} [x_{A1(i)} - (h_\Gamma - y_{13})] - F_T - \\ - U_{01(02)}^{0.25} \cdot c_0(\dot{x}_{A1(i)} - \dot{y}_{13}) - c_1 \dot{y}_{13} - m_1 g; \\ m_2 \ddot{y}_{23} = k_2(y_{02} + h_\Pi - y_{23}) - U_{02} \cdot k_{0r} [x_{A2} - (h_\Pi - y_{23})] - F_T - \\ - U_{02}^{0.25} \cdot c_0(\dot{x}_{A2} - \dot{y}_{23}) - c_2 \dot{y}_{23} - m_2 g, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

де для  $y_{1n} = 0$ ;  $U_{01(02)} = A_1^2 \cdot A_0^{-2}$ ;  $y_{1n} > 0$ ;  $U_{01(02)} = A_2^2 \cdot A_0^{-2}$ ;  $0 \leq y_{13} \leq h_\Gamma$ ;  $U_{01(02)} = A_2^2 \cdot A_0^{-2}$ ;  $y_{13} = h_\Gamma$ ;  $U_{01(02)} = A_1^2 \cdot A_0^{-2}$ ;  $x_{A1(1)} = x_{0r} \cdot U_{01(02)}$ ;  $\dot{x}_{A1(1)} = \dot{x}_{0r} \cdot U_{01(02)}$ ;  $x_{A1(i)} = x_{0r} \cdot U_{01(02)}$ ;  $\dot{x}_{A1(i)} = \dot{x}_{0r} \cdot U_{01(02)}$ ;  $x_{A2} = U_{02} \cdot x_{0r}$ ;  $\dot{x}_{A2} = \dot{x}_{0r} \cdot U_{02}$ ;  $U_{02} = A_\Pi^2 \cdot A_0^{-2}$ ;  $y_{1n}, y_{2n}, y_{13}, y_{23}, \dot{y}_{1n}, \dot{y}_{2n}, \dot{y}_{13}, \dot{y}_{23}$  - відповідно поточні координати та швидкості мас  $m_1$  і  $m_2$  під час прямого та зворотного їх ходів;  $h_\Pi$  - повний хід маси  $m_2$ .

Диференціальні рівняння систем (5.15) і (5.16), з метою виключення вільних членів, заміною змінних  $y_{1n}, y_{2n}, y_{13}, y_{23}$ , на змінні

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1n} = y_{1n} + \omega_{\Sigma 1}^{-2} (\omega_{01}^2 y_{01} + g); \quad z_{2n} = y_{2n} + \omega_{\Sigma 2}^{-2} (\omega_{02}^2 y_{02} + F_T / m_1 - g); \\ z_{13} = y_{13} - \omega_{\Sigma 1}^{-2} [\omega_{01}^2 (y_{01} + h_\Gamma) + \omega_{p1}^2 U_{02} h_\Gamma + g]; \\ z_{23} = y_{23} - \omega_{\Sigma 2}^{-2} [\omega_{02}^2 (y_{02} + h_\Pi) + \omega_{p2}^2 U_{02} h_\Pi + F_T / m_1 - g], \end{array} \right. \quad (5.17)$$

де  $\omega_{\Sigma 1} = \sqrt{\omega_{p1}^2 U_{01(02)} + \omega_{01}^2}$ ;  $\omega_{p1} = \sqrt{k_{0r} m_1^{-1}}$ ;  $\omega_{01} = \sqrt{k_1 m_1^{-1}}$ ;  $\omega_{\Sigma 2} = \alpha \omega_{\Sigma 1}$ ;  $\omega_{p2} = \gamma^{-1} \omega_{p1}$ ;  $\omega_{02} = \gamma^{-1} \delta \omega_{01}$  - власні частоти системи привода, визначені відносно маси  $m_1$  - відповідно, системи запірний елемент ГІТ - ГЛ, зведеної до маси  $m_1$ , запірного елемента ГІТ, системи виконавча ланка (плунжерний гідроциліндр і зведені до нього маси) - ГЛ, зведеної до маси  $m_2$  та виконавчої ланки;  $\alpha = \{U_{\Gamma\Pi} [1 + \omega_{01}^2 \omega_{\Sigma 1}^{-2} (\gamma^{-1} \delta U_{\Gamma\Pi}^{-1} - 1)]\}^{0.5}$ ;  $\gamma = m_1 / m_2$ ;  $\delta = k_1 / k_2$ ;  $U_{\Gamma\Pi} = U_{02} / U_{01(02)}$  - внутрішнє передаточне відношення між виконавчою ланкою та ГІТ, які не змінюють характер руху ланок привода, після відповідних алгебраїчних перетворень можна привести до вигляду, відповідно для прямого та зворотного ходів мас  $m_1$  і  $m_2$ , який за формою та змістом описує вимушені коливання цих мас під дією змінних коливань амплітуди лінійної деформації ГЛ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{z}_{1n} + 2\beta_{1n}\dot{z}_{1n} + \omega_{\Sigma 1}^2 z_{1n} = \omega_{p1}^2 U_{01(02)}^{0,5} x_{0r}; \\ \ddot{z}_{2n} + 2\beta_{2n}\dot{z}_{2n} + \alpha \omega_{\Sigma 1}^2 z_{2n} = \gamma^{-1} \omega_{p1}^2 U_{02}^{0,5} x_{0r}; \end{array} \right. \quad (5.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{z}_{13} + 2\beta_{13}\dot{z}_{13} + \omega_{\Sigma 1}^2 z_{13} = -\omega_{p1}^2 U_{01(02)}^{0,5} x_{0r}; \\ \ddot{z}_{23} + 2\beta_{23}\dot{z}_{23} + \alpha \omega_{\Sigma 1}^2 z_{23} = -\gamma^{-1} \omega_{p1}^2 U_{02}^{0,5} x_{0r}, \end{array} \right. \quad (5.19)$$

де  $\beta_{1n} = 0,5 \cdot m_1^{-1} \cdot [c_1 + U_{01(02)}^{0,25} \cdot c_0(\dot{x}_{A1(i)} \cdot \dot{y}_{1n} - 1)]$ ;

$\beta_{2n} = 0,5 \cdot m_2^{-1} \cdot [c_2 + U_{02}^{0,25} \cdot c_0(\dot{x}_{A2} \cdot \dot{y}_{2n} - 1)]$ ;

$\beta_{13} = 0,5 \cdot m_1^{-1} \cdot [c_1 + U_{01(02)}^{0,25} \cdot c_0(\dot{x}_{A1(i)} \cdot \dot{y}_{13} - 1)]$ ;

$\beta_{23} = 0,5 \cdot m_2^{-1} \cdot [c_2 + U_{02}^{0,25} \cdot c_0(\dot{x}_{A2} \cdot \dot{y}_{23} - 1)]$  – змінні коефіцієнти демпфірування під час руху мас  $m_1$  і  $m_2$ .

Протягом робочого циклу (сучле) власна частота  $\omega_{\Sigma 1}$  змінюється, оскільки параметрично міняється передаточне відношення з  $U_{01(02)} = A_1^2 \cdot A_0^{-2}$  на  $U_{01(02)} = A_2^2 \cdot A_0^{-2}$  внаслідок переміщення запірнього елемента ГІТ (маси  $m_1$ ) на хід  $h_{\Gamma}$  в прямому та зворотному напрямках.

Для завершення математичної моделі привода, зображеного на рис. 5.1, а) до систем диференціальних рівнянь (5.18) і (5.19) необхідно додати рівняння зв'язку – рівняння витрати (consumption) енергоносія для переміщення плунжера гідроциліндра, запірнього елемента ГІТ та під час перетікання в бак через відкритий ГІТ й умови однозначності, які описують переміщення ланок привода та ГІТ в характерні проміжки часу на відповідних ділянках руху ланок.

Оскільки, як правило, розв'язують системи (5.18) та (5.19) числовими методами за допомогою різних комп'ютерних програм, наприклад, MATLAB 6. 5, де час процесу є основним аргументом, то зміну деформації ГЛ внаслідок стисливості (compressibility) доцільно подати у вигляді простих залежностей [13, 14] для ходів мас  $m_1$  і  $m_2$ :

$$\text{- прямого} \quad x_{0r} = x_{01} - Q_{\Sigma l_n} \cdot t \cdot A_0^{-1}; \quad (5.20)$$

$$\text{- зворотного} \quad x_{0r} = x_{02} \mp Q_{\Sigma l_3} \cdot t' \cdot A_0^{-1}, \quad (5.21)$$

де  $Q_{\Sigma l_n}$ ,  $Q_{\Sigma l_3}$  – відповідно сумарна витрата енергоносія через гідролінії та відкрити щілину ГІТ, що відповідає певним переміщення ланок привода на шляху прямого ( $l_n$ ) та зворотного ( $l_3$ ) ходів мас  $m_1$  і  $m_2$ ;

$t$ ,  $t'$  – поточний час зміни певного етапу « $l_n$ » (чи « $l_3$ »)  $Q_{\Sigma l_n}$  чи  $Q_{\Sigma l_3}$ .

## 6 ВИДИ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

### 6.1 Основні поняття та означення оптимізації. Критерії оптимальності (цільові функції)

Теорію оптимізації (optimization) можна розділити на два великі розділи, що принципово відмінні між собою: оптимальне керування [18] та оптимальне проектування [19]. Математичний апарат цих розділів оптимізації неоднаковий.

Теорія оптимального керування переважно ґрунтується на знаходженні критеріїв керування за зворотним зв'язком в керівній системі. Система, яка є оптимально керованою, має активні елементи, які сприймають помилки на виході, що виникають через флуктуації у вхідних даних, і змінюють керівну реакцію (reaction) системи з метою максимізації якогось критерію якості системи.

У випадку неоптимального керування визначають елементи системи або параметри, що описують ці елементи, які фіксовані протягом часу «життя» елементів. З цього погляду система в деякому сенсі є оптимальною. Така ситуація в літературі з керування [18] часто називається керуванням із розімкнутим ланцюгом.

Принципова різниця в завданні оптимального керування та проектування полягає в тому, що у випадку оптимального проектування вибрані значення змінних фіксовані протягом всього «життя» системи, а у випадку оптимального керування за зворотним зв'язком значення змінних перебудовуються під час функціонування системи.

В літературі з оптимального керування, наприклад, в теорії автоматичного керування, більшою мірою розглядаються динамічні системи, функціонування яких розвивається в часі (задача Коші).

Більшість задач оптимального проектування до динамічних систем не відносяться.

**Оптимізацією** називають формалізований ітераційний процес віднаходження таких вхідних параметрів, наприклад механічної системи, за яких її вихідні параметри (якісні показники) набувають, в певному сенсі, найкращих значень.

Наведене означення є так званою **параметричною** (parametric) **оптимізацією** [19], яка має ключове значення під час процесів проектування різних інженерних об'єктів – споруд, машин, механізмів тощо, що відповідають заданим технічним вимогам.

Проблема параметричної оптимізації має два найбільш важливих аспекти. Перший з них – це формування критеріїв оптимальності, оскільки твердження «об'єкт оптимальний» завжди потребує доповнення, а з якого погляду, за яким критерієм?

Оскільки можна по-різному сформулювати, наприклад, різні цілі розрахунку інженерного об'єкта і залежно від цього отримати різні розв'язки задачі оптимізації.

Формулювання критерію (criterion) (чи критеріїв) завжди здійснюють, виходячи з конкретної фізичної суті задачі.

Другий аспект проблеми полягає у виборі методів та алгоритмів вирішення задачі оптимізації за вибраним критерієм.

Критерій оптимальності (якості) – це по суті критерій порівняння варіантів розв’язання задачі проєктування інженерних об’єктів, технологічних процесів, розрахунку тощо.

З метою розв’язання оптимізаційної задачі, наприклад, вибору оптимального варіанта конструкції якогось виробу, критерій (чи критерії) оптимальності необхідно визначити через **змінні проєктування**  $b_1, b_2, \dots, b_k$  (параметри оптимізації) у вигляді функції [19]

$$\psi_0(b) = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T. \quad (6.1)$$

Залежності типу (6.1) називаються **цільовими (target) функціями**.

На функцію (6.1) зазвичай накладають обмеження, які задають в загальному випадку у вигляді рівнянь і нерівностей [19]:

$$g(b) = 0; \quad h(b) \leq 0, \quad (6.2)$$

де  $g(b) = 0$  та  $h(b) \leq 0$  – вектор-функції. Якщо цільова функція залежить від однієї змінної проєктування, то в площині декартової системи координат («площині» проєктування) вона може бути зображена деякою кривою  $\psi(x_1) = 0$  (чи  $\psi_0(b_1)$ ).

У випадку двох змінних проєктування цільову функцію зображають у формі поверхні  $\psi(b_1, b_2)$  в просторовій системі координат («простір» проєктування).

У випадку однієї змінної проєктування (найпростіший випадок) шляхом перебору декількох варіантів можна вибрати найбільш прийнятний варіант виробу. Якщо варіантів варіювання змінних проєктування два та більше, то вже важко вловити їх вплив на головні характеристики виробу. В цьому випадку ефективними є **математичні методи оптимізації** [19], за якими вибираються найкоротші шляхи оптимізації та скорочується час на розрахунок виробів, процесів тощо.

В загальному випадку задача оптимізації зводиться до задачі нелінійного програмування, яка може бути розв’язана тільки за відповідних спрощувальних припущень.

## **6.2 Математичні методи оптимізації (класифікація). Загальний алгоритм процесу оптимізації**

Методи (method) нелінійного програмування (методи оптимізації) ділять на методи **нульового, першого та другого порядку** [19] залежно від того, яка інформація використовується для визначення напрямку пошуку оптимального варіанта конструкції виробу, технологічного процесу тощо.

За методами нульового порядку не потрібно розраховувати похідні цільової функції за змінними проектування (керування), а за методами першого та другого порядку потрібно вираховувати відповідно перші та другі похідні. До **методів нульового порядку** відносяться методи Гаусса – Зейделя, Розенброка та випадкового пошуку.

**Методами першого порядку** є методи градієнта, найшвидшого спуску, спряжених градієнтів (gradient) і траєкторії (trajectori) вектора градієнта [19].

Зазвичай методи другого порядку – це різновиди методу Ньютона.

Перераховані методи, за винятком методу проєкції вектора градієнта, розроблені як методи **безумовної оптимізації** [19]. В задачах з обмеженнями ці методи можуть бути використані, якщо вдається задачі умовної оптимізації звести до задач безумовної оптимізації. Таке перетворення здійснюють за так званими методами штрафних функцій.

За змістом методи оптимізації можуть бути **аналітичними** та **алгоритмічними** [19]. Екстремум цільової функції в аналітичних методах визначається формулою, що є основною перевагою цих методів, але для використання аналітичних методів необхідне явне вираження цільової функції, що реально вдається зробити дуже рідко.

Такого недоліку позбавлені алгоритмічні методи, які не дають кінцевої формули, а лише визначають спосіб знаходження екстремуму цільової функції.

Аналітичні методи оптимізації ділять на **регулярні** [19], якщо початкове значення вектора змінних проектування (вектора входу) однозначно визначає всі його наступні значення, та **статистичні** [19], якщо всі наступні значення вектора входу пов'язані з попередніми випадковим числом. Більшість регулярних методів оптимізації відносяться до класу **градієнтних** [19], в основі яких лежить або розрахунок градієнта цільової функції, якщо остання задана в явному вигляді, або вимірювання цього градієнта шляхом «пробних кроків», коли цільова функція задана неявно. До статистичних методів оптимізації відносять **методи випадкового пошуку** та **адаптивні методи** [19].

За типом **шуканого екстремуму** методи оптимізації ділять на **локальні** та **глобальні** [19].

Процес оптимізації можна умовно назвати **пошуком цілі**, якою є **шукана оптимальна точка** [19]. Точку, яка характеризує положення об'єкта оптимізації в просторі його вхідних параметрів, називають **зображувальною** або **робочою**.

Пошук цілі – це послідовне переміщення робочої точки в напрямку зменшення відстані до цілі. Кожне переміщення робочої точки називається **кроком оптимізації** [19], який складається з двох етапів:

- 1) збирання інформації, необхідної для вибору напрямку руху робочої точки;
- 2) визначення напрямку та величини кроку оптимізації та цільової функції в новій робочій точці.

Для визначення напрямку руху робочої точки на першому етапі, зазвичай, розраховують цільову функцію в сусідніх пробних точках. Число таких визна-

чень, необхідне щоб зробити один крок оптимізації, називається **втратами на пошук** [19]. Зазвичай на ці втрати необхідно більше часу, ніж на другий етап кроку оптимізації, тому ці втрати є основною **характеристикою швидкодії алгоритму оптимізації** [19].

Важливою характеристикою оптимізації є також надійність пошуку – це ймовірність того, що за заданого числа кроків оптимізації  $N$  робоча точка буде в заданому околі  $\varepsilon$  цілі.

### 6.3 Способи задавання цільової функції

Залежно від околу об'єкта оптимізації та задачі, яку потрібно розв'язати, цільову функцію можна задавати по-різному (в літературі та програмному забезпеченні САПР зазвичай передбачені бібліотеки типових цільових функцій). Наприклад, цільовою функцією може бути **цільова функція максимального відхилення** характеристик об'єкта від заданих [19]

$$\psi_0(b_1, \dots, b_n) = \max(\omega_1 / l_1, \omega_2 / l_2, \dots, \omega_m / l_m) \quad (6.3)$$

або середньоквадратична цільова функція виду

$$\psi_0(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot l_i^2, \quad (6.4)$$

де  $\omega_i$  – питома вага окремих складових вектора відхилення характеристик  $l_i$ .

Цільова функція, визначена за формулою (6.3), як правило, має розриви в перших частинних похідних, що утруднює використання ефективних методів оптимізації, оснований, наприклад, на теоремі Тейлора (розкладені в ряд Тейлора), яка потребує неперервності цих похідних.

Цільова функція, знайдена за залежністю (6.4), навпаки, є диференційованою відносно всіх своїх аргументів, тобто існують частинні похідні  $\partial\psi_0 / \partial b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . У такому випадку в точці локального оптимуму  $\bar{b}$  **необхідно**, але **не достатньо**, щоб

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial b}(\bar{b}) = 0, \quad (6.5)$$

тобто для будь-якого  $i$   $\frac{\partial\psi_0}{\partial b_i} = 0$ .

Умова (6.5), справедлива і для інших більш складних, ніж (6.4), нелінійних цільових функцій, визначає критичні точки функції  $\psi_0(b)$ : мінімуму, максимуму та сідлові.

Але це не означає, що якщо навіть знайдено локальний оптимум функції  $\psi_0(b)$ , що цей оптимум є глобальним для загальної нелінійної функції  $\psi_0(b)$ .

Щоб це установити потрібна додаткова інформація про функцію  $\psi_0(b)$ : чи має вона єдиний локальний оптимум, чи є лінійною, квадратичною або опуклою тощо.

Зазвичай точки локального оптимуму шукають за допомогою методів нелінійного програмування, за якими розрізняють дві задачі оптимізації у вигляді:

$$\min \psi_0(b), \quad (6.6)$$

що є задачею оптимізації (безумовна оптимізація) без обмежень;

$$\begin{cases} \min \psi_0(b); \\ g(b) = 0; h(b) \leq 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

що є задачею оптимізації (умовна оптимізація) з обмеженнями у вигляді алгебраїчних рівнянь і нерівностей. У залежностях (6.7)  $g$  та  $h$  вектор-функції від « $b$ » у загальному випадку, наприклад  $g(b) = [g_1(b), \dots, g_m(b)]^T$ , де  $g_i(b)$  – скалярна нелінійна функція вектора « $b$ »;  $i = 1, \dots, m$ .

Задачі параметричної оптимізації з обмеженнями у вигляді (6.7) часто зустрічаються під час інженерного проектування виробів, технологічних процесів тощо. Найбільш загальним типом обмежень в таких задачах є двобічні обмеження на параметри об'єкта оптимізації виду  $\alpha_i \leq b_i \leq \beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Потрібно відмітити, що реалізація якісної оптимізації об'єктів проектування чи дослідження може бути за допомогою достатньо складних аналітичних і числових математичних процедур.

## 7 БЕЗУМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ

### 7.1 Методи безумовної оптимізації – класифікація

Безумовна оптимізація полягає в знаходженні оптимального значення цільової функції  $\psi_0(b)$ , зазвичай її мінімального, значення без використання обмежень на значення параметрів оптимізації  $b_i$ .

Безумовна оптимізація може бути одновимірною та багатовимірною, коли цільова функція  $\psi_0(b)$  є функцією декількох змінних (параметрів проєктування)  $b_i$  (тут  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Одновимірна безумовна оптимізація може здійснюватись за такими методами: золотого перерізу, згідно з яким процес пошуку  $\psi_0(b)_{min}$  зводиться до локалізації відносного мінімуму цільової функції  $\psi_0(b)$  на деякому інтервалі її значень шляхом послідовного зменшення цього інтервалу; найшвидшого спуску (градієнтний метод), за яким знаходять приріст аргументу  $\delta b$ , щоб зменшення цільової функції  $\psi_0(b)$  було мінімальним; спряжених напрямків, згідно з яким градієнт цільової функції в точці оптимуму « $\bar{b}$ » має дорівнювати нулю, тобто  $\nabla\psi_0(\bar{b}) = 0$ ; спряжених градієнтів, в якому цільова функція представлена в квадратичній формі, оскільки тільки за такої її форми гарантується збіжність процесу оптимізації за « $k$ » ітерацій; Девідона – Флетчера – Пауела, за яким, поряд з обчисленням перших похідних цільової функції  $\psi_0(b)$ , формулюють матрицю її других похідних, що дозволяє більш точно локалізувати мінімум цільової функції.

Основні поняття, означення та теореми перерахованих методів одновимірної безумовної оптимізації наведено в роботі [19] – Haug E. J., Aurora J. S. Applied optimal design: Mechanical and structural systems. N.Y.: Wiley-Interscience, 1979. 506 p.

### 7.2 Приклади використання методів послідовної безумовної оптимізації: внутрішнього; зовнішнього; комбінованого – внутрішньо-зовнішнього

Одними із найбільш дійових і простих методів є методи послідовної безумовної оптимізації: внутрішній; зовнішній; комбінований – внутрішньо-зовнішній [19].

Основна ідея методів послідовної безумовної оптимізації – це зведення розв’язання складної задачі оптимізації до розв’язування послідовності простих задач. **За суттю методи послідовної безумовної оптимізації – це методи послідовної безумовної мінімізації шляхом нелінійного програмування.** Згідно з цією суттю до цільової функції додається так звана **штрафна функція, яка будується на обмеженнях цільової функції  $\psi_0(b)$  і, таким чином, створюється розширена цільова функція.**

Вважається, що у випадку прямування параметрів штрафної функції до нуля (або нескінченності) безумовний мінімум розширеної цільової функції наближається до оптимального значення цільової функції  $\psi_0(b)$ .

**Метод внутрішньої послідовної безумовної мінімізації (оптимізації)** ґрунтується на ідеї обмеження значень розширеної цільової функції всередині допустимої області « $B$ » значень параметрів оптимізації  $b_j$  за допомогою штрафної функції

$$\psi(r, b) = r \cdot \sum_{i=1}^m \left( -\frac{1}{\psi_j(b)} \right), \quad (7.1)$$

де  $\psi_j$  – неперервна функція від змінних проектування « $b$ » всередині області « $B$ », яка визначається через обмеження цільової функції  $\psi_0(b)$  (не плутати з обмеженнями на параметри оптимізації  $g(b)$  та  $h(b)$ ;

$r > 0$  – параметр штрафної функції, який в загальному випадку може вибиратись у вигляді числової послідовності  $r_i \rightarrow 0$  (тут  $i = 0, 1, 2, \dots$ ), причому  $r_{i+1} > 0$  та  $r_{i+1} < r_i$ .

