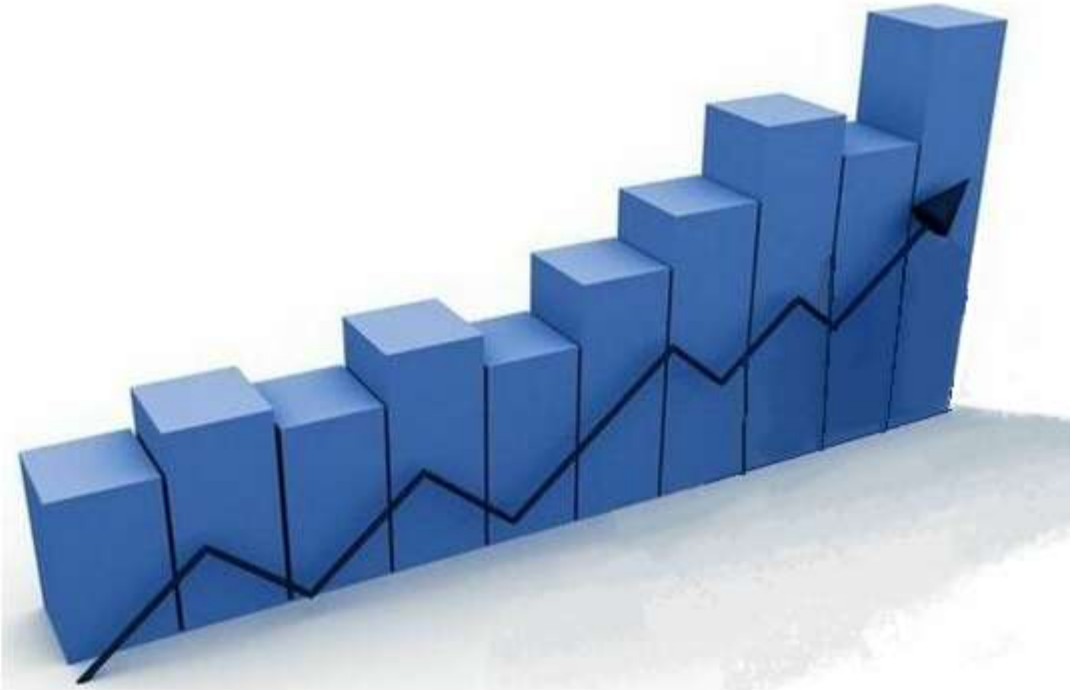
Андрій ЯРОВИЙ, Ірина ХОМ'ЮК, Любов ВАХОВСЬКА

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Частина 2



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Андрій ЯРОВИЙ, Ірина ХОМ'ЮК, Любов ВАХОВСЬКА

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
Частина 2

Електронний навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2025

УДК 519.85
Я76

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 25.05.2025 р.)

Рецензенти:

О. В. Зелінська, кандидат технічних наук, доцент, зав. кафедри інформаційних технологій ДОНУ імені Василя СТУСА

Т. Б. Мартинюк, доктор технічних наук, професор кафедри обчислювальної техніки ВНТУ

В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор, зав. кафедри вищої математики ВНТУ

Яровий, А. А.

Я76 Математичні методи дослідження операцій. Частина 2 : навчальний посібник [Електронний ресурс] / Яровий А. А., Хом'юк І. В., Ваховська Л. М. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 117 с.)

В другій частині навчального посібника наведено теоретичний матеріал для подальшого закріплення знань з лінійного програмування, розглянуто алгоритм побудови двоїстих задач, наведено алгоритм розв'язання задач лінійного програмування (ЗЛП) двоїстим симплекс-методом. Наведено алгоритм постоптимального аналізу рішень ЗЛП, розглянуто задачі параметричого програмування, а також методи розв'язання спеціальних ЗЛП, а саме розв'язання транспортної задачі. Розглянуто також цілочисельні ЗЛП. Подано основні теоретичні положення теорії ігор та методи їх розв'язання. Запропоновано перелік питань для самоконтролю та завдання, необхідні для виконання лабораторних робіт і практичних завдань.

УДК 519.85

ЗМІСТ

ВСТУП

Розвиток суспільства в наш час досяг такого рівня, за якого виникає необхідність в створенні ефективних методів управління організаційними системами різного призначення та різних рівнів. Стрімкий розвиток науки та техніки, широке впровадження автоматизованих засобів управління, збільшення масштабів виробництва, асортименту продукції, ускладнення зв'язків між учасниками ринку, нестабільність економічної ситуації потребує прийняття своєчасних конструктивних управлінських рішень. На сьогодні висуваються актуальні вимоги до ефективності планування та управління виробничими процесами на основі застосування сучасної методології моделювання та інструментарію прийняття управлінських рішень. Отже, в сучасних умовах підвищується актуальність підготовки фахівців високого рівня.

Друга частина навчального посібника з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» містить матеріали для вивчення двоїстих задач лінійного програмування (ЛП), транспортних задач, методів дослідження задач лінійного програмування (ЗЛП) на чутливість, цілочисельних задач ЛП, а також основ теорії ігор.

Також в навчальному посібнику подано теми і завдання до практичних занять та лабораторних робіт відповідно до робочої програми дисципліни.

Посібник надасть можливість студентам вивчити:

– термінологію, означення, основні поняття, символічне позначення основних операцій та їх зміст, що використовуються в задачах математичного програмування;

– інформаційні технології розв'язання двоїстих задач ЛП, задач цілочисельного лінійного програмування (ЗЦЛП).

Особливістю навчального посібника є простота наведеного теоретичного матеріалу та практичні завдання, що дозволять ефективно засвоювати відповідний теоретичний матеріал.

1 ПОНЯТТЯ ПРО ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

1.1 Двоїсті задачі лінійного програмування

Для кожної задачі лінійного програмування (ЗЛП) можна побудувати іншу – так звану двоїсту, або спряжену, задачу.

Нехай задана ЗЛП [1, 2, 5, 12]:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n \le b_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,k}, k \le n \tag{1.3}$$

Задача (1.4 – 1.6) знаходження мінімального значення функції $F^*(y)$ за умов

$$F^*(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to min \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{l1}y_1 + a_{l2}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \le c_l \\ a_{l+11}y_1 + a_{l+12}y_2 + \dots + a_{ml+1}y_m \le c_{l+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases} \tag{1.5}$$

$$y_j \ge 0, j = \overline{1,l}, l \le m \tag{1.6}$$

називається задачею, двоїстою до задачі (1.1 – 1.3).

Двоїсті пари задач зазвичай поділяють на симетричні і несиметричні. В симетричній парі двоїстих задач обмеження прямої задачі і співвідношення двоїстої задачі є нерівностями виду «≤» або «≥». Таким чином, змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значення.

Несиметричними останні дві пари називаються тому, що мають обмеження у вихідних задачах виду «=».

Наведемо приклади пар двоїстих задач.

Симетричні задачі

1. ***Пряма задача***

$F_{\min} = \overrightarrow{C}\overrightarrow{X},$

$A\overrightarrow{X} \geq \overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{X} \geq 0.$

Двоїста задача

$F^*_{\max} = \overrightarrow{W}\overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{W}A \leq \overrightarrow{C},$

$\overrightarrow{W} \geq 0.$

2. ***Пряма задача***

$F_{\max} = \overrightarrow{C}\overrightarrow{X},$

$A\overrightarrow{X} \leq \overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{X} \geq 0.$

Двоїста задача

$F^*_{\min} = \overrightarrow{W}\overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{W}A \geq \overrightarrow{C},$

$\overrightarrow{W} \geq 0.$

Несиметричні задачі

1. ***Пряма задача***

$F_{\min} = \overrightarrow{C}\overrightarrow{X},$

$A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{X} \geq 0.$

Двоїста задача

$F^*_{\max} = \overrightarrow{W}\overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{W}A \leq \overrightarrow{C}.$

2. ***Пряма задача***

$F_{\max} = \overrightarrow{C}\overrightarrow{X},$

$A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{X} \geq 0.$

Двоїста задача

$F^*_{\min} = \overrightarrow{W}\overrightarrow{B},$

$\overrightarrow{W}A \geq \overrightarrow{C}.$

1.2 Основні теореми двоїстості в лінійному програмуванні

Теорема 1 (перша теорема двоїстості). Якщо одна із пари двоїстих задач (1.1 – 1.3) і (1.4 – 1.6) має оптимальний план, то і друга має оптимальний план, причому значення цільових функцій на оптимальних планах збігаються, тобто

$$F_{max}(x) = F^*_{min}(y).$$

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена (для прямої (1.1 – 1.3) – зверху, а двоїстої (1.4 – 1.6) – знизу), то друга задача взагалі не має планів.

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). Для того щоб допустимі плани X^* і Y^* пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і достатньо виконання умов:

$$X_i^*\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_j^* - c_i\right) = 0 \ \ (i = \overline{1,n}) \tag{1.7}$$

$$Y_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i^* - b_j\right) = 0 \;\; (j = \overline{1,m}) \tag{1.8}$$

Теорема 3. Якщо в разі підстановки компонентів оптимального плану в систему обмежень прямої задачі j-те обмеження перетворюється на нерівність, то i-та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо j-та компонента оптимального плану двоїстої задачі додатна, то i-те обмеження прямої задачі задовольняє її оптимальний розв'язок як строга нерівність.

Умови (1.7), (1.8) дають можливість за оптимальним планом (розв'язком) однієї з взаємно двоїстих задач знайти оптимальний план другої задачі.

Нехай X^* – допустимий розв'язок задачі (1.1) – (1.3). Вектор X^* є оптимальним розв'язком цієї задачі тоді і тільки тоді, коли серед розв'язків системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j - c_i = 0, \text{якщо } x_i^* \neq 0 \tag{1.9}$$

$$y_j = 0, \text{якщо } \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* > b_j \tag{1.10}$$

Існує хоча б один допустимий розв'язок задачі (1.4 – 1.6), двоїстої до задачі (1.1 – 1.3).

1.3 Розв’язання двоїстих задач лінійного програмування

Математична модель двоїстої задачі має такі особливості побудови:

1) кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі;

2) кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі;

3) коефіцієнтами при невідомих цільової функції двоїстої задачі є праві частини співвідношень системи обмежень (вільні члени системи обмежень) прямої задачі;

4) цільова функція прямої задачі прямує до максимуму, а цільова функція двоїстої задачі – до мінімуму;

5) матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень двоїстої задачі складається шляхом транспонування матриці коефіцієнтів при невідомих прямої задачі (транспонування матриці – заміна рядків стовпцями, а стовпців – рядками);

6) правими частинами співвідношень системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомих цільової функції прямої задачі;

7) якщо змінна $\boldsymbol{x_i}$ прямої задачі може набувати лише невід'ємних значень, то відповідне $\boldsymbol{i}$-те обмеження двоїстої задачі має знак « ≥ »; якщо

ж змінна x_i може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то i-те співвідношення системи обмежень двоїстої задачі має знак « = »;

8) якщо j-те співвідношення прямої задачі є нерівністю, то j-та змінна двоїстої задачі $y_j \geq 0$; в іншому разі змінна y_j може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

1.4 Економічна інтерпретація двоїстих задач лінійного програмування

Економічну інтерпретацію двоїстих задач і двоїстих оцінок розглянемо на прикладі [3]:

Приклад 1.1. Для виробництва трьох видів виробів А, В, С використовується три різних види сировини. Кожен з видів сировини може бути використаний в кількості, відповідно, не більшій 180, 210 та 244 одиниць. Норми витрат сировини подано в таблиці 1.1.

Визначити план випуску продукції, за якого забезпечується її максимальна вартість, оцінити кожен з видів сировини, що використовуються для виробництва продукції.

Таблиця 1.1 – Норми витрат сировини

Види сировини	Види виробів		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Вартість одиниці прод.	10	14	12

Пряма задача:

$$F(x) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \ \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Двоїста задача:

$$F^*(y) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \ \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ \geq 10 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ \geq 14 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ \geq 12 \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_2 \geq 0$$

Розв'яжемо пряму задачу симплекс-методом.

Таблиця 1.1 – Початкова симплекс-таблиця (крок 1)

базис	10	14	12	0	0	0	b_i	b_i/a_{ij}
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
X_4	4	2	1	1	0	0	180	180/2
X_5	3	1	3	0	1	0	210	210/1
X_6	1	2	5	0	0	1	244	244/2
F	-10	-14	-12	0	0	0	0	

$X_{оп1} = (0, 0, 0, 180, 210, 244)$

Таблиця 1.2 – Крок 2

базис	10	14	12	0	0	0	b_i	b_i/a_{ij}
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
X_2	2	1	1/2	1/2	0	0	90	90/1/2
X_5	-1	0	-5/2	1/2	-1	0	-120	-
X_6	-3	0	4	-1	0	1	64	64/4
F	18	0	-5	7	0	0	1260	

$X_{оп2} = (0, 90, 0, 0, -120, 64)$

Таблиця 1.3 – Крок 3

базис							b_j	b_j/a_{ij}
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
X_2	$19/6$	1	0	$5/8$	0	$-1/8$	82	
X_5	$23/8$	0	0	$1/8$	1	$-5/8$	80	
X_3	$-3/4$	0	1	$-1/4$	0	$1/4$	16	
F	$57/4$	0	0	$23/4$	0	$5/4$	1340	

Хоп3 = (0, 82, 16, 0, 80, 0)

На кроці 3 (остання симплекс-таблиця, табл. 1.3) умова оптимальності виконана, отже отримано оптимальний план прямої ЗЛП, а також оптимальний план двоїстої задачі.

Отже, оптимальні плани прямої і двоїстої задач дорівнюють:

$$X_{опт} = \{0;\ 82;\ 16\}$$
$$Y_{опт} = \{23/4;\ 0;\ 5/4\}$$

Змінні y_1, y_2, y_3 означають умовні двоїсті оцінки сировини.

Оцінки y_1 та y_3 відмінні від нуля. Це означає, що у виготовленні продукції сировина I і III видів використовується повністю за оптимального плану виробництва продукції, а II вид сировини не використовується повністю за оптимального плану випуску продукції, тому його двоїста оцінка дорівнює нулю.

Двоїста оцінка визначає дефіцитність сировини, що використовує підприємство.

1.5 Питання для самоконтролю

1. Наведіть основні характеристики пари двоїстих ЗЛП.
2. В чому полягає зміст основної теореми двоїстості?
3. Дайте геометричну інтерпретація двоїстих ЗЛП.
4. Сформулюйте критерій оптимальності пари двоїстих задач.
5. Чи можливо, щоб одна з двоїстих задач розв'язувалась, а друга – ні?
6. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих змінних.
7. Що впливає на кількість змінних у двоїстій задачі?
8. Як визначити кількість обмежень у двоїстій задачі?
9. До чого прямує цільова функція прямої задачі, якщо цільова функція двоїстої прямує до мінімуму?
10. Що є правими частинами співвідношень системи обмежень двоїстої задачі?
11. Припустимо, що змінна x_i прямої задачі може набувати лише невід'ємних значень. Який знак матиме відповідне j-те обмеження двоїстої задачі?
12. Припустимо, що змінна x_i прямої задачі може набувати будь-яких значень. Який знак матиме відповідне j-те обмеження двоїстої задачі?
13. Якщо j-те співвідношення прямої задачі є нерівністю, то яких значень може набувати j-та змінна двоїстої задачі?
14. Якщо j-те співвідношення прямої задачі є рівнянням, то яких значень може набувати j-та змінна двоїстої задачі?
15. Як формулюється перша теорема двоїстості.
16. Наведіть приклади економічної інтерпретації першої теореми двоїстості.
17. Наведіть другу теорему двоїстості для симетричних задач.
18. Наведіть приклади економічної інтерпретації другої теореми двоїстості.
19. Наведіть співвідношення, за якими пов’язані значення цільових функцій прямої і двоїстої задач.
20. Який змістовний зв’язок існує між прямою і двоїстою задачами ЛП?
21. Сформулюйте правила побудови двоїстої задачі.
22. Чи справедливе твердження: двоїстою до прямої задачі максимізації є задача мінімізації?

23. Чи справедливе твердження: двоїстою до канонічної задачі максимізації є канонічна задача мінімізації?

24. Чи справедливе твердження: для пари двоїстих задач в стандартній формі значення цільової функції прямої задачі максимізації не більше значення цільової функції двоїстої задачі?

25. Чи справедливе твердження: оптимальні розв’язки прямої і двоїстої задач збігаються?

26. Як, знаючи оптимальний розв’язок прямої ЗЛП, знайти оптимальний розв’язок двоїстої задачі?

27. Якщо у однієї задачі немає оптимального розв’язку, що можна сказати про оптимальний розв’язок двоїстої задачі?

28. Якщо цільова функція однієї ЗЛП необмежена, чи існує оптимальний розв’язок для двоїстої задачі?

1.6 Завдання для виконання № 5. Розв'язування двоїстих ЗЛП

Завдання 1 [3]. Скласти пару двоїстих задач, маючи пряму задачу лінійного програмування.

1.
$$F = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 \qquad + x_3 \ge 19, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2.
$$F = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 9, \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 18, \\ 2x_1 \qquad + x_3 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

3.
$$F = 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_3 \qquad \le 17, \\ 5x_1 \qquad + 2x_2 \ge 8, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

4.
$$F = 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 7, \\ 4x_1 + 9x_2 \qquad = 12, \\ \qquad 2x_2 \quad + 2x_3 \le 17, \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

5.
$$F = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 13, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

6.
$$F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7, \\ 9x_1 + 3x_3 \qquad = 13, \\ x_1 \qquad + 2x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \to \max$$

7. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 + 9x_2 + 5x_3 \ge 11, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = 7x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

8. $$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 19, \\ x_1 \qquad + 5x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$F = x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \min$$

9. $$\begin{cases} 5x_1 \qquad + 2x_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad \ge 6, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 \le 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to \max$$

10. $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 \qquad \ge 13, \\ -4x_1 \qquad + 7x_3 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

11. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 9, \\ 9x_1 + 6x_2 \qquad \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = 9x_1 + 3x_2 \to \max$$

12. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 21, \\ 2x_1 - 4x_2 \qquad \ge 23, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$F = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max$$

13. $$\begin{cases} x_1 + 9x_2 \qquad = 13, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \le 8, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \ge 19, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min$$

14. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 18, \\ 3x_1 \qquad + x_2 \le 27, \\ \qquad 4x_2 + x_3 \ge 32, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = x_1 + x_2 + 9x_3 \to \max$$

15. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 11, \\ 2x_1 + 3x_3 \qquad = 7, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \ge 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$F = 3x_1 + x_2 + 7x_3 \to \min$$

16. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 6, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = x_1 - 6x_2 + 2x_3 \to \min$$

17. $$\begin{cases} 7x_1 + 4x_3 \qquad \ge 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19, \\ \qquad 4x_2 - x_3 \le 11, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min$$

18. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 \qquad + 4x_3 - 5x_4 = 3, \\ \qquad - 3x_2 + x_3 + x_4 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = x_1 - 4x_2 + 7x_3 \to \max$$

19. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 \ge 13, \\ x_2 \le 9, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min$$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 7, \\ x_1 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 \le 11, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$.

$$F = -x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \max$$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \ge 13, \\ 2x_2 = 9, \\ x_3 \le 2, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$.

$$f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$$

22. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

23. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_3 \ge 13, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ 2x_1 + 4x_3 \le 5, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 7x_1 - 11x_2 + 28x_3 - 4x_4 \to \max$$

24. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 7, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$

$$F = -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min$$

25. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 7, \\ x_1 + 5x_3 \le 19, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 18, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$.

$$F = -3x_1 + 2x_2 - 4x_4 \to \min$$

26. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ -x_1 + 7x_2 - 3x_4 \ge 9, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$.

$$F = 4x_1 + x_3 \to \min$$

27. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 7, \\ 3x_2 - 5x_3 \ge 4, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 2, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$.

$$F = 3x_1 - 4x_3 + x_4 \to \min$$

28. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 7, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 7x_4 \le 3, \\ 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$f = -2x_1 + x_2 \to \max$$

29. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 3, \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 4, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0$.

$$F = -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 \to \max$$

30. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 \ge 9, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Завдання 2 [3]. Для заданої ЗЛП скласти двоїсту та знайти розв'язок задач геометричним методом.

1. $F = x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 7, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

3. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ -x_1 + 3x_2 \le 8, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

4. $F = 3x_1 + 5x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 3x_2 \ge 8, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

5. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

6. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

7. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1 + x_2 \le 7, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

8. $F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

9. $F = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

10. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

11. $F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

12. $F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

13. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

15 $\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \le 75, \\ 12x_1 + 7x_2 \le 55, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to \min$$

19. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 16, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

2.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 4x_1 + 8x_2 \to \min$$

22. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

23. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 30, \\ 2x_1 - 2x_2 \le 5, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = 5x_1 + 10x_2 \to \max$$

24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 7x_2 \le 30, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

26. $\begin{cases} 10x_1 - 6x_2 \le 50, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

27.
$$F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 15, \\ 5x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

28.
$$F = 12x_1 + 15x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

29.
$$F = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

30.
$$F = 5x_1 + 6x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 24, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

Завдання 3 [3]. Для виробництва двох видів продукції – $П_1$ і $П_2$ витрачається три види ресурсів A_1, A_2, A_3. Запаси ресурсів, норми їх затрат і прибуток від реалізації одиниці продукції задані в таблиці. За допомогою симплекс-методу знайти такий план виробництва, який забезпечував би максимальний прибуток. Скласти двоїсту задачу до прямої і виписати її оптимальний план з останньої симплекс-таблиці. Розкрити її економічний зміст.

Варіант	Затрати ресурсів на одиницю продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	A_1		A_2		A_3		A_1	A_2	A_3	$П_1$	$П_2$
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	13	7	16	16	4	9	361	520	248	11	8
2	1	12	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3	3	2	2	3	11	2	101	99	37	27	24
4	4	13	5	6	3	1	379	197	335	25	12
5	3	1	11	2	4	5	45	144	96	9	8
6	14	15	5	6	5	4	400	49	220	21	18
7	11	6	9	7	12	3	324	60	500	10	9
8	2	1	5	7	11	6	48	100	229	12	6
9	3	8	3	9	4	2	187	143	29	10	15
10	2	4	7	13	3	8	126	30	120	20	10
11	9	9	4	11	2	5	175	65	60	15	12
12	2	3	11	5	7	3	80	58	75	10	10
13	5	7	14	2	9	3	125	83	152	12	20
14	3	7	5	6	12	1	65	70	235	30	21
15	2	5	9	3	4	6	58	143	197	15	9
16	1	6	11	3	2	5	37	360	100	12	7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	2	11	14	5	6	8	34	105	91	9	30
18	4	4	5	9	14	3	196	350	68	15	10
19	14	8	6	3	3	7	500	60	324	14	18
20	14	5	3	6	5	7	280	62	260	15	18
21	3	12	7	3	7	3	75	58	80	15	10
22	5	10	8	3	3	2	98	84	91	18	9
23	11	5	2	4	7	10	51	120	300	6	12
24	2	7	7	4	16	9	80	91	68	15	22
25	18	2	6	7	8	9	591	335	379	12	12
26	14	4	6	3	6	8	266	136	88	8	12
27	3	3	3	11	7	14	99	74	101	14	15
28	3	7	4	15	1	3	113	161	285	9	8
29	3	8	1	18	7	5	102	91	210	18	7
30	3	9	6	12	1	10	273	100	380	10	25

Завдання 4 [3]. Розв’язати задану пряму ЗЛП, побудувавши двоїсту задачу та розв’язати її графічно.

