

Й. Й. Білинський, В. М. Бурдейний, В. Г. Дзісь

**ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ
З ФІЗИКИ. РОЗДІЛ 1. МЕХАНІКА.
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА
ТЕРМОДИНАМІКА**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра загальної фізики

Й. Й. Білинський, В. М. Бурдейний, В. Г. Дзісь

**ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З
ФІЗИКИ. РОЗДІЛ 1. МЕХАНІКА.
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА
ТЕРМОДИНАМІКА**

Електронний практикум

Вінниця
ВНТУ
2026

УДК 533.21

Б61

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (Протокол № 11 від 26.03.2026 р.)

Рецензенти:

- В. Ф. Заболотний**, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри фізики і методики навчання фізики, астрономії Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.
- А. М. Сільвейстр**, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики і методики навчання фізики, астрономії Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.
- О. Ф. Шевчук**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри Комп'ютерних наук Вінницького національного технічного університету.

Білінський, Й. Й.

Б61 Лабораторний практикум з фізики. Розділ 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка : практикум [Електронний ресурс] / Білінський Й. Й., Бурдейний В. М., Дзись В. Г. – Вінниця : ВНТУ, 2026. – (PDF, 138 с.).

В практикумі описано цикл лабораторних робіт з механіки, молекулярної фізики, термодинаміки та теоретичні відомості для їх виконання. Подається приклад програми для обробки результатів експерименту у Mathcad.

Практикум може бути використаний здобувачами вищої освіти всіх спеціальностей ВНТУ для самостійної підготовки до виконання лабораторних робіт з фізики.

УДК 533.21

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1 ОЦІНЕННЯ ПОХИБОК	8
1.1 Похибки вимірювань	8
1.1.1 Систематичні похибки	10
1.1.2 Випадкові похибки	14
1.2 Прямі, непрямі, сукупні і сумісні вимірювання	17
1.2.1 Оцінення похибок прямих вимірювань	18
1.2.2 Оцінення похибок непрямих вимірювань	20
2 МЕХАНІКА	25
2.1 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.10	25
2.1.1 Динаміка поступального руху твердого тіла. Імпульс. Закон збереження імпульсу	25
2.1.2 Енергія. Закон збереження механічної енергії	26
2.1.3 Абсолютно пружний і абсолютно непружний центральні удари тіл	29
2.1.4 Динаміка обертового руху Момент сили. Момент імпульсу. Рівняння моментів	32
2.1.5 Кінетична енергія тіла, яке перебуває в обертовому русі. Момент інерції	34
2.1.6 Теорема Штейнера	38
2.1.7 Момент імпульсу твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу	38
2.1.8 Основне рівняння динаміки обертового руху	40
Лабораторна робота № 1.1 Дослідження прямолінійного руху тіл в полі тяжіння за допомогою машини Атвуда	41
Лабораторна робота № 1.3 Вивчення центрального удару куль	45
Лабораторна робота № 1.4 Визначення швидкості кулі за допомогою балістичного маятника	54
Лабораторна робота № 1.5 Вивчення абсолютно пружного цен- трального удару куль за допомогою конденсаторного хронометра	58

Лабораторна робота № 1.6 Визначення моментів інерції твердих тіл за допомогою трифілярного підвісу	63
Лабораторна робота № 1.7 Визначення моменту інерції маятника Обербека	69
Лабораторна робота № 1.8 Визначення моменту інерції маховика	75
Лабораторна робота № 1.10 Визначення моментів інерції тіл із закону збереження енергії	80
3 Молекулярна фізика та термодинаміка	85
Лабораторна робота № 7.1 Вивчення термодинамічних процесів з ідеальними газами та експериментальне визначення показника адіабати повітря	85
Лабораторна робота № 7.2 Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя та середньої довжини вільного пробігу молекул повітря	92
Лабораторна робота № 7.3 Визначення коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса	97
3.1 Загальні теоретичні відомості до лабораторних робіт 7.4, 7.5.....	104
Лабораторна робота № 7.4 Визначення коефіцієнта теплопровідності металів.....	111
Лабораторна робота № 7.5 Визначення коефіцієнта теплопровідності твердих тіл з низькою теплопровідністю	114
Лабораторна робота № 7.6 Визначення зміни ентропії під час нагрівання і плавлення свинцю	118
ЛІТЕРАТУРА	125
ДОДАТКИ	126
Додаток А. Фізичні константи та фізичні величини	
Основні фізичні сталі	127
Густина твердих тіл	128
Густина рідин	128
Густина газів (за нормальних умов)	128
Множники і приставки для утворення десяткових кратних і частинних одиниць та їхні найменування.....	129
Додаток Б. Таблиці похідних та інтегралів.....	130

Таблиця основних похідних	130
Таблиця основних інтегралів.....	131
Додаток В Система штучного інтелекту	134
Додаток Г. Приклади обробки результатів фізичного експерименту засобами системи Mathcad	134

ВСТУП

Лабораторна робота – невелике за об'ємом та змістом початкове наукове дослідження здобувача вищої освіти (в подальшому – здобувача). У процесі виконання лабораторної роботи здобувач набуває навичок застосування теоретичних знань на практиці, вчиться обробляти та аналізувати результати експерименту.

Під час виконання лабораторних робіт здобувачі з великою увагою повинні поставитися до вивчення суті фізичних явищ, освоєння техніки та методики проведення фізичного експерименту. Нераціонально приступати до виконання лабораторної роботи, не засвоївши теоретичного матеріалу, не маючи чітких уявлень про мету експерименту, методику та порядок його проведення. Підготовку здобувача до виконання лабораторних робіт викладач перевіряє в процесі співбесіди зі здобувачем на початку кожного заняття.

До виконання роботи допускаються здобувачі, які засвоїли теоретичний матеріал та мають заготовку для звіту (короткий конспект). Звіт містить такі пункти (заготовка – лише пункти 1–5, пункти 6–7 заповнюються після виконання роботи):

1. Назва лабораторної роботи, її номер і поставлена мета.
2. Короткий конспект теоретичних основ методу вимірювань і схема установки.
3. Порядок виконання роботи.
4. Контрольні запитання.
5. Заготовки таблиць для занесення результатів експерименту та результатів його обробки.
6. Обробка результатів експерименту (обчислення фізичних величин та оцінення їх похибок, побудова графіків).
7. Висновки.

Здобувач, який з'явився на лабораторне заняття без заготовки або не засвоїв основних теоретичних положень лабораторної роботи, до занять не допускається.

Одержавши допуск до виконання лабораторної роботи, здобувач приступає до експериментальних досліджень, у процесі яких він проводить виміри фізичних величин. Для підвищення точності потрібно

виміри кожної фізичної величини проводити не менше трьох разів. Результати експерименту потрібно чітко записувати у таблиці. Після закінчення дослідів результати експерименту необхідно подати викладачеві на підпис і приступити до заповнення другої частини звіту (пункти 6–7). Обробку результатів бажано виконувати на ЕОМ або калькуляторі, розробивши для цього програми.

Оброблення результатів експерименту зручно проводити у системі Mathcad , наприклад Mathcad-15.

Графіки необхідно будувати на окремій сторінці звіту) додержуючись масштабу. Розміри графіка не менше, ніж 14×20 см.

Під час захисту роботи здобувач має подати повний звіт про виконання лабораторної роботи, результат проходження тесту та дати повні відповіді на поставлені викладачем теоретичні запитання.

1 ОЦІНЕННЯ ПОХИБОК

Під час виконання будь-яких наукових або інженерних обчислень дуже часто доводиться мати справу з наближеними числами. Виникає цілком закономірне питання: «Яким буде граничне значення похибки таких обчислень?»

Поставлена задача зводиться до оцінення похибки функції кількох змінних

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

за відомими абсолютними граничними похибками її аргументів $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$.

1.1 Похибки вимірювань

Фізика є точною природничою наукою, в основі якої лежать вимірювання. Мета вимірювань полягає у визначенні істинного значення деякої вимірюваної фізичної величини A , яка вважається існуючою. Істинне значення вимірюваної величини – це значення, яке ідеальним чином відображає властивість цього об'єкта як в кількісному, так і в якісному відношенні. Воно не залежить від засобів пізнання і є тією абсолютною істиною, яку намагаються виразити у вигляді числового значення. Результатом вимірювань, навпаки, є продукт пізнання і залежить від його засобів: методу вимірювання, технічного оснащення експерименту, суб'єктивних особливостей людини, що здійснює вимірювання. Оскільки фізика є точною наукою, то в кожному окремому випадку необхідно вказати граничні значення, між якими знаходиться вимірювана величина. Це робиться за допомогою теорії похибок. Під час експериментальних вимірювань різних фізичних величин, а також в

процесі виконання обчислень з ними виникає необхідність врахування похибок або помилок вимірювань. Похибка вимірювань – це відхилення результатів вимірювання фізичної величини від її дійсного значення.

Похибки поділяють на систематичні та випадкові. Систематичні похибки виникають внаслідок зіпсованості вимірювальних приладів, помилковості самого методу вимірювань або інших недоглядів зі сторони дослідника. Випадкові похибки обумовлені неточністю рахування даних та іншими відхиленнями ймовірнісного типу. Для одержання найбільш достовірних величин необхідно проводити велику кількість вимірювань.

У випадку прямих вимірювань, коли шукане значення вимірюваної величини визначається або шляхом безпосереднього порівняння його з мірами, або за допомогою вимірювальних приладів, прокаліброваних у відповідних одиницях. Виявляється, що не дивлячись на постійність основного комплексу умов, результати вимірювання за кожним методом більше або менше відрізняються один від одного, зазнаючи розсіювання. Причини спотворення і їх характер досить різноманітні. Вони можуть бути викликані недоліками вимірювальної апаратури, недосконалістю органів чуттів спостерігача, непостійністю умов спостереження, неповнотою знань про всі обставини явищ, які спостерігаються і, нарешті, неправильними діями експериментатора. Різниця ΔX між результатом вимірювання X та істинним значенням $X_{\text{іст}}$ вимірюваної величини називається абсолютною похибкою вимірювання

$$\Delta X = X' - A. \quad \Delta X = X - X_{\text{іст}} \quad (1.1)$$

Абсолютна похибка має таку ж розмірність як і величина, що вимірюється.

Оскільки істинне значення $X_{\text{іст}}$ вимірюваної величини невідоме, то невідома і похибка вимірювання. Тому для отримання наближених відомостей про неї замість істинного значення $X_{\text{іст}}$ доводиться використовувати, так зване, дійсне значення вимірюваної величини. Під дійсним значенням вимірюваної величини розуміють значення, яке знайдене експериментально і настільки наближається до істинного, що під час розв'язання подібних задач воно може бути використане замість істинного значення.

Крім абсолютної похибки важливою характеристикою точності вимірювання є відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% . \quad (1.2)$$

Відносна похибка вимірюється у відсотках.

Наявність похибок вносить обмеження для числа достовірних значущих цифр числового виразу вимірювальної величини і визначає правильність, придатність і точність вимірювання. Похибки вимірювань можна об'єднати в дві основні групи: випадкові та систематичні.

1.1.1 Систематичні похибки

Систематичні похибки. Похибки, що залишаються постійними або закономірно змінюються в процесі вимірювання, називаються систематичними похибками вимірювання. Їх відмінна особливість – збереження такої тенденції поведінки під час повторних вимірювань однієї і тієї ж самої величини або детермінований характер прояву. Як приклади систематичних похибок приймають похибки вимірювальних приладів, що походять від їх неправильного регулювання; похибки показів вимірювальних приладів внаслідок неправильного градуювання шкал; похибки, викликані неправильним установленням або розміщенням мір і вимірювальних приладів; похибки, викликані зміною температури мір та

вимірювальних приладів і т. д. Результати вимірювань настільки правильні, наскільки вони не спотворені систематичними похибками, і тим правильніші, чим менші ці похибки. Вплив систематичних похибок на результати вимірювання усувають дослідним шляхом, вводячи знайдені із спостереження поправки або проводячи спостереження певним чином. Систематичні похибки неможливо усунути повністю, їх можна лише зменшити до певного рівня, який визначається вимогами до точності вимірювань. Залишкову систематичну похибку називають невиключеною систематичною похибкою.

Абсолютну систематичну похибку позначають через ΔX_c або θ , відносну через ε_c .

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta X_c}{X} 100 \% = \frac{\theta}{X} 100 \%. \quad (1.3)$$

Основні джерела систематичних похибок:

- похибки вимірювальних приладів (інструментальні похибки). За умови виконання правил експлуатації приладів їх систематична похибка визначається класом точності приладу;
- похибки установки, що залежать від неправильного або недбалого установлення або розміщення вимірювальної апаратури та інших пристосувань, що являються частиною одного комплексу, неузгодженістю їх характеристик, впливом різних зовнішніх фізичних полів, нестабільністю джерел живлення тощо. Такого роду похибки можуть бути викликані, наприклад, установленням вимірювальних приладів не по нахилу або рівню, розміщенням, за якого вони здійснюють вплив один на одного; утворенням петель із провідників, що створює магнітне поле та впливає на покази

приладів; спостереженнями в умовах змінної температури; дією вітру або сонячних променів;

- власні похибки, обумовлені кваліфікацією та індивідуальними особливостями спостерігача (оператора, що проводить виміри). Наприклад, запізнення або випередження в реєстрації моменту якого-небудь сигналу або асиметрія, яка виявляється під час встановлення стрілки приладу між двома поділками шкали вимірювального приладу;
- похибки методу, або методичні похибки, викликані недостатньою розробкою методу або неповним знанням всіх обставин спостережуваних явищ. Ці похибки особливо часті у разі застосування нових методів, а також за недостатньо обережному спрощенні існуючих методів.

Клас точності вимірювального приладу. Для характеристики більшості вимірювальних приладів часто використовують поняття класу точності. За клас точності γ вимірювального приладу приймають його зведену похибку. Зведеною похибкою вимірювального приладу вважають виражене у відсотках відношення найбільшої абсолютної похибки до верхньої межі вимірювання приладу X_{max} (тобто найбільшого значення величини X_{max} , яке може бути виміряне за шкалою приладу):

$$\gamma = \left| \frac{\Delta x}{x_{max}} \right| 100\%. \quad (1.4)$$

За класом точності (зведеною похибкою) вимірювальні прилади діляться на дев'ять класів: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

Прилади класів точності 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 застосовуються для точних лабораторних вимірювань і називаються прецизійними (від англ. Precision – точність). У техніці застосовуються прилади класів точності 1,0; 1,5; 2,5 і 4,0 (технічні).

Клас точності приладу вказується на шкалі приладу. Виробник, що випускає прилад, гарантує відносну похибка вимірювання цим приладом, що дорівнює класу точності (зведеної похибці) приладу під час вимірювання за відхилення стрілки приладу на всю шкалу. Визначивши за шкалою приладу клас точності і граничне значення, легко розрахувати його абсолютну похибку

$$\Delta X_c = \pm \frac{\gamma X_{max}}{100}, \quad (1.5)$$

яку приймають однакою на всій шкалі приладу. Знаки «+» і «-» означають, що похибка може бути допущена як в сторону збільшення, так і в бік зменшення від дійсного значення вимірюваної величини.