**Розширена цільова функція** за методом внутрішньої послідовної мінімізації розраховується за формулою

$$U(b, r) \equiv \psi_0(b) + \psi(r, b) \equiv \psi_0(b) + r \sum_{j=1}^m \left( -\frac{1}{\psi_j(b)} \right). \quad (7.2)$$

**Приклад 1.** Необхідно мінімізувати цільову функцію  $\psi_0(b_1, b_2) = b_1 + b_2$  за такими її обмеженнями:  $\psi_1(b_1, b_2) = -b_1 \leq 0$ ;  $\psi_2(b_1, b_2) = -b_2 \leq 0$ .

За формулою (7.2) визначимо розширену цільову функцію

$$U(b, r) = b_1 + b_2 + r(b_1^{-1} + b_2^{-1}). \quad (7.3)$$

Для віднаходження мінімуму  $U(b, r)$  припустимо, що:

$$\partial U / \partial b_1 = 0 = 1 - r \cdot b_1^{-2}; \quad \partial U / \partial b_2 = 0 = 1 - r \cdot b_2^{-2}. \quad (7.4)$$

З виразів (7.4), знайдемо:

$$b_1 = r^{0,5}; \quad b_2 = r^{0,5}. \quad (7.5)$$

Якщо  $r \rightarrow 0$ , то  $b_1 \rightarrow 0$  та  $b_2 \rightarrow 0$  і розв'язком задачі буде значення цільової функції  $U(b, r)$  в точці з координатами  $(b_1, b_2) = 0$ .

**Зовнішній метод безумовної мінімізації (оптимізації)** відрізняється від внутрішнього тим, що початкова точка під час процесу пошуку мінімуму цільової функції  $\psi_0(b)$  не обов'язково має лежати всередині допустимої області « $B$ ». Основна ідея методу зовнішньої безумовної мінімізації полягає у формуванні такої штрафної функції  $\psi(t, b)$ , яка є додатною у всіх точках простору проектування « $R^k$ » зовні допустимої області « $B$ » та дорівнює нулю всередині цієї обла-

сті. Зовнішній метод не працює, якщо цільова функція  $\psi_0(b)$  невизначена або набуває від'ємних значень зовні допустимої області « $B$ ».

Фундаментальна ідея зовнішнього методу безумовної мінімізації була вперше сформульована в 1943 році німецьким математиком Курантом. Цей вчений запропонував **розширену цільову функцію** зовнішнього методу безумовної мінімізації розраховувати за формулою [19]:

$$T(b, t) = \psi_0(b) + \psi(t, b) = \psi_0(b) + t \left\{ \sum_{j=n+1}^m [\psi_j(b) + |\psi_j(b)|]^2 + \sum_{j=1}^n [\psi_j(b)]^2 \right\} \quad (7.6)$$

де  $\psi_j(b)$  – обмеження цільової функції;  $t_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) – параметр штрафної функції, який вибирається так, що  $t_1 > 0$  для  $i = 1$  та  $t_i > t_{i-1}$  для  $i = 2, 3, \dots$ .

Умова  $t_2 > t_1$  означає, що за  $t_2$  розширена цільова функція  $T(b, t)$  штрафується більше ніж за значення параметра  $t_1$ , а значить і точка мінімуму  $T(b, t)$ , що відповідає параметру  $t_2$ , розташовується ближче до допустимої області « $B$ » та відповідно до оптимуму « $\bar{b}$ » цільової функції  $\psi_0(b)$ .

**Приклад 2.** Знайти за зовнішнім методом безумовної оптимізації мінімум цільової функції  $\psi_0(b_1, b_2) = b_1^2 + 2 \cdot b_2^2$  за такого її обмеження

$$\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1 = 0.$$

За формулою (7.6) визначимо розширену цільову функцію для  $j = 1$ :

$$T(b, t) = b_1^2 + b_2^2 + t \cdot (b_1 + b_2 - 1)^2. \quad (7.7)$$

Припустимо, що:

$$\partial T / \partial b_1 = 2 b_1 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0; \quad (7.8)$$

$$\partial T / \partial b_2 = 4 b_2 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0. \quad (7.9)$$

Щоб виключити параметр  $t$ , віднімемо від (7.9) (7.8) та знайдемо

$$4 \cdot b_2 - 2 \cdot b_1 = 0, \quad (7.10)$$

звідки

$$b_1 = 2 \cdot b_2. \quad (7.11)$$

Підставимо (7.11) в (7.9) та отримаємо:

$$4 b_2 + 2 \cdot t \cdot (3 b_2 - 1) = 0, \quad (7.12)$$

звідки

$$b_2 = t / (2 + 3 \cdot t) = 1 / (2 / t + 3). \quad (7.13)$$

Визначимо границі зміни параметрів « $b_2$ » і « $b_1$ » цільової функції  $\psi_0(b)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 / (2 / t + 3)] = 1 / 3; \lim_{t \rightarrow \infty} b_1 = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} b_2 = 2 / 3.$$

Цільова функція  $\psi_0(b)$  матиме мінімум (оптимум) в точці з координатами  $(b_1, b_2) = (2 / 3, 1 / 3)$ .

**Комбінований – внутрішньо-зовнішній метод послідовної безумовної мінімізації** застосовують у випадках, коли ні внутрішній, ні зовнішній методи не можна використати **в чистому вигляді**. Наприклад, внутрішній метод не можна використати, якщо допустима область « $B$ » цільової функції  $\psi_0(b)$  має хоч одне обмеження у вигляді рівності  $\psi_j(b) = 0$ . Зовнішній метод непридатний, коли функції  $\psi_j(b)$ , що задають обмеження цільової функції  $\psi_0(b)$ , невідзначені або поводять себе «погано» поза межами допустимої області « $B$ », інакше кажучи, є від’ємними.

Для комбінованого методу розширена цільова функція знаходиться за формулою:

$$V(b, r, t) = \psi_0(b) + r \sum_{j=n+1}^m \left( -\frac{1}{\psi_j(b)} \right) + t \sum_{j=1}^n [\psi_j(b)]^2, \quad (7.14)$$

де  $\psi_j(b) = 0$  для  $j = 1, \dots, n$ ;

$\psi_i(b) \leq 0$  для  $i = n + 1, \dots, m$  – відповідно обмеження цільової функції  $\psi_0(b)$ , що відповідають зовнішнім і внутрішнім штрафним функціям.

Серед всіх точок, що задовольняють нерівності  $\psi_i(b) \leq 0$ , є внутрішні точки допустимої області « $B$ ».

**Приклад 3.** Знайти мінімум цільової функції  $\psi_0(b_1, b_2) = -b_1 + b_2$  за такими її обмеженнями:  $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1$ ;  $\psi_2(b_1, b_2) = \ln b_2 \leq 0$ .

Згідно з (7.14), розширена цільова функція матиме вигляд для  $j = 1$  та  $i = 2$ :

$$V(b, r, t) = -b_1 + b_2 + r / \ln b_2 + t \cdot (b_1 + b_2 - 1)^2. \quad (7.15)$$

Припустимо, що:  $\partial V / \partial b_1 = -1 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0;$  (7.16)

$$\partial V / \partial b_2 = 1 - [r / (b_2 \ln^2 b_2)] + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0. \quad (7.17)$$

Віднімемо від (7.17) (7.16) і отримаємо:

$$2 - [r / (b_2 \ln^2 b_2)] = 0. \quad (7.18)$$

Розв’язавши рівняння (7.18) відносно  $b_2$ , знайдемо

$$b_2 = \exp [(r / (2 \cdot b_2))^{0.5}]. \quad (7.19)$$

Визначимо границю функції (7.19):

$$\lim_{r \rightarrow 0} b_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \{ \exp [(r / (2b_2))^{0.5}] = e^0 = 1, \quad (7.20)$$

звідки  $\lim_{r \rightarrow 0} b_2 \rightarrow 1$ .

У випадку  $t \rightarrow \infty$  необхідно, щоб обмеження  $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1 \rightarrow 0$ , інакше похідні (7.16) та (7.17) не можуть дорівнювати нулю.

Звідси випливає, що границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_1 = 0.$$

Зважаючи на границі параметрів  $b_1$  і  $b_2$  цільової функції, точкою мінімуму  $\psi_0(b)$  буде інтервал  $[b_1, b_2] = [0, 1]$ .

## 8 УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ

**8.1 Загальна характеристика методів умовної оптимізації: проєкції градієнта  $\nabla\psi_0^T(b)$  цільової функції  $\psi_0(b)$ ; найшвидшого спуску з компенсацією обмежень  $\psi_i(b)$  цільової функції; проєкції градієнта Розена для лінійних обмежень цільової функції  $\psi_0(b)$**

Умовна оптимізація відрізняється від безумовної тим, що цільова функція  $\psi_0(b)$  має обмеження у вигляді нерівностей і рівностей. Зазвичай, цільова функція та її обмеження нелінійні, хоча є й винятки.

В математиці задачі умовної оптимізації називаються **задачами нелінійного математичного програмування** [19].

Здійснюватись умовна оптимізація може багатьма методами, з яких найбільш часто використовуються такі: проєкції градієнта  $\nabla\psi_0^T(b)$  цільової функції  $\psi_0(b)$ ; найшвидшого спуску з компенсацією обмежень  $\psi_i(b)$  цільової функції; проєкції градієнта Розена для лінійних обмежень цільової функції  $\psi_0(b)$ . Математичний апарат перерахованих методів ґрунтується на матричному численні та векторному аналізі, є громіздким і дуже складним для розуміння без спеціальної математичної підготовки, тому обмежимось загальною характеристикою названих методів умовної оптимізації, а з початковими основами їх математичного апарату можна ознайомитись за роботою [19].

**Градієнтний метод** в задачах умовної оптимізації передбачає попереднє **геометричне** визначення напрямку, вздовж якого відбувається найбільш швидке спадання цільової функції  $\psi_0(b)$ . Цей напрямок, як і у випадку безумовної оптимізації, задається градієнтом  $\nabla\psi_0^T(b)$  цільової функції. Щоб сильно не порушувались обмеження  $\psi_i(b)$  цільової функції  $\psi_0(b)$  вздовж знайденого напрямку її спадання, здійснюються маленькі варіації параметрів проєктування « $b$ » до тих пір, **поки цільова функція може зменшуватись**.

Метод умовної оптимізації **найшвидшого спуску з компенсацією обмежень  $\psi_i(b)$  цільової функції** можна використовувати у випадку, якщо точка початкового наближення « $b^0$ » цільової функції  $\psi_0(b)$  знаходиться всередині допустимої області « $B$ ».

Якщо обмеження цільової функції  $\psi_0(b)$  задані як лінійні функції, то знаходження мінімуму цільової функції  $\psi_0(\bar{b})$  здійснюють за модернізованим градієнтним методом, що дістав назву: **«Метод проєкції градієнта Розена для лінійних обмежень цільової функції  $\psi_0(b)$ »**. За цим методом, як тільки напрямок зміни вектора  $\delta b^1$  знайдено, можна рухатись до умовного мінімуму цільової функції  $\psi_0(b)$ , не покидаючи межі допустимої області « $B$ ».

Математичний апарат методів умовної оптимізації, описаних нами в загальному вигляді, побудовано на основі матричного числення та векторного аналізу і є дуже трудомістким. В серйозних науково-дослідних і проєктних організаціях, що використовують оптимізацію процесів і конструкцій виробів, є бібліоте-

ки комп'ютерних програм, розроблених на цих методах, які в діалоговому режимі дозволяють розв'язувати будь-які оптимізаційні задачі.

На початку розділу 8 було відмічено, що задачі умовної оптимізації є задачами нелінійного математичного програмування. Якщо порівняти ці задачі із задачами безумовної оптимізації, то може скластися враження, що точку мінімуму  $\bar{b}$  цільової функції  $\psi_0(b)$ , можна знайти, виходячи лише з виду цієї функції. Насправді це не так, що можна проілюструвати на прикладах, розглянутих нижче.

## 8.2 Приклади застосування умовної оптимізації для розв'язування задач з простими цільовими функціями та їх обмеженнями

**Приклад 1.** Необхідно мінімізувати цільову функцію  $\psi_0(b) = (b_1 - 3)^2 + (b_2 - 3)^2$  за таких її обмежень:  $\psi_1 \equiv -b_1 \leq 0$ ;  $\psi_2 \equiv -b_2 \leq 0$ ;  $\psi_3 \equiv b_1 + b_2 - 4 = 0$ .

Згідно з обмеженням  $\psi_3$  допустима множина « $B$ » точок  $b_i$  ( $i = 1; 2$ ) є трикутник (рис. 8.1).

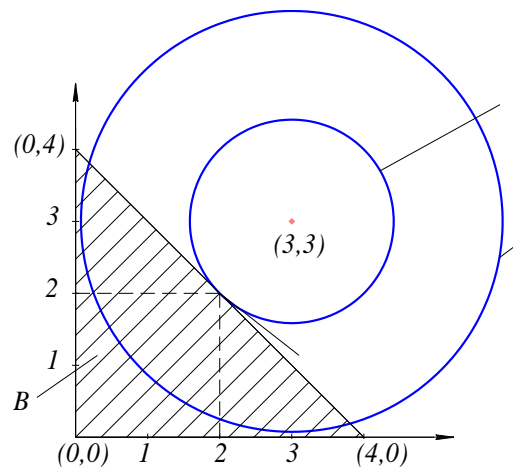


Рисунок 8.1 – Ілюстрація до прикладу 1

За  $b_1 = 0 - \psi_3 = 0 + b_2 - 4 = 0$ , звідки  $b_2 = 4$ , а за  $b_2 = 0 - \psi_3 = b_1 + 0 - 4 = 0$ , звідки  $b_1 = 4$ . Координати вершин трикутника:  $(0, 0)$ ;  $(4, 0)$ ;  $(0, 4)$ .

В цій задачі точку мінімуму  $\bar{b}$  можна знайти методом послідовної мінімізації за частинними похідними:

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_1 = 2 \cdot (b_1 - 3) = 0; \quad (8.1)$$

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_2 = 2 \cdot (b_2 - 3) = 0, \quad (8.2)$$

звідки отримаємо  $b_1 = 3$  та  $b_2 = 3$ , що означає точку мінімуму цільової функції з координатами  $\bar{b}$   $(3, 3)$ . Але ця точка виходить за межі допустимої області « $B$ ». Це значить, знайдена точка не може бути мінімумом цільової функції  $\psi_0(b)$  за

заданих обмежень. Крім того точка  $\bar{b} (3, 3)$  не задовольняє обмеження  $\psi_3 = 0$ , оскільки  $\psi_3 = b_1 + b_2 - 4 = 3 + 3 - 4 = 2 > 0$ .

За методом умовної оптимізації точку мінімуму  $\bar{b}$  знайдемо так. Згідно з обмеженнями  $\psi_1$  та  $\psi_2$ , матимемо:

$$-b_1 = (b_1 - 3)^2 + (b_2 - 3)^2 \leq 0; \quad (8.3)$$

$$-b_2 = (b_1 - 3)^2 + (b_2 - 3)^2 \leq 0. \quad (8.4)$$

Віднімаючи (8.4) від (8.3), знайдемо:

$$-b_1 + b_2 = 0, \quad (8.5)$$

звідки

$$b_1 = b_2. \quad (8.6)$$

Підставляючи (8.6) в третє обмеження  $\psi_3$  цільової функції  $\psi_0(b)$ , отримаємо:

$$b_1 + b_1 - 4 = 2b_1 - 4 \leq 0, \quad (8.7)$$

звідки

$$b_1 \leq 2. \quad (8.8)$$

З урахуванням (8.6) та (8.8) очевидно, що найменше значення цільової функції  $\psi_0(b) = 2$  відповідає колу найменшого радіуса, яке перетинає (є дотичним) множини «В» в точці  $\bar{b} (2, 2)$ . Ця точка задовольняє обмеження:  $-b_1 = -2 < 0$ ;  $-b_2 = -2 < 0$ ;  $2+2-4=0$ .

**Приклад 2.** Мінімізувати цільову функцію  $\psi_0(b) = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2$  за таких її обмежень:  $\psi_1 \equiv -b_1 \leq 0$ ;  $\psi_2 \equiv -b_2 \leq 0$ ;  $\psi_3 \equiv b_1 + b_2 - 4 \leq 0$ .

Згідно з обмеженням  $\psi_3$  допустимі множини «В» в цьому прикладі та прикладі 1 збігаються, а цільові функції  $\psi_0(b)$  різні.

За методом послідовної безумовної оптимізації, знайдемо:

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_1 = 2 \cdot (b_1 - 1) = 0; \quad (8.9)$$

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_2 = 2 \cdot (b_2 - 1) = 0, \quad (8.10)$$

звідки

$$b_1 = b_2 = 1, \quad (8.11)$$

що означає точку мінімуму цільової функції з координатами  $\bar{b} (1, 1)$ , яка лежить всередині області «В».

За методом умовної оптимізації:

$$-b_1 = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2 \leq 0; \quad (8.12)$$

$$-b_2 = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2 \leq 0, \quad (8.13)$$

звідки:  $-b_1 + b_2 = 0$ ;  $b_1 = b_2$ ;  $2 \cdot b_1 - 4 \leq 0$ ;  $b_1 \leq 2$ ;  $b_2 \leq 2$ .

Але точка  $\bar{b} (2, 2)$  не є мінімумом, оскільки  $1 < 2$ , а точка  $\bar{b} (1, 1)$  задовольняє обмеження:  $-b_1 = -1 < 0$ ;  $-b_2 = -1 < 0$ ;  $1 + 1 - 4 = -2 < 0$ .

**Приклад 3.** Необхідно оптимізувати геометричні розміри швидкохідного вала з встановленим на ньому важким диском (маховиком, шківом, зубчастим колесом тощо) за критерієм мінімальної маси  $m$  вала. З метою спрощення припустимо, що вал складається з трьох ступенів, крайніх – з діаметром  $d_1$ , а середній, на якому встановлено важкий диск, має діаметр  $d_2$ , причому  $d_2 > d_1$ . Довжина кожного ступеня  $l$ , а повна довжина вала  $3l$ .

Цю задачу доцільно розв'язувати за допомогою так званої **необхідної умови оптимальності Куна – Такера**, яка в технічній літературі відома ще під назвою – «метод множників Лагранжа». В спрощеному вигляді цей метод формулюється так: існують множники  $v_i \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ , які вибираються за кількістю обмежень  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  так, що

$$v_1 \cdot \psi_1 = v_2 \cdot \psi_2 = \dots v_n \cdot \psi_n = 0, \quad (8.14)$$

а також 
$$\partial L(\bar{b}_j, v_i) / \partial b_j = 0, \quad (8.15)$$

де 
$$L(\bar{b}_j, v_i) = \psi_0(b) + \sum_{i=1}^n (v_i \psi_i), \quad (8.16)$$

де  $j = 1, 2, \dots, k$  за кількістю змінних проектування.

Вираз (8.16) називається **лагранжіаном**. Більш загальну інформацію про метод множників Лагранжа можна знайти в роботі [19].

Згідно з описом конструкції вала, за заданої довжини його ступенів  $l$ , в цьому прикладі буде дві змінних проектування  $b_1 = d_1$  та  $b_2 = d_2$ . За цільову функцію  $\psi_0(b)$  візьмемо залежність маси вала від змінних  $d_1$  і  $d_2$ :

$$\psi_0(b) \equiv m = 0,75 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot (2 \cdot d_1^2 + d_2^2), \quad (8.17)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу вала.

Сформулюємо систему обмежень на змінні проектування за знаком і функціональні. Обмеження за знаком очевидні:

$$\psi_1 \equiv d_1 \geq 0; \quad \psi_2 \equiv d_2 \geq 0. \quad (8.18)$$

Дорезонансний режим роботи вала визначається умовою

$$\omega_0 - \omega \geq 0, \quad (8.19)$$

де  $\omega_0 = \sqrt{k/m} = (\lambda \cdot m)^{-0,5}$  – колова частота вільних (власних) коливань вала;

$k = \lambda^{-1}$  – відповідно жорсткість і податливість вала;

$\omega$  – кутова швидкість (колова частота) вала.

Податливість вала, для описаної його конструкції, можна розрахувати за формулою [20, 21]

$$\lambda = \{64 \cdot l^3 \cdot [(1/d_1^4) + (19/(8 \cdot d_2^4))]\} / (6 \cdot \pi \cdot E), \quad (8.20)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу вала.

Підставляючи (8.20) в (8.19) і замінюючи для спрощення нерівність рівністю, знайдемо:

$$k_3 \cdot \omega_0 - \omega = 0,7 / \sqrt{((64 \cdot l^3 \cdot [(1/d_1^4) + (2,38/(d_2^4))]) / (6 \cdot \pi \cdot E))} = 0, \quad (8.21)$$

де  $k_3 \leq 0$  – коефіцієнт, що перетворює нерівність (8.19) в рівність.

Виконавши нескладні алгебраїчні перетворення виразу (8.21), отримаємо функціональне обмеження змінних проектування у вигляді:

$$\psi_3 = [(1/d_1^4) + (2,38/(d_2^4))] - C = 0, \quad (8.22)$$

де  $C = (0,7 / \omega \sqrt{((64 \cdot l^3) / (6 \cdot \pi \cdot E))} )^2 = (0,14 \cdot E) / (\omega^2 \cdot l^3) = const.$

Використовуючи формулу (8.16), знайдемо лагранжیان

$$L = \psi_0(b) + \sum_{i=1}^3 (v_i \psi_i) = 0,75 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot (2 \cdot d_1^2 + d_2^2) + v_1 \cdot \psi_1 + v_2 \cdot \psi_2 + \\ + \psi_3 \cdot \{[(1/d_1^4) + (2,38/(d_2^4))] - C\}. \quad (8.23)$$

Згідно з (8.14) має виконуватись рівність  $v_1 \cdot \psi_1 = v_2 \cdot \psi_2 = v_3 \cdot \psi_3 = 0$ . Варіант  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  не має практичного (фізичного) смислу, звідки випливає, що  $v_1 = v_2 = 0$ , а  $v_3 > 0$  за  $\psi_3 = 0$ . З врахуванням зроблених зауважень, вираз (8.23) набуде вигляду

$$L = 0,75 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot (2 \cdot d_1^2 + d_2^2) + v_3 \cdot \{[(1/d_1^4) + (2,38/(d_2^4))] - C\}. \quad (8.24)$$

Знайдемо частинні похідні виразу (8.24) за умовою (8.15):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial L / \partial \psi_1 \equiv \partial L / \partial d_1 = 3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_1 - 4 \cdot v_3 \cdot d_1^{-5} = 3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_1^6 - 4 \cdot v_3 = 0; \\ \partial L / \partial \psi_2 \equiv \partial L / \partial d_2 = 1,50 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_2 - 9,52 \cdot v_3 \cdot d_2^{-5} = 1,50 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_2^6 - \\ - 9,52 \cdot v_3 = 0; \\ \partial L / \partial \psi_3 \equiv \partial L / \partial v_3 = d_1^{-4} + 2,38 \cdot d_2^{-4} - C = 0. \end{array} \right. \quad (8.25)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (8.25), знайдемо формули для розрахунку діаметрів ступенів вала, за яких, за заданої довжини  $l$  кожного ступеня, він матиме мінімальну масу  $m$ :

$$d_1 = 1,16 \cdot C^{0,25}; \quad d_2 = 1,51 \cdot C^{0,25}. \quad (8.26)$$

Згідно з (8.22) стала « $C$ » в міжнародній системі одиниць SI має розмірність  $кг/м^4$ , що обумовлює розмірність  $кг^{0,25}$  числових коефіцієнтів у формулах (8.26).

Сталу «С», яка визначає оптимальні діаметри ступенів вала, для зручності аналізу впливу її складових на мінімізацію маси вала доцільно подати у формі:

$$C^{-0,25} = 1,64 \cdot \omega^{0,5} \cdot (l^3 / E)^{0,25} = 1,64 \cdot \omega^{0,5} \cdot (C_1)^{0,25}, \quad (8.27)$$

де  $C_1 = l^3 / E = const$  за заданих довжини  $l$  кожного ступеня вала та марки його матеріалу.