1. $$F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

2. $$F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

3. $$F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

4. $$F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

5. $$F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

6. $$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

7. $$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

8. $$F = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min$$

9. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = 4x_1 + 30x_2 + 4x_3 \to \min$$

10. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = -x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$$

11. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 22, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$$

12. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 8, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = -x_1 + 5x_2 - 6x_3 \to \min$$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 12, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 8, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 \to \min$$

14. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 \ge -8, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 6, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 \to \min$$

15. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 12, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 18, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = -4x_1 - x_2 - 7x_3 \to \min$$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 16, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 \ge 2, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$

17. $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 36, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

19. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 \le 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 45, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}).$$

$$F = 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 \to \max$$

20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

21.
$$f = 7x_1 + 15x_2 + 6x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

22.
$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

23.
$$f = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

24.
$$F = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

25.
$$f = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 18, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

26.
$$F = x_1 - 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

27.
$$f = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 3x_4 \geq 12, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

28.
$$F = 12x_1 - x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \leq 18, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

29.
$$f = 8x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 14x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \geq 14, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

30.
$$F = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 22, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

2 ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Двоїстий симплекс-метод [1, 3, 5, 11], як і симплекс-метод (СМ), використовується для знаходження розв'язку ЗЛП (3.1) – (3.3). Однак двоїстий СМ можна використовувати під час розв'язування ЗЛП, вільні члени системи обмежень якої можуть бути будь-якими числами, на відміну від СМ, за якого вільні члени системи обмежень можуть бути тільки додатними числами.

Отже, у двоїстому симплекс-методі порівняно зі звичайним симплекс-методом змінюються правила визначення розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця, а також змінюється критерій оптимальності.

$$F(x) = c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n \rightarrow max \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$x_i \ge 0, (i = \quad \ge n) \tag{2.3}$$

1) критерій оптимальності: стовпець «b_j» не містить від'ємних елементів;

2) правило вибору розв'язувального рядка: серед від'ємних елементів стовпця «b_j» знаходимо найменший. Рядок, в якому він знаходиться, називається розв'язувальним, а змінну, що йому відповідає, вилучають із базису;

3) правило вибору розв'язувального стовпця: ділять почленно елементи індексного рядка, взяті зі знаком «мінус», на відповідні від'ємні елементи розв'язувального рядка. Серед одержаних часток вибирають найменшу. Стовпець, в якому вона знаходиться, називають розв'язувальним, а змінну, яка йому відповідає, вилучають із базису.

2.1 Алгоритм розв’язування задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом

Знаходження розв'язку задачі (2.1) – (2.3) двоїстим СМ містить такі етапи:

1. Знаходять псевдоплан ЗЛП.
2. Перевіряють цей псевдоплан за оптимальністю.

Якщо псевдоплан оптимальний, то розв'язок ЗЛП знайдено. Якщо ж псевдоплан не оптимальний, то або встановлюють, що ЗЛП розв'язків не має, або переходять до нового псевдоплану.

3. Вибирають розв'язувальний рядок за допомогою найбільшого за абсолютним значенням від'ємного числа стовпчика вільних членів і розв'язувальний стовпчик за допомогою знаходження найменшого за абсолютним значенням відношення, де $a_{ij} < 0$.

2.2 Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте критерій оптимальності для двоїстого симплекс-методу.
2. За яким правилом вибирають ведучий рядок у двоїстому симплекс-методі?
3. Як вибирається розв'язувальний рядок у двоїстому симплекс-методі?
4. Наведіть алгоритм для перерахунку елементів нової симплекс-таблиці у двоїстому симплекс-методі.
5. Для яких ЗЛП застосовують двоїстий симплекс-метод?
6. В чому відмінність двоїстого симплекс-методу порівняно з симлекс-методом?
7. До яких методів розв'язування задач лінійного програмування належить двоїстий симплекс-метод та на чому він оснований?
8. Який псевдоплан розв'язку ЗЛП є оптимальним у двоїстому симплекс-методі?

2.3 Завдання для виконання № 6. Розробка алгоритму і програми для розв'язання ЗЛП двоїстим симплекс-методом

Мета: набути практичних навичок знаходження розв'язку ЗЛП двоїстим симплекс-методом та його програмної реалізації**.**

Порядок виконання роботи

1. Згідно з заданим варіантом практично знайти розв'язок ЗЛП двоїстим симплекс-методом.
2. Розробити алгоритм та програму, що реалізує цей метод.
3. Провести тестування розробленої програми згідно з заданим варіантом.
4. За результатами виконання роботи оформити звіт.

Зміст звіту

1. Титульний аркуш за вимогою вищої школи.
2. Мета, варіант завдання.
3. Практичні результати виконання завдання.
4. Схема програми, що реалізує двоїстий симплекс-метод.

5. Опис програми.
6. Результати тестування розробленої програми.
7. Висновки за результатами роботи.
8. Додаток 1. Інструкція користувача до розробленої програми.
9. Додаток 2. Лістинг розробленої програми.

Варіанти завдань [3]:

№№ 1 - 2

$$F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 3 – 4

$$F = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 5 - 6

$$F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 7 - 8

$$F = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \ge 24, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 9 - 10

$$F = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \ge 12, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 11 - 12

$$F = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 12, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 16, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 13 - 14

$$F = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№15-16

$$F = -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 17 - 18

$$F = -5x_1 - 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \le 18, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 24, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 36, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 19 - 20

$$F = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_4 \ge 10, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 \ge 12, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 25, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 21 - 22

$$F = -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 \le 18, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 30, \\ -2x_1 + 8x_3 \le 32, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 23 - 24

$$F = 3x_1 - 5x_2 - 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_5 = 34, \\ 4x_1 - 3x_3 + 2x_5 \ge 28, \\ -3x_1 - 3x_5 \le 24, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 25 - 26

$$F = 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

№№ 27 - 28

$$F = -6x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \ge 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 \le 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \ge 18, \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

№№ 29 - 30

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 \le 24, \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

№№ 31-32

$$F = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

3 ПОСТОПТИМАЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІШЕНЬ ЗЛП (ДОСЛІДЖЕННЯ ЗЛП НА ЧУТЛИВІСТЬ)

3.1 Загальна характеристика постоптимального аналізу рішень ЗЛП

Аналіз моделей ЗЛП на чутливість або постоптимальний аналіз – це процес, що реалізується після того, як знайдене оптимальне рішення ЗЛП [1, 12].

За допомогою такого аналізу виявляють чутливість оптимального розв'язку до визначених змін прямої задачі. *Метою проведення постоптимального аналізу є дослідження впливу можливих змін початкових умов на одержаний раніше оптимальний розв'язок.* Важливість цього дослідження для ЗЛП пояснюється тим, що більшість на практиці зазвичай беруть наближені значення параметрів ЗЛП, а точні значення параметрів заздалегідь невідомі.

В процесі постоптимального аналізу досліджується три класи параметрів:

- обсяги ресурсів b_j ;
- коефіцієнти цільової функції c_i ;
- норми витрат ресурсів a_{ij}.

3.2 Алгоритм постоптимального аналізу рішень ЗЛП (дослідження ЗЛП на чутливість)

Таким чином, щоб проаналізувати ЗЛП на чутливість необхідно виконати:

1) варіювання обмежених ресурсів b_j;
2) варіювання коефіцієнтів цільової функції c_i;
3) варіювання елементів матриці обмежень a_{ij};
4) додавання ще одного способу виробництва.

Після знаходження оптимального розв'язку є логічним з'ясувати, як відобразиться на оптимальному розв'язку зміна запасів ресурсів.

В процесі аналізу змін запасів ресурсів важливо враховувати:

- на скільки можна збільшити (зменшити) запас певного ресурсу для покращення оптимального значення цільової функції $F(x)$;
- на скільки можна знизити (збільшити) запас деякого ресурсу за умови збереження отриманого оптимального значення цільової функції $F(x)$.

Визначаються межі допустимих змін коефіцієнтів цільової функції:

- який діапазон зміни (збільшення або зменшення) того чи іншого коефіцієнта цільової функції, за якого не відбуваються зміни оптимального рішення;

- наскільки треба змінити той або інший коефіцієнт цільової функції, щоб зробити певний недефіцитний ресурс дефіцитним, і навпаки, дефіцитний ресурс зробити недефіцитним.

Під час аналізу економічного змісту двоїстих оцінок визначено, що додатна величина двоїстої оцінки сировини певного виду показує, на скільки збільшиться прибуток за зростання кількості відповідної сировини на одиницю. Також можна визначити, до яких меж можна збільшувати (зменшувати) кількість відповідної сировини, і водночас оптимальний план двоїстої задачі (у структурному розумінні) залишиться незмінним (у базисі залишаться ті самі змінні, що й були, але з новими значеннями).

Для розв'язання цієї задачі знаходять так званий *інтервал стійкості* (*незмінності*) *двоїстих оцінок*.

У загальному випадку зміна вільних членів системи обмежень вихідної задачі може призвести до однієї із ситуацій:

1) поточний базисний розв'язок залишається допустимим;

2) поточний базисний розв'язок стає неприпустимим. Неприпустимість розв'язку виявляється в тому, що хоча б одна координата вектора «b_j» стає від'ємною, тобто одна або декілька базисних змінних набувають від'ємного значення;

3) поточний базисний розв'язок стає неоптимальним;

4) поточний базисний розв'язок стає неоптимальним і неприпустимим.

Припустимо, що пряма задача має невироджені опорні плани і хоча б один з них є оптимальним.

Максимальне значення цільової функції прямої задачі будемо розглядати як функцію вільних членів системи обмежень:

$$F_{\max}(b_1,\ b_2, \dots ,\ b_n)$$

В оптимальному плані двоїстої задачі значення змінної чисельно дорівнює частинній похідній функції $F_{\max}(b_1,\ b_2, \dots ,\ b_n)$ за конкретним аргументом, тобто

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i} = y_i^*.$$

Остання рівність означає, що зміна значень величин b_j призводить до збільшення чи зменшення функції $F_{\max}(b_1,\ b_2, \dots ,\ b_n)$. Ця зміна визначається величиною $|y_i^*|$ і може бути охарактеризована тільки тоді, коли у разі зміни величин b_j значення змінних y_i^* в оптимальному плані відповідної двоїстої задачі залишаються незмінними. Тому важливо визначити такі межі зміни кожного з вільних членів системи обмежень прямої задачі, в яких оптимальний план двоїстої задачі не змінюється. Це можливо тоді коли

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix} > 0$$

3.3 Економічна інтерпретація постоптимального аналізу рішень ЗЛП

Розглянемо аналіз можливої зміни загальної вартості продукції як за зміни обсягів кожного з ресурсів окремо, так і за їх одночасної зміни в заданих межах.

Приклад 3.1. Норми витрат ресурсів, їх запаси та ціну одиниці продукції наведено в таблиці 3.1:

Таблиця 3.1 – Норми витрат ресурсів

Види ресурсів	Норми витрат ресурсів на од. продукції				Запаси ресурсів
	A	B	C	D	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Вартість од. прод.	9	6	4	7	

Крок 1. Необхідно побудувати математичні моделі прямої та двоїстої задач і знайти їх оптимальні плани:

Пряма задача

F(x) =
$9x_1+6x_2+4x_3+7x_4 > \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Двоїста задача

F*(y) =
$180y_1+210y_2+800y_3 >$ min

$$\begin{cases} y_1 + 4x_3 \ge 9 \\ y_2 + 2y_3 + 2x_4 \ge 6 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 7 \\ y_j \ge 0 \end{cases}$$

Знайдемо оптимальні плани прямої та двоїстої задачі, розв’язавши пряму ЗЛП табличним симплекс-методом:

Ітерація 1

Базис	9	6	4	7	0	0	0		$\frac{b_i}{a_{ij}}$
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b_j	
X_5	1	0	2	4	1	0	0	180	
X_6	0	1	3	2	0	1	0	210	
X_7	4	2	0	4	0	0	1	800	
F_i	-9	-6	-4	-7	0	0	0	0	

Ітерація 2

Базис	9	6	4	7	0	0	0		$\frac{b_i}{a_{ij}}$
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b_j	
X_1	1	0	$\frac{-3}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	95	
X_6	0	0	$\frac{7}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	85	
X_2	0	1	3	2	0	1	0	210	
F_i	0	0	$\frac{1}{2}$	5	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	2115	

$$X_{опт} = \{95;\ 210;\ 0;\ 0;\}$$

$$Y_{опт} = \{0;\ \mathbf{\frac{3}{2}};\ \mathbf{\frac{9}{4}};\}$$

Крок 2. Необхідно визначити інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни ресурсів кожного виду.

Знайдемо інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни ресурсів кожного виду. Тому знаходимо:

$$\left(B^{-1}\right)\cdot\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ b_3+\Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 180+\Delta b_1 \\ 210+\Delta b_2 \\ 800+\Delta b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot\left(180+\Delta b_1\right)-\frac{1}{2}\left(210+\Delta b_2\right)+\frac{1}{4}\left(800+\Delta b_3\right) \\ 1\cdot\left(180+\Delta b_1\right)+\frac{1}{2}\left(210+\Delta b_2\right)-\frac{1}{4}\left(800+\Delta b_3\right) \\ 0\cdot\left(180+\Delta b_1\right)+1\left(210+\Delta b_2\right)+0\left(800+\Delta b_3\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0-105-\frac{\Delta b_2}{2}+200+\frac{\Delta b_3}{4} \\ 180+\Delta b_1+105+\frac{\Delta b_2}{2}-200-\frac{\Delta b_3}{4} \\ 0+210+\Delta b_2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95-\frac{\Delta b_2}{2}+\frac{\Delta b_3}{4} \\ 85+\Delta b_1+\frac{\Delta b_2}{2}-\frac{\Delta b_3}{4} \\ 210+\Delta b_2 \end{pmatrix} > 0$$

1)

$$\Delta b_2 = 0$$
$$\Delta b_3 = 0$$

$$\begin{cases} 95>0 \\ 85+\Delta b_1>0 \quad \Delta b_1>-85 \\ 210>0 \end{cases}$$

В цьому випадку, якщо ресурс 1-го виду буде збільшено або зменшено на 85 одиниць, то не дивлячись на це, оптимальний план двоїстої задачі не зміниться.

2)

$$\Delta b_1 = 0$$
$$\Delta b_3 = 0$$

$$\begin{cases} 95-\frac{\Delta b_2}{2} > 0 \\ 85+0+\frac{\Delta b_2}{2}-0>0 \\ 210+\Delta b_2>0 \end{cases}$$

$$\Delta b_2 < 190$$
$$\Delta b_2 > -170$$
$$\Delta b_2 > -210$$
$$-170<\Delta b_2<190$$

Це означає, що коли ресурс 2-го виду збільшити на 190 од. або зменшити на 170 од., то оптимальною двоїстою оцінкою цього ресурсу залишиться y_2.

Отже, запас ресурсу 2-го виду може змінюватися в межах:

$$210 - 170 \le b_2 \le 210 + 190$$

$$40 \le b_2 \le 400$$

Можливий максимальний дохід знаходиться в межах:

$$2115 - 170 \cdot 3/2 \le F_{max} \le 2115 + 190 \cdot 3/2$$

$$1860 \le F_{max} \le 2400$$

А оптимальний план виробництва продукції становитиме:

$$\{95-1/2\cdot(-170);\ 210+1\cdot(-170);\ 0;\ 0;\ 0;\ 85+1/2\cdot(-170);0\} \le$$

$$\le x_{опт} \le$$

$$\le \{95-1/2\cdot 190;\ 210+1\cdot 190);\ 0;\ 0;\ 0;\ 85+1/2\cdot 190;\ 0\}$$

$$\{180;\ 40;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\} \le x_{опт} \le \{0;\ 400;\ 0;\ 0;\ 0;\ 180;\ 0\}$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки y_3 дефіцитного ресурсу 3-го виду.

3)

$$\Delta b_1 = 0$$

$$\Delta b_2 = 0$$

$$-380 < \Delta b_3 < 340$$

Отже, запас ресурсу 3-го виду може змінюватися в межах:

$$800 - 380 \le b_3 \le 800 + 340$$

$$420 \le b_2 \le 1140$$

Можливий максимальний дохід знаходиться в межах:

$$2115 - 380 \cdot 9/4 \le F_{max} \le 2115 + 340 \cdot 9/4$$

$$1260 \le F_{max} \le 2870$$

А оптимальний план виробництва продукції становитиме:

$$\{95+1/4\cdot(-380);\ 210+0\cdot(-380);\ 0;\ 0;\ 0;\ 85-1/4\cdot(-380);0\} \le$$

$$\le x_{опт} \le$$

$$\le \{95+1/4\cdot 340;\ 210+0\cdot 340);\ 0;\ 0;\ 0;\ 85-1/4\cdot 340;\ 0\}$$

$$\{0;\ 210;\ 0;\ 0;\ 0;\ 180;\ 0\} \le x_{опт} \le \{180;\ 210;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}$$

Таким чином, якщо $40 < \Delta b_2 < 400$ або $420 < \Delta b_3 < 1140$, а кількість b_1 не змінюється, то двоїстий план Y* не змінюється.

Якщо b_1, b_2, b_3 змінюються одночасно, то дослідження двоїстих оцінок значно ускладнюється.

Крок 3. В задачі одночасно змінюється кількість ресурсів трьох типів. У цьому випадку кількість ресурсу I типу зменшується на 60 одиниць ($\Delta b_1 = -60$), а кількість ресурсів II і III типів відповідно збільшується на 120 і 160 одиниць ($\Delta b_2 = 120$, $\Delta b_3 = 160$). Щоб з'ясувати, чи залишається

$Y^* = (0;\ 3/2;\ 9/4)$ оптимальним планом двоїстої задачі за вказаної зміни кількості ресурсів чи ні, потрібно перевірити, чи задовольняють значення $\Delta b_1,\ \Delta b_2,\ \Delta b_3$ нерівності:

$$\begin{pmatrix} 95-\dfrac{\Delta b_2}{2}+\dfrac{\Delta b_3}{4} \\ 85+\Delta b_1+\dfrac{\Delta b_2}{2}-\dfrac{\Delta b_3}{4} \\ 210+\Delta b_2 \end{pmatrix} > 0$$

Отже

$$90-\frac{1}{2}\cdot 120+\frac{1}{4}\cdot 160=75>0$$
$$85-60+\frac{1}{2}\cdot 120-\frac{1}{4}\cdot 160=45>0$$
$$210+120>0$$

Таким чином, не дивлячись на зміни кількості ресурсів, оптимальний план Y^* двоїстої задачі не зміниться. Тому можемо знайти максимальний приріст значення функції

$$F(x) = 9x_1+6x_2+4x_3+7x_4$$

за вказаних змін кількості ресурсів:

$$\Delta F_{max} = y_1^*\Delta b_1+y_2^*\Delta b_2+y_3^*\Delta b_3 = 0\cdot(-60)+\frac{3}{2}\cdot 120+\frac{9}{4}\cdot 160=540$$

Звідси видно, що зменшення кількості ресурсу I типу на 60 одиниць і відповідно збільшення ресурсів II і III типів на 120 і 160 одиниць надає можливість побудови такого плану виробництва продукції, реалізація якого забезпечить випуск виробів на 540 грн більше, ніж за початкової кількості ресурсів.

Постоптимальний аналіз зміни коефіцієнтів цільової функції розглянемо на прикладі задачі про відгодовування тварин.

Такий аналіз має дати відповідь на питання: на скільки можна збільшити або зменшити прибуток від реалізації однієї тварини, за якого знайдений раніше оптимальний план відгодовування тварин залишиться незмінним. Зрозуміло, що прибуток у цьому разі зміниться, але залишатиметься максимальним з усіх можливих за наявних умов.

Розглянемо конкретний приклад.

Приклад 3.2. Фермер відгодовує два види тварин – А і В, використовуючи три види кормів. Витрати корму кожного виду на одну тварину за видами наведено в таблиці 3.2. У ній також зазначено запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини. Визначити, скільки тварин кожного виду потрібно відгодовувати фермеру, щоб отримати максимальний прибуток.

За умовою, прибуток від реалізації однієї тварини виду А становить 16 ум. одиниць. Припустимо, що він змінюється на величину Δc_1. Зазначимо, що в разі збільшення прибутку $\Delta c_1 \geq 0$, у разі зменшення – $\Delta c_1 \leq 0$. Отже маємо вираз для прибутку від реалізації однієї тварини виду А: $16 + \Delta c_1$.

Таблиця 3.2 – Норми витрат корму на одну тварину

Види корму	Витрати кормів на відгодівлю однієї тварини		Запаси кормів
	А	В	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини	16	6	

Знайти допустимий діапазон змін величини Δc_1 можна з індексного рядка останньої симплекс-таблиці. Розраховуючи ці елементи, потрібно використовувати коефіцієнти цільової функції. Відповідні обчислення зі зміненим значенням прибутку від реалізації однієї тварини подано в таблиці 3.3:

Таблиця 3.3 – Підсумкова симплекс-таблиця

№ пор.	Базис	Сб	bj	$16+\Delta c_1$	6	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	x_3	0	30	0	0	1	2/11	–5/11
2	x_1	$16+\Delta c_1$	57	1	0	0	7/22	–1/22
3	x_2	6	12	0	1	0	–3/11	2/11
Δ_i			$984+57\Delta c_1$	0	0	0	$\frac{76+7\Delta c_1}{22}$	$\frac{8-\Delta c_1}{22}$

Для того, щоб розв'язок був оптимальним необхідно, щоб елементи індексного рядка, що знаходяться у стовпцях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ були невід'ємними. Тобто має виконуватися така система нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{76 + 7\Delta c_1}{22} \geq 0 \\ \dfrac{8 - \Delta c_1}{22} \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язком такої системи є нерівності

$$\Delta c_1 \geq -\tfrac{76}{7},$$

$$\Delta c_1 \leq 8,$$

що задають діапазон зміни величини прибутку від реалізації однієї тварини виду А (c_{min} = 16 – 76/7 = 36/7; c_{max} = 16 + 8 = 24).

У цьому випадку оптимальний план, що забезпечить максимальний прибуток, не зміниться.

Отже, якщо прибуток від реалізації однієї тварини виду А знаходиться в діапазоні від 36/7 до 24 ум. одиниць, то оптимальний план відгодовування тварин становить 57 тварин виду А і 12 тварин виду В. Якщо ж прибуток від реалізації однієї тварини виду А виходить за межі зазначеного діапазону, то оптимальний план відгодовування тварин змінюється і необхідно знову розраховувати новий оптимальний план.

Знайдемо діапазон стійкості для всіх видів сировини у прикладі про фермера, який займається відгодівлею тварин (задача 2).

Замінимо вектор $B_0\begin{pmatrix}180\\240\\426\end{pmatrix}$ на вектор $B_0\begin{pmatrix}180+\Delta_1\\240+\Delta_2\\426+\Delta_3\end{pmatrix}$. Змінна Δ_1 показує, на скільки може змінитися запас ресурсу відносно початкового значення 180, і водночас знайдений розв'язок залишиться оптимальним. Змінні Δ_2 і Δ_3 мають аналогічний зміст щодо запасів сировини II і III видів.

За даними таблиці 3.2, згідно з формулою побудуємо систему:

$$X_Б = \begin{pmatrix}x_3\\x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2/11 & -5/11\\0 & 7/22 & -1/22\\0 & -3/11 & 2/11\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}180+\Delta_1\\240+\Delta_2\\426+\Delta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}330 + 11\Delta_1 + 2\Delta_2 - 5\Delta_3\\1254 + 7\Delta_2 - \Delta_3\\132 - 3\Delta_2 + 2\Delta_3\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Якщо Δ_2=0 і Δ_3=0 , залишається нерівність 330 + 11$\Delta_1 \geq$ 0 або $\Delta_1 \geq$ -30. Це свідчить про те, що якщо кількість сировини I виду зменшувати на величину до 30 одиниць, тобто її кількість коливатиметься від 150 до 180 одиниць, то оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним.