Якщо на шкалі приладу клас точності не вказано, то цей прилад позакласний, тобто його приведена похибка перевищує 4 %. За величину його систематичної похибки приймають половину ціни найменшої поділки приладу.

Досить часто в процесі вимірювань необхідно враховувати декілька складових невиключеної систематичної похибки. Наприклад, під час вимірювання секундоміром часу падіння кульки в процесі визначення в'язкості рідини методом Стокса виявлено декілька невиключених абсолютних систематичних похибок (ΔX_{c_i}): невиключена систематична похибка зумовлена класом точності секундоміра ΔX_{c_1} ; невиключена систематична похибка зумовлена реакцією оператора під час фіксування часу секундоміром ΔX_{c_2} ; невиключена систематична похибка зумовлена паралаксом під час проходження кулькою міток на трубці віскозиметра ΔX_{c_3} .

В таких випадках враховують суму невиключених систематичних похибок, тобто встановлюють їх довірчі інтервали. Якщо число їх складових $N \leq 3$, то довірчі інтервали невиключених складових абсолютної систематичної похибки визначають за формулою:

$$\Delta X_c = \pm \sum_{i=1}^n |\Delta X_{c_i}|. \quad (1.6)$$

За $N \geq 4$ використовують формулу:

$$\Delta X_c = \pm k \sum_{i=1}^n (\Delta X_{c_i})^2, \quad (1.7)$$

де k — коефіцієнт, який залежить від вибраної довірчої ймовірності P . У випадку рівномірного закону розподілу похибок для $P = 0.95$, $k = 1,1$, а для $P = 0.99$, $k = 1,4$.

1.1.2 Випадкові похибки

Випадкові похибки — це похибки, які обумовлені відхиленням (флуктуацією) результатів спостережень за певною величиною під час виконання повторних вимірювань цієї самої величини. Випадкові похибки являють собою похибки, у появі кожної з яких не спостерігається якої-небудь закономірності. Їх відмінна особливість — неможливість точної реалізації одної і тої самої величини в процесі повторних вимірювань, або імовірнісний характер прояву. Вони є результатом впливу на процес вимірювань ряду випадкових факторів, яких не може передбачити і врахувати оператор, що проводить вимірювання. На відміну від систематичних, випадкові похибки не можна усунути шляхом введенням поправок в результати вимірювань. Причина цього криється в природі випадкових явищ. Шляхи і методи їх дослідження розробляються в теорії ймовірностей, а побудова відповідних математичних моделей для опису результатів дослідів — в математичній статистиці. У випадку збільшення числа вимірювань випадкова похибка зменшується. Про випадкову похибку можливо вести мову лише тоді, коли проведено серію дослідів, яка містить принаймні три виміри.

Основні характеристики випадкової похибки:

1. Середнє арифметичне значення абсолютної випадкової похибки

$$\Delta \bar{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|, \quad (1.8)$$

де n – число вимірів величини x ,

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ – середнє арифметичне значення величини x .

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\Delta \bar{x}_g}{\bar{x}} 100\%. \quad (1.9)$$

2. Середнє квадратичне значення абсолютної випадкової похибки окремого вимірювання

$$S(x) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.10)$$

За нормального закону розподілу ймовірність того, що похибка окремого вимірювання в серії не перевищить знайдену середню квадратичну похибку, становить 0,68. Отже у 32 випадках із 100 або у 3 із 10 дійсна похибка може бути більша, ніж обчислена за формулою (1.6).

3. Середньоквадратична похибка серії вимірювань або середньоквадратична похибка середнього арифметичного

$$S(\bar{x}) = \sigma_{ca} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad (1.11)$$

де n – число вимірів величини x ,

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ середнє арифметичне значення величини x .

Довірчий інтервал (довірча межа) випадкової похибки (її часто називають довірчою випадковою похибкою) за довірчої ймовірності P становить:

$$\Delta_{\bar{x}}(P) = t \cdot S(\bar{x}), \quad (1.12)$$

де t – коефіцієнт Стюдента (табл. 1.1), який залежить від числа ступенів вільності t та довірчої ймовірності P . Для прямих багатократних

вимірювань число ступенів вільності становить:

$$f = n - 1,$$

де n – число спостережень у серії.

Таблиця 1.1 – Коефіцієнти розподілу Стюдента для $P=0.95$

P=0.95											
f	3	4	5	6	8	10	12	18	22	30	40
t	3,18	2,78	2,57	2,45	2,31	2,23	2,18	2,10	2,07	2,04	2,02

Під час створення вимірювальної апаратури і організації процесу вимірювання загалом, інтенсивність прояву більшості факторів, що обумовлюють появу випадкових похибок, вдається звести до такого рівня, що всі вони впливають на формування цих похибок більш або менш однаково. Проте деякі з них, наприклад, раптовий спад напруги в мережі електроживлення, можуть проявитися несподівано сильно, внаслідок чого похибка прийме розміри, які явно виходять за межі, обумовлені ходом експерименту загалом. Такі похибки в складі випадкової похибки називаються грубими. До них відносять промахи – похибки, що залежать від спостерігача і пов'язані з неправильним поводженням із засобами вимірювання, некоректним відліком показів або помилками під час запису результатів. Спостереження, що містять грубі похибки і промахи, мають бути відкинуті, як ті, що не заслуговують довіри. Відсутність грубих похибок і промахів визначає придатність вимірювань.

Якщо під час оброблення вимірювань систематичні і грубі похибки усунені, а також усунені промахи, то випадкові похибки, що залишилися, визначають точність вимірювання. Результати вимірювання настільки

точні, наскільки вони не спотворені відносно прийнятого рівня випадковими похибками і тим точніші, чим більше є підстав вважати ці похибки малими.

1.2 Прямі, непрямі, сукупні і сумісні вимірювання. Прямі вимірювання

До прямих відносяться вимірювання, результат яких отримують на основі безпосередніх вимірювань відповідної фізичної величини. Наприклад, довжини – за допомогою лінійки, сили струму – амперметром, напруги – вольтметром.

Непрямі вимірювання. До непрямих (опосередкованих) відносяться вимірювання, результат яких отримують на основі прямих вимірювань декількох величин, пов'язаних із шуканою величиною певним рівнянням. Іншими словами, непрямі вимірювання подаються функцією $Y = \psi(X_1, \dots, X_n)$ випадкових параметрів $X_1, \dots, X_n$, що підпорядковуються однаковим або різним законам розподілу.

Сукупні і сумісні вимірювання. Ці види вимірювань характеризуються тим, що значення шуканих величин $v_i, i = 1, \dots, m$ розраховують за системою рівнянь, які пов'язують їх з деякими іншими величинами $x_j, j = 1, \dots, k$, що вимірюються прямими або непрямыми методами. Кожна комбінація X , отримана в одному досліді, дозволяє записати одне рівняння. Система рівнянь, що вміщує всю інформацію про шукані величини, має вигляд

$$f_r(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m; x_{1r}, \dots, x_{jr}, \dots, x_{kr}) = 0, r = 1, \dots, n,$$

де f_r – символ функціональної залежності між величинами в r -му досліді;

n – число дослідів.

В сумісних вимірюваннях під час переходу від одного рівняння до іншого, змінюються тільки значення величин $x_j, j = 1, \dots, k$, а за сукупних вимірювань – поєднання цих величин і разом з ними вид рівнянь.

Після підстановки у вихідну систему рівнянь результатів прямих (або непрямих) вимірювань і проведення необхідних перетворень отримуємо ряд рівнянь, що містять тільки шукані величини і числові коефіцієнти

$$f_r(v_1, \dots, v_m) = 0, \quad r = 1, \dots, n.$$

Ці рівняння називаються умовними.

Для того, щоб розрахувати значення шуканих величин, достатньо мати m рівнянь, тобто провести стільки дослідів, скільки є невідомих ($n = m$). Тоді результати вимірювань і довірчі границі їх похибок можна знайти методами обробки результатів непрямих вимірювань. Однак величина похибки результатів переважно буває значною. Для зменшення похибки необхідно збільшити об'єм інформації про шукані параметри, збільшивши для цього кількість дослідів.

Якщо у рівняння входить m невідомих, то число дослідів має становити $n \geq (5 \dots 7)m$.

Одним із найзагальніших способів пошуку оцінок істинних значень вимірювальних величин є метод найменших квадратів. Метод найменших квадратів в загальному випадку не забезпечує отримання найбільш ефективних оцінок, однак його застосування виправдовується як простою обчислювальною схемою, так і тим, що в ряді випадків цей метод дійсно дає найкращі оцінки.

1.2.1 Оцінення похибок прямих вимірювань

Однократні прямі вимірювання. Під час однократних вимірювань випадкова похибка не відома, тому результат вимірювання характеризується тільки його невиключеними систематичними абсолютною похибкою ΔX_c та відносною

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta X_c}{X} 100 \% . \quad (1.13)$$

Якщо систематична похибка має складові, то їх необхідно врахувати (формули 1.6, 1.7). Істинне значення вимірюваної величини знаходиться на інтервалі

$$X_{\text{іст}} = X \pm \Delta X_c. \quad (1.14)$$

Багатократні прямі вимірювання. Під час багатократних прямих вимірювань результат характеризується систематичними та випадковими похибками.

Систематичні похибки:

- невиключена систематична абсолютна похибка ΔX_c (формули 1.6, 1.7);
- невиключена систематична відносна похибка (формула 1.3).

Випадкові похибки:

- середня абсолютна випадкова похибка $\Delta \bar{X}_v$ (формула 1.8);
- середня відносна випадкова похибка ε_v (формула 1.9);
- середнє квадратичне значення абсолютної випадкової похибки окремого вимірювання $S(x)$ (формула 1.10);
- середньоквадратична похибка середнього арифметичного $S(\bar{x})$ (формула 1.11);
- довірчий інтервал випадкової похибки (довірча випадкова похибка) $\Delta_v(P)$ (формула 1.12).

Для отримання строгої оцінки загальної похибки для багатократних прямих вимірювань необхідно будувати композицію розподілу випадкових і невиключених систематичних похибок, але це досить громіздка процедура. Оцінення похибок багатократних прямих вимірювань в лабораторному практикумі будемо проводити за спрощеною схемою.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ – оцінка n вимірювань деякої фізичної величини.

Невиключена систематична абсолютна похибка ΔX_c .

Середнє арифметичне значення вимірюваної величини:

$$\bar{X} = X_c = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum X_i, \quad (1.15)$$

Невиключена систематична відносна похибка

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta X_c}{\bar{X}} 100 \%. \quad (1.16)$$

Середня абсолютна випадкова похибка

$$\Delta X_{св} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - X_c|, \quad (1.17)$$

Повна абсолютна похибка результату багатократних прямих вимірювань наближено визначається за формулою

$$\Delta X \approx \sqrt{\Delta X_c^2 + \Delta X_{св}^2}. \quad (1.18)$$

Відносна випадкова похибка

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta X_{св}}{\bar{X}} 100 \%. \quad (1.19)$$

Повна відносна похибка результату багатократних прямих вимірювань наближено визначається за формулою

$$\varepsilon \approx \sqrt{\varepsilon_c^2 + \varepsilon_v^2}.$$

Результат вимірювань записують у формі:

$$X = X_c \pm \Delta X,$$

або

$$X_c - \Delta X \leq X < X_c \leq \Delta X.$$

1.2.2 Оцінення похибок непрямих вимірювань

Для знаходження похибки результату експериментальних досліджень для нелінійної функціональної залежності $Z = f(a_1, a_2, a_3 \dots a_i \dots a_m)$, потрібно побудувати композицію розподілу випадкових та систематичних похибок. Але її побудова громіздка, тому для оцінення довірчої похибки використовують емпіричну формулу:

$$\Delta(P) = t_\Sigma \cdot S_\Sigma, \quad (1.20)$$

де

$$t_{\Sigma} = \frac{\Theta(P) + \varepsilon(P)}{S(\bar{Z}) + \frac{\Theta(P)}{\sqrt{3}}}, \quad S_{\Sigma} = \sqrt{S^2(\bar{Z}) + \frac{\Theta^2(P)}{3}}.$$

Довірчі межі невиключеної систематичної похибки за довірчої ймовірності P визначають за формулою:

$$\Theta(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^2 \Theta_i^2}, \quad (1.21)$$

$k=1$ за $P=0,9$

де $k=1,1$ за $P=0,95$,

$k=1,4$ за $P=0,99$

m – число параметрів залежності $Z = f(a_1, a_2, a_3 \dots a_i \dots a_m)$,

Θ_i – складова невиключеної систематичної похибки i -го параметра.

Довірчі межі випадкової похибки за довірчої ймовірності P визначають за формулою:

$$\varepsilon(P) = t \cdot S^2(\bar{Z}), \quad (1.22)$$

де $S(\bar{Z}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^2 S^2(\bar{a}_i)}$,

t – коефіцієнт Стюдента. Він залежить числа ефективних ступенів вільності f_e та вибраної довірчої ймовірності P (табл. 2.1).

$$f_e = \frac{\left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^2 S^2(\bar{a}_i) \right]^2}{\sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^4 S^4(\bar{a}_i) / n_i - 1 \right]} - 2, \quad (1.23)$$

де m – число аргументів,

n_i – число вимірів a_i аргументу.

Таблиця 1.2

Р	f_e										
	3	5	6	8	10	12	22	30	60	120	∞
0.90	2,35	2.01	1.94	1.86	1.81	1.78	1.72	1.70	1.67	1.66	1.64
0.95	3.18	2.57	2.45	2.31	2.23	2.18	2.07	2.04	2.00	1.98	1.96
0.99	5.84	4.03	3.07	3.36	3.17	3.06	2.82	2.75	2.66	2.62	2.58

Розглянутий метод переважно використовують для оцінення похибок наукових досліджень. Під час оцінювання похибок фізичного експерименту або інженерних обчислень в процесі виконання лабораторних робіт найчастіше використовують метод логарифмування.

Метод логарифмування дає завищену оцінку похибки, тому її називають граничною похибкою. Такої оцінки в багатьох випадках достатньо для технічних цілей. Зауважимо, що ми не зможемо обчислити її точне значення, а можемо лише оцінити її граничне (максимальне) значення. Для отримання більш точної оцінки похибки необхідно застосувати апарат математичної статистики та теорії ймовірностей, знайти розподіл композиції розподілу випадкових та систематичних похибок, проте така задача виходить за рамки нашого короткого курсу прикладної математики.