Якщо порівнювати вали з одного типу матеріалів (в машинобудуванні це, зазвичай, різні марки конструкційних сталей), то згідно з (8.27), основний вплив на розміри ступенів вала, а значить і на його масу, має кутова швидкість обертання вала  $\omega$ . Чим вища кутова швидкість  $\omega$ , тим меншими мають бути діаметри ступенів вала. Оптимальне співвідношення діаметрів  $d_1 / d_2 = 0,77$ .

## 9 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА АНАЛІТИЧНИХ І ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

### 9.1 Загальна характеристика аналітичних методів розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку

Зазвичай, математичні моделі механічних систем складаються із системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами та заданими умовами однозначності [5, 15, 12 – 14].

Залежно від характеру поставлених задач під час розроблення математичної моделі механічної системи та потрібного ступеня адекватності моделі з об'єктом – оригіналом дослідження, математичну модель намагаються спростити введенням відповідних припущень [6, 12 – 14].

Якщо вдається звести рівняння, що описують модель до одного лінійного однорідного чи неоднорідного рівняння другого порядку, то такого типу рівняння розв'язуються шляхом простого інтегрування [3, 24].

**Приклад.** Нехай вдалось математичну модель системи звести до однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами типу

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0, \quad (9.1)$$

де  $a$  і  $b$  – постійні коефіцієнти, задані в умовах однозначності;  $y = f(t)$ .  
Для рівняння (9.1) складають характеристичне рівняння [3, 24]

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (9.2)$$

корені якого:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -0,5 \cdot a - \sqrt{0,25 \cdot a^2 - b}; \\ \lambda_2 = -0,5 \cdot a + \sqrt{0,25 \cdot a^2 - b}; \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -a; \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = b. \end{array} \right. \quad (9.3)$$

Загальний розв'язок ( ) цього рівняння залежить від значень коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ .  
Для випадків: а)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t}, \quad (9.4)$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – сталі інтегрування, що визначаються за умовами однозначності  $t = 0$  та  $t = T$ ;

б) корені характеристичного рівняння комплексні:  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ ;  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$   
(тут  $i = \sqrt{-1}$ )

$$y(t) = (A \cdot \cos\beta t + B \cdot \sin\beta t)e^{\alpha t}, \quad (9.5)$$

де  $\alpha$  та  $i\beta$  – відповідно реальна та уявна частини коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ ;

$A$  і  $B$  – постійні коефіцієнти, що складаються із комбінацій коефіцієнтів  $a$  і  $b$ .

в)  $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}. \quad (9.6)$$

Якщо математична модель системи зведена до неоднорідного диференціального рівняння другого порядку типу [3, 24]

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t), \quad (9.7)$$

де  $f(t)$  – функція, що залежить від  $t$ . Такого типу рівняння описують вимушені коливання [11, 16].

Загальний розв'язок рівняння (9.7) є сумою загального розв'язку однорідного рівняння типу (9.1) ( $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$ ) та деякого частинного розв'язку  $y^*$  неоднорідного рівняння. Вид розв'язку  $y^*$  визначається видом функції  $f(t)$ . Наприклад, якщо  $f(t) = P_m(t)$ , де  $P_m(t)$  – багаточлен степеня  $m$ , то вид частинного розв'язку  $y^*$  залежить від значення коренів характеристичного рівняння (9.2). Можливі такі випадки:

а) число «0» не є коренем характеристичного рівняння (9.2), тобто  $b \neq 0$ , тоді

$$y^* = Q_m(t), \quad (9.8)$$

де  $Q_m(t)$  – багаточлен порядку  $m$ ;

б) число «0» – корінь рівняння (9.2), тобто  $b = 0$ , тоді якщо «0» – простий корінь і  $a \neq 0$ , то

$$y^* = t \cdot Q_m(t); \quad (9.9)$$

в) якщо «0» – кратний корінь, тобто  $a = 0$ , то

$$y^* = t^2 \cdot Q_m(t) \quad (9.10)$$

Інші типові види  $f(t)$  можна знайти в математичній літературі [3, 23, 24].

Як правило, диференціальні рівняння другого порядку математичної моделі механічної системи можна звести до системи рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами шляхом введення нової змінної. Ця система може бути лінійною однорідною або лінійною неоднорідною.

Математичну модель лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами в загальному вигляді можна записати так:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n; \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n; \\ \dots \\ \dot{y}_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n; \end{cases} \quad (9.11)$$

або у векторній (матричній) формі [1 – 4]

$$\frac{dY}{dt} = AY, \quad (9.12)$$

де  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ ,  $\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}$  – відповідно квадра-

тна матриця коефіцієнтів розмірністю коефіцієнтів розмірністю  $n \times n$ , матриця-стовпець функцій  $y_i(t)$  (тут  $i = 1, 2, \dots, n$ ), матриця похідних першого порядку функцій  $\dot{y}_i(t)$ . Характеристичне рівняння цієї системи записується у вигляді визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9.13)$$

або

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (9.14)$$

де  $\lambda$  – корінь рівняння (9.13);  $E = (\delta_{ij})$  або  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  – одинична

матриця (тут  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$  – символ Кронекера).

Найчастіше розв'язок таких систем знаходять за методом Ейлера за таким алгоритмом:

1) якщо  $\lambda_k$  – простий корінь характеристичного рівняння (9.13), то йому відповідає розв'язок системи (9.11)

$$y_1 = \gamma_1 \cdot e^{\lambda_k t}, \quad y_2 = \gamma_2 \cdot e^{\lambda_k t}, \dots, \quad y_n = \gamma_n \cdot e^{\lambda_k t}, \quad (9.15)$$

де коефіцієнти  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n = 0; \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_k)\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n = 0; \\ \dots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_k)\gamma_n = 0; \end{cases} \quad (9.15, a)$$

2) якщо  $\lambda_k$  – корінь кратності  $m$  характеристичного рівняння (9.13), то розв’язок системи (9.11) має вигляд

$$y_1 = P_1(t) \cdot e^{\lambda_k t}, \quad y_2 = P_2(t) \cdot e^{\lambda_k t}, \dots, \quad y_n = P_n(t) \cdot e^{\lambda_k t}, \quad (9.16)$$

де  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$  – багаточлени степеня не вище  $m - 1$ , що мають в сукупності  $m$  довільних постійних. Коеф. багаточленів можна знайти, підставивши вирази для  $y_1, y_2, \dots, y_n$  у вихідні рівняння (9.11).

Знайшовши розв’язки, що відповідають кожному кореню характеристичного рівняння (9.13), загальний розв’язок системи (9.11) отримаємо як лінійну комбінацію цих розв’язків. Наприклад, якщо всі корені характеристичного рівняння прості, а розв’язки, що відповідають цим кореням  $\lambda_k$  будуть  $y_1 = \gamma_{k1} \Theta^{\lambda_k t}, y_2 = \gamma_{k2} \Theta^{\lambda_k t}, \dots, y_n = \gamma_{kn} \Theta^{\lambda_k t} \quad k = 1, 2, \dots, n$ , то загальний розв’язок системи матиме вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \gamma_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 \gamma_{21} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \gamma_{n1} e^{\lambda_n t}; \\ y_2 = C_1 \gamma_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 \gamma_{22} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \gamma_{n2} e^{\lambda_n t}; \\ \dots \\ y_n = C_1 \gamma_{1n} e^{\lambda_1 t} + C_2 \gamma_{2n} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n \gamma_{nn} e^{\lambda_n t}. \end{cases} \quad (9.17)$$

Лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами у векторній (матричній) формі має вигляд

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y + F, \quad (9.18)$$

де  $F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$  – матриця-стовпець функцій  $f_i(t)$ , що входять у систему (9.18).

Загальний розв’язок системи (9.18) є сумою загального розв’язку однорідної системи типу (9.11) та деякого частинного розв’язку неоднорідної системи (9.18).

Знаходження загального розв’язку системи (9.18) виконують різними методами, наприклад, методом Лагранжа варіації довільних сталих.

Математичні моделі систем автоматики, зокрема гідравтоматики, часто можна подати у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Часто такого типу системи розв’язують методами операційного числення, які ґрунтують на різного типу інтегральних перетвореннях. Найчастіше використовують інтегральне перетворення Лапласа виду [2, 3]

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (9.19)$$

де  $f(t)$  – оригінал якої-небудь функції;

$F(p)$  – зображення оригінала  $f(t)$  (часто умовно це записують так:  $f \doteq F$ );

$p$  – зображення аргументу  $t$ , причому  $p = a + bi$  – комплексне число, де  $a = \text{Re} p$  – дійсна частина числа;  $bi$  ( $b = \text{Im} p$ ) – уявна частина числа  $p$ ;  
 $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця  $i^2 = -1$ .

Застосовуючи перетворення (9.19) до лінійного диференціального рівняння чи системи рівнянь, їх перетворюють на алгебраїчне рівняння чи систему алгебраїчних рівнянь в зображеннях, які легше розв'язати, ніж диференціальні рівняння чи їх систему.

Складені для типових функцій таблиці [3] основних перетворень Лапласа, використовуючи які можна записати зображення оригіналів цих функцій або повернутись від зображень до оригіналу.

Застосування перетворення Лапласа покажемо на такому прикладі. Нехай математична модель якогось процесу описується системою неоднорідних лінійних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} + x - y = e^t ; \\ \dot{y} + 3x - 2y = 2e^t, \end{cases} \quad (9.20)$$

де  $x = f(t)$ ;  $y = f(t)$ .

Умови однозначності системи рівнянь  $x(0) = 1$  і  $y(0) = 1$ .

Використовуючи перетворення (9.19) та таблицю основних перетворень типових функцій, прийдемо до системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + X(p) - Y(p) = \frac{1}{p-1} ; \\ pY(p) - 1 + 3X(p) - 2Y(p) = \frac{2}{p-1}, \end{cases} \quad (9.21)$$

де  $x(t) \rightleftharpoons X(p)$ ;  $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$ .

Похідні  $\dot{x}(t)$  та  $\dot{y}(t)$  знайдені за правилами диференціювання оригінала.

Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь (9.21), знайдемо:

$$X(p) = \frac{1}{p-1} ; \quad Y(p) = \frac{1}{p-1}. \quad (9.22)$$

За таблицею основних перетворень Лапласа для типових функцій [3], отримаємо:

$$x(t) = e^t ; \quad y(t) = e^t. \quad (9.23)$$

## 9.2 Огляд числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядків

Числові методи розв'язування диференціальних рівнянь або їх систем будь-якого порядку дозволяють знайти розв'язки цих рівнянь для заданих конкретних умов однозначності, а також оцінити похибку таких розрахунків.

Значення числових методів і їх бурхливий розвиток особливо підсилились з появою ЕОМ, що також привело до розширення класу задач, які необхідно розв'язувати під час різноманітних досліджень.

Розроблено багато методів числового розв'язку диференціальних рівнянь та їх систем [3, 23, 24], які також забезпечені потрібними комп'ютерними програмами.

Найбільш давній метод розв'язування диференціальних рівнянь – це розкладення складних функцій в ряд Тейлора. Наприклад, на заданому відрізку (інтервалі)  $[x_0, x_0 + \chi]$  та за початкових умов  $y(x_0) = y_0$  потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\dot{y} = f(x, y). \quad (9.24)$$

Відрізок  $[x_0, x_0 + \chi]$  розбивають на маленькі ділянки  $[x_{j-1}, x_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  і, використовуючи послідовно формулу [3, 25]

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^n \left[ \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \right], \quad (9.25)$$

знаходимо розв'язок рівняння (9.24), де  $y^{(i)}(x)$  – похідна функції  $y(x)$   $i$ -го порядку.

На сучасному етапі розвитку науки метод розкладення в ряд Тейлора застосовується рідко через дуже великий, навіть для комп'ютера, обсяг розрахунків. Метод розкладення в ряд Тейлора є ефективним для розв'язання диференціальних рівнянь строго фіксованого типу, коли багатократно інтегрується система диференціальних рівнянь певного типу за різних початкових умов і значень параметрів в їх правих частинах.

Більш прогресивними методами числового розв'язання диференціальних рівнянь і їх систем є метод Рунге – Кутта та його модифікації [3, 23, 24].

Попередником і, якоюсь мірою, модифікацією методів Рунге – Кутта є метод числового розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку, який запропонував Л. Ейлер (метод Ейлера) [3, 23].

Суть методу Ейлера полягає в такому: незалежну змінну (аргумент)  $x$ , наприклад, рівняння типу (9.24) з початковою умовою  $y(x_0) = y_0$ , розбивають на відрізки (систему) з рівновіддаленими точками

$$x_i + i \cdot h \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (9.26)$$

де  $h$  – достатньо мала відстань (крок) між цими точками.

Кожне наступне значення функції  $y$  шукаємо за формулами

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad (9.27)$$

починаючи з  $y(x_0) = y_0$ . За методом Ейлера можна чисельно розв'язувати й системи диференціальних рівнянь першого порядку. Цей метод легко реалізується графічно (див. курс ТММ).

Основні недоліки методу – мала точність і систематичне накопичення помилок. Відносно задовільні результати метод дає лише за маленьких значень кроку  $h$ , але це значно збільшує обсяг обчислень.

Є різні удосконалення методу Ейлера, наприклад метод Ейлера – Коші [3, 23, 24], коли здійснюється ітераційна обробка кожного значення  $y_i$ . Ця обробка починається з грубого наближення

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x, y), \quad (9.28)$$

на основі якого будується ітераційний процес

$$y_{i+1}^k = y_i + 0,5h \left[ f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^{(k-1)}) \right], \quad (9.29)$$

де  $k = 1, 2, \dots$  Ітерацію продовжують до тих пір, поки деякі два послідовних наближення  $y_{i+1}^{(m)}$  і  $y_{i+1}^{(m+1)}$  не будуть збігатись між собою у відповідних десяткових знаках. Після цього припускають, що  $y_{i+1} \approx \bar{y}_{i+1}^{(m)}$ , де  $\bar{y}_{i+1}^{(m)}$  – спільна частина наближень  $y_{i+1}^{(m)}$  і  $y_{i+1}^{(m+1)}$ . Якщо збіжність потрібних десяткових знаків не відбувається, то необхідно зменшити крок  $h$ .

Метод Рунге – Кутта також ґрунтується на співвідношеннях (9.28) і (9.29), але приріст функції  $y_{i+1}$  розраховується за формулою:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (9.30)$$

де числа  $k_1, k_2, k_3$  і  $k_4$  розраховуються так:

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i); \quad k_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_1^{(i)}); \quad (9.31)$$

$$k_3^{(i)} = hf(x_i + 0,5h, y_i + 0,5k_2^{(i)}); \quad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}). \quad (9.32)$$

Метод Рунге – Кутта дозволяє з високою точністю розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку та їх системи і широко використовується в різних програмах для ПК. Важливою перевагою цього методу є можливість застосування змінного кроку  $h$ .

Відносну високу точність чисельного розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку та їх систем дозволяє отримати метод Адамса [3, 22]. Метод Адамса ґрунтується на **екстраполяційній** формулі

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55\dot{y}_i - 59\dot{y}_{i-1} + 37\dot{y}_{i-2} - 9\dot{y}_{i-3}), \quad (9.33)$$

причому  $x_{i+1} = x_i + h$ , а похідні, що входять в (9.33) знаходять чисельно за інтеполяційною формулою Ньютона з точністю до різниць четвертого порядку.

Для початку процесу чисельного інтегрування диференціальних рівнянь за методом Адамса потрібно визначити чотири початкових значення  $y_0, y_1, y_2, y_3$  – це, так звані, **початковий відрізок** (зазвичай, цей відрізок розуміють як правило, задане в умовах однозначності). Цей відрізок знаходять будь-яким іншим чисельним методом, наприклад Рунге – Кутта чи розкладенням в ряд Тейлора:

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + \dot{y}_0(ih) + 0,5\ddot{y}_0(ih^2) + \dots, \quad (9.34)$$

де  $i = 1, 2, 3$ , або  $i = 1, 1, 2$ , з відповідною зміною нумерації. Знаючи значення  $y_i$ , за рівнянням  $\dot{y} = f(x, y)$  можна знайти похідні  $\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dot{y}_2$  та  $\dot{y}_3$ , а наступні значення  $y_i$  для  $i = 4, 5, \dots$  крок за кроком розраховуються за формулою (9.33).

Одним з найбільш простих і практично зручних методів числового інтегрування диференціальних рівнянь є метод Мілна [3, 24]. Як і в інших розглянутих методах для диференціального рівняння типу (9.24) з такими самими початковими умовами вибирається крок  $h$ , покладається  $x_i = x_0 + ih$  і знаходиться **початковий відрізок**  $y_0, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3$  будь-яким числовим методом. Наступні значення  $y_i = y(x_i)$  (тут  $i = 4, 5, 6, \dots$ ) послідовно визначаються за схемою та припущенням, що  $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}$  та  $y_{i-4}$  відомі:

1) розраховуємо перше наближене  $y_i^{(1)}$  для найближчого наступного значення за формулою:

$$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3} (2\dot{y}_{i-3} - \dot{y}_{i-2} + 2\dot{y}_{i-1}), \quad (9.35)$$

де  $i = 4, 5, \dots$ ;

2) значення  $y_i^{(1)}$  підставляємо в диференціальне рівняння (9.25) та визначаємо відповідні значення  $\dot{y}_i^{(1)} = f(x_i, y_i^{(1)})$ ;

3) знаходимо друге наближене  $y_i^{(2)}$  за формулою

$$y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3} (\dot{y}_{i-2} - 4\dot{y}_{i-1} + y_i^{(1)}), \quad (9.36)$$

де  $i = 4, 5, \dots$ ;

4) визначаємо абсолютну похибку значення  $y_i^{(2)}$  за залежністю Мілна

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29} |y_i^{(2)} - y_i^{(1)}|. \quad (9.37)$$

Якщо  $\varepsilon_i \leq [\varepsilon]$ , де  $[\varepsilon]$  – задана межа похибка розв’язку, то покладають  $y_i \approx y_i^{(2)}$  і  $\dot{y}_i = f(x_i, y_i^{(2)})$  та переходять до розрахунку наступного значення  $y_{i+1}$ , повторюючи описаний процес. Якщо ж  $\varepsilon_i > [\varepsilon]$ , то потрібно, вже з певного моменту, зменшити крок і перерахувати **початковий відрізок**.

Відомі й інші методи числового розв’язання диференціальних рівнянь і їх систем, основані на використанні похідних вищих порядків, методи Нумерова, Чаплигіна, Ньютона – Канторовича та ін. [3, 23, 24].

На сучасному етапі розвитку всі ці методи автоматизовані, розроблені відповідні пакети комп’ютерних програм, наприклад Matlab тощо, що дозволяють досліджувати будь-якої складності математичні моделі динамічних систем, процеси в яких описуються системами диференціальних рівнянь із заданими умовами однозначності.

За допомогою цих пакетів програм можна проводити дослідження математичних моделей шляхом варіювання значень постійних величин, що входять в рівняння моделі (мас, жорсткостей, коефіцієнтів сухого та рідинного тертя, геометричних параметрів ланок динамічної моделі тощо).

Сучасні методи дослідження математичних моделей механічних систем також дозволяють здійснювати обробку результатів експериментальних досліджень цих систем і визначати рівень адекватності математичних моделей та реальних об’єктів.

Під час розв’язання задач технологічної теплофізики застосовують числові методи скінченних різниць, скінченних елементів та граничних елементів. З цих методів для розв’язання задач теплопровідності найбільш широко використовується метод скінченних різниць, який ще називають методом сіток [3, 7, 24].

Метод скінченних різниць ґрунтується на заміні похідних в диференціальних рівняннях теплопровідності приблизними співвідношеннями в окремих вузлових точках температурного поля. Ці точки називають вузлами сітки. За такої заміни диференціальне рівняння перетворюється в еквівалентне алгебраїчне. Такі алгебраїчні рівняння складаються для всіх вузлових точок розглядуваної ділянки тіла, включно й межевій точці.

Як результат отримаємо замкнену систему алгебраїчних рівнянь, розв’язавши яку за допомогою ПК, визначимо температури всіх вузлових точок.

Метод скінченних різниць полягає в тому, що досліджуване тіло чи система тіл розбивається на маленькі елементи (об’єми, площини, відрізки), вигляд яких визначається умовами задачі, зазвичай, це правильні геометричні фігури: паралелепіпеди, прямокутники чи рівні між собою відрізки прямої. Час проходження теплопередачі також ділиться на малі проміжки  $\Delta t$  та вводяться такі припущення:

а) термічні властивості кожного із елементів (наприклад, маленького паралелепіпед) зосереджені в його центральній вузловій точці (рис. 9.1) з порядковими номерами  $i, j, p$ , що відповідають координатам, відповідно,  $x, y, z$ ;

- б) температура тіла змінюється дискретно стрибком через проміжок часу  $\Delta\tau$ , причому кожному проміжку присвоюється порядковий номер (індекс)  $k$ ,  $k + 1, k + 2, \dots, k + n$ , (тут  $n$  – число проміжків  $\Delta\tau$ , на які поділена стріла часу);
- в) теплопередача між вузловими точками здійснюється через умовні теплопровідні стержні.

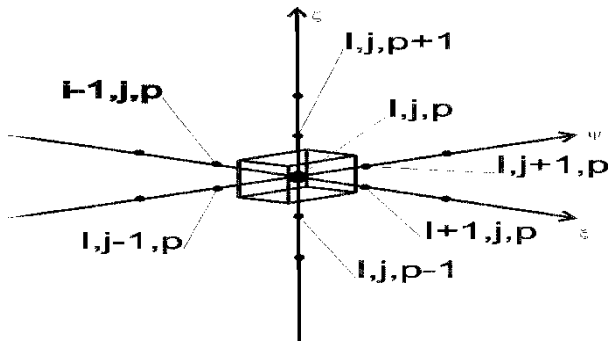


Рисунок 9.1 – Графічна інтерполяція методу скінченних різниць

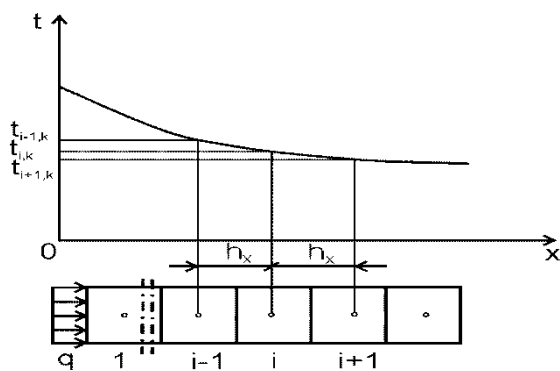


Рисунок 9.2 – Графічна ілюстрація методу скінченних різниць для розрахунку температурного поля в одновимірному стержні

Як приклад застосування числового методу скінченних різниць розв'яжемо рівняння теплопровідності для одновимірного нестационарного термодинамічного (thermodynamic) процесу [7]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (9.38)$$

Рівняння (9.38) описує процес зміни температури в напрямку осі  $Ox$  і часі, наприклад, температурне поле в одновимірному стержні.

Графічну ілюстрацію цього поля в одновимірному стержні зображено на рис. 9.2. Розділимо стержень на маленькі відрізки довжиною  $h_x$  та пронумеруємо їх індексами  $i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2, \dots, i + n$  (тут  $i$  – центральна вузлова точка). Якщо відома температурна функція (див. рис. 9.2), то першу похідну  $\partial t / \partial x$  поблизу точки  $i$  в момент часу  $k$  можна замінити одним з двох наближених виразів:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cong \begin{cases} \left( \frac{\Delta t}{h_x} \right)_+ = \frac{t_{i+1,k} - t_{i,k}}{h_x}, \\ \left( \frac{\Delta t}{h_x} \right)_- = \frac{t_{i,k} - t_{i-1,k}}{h_x}, \end{cases} \quad (9.39)$$

де  $(\Delta t / h_x)_+$  та  $(\Delta t / h_x)_-$  – прийнято називати різницевиими відношеннями «вперед» (+) та «назад» (-).