Якщо Δ_1 = 0 і Δ_3 = 0, отримуємо такі нерівності:

$$\begin{cases} 330 + 2\Delta_2 \geq 0 \\ 1254 + 7\Delta_2 \geq 0 \\ 132 - 3\Delta_2 \geq 0 \end{cases}, \text{або } \begin{cases} \Delta_2 \geq -165 \\ \Delta_2 \geq -1254/7. \\ \Delta_2 \leq 44 \end{cases}$$

Отже , $-165 \le \Delta_2 \le 44$. Це означає, що кількість сировини II виду може зменшитися на 165 одиниць або збільшитися на 44 одиниці порівняно з початковою кількістю. За умовою задачі кількість сировини II виду дорівнює 240 одиницям. Отже, незмінність двоїстих оцінок залишиться у межах коливання сировини II виду від 75 до 288 одиниць.

Для визначення інтервалу стійкості двоїстої оцінки сировини III виду приймаємо $\Delta_1 = 0$ і $\Delta_2 = 0$. Тоді $-66 \le \Delta_1 \le 66$. Отже, збереження незмінності двоїстої оцінки сировини III виду знаходиться у межах від 360 до 492 одиниць.

Припустимо, що фермер (приклад 2) планує розширити своє господарство за умови збільшення запасів кормів на 20 %, тобто запаси кормів становитимуть 216, 288 та 511.2 умовних одиниць, відповідно. Визначити, чи буде це економічно прибутковим рішенням.

Отже:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^{2}/_{11} & {}^{-5}/_{11} \\ 0 & {}^{7}/_{22} & {}^{-1}/_{22} \\ 0 & {}^{-3}/_{11} & {}^{2}/_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 216 \\ 288 \\ 511{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 68{,}4 \\ 14{,}4 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, базисні змінні із новими значеннями 68,4; 14,4; 36, як і раніше, становлять припустимий розв’язок. Максимальне значення цільової функції $F = 16\cdot 68{,}4 + 6\cdot 14{,}4 = 1180{,}8$ грош. одиниць.

Отже, збільшення запасів кормів на 20 % дасть додатковий прибуток розміром $1180{,}8 - 984 = 196{,}8$ грош. одиниць.

Припустимо, що частину коштів, які витрачали на корм першого виду (його залишки становлять 30 грош. одиниць), фермер вирішив витратити на закупівлю кормів 2-го та 3-го видів. Нехай нові запаси кормів становлять 155, 250 і 450 грош. од., відповідно. Визначити економічну вигідність цього рішення.

Тому

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^{2}/_{11} & {}^{-5}/_{11} \\ 0 & {}^{7}/_{22} & {}^{-1}/_{22} \\ 0 & {}^{-3}/_{11} & {}^{2}/_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 155 \\ 250 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{45}/_{11} \\ -{}^{650}/_{11} \\ -{}^{150}/_{11} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо випадок, що відповідає ситуації, коли знайдений розв'язок став недопустимим, оскільки $x_3 = -45/11$. Для повернення в діапазон допустимих розв’язків та одержання відповіді на запитання задачі необхідно застосувати двоїстий симплексний метод.

В останній симплексній таблиці розв'язку прямої задачі замінюють елементи стовпця «b_j» на елементи нового вектора розв’язків. Причому значення цільової функції також змінюють (табл. 3.4).

У прикладі, що розглядається, значення цільової функції дорівнюватиме:

$$F = 16 \cdot \frac{650}{11} + 6 \cdot \frac{150}{11} = \frac{11300}{11}.$$

Таблиця 3.4 – Двоїстий СМ

№ пор.	Базис	$C_б$	b_j	16	6	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	x_3	0	–45/11	0	0	1	2/11	–5/11
2	x_1	16	650/11	1	0	0	7/22	–1/22
3	x_2	6	150/11	0	1	0	–3/11	2/11
Δi			11 300/11	0	0	0	38/11	4/11

Як слідує з таблиці 3.4, знайдений план не є оптимальним, оскільки стовпець «b_j» містить від’ємний елемент. Отже, необхідно переходити до нової симплексної таблиці. Розв'язувальний рядок – перший (він містить від’ємний елемент стовпця «b_j»), розв'язувальний стовпець – X_5 (від’ємний елемент у розв'язувальному рядку один, отже, він і визначає розв'язувальний стовпець). Розв'язувальний елемент – (-5/11). Здійснивши необхідні розрахунки, маємо результати, подані в таблиці 3.5, аналіз якої дозволяє зробити висновок про оптимальність обчисленого плану (всі елементи стовпця «b_j» плану додатні.

Таблиця 3.5 – Остання ітерація СМ

№ пор.	Базис	$C_б$	b_j	16	6	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	x_5	0	9	0	0	–2,2	–0,4	1
2	x_1	16	1 309/22	1	0	–0,1	33/110	0
3	x_2	6	12	0	1	0,4	–0,2	0
Δ_i			1024	0	0	0,8	198/55	0

Отже, нова кількість кормів дозволить отримати прибуток розміром 1024 грош. одиниці, що на 1024 – 948 = 40 грош. одиниць більше за попередній прибуток.

3.4 Питання для самоконтролю

1. Для чого призначений постоптимальний аналіз ЗЛП?

2. Які види постоптимального аналізу рішень ЗЛП існують?

3. Який вид постоптимального аналізу дає нам відповідь на питання: «До яких меж можливо збільшувати (зменшувати) кількість відповідної сировини, і водночас оптимальний план двоїстої задачі (у структурному розумінні) залишиться незмінним (у базисі залишаться ті самі змінні, що й були, але з новими значеннями)?»

4. Як зміна значень вільних членів системи обмежень ЗЛП впливає на оптимальний план? Наведіть ситуації, до яких це може призвести.

3.5 Завдання для виконання № 7. Дослідження задач лінійного програмування на чутливість

Мета: набути практичних навичок постоптимального аналізу рішень ЗЛП та його програмної реалізації

Порядок виконання роботи

1. Отримати варіант завдання до лабораторної роботи.
2. Розробити алгоритм та програму, що реалізує постоптимальний аналіз рішень ЗЛП.
3. Провести тестування розробленої програми згідно з заданим варіантом.
4. За результатами виконання роботи оформити звіт.

Зміст звіту

1. Титульний аркуш за вимогою вищої школи.
2. Мета, варіант завдання.
3. Практичні результати виконання завдання.
4. Схема програми, що реалізує постоптимальний аналіз рішень ЗЛП.
5. Опис програми.
6. Результати тестування розробленої програми.
7. Висновки за результатами роботи.
8. Додаток 1. Інструкція користувача до розробленої програми.
9. Додаток 2. Лістинг розробленої програми.

Завдання для виконання

Провести постоптимальний аналіз заданих нижче ЗЛП [7].

Задача 1. Підприємство виготовляє вироби двох видів, на них витрачаються ресурси двох типів. Нехай прибуток від реалізації виробів становить $\boldsymbol{c_1 = 3,\ c_2 = 2}$, обсяги ресурсів дорівнюють $\boldsymbol{b_1 = 40,\ b_2 = 36}$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$\mathrm{A} = \left|\boldsymbol{a_{ij}}\right| = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.
2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує

сумарний дохід, та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід у разі збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 зменшився до **36,** а інший b_2 збільшився до **45**. Як зміниться у цьому випадку оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 9$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 3$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 2,$ $a_{23} = 4$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Задача 2. Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів. Нехай прибуток від реалізації виробів становить $c_1 = 4,$ $c_2 = 2$, обсяги ресурсів дорівнюють $b_1 = 48,$ $b_2 = 36$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$\mathrm{A} = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.

2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує сумарний дохід та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід у разі збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 збільшився до **60,** а другий b_2 зменшився до **30**. Як зміниться у цьому випадку оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 10$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 3$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 2,$ $a_{23} = 4$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Задача 3. Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів. Нехай прибуток від реалізації виробів становить $c_1 = 4,$ $c_2 = 2$, обсяг ресурсів дорівнюють $b_1 = 40,$ $b_2 = 36$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$\mathrm{A} = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.

2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує

сумарний дохід, та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід за збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 зменшився до **30,** а другий b_2 збільшився до **50**. Як зміниться у цьому випадку оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 12$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 4$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 2$, $a_{23} = 3$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Задача 4. Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів. Нехай прибуток від реалізації виробів становить $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, обсяги ресурсів дорівнюють $b_1 = 36$, $b_2 = 24$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$\mathrm{A} = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.

2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує сумарний дохід, та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід у разі збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 збільшився до **40,** а другий b_2 зменшився до **30**. Як зміниться у цьому випадку оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 9$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 4$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 3$, $a_{23} = 4$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Задача 5. Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів. Нехай прибуток від реалізації виробів становить $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, обсяги ресурсів дорівнюють $b_1 = 64$, $b_2 = 56$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$\mathrm{A} = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.

2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує сумарний дохід, та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід у разі збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 зменшився до **48,** а другий b_2 збільшився до **60**. Як зміниться в такому випадку оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 10$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 3$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 2$, $a_{23} = 4$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Задача 6. Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів. Нехай прибуток від реалізації виробів становить $c_1 = 4$, $c_2 = 2$, обсяги ресурсів дорівнюють $b_1 = 40$, $b_2 = 36$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$\mathrm{A} = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.

2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує сумарний дохід, та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід у разі збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 збільшився до **80,** а другий b_2 зменшився до **40**. Як зміниться у цьому випадку оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 9$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 3$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 2$, $a_{23} = 2$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Задача 7. Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів.

Нехай прибуток від реалізації виробів становить $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, обсяги ресурсів дорівнюють $b_1 = 50$, $b_2 = 40$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$A = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.

2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує сумарний дохід та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід у разі збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 зменшився до **40,** а другий b_2 збільшився до **48**. Як зміниться у цьому випадку оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 12$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 4$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 2$, $a_{23} = 4$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Задача 8. Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів. Нехай прибуток від реалізації виробів становить $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, обсяги ресурсів дорівнюють $b_1 = 72$, $b_2 = 54$. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задаються матрицею:

$$A = |a_{ij}| = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Побудувати математичну модель цієї ЗЛП.

2. Знайти оптимальний план випуску продукції, що максимізує сумарний дохід та дослідити чутливість цільової функції до варіацій обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний дохід у разі збільшення на одиницю кожного з видів ресурсів.

3. Нехай перший ресурс b_1 зменшився до **54,** а другий b_2 зменшився до **45**. Як зміниться при цьому оптимальний розв'язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?

4. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск першого продукту $x_1 \geq 12$. Знайти новий оптимальний план.

5. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_1 = 3$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} = 2$, $a_{23} = 4$. Знайти оптимальний план за цієї умови і визначити, за якого значення c_3 виробництво третього виробу буде рентабельним.

Варіанти індивідуальних завдань для виконання

		C1	C2	A11	A12	A21	A22	B1	B2	C3
1.108	а	3	2	1	3	2	1	40	36	3
	б	1	5	2	8	3	3	60	32	4
	в	7	2	7	2	1	4	36	48	3
	г	4	8	4	1	7	3	55	42	4
1.109	а	4	2	1	4	3	1	48	36	3
	б	2	1	2	5	2	3	36	50	4
	в	5	10	2	7	1	4	58	65	3
	г	2	8	4	1	5	6	60	25	4
1.110	а	4	2	1	3	2	1	40	36	4
	б	3	1	2	4	1	6	36	50	3
	в	1	5	3	3	4	1	60	25	4
	г	5	3	4	1	2	7	30	70	3
1.111	а	1	2	3	2	1	4	36	24	4
	б	4	8	7	1	6	5	24	48	3
	в	7	5	5	2	3	1	40	65	4
	г	3	2	1	5	2	3	55	25	3
1.112	а	1	2	4	4	2	5	64	56	3
	б	3	4	2	3	1	5	56	48	4
	в	5	3	1	2	3	1	70	25	3
	г	2	3	3	1	3	2	40	64	4
1.113	а	4	2	1	1	2	1	72	48	3
	б	2	4	2	3	5	3	48	72	4
	в	3	7	7	6	1	2	25	60	3
	г	8	1	7	5	1	3	55	70	4
1.114	а	3	2	4	3	4	4	50	40	4
	б	9	2	1	5	2	3	40	65	3
	в	3	7	2	6	1	3	63	28	4
	г	4	1	3	6	4	1	71	35	3
1.115	а	3	2	2	5	4	1	72	54	3
	б	3	3	5	2	4	4	54	72	4
	в	5	1	1	3	1	2	70	36	3
	г	7	4	4	1	3	5	61	36	4

4 ЗАДАЧІ ПАРАМЕТРИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗЛПП)

4.1 Постановка задачі параметричного програмування

В розділі 3 було розглянуто, як змінюється оптимальний план задачі лінійного програмування, якщо змінюються коефіцієнти цільової функції чи компоненти вектора обмежень. Однак дослідження стосувалися лише визначення діапазону змін, у межах якого структура оптимального плану залишалась тією самою, до того ж кожного разу розглядали вплив зміни лише однієї складової [1, 11].

Однак на практиці трапляються випадки, коли коефіцієнти цільової функції чи компоненти вектора обмежень залежать від якогось одного чинника, наприклад часу, і потрібно знайти розв'язок задачі за будь-якої зміни цього показника, який називають ***параметром задачі***.

Параметричне програмування – це метод визначення залежності змін розв'язку задачі від зміни вектора коефіцієнтів цільової функції чи вектора обмежень.

В реальному житті виникають задачі, під час формалізації яких необхідно враховувати залежність коефіцієнтів математичної моделі від деяких параметрів. Змінюватися можуть або коефіцієнти цільової функції, або коефіцієнти системи обмежень, або елементи вектора обмежень, або усі перераховані параметри одночасно.

Задача полягає в тому, щоб вивчати поведінку оптимального плану за зміни вхідних даних залежно від параметрів.

Задачі математичного програмування, в яких вхідні дані залежать від деякого параметра, називаються задачами параметричного програмування.

Розглянемо випадки залежності вхідних даних від певного параметра на прикладі ЗЛП.

1. Якщо від параметра $\boldsymbol{t}$ лінійно залежать коефіцієнти цільової функції, то задача полягає в знаходженні для кожного значення параметра $\boldsymbol{t}$ з проміжку його зміни $[\alpha, \beta]$ максимального значення цільової функції:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}(c_i' + c_i'')\, x_i \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j\,, j = \overline{1,m},$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n},$$

де c_i', c_i'', a_{ij}, b_j – задані сталі числа

2. Якщо від параметра $\boldsymbol{t}$ лінійно залежать вільні члени системи обмежень, то задача полягає в знаходженні для кожного значення параметра $\boldsymbol{t}$ з проміжку його зміни $[\alpha, \beta]$ максимального значення лінійної функції:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i' \, x_i \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j' + b_j'' \cdot t, j = \overline{1, m},$$
$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n},$$

де b_j', b_j'', a_{ij}, c_i – задані сталі числа.

3. Якщо від параметра $\boldsymbol{t}$ лінійно залежать коефіцієнти цільової функції та вільні члени системи обмежень, то задача також полягає в знаходженні для кожного значення параметра $\boldsymbol{t}$ з проміжку його зміни $[\alpha, \beta]$ максимального значення цільової функції:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (c_i' + c_i'') \, x_i \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j' + b_j'' \cdot t, j = \overline{1, m},$$
$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

4. Якщо від параметра $\boldsymbol{t}$ лінійно залежать коефіцієнти цільової функції та коефіцієнти системи обмежень, то задача також полягає в знаходженні для кожного значення параметра $\boldsymbol{t}$ з проміжку його зміни $[\alpha, \beta]$ максимального значення цільової функції:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (c_i' + c_i'') \, x_i \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ji}' + a_{ji}'' \cdot t) x_i = b_j' + b_j'' \cdot t, j = \overline{1, m},$$
$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

4.2 Геометрична інтерпретація задач параметричного програмування

Алгоритм розв'язання задачі геометричним методом:

1. Приймають $\boldsymbol{t = \alpha}$ і розв'язують звичайну ЗЛП, тобто задачу знаходження максимуму цільової функції. Результат – знаходять оптимальну вершину на багатокутнику можливих розв’язків ЗЛП.

2. Знаходять усі значення параметра $\boldsymbol{t}$, для яких максимум $F(x, t)$ досягається у тій самій вершині. Знайдений відрізок виключають з відрізку $[\alpha, \beta]$. Для відрізка, що залишився знову розв'язують ЗЛП, тобто повертаються до п. 1. Так продовжується доти, доки весь відрізок $[\alpha, \beta]$ не буде розділено на частинні відрізки.

Оскільки на кожному кроці здійснюється перехід від однієї вершини багатокутника можливих розв’язків до іншої, а число їх скінченне і вони не можуть повторюватися, описаний алгоритм скінченний.

Приклад 4.1

$$F(x) = 4x_1 + (2+t)x_2 \rightarrow max.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 40. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

$$t \in [0, 8].$$

Розв'язання:

1) t = 0

$$F(x,0) = 4x_1 + (2+0)x_2 = 4x_1 + 2x_2.$$

Для знаходження області допустимих розв'язків побудуємо граничні прямі:

1) $l_1 : 2x_1 - 5x_2 = 10$, яка проходить через точки (0; -2) та (5; 0);

2) $l_2 : x_1 + x_2 = 5$, яка проходить через точки (0; 5) та (5; 0);

3) $l_3 : -x_1 + x_2 = 4$, яка проходить через точки (0; 4) та (-4; 0);

4) $l_4 : 4x_1 + 5x_2 = 40$, яка проходить через точки (0; 8) та (10; 0).

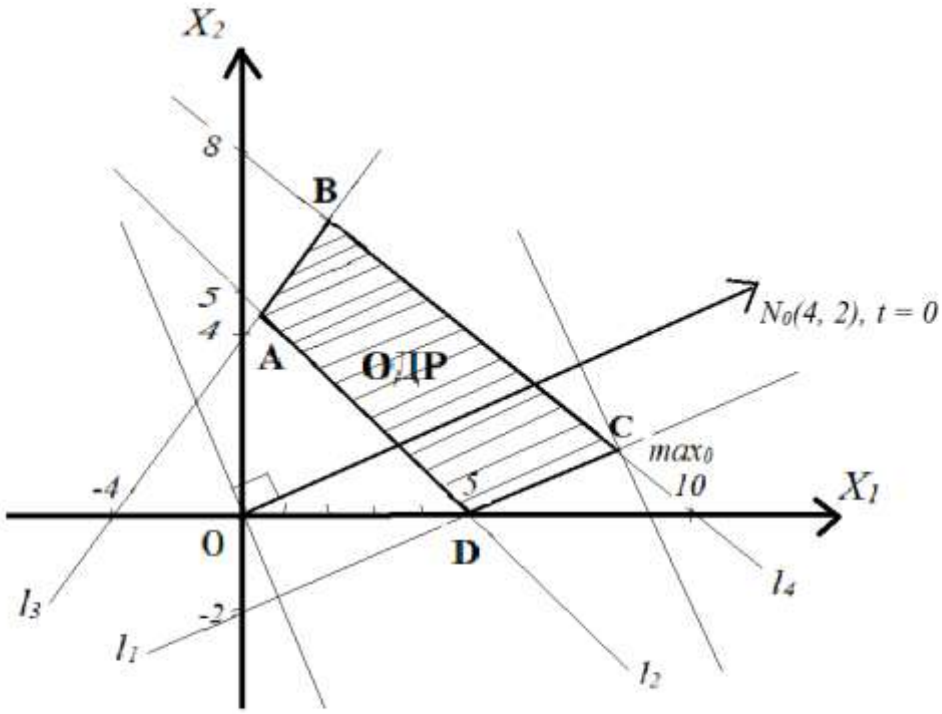


Рисунок 4.1 – Графічний розв'язок ЗЛП за умови t = 0

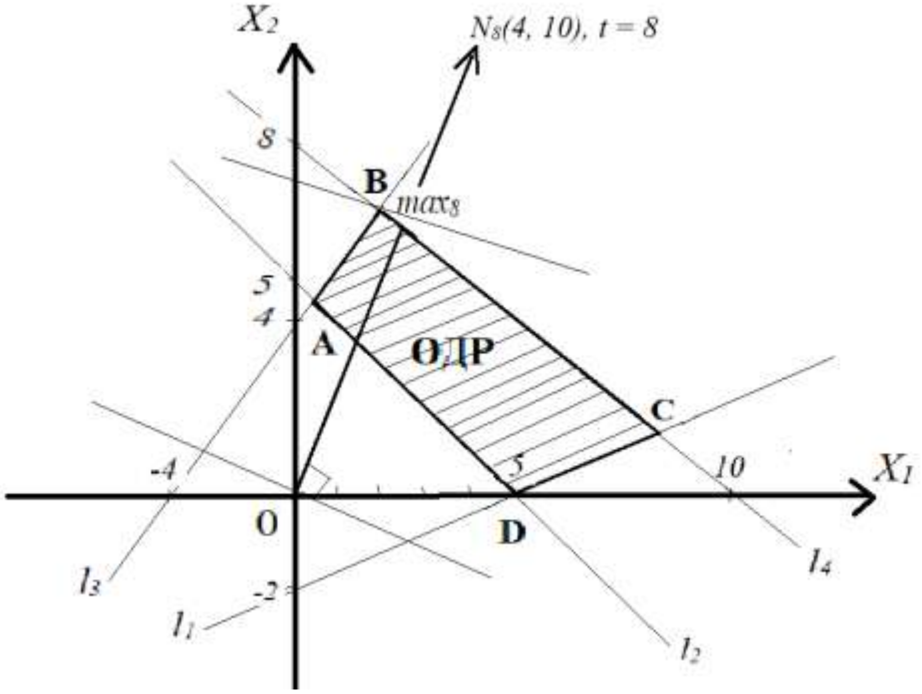


Рисунок 4.2 – Графічний розв’язок ЗЛП за t = 8

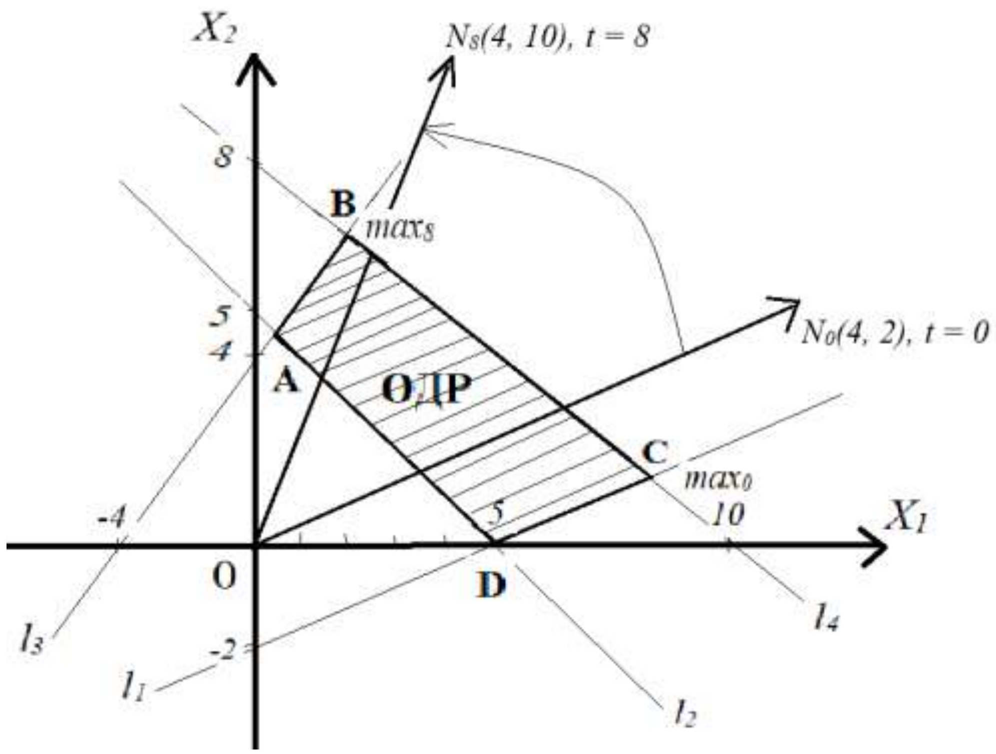


Рисунок 4.3 – Графічний розв’язок ЗЛП за умови $0 \leq t \leq 8$

Знайдемо відповідні оптимальні плани:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 = 40 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{25}{3}$$
$$x_2 = \frac{4}{3}$$

$$X_1^{opt} = (\frac{25}{3}, \frac{4}{3})$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 = 40 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{20}{9}$$
$$x_2 = \frac{56}{9}$$

$$X_2^{opt} = (\frac{20}{9}, \frac{56}{9})$$

Оскільки на проміжку t від 0 до 8 отримано різні оптимальні плани, необхідно знайти точку t зламу.