Розглянемо спрощену методику оцінення граничного значення похибки непрямих вимірювань методом логарифмування:

- записуємо розрахункову формулу як функцію кількох змінних

$$q = q(x_i), i = 1...n; \quad (1.24)$$

- логарифмуємо функцію

$$g(x_i) = \ln[q(x_i)]; \quad (1.25)$$

- знаходимо частинні похідні від функції (2.12)

$$g'(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \ln[q(x_i)]; \quad (1.26)$$

– знаходимо складові відносної невиключеної систематичної похибки через модулі добутків частинних похідних на відповідні абсолютні систематичні похибки аргументів Δx_i

$$\varepsilon_{ci} = |g'(x_i) \cdot \Delta x_i|, \quad (1.27)$$

– граничне значення відносної невиключеної систематичної похибки оцінюємо за співвідношенням

$$\varepsilon_c = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ci}; \quad (1.28)$$

– знаходимо складові відносної випадкової похибки через модулі добутків частинних похідних на відповідні абсолютні випадкові похибки аргументів Δx

$$\varepsilon_{Bi} = |g'(x_i) \cdot \Delta x_i|; \quad (1.29)$$

– граничне значення відносної випадкової похибки оцінюємо за співвідношенням:

$$\varepsilon_B = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{Bi}. \quad (1.30)$$

Похибки оцінені за співвідношеннями (1.28, 1.30) значно завищені. У цих співвідношеннях ми знаходили звичайну суму складових середніх значень похибок. Якщо систематична або випадкова похибки містять чотири і більше складових, то теорія похибок рекомендує оцінювати їх значення за формулами:

$$\varepsilon_c = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ci}, & n < 4 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ci}^2}, & n \geq 4 \end{cases}, \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_B = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{Bi}, & n < 4 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{Bi}^2}, & n \geq 4 \end{cases}, \quad (1.32)$$

– граничне значення загальної відносної похибки оцінюємо за формулою:

$$\varepsilon \approx \sqrt{\varepsilon_c^2 + \varepsilon_B^2}. \quad (1.33)$$

2 МЕХАНІКА

2.1 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.10

2.1.1 Динаміка поступального руху твердого тіла. Імпульс. Закон збереження імпульсу

Векторна величина, яка чисельно дорівнює добутку маси тіла m на вектор його швидкості $\vec{V}$, називається імпульсом тіла:

$$\vec{P} = m\vec{V}. \quad (2.1)$$

Запишемо другий закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.2)$$

Оскільки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad (2.3)$$

то рівняння (2.2) за $m = \text{const}$, враховуючи (2.1), можна записати у вигляді:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (2.4)$$

Ми отримали узагальнену форму запису другого закону Ньютона через імпульс

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (2.5)$$

Другий закон Ньютона в узагальненій формі (2.5) описує рух тіл як постійної, так і змінної маси, в той час як другий закон Ньютона, записаний у звичайній формі $\vec{F} = m\vec{a}$, справедливий лише для руху тіл постійної маси.

Із другого закону Ньютона, записаного в узагальненій формі, можна знайти середню силу взаємодії тіл:

$$\vec{F}_c = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t},$$

де ΔP – змінна імпульсу за проміжок часу Δt .

Розглянемо систему, що складається з N тіл (матеріальних точок). Тіла, що утворюють таку механічну систему, можуть взаємодіяти як між собою, так і з тілами, що не належать до цієї системи. Відповідно до цього, сили, що діють на тіла, поділяються на внутрішні і зовнішні. Коли зовнішні сили відсутні, система називається замкнутою.

Нехай маємо N частинок з масами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_n$ і частинки взаємодіють між собою з силами $\vec{F}_{ij}$. Це сила, що діє на тіло з номером i зі сторони іншого тіла з номером j . Згідно з третім законом Ньютона

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (2.6)$$

Тепер використаємо другий закон Ньютона в узагальненій формі, застосувавши його до кожного тіла системи

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_1}{dt} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1, \\ \frac{d\vec{P}_{21}}{dt} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2, \\ \frac{d\vec{P}_{n1}}{dt} &= \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n,n-1} + \vec{F}_n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – результувальні зовнішніх сил, що діють на відповідні тіла. Всі інші сили (позначені двома індексами) являють собою внутрішні сили.

Додамо ці рівняння, отримаємо:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_i + \dots + \vec{P}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.8)$$

В правій частині залишились тільки зовнішні сили, адже внутрішні попарно компенсуються – (2.6). Сума імпульсів тіл, що утворюють замкнуту систему, утворює імпульс системи. Тому (2.8) можна записати:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.9)$$

Якщо $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, то

$$\vec{P} = \text{const} \quad (2.10)$$

Ми вивели закон збереження імпульсу, який має таке формулювання: *імпульс замкнутої системи тіл залишається сталим незалежно від взаємодії її складових.*

2.1.2 Енергія. Закон збереження механічної енергії

Фізичні величини, за якими можна дати повну характеристику стану системи, називаються параметрами. Одним із параметрів стану системи є енергія системи. Мірою передачі руху від однієї системи (одного тіла) до іншої (іншого тіла) є робота. Отже, якщо система тіл має запас енергії, то вона може виконати роботу.

В механіці розрізняють кінетичну та потенціальну енергії.

Кінетична енергія – це енергія, яку має тіло внаслідок свого руху. Кінетична енергія тіла, яке знаходиться в поступальному русі, визначається за формулою:

$$W_k = \frac{mV^2}{2}, \quad (2.11)$$

де m – маса тіла,

V – його швидкість.

Знайдемо роботу сили з переміщення тіла масою m з положення 1 в положення 2.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 m\vec{a} d\vec{r} = m \int_1^2 \frac{d\vec{V}}{dt} d\vec{r} = m \int_1^2 \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{V} = m \int_1^2 \vec{V} d\vec{V} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}.$$

Отже, робота сили з переміщення тіла дорівнює зміні його кінетичної енергії.

$$A_{12} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}. \quad (2.12)$$

Потенціальна енергія визначається взаємним розміщенням тіл або взаємним розміщенням частин тіла одна відносно одної.

На тіла, що знаходяться в потенціальних полях (гравітаційному, електростатичному) діють особливі сили, які називають консервативними. До консервативних сил також відносять пружні сили, що виникають за пружних деформацій тіл. Це сили, робота яких залежить не від шляху, а лише від початкового і кінцевого положення тіла. Робота консервативних сил по замкнутому контуру дорівнює нулю $A = \oint_s \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = 0$.

Крім консервативних сил, в природі існують неконсервативні або дисипативні (дисипація – розсіювання) сили, прикладом яких є сила тертя. Дисипативні сили, це сили, робота яких залежить від траєкторії руху тіла. Робота дисипативних сил по замкнутому контуру не дорівнює нулю

$$A = \oint_s \vec{F}_o \cdot d\vec{r} \neq 0.$$

Системи, в яких діють лише консервативні сили, називають консервативними, а системи, в яких діють лише дисипативні сили, – дисипативними. Усі живі організми належать до дисипативних систем.

Потенціальна енергія тіла масою m , піднятого над поверхнею Землі на висоту h , визначається рівнянням:

$$W_i = mgh, \quad (2.13)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Знайдемо потенціальну енергію деформованої пружини. Елементарна робота, що виконується силою пружності під час деформації (розтягування або стискання) пружини на dx :

$$dA = Fdx = -kxdx,$$

де k – коефіцієнт пружності.

Робота пружної сили у разі деформації пружини від 0 до x :

$$A = -\int_0^x kxdx = -\frac{kx^2}{2}.$$

Робота сили пружності буде від'ємною, оскільки напрям сили і зміщення протилежні. Робота зовнішньої сили, яка стискає або розтягує пружину, буде додатною і дорівнюватиме $\frac{kx^2}{2}$. Ця робота йде на збільшення потенціальної енергії пружини.

Отже, потенціальна енергія деформованої пружини:

$$W_i = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.14)$$

Робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи:

$$A_{12} = W_{i1} - W_{i2}. \quad (2.15)$$

Закон збереження механічної енергії: повна механічна енергія замкнутої системи тіл, в якій діють тільки консервативні сили, залишається постійною.

$$W = \sum_{i=1}^n W_{\text{кп}} + \sum_{i=1}^n W_{\text{ко}} + \sum_{i=1}^n W_{\text{п}} = \text{const.}$$

$$W = \sum_{i=1}^n W_{\text{кп}} + \sum_{i=1}^n W_{\text{ко}} + \sum_{i=1}^n W_{\text{п}} = \text{const.}$$

Якщо ж у замкнутій системі, крім консервативних, діють також неконсервативні сили, наприклад, сили тертя, то повна механічна енергія системи не зберігається. Це пояснюється тим, що сили тертя здійснюють завжди від'ємну роботу – механічна енергія перетворюється у внутрішню. Отже, наявність сил тертя в замкнутій системі призводить до зменшення її повної механічної енергії. Дія сил тертя спричинює перетворення механічної енергії в інші, немеханічні види енергії. Але в цьому випадку виконується загальний закон збереження енергії: в ізольованій від будь-яких зовнішніх впливів системі залишається постійною сума всіх видів енергії.

2.1.3 Абсолютно пружний і абсолютно непружний центральні удари тіл

Ударом тіл називають сукупність явищ, що виникають під час короткочасної взаємодії тіл внаслідок зіткнення. Фізичні явища, які відбуваються під час удару, досить складні. Тіла при зіткненні деформуються, в них виникають сили пружності та тертя, також можуть виникати коливання і поширюватися механічні хвилі. Під час зіткнення тіл механічна енергія може перетворюватися в інші види енергії, наприклад, у теплову.

Систему тіл в момент зіткнення можна вважати замкненою, оскільки час взаємодії тіл досить малий і сили взаємодії досить великі порівняно із зовнішніми силами.

Спільну нормаль до поверхонь тіл у точці їхнього дотику під час удару називають лінією удару (рис. 2.1).

Удар називають центральним тоді, коли лінія удару проходить через центр мас тіл, а напрямок швидкостей тіл до зіткнення співпадає з лінією удару.

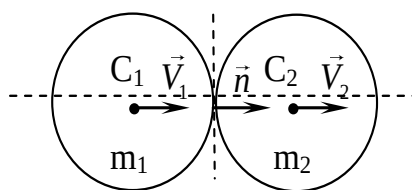


Рисунок 2.1

Процеси, що відбуваються під час удару, залежать від фізичної природи тіл, їх розмірів та форми, швидкості руху тощо. Удари, які розглядають у фізиці, поділяють на абсолютно пружні, абсолютно непружні та реальні.

Абсолютно пружним називають такий удар, після якого тіла, що зазнали зіткнень, залишаються без залишкових деформацій, а кінетична енергія системи тіл до і після удару не змінюється. Абсолютно непружним називають такий удар, після якого деформації, викликані зіткненням тіл, повністю зберігаються, а тіла рухаються як єдине тіло. Подібний до абсолютно пружного удару ефект дає зіткнення кульок із слонової кістки або високоякісної інструментальної сталі. Абсолютно непружний удар імітується зіткненням пластилінових кульок, влученням рушничних куль у підвішену мішень. До абсолютно непружних ударів наближаються процеси, що відбуваються під час кування і штампування. Найчастіше відбуваються реальні удари. За наслідками від зіткнень вони займають проміжне місце між абсолютно пружним та абсолютно непружним ударами.

Процес абсолютно пружного удару тіл уявно можна розділити на дві стадії:

I стадія – відбувається деформація тіл, їх кінетична енергія перетворюється на потенціальну, швидкість зменшується до нуля, потенціальна енергія пружної деформації наприкінці стадії досягає максимуму.

II стадія – потенціальна енергія пружної деформації тіл перетворюється на кінетичну.

У випадку абсолютно непружного удару процес ударяння закінчується на першій його стадії. Частина кінетичної енергії відносного руху тіл перетворюється в немеханічні форми (тепло).

У випадку абсолютно пружного удару тіла цілком відновлюють свою форму, має місце закон збереження механічної енергії.

Отже за абсолютно пружного удару діють закон збереження механічної енергії та закон збереження імпульсу, в той час як за непружного удару – лише закон збереження імпульсу, а закон збереження механічної енергії не діє, оскільки механічна енергія перетворюється на інші види (теплову та витрачається на роботу з деформації тіл тощо). Абсолютно непружний удар – типовий приклад, коли відбувається втрата механічної енергії під дією дисипативних сил.

Розглянемо абсолютно непружний центральний удар двох тіл (рис. 2.2) на прикладі зіткнення двох пластилінових куль.

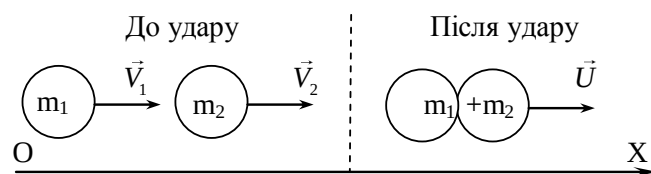


Рисунок 2.2

Нехай кулі рухаються вздовж прямої, що з'єднує їх центри, зі швидкостями $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$. У цьому випадку говорять, що удар є центральним. Позначимо через U загальну швидкість куль після зіткнення.

Запишемо закон збереження імпульсу системи у векторній формі:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{U}, \quad (2.16)$$

де m_1 і m_2 – маси куль.

Знайдемо проєкцію рівняння (2.16) на вісь OX (рис. 2.2):

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) U. \quad (2.17)$$

Звідси одержимо швидкість куль після удару:

$$U = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.18)$$

Розглянемо центральний абсолютно пружний удар двох куль (рис. 2.3).

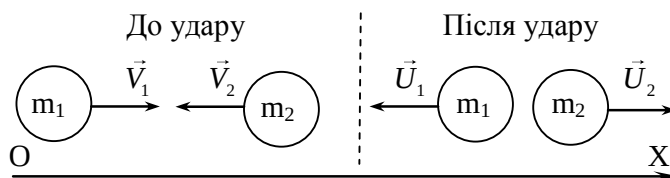


Рисунок 2.3

Нехай перша куля має масу m_1 і швидкість до удару V_1 , а друга куля – масу m_2 і швидкість V_2 . Визначимо швидкості куль U_1 і U_2 після удару, використовуючи закони збереження імпульсу та енергії:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2, \quad (2.19)$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}. \quad (2.20)$$

Спроектуємо рівняння (2.19) на вісь ОХ (див. рис. 2.3):

$$m_1 V_1 - m_2 V_2 = -m_1 U_1 + m_2 U_2. \quad (2.21)$$

Перепишемо рівняння (2.20), (2.21) таким чином:

$$m_1 (V_1 + U_1) = m_2 (V_2 + U_2), \quad (2.22)$$

$$m_1 (V_1^2 - U_1^2) = m_2 (U_2^2 - V_2^2). \quad (2.23)$$

Поділивши почленно рівняння (2.23) на рівняння (2.22), маємо:

$$V_1 - U_1 = U_2 - V_2, \text{ або} \quad (2.24)$$

$$U_2 = V_1 + V_2 - U_1. \quad (2.25)$$

Підставимо в рівняння (2.21) значення U_2 та знайдемо U_1 :

$$U_1 = \frac{2m_2 V_2 + (m_2 - m_1) V_1}{m_1 + m_2}. \quad (2.26)$$

Із рівнянь (2.25) і (2.26) маємо:

$$U_2 = \frac{2m_1 V_1 + (m_1 - m_2) V_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.27)$$

Приклад. Знайти швидкості тіл після абсолютно пружного удару (див. рис. 2.3), якщо їх маси $m_1 = 6 \text{ кг}$, $m_2 = 2 \text{ кг}$ та швидкості до удару $V_1 = 4 \text{ м/с}$, $V_2 = 3 \text{ м/с}$.

$$U_1 = \frac{2m_2 V_2 + (m_2 - m_1) V_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 + (2 - 6) \cdot 3}{6 + 2} = -0.5 \text{ м/с}, \quad (2.28)$$

$$U_2 = \frac{2m_1 V_1 + (m_1 - m_2) V_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4 + (6 - 2) \cdot 3}{6 + 2} = 7.5 \text{ м/с}. \quad (2.29)$$

Ми отримали від'ємне значення швидкості U_1 . Це означає, що її дійсний напрямок буде протилежним до показаного на рис. 2.3

2.1.4 Динаміка обертового руху Момент сили. Момент імпульсу.