Другу похідну  $\partial^2 t / \partial x^2$  можна подати через різницю відношень «вперед» та «назад», віднесену до  $h_x$ :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cong \frac{1}{h_x} \left[ \left( \frac{\Delta t}{h_x} \right)_+ - \left( \frac{\Delta t}{h_x} \right)_- \right] = \frac{t_{i+1,k} + t_{i-1,k} - 2t_{i,k}}{h_x^2}. \quad (9.40)$$

Оскільки часова вісь (стріла часу) має один напрямок – від теперішнього до майбутнього, то похідну  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  можна описати тільки одним різницеvim співвідношенням:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta \tau}. \quad (9.41)$$

Підставляючи (9.40) та (9.41) в рівняння (9.38), після нескладних перетворень отримаємо вираз для розрахунку температури точки  $i$  в момент часу  $k + 1$ :

$$t_{i,k+1} = \frac{a\Delta\tau}{h_x^2} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + \left( 1 - \frac{2a\Delta\tau}{h_x^2} \right) t_{i,k} = F_{0x} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + (1 - 2F_{0x}) t_{i,k}, \quad (9.42)$$

де  $F_{0x} = a\Delta\tau / h_x^2$  – критерій Фур'є відносно розміру  $h_x$  елементарного відрізка стержня. Рівняння (9.42) є диференціальним рівнянням теплопровідності в скінченно-різницеvій формі. Математичний аналіз рівняння (9.42) показує, що для забезпечення стійкості його розв'язку необхідно виконати умову  $F_{0x} \leq 0,5$ . Для  $F_{0x} > 0,5$  результати розв'язку набувають стрибкоподібного характеру і розрахунок температурного поля буде неправильним. Візьмемо  $F_{0x} = 0,5$ , тоді

$$t_{i,k+1} = 0,5 (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}). \quad (9.43)$$

Рівняння (9.43) показує, що для знаходження температури точки  $i$  в момент часу  $k + 1$  достатньо знати температуру двох сусідніх точок  $i - 1$  та  $i + 1$  в попередній проміжок часу  $k$ . Таким чином за  $F_{0x} = 0,5$  майбутня температура точки  $i$  від теперішньої її температури не залежить.

Рівняння типу (9.43) складають для всіх вузлових точок стержня, включно й точки, що розташовані на його межах, температура яких задана в умовах однозначності. Розв'язуючи отриману таким чином систему алгебраїчних рівнянь, можна визначити розподілення температури в стержні для будь-якого моменту часу. Необхідно зауважити, що умови однозначності також мають бути приведені до скінченно-різницеvої форми. Точність розрахунків підвищується із зменшенням  $F_{0x}$ , наприклад, за  $F_{0x} = 0,25$   $t_{i,k+1} = 0,25 (t_{i+1,k} + t_{i-1,k} + 2t_{i,k})$  – це більш точний вираз для розрахунку майбутньої температури точки  $i$ .

Методом скінченних різниць можна розв'язувати дво- та тривимірні задачі

теплопровідності, наприклад, для тривимірного температурного поля рівняння теплопровідності в скінченно-різницевій формі має вигляд

$$t_{i,j,p,k+1} = F_{0x} (t_{i+1,j,p,k} + t_{i-1,j,p,k}) + F_{0y} (t_{i,j+1,p,k} + t_{i,j-1,p,k}) + F_{0z} (t_{i,j,p+1,k} + t_{i,j,p-1,k}) + [1 - 2(F_{0x} + F_{0y} + F_{0z})] \cdot t_{i,j,p,k}, \quad (9.44)$$

де  $F_{0x} = \frac{a\Delta\tau}{h_x^2}$ ;  $F_{0y} = \frac{a\Delta\tau}{h_y^2}$ ;  $F_{0z} = \frac{a\Delta\tau}{h_z^2}$  – критерії Фур'є відносно розмірів  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$

елементарного об'єму тіла. Стійкість розв'язку рівняння (9.63) забезпечується за виконання умови

$$F_{0x} + F_{0y} + F_{0z} \leq 0,5. \quad (9.45)$$

Під час вибору інтервалів (кроків) сітки  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  їх величину узгоджують із ступенем деталізації вивчення температурного поля в тій чи іншій області твердого тіла. Кроки сітки, а також інтервал розбивання координати часу мають відповідати умові (9.45).

З метою зменшення обсягу та вартості розрахунків під час розв'язання задач з теплофізики нині широко використовуються методи скінченних елементів і граничних елементів, математичний апарат яких ґрунтується на варіаційному численні.

На відміну від методу скінченних різниць метод скінченних елементів дозволяє здійснювати неоднакову деталізацію об'єктів дослідження. Елементарні об'єми можуть мати будь-яку форму та розміри. За методом скінченних елементів скорочується число рівнянь та є можливість для окремих елементів врахувати різні властивості матеріалу. Метод граничних елементів відрізняється від розглянутих тим, що на елементарні об'єми розбивається не все тіло, а тільки його межові поверхні, що значно скорочує обсяг розрахунків. В теплофізиці метод граничних елементів поки що використовують обмежено, оскільки це пов'язано із значними математичними труднощами. Більш детально з особливостями та прикладами застосування методів скінченних та граничних елементів можна ознайомитись в роботах [25, 26].

Розв'язання задач теплопровідності шляхом моделювання відноситься до експериментальних методів. Використовується два методи моделювання: вивчення теплообміну в реальному твердому тілі (або системі тіл) за аналізом подібного процесу поширення теплоти в моделі (фізичне моделювання); вивчення теплообміну в реальному тілі на основі дослідження іншого фізичного явища, що має формально аналогічне процесу поширення теплоти математичне описання (математичне або аналогове моделювання). Теоретичною базою моделювання є теорія подібності [7, 25, 26]

## 10 ПРАКТИКУМ

З метою закріплення основних положень дисципліни «Математичне моделювання механічних систем» і набуття практичних навичок побудови та аналізу динамічних і математичних моделей машин з різними типами приводів, а також основ практичного розв'язування задач параметричної оптимізації, розділ посібника «практикум», на нашу думку, доцільно та методично правильно буде викласти у чотирьох підрозділах: 1) перелік питань для самоперевірки набутих здобувачами теоретичних знань в процесі вивчення дисципліни; 2) практичне закріплення основних положень дисципліни шляхом розв'язування задач за тематикою розділів дисципліни; 3) приклади розв'язування задач за тематикою розділів дисципліни, з метою полегшення виконання підрозділу 2 практикуму; 4) для контролю рівня набутих знань і підготовки до складання іспиту з дисципліни здобувачам рекомендуються типові тести за тематикою розділів дисципліни.

### 10.1 Перелік питань для самоперевірки

1. На яких розділах вищої математики ґрунтується математичне моделювання механічних систем?
3. Що розуміють під поняттям «Матриця»? Якими способами записують матриці?
4. Як скорочено записують рівність двох матриць  $A$  і  $B$ ?
5. Наведіть в загальному вигляді записи таких спеціальних матриць:  $O$  – нульової;  $-A$  – протилежної  $A$ ;  $E$  – одиничної.
6. Що розуміють під розміром матриці?
7. Що розуміють під поняттям «Транспонована матриця»? Як записують транспоновані матриці?
8. Що розуміють під поняттями «Матриця-рядок» і «Матриця-стовпець» і як записують ці матриці?
9. Як пов'язані між собою «Матриця-стовпець» і «Матриця-рядок» для будь-яких чисел  $a_{ij}$ ?
10. Які властивості мають транспоновані матриці?
11. Що розуміють під поняттями таких матриць: симетрична; кососиметрична; ортогональна?
12. Що розуміють під поняттям «Символ Кронекера» та якою матрицею він є?
13. Як в загальному випадку записують матриці: «Верхню трикутну», «Нижню трикутну», «Діагональну» та «Скалярну»?
14. Які арифметичні дії можна виконувати з матрицями?
15. Як додаються в загальному випадку матриці та які властивості має додавання матриць?

16. Як виконується в загальному випадку множення матриць на число та одна на одну і які властивості цього процесу?
17. Що розуміють під поняттям «Моделювання» в загальному випадку?
18. Що розуміють під поняттям «Фізична (динамічна) модель» в загальному випадку? Яким чином графічно зображають динамічні моделі?
19. На яких припущеннях ґрунтується перехід від реальних ланок механічної системи до жорстких ланок динамічної моделі?
20. Як зображають на схемах динамічних моделей пружні та дисипативні ланки і ланки сухого тертя?
21. На які типи за числом вимірів діляться динамічні моделі?
22. Дайте означення та наведіть приклади ланцюгових розгалужених і замкнених динамічних моделей.
23. Яку динамічна модель називають моделлю з розподіленими параметрами?
24. Наведіть означення поняття «Математична модель».
25. Що розуміють під поняттями «Індуктивний» і «Системний» підходи до моделювання механічних систем та їх ланок?
26. На які три основні рівні ділиться процес моделювання складних систем?
27. В якому вигляді можуть визначатись характеристики стану системи в їх математичних моделях?
28. Як залежно від специфіки зв'язків характеристик стану системи з її параметрами, вхідними сигналами тощо класифікують математичні моделі?
29. В чому полягає різниця між аналітичними та імітаційними математичними моделями?
30. Зобразіть у вигляді структурної схеми процес побудови математичної моделі.
31. Функціями яких в загальному випадку вихідних параметрів механічної системи визначаються рушійні (активні) сили цієї системи? На які види діляться ці сили?
32. На які види діляться сили опору, що протидіють активним в механічній системі?
33. Прочитайте запис  $R = R_0 \operatorname{sgn} \dot{x}$ , де  $R_0$  – сила сухого тертя.
34. Що розуміють під поняттям «Позиційне тертя»?
35. Що розуміють під поняттям «Неконсервативні сили»?
36. Запишіть і поясніть рівняння Лагранжа 2-го роду.
37. Поясніть суть принципу Д'Аламбера для побудови диференціальних рівнянь руху ланок механічної системи.
38. За якими ознаками класифікують методи спрощення математичних моделей?
39. Якими способами можна лінеаризувати нелінійні процеси в математичних моделях?
40. Що розуміють під поняттям «Адекватність математичної моделі та реальної механічної системи (об'єкта досліджень)»?

41. Що розуміють під поняттями «Ізоморфізму» та «Гомоморфізму» об'єкта досліджень та його математичної моделі?

42. Як гідравлічна ланка в динамічних моделях гідроімпульсних приводів може бути зображена у вигляді тіла Кельвіна – Фойхта?

43. Запишіть і поясніть формулу для розрахунку площі поперечного перерізу узагальненої напірної гідролінії гідросистеми, наприклад, гідроімпульсного привода.

44. Запишіть і поясніть формулу для розрахунку жорсткості напірної порожнини гідросистеми гідроімпульсного привода відносно площі поперечного перерізу узагальненої напірної гідролінії цієї гідросистеми.

45. Як визначити передатне відношення від гідравлічної ланки у вигляді тіла Кельвіна – Фойхта до  $i$ -тої площі поперечного перерізу якої-небудь рухомої ланки гідроімпульсного привода?

46. На які розділи умовно ділиться теорія оптимізації та в чому полягає різниця між цими розділами?

47. Що розуміють під поняттям «Параметрична оптимізація інженерного об'єкта»?

48. Які аспекти є найбільш важливими в параметричній оптимізації інженерних об'єктів?

46. Що розуміють під поняттям «Цільова функція  $\psi_0(b)$ »?

50. Наведіть означення поняття «Безумовна оптимізація».

51. На які види ділиться безумовна оптимізація?

52. Перерахуйте з короткою характеристикою основні методи одновимірної безумовної оптимізації.

53. Поясніть суть методу внутрішньої послідовної безумовної оптимізації та спосіб формування розширеної цільової функції  $U(b,r)$  за допомогою штрафної функції  $\psi(r,b)$ .

54. Поясніть суть методу зовнішньої послідовної безумовної оптимізації та спосіб формування розширеної цільової функції  $T(b,r)$  за допомогою штрафної функції  $\psi(t,b)$ .

55. Поясніть суть комбінованого методу (внутрішньо-зовнішнього) послідовної безумовної оптимізації та спосіб формування розширеної цільової функції  $V(b,r,t)$  за допомогою штрафних функцій  $\psi(r,b)$  і  $\psi(t,b)$ .

56. В чому полягає відмінність умовної оптимізації від безумовної?

57. Перерахуйте з короткою характеристикою найбільш відомі методи умовної оптимізації. До яких задач в математиці відносять задачі умовної оптимізації?

58. Наведіть в спрощеному вигляді необхідну умову оптимальності (умова Куна – Такера) об'єкта оптимізації та поясніть суть математичних залежностей цієї умови.

59. Поясніть зміст лагранжіана  $L(b, v_i) = \psi_0(b) + \sum_{i=1}^n (v_i \psi_i)$ . Для яких задач оптимізації використовується цей вираз?



71. На якій екстраполяційній формулі ґрунтується числовий метод Рунге – Кутта для розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку?

72. На якій екстраполяційній формулі ґрунтується числовий метод Адамса для розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку? За якою ітераційною формулою знаходять початковий відрізок  $y_i$  в методі Адамса?

73. Обґрунтовано за допомогою екстраполяційних формул поясніть суть методу Мілна для числового інтегрування диференціальних рівнянь. В чому перевага методу Мілна перед іншими числовими методами розв’язування диференціальних рівнянь за заданих умов однозначності?

## 10.2 Типові умови задач для практичних занять і самостійної роботи для здобувачів вищої освіти

№ 1

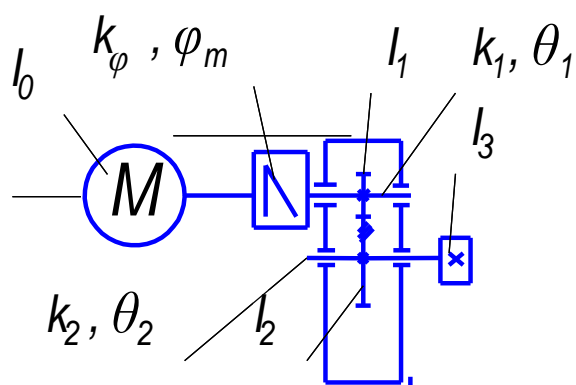


Рисунок 10.1

Дано кінематичну схему (структурну схему) механічного привода з одноступінчастим зубчастим циліндричним редуктором (рис. 10.1), де  $I_0, I_1, I_2, I_3$  – відповідно моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та колеса редуктора; навантажувального диска привода;  $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2$  – відповідно кути повороту ротора двигуна та закручування муфти, швидкохідного і тихохідного валів редуктора. Шестерня і колесо редуктора та підшипники валів – абсолютно жорсткі

тіла. Побудувати динамічну модель цього привода, вважаючи муфту безмасовим елементом, а вали безінерційними пружними елементами.  $k_\varphi, k_1, k_2$  – жорсткості (крутильні) муфти та валів редуктора.

№ 2

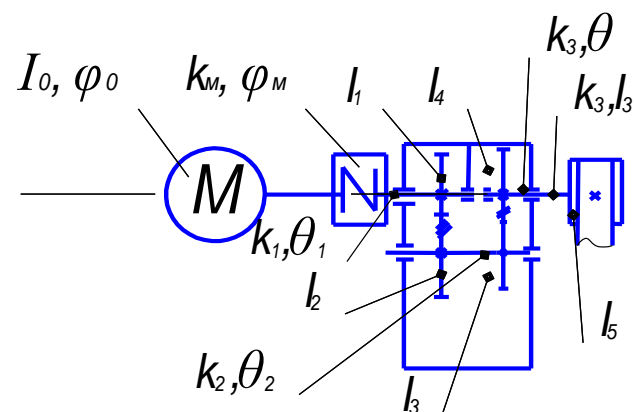


Рисунок 10.2

Дано структурну схему (рис. 10.2) механічного привода, де  $I_0, I_1, I_2, I_3, I_5$  – відповідно моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та колеса швидкохідного і тихохідного ступенів редуктора та приводного барабана привода;  $k_m, k_1, k_2, k_3$  – відповідно крутильні жорсткості муфти та валів редуктора;  $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  – відповідно кути повороту ротора електродвигуна та закручування муфти і валів редуктора.

Зубчасті колеса редуктора та підшипники валів вважати абсолютно жорсткими. Моментом інерції маси муфти знехтувати. Побудувати динамічну модель цього привода.

№ 3

Дано структурну схему розгалуженого механічного привода (рис. 10.3), де

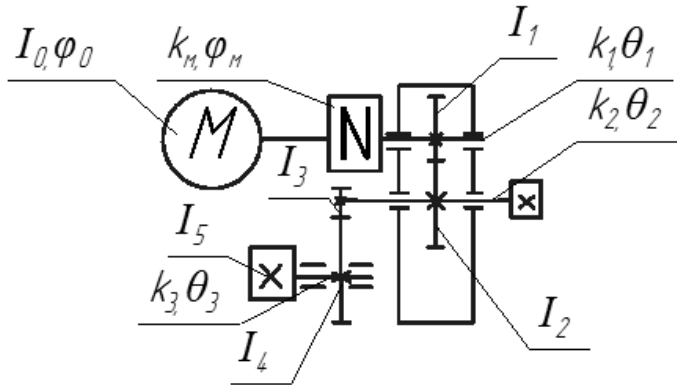


Рисунок 10.3

$I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$  – відповідно моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та колеса редуктора, маси шківів і шестерні відкритої передачі, колеса відкритої передачі та шківів, встановленого на валу цього колеса;  $k_m, k_1, k_2, k_3$  – відповідно крутильні жорсткості муфти та валів редуктора та вала колеса відкритої передачі;  $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  – відповідно

кути повороту ротора електродвигуна та закручування муфти і валів передач. Зубчасті колеса передач та підшипники валів вважати абсолютно жорсткими. Моментом інерції маси муфти знехтувати. Побудувати динамічну модель цього привода.

№ 4

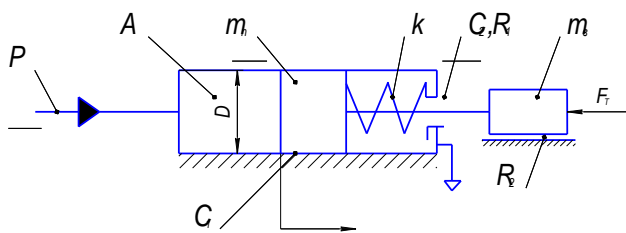


Рисунок 10.4

Дано структурну (принципову) схему (рис. 10.4) гідравлічного привода, де  $m_p, m_e$  – маса поршня гідроциліндра та виконавчої ланки привода;  $p$  – робочий тиск в напірній порожнині  $A$  привода;  $D$  – діаметр поршня гідроциліндра;

$k$  – жорсткість пружини, що навантажує поршень гідроциліндра;  $F_T$  – технологічне зусилля на штокові поршня;  $R_1, R_2$  – відповідно постійні сили сухого тертя на штокові поршня та напрямних виконавчої ланки;  $c_1, c_2$  – відповідно коефіцієнт демпфірування (в'язкого тертя) в зазорах поршня і штока гідроциліндра;  $x$  – напрям руху поршня гідроциліндра. Побудувати динамічну модель привода.

№ 5

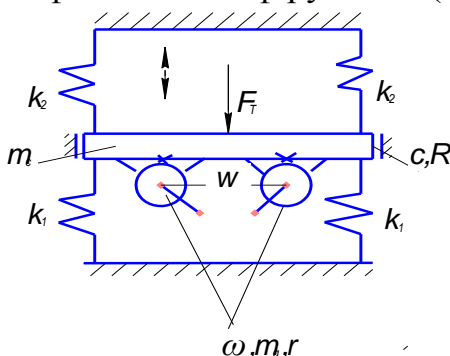


Рисунок 10.5

Дано структурну схему (рис. 10.5) вібраційної машини з дебалансним приводом і такими параметрами:  $m_g$  – маса дебалансів;  $\omega = \text{const}$  – кутова швидкість обертання дебалансів;  $r$  – ексцентриситет дебалансів;

$m_c$  – маса вібростоло;  $k_1, k_2$  – жорсткості пружних елементів вібростоло;  $F_T$  – технологічне зусилля на вібростолі;  $c, R$  – відповідно коефіцієнт в'язкого тертя та середня сила сухого тертя в напрямних вібростоло. Побудувати динамічну модель цього привода.

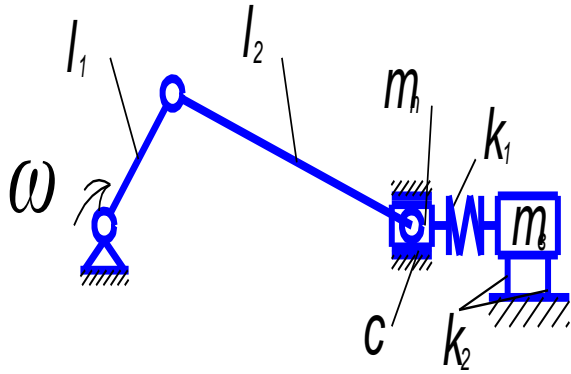


Рисунок 10.6

Тертям в кінематичних парах кривошипа і шатуна знехтувати. Побудувати динамічну модель цієї вібромашини.

Дано структурну схему (рис. 10.6) вібромашини з кінематичним збудженням і такими параметрами :  $\omega = \text{const}$  – кутова швидкість кривошипа;  $l_1, l_2$  – відповідно довжини кривошипа та шатуна;  $m_n, m_8$  – зведені маси повзуна та виконавчої ланки вібромашини;  $k_1, k_2$  – жорсткості пружних елементів вібромашини;  $c$  – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних повзуна.

Дано структурну схему (рис. 10.7) вібромашини з електромагнітним віброзбуджувачем і такими параметрами:  $m_c$  – маса вібростола;  $k$  – жорсткості пружин, на яких встановлено вібростіл (коливальну систему);  $c$  – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних вібростола;  $F_e = f(U, I, L, a_0, R)$  – змінна електромагнітна сила – функція сили  $I$  струму, індуктивності  $L$  обмотки електромагніту та її опору  $R$  і початкового зазору  $a_0$  між якорем електромагніту 1 та його магнітопроводом 2;  $F_T$  – технологічне зусилля;  $R_f$  – сила сухого тертя. Побудувати динамічну модель цієї вібромашини.

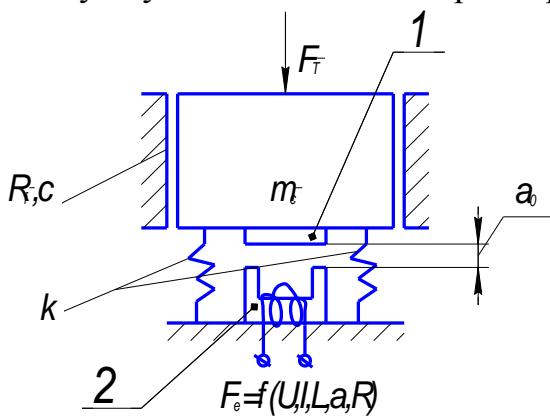


Рисунок 10.7

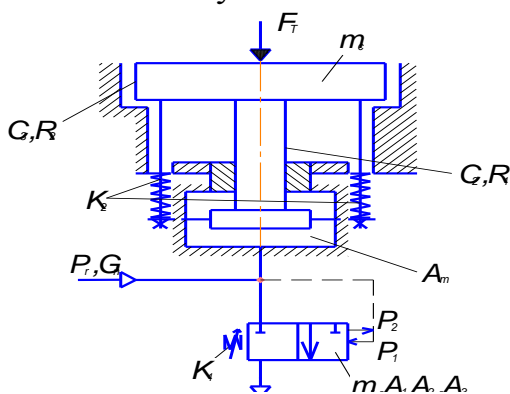


Рисунок 10.8

Дано структурну схему (рис. 10.8) вібромашини з пневмоімпульсним приводом і такими параметрами:  $m_c, m_r$  – зведені маси відповідно вібростола разом з мембранним пневмодвигуном і генератором імпульсів тиску повітря (ГІТ);  $p_r, G_n$  – поточний тиск і масова витрата повітря в пневмережі;  $A_1, A_2, A_m$  – відповідно площі поперечного перерізу запірного елемента ГІТ та ефективна площа мембрани пневмодвигуна;  $k_1, k_2$  – відповідно жорсткості пружин регулятора тиску відкриття ГІТ та повернення вібростола;  $c_1, c_2, c_3$  – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних запірного елемента ГІТ, пневмодвигуна та вібростола;  $R_1, R_2$  – сила сухого тертя в напрямних штока пневмодвигуна та вібростола;  $F_T$  – технологічне зусилля. Побудувати динамічну модель вібромашини.