Можна зробити висновок, що оптимальний план X_1 не зміниться доти, доки перпендикуляр до цільової функції на цьому проміжку не стане паралельним обмеженню l_4. Тому розв'яжемо відповідне рівняння

$$\frac{4}{4} = \frac{2+t}{5},$$
t = 3.

Таким чином, для будь-якого $0 \leq t < 3$ задача має оптимальний план

$$X_1^{opt} = \left(\frac{25}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

за якого значення цільової функції дорівнює:

$$F_{max}(x,t) = \frac{108+4t}{3}.$$

Відповідно, для проміжку $3 \leq t \leq 8$ задача має оптимальний план

$$X_2^{opt} = \left(\frac{20}{9}, \frac{56}{9}\right),$$

за якого значення цільової функції дорівнює:

$$F_{max}(x,t) = \frac{192+56t}{9}.$$

4.3 Питання для самоконтролю

1. Які задачі математичного програмування називаються задачами параметричного програмування?
2. Наведіть математичну модель задачі параметричного програмування.
3. Сформулюйте алгоритм знаходження розв'язку задачі параметричного програмування геометричним методом.
4. Перерахуйте випадки залежності ЗЛП від певного параметра ***t***.
5. Чи є скінченним алгоритм знаходження розв'язку задачі параметричного програмування і від чого це залежить?

4.4 Завдання для виконання № 8. Розв'язування задач параметричного програмування

Згідно з заданим варіантом розв'язати задачу параметричного програмування графічно.

Варіанти завдань

Обмеження:
$$4x_1 + x_2 <= 16$$
$$2x_1 + 2x_2 <= 22$$
$$6x_1 + 3x_2 <= 36$$
$$x_1, x_2 >= 0$$

цільові функції ЗГІДНО З ВАРІАНТОМ:

I	$F = (2 - t)x_1 + (13 - t)x_2$	$t = 15 \div 25$
II	$F = (2 + t)x_1 + (13 + t)x_2$	$t = 0 \div 10$
III	$F = (1 + t)x_1 + (5 + t)x_2$	$t = 10 \div 15$
IV	$F = (10 - t)x_1 + (2- t)x_2$	$t = 8 \div 15$
V	$F = (7 + t)x_1 + (2 + t)x_2$	$t = 5 \div 15$
VI	$F = (7 - t)x_1 + (2 - t)x_2$	$t = 1 \div 14$
VII	$F = (2 + t)x_1 + (3 + t)x_2$	$t = -5 \div 5$
VIII	$F = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2$	$t = - 10 \div 0$
IX	$F = (2 - t)x_1 + (13 + t)x_2$	$t = -5 \div 10$
X	$F = (2 + t)x_1 + (7 - t)x_2$	$t = -2 \div 10$

5 СПЕЦІАЛЬНІ ЗЛП. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЯК РІЗНОВИД СПЕЦІАЛЬНИХ ЗЛП

5.1 Загальна постановка транспортної задачі

Транспортна (Т-задача) є однією з найбільш поширених спеціальних ЗЛП.

Перша постановка Т-задачі належить Ф. Хічкоку, тому в закордонній літературі її називають проблемою Хічкока.

Перший точний метод розв'язання Т-задачі розроблений Л. В. Канторовичем і М. К. Гавуріним [1, 2].

Нехай в пунктах $A_1, \ldots, A_m$ виготовляють деякий продукт, причому обсяг виробництва в пункті A_j становить a_j одиниць ($j = \overline{1,m}$). Припустимо, що цей продукт споживають в пунктах $B_1, \ldots, B_n$, а обсяг споживання в пункті B_i становить b_i одиниць ($i = \overline{1,n}$). Транспортування продукту можливе з кожного пункту постачання (виробництва) в будь-який пункт споживання.

Транспортні витрати на перевезення одиниці продукції з пункту A_j в пункт B_i становлять c_{ij}. Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, за якого запити усіх споживачів повністю задоволені, вся продукція з пунктів постачання вивезена і сумарні транспортні витрати мінімальні.

Нехай із деяких m пунктів відправлення $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (постачальники) потрібно перевезти вантаж у n пунктів призначення $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (споживачі). Відомі запаси пунктів відправлення й потреби у вантажі пунктів призначення, а також витрати на доставку одиниці вантажу від постачальника до споживача. Знайти такий план перевезень, щоб був вивезений весь вантаж, задоволені всі споживачі і загальні витрати на перевезення вантажу були мінімальними. Для запису математичної моделі транспортної задачі введемо такі позначення:

a_j – запаси вантажу в j-му пункті відправлення ($j = 1, 2, 3, \ldots, m$);

b_i – потреба у вантажі в i-му пункті призначення ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$);

X_{ij} – кількість одиниць вантажу, перевезеного від i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення;

c_{ij} – тарифи перевезення одиниці вантажу від j-го пункту відправлення до i-го пункту призначення.

Математична постановка задачі зводиться до знаходження мінімального значення функції

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to min \tag{5.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,m}), \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,n}), \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,n}\ , j = \overline{1,m}). \tag{5.4}$$

Оскільки змінні x_{ij} $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ задовольняють систему лінійних рівнянь (5.2) і (5.3) й умову невід'ємності (5.4), то забезпечується доставка необхідної кількості вантажу в кожний із пунктів призначення, вивезення наявного вантажу з усіх пунктів відправлення, а також не допускаються зворотні перевезення. Будь-який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (5.2) і (5.3), що визначається матрицею $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$, називається планом транспортної задачі. План $X^* = (x_{ij}^*)$ $(i = \overline{1,n};$ $j = \overline{1,m})$, за якого функція (5.1) X набуває свого мінімального значення, називається оптимальним планом транспортної задачі. Вхідні дані транспортної задачі оформляють у вигляді таблиці (табл. 5.1). У правому верхньому куті клітинок A_iB_j записують вартість перевезення одиниці вантажу з j-го пункту відправлення до i-го пункту призначення. Посередині кожної клітинки A_iB_j вносять кількість перевезеного вантажу з j-го пункту відправлення до i-го пункту призначення.

Таблиця 5.1 – Табличне подання транспортної задачі

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запас
	B_1	B_2	B_3	…	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
A_3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	…	C_{3n} X_{3n}	a_3
…	…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреба	b_1	B_2	b_3	…	b_n	

Етапи розв’язання транспортної задачі:

1. Визначається опорний план (допустиме базисне рішення) транспортної задачі.
2. Виконується перевірка опорного плану на оптимальність.
3. Виконується перехід від одного опорного плану до іншого або завершується задача оптимізації, якщо оптимальний план знайдено.

Існує багато методів знаходження оптимального плану транспортної задачі, серед яких широкого використання набули метод північно-західного кута для побудови початкового опорного плану і метод потенціалів, для його приведення до оптимального.

Отже, Т-задача є ЗЛП з $(n \times m)$ числом змінних і $(n+m)$ числом обмежень рівностей.

Змінні X_{ij} зручно задавати у вигляді матриці:

$$\mathbf{X} = \|x_{ij}\| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix}$$

5.2 Властивості Т-задачі

1. Для розв’язуваності Т-задачі необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови балансу:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (5.6)$$

тобто, щоб сумарний обсяг постачання дорівнював сумарному обсягу споживання.

2. Ранг системи обмежень (5.2 – 5.3) дорівнює $\boldsymbol{r = n + m - 1}$.

5.3 Двоїста Т-задача

Теорема 1: Т-задача завжди має розв'язок, і якщо

$$X_{\text{опт}} = \|x_{ij}\|,$$

$W_{\text{опт}} = \{v_{1\text{опт}}, v_{2\text{опт}}, \dots, v_{n\text{опт}}, -u_{1\text{опт}}, -u_{2\text{опт}}, \dots, -u_{m\text{опт}}\}$ – оптимальні розв'язки T і $\tilde{T}$ – задач, відповідно, то

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i v_{i\text{опт}} - \sum_{j=1}^{m} a_j u_{j\text{опт}},$$

де u_j – вартість оцінки продукції в пункті A_j,
v_i – вартість після перевезення в пункт B_i.

Теорема 2. Для оптимальності плану $X_{опт}$ Т-задачі необхідно та достатньо існування таких чисел $v_1, v_2, \dots, v_n$, що

$$u_j - v_i \le c_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} .$$

Водночас, якщо $x_{ij}^{(0)} > 0$, то $u_j - v_i = c_{ij}$.

5.4 Відкрита Т-задача

Існує ряд практичних задач, в яких умова балансу (5.6) не виконується. Такі моделі називають відкритими. Можливі 2 випадки:

1. $\sum_{j=1}^{m} a_j > \sum_{i=1}^{n} b_i$, (5.7)

2. $\sum_{j=1}^{m} a_j < \sum_{i=1}^{n} b_i$. (5.8)

У випадку (1) перевантаження запасу над потребою вводиться фіктивний *(n+1)*-й пункт споживання з потребою і відповідні тарифи перевезення вважаються такими, що дорівнюють нулю:

$$c_{j,n+1} = 0, j = \overline{1,m},$$

оскільки вантажі з цього пункту не перевозяться.

Тоді Т-задача стає закритою.

У випадку (2) перебільшення попиту над запасами вводиться фіктивний *(m+1)* – й пункт постачання із запасом вантажу

$$a_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{j=1}^{m} a_j,$$

і знову тарифи перевезення прирівнюються до нуля:

$$c_{m+1,i} = 0, i = \overline{1,n},$$

оскільки вантажі в цей пункт не перевозяться. Т-задача знову стає закритою.

5.5 Методи побудови опорних планів Т-задачі

Найбільш поширеними і простими у застосуванні методами побудови опорного плану транспортної задачі є:

– метод північно-західного кута;
– метод найменшої вартості;
– метод подвійної переваги;
– метод апроксимації Фогеля.

Суть цих методів полягає у тому, що опорний план знаходять послідовно за *(n + m – 1)* кроків, на кожному з яких у початковій таблиці задачі заповнюють одну клітинку, яку називають зайнятою. Заповнення однієї із клітинок повністю забезпечує задоволення потреб у вантажі одного з пунктів призначення або вивезення з одного із пунктів відправлення. У першому випадку тимчасово вилучається з подальшого розгляду стовпець, що містить заповнену на цьому кроці клітинку. У другому випадку тимчасово вилучається із розгляду рядок, що містить заповнену клітинку. Після виконання *(n + m – 2)* кроків має залишитися вільною лише одна клітинка, причому для неї запаси пункту відправлення дорівнюватимуть потребам пункту призначення. Заповнивши цю клітинку (*(n + m – 1)*-й крок), отримують шуканий опорний план.

Метод північно-західного кута. Під час знаходження опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута на кожному кроці розглядають перший пункт відправлення і перший пункт призначення з тих, що залишилися. Заповнення клітинок таблиці умов починають із лівої верхньої клітинки для невідомого x_{11} (північно-західний кут) і закінчують для невідомого x_{mn}.

Розглянемо використання методу північно-західного кута на конкретному прикладі.

Приклад 5.1. Чотири підприємства цього економічного району для виготовлення продукції використовують три види сировини A_i.

Потреби кожного з підприємств B_j: 30, 30, 10, 20 од., сировина розташована в трьох місцях і її запаси – 50, 30, 10 од., на кожне з підприємств сировина може завозитись з довільної бази.

Тарифи перевезень задаються матрицею C:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Скласти план перевезень, що мінімізує витрати на перевезення.

Транспортна задача задана в таблиці 5.2:

Таблиця 5.2 – Табличне подання транспортної задачі

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	30	30	10	20	

Побудову опорного плану методом північно-західного кута наведено в таблицях 5.3 – 5.8.

Таблиця 5.3 – Крок 1

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	30	10	20	

Таблиця 5.4 – Крок 2

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2 **20**	4	1	**50**
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	30	10	20	

Таблиця 5.5 – Крок 3

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2 **20**	4	1	**50**
A_2	2	3 **10**	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	10	20	

Таблиця 5.6 – Крок 4

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2 **20**	4	1	**50**
A_2	2	3 **10**	1 **10**	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	20	

Таблиця 5.7 – Крок 5

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2 **20**	4	1	**50**
A_2	2	3 **10**	1 **10**	5 **20**	**30**
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	20	

Таблиця 5.8 – Крок 6

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2 **20**	4	1	**50**
A_2	2	3 **10**	1 **10**	5 **10**	**30**
A_3	3	2	4	4 **10**	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**	

Таким чином, початковий опорний план перевезення побудований методом північно-західного кута має вигляд:

$$X_{on} = \begin{vmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

А сумарна вартість перевезення дорівнює:

$$F_{пер} = 1{\cdot}30 + 2{\cdot}20 + 3{\cdot}10 + 1{\cdot}10 + 5{\cdot}10 + 4{\cdot}10 = 190 \text{ у.о.}$$

Метод найменшої вартості. Під час знаходження опорного плану транспортної задачі методом найменшої (мінімальної) вартості першою заповнюють клітинку з найменшою вартістю перевезення. Якщо таких клітинок декілька – вибирають ту з них, що має більші потреби. Серед клітинок, що залишились, знову вибирають клітинку з найменшою вартістю перевезення тощо.

Розглянемо використання методу найменшої вартості на конкретному прикладі.

Приклад 5.2. Для транспортної задачі, заданої таблично (табл. 5.3), побудувати опорний план методом найменшої вартості (табл. 5.9 – 5.13):

Таблиця 5.9 – Крок 1

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	30	10	20	

Таблиця 5.10 – Крок 2

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2	4	1 **20**	**50**
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	30	10	**20**	

Таблиця 5.11 – Крок 3

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2	4	1 **20**	**50**
A_2	2	3	1 **10**	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	30	**10**	**20**	

Таблиця 5.12 – Крок 4

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2	4	1 **20**	**50**
A_2	2	3	1 **10**	5	30
A_3	3	2 **10**	4	4	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	30	**10**	**20**	

Таблиця 5.13 – Крок 5

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2	4	1 **20**	**50**
A_2	2	3 **20**	1 **10**	5	**30**
A_3	3	2 **10**	4	4	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**	

Побудова початкового опорного плану методом найменшої вартості завершена. Опорний план має вигляд:

$$X_{оп} = \begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

А сумарна вартість перевезення дорівнює:

$$F_{пер} = 1 \cdot 30 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 140 \text{ у.о.}$$

Метод подвійної переваги. Під час знаходження опорного плану транспортної задачі методом подвійної переваги спочатку в кожному рядку і кожному стовпці помічають клітинку з найменшою вартістю перевезення і позначають, наприклад, знаком «v». Потім за описаним вище правилом насамперед заповнюють клітинки, позначені подвійним знаком «vv», потім ті, що мають один знак «v», останніми – всі інші у порядку зростання вартості перевезення.

Розглянемо використання методу подвійної переваги на конкретному прикладі.

Приклад 5.3. Для транспортної задачі, заданої таблично (табл. 5.3), побудувати опорний план методом подвійної переваги (табл. 5.14 – 5.20):

Таблиця 5.14 – Крок 1

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **v**	2	4	1	50
A_2	2	3	1 **v**	5	30
A_3	3	2 **v**	4	4	10
ПОТРЕБИ	30	30	10	20	

Таблиця 5.15 – Крок 2

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A1	1 **vv**	2 **v**	4	1 **v**	50
A2	2	3	1 **vv**	5	30
A3	3	2 **v**	4	4	10
ПОТРЕБИ	30	30	10	20	

Таблиця 5.16 – Крок 3

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A1	1 **vv** **30**	2 **v**	4	1 **v**	50
A2	2	3	1 **vv**	5	30
A3	3	2 **v**	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	30	10	20	

Таблиця 5.17 – Крок 4

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A1	1 **vv** **30**	2 **v**	4	1 **v**	50
A2	2	3	1 **vv** **10**	5	30
A3	3	2 **v**	4	4	10
ПОТРЕБИ	**30**	30	**10**	20	

Таблиця 5.18 – Крок 5

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A1	1 **vv** **30**	2 **v**	4	1 **v** **20**	**50**
A2	2	3	1 **vv** **10**	5	30
A3	3	2 **v**	4	4	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	30	**10**	**20**	

Таблиця 5.19 – Крок 6

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A1	1 **vv** **30**	2 **v**	4	1 **v** **20**	**50**
A2	2	3	1 **vv** **10**	5	30
A3	3	2 **v** **10**	4	4	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	30	**10**	**20**	

Таблиця 5.20 – Крок 7

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A1	1 **vv** **30**	2 **v**	4	1 **v** **20**	**50**
A2	2	3 **20**	1 **vv** **10**	5	**30**
A3	3	2 **v** **10**	4	4	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**	

Побудова початкового опорного плану методом подвійної переваги завершена. Опорний план має вигляд:

$$X_{оп} = \begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

А сумарна вартість перевезення дорівнює:

$$F_{пер} = 1\cdot 30 + 1\cdot 20 + 3\cdot 20 + 1\cdot 10 + 2\cdot 10 = 140 \text{ у.о.}$$

Метод апроксимації Фогеля. Під час визначення опорного плану Т-задачі методом апроксимації Фогеля на кожній з ітерації по всіх стовпцях і по всіх рядках знаходять різницю між двома записаними в них мінімальними тарифами. Ці різниці записують у спеціально відведені для цього рядки та стовпці в таблиці умови задачі. Серед вказаних різниць вибирають **максимальну різницю**. У рядку або стовпці, якому ця різниця відповідає, визначають мінімальний тариф. Клітинку, в якій він записаний, заповнюють на цій ітерації.

Якщо мінімальний тариф однаковий для декількох клітинок цього рядка (стовпця), то для заповнення вибирають клітинку, яка розміщена в стовпці (рядку), що відповідає найбільшій різниці між двома мінімальними тарифами, що знаходяться в цьому стовпці (рядку).

Розглянемо використання методу апроксимації Фогеля на конкретному прикладі.

Приклад 5.4: Для транспортної задачі, заданої таблично (табл. 5.3), побудувати опорний план методом апроксимації Фогеля (табл. 5.21 – 5.29).

Таблиця 5.21 – Крок 1

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
ПОТРЕБИ	30	30	10	20	

Таблиця 5.21 – Крок 2

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1	2	4	1	50	*1*
A_2	2	3	1	5	30	*1*
A_3	3	2	4	4	10	*1*
ПОТРЕБИ	30	30	10	20		
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	*3*	*3*		

Таблиця 5.23 – Крок 3

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1	2	4	1	50	*1*
A_2	2	3	1 **10**	5	30	*1*
A_3	3	2	4	4	10	*1*
ПОТРЕБИ	30	30	**10**	20		
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	***3***	*3*		

Таблиця 5.24 – Крок 4

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках	
	B_1	B_2	B_3	B_4			
A_1	1	2	4	1	50	*1*	*1*
A_2	2	3	1 **10**	5	30	*1*	*1*
A_3	3	2	4	4	10	*1*	*1*
ПОТРЕБИ	30	30	**10**	20			
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	***3***	*3*			
	1	*1*	**-**	*3*			

Таблиця 5.25 – Крок 5

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках	
	B_1	B_2	B_3	B_4			
A_1	1	2	4	1	50	*1*	*1*
A_2	2	3	1 **10**	5	30	*1*	*1*
A_3	3	2	4	4	10	*1*	*1*
ПОТРЕБИ	30	30	**10**	20			
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	***3***	*3*			
	1	*1*	-	***3***			

Таблиця 5.26 – Крок 6

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках		
	B_1	B_2	B_3	B_4				
A_1	1	2	4	1 **20**	50	*1*	*1*	*1*
A_2	2	3	1 **10**	5	30	*1*	*1*	*1*
A_3	3	2	4	4	10	*1*	*1*	*1*
ПОТРЕБИ	30	30	**10**	**20**				
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	***3***	*3*				
	1	*1*	-	***3***				
	1	*1*	-	-				

Таблиця 5.27 – Крок 7

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках		
	B_1	B_2	B_3	B_4				
A_1	1 **30**	2	4	1 20	**50**	*1*	*1*	*1*
A_2	2	3	1 10	5	30	*1*	*1*	*1*
A_3	3	2	4	4	10	*1*	*1*	*1*
ПОТРЕБИ	**30**	30	10	20				
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	*3*	*3*				
	1	*1*	-	*3*				
	1	*1*	-	-				

Таблиця 5.28 – Крок 8

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках			
	B_1	B_2	B_3	B_4					
A_1	1 **30**	2	4	1 20	**50**	*1*	*1*	*1*	-
A_2	2	3	1 10	5	30	*1*	*1*	*1*	*2*
A_3	3	2	4	4	10	*1*	*1*	*1*	*2*
ПОТРЕБИ	**30**	30	10	20					
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	*3*	*3*					
	1	*1*	-	*3*					
	1	*1*	-	-					
	-	*1*	-	-					

Таблиця 5.29 – Крок 9

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	Різниці по рядках				
	B_1	B_2	B_3	B_4						
A_1	1 **30**	2	4	1 **20**	**50**	*1*	*1*	*1*	-	-
A_2	2	3 **20**	1 **10**	5	**30**	*1*	*1*	*1*	***2***	-
A_3	3	2 **10**	4	4	**10**	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**						
Різниці по стовпцях	*1*	*1*	***3***	*3*						
	1	*1*	-	***3***						
	1	*1*	-	-						
	-	*1*	-	-						
	-	-	-	-						

Побудова початкового опорного плану методом апроксимації Фогеля завершена. Опорний план має вигляд:

$$X_{оп} = \begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

А сумарна вартість перевезення дорівнює:

$$F_{пер} = 1{\cdot}30 + 1{\cdot}20 + 3{\cdot}20 + 1{\cdot}10 + 2{\cdot}10 = 140 \text{ у.о.}$$

5.6 Розв'язання Т-задачі за виродженого опорного плану

Опорний план називається виродженим, якщо число його ненульових перевезень k менше рангу матриці обмежень.

В процесі побудови опорного (початкового) плану або під час його поліпшення черговий план може виявитися виродженим.

Нехай початковий опорний план є виродженим. Тоді вибирають деякі нульові елементи матриці X_0 як базисні так, щоб водночас не порушувалася умова базисного плану.