Рівняння моментів

Важливі закони механіки пов'язані з поняттями моменту імпульсу або моменту кількості руху і моменту сили. Моментом сили відносно точки О (рис. 2.4) називається векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$ на вектор сил $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (2.30)$$

Напрямок вектора моменту сили визначається за правилом векторного добутку. Він направлений вздовж осі обертання. Модуль моменту сили дорівнює добутку модуля сили на плече її прикладання:

$$M = rF \sin \alpha = rF_{\perp} = Fl, \quad (2.31)$$

де $F_{\perp} = F \sin \alpha$,

$$l = r \sin \alpha.$$

Величина l називається *плечем сили* – це найкоротша відстань між лінією дії сили і віссю обертання (рис. 2.4).

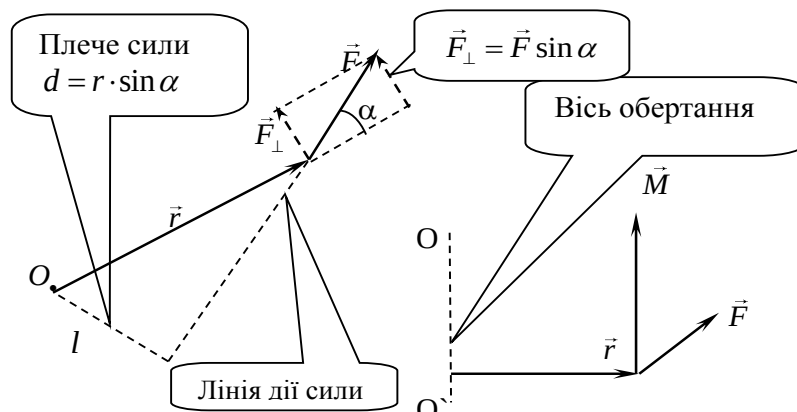


Рисунок 2.4 – Момент сили

Вектор моменту імпульсу визначається за аналогією з моментом сили: *вектором моменту імпульсу* $\vec{L}$ матеріальної точки називається векторний добуток її радіуса-вектора $\vec{r}$, на вектор її імпульсу $\vec{P}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}] \quad (2.32)$$

Він направлений вздовж осі обертання (рис. 2.5):

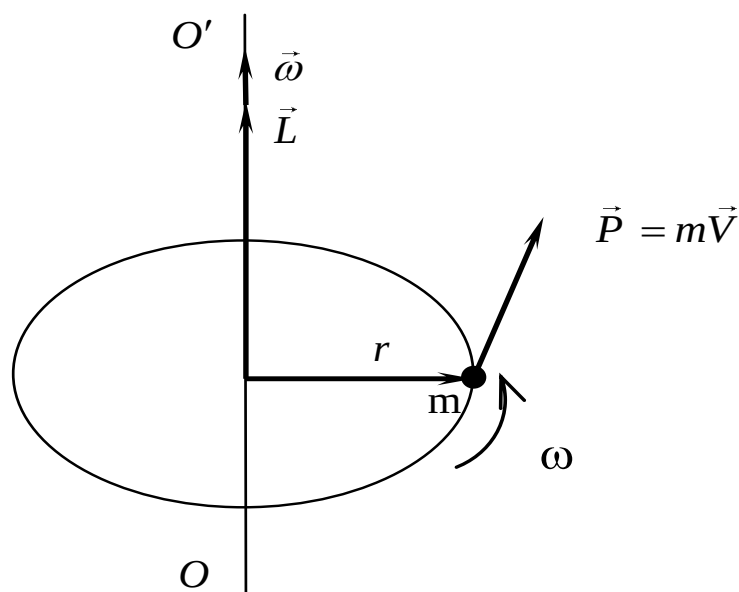


Рисунок 2.5 – Момент імпульсу матеріальної точки

Модуль моменту імпульсу дорівнює:

$$L = rP \sin \alpha = mrV \sin \alpha, \quad (2.33)$$

де m – маса матеріальної точки.

Виявляється, що величини $\vec{L}$ і $\vec{M}$ пов'язані між собою, оскільки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r} \times \vec{P}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \right]. \quad (2.34)$$

Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ і $\vec{P} = m\vec{V}$, то $\frac{d\vec{r}}{dt} \parallel \vec{P}$ і перший доданок в (2.34) дорівнює нулю. Отже матимемо:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \right]. \quad (2.35)$$

Але, згідно з другим законом Ньютона, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$. Тоді (2.35) набуде вигляду:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (2.36)$$

або

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2.37)$$

Рівняння (2.37) називається *рівнянням моментів*: похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої осі дорівнює моменту діючої сили відносно тієї самої осі. Зауважимо, що M являє собою сумарний момент зовнішніх сил.

2.1.5 Кінетична енергія тіла, яке перебуває в обертovому русі. Момент інерції

Визначимо кінетичну енергію твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі ZZ' (рис. 2.6) з кутовою швидкістю ω .

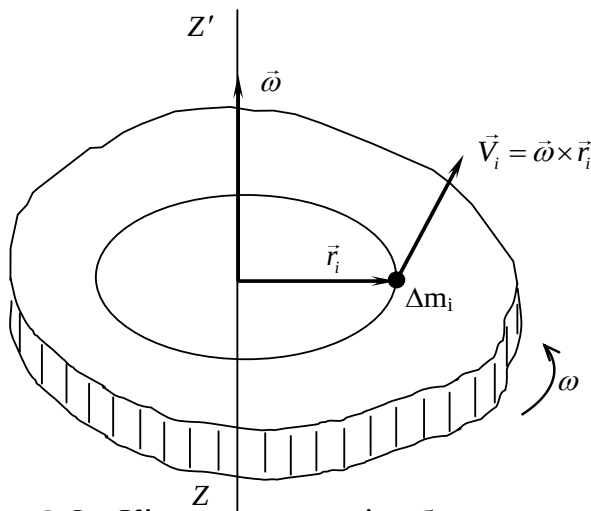


Рисунок 2.6 – Кінетична енергія обертovого руху твердого тіла

Виділимо на твердому тілі на відстані r_i від осі обертання точкову масу Δm_i . Лінійна швидкість виділеної елементарної маси становить:

$$V_i = \omega r_i. \quad (2.38)$$

Кінетична енергія виділеної елементарної маси дорівнює:

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \Delta m_i r_i^2. \quad (2.39)$$

Але кінетична енергія T всього тіла складається із кінетичних енергій його складових, тому

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2. \quad (2.40)$$

Величину $\Delta m r^2$ позначимо через ΔI_z і назовемо моментом інерції матеріальної точки відносно осі ZZ'

$$\Delta I_z = \Delta m r^2, \quad (2.41)$$

де Δm – маса матеріальної точки,

r – відстань до осі обертання.

Момент інерції всього тіла відносно осі ZZ' дорівнює сумі моментів інерції його складових частин:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (\Delta I_z)_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2. \quad (2.42)$$

Отже, момент інерції твердого тіла чисельно дорівнює сумі добутків мас матеріальних точок (на які уявно розбивають тіло) на квадрати відстаней до їх осі обертання.

Момент інерції має певний фізичний зміст: є мірою інертності тіла під час обертального руху й характеризує масу тіла та її розподіл відносно осі обертання. Аналогом моменту інерції у поступальному русі є маса тіла.

На основі формул (2.40) і (2.4) знаходимо кінетичну енергію тіла, що обертається відносно нерухомої осі ZZ' з кутовою швидкістю ω

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (2.43)$$

Індекс z біля символу I у рівняннях (2.41, 2.42, 2.43) свідчить про те, що мова йде про момент інерції відносно осі ZZ' , яка нерухома. Очевидно, що момент інерції цього самого тіла відносно іншої осі зміниться, тому, говорячи про момент інерції, необхідно вказати вісь, відносно якої його обчислено.

У випадку однорідного тіла правильної форми операцію додавання заміняють на операцію інтегрування. Момент інерції будь-якого тіла можна обчислити через інтеграл:

$$I = \int_{(m)} r^2 dm, \quad (2.44)$$

де інтегрування ведеться по всьому об'єму тіла, уявно розбитого на елементарні маси dm , кожна з яких характеризується своїм радіусом r відносно осі обертання.

Знайдемо моменти інерції деяких тіл.

Момент інерції однорідного стержня відносно осі CC' , що проходить через його центр мас (рис. 2.7).

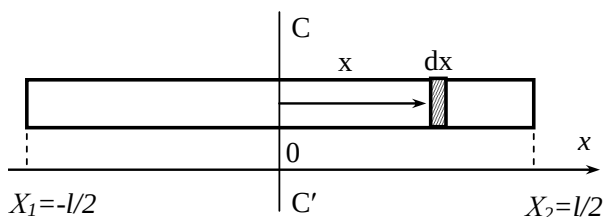


Рисунок 2.7

Розглянемо однорідний стержень. Нехай його маса m , довжина l , лінійна густина γ (лінійна густина чисельно дорівнює масі, що припадає на одиницю довжини стержня $\gamma = m/l$). Систему координат розмістимо таким чином, щоб через її початок проходила вісь CC' . Знайдемо момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його центр мас. Виділимо на відстані x від осі CC' , яка проходить через центр мас стержня, елементарну масу dm . Елементарний момент інерції виділеної маси відносно осі CC' становить: $dI_C = x^2 dm$. Оскільки $dm = \gamma dx$, то $dI_C = \gamma x^2 dx$, а момент інерції всього стержня

$$I_C = \int_{x_1=-l/2}^{x_2=l/2} \gamma x^2 dx = \gamma \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\gamma}{3} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^3 - \left(\frac{-l}{2} \right)^3 \right] = \frac{\gamma l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}. \quad (2.45)$$

В процесі виведення співвідношення (2.45) враховано, що $\gamma l = m$.

Аналогічно знайдемо *момент інерції однорідного стержня* відносно осі ZZ' , що проходить через один із його кінців. Систему координат розмістимо таким чином, щоб через її початок проходила вісь ZZ' .

$$I_Z = \int_{x_1=0}^{x_2=l} \gamma x^2 dx = \gamma \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\gamma l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}. \quad (2.46)$$

Момент інерції однорідного диска (циліндра) відносно осі CC' , що проходить перпендикулярно до його площини через центр C (рис. 2.8). Нехай маса диска m , радіус диска R , густина ρ .

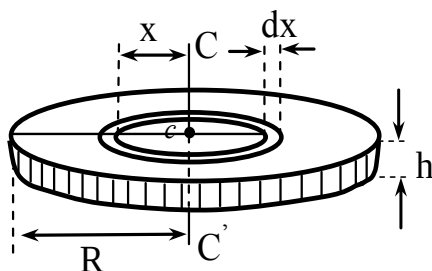


Рисунок 2.8 – Момент інерції диска

Виділимо на відстані x від центра (точка C) нескінченно тонкий обруч товщиною dx , елементарний момент інерції якого дорівнює $dI_C = x^2 dm$.

Визначимо елементарну масу dm виділеного елементарного об'єму у вигляді тонкого кільця, беручи до уваги, що густина речовини ρ , а товщина диска h :

$$dm = \rho dV = \rho h dS, \quad (2.47)$$

де $dS = 2\pi x dx$ – площа поверхні виділеного пояса, то $dI_C = 2\pi \rho h x^3 dx$.

Проінтегруємо останній вираз:

$$\begin{aligned} I_C &= \int_0^m x^2 dm = \int_0^R x^2 \rho 2\pi x dx = \\ &= \rho h 2\pi \int_0^R x^3 dx = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{m R^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

де $m = \rho \pi R^2$ – маса диска.

Аналогічно можна знайти момент інерції диска з центральним отвором. Нехай радіус диска R , а радіус отвору r . Для цього рівняння (2.48) необхідно проінтегрувати від r до R

$$\begin{aligned} I_C &= \int_0^m x^2 dm = \int_r^R x^2 \rho 2\pi x dx = \\ &= \rho h 2\pi \int_r^R x^3 dx = \rho h 2\pi \frac{R^4 - r^4}{4} = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

де $m = 2\pi(R^2 - r^2)h\rho$ – маса диска.

Із (2.49) легко знайти момент інерції диска без отвору ($r = 0$):

$$I_C = \frac{m(R^2 + r^2)}{2} = \frac{m R^2}{2}, \quad (2.50)$$

та момент інерції обруча відносно осі, що проходить центр мас ($r \approx R$)

$$I_c = \frac{m(R^2 + r^2)}{2} = \frac{m(R^2 + R^2)}{2} = mR^2. \quad (2.51)$$

Момент інерції кулі

$$I_c = \frac{2}{5}mR^2. \quad (2.52)$$

2.1.6 Теорема Штейнера

Ця теорема дозволяє знайти момент інерції тіла відносно довільної осі ZZ' , якщо відомий момент інерції цього тіла відносно паралельної осі CC' , що проходить через центр мас згаданого тіла (рис. 2.9).

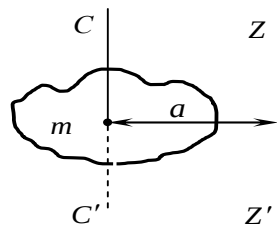


Рисунок 2.9 – Теорема Штейнера

Момент інерції тіла відносно довільної осі ZZ' дорівнює сумі моменту інерції цього тіла відносно паралельної осі CC' , що проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані між цими осями

$$I_z = I_c + ma^2 \quad (2.53),$$

де I_c – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас,

m – маса тіла,

a – відстань між осями.

2.1.7 Момент імпульсу твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу

Для твердого тіла, яке обертається навколо осі ZZ' з кутовою швидкістю ω , величина моменту імпульсу може бути визначена таким чином.

Уявно розіб'ємо тіло на нескінченно малі частинки – матеріальні точки (рис. 2.10).