№ 9

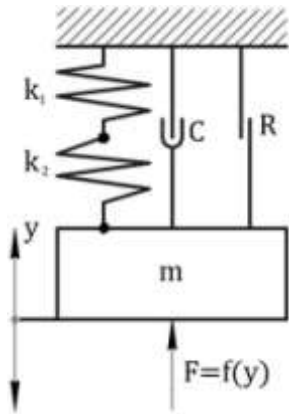


Рисунок 10.9

За динамічною моделлю (рис. 10.9) механічної системи, що здійснює вимушені коливання вздовж координати  $y$  під дією сили  $F = f(y)$ , скласти математичну модель цієї системи. На рис. 10.9 позначено:  $m$  – маса системи;  $k_1$  та  $k_2$  – жорсткості пружної ланки системи у вигляді двох послідовно з'єднаних пружин;  $C$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час коливань маси  $m$ ;  $R$  – сила сухого тертя під час руху маси  $m$ .

№ 10

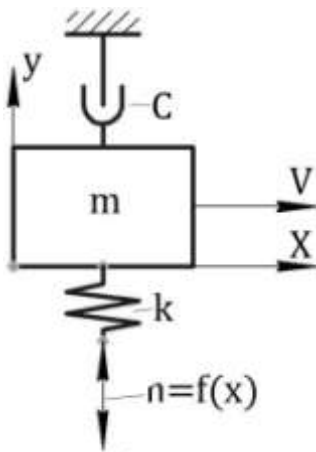


Рисунок 10.10

Механічна система (рис. 10.10) з рухомою масою  $m$  рухається в напрямку  $x$  з постійною швидкістю  $V = x/t$  і приходить в коливальний рух відносно координати  $y$  внаслідок кінематичного збудження  $n = f(x)$  (наприклад, підресорена маса автомобіля на нерівній дорозі), яке передається масі  $m$  через пружину жорсткістю  $k$ .

Скориставшись динамічною моделлю цієї системи (рис. 10.10), скласти її математичну модель.  $C$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час коливань маси  $m$ .

№ 11

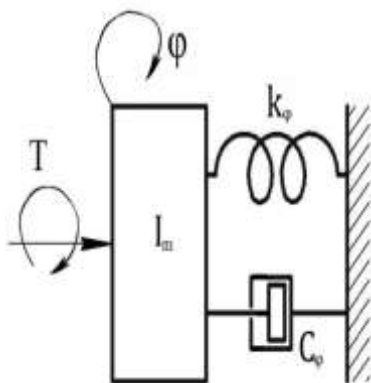


Рисунок 10.11

За динамічною моделлю механічної системи (рис. 10.11), що здійснює обертальний рух, скласти математичну модель цієї системи.

На рис. 10.11 позначено:  $T$  – рушійний обертальний момент;  $I_m$  – момент інерції маси рухомої ланки системи;  $k_\varphi$  – коефіцієнт крутильної жорсткості пружної ланки системи;  $C_\varphi$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час крутильних переміщень рухомої ланки;  $\varphi$  – кут закручування рухомої ланки.

№ 12

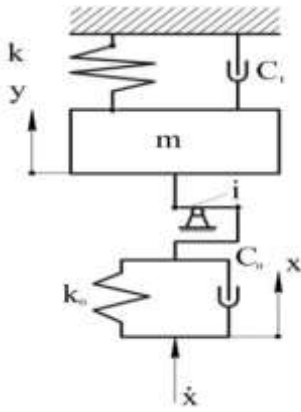


Рисунок 10.12

За динамічною моделлю гідроімпульсного привода (рис. 10.12), в якому гідравлічну ланку подано у вигляді паралельно з'єднаних пружного ( $k_0$ ) та дисипативного ( $C_0$ ) безінерційних елементів (тіло Кельвіна – Фойгта), скласти математичну модель прямого ходу маси  $m$ . Напрями переміщення маси  $m$  ( $y$ ) та деформації гідравлічної ланки ( $x$ ) направлені вгору. Крім вказаних величин, на рис. 10.12 зображено:  $m$  – маса (рухома) привода;  $k_1$  – жорсткість пружного елемента привода;  $C_1$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час переміщення маси  $m$ ;  $i_{0m}$  – передаточне відношення від гідравлічної ланки до маси  $m$ , яке може змінювати своє значення внаслідок спрацювання ГТ під час прямого ( $i_{0m} = i_{0mn}$ ) та зворотного ( $i_{0m} = i_{0mz}$ ) ходів маси  $m$ .

№ 13

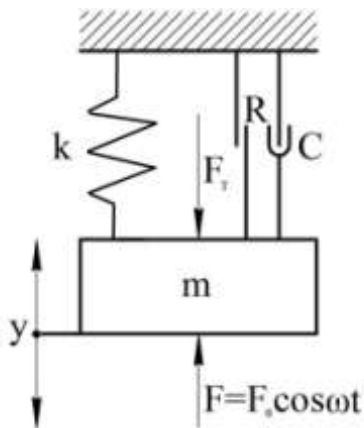


Рисунок 10.13

За динамічною моделлю коливальної механічної системи (рис. 10.13), скласти її математичну модель. На схемі динамічної моделі показано:  $m$  – маса системи;  $k$  – жорсткість пружного елемента системи;  $F_T$  – технологічне зусилля;  $R$  – сила сухого тертя під час коливань маси  $m$ ;  $C$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи;  $F = F_0 \cos \omega t$  – рушійна збуджувальна сила, що приводить масу  $m$  в коливальний рух з круговою частотою  $\omega$ ;  $t$  – поточний час динамічних процесів в системі;  $y$  – поточна координата положення маси  $m$ .

№ 14

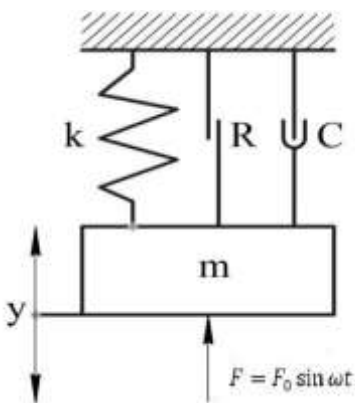
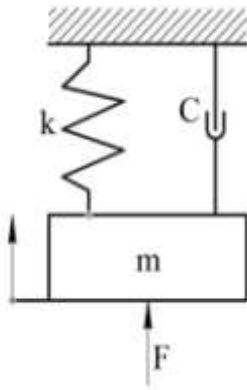


Рисунок 10.14

За динамічною моделлю механічної системи (рис. 10.14), скласти її математичну модель. На рис. 10.14 наведено:  $m$  – масу системи;  $k$  – жорсткість пружного елемента, що протидіє руху системи;  $R$  – сила сухого тертя під час руху системи;  $C$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи;  $F = F_0 \sin \omega t$  – рушійна сила, що приводить систему в коливальний рух з круговою частотою  $\omega$ ;  $F_0$  – амплітуда сили  $F$ ;  $t$  – поточний час динамічних процесів в системі;  $y$  – поточна координата положення маси  $m$ .



### № 15

За динамічною моделлю механічної системи (рис. 10.15), скласти математичну модель цієї системи. На схемі зображено:  $m$  – маса механічної системи;  $F$  – рушійна сила;  $k$  – жорсткість пружного елемента системи;  $C$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи;  $y$  – поточна координата (напрямок переміщення) положення маси  $m$ .

Рисунок 10.15

### № 16

Товщина стінки гідроциліндра  $\delta = r_{зов} - r_{внут}$ , призначеного для роботи за тиску робочої рідини (енергоносія)  $p \geq 50$  МПа, розраховується за формулою  $\delta = r_{внут} \cdot 2 \cdot p / (2,3 \cdot [\sigma] - p)$ , де  $[\sigma]$  – допустиме напруження розтягу матеріалу гідроциліндра. Взевши за цільову функцію  $\psi_0(p, [\sigma]) = 2,3 \cdot [\sigma] - p$ , що має обмеження  $\psi_1(p) = p \geq 0$  та  $\psi_2([\sigma]) = -[\sigma] \leq 0$ , знайти внутрішнім методом послідовної мінімізації оптимальне значення тиску  $p_{opt}$  енергоносія в гідроциліндрі, за якого товщина його стінки буде мінімальною.

### № 17

Зовнішній радіус гідроциліндра розраховується за формулою  $r_{зов} = \sqrt{F[\sigma] / [\pi p([\sigma] - p\sqrt{3})]}$ , де  $F$  – зусилля, що розвивається поршнем гідроциліндра;  $p$  – тиск робочої рідини (енергоносія) в гідроциліндрі. Взевши за цільову функцію  $\psi_0(p) = \pi p([\sigma] - p\sqrt{3})$ , знайти внутрішнім методом послідовної мінімізації оптимальне значення тиску  $p_{opt}$  енергоносія в гідроциліндрі, за якого його зовнішній радіус  $r_{зов}$  буде мінімальним.

### № 18

Методом безумовної оптимізації знайти максимум цільової функції  $\psi_0(b) = \tan \alpha / \tan(\alpha + \rho)$ , де  $\alpha = var$  – змінна проектування;  $\rho = const$ .

### № 19

Необхідно внутрішнім методом послідовної мінімізації оптимізувати цільову функцію  $\psi_0(b_1, b_2) = 2b_1^2 + 3b_2^2$  (тут  $b_1$  і  $b_2$  – параметри оптимізації), за таких її обмежень:  $\psi_1(b_1, b_2) = -b_1 \leq 0$ ;  $\psi_2(b_1, b_2) = -b_2 \leq 0$ .

№ 20

Знайти зовнішнім методом послідовної мінімізації оптимум цільової функції  $\psi_0(b_1, b_2) = b_1^2 + 4b_2^2$  (тут  $b_1$  і  $b_2$  – параметри оптимізації) за такого її обмеження:  $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 2 = 0$ .

№ 21

За допомогою комбінованого (внутрішньо-зовнішнього) методу послідовної мінімізації визначити мінімум цільової функції  $\psi_0(b_1, b_2) = -4b_1^2 + 8b_2^2$  (тут  $b_1$  і  $b_2$  – параметри оптимізації) за таких її обмежень:  $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 2 = 0$ ;  $\psi_2(b_1, b_2) = -\ln b_2 \leq 0$ .

№ 22

Знайти методом умовної оптимізації мінімум цільової функції  $\psi_0(b) = (b_1 - 2)^2 + (b_2 - 2)^2$  за таких її обмежень:  $\psi_1 = -b_1 \leq 0$ ;  $\psi_2 = -b_2 \leq 0$ ;  $\psi_3 = b_1 + b_2 - 4 \leq 0$ . Розв'язати цю задачу методом множників Лагранжа (умовна оптимізація за умовою Куна – Такера) та порівняти результати.

№ 23

Методом умовної оптимізації мінімізувати цільову функцію  $\psi_0(b) = (b_1 - 4)^2 + (b_2 - 4)^2$  за таких її обмежень:  $\psi_1 = -b_1 \leq 0$ ;  $\psi_2 = -b_2 \leq 0$ ;  $\psi_3 = b_1 + b_2 - 8 \leq 0$ .

№ 24

Методом множників Лагранжа (умовна оптимізація за умовою Куна – Такера) знайти співвідношення між змінними проектування  $b_1$  та  $b_2$ , за яких цільова функція  $\psi_0(b) = a(b_1^2 + 2b_2^2)$  буде мінімальною. Обмеження цільової функції:  $\psi_1 = b_1 \geq 0$ ;  $\psi_2 = b_2 \geq 0$ ;  $\psi_3 = b_1^{-4} + ab_2^{-4} - c = 0$ , де  $a = \text{const}$ ;  $c = \text{const}$ .

№ 25

Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку  $dy \cdot a - (y - b) dx = 0$ , де  $a = \text{const}$ ;  $b = \text{const}$ , а змінні  $y$  та  $x$  змінюються відповідно в інтервалах  $[y_0, y_1]$  і  $[0, x_1]$ .

№ 26

Розв'язати однорідне диференціальне рівняння другого порядку  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$ , де  $y = f(t)$ ; за  $t = 0$   $y(0) = 0$ , а за  $t = 2$   $y(2) = 5$ .

№ 27

Розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку  $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \sin \omega t$ , що описує вимушені коливання механічної системи без

тертя. У наведеному рівнянні:  $y = f(t)$ , де  $t$  – час протікання коливань, с;  $\omega_0 = 200 \text{ c}^{-1}$  – частота вільних коливань механічної системи;  $A_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  – максимальна амплітуда коливань в дорезонансній зоні механічної системи.

## № 28

Методом скінченних різниць розв'язати диференціальне рівняння теплопровідності  $\partial t / \partial \tau = a \partial^2 t / \partial x^2$ , що описує лінійний нестационарний процес зміни температури  $t$  в струні (діаметром струни знехтувати) в часі  $\tau$  та по її довжині  $x$ .  $a$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу струни. Взяти критерій Фур'є  $F_{ox} = a \Delta \tau / h^2 = 0,5$  (тут  $\Delta \tau$ ,  $h$  – відповідно інтервали розбивання часу  $\tau$  процесу та довжини  $x$  струни). Розв'язок знайти в загальному вигляді для температури вузлової точки  $t_{i, k+1}$ , якщо відомі температури сусідніх вузлових точок струни  $t_{i+1, k}$  та  $t_{i-1, k}$  в попередній момент часу  $k$ .

### 10.3 Приклади розв'язування задач

#### Задача № 1

Дано кінематичну схему (структурну схему) механічного привода з одноступінчастим зубчастим циліндричним редуктором (рис. 10.16), де  $I_0, I_1, I_2, I_3$  – відповідно, моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та колеса редуктора і навантажувального диска привода;  $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2$  – відповідно кути повороту ротора двигуна та закручування муфти, швидкохідного і тихохідного валів редуктора. Шестерня і колесо редуктора та підшипники валів – абсолютно жорсткі тіла. Побудувати динамічну модель цього привода, вважаючи муфту безмасовим елементом, а вали безінерційними пружними елементами.  $k_\varphi, k_1, k_2$  – жорсткості (крутильні) муфти та валів редуктора.

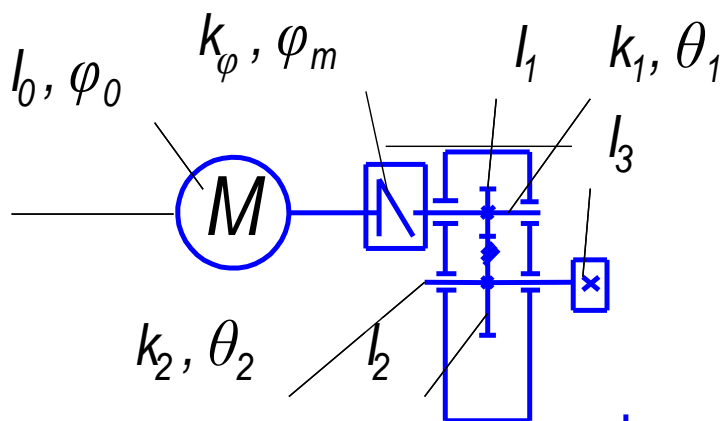


Рисунок 10.16 – Структурна схема привода

## Розв'язування

Задачу № 1 розв'язуємо за теоретичними відомостями про динамічні моделі механічних систем.

Динамічну модель (рис. 10.17) за заданою кінематичною схемою механічного привода будемо, умовно зображаючи моменти інерції мас ротора електродвигуна  $I_0$ , шестерні  $I_1$  та колеса  $I_2$  редуктора і навантажувального диска  $I_3$  привода прямокутниками, які зв'язані між собою безінерційними пружними елементами з коефіцієнтами крутильної жорсткості відповідно  $k_{\varphi_1}$  та  $k_{\varphi_2}$ , що зображають швидкохідний і тихохідний вали редуктора привода. Підшипники валів редуктора на динамічних моделях такого типу механічних систем, без вказівки їх типу, показують двома короткими паралельними лініями з прямолінійними кінцями пружних елементів, що зображають вали редуктора. Підшипники валів редуктора – безінерційні дисипативні елементи, які характеризуються коефіцієнтами опору  $c_{\varphi_1}$  та  $c_{\varphi_2}$ .

Побудована динамічна модель має три ступеня вільності – кут  $q \equiv \varphi_0$  повороту ротора двигуна та кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  закручування валів. Якщо зубчасті колеса (вищі кінематичні пари) складаються з елементів, що не деформуються, то  $\varphi_1 = f_1(q)$  і  $\varphi_2 = f_2(q)$ , а це означає, що динамічна модель механічного привода за заданою його кінематичною схемою та умовами задачі є одновимірною.

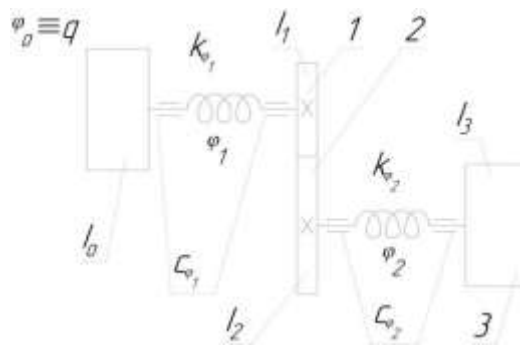


Рисунок 10.17 – Динамічна одновимірна модель механічного привода

### Задача № 2

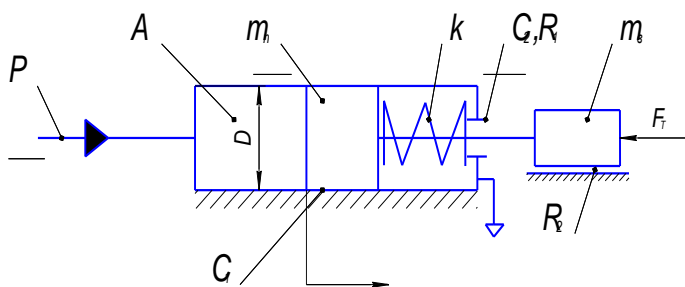


Рисунок 10.18

Дано структурну (принципову) схему гідравлічного привода (рис. 10.18), де  $m_n$ ,  $m_e$  – маса поршня гідроциліндра та виконавчої ланки привода;  $p$  – робочий тиск в на-пірній порожнині  $A$  привода;  $D$  – діаметр поршня гідроциліндра;  $k$  – жорсткість пружини, що навантажує поршень гідроциліндра;  $F_t$  – технологічне зусил-

ля на штокові поршня;  $R_1, R_2$  – відповідно постійні сили сухого тертя на штокові поршня та напрямних виконавчої ланки;  $c_1, c_2$  – відповідно коефіцієнт демпфірування (в'язкого тертя) в зазорах поршня і штока гідроциліндра;  $x$  – напрям руху поршня гідроциліндра. Побудувати динамічну модель привода.

### Розв'язування

Зважаючи на те, що, згідно з умовою задачі, виконавча ланка та поршень гідроциліндра привода жорстко зв'язані через шток поршня, динамічну модель заданого привода можна зобразити вигляді одномасової одновимірної моделі (рис. 10.19), де зведена до поршня маса привода  $m = m_n + m_6$  приводиться в рух в напрямку координати  $x$  рушійною силою  $F = p \cdot \pi \cdot D^2 / 4$ , якій протидіють сили опору: технологічного  $F_T$ ; пружного  $F_{np} = k x$ ; сухого  $R = R_1 + R_2$  та в'язкого  $F_f = c \cdot \dot{x} = (c_1 + c_2) \cdot \dot{x}$  (тут  $\dot{x}$  – поточна швидкість руху поршня гідроциліндра привода) тертя.

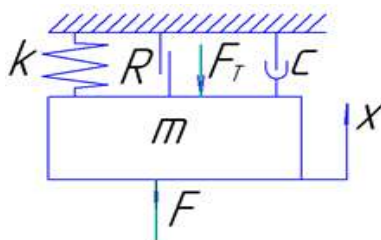


Рисунок 10.19 – Одновимірна динамічна модель гідравлічного привода

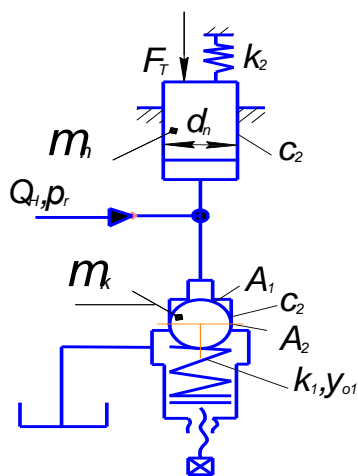


Рисунок 10.20 – Принципова схема гідроімпульсного привода

### Задача № 3

Дано гідроімпульсний привод (рис. 10.20) з однокаскадним генератором імпульсів тиску (ГІТ) параметричного типу, де  $m_k, m_n$  – відповідно, зведені маси запірного елемента (кульки) ГІТ і плунжера гідроциліндра привода;  $F_T$  – технологічне зусилля на плунжері;  $k_1, k_2$  – відповідно жорсткості пружин регулятора тиску відкриття ГІТ і пружного повернення плунжера;  $c_1, c_2$  – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних плунжера та ГІТ;  $d_n, A_1, A_2$  – відповідно діаметр плунжера та площі поперечного перерізу кульки ГІТ;  $y_{ol}$  – передня деформація пружини регулятора тиску відкриття ГІТ;  $Q_n, p_r$  – подача гідронасоса і поточний тиск енергоносія в напірній гідролінії привода. Побудувати динамічну модель прямого ходу рухомих мас привода.