Число цих елементів $l = (n+m-1) - k$. Ці елементи замінюють на $\varepsilon > 0$ (ε – довільне, нескінченно мале число) і розглядають їх як звичайні базисні елементи плану.

Задачу розв'язують як невироджену, а в останньому (оптимальному) плані замість ε пишуть нулі.

Вироджений план отримують під час побудови плану X_{k+1} на базі X_k, якщо ланка в плані X_k містить не менше двох мінімальних непарних елементів. У такому випадку прирівнюють до нуля тільки один з цих елементів, а інші X_{k+1} замінюють на ε, і далі розв'язують задачу як невироджену.

5.7 Побудова оптимального опорного плану Т-задачі. Метод потенціалів

Алгоритм методу потенціалів для побудови оптимального плану Т-задачі:

1. Знаходять опорний план, одним з методів побудови опорного плану. У цьому разі число заповнених клітинок має дорівнювати $n+m-1$.
2. Знаходять потенціали u_i і v_j пунктів споживання і постачання, відповідно.
3. Для кожної вільної клітинки визначають число s_{ij} за формулою:

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Якщо серед чисел s_{ij} нема від'ємних, то отримано оптимальний план Т-задачі; якщо ж є від'ємні числа s_{ij}, то переходять до нового опорного плану.

4. Серед від'ємних чисел s_{ij} вибирають максимальне від'ємне, будують для вільної клітинки, якій воно відповідає, цикл перерахунку і виконують зсув по циклу перерахунку.

Цикл перерахунку – замкнений контур, вершини якого знаходяться в зайнятих клітинках (крім першої). Причому лінії цього контуру можуть бути строго вертикальними або горизонтальними. Деякі варіанти циклів перерахунку зображено на рисунку 5.1.

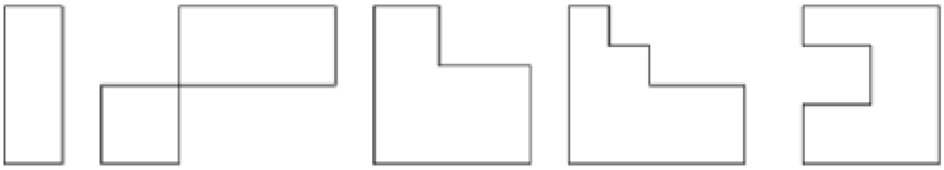


Рисунок 5.1 – Приклади циклів перерахунку у випадку покращення опорного плану

5. Отриманий опорний план перевіряють на оптимальність, тобто знову повторюють усі дії, починаючи з пункту 2.

Приклад 5.5. Для опорного плану, побудованого методом північно-західного кута (табл. 5.8) побудуємо оптимальний план методом потенціалів.

Обчислимо потенціали u_i , v_j за допомогою співвідношення $u_i + v_j = c_{ij}$ для заповнених клітин:

$$u_1 + v_1 = c_{11},$$
$$u_1 + v_2 = c_{12},$$
$$u_2 + v_2 = c_{22},$$
$$u_2 + v_3 = c_{23},$$
$$u_2 + v_4 = c_{24},$$
$$u_3 + v_4 = c_{34}.$$

Щоб розв’язати цю систему, вважатимемо, що $u_1 = 0$,

$$V_1 = c_{11} – u_1 = 1 – 0 = 1,$$
$$V_2 = c_{12} – u_1 = 2 – 0 = 2,$$
$$U_2 = c_{22} – v_2 = 3 – 1 = 2,$$
$$V_3 = c_{23} – u_2 = 1 – 1 = 0,$$
$$V_4 = c_{24} – u_2 = 5 – 1 = 4,$$
$$U_3 = c_{34} – v_4 = 4 – 4 = 0.$$

Таблиця 5.30 – Розраховані потенціали для початкового опорного плану

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 **30**	2 **20**	4	1	**50**	$U_1 = 0$
A_2	2	3 **10**	1 **10**	5 **10**	**30**	$U_2 = 1$
A_3	3	2	4	4 **10**	**10**	$U_3 = 0$
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**		
	$V_1 = 1$	$V_2 = 2$	$V_3 = 0$	$V_4 = 4$		

Обчислимо s_{ij} співвідношення $s_{ij} = c_{ij} – (u_i + v_j)$ для незаповнених клітинок в таблиці 5.30

$$s_{13} = c_{13} – (u_1 + v_3) = 4 – (0 + 0) = 4,$$
$$s_{14} = c_{14} – (u_1 + v_4) = 1 – (0 + 4) = -3,$$
$$s_{21} = c_{21} – (u_2 + v_1) = 2 – (1 + 1) = 0,$$
$$s_{31} = c_{31} – (u_3 + v_1) = 3 – (0 + 1) = 2,$$
$$s_{32} = c_{32} – (u_3 + v_2) = 2 – (0 + 2) = 0,$$
$$s_{33} = c_{33} – (u_3 + v_3) = 4 – (0 + 0) = 4.$$

Опорний план неоптимальний, оскільки значення s_{14} є від'ємним. Тому визначається цикл перерахунку і будується новий опорний план. І далі новий опорний план перевіряється на оптимальність методом потенціалів.

Таблиця 5.31 – Цикл перерахунку 1 для побудови нового опорного плану

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2 **20** «–»	4	1 «+»	**50**
A_2	2	3 **10** «+»	1 **10**	5 **10** «–»	**30**
A_3	3	2	4	4 **10**	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**	

Таблиця 5.32 – Новий опорний план

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 **30**	2 **10**	4	1 **10**	**50**
A_2	2	3 **20**	1 **10**	5	**30**
A_3	3	2	4	4 **10**	**10**
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**	

$$F_{пер} = 1{\cdot}30 + 2{\cdot}10 + 1{\cdot}10 + 3{\cdot}20 + 1{\cdot}10 + 4{\cdot}10 = 170 \text{ у.о.}$$

Отримано новий опорний план, що забезпечує вартість перевезення *170 у.о.* Перевіримо цей план на оптимальність методом потенціалів.

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_2 = c_{12} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$u_2 = c_{22} - v_2 = 3 - 2 = 1,$$
$$v_3 = c_{23} - u_2 = 1 - 1 = 0,$$
$$u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 1 = 3.$$

$$s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 4 - (0 + 0) = 4,$$
$$s_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 2 - (1 + 1) = 0,$$
$$s_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 5 - (1 + 1) = 3,$$
$$s_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 3 - (3 + 1) = -1,$$
$$s_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 2 - (3 + 2) = -3,$$
$$s_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 4 - (3 + 0) = 1.$$

План також неоптимальний, оскільки s_{31} і s_{32} від'ємні.

Будуємо новий цикл перерахунку і отримуємо новий опорний план, який також перевіряється на оптимальність методом потенціалів.

Таблиця 5.33 – Цикл перерахунку 2 для побудови нового опорного плану

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 **30**	2 **10** «–»	4	1 **10** «+»	**50**	$U_1 = 0$
A_2	2	3 **20**	1 **10**	5	**30**	$U_2 = 1$
A_3	3	2 «+»	4	4 **10** «–»	**10**	$U_3 = 3$
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**		
	$V_1 = 1$	$V_2 = 2$	$V_3 = 0$	$V_4 = 1$		

Таблиця 5.34 – Новий опорний план

Пункти постачання	Пункти споживання				ЗАПАСИ	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	1 **30**	2	4	1 **20**	**50**	$U_1 = 0$
A_2	2	3 **20**	1 **10**	5	**30**	$U_2 = 0$
A_3	3	2 **10**	4	4	**10**	$U_3 = -1$
ПОТРЕБИ	**30**	**30**	**10**	**20**		
	$V_1 = 1$	$V_2 = 3$	$V_3 = 1$	$V_4 = 1$		

$$F_{пер} = 1*30 + 1*20 + 3*20 + 1*10 + 2*10 = 140 \text{ у.о.}$$

Отримано новий опорний план, що забезпечує вартість перевезення *140 у.о.* Перевіримо цей план на оптимальність методом потенціалів.

$$s_{12} = c_{12} – (u_1 + v_2) = 2 – (0 + 0) = 4,$$
$$s_{13} = c_{13} – (u_1 + v_3) = 2 – (1 + 1) = 0,$$
$$s_{21} = c_{21} – (u_2 + v_1) = 5 – (1 + 1) = 3,$$
$$s_{24} = c_{24} – (u_2 + v_4) = 3 – (3 + 1) = -1,$$
$$s_{31} = c_{31} – (u_3 + v_1) = 2 – (3 + 2) = -3,$$
$$s_{33} = c_{33} – (u_3 + v_3) = 4 – (3 + 0) = 1,$$
$$s_{34} = c_{34} – (u_3 + v_4) = 4 – (3 + 0) = 1.$$

Оскільки серед знайдених значень s_{ij} немає від’ємних, то знайдений опорний план є оптимальним:

$$X_{опт} = \begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а вартість перевезення становить $F_{пер}$ = *140 у.о.* і вона є мінімальною. Отже, Т-задача розв’язана.

5.8 Питання для самоконтролю

1. Опишіть економіко-математичну модель транспортної задачі.
2. Запишіть транспортну задачу в матричній формі і вкажіть її властивості.
3. Назвіть методи побудови початкового опорного плану транспортної задачі. У чому полягає їх суть?
4. Який критерій оптимальності для транспортної задачі?
5. Наведіть математичну та економічну інтерпретації методу потенціалів, що застосовується для розв'язання транспортної задачі.
6. Як здійснити перехід до іншого опорного плану?
7. Які властивості має контур перерозподілу?
8. За яким критерієм визначається обсяг вантажу, який можна перерозподілити за контуром перерозподілу?
9. Як обчислити зменшення цільової функції, яке відбувається завдяки переходу до нового опорного плану?
10. Як розв'язати транспортну задачу у випадку виродження?
11. Для розв'язання якої проблеми застосовуються додаткові змінні в моделі транспортної задачі?
12. Для розв'язання якої проблеми застосовуються фіктивні змінні в моделі транспортної задачі?
13. Який план транспортної задачі називається оптимальним?

14. Яка умова закритості транспортної задачі?

15. Які транспортні задачі називають відкритими?

16. Яким чином можна від відкритої транспортної задачі перейти до закритої?

17. Яким вибирається тариф перевезення від фіктивного постачальника?

18. Чому дорівнюють запаси фіктивного постачальника?

19. Чому дорівнюють потреби фіктивного споживача?

20. Сформулюйте суть методів побудови опорного плану транспортної задачі.

21. Сформулюйте алгоритм методу північно-західного кута.

22. Сформулюйте алгоритм методу найменшої вартості.

23. Сформулюйте алгоритм методу подвійної переваги.

24. Сформулюйте алгоритм методу апроксимації Фогеля.

25. Дайте означення потенціалу.

26. Яку найбільшу кількість альтернативних планів може мати транспортна задача?

27. Наведіть приклади економічних задач, для яких доцільно використовувати алгоритми та методи розв'язання транспортної задачі.

5.8 Завдання до СРС

Розв’язання транспортної задачі за критерієм часу.

Допоміжна література [1, 5].

5.10 Завдання для виконання № 9. Розробка алгоритму і програми для розв’язання транспортної ЗЛП методом потенціалів.

Мета: набути практичних навичок побудови опорного плану транспортної задачі різними методами та зведення його до оптимального методом потенціалів, а також програмної реалізації розв’язання транспортної задачі (ТЗ).

Порядок виконання роботи

1. Згідно з заданим варіантом практично розв’язати транспортну задачу, а саме:

1) побудувати опорний план ТЗ чотирма методами (методом північно-західного кута, методом мінімальної вартості, методом подвійної позначки, методом апроксимації Фогеля);

2) вибрати опорний план, значення F_i якого є найменшим;

3) перевірити побудований опорний план на оптимальність методом потенціалів:

- якщо опорний план не є оптимальним, то за допомогою методу потенціалів будуємо оптимальний план;

- якщо опорний план є оптимальним, то беремо відмінний від нього опорний план і застосовуючи метод потенціалів приводимо його до оптимального;

2. Розробити алгоритм та програму для розв'язання ТЗ;
3. Провести тестування розробленої програми згідно з заданим варіантом;
4. За результатами виконання роботи оформити звіт.

Зміст звіту

1. Титульний лист за вимогою вищої школи.
2. Мета, варіант завдання.
3. Практичні результати виконання завдання.
4. Схема програми, що реалізує розв'язання ТЗ.
5. Опис програми.
6. Результати тестування розробленої програми.
7. Висновки за результатами роботи.
8. Додаток 1. Інструкція користувача до розробленої програми.
9. Додаток 2. Лістинг розробленої програми.

Варіанти завдань [3]

1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1. 20	B_2. 60	B_3. 40
A_1. 15	1	2	3
A_2. 45	4	3	5
A_3. 60	4	3	6

2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1. 35	B_2. 45	B_3. 50
A_1. 25	4	2	3
A_2. 40	4	7	9
A_3. 65	1	2	7

3

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1. 25	B_2. 30	B_3. 35
A_1. 35	5	2	4
A_2. 20	3	6	9
A_3. 35	4	5	1

4

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1. 15	B_2. 40	B_3. 10
A_1. 30	2	9	6
A_2. 10	7	3	5
A_3. 25	5	4	9

5

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 30	B_2, 55	B_3, 35
A_1, 25	7	6	5
A_2, 55	6	2	4
A_3, 40	3	1	5

6

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 50	B_3, 10
A_1, 10	5	1	4
A_2, 25	6	9	3
A_3, 45	2	6	8

7

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 10	B_3, 70
A_1, 50	3	5	2
A_2, 85	4	6	1
A_3, 20	8	9	7

8

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 30	B_3, 70
A_1, 20	6	9	4
A_2, 60	3	1	5
A_3, 45	7	1	4

9

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 45	B_3, 50
A_1, 25	1	4	6
A_2, 40	9	3	2
A_3, 65	7	9	5

10

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 75	B_3, 25
A_1, 55	8	3	9
A_2, 20	4	7	2
A_3, 40	1	5	6

11

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 15	B_3, 65
A_1, 25	5	1	4
A_2, 55	6	9	3
A_3, 40	2	6	8

12

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 25	B_3, 55
A_1, 50	2	9	6
A_2, 85	7	3	5
A_3, 20	4	4	1

13

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1,55	B_2, 15	B_3, 10
A_1, 10	7	6	5
A_2, 25	6	2	4
A_3, 45	3	1	5

14

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 10	B_3, 10
A_1, 30	6	9	4
A_2, 10	1	7	5
A_3, 25	8	5	7

15

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 10	B_2, 35	B_3, 85
A_1,	25	4	2	3
A_2,	40	5	4	3
A_3,	65	5	7	4

16

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 35	B_2, 40	B_3, 25
A_1,	65	10	5	8
A_2,	15	6	9	5
A_3,	20	2	4	7

17

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 35	B_2, 65	B_3, 20
A_1,	20	4	6	9
A_2,	85	4	5	7
A_3,	15	6	8	4

18

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 10	B_2, 75	B_3, 30
A_1,	50	2	5	3
A_2,	40	6	8	5
A_3,	25	9	6	4

19

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 25	B_2, 10	B_3, 55
A_1,	35	7	1	6
A_2,	40	1	5	9
A_3,	15	4	5	7

20

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 85	B_2, 30	B_3, 30
A_1,	25	2	5	8
A_2,	50	4	6	5
A_3,	70	7	5	3

21

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 65	B_2, 15	B_3, 55
A_1,	55	8	2	4
A_2,	45	6	5	3
A_3,	25	1	5	7

22

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 10	B_2, 20	B_3, 35
A_1,	25	2	4	2
A_2,	30	3	6	8
A_3,	10	8	4	4

23

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 80	B_2, 15	B_3, 45
A_1,	50	9	5	6
A_2,	65	3	4	6
A_3,	25	4	2	1

24

Пункти відправлення, запаси		Пункти призначення, потреби		
		B_1, 20	B_2, 30	B_3, 65
A_1,	60	7	4	6
A_2,	75	8	4	2
A_3,	20	6	7	5

25

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 25	B_3, 55
A_1, 40	8	5	4
A_2, 80	6	8	5
A_3, 25	2	5	1

26

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 40	B_3, 20
A_1, 20	3	5	2
A_2, 10	4	6	1
A_3, 55	8	9	7

27

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 10	B_3, 40
A_1, 55	6	9	4
A_2, 15	3	1	7
A_3, 25	6	8	2

28

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 55	B_3, 35
A_1, 85	4	2	3
A_2, 30	5	4	3
A_3, 50	5	7	1

5.11 Завдання для виконання № 10. Розв’язання відкритих транспортних задач (ТЗ)

1. Отримати варіант індивідуального завдання у викладача.
2. Звести задану відкриту ТЗ до закритої ТЗ.
3. Побудувати опорний план методом північно-західного кута.
4. Методом потенціалів звести побудований опорний план до оптимального.

Варіанти завдань [3]

1

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 55	B_2, 25	B_3, 35
A_1, 40	2	5	8
A_2, 45	4	6	5
A_3, 25	3	1	5

2

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 75	B_3, 25
A_1, 15	8	2	4
A_2, 10	6	5	3
A_3, 65	7	5	9

3

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 65	B_3, 50
A_1, 85	7	4	6
A_2, 35	8	4	2
A_3, 20	6	7	5

4

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 20	B_2, 45	B_3, 60
A_1, 40	3	8	5
A_2, 15	1	5	4
A_3, 50	2	3	5

5

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 85	B_2, 30	B_3, 40
A_1, 55	3	6	8
A_2, 10	5	1	3
A_3, 35	2	1	7

6

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 15	B_3, 55
A_1, 55	9	1	2
A_2, 35	4	7	3
A_3, 65	6	7	2

7

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 50	B_2, 70	B_3, 65
A_1, 85	4	5	7
A_2, 75	9	3	9
A_3, 45	6	4	2

8

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 25	B_3, 60
A_1, 25	6	8	5
A_2, 35	9	6	4
A_3, 30	5	2	8

9

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 25	B_2, 15	B_3, 50
A_1, 10	5	9	8
A_2, 30	3	5	6
A_3, 40	4	5	4

10

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 20	B_3, 10
A_1, 40	10	6	5
A_2, 15	7	5	3
A_3, 25	8	4	1

11

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 20	B_3, 15
A_1, 15	6	5	3
A_2, 10	3	3	1
A_3, 55	5	9	6

12

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 25	B_3, 30
A_1, 85	3	6	8
A_2, 25	8	4	4
A_3, 10	2	2	5

13

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 55	B_3, 65
A_1, 40	4	7	5
A_2, 30	1	5	2
A_3, 30	3	4	2

14

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 15	B_2, 35	B_3, 65
A_1, 40	8	4	2
A_2, 40	6	1	3
A_3, 25	6	9	5

15

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 50	B_2, 40	B_3, 45
A_1, 50	6	8	5
A_2, 35	2	1	3
A_3, 65	5	6	5

16

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 75	B_2, 10	B_3, 15
A_1, 45	4	6	1
A_2, 15	8	9	7
A_3, 20	5	3	9

17

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 65	B_2, 30	B_3, 45
A_1, 30	3	1	5
A_2, 25	6	8	5
A_3, 50	7	1	5

18

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 25	B_3, 40
A_1, 65	5	4	3
A_2, 30	5	7	4
A_3, 35	3	6	3

19

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 30	B_2, 50	B_3, 55
A_1, 75	9	1	2
A_2, 60	4	7	3
A_3, 25	6	8	8

20

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 35	B_3, 40
A_1, 80	1	6	5
A_2, 40	6	2	4
A_3, 55	3	1	5

21

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 15	B_3, 30
A_1, 75	3	1	1
A_2, 25	7	9	4
A_3, 35	2	4	10

22

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 40	B_2, 65	B_3, 75
A_1, 85	2	2	6
A_2, 50	5	9	5
A_3, 25	1	2	3

23

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 80	B_2, 35	B_3, 45
A_1, 70	7	8	2
A_2, 55	3	2	1
A_3, 25	5	8	4

24

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 70	B_2, 50	B_3, 45
A_1, 65	4	4	8
A_2, 55	2	1	3
A_3, 25	6	5	4

25

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 35	B_2, 50	B_3, 15
A_1, 15	7	5	3
A_2, 10	1	3	3
A_3, 50	2	2	8

26

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 50	B_3, 35
A_1, 55	8	1	1
A_2, 60	9	7	6
A_3, 15	6	4	2

27

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 10	B_2, 55	B_3, 75
A_1, 40	9	2	2
A_2, 40	1	4	6
A_3, 25	6	7	5

28

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 60	B_3, 15
A_1, 25	8	8	3
A_2, 35	1	2	3
A_3, 30	7	8	9

29

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 45	B_2, 60	B_3, 20
A_1, 40	8	4	2
A_2, 15	3	1	1
A_3, 50	7	6	8

30

Пункти відправлення, запаси	Пункти призначення, потреби		
	B_1, 60	B_2, 65	B_3, 40
A_1, 45	1	2	4
A_2, 50	4	9	1
A_3, 25	3	5	10

6 ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

6.1 Постановка задачі цілочисельного лінійного програмування (ЗЦЛП)

Екстремальна задача, змінні якої набувають лише цілих значень, називається задачею цілочисельного лінійного програмування (ЗЦЛП) [1, 2, 5, 6, 8].

У ЗЦЛП як цільова функція, так і нерівності в системі обмежень можуть бути лінійними, нелінійними, змішаними.

Математична модель основної ЗЦЛП, у якій змінні можуть бути лише цілими числами, має вигляд (6.1) – (6.4):

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \max\,(min) \tag{6.1}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j \ \left(j = \overline{1, m}\right), \tag{6.2}$$

$$x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1, n}\right), \tag{6.3}$$

$$x_i \text{ – цілі.} \tag{6.4}$$

6.2 Економічна інтерпретація ЗЦЛП

Приклад 6.1 [3]. Для обладнання нової виробничої лінії виділено 35 тис. грн. Підприємство має можливість замовити обладнання двох типів. Обладнання I виду коштує 10 тис. грн, а II виду – 6 тис. грн. Придбання одиниці обладнання I виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 4 од., а одного комплекту обладнання II виду – на 5 од. Для обладнання 1 виду потрібна площа розміром, не більшим ніж 4 м^2. Визначити такий набір додаткового обладнання, який дасть можливість максимально збільшити випуск продукції.

Складемо математичну модель задачі.

Припустимо, що підприємство придбає x_1 комплектів обладнання I виду і x_2 комплектів обладнання II виду. Тоді змінні x_1 і x_2 мають задовольняти такі нерівності:

$$\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 \leq 35, \\ \qquad x_1 \leq 4. \end{cases} \tag{6.5}$$

Якщо підприємство придбає вказану кількість обладнання, то загальне збільшення випуску продукції становитиме:

$$F(x) = 4x_1 + 5x_2. \tag{6.6}$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть набувати лише цілих невід’ємних значення, тобто

$$x_1, x_2 \leq 0, \tag{6.7}$$

$$x_1, x_2 \text{ – цілі.} \tag{6.8}$$

Таким чином, приходимо до такої математичної задачі: знайти максимальне значення лінійної функції (6.6) за виконання умов (6.5), (6.7) і (6.8).

Оскільки невідомі можуть набувати тільки цілих значень, то ця задача є задачею цілочисельного програмування. Розглянемо методи розв’язування ЗЦЛП.

6.3 Графічна інтерпретація розв'язування ЗЦЛП

Оскільки число невідомих задачі дорівнює двом, то розв’язок задачі можна знайти, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Для цього насамперед побудуємо багатокутник розв’язків задачі, яка полягає у визначенні максимального значення лінійної функції (6.6) при виконанні умов (6.5) і (6.7) без врахування умови цілочисельності розв’язків (6.8).