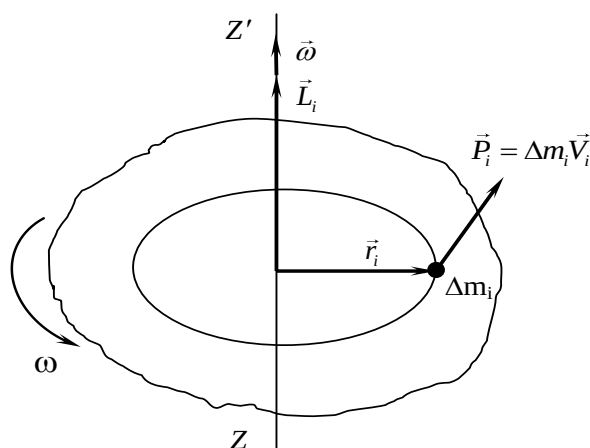


Рисунок 2.10 – Момент імпульсу твердого тіла

Розглянемо окрему таку i -точку. Модуль моменту імпульсу цієї точки з масою Δm_i відносно осі ZZ' буде

$$\Delta L_i = \Delta m_i r_i V_i \sin \alpha = \Delta m_i \omega r_i^2, \quad (2.54)$$

де $\alpha = 90^\circ$,

$$\omega = V/r.$$

Для всього тіла матимемо (індекс z біля L означає, що момент імпульсу обчислено відносно осі ZZ'):

$$L_z = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega_z. \quad (2.55)$$

де ω_z – кутова швидкість обертання тіла відносно осі ZZ' .

Згідно з (2.42) $\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = I_z$, тому:

$$\vec{L}_z = I_z \cdot \vec{\omega}_z \quad (2.56)$$

Закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу замкнутої системи тіл залишається сталим незалежно від взаємодії її складових

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n I_i \vec{\omega}_i = \text{const}, \quad (2.57)$$

де ω_i – кутова швидкість i -го тіла,

I_i – його момент інерції.

Закон збереження моменту імпульсу посідає важливе значення в механіці. У рівнянні (2.57) постійним залишається, як модуль моменту імпульсу, так і його напрямок. На останній властивості ґрунтується робота гіроскопа. Гіроскоп – це масивне тіло, яке може вільно обертатися з великою кутовою швидкістю навколо трьох осей. Основна його властивість: вісь гіроскопа зберігає свою орієнтацію в просторі незалежно від орієнтації основи гіроскопа. Гіроскопи широко застосовуються у навігації.

На основі закону збереження моменту імпульсу також пояснюється рух велосипедиста (мотоцикліста). Під час руху велосипедиста (мотоцикліста) вектор моменту імпульсу зберігає свою орієнтацію в просторі і велосипедист не падає.

2.1.8 Основне рівняння динаміки обертального руху

Розглянемо тіло (рис. 2.11), яке може вільно обертатися навколо довільної ZZ' . Нехай на тіло діє момент сил M_z . Момент інерції цього тіла відносно осі ZZ' I_z , кутова швидкість ω . Знайдемо кутове прискорення тіла. Момент імпульсу тіла :

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}_z. \quad (2.58)$$

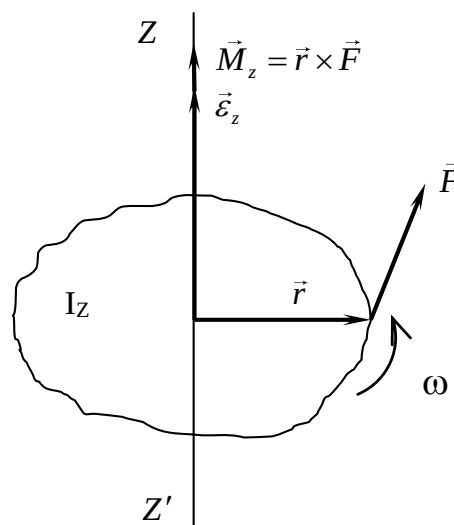


Рисунок 2.11

Продиференціюємо рівняння 2.54 за часом:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}_z}{dt}, \quad (2.59)$$

де $\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$ – прикладений момент сили,

$\frac{d\vec{\omega}_z}{dt} = \vec{\epsilon}$ – кутове прискорення.

Отже,

$$\vec{M}_z = I_z \vec{\epsilon}. \quad (2.60)$$

Тіло набуде кутового прискорення:

$$\vec{\epsilon}_z = \frac{\vec{M}_z}{I_z}. \quad (2.61)$$

Рівняння (2.61) є основним рівнянням динаміки обертального руху, в якому відіграє таку саму роль, як і другий закон Ньютона в поступальному русі.

Лабораторна робота № 1.1

Дослідження прямолінійного руху тіл в полі тяжіння за допомогою машини Атвуда

Мета роботи: дослідити закони руху тіл в полі земного тяжіння.

Прилади і матеріали: машина Атвуда, набір важків, додаткові тягарці, електронний секундомір.

Теоретичні відомості

Машина Атвуда призначена для вивчення законів прямолінійного рівномірного та рівноприскореного рухів і, зокрема, для визначення прискорення вільного падіння тіл.

Будову машини Атвуда зображено на рис. 1. Принцип її дії ґрунтується на використанні законів вільного падіння тіл в повітрі. Через нерухомий блок, під час обертання якого силою тертя в осі можна знехтувати, перекинута нитка з двома однаковими вантажами масою M кожний. В цьому випадку система знаходиться в рівновазі. Якщо на один з вантажів покласти невеликий додатковий тягарець масою m , то система, що складається з двох вантажів і тягарця, одержить деяке прискорення a під дією сили $F = mg$ і на шляху S_1 , буде рухатись з цим прискоренням.

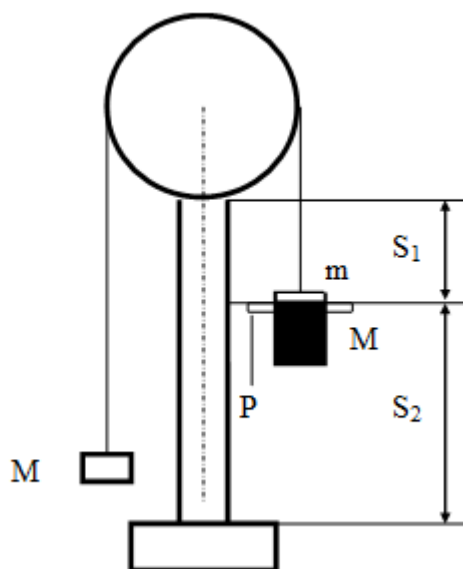


Рисунок 1

Кільцем P дія додаткового тягарця m припиняється і вантажі, рухаючись рівномірно, пройдуть шлях S_2 .

Знайдемо закон руху вантажу M , розташованого праворуч. Для цього скористаємося системою координат, початок якої знаходиться на осі

блока, а вісь ox напрямлена вертикально вниз.

На вантаж M діють дві сили : сила тяжіння $(M+m)g$ та сила натягу правої частини нитки T_1 . Запишемо другий закон Ньютона:

$$(M + m) g - T_1 = (M + m) a, \quad (1)$$

де a – прискорення вантажу M .

Тепер застосуємо другий закон Ньютона до вантажу M , що розташований ліворуч. Оскільки нитка нерозтяжна, прискорення лівого вантажу за абсолютним значенням дорівнює прискоренню правого, але направлене в протилежний бік, тобто воно дорівнює $-a$. Натяг лівого кінця нитки позначимо через T_2 , тоді :

$$M g - T_2 = - M a, \quad (2)$$

У випадку невагомego блока і відсутності сили тертя в його осі :

$$T_1 = T_2. \quad (3)$$

З рівнянь (1), (2) та (3) знайдемо прискорення системи :

$$a = \frac{mg}{2M + m}. \quad (4)$$

Таким чином, вважаючи g відомим та проводячи досліди з різними вантажами M і додатковими тягарцями m , за формулою (4) можна вирахувати прискорення a і здійснити експериментальну перевірку другого закону Ньютона.

Машина Атвуда дає можливість також визначити прискорення вільного падіння g , що і є основним завданням цієї роботи. Для цього з формули (4) знайдемо g :

$$g = \frac{2M + m}{m} a. \quad (5)$$

Прискорення a безпосередньо виміряти неможливо, але його легко вирахувати, вимірявши шлях S_1 , пройдений вантажем M під час рівноприскореного руху, а також шлях S_2 рівномірного руху та час t його проходження.

Для рівномірно прискореного руху, за умови, що початкова швидкість v_0 дорівнює нулю, пройдений шлях можна знайти, маючи кінцеву швидкість та прискорення :

$$S_1 = \frac{V^2}{2a}. \quad (6)$$

Кінцева швидкість V набувається вантажем M в момент проходження кільця P , яке припиняє дію додаткового тягарця. Далі з цією швидкістю вантаж рухається рівномірно і за час t проходить шлях S_2 .

Тому :

$$V = \frac{S_2}{t}. \quad (7)$$

З формул (6) і (7) знаходимо прискорення a . Підставляючи його значення в вираз (5), остаточно одержуємо :

$$g = \frac{2M + m}{m} \cdot \frac{S_2^2}{2S_1 t^2}, \quad (8)$$

де M – маса великого вантажу;

m – маса додаткового тягарця;

S_1 – шлях, що проходить вантаж $(M+m)$ за рівномірно прискореного руху;

S_2 – шлях, пройдений вантажем M за рівномірного руху;

t – час проходження шляху S_2 .

Порядок виконання роботи

1. Підготувати прилад до вимірювань, для цього необхідно :

- з допомогою регулювальних ніжок встановити колонку приладу строго вертикально;
- змістити правий вантаж у верхнє положення, покласти на нього додатковий тягарець та впевнитись, що система знаходиться в стані спокою;
- натиснути клавішу «ПУСК» і переконатись, чи прийшла система в рух, чи був затриманий на середньому кронштейні додатковий тягарець, чи виміряв мілісекундомір час проходження правим вантажем шляху S_2 та чи була система загальмована в кінці цього шляху;
- звільнити клавішу «СБРОС» та перевірити чи відбулось обнулення показів вимірювача і звільнення електромагнітного блокування ролика;
- змістити правий вантаж у верхнє положення і звільнити клавішу «ПУСК», а також перевірити виникнення повторного блокування ролика.

2. На правий вантаж встановити один з додаткових тягарців.

3. Сумістити нижню грань правого вантажу з рисою, що нанесена на верхньому кронштейні.

4. Виміряти з допомогою шкали колонки шляхи рівноприскореного руху S_1 та рівномірного руху S_2 .
5. Натиснути клавішу «ПУСК».
6. Записати значення часу t .
7. Вимірювання повторити не менше 5 разів.
8. Дані всіх вимірювань занести в таблицю.

Обробка результатів експерименту та їх аналіз

1. За допомогою формули (8) обчислити значення прискорення вільного падіння тіл для кожного досліду. Знайти середнє значення прискорення.
2. Визначити абсолютну та відносну похибки вимірювань.

Контрольні питання

1. Механічний рух як найпростіша форма руху матерії. Відносність руху. Види руху. Кінематичне рівняння руху.
2. Кінематика матеріальної точки: траєкторія, шлях, переміщення, швидкість, прискорення. Поступальний рівномірний та прискорений рух твердого тіла.
3. Вільне падіння тіл. Прискорення. Прискорення вільного падіння.
4. Закони Ньютона. Сила. Рівнодійна сил. Сила земного тяжіння. Вага та маса тіла.
5. Проаналізуйте можливі джерела та причини похибок під час визначення g .
6. Виведення формули для граничного значення відносної похибки для прискорення вільного падіння методом логарифмування (див. С. 22-23).
- 7.

№ досліду	M, кг	m, кг	S_1 , м	S_2 , м	t, с	g , м/с ²	Δg , м/с ²	ϵ , %
1								
2								
3								
4								
5								
С. знач.								

Лабораторна робота № 1.3

Вивчення центрального удару куль

Мета роботи: експериментальне вивчення застосування законів збереження енергії та імпульсу до центрального удару куль.

Прилади і матеріали: установка для дослідження зіткнення тіл; штангенциркуль; лінійка; терези з комплектом важків.

Теоретичні відомості

Центральним називається такий удар куль, за якого вектори швидкості руху куль у момент їх зіткнення лежать на прямій, що сполучає центри куль. Проміжок часу, протягом якого відбувається удар, здебільшого дуже малий і становить від 10^{-4} с до 10^{-6} с. Під час удару на площинах контакту тіл виникають сили, що одержали назву ударних або миттєвих. Змінюються вони в процесі удару в широких межах і досягають значень, за яких середня величина тиску (напруги) на площинах контакту досягає значення 10^9 і навіть 10^{10} Н/м².

Дія ударних сил викликає значні зміни швидкостей всіх точок тіла протягом удару. Наслідком удару можуть бути також залишкові деформації, звукові коливання, нагрівання тіл та ін., а за швидкостей зіткнення, які переважають критичні значення, – руйнування тіл в місці удару. Критичні швидкості, наприклад, для міді, становлять близько 15 м/с, а для високоякісної сталі – 150 м/с і більше.

Процес удару тіл поділяється на дві фази. Перша починається з моменту дотикання тіл і продовжується до кінця їх зближення. Водночас частина кінетичної енергії тіл перетворюється на потенціальну енергію деформації.

Під час другої фази відбувається зворотний перехід потенціальної енергії пружної деформації в кінетичну енергію тіл; тіла починають розходитись одне від одного і під кінець другої фази вони рухаються в різних напрямках відносно загального центра мас.

Якщо після удару тіла повністю відновлюють свою форму і розміри, а механічна енергія набуває попереднього початкового значення, то удар називають абсолютно пружним.

Якщо ж удар закінчується на першій фазі і тіла після удару рухаються як одне ціле, то удар називається абсолютно непружним. Механічна енергія у цьому випадку не зберігається, частина її перетворюється на внутрішню енергію тіл.

У разі удару реальних тіл присутні обидві фази, але повного повернення форми тіл, що стикаються, не відбувається, що призводить до зменшення механічної енергії через втрати на залишкову деформацію; нагрівання тіл та інше.

Повний опис процесів для двох або більшої кількості тіл, що стикаються, можливий лише в межах динамічних законів, які детально змальовують всі зміни системи з часом. Але може виявитись, що для такої системи тіл рівняння, які випливають з законів динаміки, дуже складні або відсутні відомості про деякі величини, що входять у ці рівняння.

У цьому випадку певні висновки про поведінку системи можна зробити, використовуючи закони збереження.

Найважливішими законами збереження, що дійсні для будь-яких ізольованих систем, тобто таких систем, на тіла яких не діють зовнішні сили, є закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу та електричного заряду.

Зокрема, закон збереження імпульсу формулюється так: імпульс ізольованої системи тіл залишається сталим

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.} \quad (1)$$

Згадаємо, що імпульс системи визначається як геометрична сума імпульсів окремих тіл, що входять до складу цієї системи, а імпульс тіла – це вектор, який дорівнює добутку маси тіла на його швидкість:

$$\vec{P} = m\vec{v}. \quad (2)$$

Імпульс системи тіл може бути визначений також добутком сумарної маси тіл системи $\sum m_i$ на швидкість центра мас цієї системи v_c .