Розв'язування

Під час побудови динамічних моделей гідроімпульсного привода, такого типу як заданого в умові задачі, його гідравлічну ланку доцільно подати як без-

інерційне тіло Кельвіна – Фойхта, що складається з пружного  $k_0$  та дисипативного  $c_0$  безмасових елементів, яке взаємодіє (рис. 10.21) з жорсткими зведеними масами запірного елемента (кульки) ГІТ,

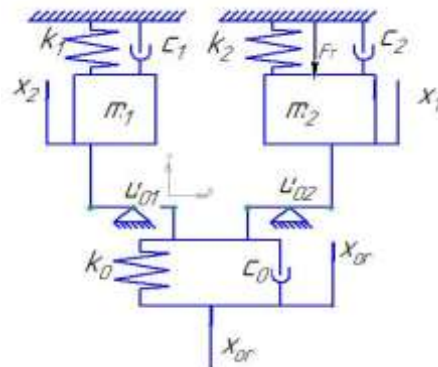


Рисунок 10.21 – Динамічна модель гідроімпульсного прямого ходу рухомих мас привода з однокаскадним ГІТ

$m_k = m_1$  та плунжера гідроциліндра привода  $m_n = m_2$  через передаточні відношення  $u_{01}$  і  $u_{02}$ , які визначаються квадратом відношення певного перерізу площ запірного елемента ГІТ ( $u_{01} = A_1^2/A_0^2$ ) чи плунжера ( $u_{02} = A_n^2/A_0^2$ ) (тут  $A_n = \pi \cdot d_n^2/4$ ) гідроциліндра до квадрата площі  $A_0$  перерізу усередненої напірної гідролінії [3, 6] гідроімпульсного привода. Гідравлічна ланка протягом прямого ходу рухомих мас привода деформується в напрямку  $x_{or}$  від максимального  $x_{or\max}$  до мінімального  $x_{or\min}$  значень (визначаються параметрами налаштування ГІТ) зі швидкістю  $\dot{x}_{or}$ , внаслідок чого виникає пружна рушійна сила  $F_p = k_0 \cdot (x_{or\max} - x_{or})$ , яка приводить в рух в напрямку координат  $y_1$  і  $y_2$  маси  $m_1$  та  $m_2$ . Рушійній силі протидіють сили опору: технологічного  $F_T$ ; пружного  $F_{np1} = k_1 \cdot (y_{01} + y_1)$  та  $F_{np2} = k_2 \cdot (y_{02} + y_2)$ ; в'язкого  $F_{f1} = c_1 \cdot \dot{y}_1$ ,  $F_{f2} = c_2 \cdot \dot{y}_2$  та  $F_{f0} = c_0 \cdot \dot{x}_{or}$  (тут  $\dot{y}_1$  та  $\dot{y}_2$  – поточні швидкості руху запірного елемента ГІТ та плунжера гідроциліндра привода) тертя. Деформація гідравлічної ланки  $x_{or}$  та тиск  $p_r$  енергоносія в напірній гідролінії привода пов'язані між собою простою залежністю  $x_{or} = p_r \cdot A_0 \cdot k_0^{-1}$  [3, 6]. Швидкість зміни та рівень  $x_{or}$  визначається величиною подачі  $Q_n$  гідронасоса привода, конструкцією та налаштуванням ГІТ.

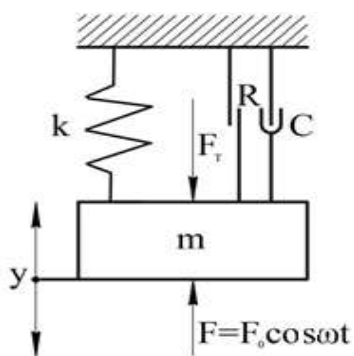


Рисунок 10.22 – Динамічна модель коливальної механічної системи

#### Задача № 4

За динамічною моделлю коливальної механічної системи (рис. 10.22), скласти її математичну модель. На схемі динамічної моделі показано:  $m$  – маса системи;  $k$  – жорсткість пружного елемента системи;  $F_T$  – технологічне зусилля;  $R$  – сила сухого тертя під час коливань маси  $m$ ;  $C$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи;  $F = F_0 \cos \omega t$  – рушійна збуджувальна сила, що приводить масу  $m$  в коливальний рух з круговою частотою  $\omega$ ;  $t$  – поточний час динамічних процесів в системі;  $y$  – поточна координата положення маси  $m$ .

### Розв'язування

Найпростіше для заданої динамічної моделі можна скласти її математичну модель, скориставшись принципом Д'Аламбера. Під час прискореного (уповільненого) руху маси  $m$  виникає сила інерції  $F_{in} = m \cdot \ddot{y}$ . Ця сила  $F_{in}$  діятиме проти напрямку руху маси  $m$ .

Сили позиційні – пружного опору та ваги – знаходяться за відомими залежностями:  $F_{np} = k \cdot y$  і  $F_g = m \cdot g$ .

Сили тертя: сухого  $R = R \cdot \text{sgn} \dot{y}$ ; в'язкого  $F_f = C \dot{y}$ .

За принципом рівноваги сил в статиці проєктуємо всі названі сили на напрям  $y$ :

$$-m\ddot{y} - ky - R \text{sgn} \dot{y} - C\dot{y} - F_T - mg + F_0 \cos \omega t = 0$$

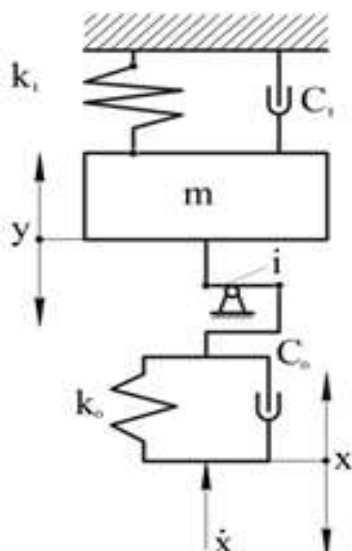
або

$$m\ddot{y} = F_0 \cos \omega t - ky - C\dot{y} - F_T - R \text{sgn} \dot{y} - mg.$$

Отримане диференціальне рівняння руху маси  $m$  є основною частиною математичної моделі заданої коливальної механічної системи. Для завершення цієї моделі, до знайденого рівняння руху маси  $m$  необхідно додати умови однозначності у вигляді початкових умов в момент часу  $t = 0$ , значень постійних коефіцієнтів або меж їх зміни, максимальної амплітуди та кругової частоти  $\omega$  вимушених коливань маси  $m$  тощо.

### Задача № 5

За динамічною моделлю гідроімпульсного привода (рис. 10.23), в якому гідравлічну ланку подано у вигляді паралельно з'єднаних пружного  $k_0$  та дисипативного  $C_0$  безінерційних елементів (тіло Кельвіна – Фойгта), скласти математичну прямого та зворотного ходів маси  $m$ .



Напрями переміщення маси  $m$  ( $y$ ) та деформації гідравлічної ланки ( $x$ ) направлені вгору – вниз. Крім вказаних величин, на рисунку 10.22 зображено:  $m$  – маса (рухома) привода;  $k_1$  – жорсткість пружного елемента привода;  $C_1$  – коефіцієнт в'язкого тертя під час переміщення маси  $m$ ;  $i_{0m}$  – передатне відношення від гідравлічної ланки до маси  $m$ , яке може змінювати своє значення внаслідок спрацювання ГТТ під час прямого ( $i_{0m} = i_{0mн}$ ) та зворотного ( $i_{0m} = i_{0mз}$ ) ходів маси  $m$ .

Рисунок 10.23 – Динамічна модель гідроімпульсного привода

## Розв'язування

Згідно з рекомендаціями робіт [13, 14], задану в умові задачі динамічну модель гідроімпульсного привода потрібно спростити, звівши пружний  $k_0$  і дисипативний  $C_0$  елементи гідравлічної ланки до маси  $m$  (рис. 10.24).

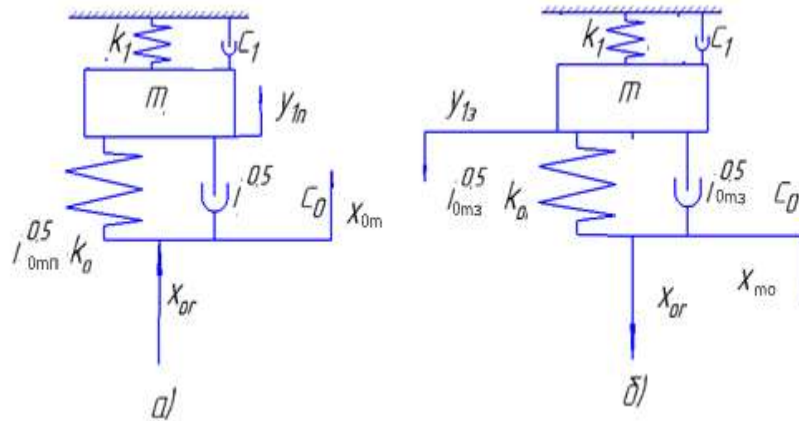


Рисунок 10.24 – Спрощені динамічні моделі заданого гідроімпульсного привода для прямого (а) та зворотного (б) ходів маси  $m$

Використовуючи принцип Д'Аламбера, на основі цих спрощених динамічних моделей складаємо рівняння руху маси  $m$  для її ходів:

прямого –

$$m \cdot \ddot{y}_n = i_{0mn} \cdot k_0 \cdot (x_{0m} - y_n) - k_1 \cdot y_n - i_{0m\pi}^{0,5} \cdot C_0 (\dot{x}_{0m} - \dot{y}_n) - C_1 \cdot \dot{y}_n;$$

зворотного –

$$m \cdot \ddot{y}_3 = k_1 \cdot (y_{max} - y_3) - i_{0m3} \cdot k_0 \cdot (x_{m0} - y_3) - i_{0m3}^{0,5} \cdot C_0 (\dot{x}_{m0} - \dot{y}_3) - C_1 \cdot \dot{y}_3,$$

де  $x_{0m} = x_{0rn} \cdot i_{0m\pi}^{0,5}$  для  $0 \leq y_n \leq y_{max}$  та  $x_{m0} = x_{0r3} \cdot i_{0m3}^{0,5}$  для  $0 \leq y_3 \leq y_{zmax}$  та – деформації гідравлічної ланки, зведені відповідно до маси  $m$  під час прямого та зворотного її ходів;  $\dot{y}_n, \dot{y}_3, \ddot{y}_n, \ddot{y}_3$  – відповідно поточні швидкості та прискорення маси  $m$  для прямого та зворотного ходів;  $\dot{x}_{0m} = \dot{x}_{0rn} \cdot i_{0m\pi}^{0,5}$ ,  $\dot{x}_{m0} = \dot{x}_{0r3} \cdot i_{0m3}^{0,5}$  – поточні швидкості деформації гідравлічної ланки, зведені, відповідно, до маси  $m$  під час прямого та зворотного її ходів;  $y_{max} = y_{zmax}$  – максимальний хід маси  $m$  в прямому та зворотному напрямках;  $x_{0rn}, x_{0r3}$  – деформації гідравлічної ланки впродовж прямого та зворотного ходів маси  $m$ .

Межі змінення деформації гідравлічної ланки впродовж циклу роботи заданого гідроімпульсного привода обумовлюються параметрами ГПТ, подачею гідронасоса привода, жорсткістю гідравлічної ланки та інших пружних ланок привода. Для того щоб математична модель розглядуваного привода була завершеною, до знайдених диференціальних рівнянь руху маси  $m$  необхідно додати рівняння витрати енергоносія [13, 14] та умови однозначності, якими встановлюються межі змінення  $x_{0rn}, x_{0r3}, y_{max}$  та ін.

### Задача № 6

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку  $dy \cdot a - (y - b) dx = 0$ , де  $a = 5$ ;  $b = 10$ , а змінні  $y$  та  $x$  змінюються, відповідно, в інтервалах  $[20, 100]$  і  $[0, x_1]$ , та визначити  $x_1$ .

#### Розв'язування

Розділяємо змінні в заданому диференціальному рівнянні та інтегруємо його в заданих інтервалах:

$$\int [dy/(y - b)] = a^{-1} \int dx; \ln[(y_1 - b)/(y_0 - b)] = a^{-1} x_1,$$

звідки  $x_1 = \ln[(y_1 - b)/(y_0 - b)] \cdot a = \ln[(100 - 10)/(20 - 20)] \cdot 5 = 14,48$ .

### Задача № 7

Розв'язати однорідне диференціальне рівняння другого порядку  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 6 = 0$ , де  $y = f(t)$ ; за  $t = 0$   $y(0) = 0$ , а за  $t = 2$   $y(2) = 5$ .

#### Розв'язування

1. Складаємо для заданого диференціального рівняння характеристичне рівняння та розв'язуємо його:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0; \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6}, \text{ звідки } \lambda_1 = -4,43; \lambda_2 = -1,27.$$

2. Оскільки  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то загальний розв'язок заданого диференціального рівняння буде мати вигляд [6]

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

3. Підставляючи в цей розв'язок початкові умови, знайдемо сталі інтегрування  $C_1 = 0,39$  та  $C_2 = -0,39$  і загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(t) = 0,39 e^{-1,27t} (1 - e^{-6t}).$$

### Задача № 8

Розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку  $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \cdot \cos \omega t$ , що описує вимушені коливання механічної системи без тертя. У наведеному рівнянні:  $y = f(t)$ , де  $t$  – час протікання коливань, с;  $\omega_0 = 300 \text{ c}^{-1}$  – частота вільних коливань механічної системи;  $A_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  – максимальна (рівноважна) амплітуда коливань в дорезонансній зоні механічної системи.

### Розв'язування

1. Для такого типу диференціального рівняння другого порядку, що описує стаціонарні вимушені коливання, розв'язок має вигляд [11, 23]

$$y = H \cdot \cos \omega t, \quad (\text{a})$$

де  $H = A_0 \cdot [1/(1 - \omega^2/\omega_0^2)] = 2 \cdot 10^{-3} \cdot [1/(1 - 1,11 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2)]$  – формула для розрахунку амплітуди вимушених коливань, отримана підстановкою розв'язку (а) у задане диференціальне рівняння.

### Задача № 9

Методом скінченних різниць розв'язати диференціальне рівняння теплопровідності  $\partial t/\partial \tau = a \partial^2 t/\partial x^2$ , що описує лінійний нестационарний процес зміни температури  $t$  в струні (діаметром струни знехтувати) в часі  $\tau$  та по її довжині  $x$ .  $a$  – коефіцієнт температуропровідності матеріалу струни. Взяти критерій Фур'є  $F_{ox} = a \Delta \tau/h^2 = 0,5$  (тут  $\Delta \tau$ ,  $h$  – відповідно інтервали розбивання часу  $\tau$  процесу та довжини  $x$  струни). Розв'язок знайти в загальному вигляді для температури вузлової точки  $t_{i, k+1}$ , якщо відомі температури сусідніх вузлових точок струни  $t_{i+1, k}$  та  $t_{i-1, k}$  в попередній момент часу  $k$ .

### Розв'язування

Розділимо струну на маленькі відрізки довжиною  $h$  та пронумеруємо їх індексами  $i-2, k, i-1, k, i, k, i+1, k \dots, i+n, k$  (тут  $i$  – центральна вузлова точка). Згідно з правилами методу скінченних різниць [5], першу похідну  $\partial t/\partial x$  поблизу точки  $i$  в момент часу  $k$  можна замінити одним з двох наближених виразів:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cong \begin{cases} \left(\frac{\Delta t}{h}\right)_+ = \frac{t_{i+1, k} - t_{i, k}}{h}; \\ \left(\frac{\Delta t}{h}\right)_- = \frac{t_{i, k} - t_{i-1, k}}{h}, \end{cases} \quad (\text{a})$$

де  $(\Delta t/h)_+$  та  $(\Delta t/h)_-$  прийнято називати різницевиими відношеннями «вперед» (+) та «назад» (-).

Другу похідну  $\partial^2 t/\partial x^2$  можна подати через різницю відношень «вперед» та «назад», віднесену до  $h$ :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cong \frac{1}{h} \left[ \left(\frac{\Delta t}{h}\right)_+ - \left(\frac{\Delta t}{h}\right)_- \right] = \frac{t_{i+1, k} + t_{i-1, k} - 2t_{i, k}}{h^2}. \quad (\text{б})$$

Оскільки часова вісь (стріла часу) має один напрямок від теперішнього до майбутнього, то похідну  $\partial t/\partial \tau$  можна описати тільки одним різницевим спів-

відношенням:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta \tau}. \quad (\text{в})$$

Підставляючи (б) та (в) у задане диференціальне рівняння теплопровідності, після нескладних перетворень отримаємо вираз для розрахунку температури точки  $i$  в момент часу  $k+1$ :

$$t_{i,k+1} = \frac{a\Delta\tau}{h^2}(t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + \left(1 - \frac{2a\Delta\tau}{h^2}\right)t_{i,k} = F_{ox}(t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + (1 - 2F_{ox})t_{i,k}, \quad (\text{г})$$

де  $F_{ox} = a \Delta\tau/h^2$  критерій Фур'є. Рівняння (г) є диференціальним рівнянням теплопровідності в скінченно-різницевої формі. За  $F_{ox}=0,5$

$$t_{i,k+1} = 0,5(t_{i+1,k} + t_{i-1,k}). \quad (\text{д})$$

#### Задача № 10

Необхідно оптимізувати методом внутрішньої послідовної мінімізації цільову функцію  $\psi_0(b_1, b_2) = b_1 + b_2$  за такими її обмеженнями:

$$\psi_1(b_1, b_2) = -b_1 \leq 0; \quad \psi_2(b_1, b_2) = -b_2 \leq 0.$$

#### Розв'язування

За формулою, наведеною в роботі [19], визначимо розширену цільову функцію

$$U(b, r) = b_1 + b_2 + r(b_1^{-1} + b_2^{-1}). \quad (\text{а})$$

Для віднаходження мінімуму  $U(b, r)$  припустимо, що:

$$\partial U / \partial b_1 = 0 = 1 - r b_1^{-2}; \quad \partial U / \partial b_2 = 0 = 1 - r b_2^{-2}. \quad (\text{б})$$

З виразів (б), знайдемо:

$$b_1 = r^{0,5}; \quad b_2 = r^{0,5}. \quad (\text{в})$$

Якщо  $r \rightarrow 0$ , то  $b_1 \rightarrow 0$  та  $b_2 \rightarrow 0$  і розв'язком задачі буде значення цільової функції  $U(b, r)$  в т. з координатами  $(b_1, b_2) = 0$ .

## Задача № 11

Знайти за зовнішнім методом безумовної оптимізації мінімум цільової функції  $\psi_0(b_1, b_2) = b_1^2 + 2 \cdot b_2^2$  за такого її обмеження  $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1 = 0$ .

### Розв'язування

За формулою, наведеною в роботі [19], визначимо розширену цільову функцію для  $j = 1$ :

$$T(b, t) = b_1^2 + 2 b_2^2 + t \cdot (b_1 + b_2 - 1)^2. \quad (\text{а})$$

Припустимо, що:

$$\partial T / b_1 = 2 b_1 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0; \quad (\text{б})$$

$$\partial T / b_2 = 4 b_2 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0. \quad (\text{в})$$

Щоб виключити параметр  $t$ , віднімемо від (в) (б) і знайдемо

$$4 \cdot b_2 - 2 \cdot b_1 = 0, \quad (\text{г})$$

звідки 
$$b_1 = 2 \cdot b_2. \quad (\text{д})$$

Підставимо (д) в (в) та отримаємо:

$$4 b_2 + 2 \cdot t \cdot (3 b_2 - 1) = 0, \quad (\text{е})$$

звідки 
$$b_2 = t / (2 + 3 \cdot t) = 1 / (2 / t + 3). \quad (\text{ж})$$

Визначимо границі зміни параметрів « $b_2$ » і « $b_1$ » цільової функції  $\psi_0(b)$ :  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} b_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 / (2 / t + 3)] = 1 / 3$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} b_1 = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} b_2 = 2 / 3$ .

Цільова функція  $\psi_0(b)$  матиме мінімум (оптимум) в точці з координатами  $(b_1, b_2) = (2 / 3, 1 / 3)$ .

## Задача № 12

Знайти комбінованим внутрішньо-зовнішнім методом послідовної безумовної оптимізації мінімум цільової функції  $\psi_0(b_1, b_2) = -b_1 + b_2$  за такими її обмеженнями:  $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1$ ;  $\psi_2(b_1, b_2) = \ln b_2 \leq 0$ .

### Розв'язування

За формулою, наведеною в роботі [19], визначимо розширену цільову функцію для  $j = 1$  та  $i = 2$ :

$$V(b, r, t) = -b_1 + b_2 + r / \ln b_2 + t \cdot (b_1 + b_2 - 1)^2. \quad (\text{а})$$

Припустимо, що:

$$\partial V / b_1 = -1 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0; \quad (\text{б})$$

$$\partial V / b_2 = 1 - [r / (b_2 \ln^2 \cdot b_2)] + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0. \quad (\text{в})$$

Віднімемо від (в) (б) і отримаємо:

$$2 - [r / (b_2 \ln^2 \cdot b_2)] = 0. \quad (\text{г})$$

Розв'язавши рівняння (г) відносно  $b_2$ , знайдемо

$$b_2 = \exp [(r / (2 \cdot b_2))^{0,5}]. \quad (\text{д})$$

Визначимо границю функції (д):

$$\lim_{r \rightarrow 0} b_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \{ \exp [(r / (2 \cdot b_2))^{0,5}] \} = e^0 = 1, \quad (\text{е})$$

звідки  $\lim_{r \rightarrow 0} b_2 \rightarrow 1$ .

У випадку  $t \rightarrow \infty$  необхідно, щоб обмеження  $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1$  прямувало до нуля, інакше похідні (б) та (в) не можуть дорівнювати нулю. Звідси випливає, що границя  $\lim_{t \rightarrow \infty} b_1 = 0$ . Зважаючи на границі параметрів  $b_1$  і  $b_2$  цільової функції, точкою мінімуму  $\psi_0(b)$  буде інтервал  $[b_1, b_2] = [0, 1]$ .

### Задача № 13

Методом умовної оптимізації мінімізувати цільову функцію  $\psi_0(b) = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2$  за таких її обмежень:  $\psi_1 \equiv -b_1 \leq 0$ ;  $\psi_2 \equiv -b_2 \leq 0$ ;  $\psi_3 \equiv b_1 + b_2 - 4 \leq 0$ .

### Розв'язування

За методом послідовної безумовної оптимізації, знайдемо:

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_1 = 2 \cdot (b_1 - 1) = 0; \quad (\text{а})$$

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_2 = 2 \cdot (b_2 - 1) = 0, \quad (\text{б})$$

звідки

$$b_1 = b_2 = 1, \quad (\text{в})$$

що означає точку мінімуму цільової функції з координатами  $\bar{b}(1, 1)$ , яка лежить всередині області «В».

За методом умовної оптимізації:

$$-b_1 = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2 \leq 0; \quad (\text{г})$$

$$-b_2 = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2 \leq 0, \quad (\text{д})$$

звідки:  $-b_1 + b_2 = 0$ ;  $b_1 = b_2$ ;  $2 \cdot b_1 - 4 \leq 0$ ;  $b_1 \leq 2$ ;  $b_2 \leq 2$ .

Але точка  $\bar{b} (2, 2)$  не є мінімумом, оскільки  $1 < 2$ , а точка  $\bar{b} (1, 1)$  задовольняє обмеженням:  $-b_1 = -1 < 0$ ;  $-b_2 = -1 < 0$ ;  $1 + 1 - 4 = -2 < 0$ .

#### Задача № 14

Необхідно оптимізувати методом множників Лагранжа геометричні параметри прорізної пружини (ПП), зображеної на ескізі робочого кресленника на рис. 10.25, за критерієм її мінімальної маси та вказаних постійних і змінних параметрів ПП: основні геометричні розміри пружини –  $D$  – зовнішній діаметр,  $a = b$  – відповідно ширина та товщина кільця,  $R = 0,5(D - a)$  – середній радіус,  $n$  та  $z$  – відповідно число робочих кілець і прорізів (розміри ПП, вказані на рис. 10.24, орієнтовні, з метою їх порівняння з розмірами, що будуть отримані після оптимізації). Не вказані на кресленнику відхилення розмірів: отворів за  $H12$ ; валів за  $h12$ ; інших за  $IT 12 / 2$ .

Матеріал пружини – сталь 60С2А ГОСТ 8559-75. Термічне оброблення – гартування за температури фазового перетворення  $870 \text{ }^\circ\text{C}$ , охолодження в мастилі та відпуск за температури  $420 \text{ }^\circ\text{C}$ . Після термічного оброблення потрібно, щоб у ПП були такі очікувані середні механічні властивості (таблиця 10.1).