Граничні прямі для побудови області допустимих розв’язків D мають вигляд:

1) $l_1:\ 6x_1 + 5x_2 = 30$, яка проходить через точки (0;6) та (5;0);
2) $l_2:\ x_2 = 3$;
3) $l_3: x_1 = 0$;
4) $l_4:\ x_2 = 0$.

Врахувавши, що обмеженнями є система нерівностей, визначимо частини півплощин, що задовольняють їх розв’язок та знайдемо спільну область допустимих розв’язків – область D.

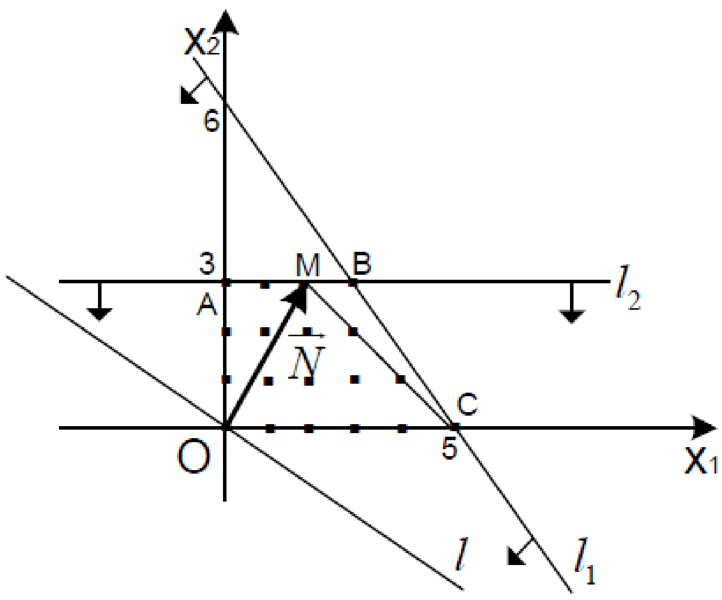


Рисунок 6.1 – Розв’язання задачі (6.5) – (6.8) графічним методом

Таким чином, багатокутник OABC є областю допустимих розв’язків D (див. рис. 6.1). Для знаходження оптимального розв’язку задачі лінійного програмування, задамо вектор $N = \{2; 3\}$.

Побудуємо пряму

$$l : 2x_1 + 3x_2 = 0,$$

яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора N.

Умовно переміщуємо пряму

$$l : 2x_1 + 3x_2 = 0$$

паралельно самій собі по області D у напрямі вектора $N = \{2;3\}$ до тих пір, поки вона не почне перетинати область D.

Найбільшого значення лінійна функція досягатиме в найбільш віддаленій вершині B багатокутника $OABC$, тобто у точці виходу прямої l з цієї області. Знайдемо координати точки $B(x_1, x_2)$. Точка B знаходиться на перетині прямих l_1 і l_2.

Для знаходження координат точки B необхідно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 30 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

Отже точка B має координати $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

Таким чином, найбільше значення лінійної функції:

$$F_{\min} = F(B) = 2 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 3 = 14.$$

Оскільки змінна x_1 дробова, то знайдений оптимальний план не відповідає умові цілочисельності.

Координати побудованого багатокутника розв’язків $OABC$ задовольняють систему лінійних нерівностей і умову невід’ємності розв’язків. Разом з тим умову цілочисельності змінних задовольняють координати 18 точок, що відмічені на рисунку 6.1. Щоб знайти точку, координати якої визначають розв’язок початкової задачі, замінимо багатокутник $OABC$ багатокутником $OAMC$, який містить всі допустимі точки з цілими координатами. Отже, якщо знайти точку максимуму цієї функції на багатокутнику $OAMC$, то координати цієї точки відповідають оптимальному плану ЗЦЛП.

Переміщуючи побудовану пряму

$$l:\ 2x1+3x2 = 0$$

за напрямом вектора N доти, доки вона не пройде через останню точку багатокутника $OAMC$. Координати цієї точки і визначають оптимальний план, а значення цільової функції в ній є максимальним.

Отже шуканою є точка $M\ (2;\ 3)$, в якій цільова функція приймає максимальне значення $F_{max} = 13$.

6.4 Розв'язування ЗЦЛП методом Гоморі

Для розв’язання ЗЦЛП методом Гоморі виконуються такі дії:

1. Симплекс-методом розв'язується пряма задача ЛП без урахування умови цілочисельності.

2. Отриманий оптимальний розв'язок (якщо він існує) перевіряється на цілочисельність. Якщо умова цілочисельності виконується за усіма змінними задачі, то оптимальний розв'язок ЗЛП збігається з оптимальним розв'язком ЗЦЛП. Якщо ця умова не виконується хоча б за однією із змінних, то переходять до п. 4.

3. Якщо пряма задача ЛП не має розв'язку, то і ЗЦЛП також не має розв'язку.

4. Будується додаткове обмеження, яке відсікає частину області допустимих розв'язків, в якій міститься оптимальний розв'язок ЗЛП і не міститься жодного допустимого розв'язку ЗЦЛП.

Останній крок передбачає повернення до ЗЛП з відкиненням умови цілочисельності, але з розширеною системою обмежень, в яку вноситься додаткове обмеження, отримане на кроці 4.

До розширеної системи обмежень знову застосовується симплекс-метод (двоїстий симплекс-метод). Якщо знайдений таким чином розв'язок знову буде не цілочисельним, то формується нове додаткове обмеження і переходять до п. 1.

Розглянемо розв’язування ЗЦЛП з прикладу 6.1 методом Гоморі. Спочатку розв’яжемо задачу без умови цілочисельності симплекс-методом (табл. 6.1 – 6.3).

Таблиця 6.1 – Початкова симплекс-таблиця (ітерація 1)

Б.з. \ c_i	2	3	0	0	b_j	b_j/a_{ij}
	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	6	5	1	0	30	30/5=6
x_4	0	1	0	1	3	3/1=3
F	-2	-3	0	0	0	

$X_{оп1} = (0, 0, 30, 3)$

Таблиця 6.2 – Ітерація 2

Б.з. \ c_i	2	3	0	0	b_i	b_i/a_{ij}
	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	6	0	1	-5	15	15/6=2,5
x_2	0	1	0	1	3	–
F	-2	0	0	3	9	

$X_{оп2} = (0, 3, 15, 0)$

Таблиця 6.3 – Ітерація 3

Б.з. \ c_i	2	3	0	0	b_i	b_i/a_{ij}
	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_1	1	0	1/6	-5/6	5/2	
x_4	0	1	0	1	3	
F	0	0	1/3	4/3	14	

$X_{опт3} = (5/2, 3, 0, 0)$

Оскільки оптимальний розв'язок задачі не є цілочисельним, тому формуємо додаткове обмеження для змінної x_1, тому що вона є нецілочисельною:

$$x_1 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_2 = \frac{5}{2},$$

$$f(1)x_1 + f\left(\frac{1}{6}\right)x_3 + f\left(-\frac{5}{6}\right)x_4 \geq f\left(\frac{5}{2}\right),$$

$$\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Помножимо отриману нерівність на 6. Шукане додаткове обмеження матиме вигляд:

$$x_3 + x_4 \geq 3.$$

Зведемо його до канонічного вигляду

$$x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$

і додаємо в останню симплекс-таблицю:

Таблиця 6.4 – Ітерація 1

Б.з. \ c_i	2	3	0	0	0	b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	1/6	-5/6	0	5/2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_5	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**1**	**-3**
F	0	3	1/3	4/3	0	14
$-F/a_{ij}$	0	–	(-1/3)/-1 =1/3	(-4/3)/-1=4/3		

Отриману задачу розв'яжемо двоїстим симплекс-методом:

Б.з. \ c_i	2	3	0	0	0	b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	-1	1/6	2
x_2	0	1	0	1	0	3
x_3	0	0	1	1	-1	3
F	0	0	0	1	1/3	13

$$X_{опт} = (2, 3, 3, 0, 0).$$

Таким чином, отримано оптимальний розв'язок ЗЦЛП.

6.5 Алгоритм методу гілок та меж

Для розв'язування задач цілочислового програмування ефективнішим за метод Гоморі є метод гілок та меж.

Нехай треба знайти x_i – цілочисельну змінну, значення якої $x_i = x_i'$ в оптимальному плані задачі без умови цілочисельності є дробовим. Очевидно, що в деякому околі цієї точки також не існує цілочисельних значень, тому відповідний проміжок можна виключити з множини допустимих планів задачі в подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x_i' цілочисельними значеннями. Можна стверджувати, що на інтервалі $[x_i', x_i'+1]$ цілих значень немає. Наприклад, якщо $x_i' = 2{,}7$ отримаємо інтервал] 2, 3[, де, очевидно, немає x_i, яке набуває цілого значення і оптимальний розв'язок буде знаходитися або в інтервалі $x_i \leq 2$, або $x_i \geq 3$. Виключення інтервалу] 2, 3[з множини допустимих планів здійснюється введенням до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей. Тобто допустиме ціле значення x_i має задовольняти одну з нерівностей виду:

$$x_i \leq [x_i'] \text{ або } x_i \leq [x_i'] + 1.$$

Дописавши кожну з цих умов до задачі з обмеженнями, без умови цілочисельності, дістанемо дві, не пов'язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочисельного програмування (6.1) – (6.4) поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних, значення яких в оптимальному плані умовно оптимальної задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом далі розв'язуватимемо дві нові задачі.

Опишемо алгоритм методу гілок та меж:

1. Симплексним методом розв'язують задачу (6.1) – (6.3) (без вимоги цілочисельності змінних).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей розв'язок є оптимальним планом задачі цілочисельного програмування (6.1) – (6.4).

Якщо задача (6.1) – (6.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена або система обмежень несумісна), то задача (6.1) – (6.4) також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочисельних змінних x_i і визначають її цілу частину $[x_i']$.

3. Записують два обмеження, що відтинають нецілочисельні розв'язки:

$$x_i \le [x_i'],$$
$$x_i \ge [x_i']+1.$$

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. Як результат отримують дві нові цілочисельні задачі лінійного програмування.

5. У будь-якій послідовності розв’язують обидві задачі. У разі, коли отримано цілочисельний розв’язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа *e*, то процес розв’язування може бути закінчено. У разі, коли цілочисельний розв’язок одержано в обох задачах, то з розв’язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочисельні розв’язки, то для подальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

Приклад 6.2. Знайти розв’язок ЗЦЛП методом гілок та меж:

$$F(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \\ x_{1,2} - \text{цілі} \end{cases}$$

Зведемо систему обмежень до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + x_3 = 35 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Крок 1

		C_i	-1	-2	0	0
Б	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	35	7	5	1	0
A_4	0	6	-2	3	0	1
		0	1	2	0	0

$X_{оп1} = (0, 0, 35, 6),$

Крок 2

		C_j	-1	-2	0	0
Б	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	25	$\frac{31}{3}$	0	1	$-\frac{5}{3}$
A_2	-2	2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$
		-4	$\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$

X_{on2} = (0, 2, 25, 0)

Крок 3

		C_j	-1	-2	0	0
Б	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	-1	$\frac{75}{31}$	1	0	$\frac{3}{31}$	$-\frac{5}{31}$
A_2	-2	$\frac{112}{31}$	0	1	$\frac{2}{31}$	$\frac{7}{31}$
		$-\frac{299}{31}$	0	0	$-\frac{7}{31}$	$-\frac{9}{31}$

X_{onm} = (75/31, 112/31, 0, 0), F_{onm}(X) = 299/31 = - 9,65.

Такий результат породжує 4 підзадачі (гілки):

$$1.\ \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 2 \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le= 6 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le= 6 \\ x_2 \ge 4 \end{cases}$$

Розв'яжемо підзадачу 1 табличним СМ. Як результат отримуємо оптимальний план $X_{опт}$:

$$X1_{опт} = (2, 10/3, 0, 0), \text{Fопт}(X) = -26/3.$$

Розв'язком підзадачі 2 є оптимальний план:

$$X2_{опт} = (75/31, 112/31, 0, 0), \text{Fопт}(X) = -299/31,$$

який збігається з початковим оптимальним планом. Ця гілка неперспективна.

Розв'язком підзадачі 3 є оптимальний план:

$$X3_{опт} = (20/7, 3, 0, 0), \text{Fопт}(X) = -62/7.$$

Розв'язком підзадачі 4 є оптимальний план, який також збігається з початковим оптимальним планом і тому цей напрям розв'язання неперспективний.

Таким чином, перспективними є оптимальні плани підзадач 1, 3.

З розв'язку підзадачі 1 також формується 2 наступні підзадачі 5 і 6.

$$5.\ \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le= 6 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \le 3 \end{cases},$$

$$6.\ \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le= 6 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \ge 4 \end{cases}$$

Розв'язком підзадачі 5 є оптимальний план:

$$X_{опт} = (2, 3, 0, 0), \text{Fопт}(X) = -8.$$

Таким чином, отримано оптимальний план $X_{опт}$, який є цілочисельний.

Розв'язком підзадачі 6 є оптимальний план, який також збігається з початковим оптимальним планом.

З розв'язку підзадачі 3 також формується 2 наступні підзадачі 7 і 8.

$$7.\quad \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le= 6 \\ x_2 \le 3 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$8.\quad \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -2x_1 + 3x_2 \le= 6 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$

Розв’язком підзадачі 7 є оптимальний план:

$$X7_{опт} = (2, 3, 0, 0), \; Fопт(X) = -8.$$

Таким чином, отримано оптимальний план $X_{опт}$, який є цілочисельним.

Розв’язком підзадачі 8 є оптимальний план, який також збігається з початковим оптимальним планом.

Дерево розв’язків подано на рисунку 6.2:

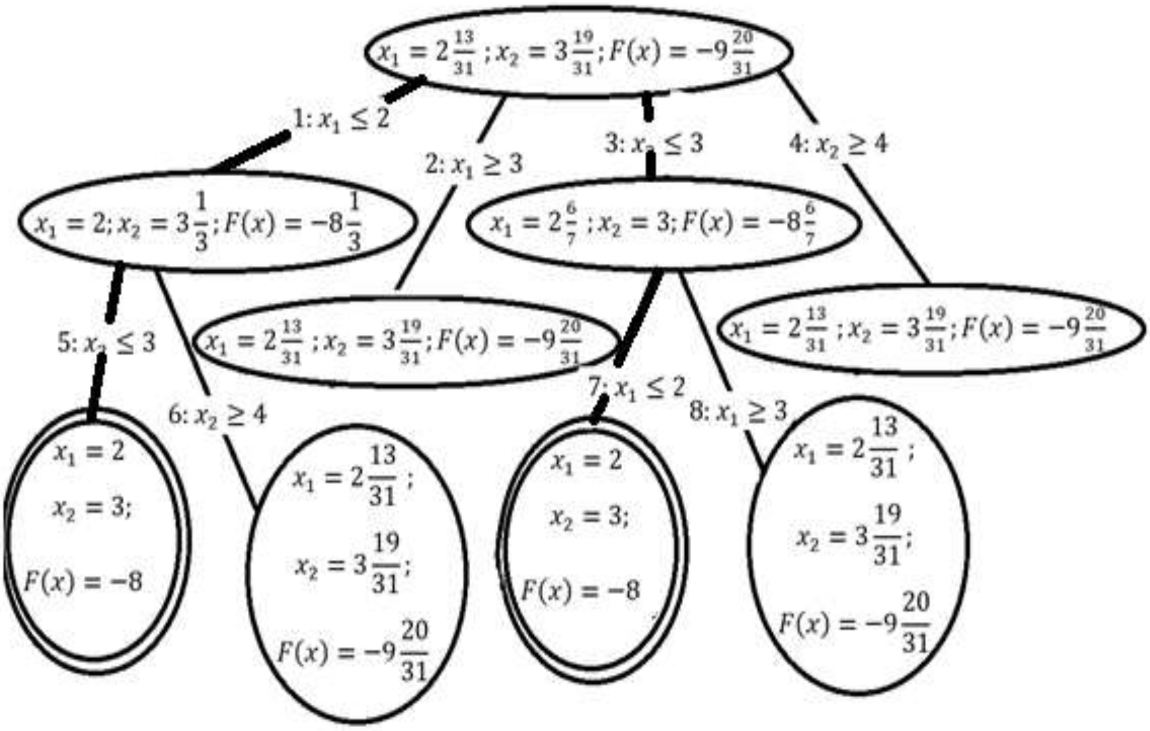


Рисунок 6.2 – Дерево розв’язків

6.6 Питання для самоконтролю

1. Які задачі потребують цілочисельного розв’язку?
2. Подайте математичну модель ЗЦЛП в загальному вигляді.
3. Що таке булева змінна? Наведіть приклад ЗЦЛП з булевими змінними.
4. Як побудувати багатокутник допустимих розв’язків ЗЦЛП?
5. Поясніть алгоритм розв’язання ЗЦЛП графічним методом.
6. Чи можна визначити залишки ресурсів, якщо для розв'язання ЗЦЛП застосовувати графічний метод?
7. За допомогою графічної інтерпретації поясніть, чому не можна отримувати розв'язок задачі цілочисельного програмування шляхом округлення компонентів оптимального плану ЗЛП, математична модель якої збігається з моделлю ЗЦЛП, але не містить вимоги цілочисельності.
8. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
9. У чому полягає суть процедури формування правильного відсікання?
10. Запишіть нерівність, яка визначає правильне відсікання.
11. У чому полягає особливість математичної моделі задачі лінійного програмування, у яку згідно з методом Гоморі було введено спеціальне додаткове обмеження?
12. Сформулюйте алгоритм методу гілок та меж.
13. Як побудувати дерево пошуку?
14. Наведіть правило відсікання. Поясніть, яка гілка дерева пошуку вважається перспективною.
15. Чи доцільно поєднувати графічний метод і метод гілок та меж під час розв'язання ЗЦЛП? Наведіть аргументи.
16. Як визначаються підзадачі для розв'язання ЗЦЛП метод гілок і меж?
17. Сформулюйте постановку задачі дискретного програмування у загальному вигляді та подайте її математичну модель.
18. Охарактеризуйте особливості задач дискретного програмування.
19. Розкрийте постановку задачі дискретного програмування.

6.7 Завдання для виконання № 11. Розробка алгоритму і програми для розв'язання ЗЦЛП методом відсікальних площин Гоморі

Мета: набути практичних навичок розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування методом Гоморі та його програмної реалізації

Порядок виконання роботи

1. Згідно з заданим варіантом практично виконати розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування методом Гоморі.
2. Розробити алгоритм та програму, що реалізує цей метод.
3. Провести тестування розробленої програми згідно з заданим варіантом.
4. За результатами виконання роботи оформити звіт.

Зміст звіту

1. Титульний аркуш за вимогою вищої школи.
2. Мета, варіант завдання.
3. Практичні результати виконання завдання.
4. Схема програми, що реалізує розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування методом Гоморі.
5. Опис програми.
6. Результати тестування розробленої програми.
7. Висновки за результатами роботи.
8. Додаток 1. Інструкція користувача до розробленої програми.
9. Додаток 2. Лістинг розробленої програми.

Варіанти завдань [3]

1
$$F = -72x_1 + 11x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 24, \\ x_1 + 4x_2 \leq 8. \end{cases}$$

2
$$F = 6x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7, \\ 4x_1 + x_2 \leq 14. \end{cases}$$

3
$$F = 15x_1 - 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 9, \\ 9x_1 - 4x_2 \leq 24. \end{cases}$$

4
$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 28. \end{cases}$$

5 $F = 13x_1 + 60x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 + 8x_2 \le 10. \end{cases}$$

6 $F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 - x_2 \ge 4. \end{cases}$$

7 $F = -6x_1 + 11x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 2. \end{cases}$$

8 $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

9 $F = -2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6. \end{cases}$$

10 $F = -5x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -7, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 17, \\ 7x_1 - 2x_2 \le 28. \end{cases}$$

11 $F = 5x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 \le 8. \end{cases}$$

12 $F = -2x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \ge 35, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 35. \end{cases}$$

13 $F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24. \end{cases}$$

14 $F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 3. \end{cases}$$

15 $F = -6x_1 + 11x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 2. \end{cases}$$

16 $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 12. \end{cases}$$

17 $F = 5x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 3x_2 \le 8. \end{cases}$$

18 $F = -2x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \ge 35, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 35. \end{cases}$$

19 $F = 13x_1 + 60x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 + 8x_2 \le 10. \end{cases}$$

20 $F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 - x_2 \ge 4. \end{cases}$$

21 $F = 15x_1 - 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 9, \\ 9x_1 - 4x_2 \le 24. \end{cases}$$

22 $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 28, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 28. \end{cases}$$

23
$$F = -72x_1 + 11x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 24, \\ x_1 + 4x_2 \leq 8. \end{cases}$$

24
$$F = 6x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7, \\ 4x_1 + x_2 \leq 14. \end{cases}$$

25
$$F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 24. \end{cases}$$

26
$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 3. \end{cases}$$

27
$$F = -2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6. \end{cases}$$

28
$$F = -5x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -7, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 17, \\ 7x_1 - 2x_2 \leq 28. \end{cases}$$

29
$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 8. \end{cases}$$

30
$$F = -2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 35, \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 35. \end{cases}$$

6.8 Завдання для виконання № 12. Розробка алгоритму і програми для розв'язання цілочисельних ЗЛП методом гілок та меж

Мета: набути практичних навичок знаходження розв'язку цілочисельної ЗЛП методом гілок та меж та його програмної реалізації**.**

Порядок виконання роботи

1. Згідно з заданим варіантом практично виконати розв'язування задач цілочисельного лінійного програмування методом гілок та меж.
2. Розробити алгоритм та програму, що реалізує цей метод.
3. Провести тестування розробленої програми згідно з заданим варіантом.
4. За результатами виконання роботи оформити звіт.

Зміст звіту

1. Титульний аркуш за вимогою вищої школи.
2. Мета, варіант завдання.
3. Практичні результати виконання завдання.
4. Схема програми, що реалізує розв'язання задачі цілочисельного лінійного програмування методом гілок та меж.
5. Опис програми.
6. Результати тестування розробленої програми.
7. Висновки за результатами роботи.
8. Додаток 1. Інструкція користувача до розробленої програми.
9. Додаток 2. Лістинг розробленої програми.

Варіанти завдань

Варіанти завдань для виконання дивись в розділі «Завдання для виконання № 11»

7 ТЕОРІЯ ІГОР

7.1 Основні поняття та означення теорії ігор

Теорія ігор вперше була представлена Джоном фон Нейманом і Моргенштерном та видана 1944 року в монографії «Теорія ігор і економічної поведінки», хоча окремі результати були опубліковані ще раніше. Нейман і Моргенштерн написали оригінальну книгу, яка містила найбільше економічних прикладів, тому що економічні задачі простіше за інші подати у числовому вигляді [1, 5, 8].

Під час другої світової війни і одразу після неї теорією ігор серйозно зацікавились військові, які одразу побачили в ній математичний апарат для дослідження стратегічних проблем і розробки рішень. Але згодом головна увага знову була звернута до економічних проблем. Нині область застосування теорії ігор набуло значного впровадження. Так, у соціальних науках апарат теорії ігор застосовується у психології, для аналізу торгових угод та переговорів, а також для вивчення принципів формування коаліцій тощо.

Теорія ігор – це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників.

Завдання теорії ігор полягає у створенні рекомендацій для зваженої поведінки учасників гри.

Реальні конфліктні ситуації досить складні і обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці будують спрощені моделі конфліктних ситуацій, які називають ***іграми***.

1. Ситуація називається **конфліктною**, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких частково або повністю протилежні.