Центром мас, або центром інерції системи матеріальних точок, називається така уявна точка, радіус-вектор якої R_c виражається через радіус-вектори $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n$ окремих матеріальних точок. Таким чином

$$\vec{R}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_i \vec{r}_i + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_i + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (3)$$

де m_i – маса i -тої матеріальної точки тіла;

$M = \sum_{i=1}^n m_i$ – маса всього тіла.

Похідна $\frac{d\vec{R}_c}{dt} = \vec{V}_c$, тому із (3) маємо

$$\vec{V}_c = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + m_3\vec{V}_3 + \dots + m_i\vec{V}_i + \dots + m_n\vec{V}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_i + \dots + m_n} = \frac{\vec{P}}{M}, \quad (4)$$

де $\vec{P}$ – сумарний імпульс всієї системи,

M – маса цієї системи.

Продиференціюємо співвідношення (4) за часом

$$\vec{a}_c = \frac{1}{M} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad (5)$$

тут $\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt}$ – прискорення центра мас, а $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, тому (5) набуває вигляду

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{M}. \quad (6)$$

Отже, центр мас рухається так, як точка, в якій зосереджена маса всього тіла і прикладена рівнодійна всіх зовнішніх сил. Вираз (6) виражає собою теорему про рух центра мас твердого тіла (системи жорстко зв'язаних матеріальних точок).

До числа найважливіших відноситься закон збереження енергії, але в ньому мова йде про повну енергію системи, яка складається з енергії всіх видів руху матеріальних тіл. Для механічної енергії, що дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергії, також може бути сформульований закон збереження, але він не є загальним, а відноситься до числа законів, які справджуються тільки для обмеженого класу систем і явищ. Механічна енергія зберігається за умови дії між тілами системи тільки консервативних сил. Консервативними називають такі сили, робота яких не залежить від форми шляху. До числа консервативних відносяться гравітаційні, пружні, електростатичні та деякі інші сили. Закон збереження механічної енергії має таке формулювання: повна механічна енергія ізольованої системи тіл, між якими діють тільки консервативні сили, залишається сталою.

Кажучи про закони збереження, потрібно відмітити, що особливо важливу роль ці закони відіграють в теорії елементарних частинок, де, крім уже відомих, відкрито багато специфічних законів збереження: баріонного заряду, лептонного заряду та інші. Значення законів збереження в теорії елементарних частинок визначається тим, що вони дозволяють легко знаходити правила відбору для реакцій між елементарними частинками, тобто встановлювати, які реакції в природі можливі, а які заборонені.

Згідно з сучасним уявленням закони збереження тісно пов'язані з властивостями симетрії фізичних систем. Теорема Нетер стверджує, що наявність у системі симетрії приводить до того, що для цієї системи існує фізична величина, яка зберігається. Ця теорема є особливо важливою, оскільки вона дозволяє на основі експериментально виявлених законів збереження робити висновки про фундаментальні властивості світу, в якому ми живемо. Так, наприклад, збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу пов'язані відповідно з однорідністю часу, однорідністю простору та ізотропністю простору.

Тому перевірка законів збереження є одночасно перевіркою відповідних властивостей симетрії простору і часу.

Застосуємо закони збереження для вивчення центрального удару двох куль (Теорія абсолютно пружного центрального удару детально описана у розділі 2, с. 23-28).

Для прямого центрального удару двох куль їх швидкості до удару (якщо система ізольована, то також і після удару) направлені вздовж прямої, що проходить через центри куль.

Розглянемо спочатку випадок, коли кулі, які створюють ізольовану систему, здійснюють абсолютно пружний центральний удар. У цьому випадку виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії. Згідно з законом збереження імпульсу, імпульс двох куль до удару має дорівнювати імпульсу цих самих куль після удару:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2. \quad (7)$$

Будемо вважати, що до удару і після удару кулі рухаються у напрямку осі ОХ, тому геометричну суму можна замінити алгебраїчною:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2. \quad (8)$$

Вважаючи, що кулі взаємодіють тільки під час удару та враховуючи ізольованість системи, робимо висновок, що повна механічна енергія обох куль до і після удару дорівнює сумі їхніх кінетичних енергій у відповідні моменти часу. Тому, відповідно до закону збереження енергії, можемо записати:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}. \quad (9)$$

Рівняння (8) та (9) зведемо до вигляду:

$$m_1 (v_1 - U_1) = m_2 (U_2 - v_2), \quad (10)$$

$$m_1 (v_1^2 - U_1^2) = m_2 (U_2^2 - v_2^2). \quad (11)$$

Поділивши (11) на (10), одержуємо:

$$v_1 + U_1 = U_2 + v_2. \quad (12)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (10), (11) та (12), знаходимо вирази для швидкості куль після удару:

$$U_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad (13)$$

$$U_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (14)$$

Для $v_2 = 0$ із рівнянь (13) й (14) маємо

$$U_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad (13, a)$$

$$U_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (14, a)$$

Проведемо аналіз цих рівнянь.

Випадок 1. Для центрального абсолютно пружного удару за умов $m_1 = m_2 = m, v_2 = 0$ із рівнянь (13, a) і (14, a) маємо

$$U_1 = 0; \quad U_2 = v_1. \quad (15)$$

Тобто кулі обмінюються швидкостями (рис. 1).

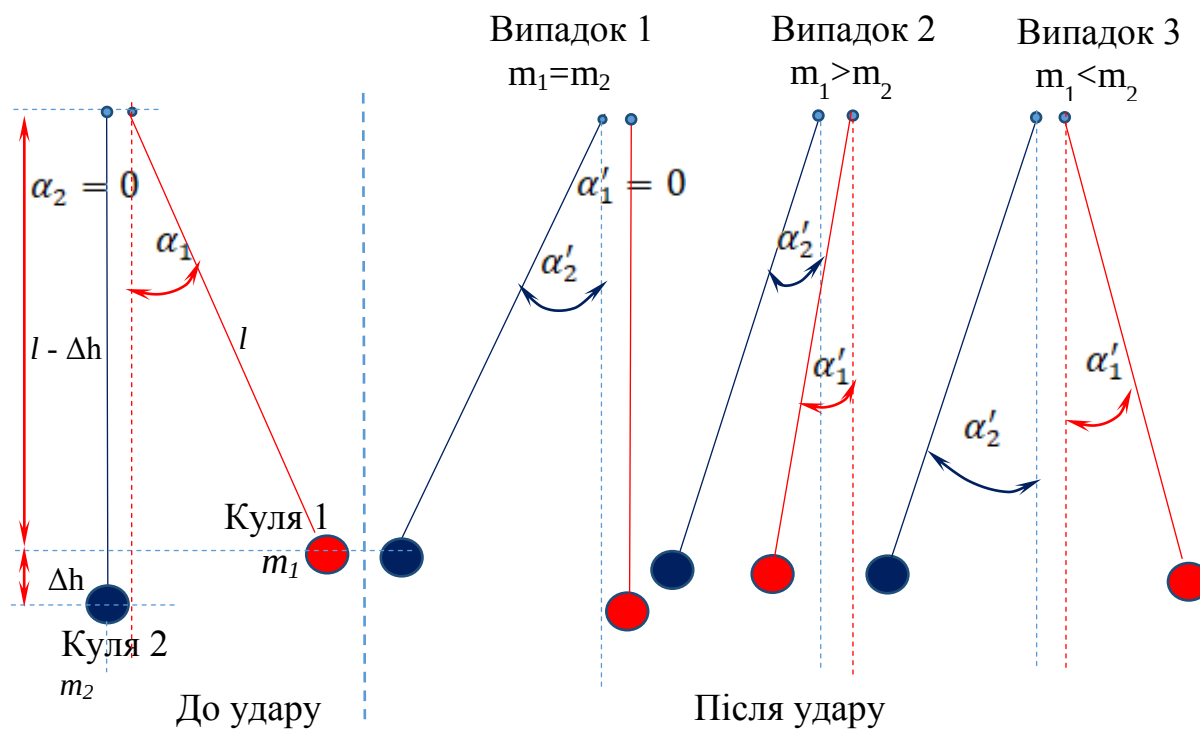


Рисунок 1

Випадок 2. Для центрального абсолютно пружного удару за умов $m_1 > m_2, v_2 = 0$ різниця мас $m_1 - m_2 > 0$, отже кулі після удару рухаються в однакових напрямках (див. рис. 1)

$$\frac{\vec{v}_1}{v_1} = \frac{\vec{u}_1}{u_1} = \frac{\vec{u}_2}{u_2}.$$

Випадок 3. Для центрального абсолютно пружного удару за умов $m_1 < m_2, v_2 = 0$ різниця мас $m_1 - m_2 < 0$, отже кулі після удару рухаються в протилежних напрямках (див. рис. 1)

$$\frac{\vec{v}_1}{v_1} = -\frac{\vec{u}_1}{u_1} = \frac{\vec{u}_2}{u_2}.$$

У випадку нецентрального удару в системі рівнянь (7, 9) потрібно врахувати зміну моменту імпульсу та кінетичну енергію обертowego руху куль.

Знаючи масу та швидкості куль до і після удару, можна визначити середню силу удару куль. Для цього застосуємо другий закон Ньютона, наприклад, до другої кулі:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta(m_2 v_2)}{\tau} = \frac{m_2 (U_2 - v_2)}{\tau}, \quad (16)$$

де τ — час, протягом якого відбувався удар.

Якщо до удару друга куля була нерухома, то за $v_2 = 0, m_1 = m_2 = m$

$$U_2 = v_1, \quad (17)$$

підставляючи (15) та (16) в (17), маємо:

$$\langle F \rangle = \frac{m v_1}{\tau}. \quad (18)$$

У цій роботі для вимірювання початкових і кінцевих швидкостей куль, а також часу удару використовується прилад, який складається з штатива 1 (рис. 2), на якому з допомогою спеціального пристрою 2 прикріплені підвіси з кулями 3, двох кутомірних шкал 4, електромагніту 5 та секундоміра 6.

Для вивчення пружного удару використовуються сталеві кулі, а електромагніт слугує для утримання першої кулі в відхиленому на кут α_1 положенні. Друга куля до початку вимірювань нерухома в положенні рівноваги.

Швидкість першої кулі безпосередньо перед ударом можна врахувати, знаючи довжину підвісу та початковий кут відхилення кулі (рис. 2).

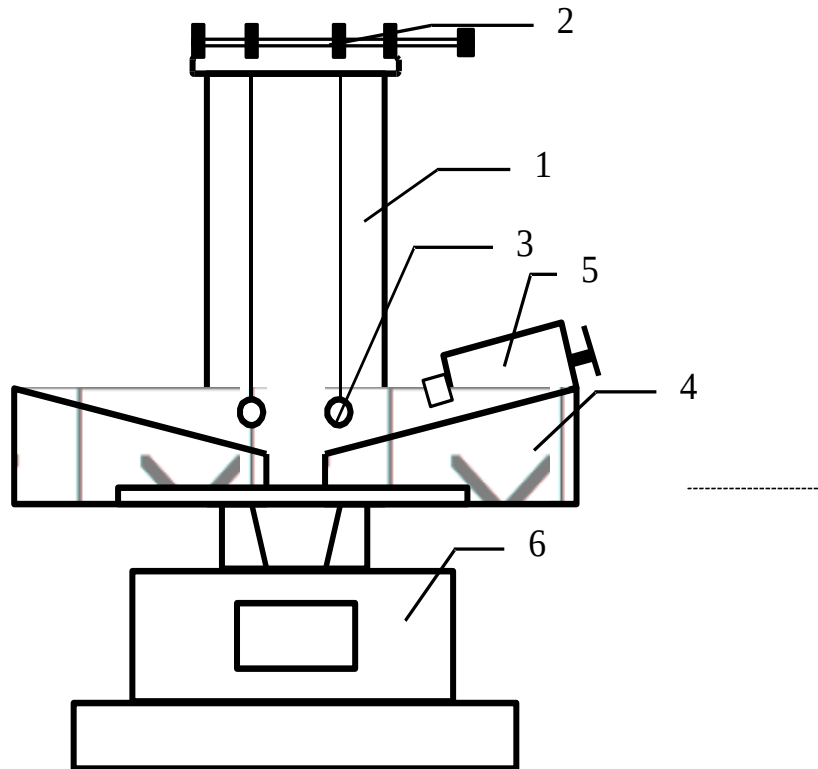


Рисунок 2

Оскільки куля 1 рухається тільки під дією гравітаційних сил, справджується закон збереження енергії, на основі якого можна записати:

$$m_1 g \Delta h = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (19)$$

Вважається, що в найнижчому положенні кулі 1 її потенціальна енергія дорівнює нулю. З рисунка 2 видно, що:

$$\Delta h = l(1 - \cos \alpha) \quad (20)$$

З рівнянь (19) та (20) маємо:

$$v = \sqrt{2g\Delta h}. \quad (21)$$

За цією ж формулою визначаються швидкості куль після удару.

Час удару вимірюється електронним мілісекундоміром.

Під час виконання лабораторної роботи необхідно мати на увазі, що використаний в ній метод вивчення законів збереження та спосіб вимірювання фізичних величин мають певні похибки, які безумовно впливають на кінцевий результат.

Дійсно, ми вважали систему куль ізольованою і не враховували сил тертя з боку кронштейна та повітря. Ми також вважали удар центральним, а сталеві кулі абсолютно пружними, що є ідеалізацією і не відповідає реальним умовам досліду та властивостям реальних тіл. Крім цього,

неминучі похибки під час вимірювання довжини підвісу та кутових відхилень куль, тому виконання законів збереження потрібно чекати в рамках цих похибок.

Порядок виконання роботи

1. Встановити таку віддаль між стержнями, щоб кулі дотикались одна до одної по лінії, яка проходить через центр мас куль (на кулях є спеціальні мітки)
2. Встановити кутоміри так, щоб в положенні рівноваги вимірювачі кутів показували на шкалах нулі. Шкали закріпити гайками.
3. Ввімкнути прилад у мережу; натиснути клавішу «Сеть»; відпустити клавішу «Старт». Праву кулю відхилити в бік електромагніту і блокувати в цьому положенні.
4. Записати значення кута α_1 ; натиснути клавішу «Сброс»; натиснути клавішу пуск «Старт».
5. Після зіткнення куль визначити значення кутів α_1' і α_2' (рис. 2), а також записати час зіткнення.
6. Дослід повторити не менше 10 разів та визначити середні значення кутів і часу за формулами:

$$\alpha_1' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{1i}; \quad \alpha_2' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{2i}; \quad \tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i.$$

7. Розрахувати масу куль за формулою $m_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, де $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Ввести поправки до маси куль на елементи кріплення та відліку кутів $m = m_0 + m_{\text{кв}}$, значення $m_{\text{кв}}$ наведено в паспорті лабораторної установки.

8. Всі дані вимірювань занести в таблицю 1.