Таблиця 10.1 – Очікувані механічні властивості матеріалу ПП після термічного оброблення

Межа міцності під час розтягу, $\sigma_b$ МПа	Межа текучості $\sigma_{0,2}$ МПа	Твердість, HRCe	Ударна в'язкість (КСУ), Дж/см <sup>2</sup>
1570	1375	47 – 50	62

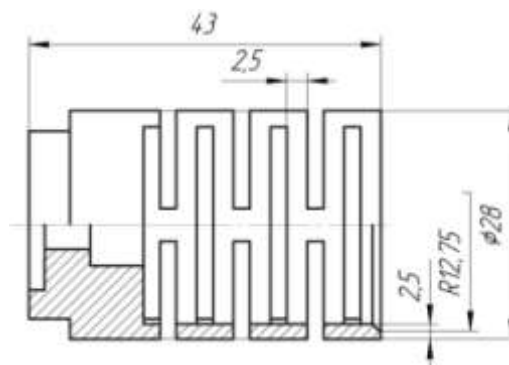


Рисунок 10.25 – Робочий кресленник прорізної пружини

Окрім наведених в умові задачі параметрів ПП, додатково задано ще такі параметри: 1) постійні –  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа – модуль пружності матеріалу ПП (сталь 60С2А ГОСТ 8559-75),  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – густина матеріалу ПП,  $[\sigma] = 500$  МПа – допустиме напруження (intension) згину для матеріалу ПП [14],  $z = 2$  – число прорізів ПП,  $h_{\text{ПП}}^{\text{max}} = 6,4 \cdot 10^{-4}$  м – максимальна деформація (осадження) ПП;  $F_{\text{max}} = 500$  Н – максимальне зусилля пружини;

2) змінні параметри (змінні проектування) –  $a = b$  – відповідно ширина та товщина робочого кільця пружини;  $R$  – середній радіус пружини;  $n$  – число робочих кілець пружини.

### Розв'язування

Число перемичок  $n_n$  ПП пов'язано з числом її робочих кілець  $n$  простою залежністю [14]

$$n_n = 2(n + 1). \quad (\text{а})$$

ПП має два ( $n_{\text{он}} = 2$ ) опорних кільця, товщину  $a_{\text{он}}$  кожного з яких, з метою забезпечення їх міцності та жорсткості, згідно з рекомендаціями робіт [14, 27], можна взяти:  $a_{\text{он}} = (2 \dots 3)a$ . Вважатимемо, що  $a_{\text{он}} = 3a$ . Перемички прорізної пружини за формою є частиною циліндричної труби з середнім радіусом  $R$  і шириною (товщиною) стінки  $a$ . З метою спрощення можна вважати, що висота перемички дорівнює ширині  $a$  (ширина прорізу) робочого кільця пружини, а форма у вигляді куба з ребром, що дорівнює  $a$ .

Під час математичного описання оптимізаційної задачі, для наведених постійних і змінних параметрів ПП, її жорсткість  $k_{\text{nn}}$  і еквівалентне напруження  $\sigma_{\text{екв}}$  в небезпечних перерізах робочих кілець визначати за спрощеними залежностями [14, 27]:

$$k_{\text{nn}} = (1,035 \cdot E \cdot a^4) / (R^3 \cdot n); \quad (\text{б})$$

$$\sigma_{\text{екв}} = (1,22 \cdot F_{\text{max}} \cdot R) a^{-3} \leq [\sigma]. \quad (\text{в})$$

Цільовою функцією  $\psi_0(b)$  цієї оптимізаційної задачі є маса ПП, яку можна подати у вигляді суми трьох мас:

$$\begin{aligned} \psi_0(b) = m_{\text{рк}} + m_{\text{он}} + m_n = 2 \cdot \rho \cdot a^2 \cdot [\pi \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n + 1)] = 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^2 \times \\ \times [3,14 \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n + 1)], \end{aligned} \quad (\text{г})$$

де  $m_{\text{рк}} = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot a^2 \cdot R \cdot n$ ,  $m_{\text{он}} = 6 \cdot \pi \cdot \rho \cdot a^2 \cdot R \cdot n_{\text{он}}$ ,  $m_n = \rho \cdot a^3 \cdot n_n$  – відповідно маси робочих та опорних кілець і перемичок ПП.

Змінними проектування  $b$  у цільовій функції  $\psi_0(b)$  є параметри ПП  $a$ ,  $R$  та  $n$ , що мають обмеження за знаком, які є очевидними,

$$\psi_1 \equiv a \geq 0; \psi_2 \equiv R \geq 0; \psi_3 \equiv n \geq 0; \quad (\text{д})$$

і функціональне

$$\begin{aligned}\psi_4 = \sigma_{екв} - [\sigma] &= (1,22 \cdot F_{max} \cdot R) \cdot a^{-3} - [\sigma] = 6,10 \cdot 10^2 \cdot R \cdot a^{-3} - 5 \cdot 10^8 = \\ &= 1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1 = 0.\end{aligned}\quad (е)$$

Виразивши з формул (б) і (в) середній радіус  $R$  пружини та прирівнявши отримані залежності, знайдемо ще одне функціональне обмеження цільової функції  $\psi_0(b)$ :

$$\begin{aligned}\psi_5 &= [(1,035 \cdot E / k_{nn}) - ([\sigma]^3 \cdot a^5 \cdot n) / (1,22^3 \cdot F_{max}^3)] = \\ &= 2,65 \cdot 10^5 - 5,51 \cdot 10^{17} \cdot a^5 \cdot n = 1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n = 0.\end{aligned}\quad (ж)$$

Використовуючи формулу (8.16), запишемо лагранжیان для розглядуваної оптимізаційної задачі:

$$\begin{aligned}L = \psi_0(b) + \sum_{i=1}^5 (v_i \cdot \psi_i) &= 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot [3,14 \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n+1)] + v_1 \cdot a + \\ &+ v_2 \cdot R + v_3 \cdot n + v_4 \cdot (1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1) + v_5 \cdot (1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n),\end{aligned}\quad (и)$$

де  $v_1, \dots, v_5$  – множники Лагранжа.

Для виконання умови оптимальності Куна – Такера (8.14),

$$v_1 \cdot \psi_1 = v_2 \cdot \psi_2 = v_3 \cdot \psi_3 = v_4 \cdot \psi_4 = v_5 \cdot \psi_5 = 0,$$

необхідно, щоб  $v_i = 0$  або  $\psi_i = 0$ . Очевидно, що вимога  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$  не має фізичного змісту, тоді  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ , а оскільки  $\psi_4 = \psi_5 = 0$ , то  $v_4 > 0$  та  $v_5 > 0$ . З урахуванням зроблених зауважень, залежність (и) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}L &= 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot [3,14 \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n+1)] + v_4 \cdot (1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1) + \\ &+ v_5 \cdot (1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n),\end{aligned}\quad (к)$$

З метою знаходження оптимальних значень змінних проектування  $a$ ,  $R$  та  $n$ , візьмемо, згідно з (8.15), частинні похідні з точністю до двох знаків після коми в числових коефіцієнтах:

$$\left\{ \begin{aligned}\partial L / \partial \psi_1 &\equiv \partial L / \partial a = 9,80 \cdot 10^4 \cdot a \cdot R \cdot (n + 6) + 4,68 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot (n + 1) - \\ &- 3,66 \cdot 10^6 \cdot v_4 \cdot a^{-4} \cdot R - 1,04 \cdot 10^{13} \cdot v_5 \cdot a^4 \cdot n = 0; \\ \partial L / \partial \psi_2 &\equiv \partial L / \partial R = 4,90 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot (n + 6) + 1,22 \cdot 10^6 \cdot v_4 \cdot a^{-3} = 0; \\ \partial L / \partial \psi_3 &\equiv \partial L / \partial n = 4,90 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot R + 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^3 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot v_5 \cdot a^5 = 0; \\ \partial L / \partial v_4 &\equiv \psi_4 = 1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1 = 0; \\ \partial L / \partial v_5 &\equiv \psi_5 = 1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n = 0.\end{aligned}\right.\quad (л)$$

Аналіз системи рівнянь (л) показує, що в другому її рівнянні множник  $v_4 < 0$ , що неможливо за означенням методу Лагранжа, тому необхідно взяти  $v_4 = 0$ , у зв'язку з чим це рівняння втрачає фізичний зміст, оскільки інші складові рівняння не можуть дорівнювати нулю.

Враховуючи сказане вище і виразивши з двох останніх рівнянь системи (й) параметри  $R$  та  $n$  через змінну проектування  $a$ ,

$$R = 8,20 \cdot 10^5 \cdot a^3; \quad (\text{м})$$

$$n = 4,81 \cdot 10^{13} \cdot a^{-5}, \quad (\text{н})$$

та підставивши їх в перше і третє рівняння цієї системи, зведемо систему (л) до більш простого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial L / \partial \psi_1 \equiv \partial L / \partial a = 1,59 \cdot 10^{13} \cdot a^5 + 1,21 \cdot 10^6 \cdot a^3 + 5,81 \cdot 10^7 \cdot a^{-2} - \\ - 1,29 \cdot 10^2 \cdot v_5 + 1 = 0; \\ \partial L / \partial \psi_3 \equiv \partial L / \partial n = 2,58 \cdot 10^6 \cdot a^2 \cdot (1 - 5,16 \cdot 10^1 \cdot v_5) + 1 = 0, \end{array} \right. \quad (\text{п})$$

де розмірність (dimension)  $a$  в метрах, а множник  $v_5$  – безрозмірна величина. З другого рівняння системи (п) можна встановити взаємну залежність між множителем  $v_5$  і параметром проектування  $a$ :

$$v_5 = 1,94 \cdot 10^{-2} + 7,51 \cdot 10^{-9} \cdot a^{-2}. \quad (\text{р})$$

Для розв'язування системи рівнянь (н) можна використовувати систему комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проектування типу Mathcad, Maple, Mathematica, MATLAB та ін.

За результатами розв'язку системи (н) за допомогою Mathcad отримано  $a = 2,5$  мм,  $R = 12,82$  мм та  $n = 4,96 \approx 5$ , що фактично збігається з орієнтовними значеннями.

## 10.4 Тести для самоконтролю ступеня засвоєння дисципліни

### 1. Що розуміють під поняттям матриця?

Відповіді

1. Матриця – це таблиця чисел. 2. Матриця – це система чисел (елементів), які розташовані в прямокутній таблиці, що складається з рядків і стовпців. 3. Матриця – це квадратна таблиця з рядків і стовпців. 4. Матриця – це таблиця чисел, які можуть записуватись в таблицю рядками та стовпцями в круглих або квадратних дужках.

## **2. Що розуміють під нульовою матрицею?**

Відповіді

*1. Це матриця, що дорівнює нулю. 2. Це умовна матриця чисел, алгебраїчна сума чисел яких дорівнює нулю. 3. Такої матриці не існує. 4. Це прямокутна таблиця чисел, в якій кожен рядок і стовпець складається із нулів.*

## **3. Яку матрицю називають протилежною матриці, наприклад, $A$ ?**

Відповіді

*1. Протилежною матриці  $A$  називають матрицю, в якій стовпці є рядками матриці  $A$ . 2. Протилежною матриці  $A$  називають матрицю  $(-A)$ , в якій всі числа в рядках і стовпцях за модулем дорівнюють числам в рядках і стовпцях матриці  $A$ , але мають знак «мінус». 3. Протилежною матриці  $A$  є трикутна матриця. 4. Протилежною матриці  $A$  є скалярна матриця.*

## **4. В чому полягає різниця між матрицею-рядком і матрицею-стовпцем?**

Відповіді

*1. Числа в матриці-рядок записують в рядок, а в матриці-стовпець – в стовпець. 2. Матриця-рядок і матриця-стовпець різняться за формою запису. 3. Матриця-рядок по відношенню до матриці-стовпець є транспонованою і навпаки. 4. Матриця-рядок відрізняється від матриці-стовпець розмірністю.*

## **5. Для якого типу спеціальних матриць пряма та транспонована матриці рівні між собою?**

Відповіді

*1. Рівність прямих та транспонованих матриць є тільки для симетричних матриць. 2. Рівними можуть бути тільки кососиметричні прямі та транспоновані матриці. 3. Рівними можуть бути прямі та транспоновані ортогональні матриці. 4. Така рівність неможлива.*

## **6. До якого типу моделей належить динамічна модель механічної системи?**

Відповіді

*1. Динамічна модель – це діючий макет механічної системи. 2. Динамічна модель – це конструктивна схема механічної системи. 3. Динамічна модель – це ідеалізована фізична модель механічної системи. 4. Динамічна модель – це ідеалізована фізична модель механічної системи, в якій рухомі ланки механічної системи зображені як абстрактні маси чи моменти інерції мас, що взаємодіють між собою через пружні та дисипативні ланки чи в'язі під впливом зовнішніх сил.*

**7. Яку динамічну модель механічної системи називають динамічною моделлю із жорсткими ланками?**

Відповіді

*1. Динамічною моделлю із жорсткими ланками називають модель з ланками у вигляді твердих тіл. 2. Динамічна модель із жорсткими ланками – це модель механічної системи, ланки якої не деформуються. 3. В динамічній моделі з жорсткими ланками всі ланки рухаються в одній системі координат. 4. В динамічній моделі з жорсткими ланками всі ланки є абсолютно твердими тілами, гнучкі ланки не розтягуються, текучі ланки нестисливі, а кінематичні пари ідеально реалізують ті рівняння зв'язків, якими вони описуються.*

**8. В чому полягає відмінність одновимірної динамічної моделі від багатовимірної?**

Відповіді

*1. Одновимірною динамічною моделлю складається з однієї жорсткої ланки. 2. Одновимірною динамічною моделлю механічної системи є модель, в якій кожне з абсолютно твердих тіл системи через накладені в'язі має один ступінь вільності. 3. Одновимірною динамічною моделлю механічної системи називається модель, в якій всі її ланки рухаються в одному напрямку. 4. Одновимірними динамічними моделями механічної системи є ланцюгові (нерозгалужені) динамічні моделі.*

**9. За яких умов пружні та дисипативні ланки механічної системи можна вважати безінерційними елементами?**

Відповіді

*1. Пружні та дисипативні ланки механічної системи можна вважати безінерційними елементами за умови малих їх мас чи моментів інерції мас порівняно з рухомими масами (моментами інерції мас) ланок механічної системи. 2. Пружини та демпфівальні ланки механічної системи вважаються безінерційними елементами. 3. Пружні та дисипативні ланки механічної системи вважаються безінерційними елементами, якщо вони є абсолютно жорсткими тілами. 4. Пружні та дисипативні ланки механічної системи вважаються безінерційними (безмасовими) елементами, якщо їх розміри порівняно з рухомими масами системи малі.*

**10. В чому полягає відмінність між ланцюговими та розгалуженими динамічними моделями механічних систем?**

Відповіді

*1. Ланцюгова динамічна модель механічної системи є одновимірною, а розгалужена – багатовимірною. 2. В ланцюгових динамічних моделях механічної системи всі абсолютно жорсткі ланки послідовно з'єднані пружними та дисипативними безінерційними елементами, а в розгалужених динамічних моделях одна із ланок (жорстка або безінерційна) може взаємодіяти з іншими жорсткими ланками через жорсткі чи пружно-дисипативні в'язі. 3. В ланцюгових динамічних моделях жорсткі ланки послідовно переміщуються в напрямку двох і більше послідовних узагальнених координат, а в розгалужених динамічних моделях є одна узагальнена координата та багато, так званих, «деформаційних координат». 4. Ланцюгові динамічні моделі механічних систем складаються з дискретних абсолютно жорстких ланок, а розгалужені динамічні моделі – з ланок із розподіленими параметрами.*

**11. До якого виду моделей реального фізичного об'єкта відноситься його математична модель?**

Відповіді

*1. Математична модель – це модель, яка за допомогою математичних залежностей імітує роботу реального об'єкта. 2. Математична модель є різновидом концептуальної моделі, в якій через сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, нерівностей, логічних співвідношень тощо) визначаються характеристики станів системи (механічної, гідравлічної, електричної тощо) залежно від її параметрів, умов однозначності, вихідних сигналів і часу. 3. Математична модель відноситься до абстрактних моделей, які за допомогою математичних залежностей описують поведінку динамічних моделей механічних систем. 4. Математична модель є різновидом аналітичної моделі, в якій за допомогою різних типів диференціальних рівнянь описуються взаємозв'язки і взаємодія між ланками динамічної моделі механічної системи.*

**12. В чому полягає відмінність між основними рівнями моделювання технічних систем – структурним (імітаційним), логічним і кількісним?**

Відповіді.

*1. Структурний, логічний і кількісний рівні моделювання технічних систем відрізняються ступенем деталізації опису технічної системи – об'єкта моделювання. 2. На структурному рівні моделювання технічної системи будуються алгоритмічні моделі (моделювальні алгоритми) системи, на логічному рівні складаються логічні рівняння безпосередніх зв'язків між елементами та вузлами функціональних ланок системи, а на кількісному рівні математична модель системи зображується у вигляді системи рівнянь – алгебраїчних або інтегродиференціальних. 3. Структурний, логічний і кількісний рівні моделювання є ієрархічною системою моделювання, яка з різних сторін описує об'єкт дослідження. 4. Відмінність між структурним, логічним і кількісним рівнями моделювання полягає в різних методах моделювання досліджуваної системи.*

**13. В чому полягає різниця між рушійними (активними) та силами опору, що діють в механічній системі?**

Відповіді

*1. Рушійні сили та сили опору відрізняються за напрямом дії та модулем. 2. Рушійні сили приводять ланки механічної системи в рух, а сили опору протидіють цьому рухові. Рушійні сили – це сили, що створюються різними двигунами, а сили опору – це сили тертя. 3. Рушійні сили здійснюють початкове переміщення ланок системи, а сили опору – це різні технологічні сили та сили тертя. 4. Сили опору – це сили тертя сухого та в'язкого, а рушійні – це технологічні сили.*

**14. Чи можуть активні (рушійні) сили бути позиційними?**

Відповіді

*1. Ні, не можуть. Позиційними можуть бути тільки сили опору. 2. Активні сили можуть бути функціями швидкості виконавчої ланки механічної системи, а позиційними є сили, величина яких залежить від положення виконавчої ланки. 3. Можуть, наприклад, коли пружина використовується як приводний двигун системи, або сила, що приводить поршень двигуна внутрішнього згоряння в рух, яка залежить від ходу поршня, його швидкості та тиску продуктів згоряння в циліндрі двигуна. 4. В загальному випадку рушійні сили залежать від часу, вихідних параметрів системи та їх похідних за часом, а позиційні сили – це сили різного виду пружних елементів.*

**15. В чому полягає відмінність в способах складання рівнянь руху ланок механічних систем за допомогою рівняння Лагранжа другого роду та принципу Д'Аламбера?**

Відповіді

*1. Для того, щоб застосовувати для складання рівнянь руху ланок механічної системи рівняння Лагранжа другого роду, потрібно знати залежності кінетичної та потенціальної енергії системи і узагальнені сили від узагальнених координат руху мас системи, а принцип Д'Аламбера полягає в застосуванні квазістатичних рівнянь рівноваги динамічної системи, коли в рівняння рівноваги сил додано сили інерції. 2. Рівняння Лагранжа другого роду – це диференціальне рівняння зміни кінетичної енергії та потенціальної енергії системи в частинних похідних, а рівняння руху ланок системи, складені за принципом Д'Аламбера – це рівняння статичної рівноваги сил, що діють на ланки механічної системи. 3. Відмінність в способах складання рівнянь руху ланок механічної системи за допомогою рівняння Лагранжа другого роду та принципу Д'Аламбера полягає в тому, що в першому випадку застосовують диференціальне рівняння в частинних похідних, а в другому випадку – звичайне диференціальне рівняння. 4. За допомогою рівняння Лагранжа другого роду рівняння руху ланок механічної системи знаходять, розв'язуючи рівняння Лагранжа, а використовуючи принцип Д'Аламбера рівняння руху ланок системи отримують через рівняння статичної рівноваги цих ланок.*

**16. Що розуміють під таким методом спрощення математичної моделі технічної системи як декомпозиція?**

**Відповіді**

*1. Декомпозиція – це розділення математичної моделі на підмоделі. 2. Декомпозиція – це розчленування складної технічної системи на більш прості підсистеми, кінцевою метою якого є розбиття простору змінних в математичній моделі на більш прості підпростори, що містять змінні тільки одного порядку. 3. Декомпозиція – це коли підмоделі математичної моделі об'єкта мають вихідні функції з одинарними зв'язками з відповідними змінними математичної моделі. 4. Декомпозиція – це подання математичної моделі об'єкта дослідження у вигляді сукупності підмоделей.*

**17. В чому полягає суть методу «макромодельовання» технічних систем?**

**Відповіді**

*1. За методом «макромодельовання» будують спрощені математичні моделі технічних систем. 2. «Макромодельовання» – це метод спрощення математичної моделі технічної системи. 3. За методом «макромодельовання» математичні моделі технічних систем будують на основі виділення суттєвих властивостей і дій (впливів) технічних систем, а врахування несуттєвих властивостей і впливів, що діють в системах, здійснюється в параметричній формі. 4. У математичній моделі технічної системи, що побудована за методом «макромодельовання», враховують тільки ті вхідні змінні, які найбільш суттєво впливають на вихідні змінні математичної моделі.*

**18. Які методи використовуються для лінеаризації нелінійної вихідної математичної моделі технічної системи?**

**Відповіді**

*1. Нелінійні математичні моделі технічних систем можна лінеаризувати такими методами: прямої лінеаризації, гармонічного балансу та осереднення (малих амплітуд) для коливних систем і відхилень. 2. Нелінійні математичні моделі технічних систем в лінійні перетворюють шляхом заміни нелінійних диференціальних рівнянь математичної моделі на лінійні. 3. Методом перетворення нелінійної математичної моделі технічної системи в лінійну є розкладання нелінійних складових в рівняннях, що описують нелінійну математичну модель, в числові ряди, наприклад, Тейлора. 4. Нелінійні математичні моделі технічних систем можна лінеаризувати шляхом зведення ланок технічної системи з розподіленими параметрами до ідеальних ланок із зосередженими параметрами, а також нехтуванням динамічними властивостями процесів, що відбуваються в технічній системі.*

**19. Що розуміють під поняттям «адекватність» математичної моделі та об'єкта (предмета) досліджень?**

Відповіді

*1. Адекватність математичної моделі та об'єкта (предмета) досліджень – це відтворення моделлю з необхідною точністю всіх властивостей об'єкта (предмета), суттєвих для цілей конкретного дослідження. 2. Адекватність математичної моделі – це повна відповідність моделі об'єкту (предмету) досліджень. 3. Математична модель та об'єкт (предмет) досліджень будуть адекватними один одному, коли параметри реального об'єкта та математичної моделі збігатимуться з точністю до 5%. 4. Об'єкт (предмет) досліджень і його модель будуть адекватними один одному тоді, коли вони будуть подібні між собою.*

**20. В чому полягає відмінність між ізоморфною та гомоморфною математичними моделями об'єкта (предмета) досліджень?**

Відповіді

*1. Ці поняття рівнозначні між собою. 2. Об'єкт досліджень і його математична модель будуть ізоморфними, якщо між ними існує взаємно однозначна відповідність, а коли модель і об'єкт гомоморфні, тоді відповідність моделі об'єкту є однозначною, а навпаки такої відповідності немає. 3. Гомоморфна модель, на відміну від ізоморфної, не має всіх властивостей, що притаманні об'єкту (предмету) досліджень. 4. Поняття ізоморфізму та гомоморфізму моделі за змістом протилежні один одному.*

**21. В чому полягає принципова різниця між оптимальним керуванням та оптимальним проєктуванням?**

Відповіді

*1. Принципової різниці між цими поняттями немає. 2. У випадку оптимального керування здійснюють керування системою, а у випадку оптимального проєктування систему раціонально конструюють. 3. Оптимальне керування реалізують в динамічних системах, а оптимальне проєктування застосовують для статичних систем. 4. У випадку оптимального проєктування вибрані значення змінних (параметри проєктування) величин є фіксованими протягом всього «життя» системи, а у випадку оптимального керування за зворотним зв'язком значення змінних величин перебудовуються під час функціонування системи.*