2. **Гра** – це конфлікт, в якому наявні щонайменше 2 учасники (гравці), кожний з яких прагне досягнення власної мети.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є :

- кількість гравців – учасників ***гри***;
- ***стратегія*** – опис можливих дій гравців кожної із сторін;
- ***функція виграшу,*** визначені результати дій для кожного гравця.

Задачею кожного гравця є знаходження ***оптимальної стратегії***, яка за умови багатократного повторення гри забезпечує цьому гравцю максимально можливий середній виграш.

- Будь-яка гра складається з партій, які починаються і закінчуються, після чого гравцям отримують свій виграш.
- Кожна партія складається з ходів, які послідовно або одночасно роблять гравці.
- Опис гри, як послідовності ходів, носить назву позиційної форми гри.

3. **Правила гри** – це припустимі дії кожного з гравців, що використовуються для досягнення поставленої мети.

4. **Платіж** – це кількісна оцінка результатів гри.

5. Якщо в грі беруть участь тільки дві сторони (дві особи), то така гра називається **парною**.

6. Якщо сума платежів гри дорівнює нулю, тобто, якщо програш одного гравця дорівнює виграшу іншого, то така гра називається **грою з нульовою сумою**.

7. **Стратегія гри** – це однозначний опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, за яких він має зробити хід.

8. **Оптимальна стратегія** – це стратегія, яка за багаторазового повторення гри забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш.

9. **Платіжною (або матрицею гри)** називається матриця виду:

$$\mathrm{A} = \mathrm{a}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

Рядки матриці A – це стратегії першого гравця, а стовпці – стратегії другого. Такі стратегії називаються ***чистими.***

10. Гру, яка визначається матрицею А розмірністю $n \times m$, називають **кінцевою грою розмірності $n \times m$.**

11. Число α

$$\alpha = \max_j(\min_i a_{ij})$$

називається нижньою ціною гри або максміном, а відповідна йому стратегія (рядок) – максмінною.

12. Число β

$$\beta = \min_i(\max_j a_{ij})$$

називається верхньою ціною гри або мінмаксом, а відповідна йому стратегія (стовпець) – мінмаксною.

Приклад 7.1. Конфліктна ситуація виникає в зв’язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікацію, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів. Дані про типи устаткування і їх собівартість подано в таблиці 7.1.

Розв’язання. Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ наполягатиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то, найімовірніше, затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 – також М-2.

Таблиця 7.1 – Собівартість виготовлення устаткування, тис. ум.од.

Тип устаткування	Модифікація		
	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	6
А-2	8	5	9
А-3	7	4	8

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно наполягати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-1, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов – 6 тис. ум.од.

Наведені міркування ілюструють максмінну стратегію, отже:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min(10; 6; 6) = 6,$$
$$\min_{i=2} a_{ij} = \min(8; 5; 9) = 5,$$
$$\min_{i=3} a_{ij} = \min(7; 4; 8) = 4,$$
$$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = \max(6; 5; 4) = 6 - \text{нижня ціна гри.}$$

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максмінної) стратегії і вибере другу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює або 5, або 4.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1.

Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум.од. – для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 – також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати – 7 тис. ум.од.

Останні міркування відповідають мінмаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max(10; 8; 7) = 10,$$
$$\max_{j=2} a_{ij} = \max(6; 7; 5) = 7,$$
$$\max_{j=3} a_{ij} = \max(5; 9; 8) = 9,$$
$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min(7; 4; 6) = 7 - \text{верхня ціна гри.}$$

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінмаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат.

Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9.

Наведена гра є парною грою із сідельною точкою.

7.2 Способи скорочення платіжної матриці

Задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають значну розмірність. Тому важливим моментом дослідження платіжної матриці є способи її скорочення.

Скоротити матрицю можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони є невигідними або повторюють одна одну.

Так платіжна матриця може містити однакові рядки (стовпці). Такі стратегії називаються ***дублювальними***.

Якщо всі елементи i-го рядка (j-го стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів i-го рядка (j-го стовпця), то кажуть, що i-та стратегія гравця А (j-та стратегія гравця В) є ***домінувальною*** над i-ою (j-ою).

Для спрощення розмірів платіжної матриці дублювальні та ті стратегії, для яких існують домінувальні, вилучають з платіжної матриці.

Приклад 7.2. Маємо ігрову ситуацію гравців А і В, яка задана такою платіжною матрицею:

Гравець В

$$\text{Гравець А} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А і В.

Розв'язання. Оптимізацію гри почнемо з визначення домінувальних стратегій для кожної із сторін, а також виключення із дальшого аналізу невигідних і дублювальних стратегій.

Визначимо домінувальні стратегії. Перша стратегія а1 гравця А домінує над третьою а3, оскільки всі значення його виграшів за будь-яких дій противника є не гіршими, ніж за вибору третьої стратегії, тобто всі елементи першого рядка платіжної матриці не менші, ніж відповідні елементи її третього рядка. Тому третя стратегія гірша, ніж перша і може бути виключена із платіжної матриці.

Продовжуючи аналіз можливих дій гравця В, легко помітити, що його перша стратегія домінує над п'ятою, яку можна виключити як збитковішу, а тому невигідну для цього гравця.

Отже, маємо таку платіжну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

За вибору гравцем А першої стратегії залежно від дій гравця В він може отримати 6, 3, 8 або 5 одиниць виграшу. Але у будь-якому разі його виграш буде не меншим від min(6; 3; 8; 5) = 3, незалежно від поведінки гравця В. Якщо розглянути можливі наслідки вибору гравцем А другої стратегії, то, міркуючи аналогічно, з'ясуємо, що його гарантований виграш становитиме min(6; 5; 7; 6) = 5.

Для третьої стратегії min(4; 4; 3; 8) = 3.

Отже, нижня ціна гри буде дорівнювати:

$$\alpha = \max(3; 5; 3) = 5,$$

а гравець А для максимізації мінімального виграшу має вибрати другу із трьох можливих стратегій. Ця стратегія є максимінною у цій грі.

Гравець В, який намагається мінімізувати свій програш, вибираючи першу стратегію, може програти 6, 6 або 4 одиниці. Але за будь-яких варіантів дій гравця А гравець В може програти не більше ніж max(6; 6; 4) = 6.

Для другої стратегії отримуємо max(3; 5; 4) = 5, для третьої – max(8; 7; 3) = 8, а для четвертої – max(5; 6; 8) = 8.

Отже, верхня ціна гри становитиме:

$$\beta = \min(6; 5; 8; 8) = 5.$$

Гравцю В доцільно вибрати також другу стратегію, яка є мінмаксною у грі. Оскільки $\boldsymbol{\alpha = \beta}$, то ця гра має сідельну точку. Ціна гри дорівнює 5. Оптимальною максмінною стратегією гравця А є друга з трьох можливих стратегій його дій. Для гравця В оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

Мінмаксна та максмінна стратегії мають назву песимістичних. Вибір оптимальної стратегії для кожного з гравців ґрунтується на припущенні, що він буде діяти за найгірших для нього умов. Зрозуміло, що в такому разі вибір такої стратегії може не влаштовувати учасників гри. Нехай гравець А вибрав другу (максмінну) стратегію і дотримується її. Допустимо, що гравцеві В став відомим вибір стратегії противника, тоді йому доцільно вибрати третю стратегію, за якої виграш становитиме 7 одиниць.

Зі свого боку гравець А також знає про зміну стратегії гравця В на третю і вибирає першу стратегію, що дає йому змогу отримати виграш у сумі 8 одиниць і т. д. Можливість такого розвитку подій виникає тому, що мінмаксна та максмінна стратегії в такому разі ***не є стійкими***. Тобто обставини, за яких обидва гравці використовують мінмаксну та максмінну стратегії, невигідні гравцям у тому випадку, коли один з них змінює свою оптимальну стратегію.

Однак така нестійкість властива не всім іграм із сідельною точкою. В деяких випадках сідельній точці відповідають стійкі максмінна та мінмаксна стратегії. В такому разі відхилення від оптимальної стратегії одним з гравців спричиняє таку зміну виграшу, яка є невигідною для цього гравця, оскільки стан або не змінюється, або погіршується.

Отже, в загальному випадку не можна стверджувати, що гра з сідельною точкою визначає стійкі оптимальні стратегії.

7.3 Класифікація задач теорії ігор

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію.

Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

- Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається **парною** (грою двох осіб).
- Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є **множинною**.
- Залежно від кількості стратегій розрізняють **скінченні та нескінченні** ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра – скінченна, в іншому разі – нескінченна.
- Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо **гру з нульовою сумою**. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри – з ненульовою сумою, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.
- За можливості поєднання інтересів гравців та домовленості між ними про вибір стратегій можна казати про **кооперативну гру**, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається **некооперативною.**

7.8 Теорія ігор: теорема про мінімакс

Теорема 1. Нижня ціна гри α не перевищує верхньої ціни гри β ($\alpha \le \beta$) [1, 8].

Для гри з сідельною точкою знаходження розв'язку полягає у виборі максмінної і мінмаксної стратегій, що є оптимальними.

Якщо гра задана матрицею, що не має сідельної точки, то для знаходження її розв'язку використовуються змішані стратегії.

З означення змішаної стратегії безпосередньо випливає, що сума компонентів вказаного вектора дорівнює одиниці, а самі компоненти невід'ємні. Зазвичай змішану стратегію першого гравця позначають як вектор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, а другого гравця – як вектор $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$, де $u_i \geq 0$ $(i = \overline{1, n})$, $z_j \geq 0$ $(j = \overline{1, m})$.

$$\sum_{i=1}^{mn} u_i = 1 \ , \sum_{j=1}^{m} z_j = 1.$$

Якщо U^* – оптимальна стратегія першого гравця, а Z^* – оптимальна стратегія другого гравця, то число

$$\nu = \sum_i^n \sum_j^m a_{ij} u_i^* z_j^*$$

є ціною гри.

Визначення оптимальних стратегій і ціни гри становить процес знаходження розв'язку гри.

Теорема 2. Усяка матрична гра з нульовою сумою має розв'язок в змішаних стратегіях.

Теорема 3. Для того, щоб число $\boldsymbol{\nu}$ було ціною гри, а $\boldsymbol{u^*}$ і $\boldsymbol{z^*}$ – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i^* \geq \nu,$$
$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j^* \leq \nu \ .$$

Теорема 2 дає відповідь на питання про існування розв'язку гри, а теорема 3 дає відповідь на питання, як знайти цей розв'язок для ігор 2×2, $2 \times n$, $m \times 2$.

7.9 Теорія ігор: теорема про оптимальну змішану стратегію

Теорема 4. Якщо один із гравців застосовує оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри **ν** незалежно від того, з якими частотами буде застосовувати другий гравець стратегії, що ввійшли в оптимальну (зокрема і чисті стратегії).

7.10 Геометрична інтерпретація розв'язання задач теорії ігор, заданих платіжною матрицею розміром 2×m або n×2

Основні етапи знаходження розв'язку гри $2 \times n$ чи $m \times 2$.

1. Будують прямі, що відповідають стратегіям другого (першого) гравця.
2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.
3. Знаходять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.
4. Визначають ціну гри і оптимальні стратегії.

Приклад 7.3. Знайти розв'язок гри, заданої платіжною матрицею, використовуючи графічну інтерпретацію розв'язку. Нехай задана платіжна матриця А:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Визначення наявності сідельної точки:

$$\boldsymbol{\alpha} = max(min\ a_{ij}) = max(2, 3) = 3,$$

$$\boldsymbol{\beta} = min(max\ aij) = min\ (4, 5) = 4,$$

$$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta} \text{ – сідельна точка відсутня.}$$

Отже, розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії S_A та S_B , а ціна гри v знаходиться в межах $3 \leq \boldsymbol{v} \leq 4$.

Припустимо, що для гравця А стратегія задається вектором:

$$\boldsymbol{U = (u_1, u_2)}.$$

Тоді, якщо один з гравців застосовує змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри v незалежно від того, з якою частотою буде застосовувати гравець В стратегії, що ввійшли в оптимальну, зокрема і чисті стратегії (теорема 4).

Тому у разі застосування гравцем В чистої стратегії В1 або В2 гравець А отримає середній виграш, що дорівнює ціні гри v:

$$\boldsymbol{2u_1 + 4u_2 = v} \quad \text{(за стратегії В1),}$$

$$\boldsymbol{5u_1 + 3u_2 = v} \quad \text{(за стратегії В2).}$$

Також для гравця А: $\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} = 1$.

Отже маємо систему з 3-х рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 2u_1 + 4u_2 = v, \\ 5u_1 + 3u_2 = v, \\ \ \ u_1 + u_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо:

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{1}{4}, \boldsymbol{u_2} = \frac{31}{4}, \boldsymbol{v} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Таким чином, отримуємо оптимальну змішану стратегію гравця А

$$S_A = (\tfrac{1}{4}; \tfrac{3}{4}).$$

Далі знайдемо оптимальну змішану стратегію для гравця В (S_B).

Нехай стратегія для гравця В задається вектором $\boldsymbol{Z = (z_1, z_2)}$.

Тоді

$$\begin{cases} 2z_1 + 5z_2 = v, \\ 4z_1 + 3z_2 = v, \\ \ \ z_1 + z_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримуємо:

$$\boldsymbol{z_1} = \frac{1}{2}, \boldsymbol{z_2} = \frac{1}{2}, \boldsymbol{v} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

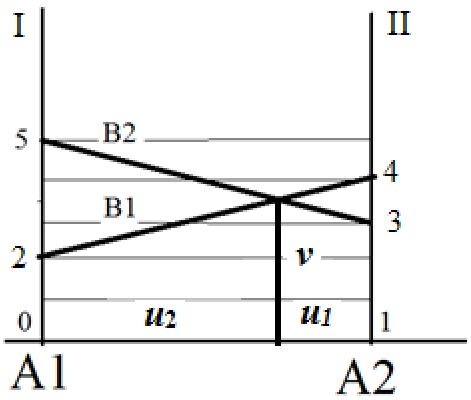
$$S_B = (\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}).$$

Відповідь: $S_A = U = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$, $S_B = Z = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\boldsymbol{v} = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

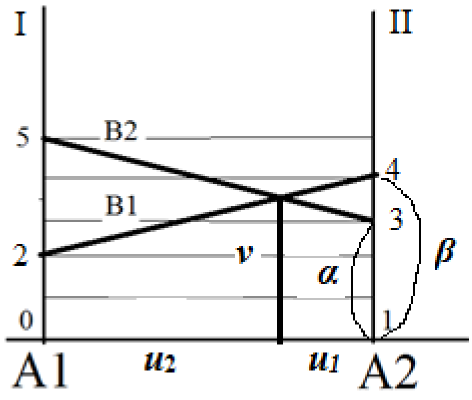
Далі розглянемо графічну інтерпретацію розв'язання цієї гри.

Відмітимо на осі абсцис відрізок довжиною, що дорівнює одиниці (рис. 7.1). Лівий кінець відрізка (точка з абсцисою $\boldsymbol{u} = 0$) буде відповідати стратегії A_1, а правий кінець ($\boldsymbol{u} = 1$) – стратегії A_2, всі проміжні точки цього відрізка відповідатимуть змішаним стратегіям гравця А, причому імовірність $\boldsymbol{u_1}$ стратегії A_1 буде дорівнювати відстані від точки Р до правого кінця відрізка, а ймовірність $\boldsymbol{u_2}$ стратегії A_2 – відстані до лівого кінця відрізка.

Проведемо через точки A_1 та A_2 два перпендикуляри до осі абсцис: вісь I і вісь II. На першій з них відмітимо виграш за вибору стратегії A_1, а на другій – за стратегії A_2.



а)



б)

Рисунок 7.1 – Графічна інтерпретація обчислення S_A

Нехай противник вибрав стратегію B_1 (рис. 7.2), їй відповідають на осях I та II дві точки, причому довжина відрізка A_1B_1 дорівнює $a_{11}(2)$, а довжина відрізка A_2B_1 дорівнює $a_{12}(5)$. Аналогічно будуємо пряму A_1B_2 – $a_{21}(4)$ та A_2B_2 – $a_{22}(3)$, яка відповідає стратегії B_2.

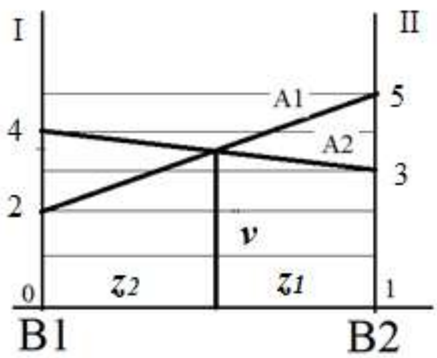


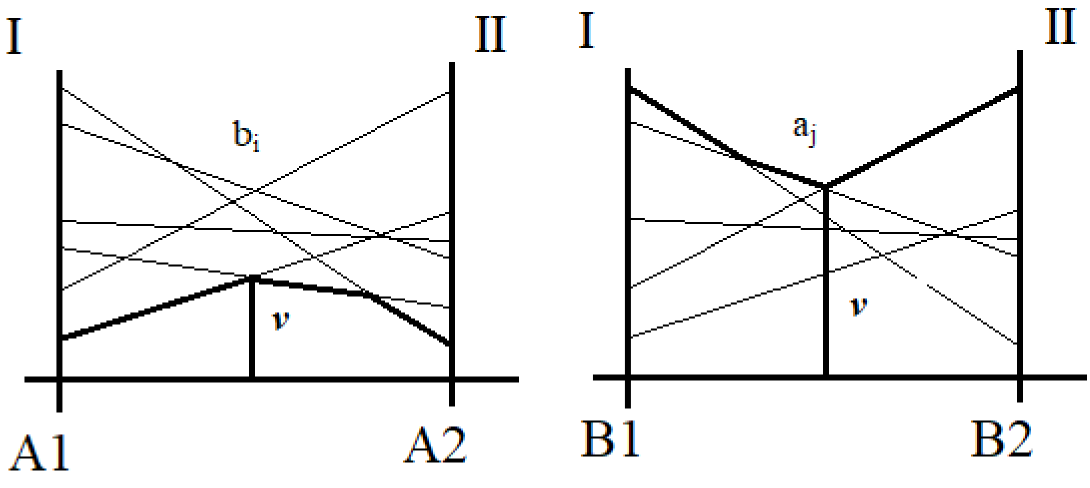
Рисунок 7.2 – Графічна інтерпретація обчислення S_B

Необхідно знайти оптимальну стратегію X^*, таку, за якої мінімальний виграш гравця A буде максимальним. Для цього виділимо жирною лінією на рисунку нижню межу виграшу за умови вибору стратегій B_1 та B_2, тобто ламану лінію B_1MB_2. На цій межі знаходяться значення мінімального виграшу гравця A за будь-якої його змішаної стратегії. Очевидно, що найкраще з можливих мінімальних значень у нашому прикладі знаходиться в точці M, а в загальному випадку відповідає тій точці, де крива, що позначає мінімальний виграш гравця A, набуває максимального значення. Ордината цієї точки є ціною гри ν. Відстань до лівого кінця відрізка x_2 та відстань до правого кінця відрізка – x_1 дорівнюють відповідно ймовірностям стратегій A_2 та A_1

Геометрична інтерпретація дає також змогу наочно зобразити нижню та верхню ціну гри (рис. 7.1, б). Для нашого прикладу нижньою ціною гри є величина відрізка $A2B2$, а верхньою ціною гри – $A2B1$.

На цьому ж рисунку можна розглянути і геометричну інтерпретацію оптимальних стратегій противника В. Дійсно, частка стратегії В1 в оптимальній змішаній стратегії дорівнює відношенню довжини відрізка КВ2 до суми довжин відрізків $KB2$ та $KB1$ на осі I:

З наведених міркувань витікає, що гру 2×2 можна розв’язати елементарними прийомами. Аналогічно може бути розв’язана гра $2\times n$, тобто коли гравець A має лише дві стратегії, а гравець B – n. У такому разі на рисунку потрібно зобразити перетин n прямих, що відповідатимуть n стратегіям гравця B. Мінімальні виграші гравця A являтимуть собою також ламану лінію, максимальне значення якої і визначатиме оптимальну стратегію для гравця A (рис. 7.3, а).



а) б)

Рисунок 7.3 – Визначення оптимальної стратегій гравців А та В
а) для гри $2\times n$; б) для гри $m\times 2$

Можна також розв’язати і гру $m\times 2$ (рис. 7.3, б), з тією різницею, що необхідно визначати не нижню величину виграшу, а верхню і знаходити не максимальне з можливих значення, а мінімальне.

7.7 Алгебраїчний метод розв'язання задач теорії ігор

Нехай матрична гра з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

не має сідлової точки. Тоді змішані стратегії гравців

$U = (u_1; u_2), Z = (z_1; z_2)$

та ціну гри v можна обчислити за формулами (7.1) – (7.5):

$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \tag{7.1}$$

$$u_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \tag{7.2}$$

$$z_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \tag{7.3}$$

$$z_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \tag{7.4}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \tag{7.5}$$

Приклад 7.4. Необхідно знайти розв'язок гри, заданої платіжною матрицею А алгебраїчним методом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що гра не має сідлової точки:

$$\max(\min(2; 5); \min(4; 3)) = \max(2; 3) = 3 = \alpha,$$
$$\min(\max(2; 4); \max(5; 3)) = \max(4;5) = 4 = \beta.$$

Отже, ця гра не має сідлової точки ($\alpha \neq \beta$).

Скористаємося формулами (7.1) – (7.5). Тоді змішані стратегії гравців дорівнюють:

$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{3 - 4}{2 - 5 - 4 + 3} = \frac{1}{4},$$

$$u_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2 - 5}{2 - 5 - 4 + 3} = \frac{3}{4},$$

$$z_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{3 - 5}{2 - 5 - 4 + 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$z_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2-4}{2-5-4+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{2\cdot 3 - 5\cdot 4}{2-5-4+3} = \frac{6-20}{-4} = \frac{14}{4} = 3{,}5,$$

$$\mathrm{U} = \left(\tfrac{1}{4};\ \tfrac{3}{4}\right);\ \mathrm{Z} = \left(\tfrac{1}{4};\ \tfrac{3}{4}\right);\ \nu = 3{,}5.$$

7.8 Зведення задач теорії ігор до ЗЛП

Розглянемо гру $m \times n$, що визначається матрицею

$$\mathrm{A} = \mathrm{a}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots. & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

Відповідно до теореми 3, для оптимальної стратегії першого гравця $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ і ціни гри v виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i^* \geq \nu,\ (\mathrm{i} = \overline{1, n}\ ).$$

Припустимо для визначеності, що $v > 0$. Це завжди може бути досягнуто шляхом додавання до всіх елементів матриці A будь-якого сталого числа С. Це не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на С.

Розділивши тепер обидві частини останньої нерівності на v, одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{u_i^*}{\nu} \geq 1\ \nu,\ (i = \overline{1, n}).$$

Приймемо

$$\frac{u_i^*}{\nu} = y_i^*,$$

тоді

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* \geq 1\ \nu,\ (i = \overline{1, n}),\ y_i^* \geq 0\ (j = \overline{1, m}).$$

Використовуючи введене позначення, перепишемо умову

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^* = 1$$

(поділивши все на ν) у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^* \geq \frac{1}{v}.$$

Оскільки перший гравець прагне одержати максимальний виграш, то він має забезпечити мінімум величини $1/v$. З врахуванням цього визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження мінімального значення функції

$$F^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le 1\, \text{v}, (i = \overline{1,n}), x_i \ge 0\ (j = \overline{1,m}).$$

$$x_j = \frac{z_j}{v}.$$

Таким чином, щоб знайти розв'язок цієї гри, що визначається матрицею *A,* потрібно скласти таку пару двоїстих задач і знайти їх розв'язок.