Обробка результатів експерименту та їх аналіз

1. За формулою (21), використовуючи дані таблиці 1, розрахувати швидкість першої кулі до удару v_1 , а також швидкості куль після удару U_1 та U_2 .
2. За формулами (7), та (9) перевірити справедливність законів збереження. У формулі (7) врахувати напрямки руху куль до і після удару (рис.1). Виконати аналіз результатів експерименту.
3. За формулою (18) знайти середню силу удару.
4. Знайти абсолютну та відносну похибки сили удару.

Контрольні запитання

1. Закони Ньютона. Імпульс. Закон збереження імпульсу (див. С.23-25).
2. Центр мас твердого тіла. Теорема про рух центра мас.
2. Робота та енергія в механіці. Потужність. Потенціальна і кінетична енергія (див. С.24-28).
3. Консервативні та дисипативні сили (див. С. 26-27).
4. Закон збереження енергії в механіці (див. С. 27-28).
5. Удар тіл. Абсолютно пружний та абсолютно непружний удари та їх характеристики (формули (13), (14). з доведенням (див. С. 28-31).
6. Застосування законів збереження до абсолютно непружного та пружного ударів (див. С. 28-31).
7. Перерахуйте джерела похибок під час виконання цієї роботи. Вивести формули для розрахунку відносної і абсолютної похибок вимірюваних величин.

Таблиця 1

Ч.ч.	α_1 , град	α_1' , град	α_2' , град	l , м	Δh , м	m , кг	τ , с	v_1 , м/с	U_1 , м/с	U_2 , м/с	F , Н	ΔF , Н	$\mathcal{E}$, %
1													
2													
3													
...													
10													
С.з.													

Лабораторна робота № 1.4

Визначення швидкості кулі за допомогою балістичного маятника

Мета роботи: вивчення законів збереження під час абсолютно непружного удару на прикладі визначення швидкості кулі.

Прилади і матеріали: 1. Балістичний маятник. 2. Пружинний пістолет. 3. Терези. 4. Лінійка. 5. Кулі.

Теоретичні відомості

Для визначення швидкості часто застосовують метод балістичного маятника. Балістичний маятник являє собою підвішену велику коробку з піском або землею, яка може коливатися навколо горизонтальної осі. У нашому випадку балістичним маятником слугує масивний циліндр із пластиліном, підвішений на тонких нерозтяжних нитках (рис. 1).

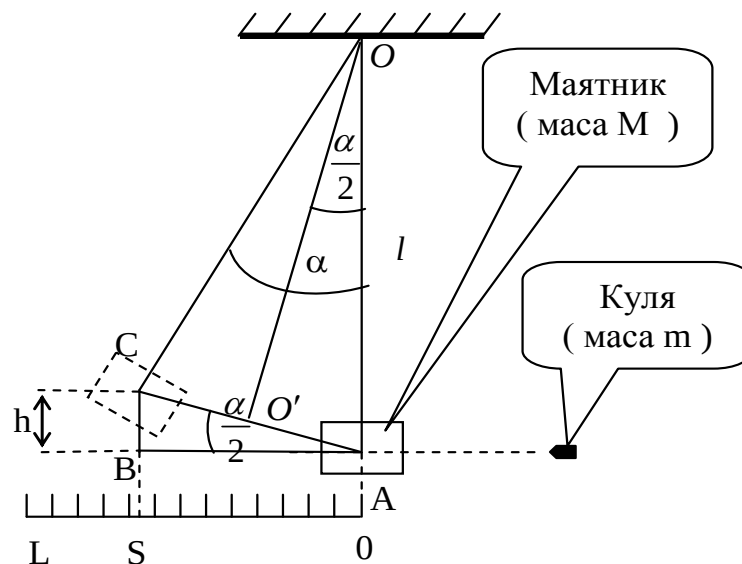


Рисунок 1

На деякій відстані від циліндра по його осі закріплений пружинний пістолет. Під час пострілу швидкість кулі спрямована уздовж прямої, що проходить через центр мас маятника. Куля масою m після зіткнення застряє в шарі пластиліну, тому удар можна вважати абсолютно непружним та центральним.

Оскільки маятник до удару був нерухомий ($V_1 = 0$), то з рівняння (2.18) (див. загальні теоретичні відомості, С. 30) одержимо:

$$U = \frac{mV}{M + m}, \quad (1)$$

де V – швидкість кулі перед ударом ($V = V_2$);

m – маса кулі;

M – маса маятника.

Із співвідношення (1) можна знайти швидкість кулі, для чого необхідно визначати швидкість маятника з застряглою кулею безпосередньо після удару.

Якщо знехтувати силами тертя в нитках підвісу й опором повітря, то система «маятник – куля» після удару є ізольованою консервативною системою, для якої можна застосувати закон збереження механічної енергії:

$$\frac{(M+m)U^2}{2} = (M+m)gh, \text{ звідки } U = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Таким чином, задача зводиться до визначення висоти підняття центра мас маятника після влучення в нього кулі.

З $\triangle ABC$ маємо $h = AB \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, оскільки кут відхилення досить малий, то можна вважати, що $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AO'}{\ell} = \frac{AC}{2\ell}$?

З $\triangle AO'O$ знаходимо $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AO'}{\ell} = \frac{AC}{2\ell}$, отже $h = AC \frac{AC}{2\ell} = \frac{AC^2}{2\ell}$.

Виходячи зі сказаного, в межах похибки досліду можемо вважати $AB \approx AC$, де $AB=S$ – відстань, на яку зміститься покажчик на лінійці L .

Остаточно одержуємо:

$$h = \frac{S^2}{2\ell} \quad (3)$$

Із виразів (1), (2) і (3) одержуємо формулу для обчислення швидкості кулі:

$$V = \frac{(M+m)}{m} U = \frac{M+m}{m} \sqrt{2gh} = \frac{(M+m)S}{m} \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (4)$$

Отже, експеримент зводиться до визначення маси маятника M і кулі m , виміру довжини ниток підвісу ℓ та зміщення покажчика S на лінійці.

Порядок виконання роботи

1. Зважити балістичний маятник.
2. Зважити кожну кулю.

3. Підвісити маятник так, щоб вісь циліндра знаходилася на лінії польоту кулі. Показчик на лінійці підвести впритул до задньої стінки циліндра. Визначити довжину маятника l .

4. Зробити постріл і записати зміщення показчика (враховувати лише ті досліди, в яких куля застрягає в маятнику).

5. Дослід повторити 5-7 разів для кожної кулі. Дані вимірів занести в таблицю 1.

Обробка результатів експерименту та їх аналіз

1. За формулою (4) обчислити швидкість кулі для кожного пострілу окремо.

2. З результатів дослідів знайти середнє значення швидкості кожної кулі.

3. Вивести робочу формулу для визначення абсолютної і відносної похибки експерименту і записати кінцеві результати.

4. Проаналізувати, які з вимірюваних величин дають найбільшу похибку під час обчислення швидкості кулі, і похибками яких вимірюваних величин в процесі розрахунків можна знехтувати.

Контрольні питання

1. Імпульс. Закон збереження імпульсу (див. С. 24-25).

2. Робота та енергія. Потужність. Потенціальна і кінетична енергія (див. С.28-31).3. Консервативні та дисипативні сили (див. С. 25-28).

4. Закон збереження енергії в механіці (див. С. 27-28).

5. Удар тіл. Абсолютно пружний та абсолютно непружний удари та їх характеристики формула (2.18) з доведенням (див. С. 28-31).

6. Визначення швидкості руху тіл балістичним методом (див. С. 53-54).

7. Виведення формули для визначення відносної похибки швидкості кулі методом логарифмування (див. С. 22-23).

Таблица 1

Ч.ч.	М, кг	m , кг	ℓ , м	S , м	V , м/с	ΔV , м/с	ε , %
Куля № 1							
1							
2							
3							
4							
5							
С. зн.							
Куля № 2							
1							
2							
3							
4							
5							
С. зн.							

Лабораторна робота № 1.5

Вивчення абсолютно пружного центрального удару куль за допомогою конденсаторного хронометра

Мета роботи: вивчення законів збереження за абсолютно пружного удару на прикладі визначення часу удару; середньої сили удару і швидкості кулі в момент удару з допомогою конденсаторного хронометра.

Прилади і матеріали: 1. Установка для визначення часу пружного удару куль. 2. Штангенциркуль. 3. Лінійка. 4. Транспортир.

Теоретичні відомості

Установка для визначення часу пружного удару куль (рис. 1) складається з двох однакових абсолютно пружних сталених куль, підвішених на провідниках однакової довжини. Провідники підключені до конденсатора через електричний опір R . Конденсатор можна підключати до джерела для зарядки, або розряджати на гальванометр за допомогою перемикача Π (рис. 1, 2). Відведемо ліву кульку установки m_1 від положення рівноваги на кут α , зарядимо конденсатор та відпустимо її. Рухаючись із швидкістю V_1 , вона зазнає абсолютно пружного центрального удару з нерухомою правою кулькою $V_2 = 0$. Під час удару куль конденсатор частково розрядиться.

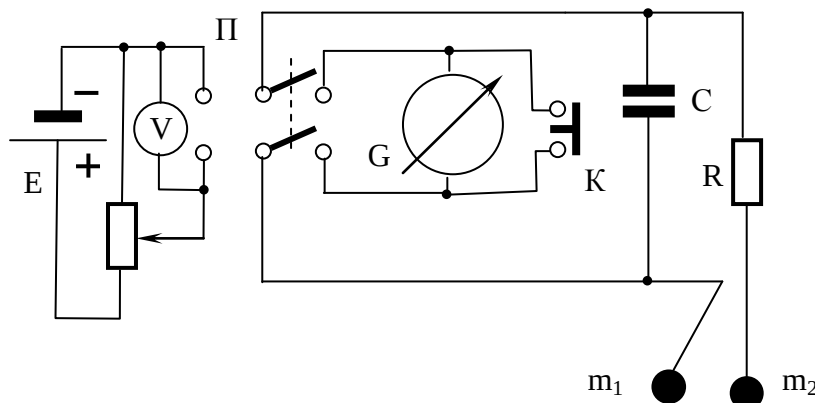


Рисунок 1

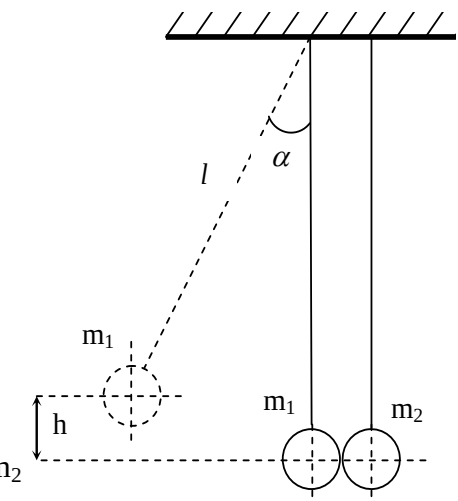


Рисунок 2

У випадку абсолютно пружного центрального удару куль однакової маси ($m_1 = m_2 = m$) із рівнянь (2.27, 2.29 С. 31), маємо:

$$U_1 = V_2; U_2 = V_1, \quad (1)$$

де U_1, U_2 – відповідно швидкість першої та другої кульки після удару.

Отже, під час зіткнення двох однакових абсолютно пружних куль відбувається обмін швидкостями.

Скористаємося цією обставиною для визначення середньої сили зіткнення куль. За другим законом Ньютона знайдемо середню силу удару:

$$F_c = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\tau} = \frac{m \cdot \Delta V}{\tau},$$

звідки

$$F_c = \frac{\Delta P}{\tau} = \frac{\Delta(mV)}{\tau} = \frac{m \cdot \Delta V}{\tau},$$

де $\tau = \Delta t$ – час зіткнення куль;

ΔV – зміна швидкості першої кулі під час удару.

Але $\Delta V = V_1 - U_1 = V_1 - V_2 = V_1$, тому що $U_1 = V_2$, а $V_2 = 0$. Остаточно одержуємо:

$$F_c = \frac{mV_1}{\tau}, \quad (2)$$

Масу кулі можна визначити за її густиною та об'ємом:

$$m = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho.$$

Знайдемо швидкість V_1 кулі в момент удару (див. рис. 2). Куля, відведена від положення рівноваги на кут α , має запас потенціальної енергії $W_n = mgh$. Ця енергія під час удару цілком переходить у кінетичну:

$$W_n = W_k = \frac{mV_1^2}{2} \text{ або } mgh = \frac{mV_1^2}{2}, \text{ звідки}$$

$$V_1 = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Висоту h , з якої падає куля, можна визначити за відстанню l (довжиною маятника) від точки підвісу до центра маятника та кутом відхилення α маятника від положення рівноваги

$$h = l(1 - \cos \alpha). \quad (4)$$

Отже

$$V_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}. \quad (5)$$

Час зіткнення τ настільки малий, що його неможливо виміряти секундоміром. Його визначають методом конденсаторного хронометра,

суть якого полягає в такому. Кулі під час удару замикають електричне коло, що складається з зарядженого конденсатора та опору R , послідовно з'єднаних між собою. Нехай у початковий момент часу t конденсатор мав заряд q . За час dt під час удару заряд конденсатора зменшиться на dq . Миттєве значення струму під час удару $I = -\frac{dq}{dt}$, а відповідно зменшення заряду конденсатора $dq = -Idt$. Миттєве значення струму може бути визначене з закону Ома $I = \frac{U}{R}$, але $U = \frac{q}{C}$, де C – ємність конденсатора, R – електричний опір кола. Тоді

$$-dq = \frac{q}{RC} dt. \quad (6)$$

Розділимо змінні і проінтегруємо рівняння (6)

$$-\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\int_0^{\tau} \frac{dt}{RC}, \quad (7)$$

одержимо:

$$\ln \frac{q_0}{q} = \frac{\tau}{RC}. \quad (8)$$

Із рівняння (6) маємо;

$$\tau = RC \ln \frac{q_0}{q}, \quad (9)$$

де q_0 – початковий заряд конденсатора,

q – величина заряду, що залишилася на конденсаторі після удару куль.

Для визначення величини заряду конденсатора користуються балістичним гальванометром, покази якого n пропорційні величині заряду

$\frac{q_0}{q} = \frac{n_0}{n}$, отже:

$$\tau = RC \ln \frac{n_0}{n}, \quad (10)$$

де n_0 – покази гальванометра під час розряду зарядженого конденсатора через гальванометр до удару куль,

n – покази гальванометра під час розряду конденсатора із залишковим зарядом через гальванометр після удару куль (конденсатор в обох випадках заряджається від джерела з однаковою ЕРС).

Порядок виконання роботи

Для визначення часу, середньої сили і швидкості співударяння куль необхідно:

1. Відвести одну з куль і закріпити її засувкою. Зарядити конденсатор від джерела і розрядити його через гальванометр. Записати покази гальванометра n_0 .

2. Не змінюючи напругу, зарядити конденсатор. Провести удар куль. Заряд конденсатора, що залишився, розрядити через гальванометр і записати покази n . Дослід повторити 7-9 разів. Результати записати в таблицю 1.