## **22. Що розуміють під поняттям – «Параметрична оптимізація»?**

Відповіді

*1. Це оптимізація певних параметрів системи. 2. Параметрична оптимізація – це формалізований ітераційний процес віднаходження таких вхідних параметрів системи (механічної, гідравлічної тощо), за яких її вхідні параметри (якісні показники) набувають, в певному сенсі, найкращих значень. 3. Параметрична оптимізація – це раціоналізація параметрів різних інженерних об'єктів на предмет їх відповідності технічним вимогам. 4. Це знаходження найбільш раціональних параметрів механічної системи.*

## **23. Що розуміють під поняттям – «Цільова функція»?**

Відповіді

*1. Цільова функція – математична залежність, яка пов'язує у вигляді лінійного чи нелінійного рівняння або системи рівнянь змінні проєктування (параметри оптимізації) зі сталими величинами. 2. Зазвичай цільова функція – це алгебраїчне рівняння, на яке накладено певні обмеження у вигляді рівностей і нерівностей. 3. Цільова функція – це математична залежність, що містить основні параметри системи, яка оптимізується. 4. Цільова функція – це алгебраїчне рівняння, що описує якусь криву чи поверхню.*

## **24. В чому полягає різниця між методами оптимізації нульового, першого та другого порядку?**

Відповіді

*1. Особливої різниці між методами оптимізації нульового, першого та другого порядку немає. Вони приблизно рівнозначні. 2. Основна різниця між цими методами полягає в різній початковій інформації, що використовується для знаходження напрямку пошуку оптимального варіанта конструкції виробу, технологічного процесу тощо. 3. Методи нульового порядку – це методи випадкового пошуку, а методи першого та другого порядку ґрунтуються на знаходженні екстремумів цільової функції. 4. За методом нульового порядку для знаходження оптимуму цільової функції не потрібно розраховувати її похідні, а за методами першого та другого порядку потрібно вираховувати відповідно перші та другі похідні цільової функції.*

**25. Які переваги має задавання цільової функції у формі середньоквадратичної функції перед поданням цільової функції у формі максимального відхилення характеристик об'єкта оптимізації від заданих?**

Відповіді

*1. Переваг у цих формах задавання цільової функції немає. 2. Цільова функція у формі середньоквадратичної функції це, зазвичай, нелінійна математична залежність, а цільова функція у формі максимального відхилення – лінійна функція, тому вона й має певну перевагу. 3. Ці форми задавання цільової функції рівнозначні. 4. Цільова функція у формі максимального відхилення характеристик об'єкта оптимізації від заданих, як правило, має розриви в перших похідних, що утруднює використання ефективних методів оптимізації, а цільова функція у формі середньоквадратичної функції, навпаки, є диференційованою відносно всіх своїх аргументів, що й є її основною перевагою.*

**26. В чому полягає різниця між поняттями – «Безумовна оптимізація» та «Умовна оптимізація»?**

Відповіді

*1. Безумовна оптимізація здійснюється без будь-яких попередніх умов, а для умовної оптимізації мають задаватись якісь попередні умови. 2. Особливої різниці між цими поняттями немає. Це формальні назви окремих видів оптимізації. 3. Безумовна оптимізація – це ітераційний процес віднаходження мінімальних значень цільової функції без її обмежень у вигляді алгебраїчних рівнянь і нерівностей, а задача умовної оптимізації розв'язується за наявності обмежень у вигляді алгебраїчних рівнянь і нерівностей. 4. Безумовна оптимізація ґрунтується на методах лінійного програмування, а умовна – на методах нелінійного програмування.*

**27. На чому ґрунтується метод внутрішньої послідовної безумовної оптимізації (мінімізації)?**

Відповіді

*1. Ідея методу внутрішньої послідовної безумовної оптимізації полягає в обмеженні значень розширеної цільової функції всередині допустимої області значень параметрів оптимізації за допомогою штрафної функції від змінних проектування, яка визначається через обмеження цільової функції. 2. Метод внутрішньої послідовної безумовної оптимізації ґрунтується на знаходженні екстремумів цільової функції через її обмеження. 3. Цей метод ґрунтується на знаходженні мінімальних значень цільової функції всередині допустимої області значень параметрів оптимізації. 4. Метод внутрішньої послідовної безумовної оптимізації – це метод нелінійного програмування з використанням для розширення цільової функції, так званих, штрафних функцій.*

## **28. В чому полягає суть зовнішнього методу безумовної оптимізації?**

### **Відповіді**

*1. Зовнішній метод безумовної оптимізації ґрунтується формулюванні розширеної цільової функції зовні допустимої області значень параметрів оптимізації. 2. Суть зовнішнього методу безумовної оптимізації полягає в тому, що мінімум цільової функції шукається зовні допустимої області значень параметрів оптимізації. 3. Основна ідея методу зовнішньої безумовної оптимізації полягає в тому, що під час створення розширеної цільової функції формулюється така штрафна функція, яка є додатною у всіх точках простору проектування зовні допустимої області значень параметрів оптимізації та дорівнює нулю всередині цієї області. 4. Штрафна функція, через яку створюється розширена цільова функція, у зовнішньому методі безумовної оптимізації є квадратичною математичною залежністю.*

## **29. У яких випадках використовують внутрішньо-зовнішній (комбінований) метод безумовної оптимізації?**

### **Відповіді**

*1. Комбінований метод безумовної оптимізації використовують для зменшення математичних розрахунків. 2. Внутрішньо-зовнішній метод безумовної оптимізації використовують, якщо хоч одне обмеження цільової функції є рівністю або ці обмеження невизначені чи від'ємні. 3. У випадку, коли обмеження цільової функції прямують до нуля чи нескінченності, застосовують комбінований метод безумовної оптимізації. 4. Комбінований метод безумовної оптимізації використовують у випадку, коли штрафні функції, що формулюють розширену цільову функцію, задаються у вигляді квадратного багаточлена.*

## **30. На яких математичних ідеях ґрунтується метод умовної оптимізації, що отримав назву «Метод множників Лагранжа», а також відомий ще як «Необхідна умова оптимальності Куна – Такера»?**

### **Відповіді**

*1. Метод множників Лагранжа ґрунтується на трьох математичних рівняннях, одне з яких є рівністю, друге – диференціальним рівнянням першого порядку, а третє – алгебраїчний багаточлен. 2. Умова оптимальності Куна – Такера ґрунтується на математичних залежностях, записаних у вигляді матриць. 3. Метод множників Лагранжа ґрунтується на припущенні, що існують такі множники, які можуть бути більшими або дорівнювати нулю, причому добутки цих множників на відповідні обмеження змінних проектування дорівнюють нулю. Базова математична залежність цього методу, яка називається лагранжіаном, складається із алгебраїчної суми цільової функції та добутків множників на відповідні обмеження змінних проектування, а частинні похідні лагранжіана по відповідних змінних проектування дорівнюють нулю. 4. Метод множників Лагранжа ґрунтується на системі степеневих алгебраїчних рівнянь, що містить постійні величини, змінні проектування та довільні множники, що можуть бути більшими нуля або дорівнювати нулю.*

**31. Корені  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  характеристичного рівняння для однорідного диференціального рівняння другого порядку  $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$  (тут  $y \equiv y(t)$  – змінна функція, що залежить від часу  $t$ ;  $a$  і  $b$  – постійні коефіцієнти, задані в умовах однозначності) дійсні, причому  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Який буде загальний розв’язок диференціального рівняння?**

Відповіді

1.  $y(t) = (A \cos \beta t + B \sin \beta t)e^{\alpha t}$ , де  $A$  та  $B$  – постійні коефіцієнти, що складаються з комбінацій коефіцієнтів  $a$  і  $b$ ;  $\alpha$  та  $i\beta$  – реальна та уявна частини коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , відповідно;  $i = \sqrt{-1}$ . 2.  $y(t) = (C_1 + C_2)e^{\lambda_1 t}$ , де  $C_1$  та  $C_2$  – сталі інтегрування. 3.  $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$ . 4.  $y(t) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ .

**32. Розв’язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку  $\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t)$  (тут  $f(t)$  – функція, що залежить від часу  $t$ , наприклад, збуджувальна сила вимушених коливань) має вигляд  $y(t) = y_1(t) + y^*(t)$ , де  $y_1(t)$  – розв’язок однорідного диференціального рівняння другого порядку  $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$ ;  $y^*(t)$  – частинний розв’язок вказаного неоднорідного диференціального рівняння. Від чого залежить вид частинного розв’язку  $y^*(t)$ ?**

Відповіді

1. Вид частинного розв’язку  $y^*(t)$  залежить від числових значень коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  характеристичного рівняння для однорідного диференціального рівняння другого порядку. 2. Вид частинного розв’язку  $y^*(t)$  визначається видом функції  $f(t)$ , значеннями коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  характеристичного рівняння та значеннями коефіцієнтів  $a \neq 0$  або  $a = 0$  та  $b \neq 0$  чи  $b = 0$ . 3. Частинний розв’язок  $y^*(t)$  є багаточленом  $Q_m(t)$  порядку (степеня)  $m$ . 4. Частинний розв’язок визначається за формулою  $y^*(t) = t^2 \cdot Q_m(t)$ .

**33. В якій формі можна найбільш компактно записати систему «n» диференціальних рівнянь, наприклад, другого порядку, що описують математичну модель механічної системи?**

Відповіді

1. Перетворити систему диференціальних рівнянь другого порядку на систему рівнянь вищого порядку, наприклад, шляхом введення нових змінних. 2. Записати систему диференціальних рівнянь другого порядку у матричній формі, попередньо звівши вихідну систему до системи диференціальних рівнянь першого порядку. 3. Записати систему диференціальних рівнянь другого порядку у формі векторного рівняння. 4. Скористатись поняттями операторів диференціювання  $\nabla \dots$  (набла) та Лапласа  $\nabla^2 \dots$ .

**34.** З якою метою під час аналізу деяких математичних моделей технічних систем використовують інтегральне перетворення Лапласа  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$  (тут  $F(p)$  – зображення оригінала  $f(t)$  якоїсь функції;  $p$  – зображення аргументу  $t$ )?

Відповіді

*1. Основна мета інтегрального перетворення Лапласа – це переведення функції дійсної змінної  $f(t)$  у функцію комплексної змінної  $F(p)$  для, наприклад, перетворення вихідного диференціального рівняння першого порядку на алгебраїчне, яке легше розв'язати. 2. Перетворення Лапласа використовують для більш глибокого аналізу особливостей математичних моделей. 3. Перетворення Лапласа застосовують для числового розв'язування диференціальних рівнянь високого порядку. 4. Перетворення Лапласа використовують для аналізу складних математичних моделей.*

**35.** Які основні переваги та недоліки мають числові методи розв'язування диференціальних рівнянь перед аналітичними методами їх прямого інтегрування?

Відповіді

*1. Основною перевагою числових методів розв'язування диференціальних рівнянь перед аналітичними методами є можливість розв'язувати диференціальне рівняння (чи систему рівнянь) будь-якої складності для заданих умов однозначності, а недолік – це обмежена область чинності розв'язку, справедливого тільки для конкретних умов однозначності, тоді як аналітичний розв'язок таких обмежень не має. 2. Аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь дозволяють розв'язувати прості рівняння, що зводяться до табличних інтегралів простих функцій, а в числових методах інтегрування замінюється наближеним підсумовуванням. 3. Основна перевага аналітичних методів розв'язування диференціальних рівнянь – це фундаментальність розв'язку, а числових методів – числова конкретність розв'язку для заданих умов однозначності. 4. Числові методи розв'язування диференціальних рівнянь використовуються для складних і громіздких рівнянь, а аналітичні – для простих рівнянь та їх систем.*

**36. В чому полягає відмінність між методами Тейлора та Ейлера числового розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку типу  $\dot{y} = f(x, y)$ ?**

Відповіді

*1. Принципової відмінності між методами Тейлора та Ейлера немає. 2. За методом Тейлора заданий інтервал  $[x_0, x_0 + \chi]$  незалежної змінної  $x$ , за початкової умови  $y(x_0) = y_0$ , розбивають на маленькі ділянки  $[x_{j-1}, x_j]$  (тут  $j = 1, 2, \dots, n$ ) і, послідовно використовуючи формулу розкладення в ряд Тейлора, знаходять числові значення функції  $y(x)$ . За методом Ейлера незалежну змінну  $x$ , за початкової умови  $y(x_0) = y_0$ , розбивають на систему відрізків з рівновіддаленими точками  $[x_i + i \cdot h]$  (тут  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $h$  – крок між точками), а кожне наступне значення функції  $y(x)$  шукається за формулою  $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ . 3. За методом Ейлера інтегрування диференціального рівняння замінюють підсумовуванням з певним кроком маленьких значень функції  $y(x)$ , починаючи зі значення  $y(x_0) = y_0$ , а за методом Тейлора вихідне диференціальне рівняння розкладають в ряд Тейлора. 4. Відмінність між методами Тейлора та Ейлера полягає в тому, що в першому випадку підсумовування проміжних значень функції  $y(x)$  здійснюють за спеціальною формулою Тейлора, а в другому випадку (за методом Ейлера) кожне наступне значення функції  $y_{i+1}(x_{i+1})$  знаходять послідовним додаванням попередніх значень цієї функції.*

**37. Які основні переваги має числовий метод Рунге – Кутта для розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку типу  $\dot{y} = f(x, y)$  перед числовим методом Ейлера – Коші для такого ж типу задач?**

Відповіді

*1. Основними перевагами методу Рунге – Кутта перед методом Ейлера – Коші є можливість здійснювати числовий розв'язок диференціального рівняння зі змінним кроком між точками розбиття заданого інтервалу аргументу  $x$  та більш висока точність розрахунку, обумовлена більш точною формулою для визначення приросту функції  $\Delta y_i$ . 2. Принципових переваг методів Рунге – Кутта та Ейлера – Коші один перед одним немає. 3. Недоліком методу Ейлера – Коші відносно методу Рунге – Кутта є більш тривалий процес розрахунку та менша точність. 4. Основним недоліком методу Ейлера – Коші порівняно з методом Рунге – Кутта є недосконалість ітераційного процесу, яка у випадку відсутності збіжності значень розрахункових величин  $y_i$  і  $y_{i+1}$  в десяткових знаках викликає необхідність змінити крок розбиття аргументу  $x$  та почати ітераційний процес спочатку.*

**38. Яка особливість числового методу Адамса – Крилова для розв’язування диференціальних рівнянь обумовлює його високу точність?**

Відповіді

*1. Висока точність розв’язування диференціальних рівнянь методом Адамса – Крилова порівняно з методами Тейлора, Ейлера – Коші та Рунге – Кутта, обумовлена більш точною екстракційною формулою для послідовного розрахунку значень функції  $y(x)$  ( $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n}$ ), в яку (формулу) входять похідні  $y'_i, y'_{i-1}, y'_{i-2}$  та  $y'_{i-3}$ , розраховані за інтерполяційною формулою Ньютона з точністю до четвертого знака після коми. 2. Більш висока точність числового методу Адамса – Крилова порівняно з іншими методами досягається точним розрахунком початкового відрізка  $[y_0, y_1, y_2, y_3]$ , знайденого будь-яким іншим числовим методом. 3. Метод Адамса – Крилова для чисельного розв’язування диференціальних рівнянь має більш високу точність порівняно з методами Тейлора, Ейлера – Коші та Рунге – Кутта тому, що він базується на цих методах із врахуванням їхніх недоліків. 4. Висока точність методу Адамса – Крилова порівняно з іншими числовими методами розв’язування диференціальних рівнянь обумовлена більш тривалим і деталізованим ітераційним процесом.*

**39. Яка особливість обумовлює практичність і високу задану точність числового методу Мілна для розв’язування диференціальних рівнянь?**

Відповіді

*1. Метод Мілна має ту особливість, яка обумовлює його практичність і високу задану точність, що, після розрахунку будь-яким іншим числовим методом початкового відрізка  $[y_0, y_1, y_2, y_3]$ , наступні значення функції  $y(x)$  розраховуються за точними ітераційними формулами та визначається абсолютна похибка двох сусідніх значень, яка порівнюється із заданою межовою похибкою. Якщо розрахована похибка менше заданої, то переходять до розрахунку наступного значення функції, а якщо навпаки, то зменшують крок розбиття аргументу  $x$ , перераховують початковий відрізок і повторюють процес розрахунку. 2. Точність і практичність методу Мілна для числового розв’язування диференціальних рівнянь реалізується за рахунок точних ітераційних формул, в яких використовуються похідні попередньо розрахованих значень функції  $y(x)$ . 3. Задана точність методу Мілна забезпечується періодичним розрахунком абсолютних похибок знайдених значень функції  $y(x)$  та порівнянням цих похибок із заданими їх межовими значеннями. 4. Метод Мілна для числового розв’язування диференціальних рівнянь порівняно з іншими числовими методами легше автоматизується за допомогою пакетів комп’ютерних програм, наприклад, Matlab.*

**40. Який метод числового розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку найбільш легко реалізується графічно?**

Відповіді

*1. Метод Тейлора. 2. Метод Рунге – Кутта. 3. Метод Ейлера. 4. Метод Мілна.*

## ЛІТЕРАТУРА

1. Peter Lancaster, Miron Tismenetsky The Theory of Matrices with applications Paperback ISBN: 9781493301447 Hardback ISBN: 9780124355606. 1985. 586 p.
2. Вища математика : підручник / В. А. Домбровський та ін.; за редакцією М. І. Шинкарика. Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
3. Granino A. Korn, Theresa M. Korn Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review (Dover Civil and Mechanical Engineering), 2013.
4. Gerd Fischer Analytische Geometrie. 4-te Auflage, Vieweg, 1985. 145 p.
5. Струтинський В. Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки : підручник. Житомир : ЖІТІ, 2001. 612 с.
6. Жученко А. І., Ладієва Л. Р., Піргач М. С., Жураковський Я. Ю. Математичне моделювання процесів і систем : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 351 с.  
URL:<https://ela.kpi.ua/api/core/bitstreams/16799921-0872-4776-b522-2cd34d2ac13a>
7. Обертюх Р. Р., Слабкий А. В. Теоретичні основи теплотехніки : навчальний посібник. 2-ге вид., перероб. та доп. Вінниця : ВНТУ, 2020. 181 с.
8. Petrakov Y., Gladskiy M. Theory of Automatic Control for Mechanical Engineering // LAP Lambert Academic Publishing, 2021. 192 p.
9. Шевченко І. А., Васильченко Т. О. Динаміка та міцність машин : навчальний посібник для студентів за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування» другого (магістерського) освітньо-кваліфікаційного рівня. Запоріжжя : ЗДІА, 2018. 160 с
10. Мокін Б. І. Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник. Вінниця : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2009. 260 с.
11. Воробйов В. В., Воробйова Л. Д., Киба С. П. Основи прикладної теорії коливань : підручник для студентів машинобудівних та електромеханічних спеціальностей. Кременчук : ПП Щербатих О. В., 2020. 156 с.
12. Іскович-Лотоцький Р. Д., Обертюх Р. Р., Севостьянов І. В. Процеси та машини вібраційних та віброударних технологій : монографія. Вінниця : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2006. 291 с.
13. Іскович-Лотоцький Р. Д., Обертюх Р. Р., Архипчук М. Р. Генератори імпульсів тиску для керування гідроімпульсними приводами вібраційних та віброударних технологічних машин : монографія. Вінниця : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2008. 171 с.
14. Обертюх Р. Р., Слабкий А. В. Пристрої для віброточіння на базі гідроімпульсного привода : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2015. 164 с.
15. Теоретична механіка : навчальний посібник / Штанько П. К. та ін.; за ред. Штанька П. К. Запоріжжя : ЗНТУ, 2013. 376 с.
16. Львов Г. І., Костромицька О. А. Контактна механіка та чисельне моделювання удару : навч.-метод. посіб. Харків : НТУ «ХП», 2019. 157 с.

17. Теорія пружності / А. Є. Бабенко та ін. Київ : Основа, 2009. 244 с.  
URL:<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/15853/1/N-book.pdf>
18. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. 2-ге вид., доп. К. : Либідь, 2007. 656 с.
19. Edward J. Haug, Jasbir S. Arora Applied optimal design. Mechanical and structural systems. New York, 1979. 513 p.
20. Рудь Ю. С. Основи конструювання машин : підручник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. 2-е вид., переробл. Кривий Ріг : Видавець ФО-П Чернявський Д.О., 2015. 492 с.
21. Павлице В. Т. Основи конструювання та розрахунок деталей машин : підручник. Львів : Афіша, 2003. 560 с.
22. Прищенко О. П., Черногор Т. Т. Диференціальні рівняння та їх застосування : посібник. Харків : НТУ «ХП», 2017. 88 с.
23. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи : підручник. К. : Либідь, 1996. 288 с.
24. Цегелик Г. Г. Чисельні методи : підруч. для студ. вищ. навч. закл. Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, 2004. 407 с.
25. Обертюх Р. Р., Слабкий А. В. Теоретичні основи теплотехніки : навч. посіб. 2-ге вид., перероб. та доп. Вінниця : ВНТУ, 2020. 180 с.
26. Дубровська В. В., Шкляр В. І. Термодинаміка та теплообмін : навчальний посібник. К. : НТУУ «КПІ», Вид-во «Політехніка», 2016. 152 с.
27. Обертюх Р. Р., Слабкий А. В., Поліщук О. В. Особливості розрахунку та проектування силових ланок гідроімпульсних пристроїв для вібраційного різання та поверхневого зміцнення, виконаних у вигляді комбінації поршня з прорізною пружиною та золотника з прорізною пружиною. Наукові нотатки. 2013. Вип. 42. С. 193-201. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nn\\_2013\\_42\\_33](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nn_2013_42_33)

## Українсько-англійський словник найбільш вживаних термінів

абсолютний	absolute
абстрактний	abstract
адаптивний	adaptive
адекватний	adequate
аналітичний	analytical
вектор	vector
визначник	determinant
витрата	consumption
відносний	relative
вільність	fluency
гомоморфізм	homomorphism
декомпозиція	decomposition
детермінант	determinant
деформація	deformation
диференціальний	differential
динамічний	dynamic
дисипація	dissipation
елемент	element
енергія	energy
енергоносій	energy carrier
жорсткий	rigid
жорсткість	rigidity
закон	law
ізоморфізм	isomorphism
імітаційний	imitative
інерційний	inertial
інерція	inertia
інтенсивний	intensive
кінетичний	kinetic
коливання	oscillation
координата	coordinate
константа	constant
критерій	criterion
ланка	link
лінеаризація	linearization
лінійний	linear
математичне	mathematical
матриця	matrix
мета	goal
метод	method
моделювання	simulation

модель	model
навантаження	loading
напір	head
напруження	intension
неконсервативний	non-conservative
нелінійний	nonlinear
об'єкт	object
об'єм	volume
оптимізація	optimization
опір	resistance
параметричний	parametric
привод	drive
подача	supply
позиційний	positional
плунжер	plunger
пружина	spring
пружний	resilient
режим	regime
реакція	reaction
рівень	level
рівняння	equation
розвантаження	unloading
розв'язок	solution
розмірність	dimension
статистика	statistics
спосіб	method
сила	force
стисливість	compressibility
система	system
ступінь	degree
траєкторія	trajectory
термодинамічний	thermodynamic
тертя	friction
тиск	pressure
тіло	body
фізичний	physical
функція	function
функціонал	functional
цикл	cycle
цільовий	target
частота	frequency
числення	calculation
швидкість	speed

*Електронне навчальне видання*

**Роман Романович Обертюх  
Андрій Валентинович Слабкий**

# **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

Навчальний посібник

Рукопис оформив *Р. Обертюх*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 26.02.2025 р.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2025-044.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

**press.vntu.edu.ua;**

Email: [rvv.vntu@gmail.com](mailto:rvv.vntu@gmail.com)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.