Пряма задача: знайти максимальне значення функції

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{7.6}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le 1, (i = \overline{1,n}), x_i \ge 0\ (j = \overline{1,m}). \tag{7.7}$$

Двоїста задача: знайти мінімальне значення функції

$$F^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* \tag{7.8}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge 1, (j = \overline{1,m}), y_j \ge 0(i = \overline{1,n}),. \tag{7.9}$$

Використовуючи розв'язок пари двоїстих задач (7.6) – (7.7) та (7.8) – (7.9), одержуємо формули для визначення стратегій і ціни гри:

$$u_i^* = \frac{y_j^*}{\sum_{j=1}^{m} y_j^*} = v y_j^*, \tag{7.10}$$

$$z_j^* = \frac{x_i^*}{\sum_{i=1}^{n} x_i^*} = v x_i^*, \tag{7.11}$$

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} y_j^*}, \tag{7.12}$$

$$(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}).$$

Отже, процес знаходження розв'язку гри з використанням методів лінійного програмування містить такі етапи:

1. Складають пару двоїстих задач лінійного програмування, еквівалентних цій матричній грі.
2. Визначають оптимальні плани пари двоїстих задач.
3. Використовуючи співвідношення між планами пари двоїстих задач і оптимальними стратегіями та ціною гри, знаходять розв'язок гри.

Приклад 7.5. Нехай задано платіжну матрицю гри А. Знайти розв'язок цієї гри зведенням її до ЗЛП:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Складемо двоїсту пару задач лінійного програмування:

пряма задача: знайти максимум функції

$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

за обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1, \\ 2x_2 + 3x_3 \le 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ \ge 0;$$

двоїста задача: знайти мінімум функції

$$F^*(y) = y_1 + y_2 + y_3$$

за обмежень

$$\begin{cases} 2y_1 + y_3 \ge 1, \\ y_1 + \ 2y_2 + y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + \ 3y_2 + 2y_3 \ge 1, \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3 \ \ge 0.$$

Знаходимо оптимальні плани прямої і двоїстої задач, розв'язавши пряму ЗЛП симплекс-методом (ітерації 1 – 3).

Ітерація 1

		C_j	1	1	1	0	0	0
Б	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	1	2	1	4	1	0	0
A_5	0	1	0	2	3	0	1	0
A_6	0	1	1	1	2	0	0	1
		0	-1	-1	-1	0	0	0

$$\mathrm{X}^1_{\text{оп}} = (1; 1; 1; 0; 0; \ 0)$$

Ітерація 2

		C_j	1	1	1	0	0	0
Б	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	0
A_5	0	1	0	2	3	0	1	0
A_6	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
		$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0

$$\mathrm{X}^2_{\text{оп}} = \left(\frac{1}{2}; 0; 0; 0; 1; \ \frac{1}{2}\right)$$

Ітерація 3

		C_j	1	1	1	0	0	0
Б	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
A_2	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
A_6	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1
		$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

$$X^3_{\text{опт}} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 0; 0; 0; \frac{1}{4}\right)$$

З останньої (третьої) ітерації витікає, що пряма задача має оптимальний план

$$X^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

двоїста задача – оптимальний план

$$Y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right).$$

Отже, ціну гри знаходимо за допомогою співвідношення (7.12)

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

а оптимальні стратегії гравців знаходимо за допомогою співвідношень (7.10) та (7.11):

$$u_1^* = \nu \cdot y_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}; \;\; u_2^* = \nu \cdot y_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$
$$z_1^* = \nu \cdot x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}; \;\; z_2^* = \nu \cdot x_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Отже, оптимальні змішані стратегії гри дорівнюють:

$$U^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0\right); \; Z^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right).$$

7.9 Зведення ЗЛП до задачі теорії ігор

Як було показано вище, що для будь-якої матричної гри можна записати симетричну пару двоїстих задач. Справедливо і протилежне: для будь-якої симетричної пари двоїстих задач можна записати матричну гру.

Нехай задано симетричну пару двоїстих задач:

пряма задача:

$$F = CX,\ AX \le B,\ X \ge 0;$$

двоїста задача:

$$F^* = BY, \quad YA^T \ge C,\ Y \ge 0.$$

Тоді цій симетричній парі двоїстих задач можна поставити у відповідність гру, що визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix},$$

де індекс Т означає операцію транспонування.

Потрібно зазначити, що якщо кожна матрична гра має оптимальні стратегії, то не всяка задача лінійного програмування має розв'язок.

Приклад 7.6. Побудувати гру, що визначається такою парою двоїстих задач лінійного програмування:

пряма задача:

$$F(x) = x_1 + 3x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -2x_2 + 3x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ \ge 0\,. \end{cases}$$

двоїста задача:

$$F^*(y) = 4y_1 + 9y_2 \to min,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \ge 4, \\ y_1 + 3y_2 \ge 3, \\ y_1, y_2 \ \ge 0\,. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$B^T = (4 \quad 9);$$

$$C = (1 \quad 3);$$
$$C^T = \binom{1}{3}.$$

Отже, заданій симетричній парі двоїстих задач можна поставити у відповідність матричну гру, що визначається матрицею

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.10 Ітераційний метод розв'язання задач теорії ігор

Нехай маємо платіжну матрицю $||a_{ij}||$ гри $m\times n$, $i = \overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Гра багаторазово повторюється і передбачається, що кожний із гравців використовує ту зі своїх чистих стратегій, якій відповідає найкращий накопичений (сумарний) результат за всі попередні повторення ігор (*процедура визначення стратегії наглядно описана в таблиці 7.2)*.

Для гравця A – це максимальний накопичений виграш, а для B – мінімальний накопичений програш відносно стратегії, що вибрав попередній гравець

У першій грі стратегія гравця A вибирається довільно. Стратегія гравця B та всі подальші стратегії вибираються, виходячи із попереднього найкращого накопиченого результату (*якщо дві накопичені суми мають однакове значення, то вибирається будь-яка з них*).

Тоді накопичені результати гри відповідно для стратегій A та B будуть:

$$v_i(k) = \sum_{S=1}^{k} a_{ijs},\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

$$\mu_j(k) = \sum_{S=1}^{k} a_{ijs},\ i=1,\ \ldots,\ m,$$

де a_{ijs} – результат гри для стратегій A та B за s-го повторення гри.

На k-ій ітерації гри максимальний накопичений виграш гравця A та мінімальний накопичений програш гравця B, а також верхня і нижня ціни гри відповідно будуть:

$$\max_i v_i(k) = k\gamma_1(k).$$

$$\min_j \mu_j(k) = k\gamma_2(k).$$

У теорії ігор доведено, що

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_1(k) = \lim_{k\to\infty} \gamma_2(k) = \gamma .$$

Це означає, що виграші гравців *A* та *B* прямують до ціни гри, а їхні змішані стратегії

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix} \text{ та } S_B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

наближаються до оптимальних змішаних стратегій.

Про закінчення ітеративного процесу вибору стратегій можна судити за значенням величини:

$$\Delta(k) = \min_{1\le s\le k} \gamma_1(s) - \max_{1\le s\le k} \gamma_2(s) .$$

Коли за деякого $k = N$ величина *Δ(N)* не перевищує заданого значення, процес повторень гри припиняють і приймають за наближену ціну гри:

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[\min_{1\le s\le n} \gamma_1(s) + \max_{1\le s\le n} \gamma_2(s)\right],$$

а за оптимальні стратегії приймають

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix} \text{ та } S_B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

для яких реалізуються відповідно

$$\max_{1\le s\le n} \gamma_2(s) \text{ та } \min_{1\le s\le n} \gamma_1(s).$$

Приклад 7.7. Нехай задано платіжну матрицю :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти розв’язок ітераційним (наближеним) методом Брауна. Перші 4 ітерації подано в таблиці 7.2

Таблиця 7.2 – Приклад розв’язання задачі теорії ігор ітераційним (наближеним) методом Брауна

№ ітерації k	Гравець А						Гравець В						Різниця виграшів
	Стратегія	Накопичувальний виграш гравця В			Ціна	Макс. виграш	Стратегія	Накопичувальний виграш гравця А			Ціна	Мін. програш	
	i_k	$\mu 1(k)$	$\mu 1(k)$	$\mu 1(k)$	$\gamma 2(k)$	max 2(k)	j_k	$\nu 1(k)$	$\nu 2(k)$	$\nu 3(k)$	$\gamma 1(k)$	min 1(k)	Δk
1	1	5	**1**	7	$\frac{1}{1}$=1	1	2	1	5	**7**	$\frac{7}{1}$=7	7	7-1=6
2	3	**7**	8	12	$\frac{7}{12}$= 3,5	3,5	1	6	**13**	9	$\frac{13}{2}$= 6,5	6,5	6,5-3,5=3
3	2	15	13	**12**	$\frac{12}{3}$=4	4	3	13	13	**14**	$\frac{13}{3}$= 4,66	4,66	4,6-4 =0,66
4	3	**17**	20	17	$\frac{17}{4}$= 4,25	4,25	1	18	**21**	16	$\frac{21}{4}$= 5,25	5,25	5,25-4,25 =1
5	2	25	25	**17**	$\frac{17}{5}$= 3,4	3,4	3	**25**	21	21	$\frac{25}{5}$= 5	5	5 -3,4 = 1,6
6	1	30	26	**24**	$\frac{24}{6}$= 4	4	3	**32**	21	26	$\frac{32}{6}$= 5,3	5,3	5,3-4 = 1,3

На основі виконаних 4 ітерацій отримуємо розв’язок задачі, а саме:

$$S_A = \left(\frac{2}{6}; \frac{2}{6}; \frac{2}{6}\right),$$

$$S_B = \left(\frac{2}{46}; \frac{1}{6}; \frac{3}{6}\right),$$

$$\gamma = \frac{min\gamma_1(k) + max\gamma_2(k)}{2} = \frac{5,3 + 4}{2} = 4,65.$$

7.11 Економічна інтерпретація розв'язання задач теорії ігор

Приклад 7.8. Швейна фабрика планує до випуску нову модель одягу. Попит на цю модель не може бути точно визначеним. Однак можна передбачити, що його величина характеризується трьома можливими станами (I, II, III). З урахуванням цих станів аналізується три можливих варіанти випуску цієї моделі (А, Б, В). Кожен з цих варіантів потребує своїх витрат і забезпечує, як результат, різний ефект. Прибуток (тис. грн), який отримує фабрика за такого обсягу випуску моделі і відповідного попиту, визначається матрицею:

$$\begin{array}{cccc} & & \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ & \begin{pmatrix} 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

Необхідно знайти обсяг випуску моделі одягу, що забезпечує середню величину прибутку за будь-якого попиту.

Розв'язання.

I

I I II

$$\begin{pmatrix} 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix} \quad 2$$

1

0

2

22 3 4

$$\alpha = 22;\ \beta = 22;\ \vartheta = \alpha = \beta = 22.$$

Отже, гра має сідельну точку, що відповідає I варіанту випуску моделей одягу. Обсяг випуску моделі, що відповідає цьому варіанту, забезпечує прибуток 22 тис. грн за будь-якого попиту.

Приклад 7.9. Підприємство «Агрокомплекс» має певну обмежену ділянку землі, на якій може посадити одну з трьох зернових культур:

- пшеницю,
- рис,
- гречку.

Урожай цих культур залежить від погодних умов, які можуть бути

- посушливими,
- нормальними,
- дощовими.

Агроном має інформацію про врожайність цих культур для трьох різних станів погоди, відображену в таблиці 7.3:

Таблиця 7.3 – Табличне подання умови задачі «Агрокомплекс»

Види культур	Можливі стани природи			Ціни (Ц)
	Засуха (З)	Нормальна (Н)	Дощова (Д)	
Пшениця (П)	21,7	42,1	18,3	117,23
Рис (Р)	9,5	56,3	15,5	243,22
Гречка (Г)	30,4	48,1	34,5	163,65

Тоді платіжна матриця A, що характеризує можливі доходи, які може отримати агроном від кожної з культур за різних погодних умов, буде мати вигляд:

Таблиця 7.4 – Платіжна матриця A задачі «Агрокомплекс»

Види культур	Можливі стани природи		
	З	Н	Д
П	2342,67	4927,47	1281,8
Р	2756,24	183898,52	2549,27
Г	5621,52	9739,15	6313,15

Платіжна матриця A отримана як результат множення врожайності зернової культури на її ціну.

Необхідно визначити стратегію, в якій агроном має засіяти ділянку землі, щоб максимізувати свій дохід незалежно від того, якими будуть погодні умови.

Ця задача може бути зведена до некооперативної гри. В цьому випадку перший гравець (A) є агрономом, а другий гравець (B) – погодні умови.

Агроном має у своєму розпорядженні три чисті стратегії:

- перша чиста стратегія передбачає, що вся земля буде засіяна культурою П (пшеницею);
- друга чиста стратегія передбачає, що вся земля буде засіяна культурою Р (рисом);
- третя чиста стратегія передбачає, що вся земля буде засіяна культурою Г (гречкою).

Як гравець, природа також може використовувати три можливі чисті стратегії:

- посушливу погоду, яка відповідає першій чистій стратегії З;
- нормальну погоду, яка відповідає другій чистій стратегії Н;
- дощову погоду, яка відповідає третій чистій стратегії Д.

1. Проаналізуємо платіжну матрицю гри A:

$$A = \begin{pmatrix} 2342,67 & 4927,47 & 1281,8 \\ 2756,24 & 183898,52 & 2549,27 \\ 5621,52 & 9739,15 & 6313,15 \end{pmatrix}.$$

Вона не спрощується.

2. Перевіримо, чи має ця гра сідельну точку. Знайдемо верхню та нижню ціну гри:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 5621,52.$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 5621,52.$$

Оскільки нижня ціна гри дорівнює верхній ціні гри, то ця некооперативна гра має сідельну точку і вирішується в чистих стратегіях.

Отже, можна зробити висновок, що засіваючи всю ділянку гречкою, підприємство «Агрокомплекс» матиме прибуток щонайменше 5621,52 грошових одиниць незалежно від кліматичних умов.

7.12 Питання для самоконтролю

1. Наведіть загальну постановку задачі теорії ігор.
2. Які види ігор вам відомі? Як класифікуються ігри?
3. Як задається гра? Як звести конфліктну ситуацію до гри?
4. Перерахуйте головні поняття теорії ігор та наведіть їх означення.
5. Яка гра називаються матричною? В чому відмінність між чистими та змішаними стратегіями матричних ігор?
6. Як обчислюються нижня та верхня ціни гри? Наведіть співвідношення для їх обчислення.
7. Як знаходиться сідельна точка?
8. Наведіть критерії існування чистих стратегій.
9. Що таке принцип мінмакса в теорії ігор?
10. Яку стратегію називають змішаною? Як її задають?
11. Охарактеризуйте дублювальні та домінувальні стратегії.
12. Чи завжди є розв’язок матричних ігор у змішаних стратегіях? Обґрунтуйте відповідь.
13. Перерахуйте відомі вам методи розв’язування скінченної гри із сідельною точкою.
14. Яку гру можна розв’язати графічно? Сформулюйте покроковий алгоритм графічного методу знаходження розв’язку гри.
15. Як звести гру до задачі лінійного програмування? Для чого це необхідно? Яку гру можна розв’язати у такий спосіб?
16. За яких умов в одного гравця може бути декілька оптимальних стратегій? Обґрунтуйте.
17. Що таке гра з нульовою сумою?
18. Що таке чиста і змішана стратегія?
19. Що називається розв’язком гри в чистих і змішаних стратегіях?
20. Які властивості оптимальних стратегій?
21. Що таке активна стратегія?
22. Які основні методи розв’язання матричних ігор і обмеження, що накладаються на ці методи?
23. Який алгоритм лінійного програмування можна використовувати для знаходження розв’язку гри?
24. В чому полягає суть ітераційного методу розв’язання?
25. Як визначається збіжність у разі використання ітераційного методу розв’язання задачі теорії ігор?

7.13 Завдання для виконання № 13. Розв'язування ігрових задач теорії ігор

1. Скласти платіжну матрицю $\left|\mathbf{a}_{ij}\right|$ розміром 5×5, що має сідельну точку. Знайти ціну гри, оптимальну стратегію гравця А (α), оптимальну стратегію гравця В (β).

2. Для платіжної матриці, згідно з варіантом, знайти розв'язок графічно, аналітично та шляхом її зведення до задачі лінійного програмування.

Варіанти завдань для виконання:

№ вар.	n×m	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{41}	a_{32}	a_{42}
1	2×4	1	2	15	1	6	9	1	3	7	9	5	4
2	4×2	5	11	2	5	9	8	2	1	1	3	0	6
3	2×4	14	7	3	9	8	7	3	2	12	5	12	11
4	4×2	6	10	8	8	5	6	15	2	1	3	4	4
5	2×4	2	4	14	7	4	5	4	10	9	0	8	3
6	4×2	8	5	13	6	3	4	0	6	7	12	11	2
7	2×4	9	8	11	3	2	13	5	10	4	4	6	8
8	4×2	1	12	2	2	2	12	6	7	7	9	5	3
9	2×4	5	6	3	1	8	11	7	4	4	2	12	9
10	4×2	4	2	7	11	6	3	8	0	1	10	4	5
11	2×4	8	3	12	10	7	2	9	3	11	4	5	8
12	4×2	6	4	10	9	12	1	10	5	5	6	3	4
13	2×4	6	5	9	11	10	0	11	4	2	1	2	8
14	4×2	7	9	7	7	9	13	12	4	0	3	5	8
15	2×4	1	8	6	13	2	14	6	2	1	3	3	9
16	4×2	3	7	12	14	3	15	5	1	3	1	4	4
17	2×4	4	6	5	10	4	2	12	7	7	9	3	1
18	4×2	3	1	9	9	5	7	3	7	6	6	4	0
19	2×4	5	3	11	5	7	5	2	3	3	8	9	12
20	4×2	2	5	4	8	9	12	8	6	1	1	2	11

7.14 Завдання для виконання № 14. Розробка алгоритму і програми для розв'язування ігрових задач оптимізації методом Брауна

Мета: набути практичних навичок розв'язування ігрових задач оптимізації методом Брауна та його програмної реалізації

Порядок виконання роботи:

1. Скласти платіжну матрицю гри розміром 3×3 , що не має сідельної точки.
2. Розв’язати цю задачу шляхом зведення її до ЗЛП. Знайти розв’язок.
3. Розв’язати цю задачу методом Брауна, виконавши не менше 10 ітерацій. Результати подати у вигляді таблиці.
4. Розробити алгоритм та програму, що реалізує метод Брауна.
5. Провести тестування розробленої програми.
6. За результатами виконання роботи оформити звіт.

Зміст звіту:

1. Титульний аркуш за вимогою вищої школи.
2. Мета, варіант завдання.
3. Практичні результати виконання завдання.
4. Схема програми, що реалізує метод Брауна.
5. Опис програми.
6. Результати тестування розробленої програми.
7. Висновки за результатами роботи.
8. Додаток 1. Інструкція користувача до розробленої програми.
9. Додаток 2. Лістинг розробленої програми.

Варіанти завдань:

У в а г а !!!

Платіжну матрицю скласти самостійно. Для кожного члена бригади початкова стратегія обирається різною, у випадку, якщо бригада складає одну платіжну матрицю.

ГЛОСАРІЙ

Дослідження операцій – operations research
Двоїстість – duality
Двоїста задача – a double task
Двоїста оцінка – double-edged score
Спряжена задача – conjugate problem
Критерій оптимальності – criterion of optimality
Чутливість задачі лінійного програмування – sensitivity of the linear programming problem
Постоптимальний аналіз – postoptimal analysis
Двоїстий симплекс-метод – dual simplex method
Розв’язувальний рядок – solving string
Розв’язувальний стовпець – solving column
Параметричне програмування – parametric programming
Математична модель транспортної задачі – mathematical model of the transport problem
Початковий опорний план – initial reference plan
Пункт постачання – delivery point
Пункт споживання – point of consumption
Тарифи перевезень – transportation tariffs
Метод північно-західного кута – northwest corner method
Метод мінімальної вартості – method of minimum cost
Метод подвійної позначки – double mark method
Метод апроксимації Фогеля – Vogel approximation method
Вироджений опорний план транспортної задачі – degenerate reference plan of the transport problem
Контур перерозподілу – redistribution outline
Метод потенціалів – the method of potentials
Задача цілочисельного лінійного програмування – the problem of integer linear programming
Метод відсікальних площин Гоморі – Gomori's method of cutting planes
Метод гілок і меж – method of branches and bounds
Цілочисловий розв’язок – integer solution
Теорія ігор – game theory
Функція виграшу – win function
Стратегія гри – game strategy
Гра з нульовою сумою – a zero-sum game
Платіжна матриця – payment matrix
Максмін – maxmin
Мінмакс – minmax
Дублювальна стратегія – duplicating strategy
Домінувальна стратегія – dominant strategy

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.
2. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Зайченко Ю. П. – [7-е вид.]. – К. : ВД «Слово», 2006. – 816 с.
3. Хом'юк І. В. Математичне програмування. Частина 2 : навчальний посібник / Хом'юк І. В., Хом'юк В. В., Карпенко В. Л. – Вінниця : ВНТУ, 2005.
4. Михалевич В. М. Вища математика. Математичне програмування в Maple. Частина ІІ. Двоїсті та цілочислові задачі лінійного програмування : навчальний посібник / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 78 с.
5. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник / Катренко А. В. – Львів : «Магнолія 2006», 2009. – 350 с.
6. Кігель В. Р. Елементи лінійного цілочислового, лінійного, нелінійного програмування : навч. посібник / Кігель В. Р. – К. : ІСДО, 1995. – 400 с.
7. Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : збірник задач / О. Ю. Зайченко, Ю. П. Зайченко. – К. : ВД «Слово», 2007. – 472 с.
8. Hamdy A. Taha OPERATIONS RESEARCH: AN INTRODUCTION. SEVENTH EDITION. University of Arkansas, Fayetteville, 2005. – 912 p.
9. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» для студентів напряму підготовки «Комп'ютерні науки» заочної форми навчання / Укладачі : О. К. Колесницький, А. А. Яровий. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 90 с.
10. Ларіонов Ю. І. Системний аналіз і дослідження операцій : навчальний посібник. – К. : УМК ВО, 1992. – 155 с
11. Основи математичних методів дослідження операцій / Лавров Є. А., Клименко Н. А., Перхун Л. П. та ін. / за ред. Н. А. Клименко. – К. : ЦК Компринт, 2015. – 452 с.
12. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. – Суми: Сумський державний університет, 2017. – 212 с. https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/68212/1/Lavrov_matematychni_metody.pdf;jsessionid=C5749769ACDEF03AA41E20FA9B8DFC70
13. Питання з теорії для конспектування з дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» https://drive.google.com/file/d/1lvUhyfXyafZU00Ou8A4ZMaAbDX6v80lY/view
14. Методи оптимізації та дослідження операцій. Частина 1. (Електронний навчальний посібник для студентів спеціальності 7.0802 – Інформатика) https://drive.google.com/file/d/1HZMQOt0n5Aj6AQ3m6xokvq7Hy6XfvUp4/view

Електронне навчальне видання

Андрій Анатолійович Яровий,
Ірина Володимирівна Хом'юк,
Любов Михайлівна Ваховська

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Частина 2

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *Л. Ваховською*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 21.11.2025 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2025-171.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: rvv.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.