3. Виміряти довжину маятника l , радіус кулі r , кут відхилення маятника α ; записати значення електричного опору R і ємності конденсатора C .

Обробка результатів експерименту та їх аналіз

1. За формулою (5) обчислити швидкість куль під час удару.
2. За формулою (10) обчислити час зіткнення куль. Знайти абсолютну і відносну похибки методом логарифмування.

3. Визначити масу кулі $m = \frac{4\rho\pi r^3}{3}$, і за формулою (2) обчислити середню силу удару. Знайти абсолютну і відносну похибки сили удару.

Контрольні питання

1. Закони Ньютона. Імпульс. Закон збереження імпульсу (див. С. 24-25).
2. Центр мас твердого тіла. Теорема про рух центра мас твердого тіла.
3. Робота та енергія. Потужність. Потенціальна і кінетична енергія (див. С. 25-27).
4. Консервативні та дисипативні сили (див. С. 26-27).
5. Закон збереження енергії в механіці (див. С. 27-28).

6. Удар тіл. Абсолютно пружний та абсолютно непружний центральні удари та їх характеристики (формули (2.26), (2.27) з доведенням, див. С. 28-31).

7. Застосування законів збереження до абсолютно непружного та абсолютно пружного ударів (див. С. 28-31).

8. Перерахуйте джерела похибок під час виконання цієї роботи. Вивести формули для розрахунку відносної і абсолютної похибок вимірюваних величин (див. С. 22-23).

Таблиця 1

Ч.ч.	C, Φ	$R, Ом$	n_0	n	$l, м$	$r, м$	$m, кг$	$\tau, с$	$V, м/с$	$F, Н$	$\Delta F, Н$	$\varnothing, \%$
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
С.зн												

Лабораторна робота № 1.6

Визначення моментів інерції твердих тіл за допомогою трифілярного підвісу

Мета роботи: набуття навичок експериментального визначення моментів інерції твердих довільної форми та перевірка теореми Штейнера.

Прилади і матеріали: 1. Трифілярний підвіс. 2. Набір тіл (дисків). 3. Секундомір. 4. Штангенциркуль. 5. Рулетка. 6. Терези.

Теоретичні відомості

На практиці часто необхідні значення моментів інерції неоднорідних твердих тіл і тіл неправильної форми. У таких випадках моменти інерції визначають експериментальним шляхом. Одним із методів визначення моментів інерції є метод трифілярного підвісу. Трифілярний підвіс – кругла платформа, підвішена на трьох симетрично розташованих нитках, закріплених на її краях. Зверху нитки також симетрично прикріплені до диска трохи меншого діаметра, ніж діаметр платформи.

Платформа може виконувати крутильні коливання навколо вертикальної осі OO' (рис. 1), яка перпендикулярна до її площини і проходить через її центр мас. Центр мас платформи в цьому випадку зміщується внаслідок закручування сталевих ниток вгору або вниз по осі обертання. Період коливань залежить від величини моменту інерції платформи. Цей принцип лежить в основі визначення моменту інерції методом трифілярного підвісу. Він дає можливість визначати моменти інерції тіл довільної форми. Це основна перевага методу трифілярного підвісу над іншими методами.

Нехай платформа масою m_0 , обертаючись в одному напрямку, піднялася на висоту h . В такому разі потенційна енергія платформи зросте на величину

$$\Delta W_n = m_0 gh, \quad (1)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Під час обертання платформи у зворотному напрямку потенціальна енергія перетворюється на кінетичну енергію обертового руху

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2)$$

де I – момент інерції платформи відносно осі OO' ,

ω – кутова швидкість платформи.

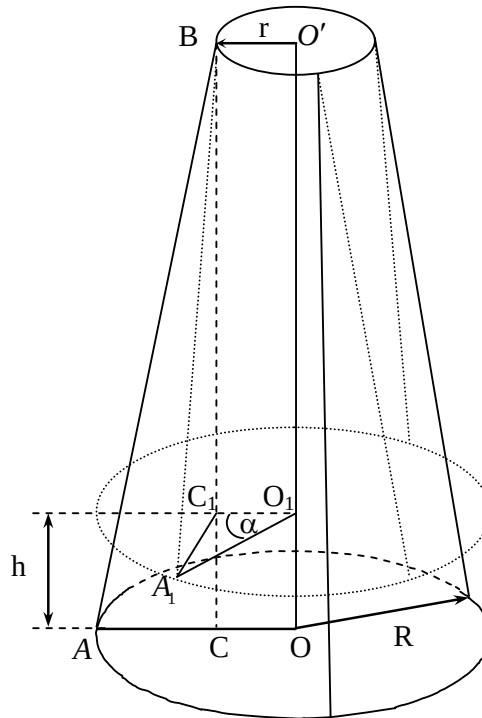


Рисунок 1

Під час обертання платформи у зворотному напрямку потенціальна енергія перетворюється на кінетичну енергію обертового руху

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2)$$

де I – момент інерції платформи відносно осі OO' ,

ω – кутова швидкість платформи.

Платформа пройде положення рівноваги з максимальною кінетичною енергією. Нехтуючи силами тертя, виходячи із закону збереження механічної енергії, можна записати, що

$$m_0gh = \frac{I\omega_{\max}^2}{2}, \quad (3)$$

де $\omega_{\max}$ – кутова швидкість платформи в момент досягнення нею положення рівноваги.

Вважаючи, що платформа виконує гармонічні крутильні коливання, можна записати залежність кута зсуву платформи від часу

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (4)$$

де α, α_0 – відповідно миттєве й амплітудне значення кута відхилення платформи від положення рівноваги,

t – поточне значення часу,

T – період коливань.

Знайдемо кутову швидкість платформи, взявши похідну від рівняння (4):

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi\alpha_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (5)$$

Очевидно, що максимального значення кутова швидкість набуде за $\cos \frac{2\pi}{T} t = 1$. Отже

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi\alpha_0}{T}. \quad (6)$$

Знайдемо величину зміщення h платформи вгору під час її повороту на кут α_0 , вважаючи, що $h_1 + h_2 \approx 2l$ (див. рис. 1):

$$h = h_1 - h_2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 + h_2} \approx \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l}. \quad (7)$$

Із рис. 1 видно, що $h_1^2 = l^2 - (R - r)^2$,

$$h_2^2 = l^2 - (AB)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \cos \alpha_0).$$

Підставивши значення h_1^2 і h_2^2 в (7), маємо

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha_0)}{2l} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{2l}. \quad (8)$$

У разі малих кутів α_0 значення синуса можна замінити його аргументом $\sin \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2}$. Отже

$$h = \frac{Rr\alpha_0^2}{2l}. \quad (9)$$

Із рівнянь (6), (9) випливає, що момент інерції I_0 ненавантаженої платформи відносно осі OO'

$$I_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 l} T_0^2, \quad (10)$$

де T_0 – період коливань ненавантаженої платформи.

Момент інерції платформи, навантаженої тілом довільної форми з масою m відносно осі OO' дорівнює

$$I = \frac{(m_0 + m)gRr}{4\pi^2 l} T^2, \quad (11)$$

де T – період коливань навантаженої платформи.

Момент інерції тіла, що знаходиться на платформі, відносно осі OO' дорівнює

$$I_T = I - I_0. \quad (12)$$

Якщо на платформі знаходиться n однакових тіл і вони розміщені симетрично до центра або в центрі платформи, то момент інерції кожного з них дорівнює

$$I_T = \frac{I - I_0}{n}. \quad (13)$$

Інтервал вимірювання моментів інерції тіл на цій лабораторній установці залежить від величини моменту інерції ненавантаженої платформи. Для того, щоб отримати досить високу точність вимірювання моменту інерції тіла I_T різниця моментів інерції $I - I_0$ має бути достатньо великою порівняно зі значенням I_0 , тому диск платформи виготовляють із легкого матеріалу.

В динаміці обертового руху важливу роль відіграє теорема Штейнера: момент інерції тіла відносно довільної осі ZZ' дорівнює сумі моменту інерції цього тіла відносно паралельної осі OO' , що проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані між цими осями

$$I_z = I_c + ma^2. \quad (14)$$

Теорему Штейнера легко перевірити за допомогою трифілярного підвісу. Для цього необхідно мати кілька однакових тіл правильної форми (диск, обруч). Спочатку визначають момент інерції одного або кількох тіл, розмістивши їх у центрі платформи так, щоб їх центр мас збігався з віссю обертання платформи, а потім тіла розміщують симетрично на платформі і визначають їх момент інерції за такого розміщення. Знайшовши момент інерції всіх тіл (формула 12) та поділивши його на кількість тіл, визначимо момент одного тіла, що знаходиться на відстані a від осі обертання. Визначивши відстань, масу і момент інерції тіла, покладеного в центр платформи, можна обчислити момент інерції цього тіла за теоремою Штейнера. Порівнявши отримані значення моментів інерції тіла, ми експериментально перевіримо теорему Штейнера.

Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту

1. Визначити геометричні розміри l, R, r установки та геометричні розміри R_T, r_T досліджуваних тіл. Зважити платформу та тіла. Результати вимірів занести в таблицю 1.

2. Привести платформу у коливальний рух. Для цього повернути нижню платформу на невеликий кут – $5-10^\circ$ відносно положення рівноваги – і відпустити її. Секундоміром виміряти час 25-30 повних коливань і визначити період коливань (ненавантаженої платформи)

$$T_0 = \frac{t_0}{N_0}, \quad (15)$$

де N_0 – число повних коливань платформи за час t_0 .

Обчислити момент інерції I_0 ненавантаженої платформи (формула 10). Результати записати в таблицю 1.

3. У центрі платформи розмістити досліджуване тіло. Визначити період коливання платформи з тілом T_1 . Результати записати в таблицю 2. Обчислити момент інерції завантаженої платформи $I_1 = \frac{(m_0 + m)gRr}{4\pi^2 l} T_1^2$ та диска відносно осі, що проходить через його центр мас $I_{oc} = I_1 - I_0$.

4. У центрі платформи розмістити два тіла. Визначити період коливання платформи з тілами в центрі T_2 . Обчислити момент інерції завантаженої платформи $I_2 = \frac{(m_0 + 2m)gRr}{4\pi^2 l} T_2^2$ та диска відносно осі, що проходить через його центр мас $I_{oc} = (I_2 - I_0)/2$. Результати записати в таблицю 2.

5. На платформі симетрично центра розмістити диски. Визначити відстань a від центра платформи до центра мас дисків та період коливань платформи T_3 . Результати записати в таблицю 2. Обчислити момент інерції завантаженої платформи $I_3 = \frac{(m_0 + 2m)gRr}{4\pi^2 l} T_3^2$ та момент інерції I_3 диска, зміщеного на відстань a відносно осі OO' $I_{oz} = (I_3 - I_0)/2$. Результати записати в таблицю 2.

6. Обчислити теоретичне значення моменту інерції ненавантаженої платформи $I_{от}$ та тіл $I_{тт}$ (формули 2.45 2.48, 2.49, 2.50, 2.51 див. С. 36-38) відносно осі, що проходить через їх центр мас. Результат порівняти з експериментом.

7. За теоремою Штейнера (формула 14) обчислити теоретичне значення моменту інерції зміщеного диска. Порівняти експериментальне та теоретичне значення моменту інерції зміщеного диска відносно осі OO' .

8. Визначити абсолютну та відносну випадкові похибки. Систематичною складовою похибки знехтувати.

Контрольні питання

1. Момент інерції твердого тіла. Розрахунок моментів інерції простих

тіл (диск, однорідний стержень). Теорема Штейнера (див. С. 36-39).

2. Момент сили. Момент імпульсу (див. С. 31-35). Закон збереження моменту імпульсу (див. С.37-38). Основне рівняння динаміки обертального руху (див. С. 38-40).

3. Кінетична енергія тіла, яке бере участь в обертovому русі (див. С.33-34). Закон збереження енергії в механіці (див. С. 27-28). Консервативні та дисипативні сили (див. С. 26-27).

4. Переваги і недоліки методу трифілярного підвісу

Таблиця 1 – Дослідження характеристик установки.

Ч.ч.	N	t_0 , с	T_0 , с	R, м	r, м	m_0 , кг	I_0 , кг·м ²	ΔI_0 , кг·м ²	φ , %	$I_{0\text{теор}}$, кг·м ²
1										
2										
3										
Ср. зн										

Таблиця 2 – Визначення моментів інерції тіл.

Ч.ч.	N ₁	t_1 , с	T_1 , с	m, кг	I_1 , кг·м ²	$I_{\text{дс}}$, кг·м ²	$\Delta I_{\text{дс}}$, кг·м ²	ε_I , %	$I_{\text{дс теор}}$, кг·м ²
Один диск в центрі платформи									
1									
2									
3									
Ср. зн.	—	—							
Ч.ч.	N ₂	t_2 , с	T_2 , с	m, кг	I_2 , кг·м ²	$I_{\text{дс}}$, кг·м ²	$\Delta I_{\text{дс}}$, кг·м ²	ε_I , %	$I_{\text{дс теор}}$, кг·м ²
Два диски в центрі платформи									
1									
2									
3									
Ср.зн.	—	—							
Ч.ч.	N ₃	t_3 , с	T_3 , с	m, кг	I_3 , кг·м ²	$I_{\text{дз}}$, кг·м ²	$\Delta I_{\text{дз}}$, кг·м ²	ε , %	$I_{\text{дз теор}}$, кг·м ²
Два диски на відстані a від центра платформи									
1									
2									
3									
Ср.зн.	—	—							

Лабораторна робота 1.7

Визначення моменту інерції маятника Обербека

Мета роботи: вивчення основного закону динаміки обертального руху шляхом визначення моментів інерції маятника Обербека.

Прилади і матеріали. 1. Маятник Обербека. 2. Набір тягарців. 3. Секундомір. 4. Лінійка. 5. Штангенциркуль.

Теоретичні відомості

У цій роботі потрібно визначити момент інерції маятника Обербека. Прилад являє собою хрестовину (рис. 1), яка складається з чотирьох взаємно перпендикулярних стержнів.

Уздовж стержнів можуть переміщатися важки однакової маси. На горизонтальній осі хрестовини знаходиться двоступінчастий диск, на який намотується нитка. Один кінець нитки прикріплений до диска, а до другого кінця нитки підвішується важок. Під дією важка нитка розмотується з диска і викликає обертальний рух хрестовини. Рух хрестовини наближено можна вважати рівноприскореним. Визначити момент інерції цієї системи можна двома методами: експериментально і теоретично.

І метод. Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху

$$\varepsilon = \frac{M}{I}. \quad (1)$$

Відповідно момент інерції маятника відносно осі обертання дорівнює

$$I = \frac{M}{\varepsilon}, \quad (2)$$

де M – момент сил відносно осі обертання,

ε – кутове прискорення.

Модуль моменту сили, що діє на шків, можна визначити, якщо відома сила, що діє на шків, та радіус шківів. Цією силою є сила натягу нитки:

$$F = mg - ma, \quad (3)$$

де a – прискорення руху важка,

g – прискорення вільного падіння.

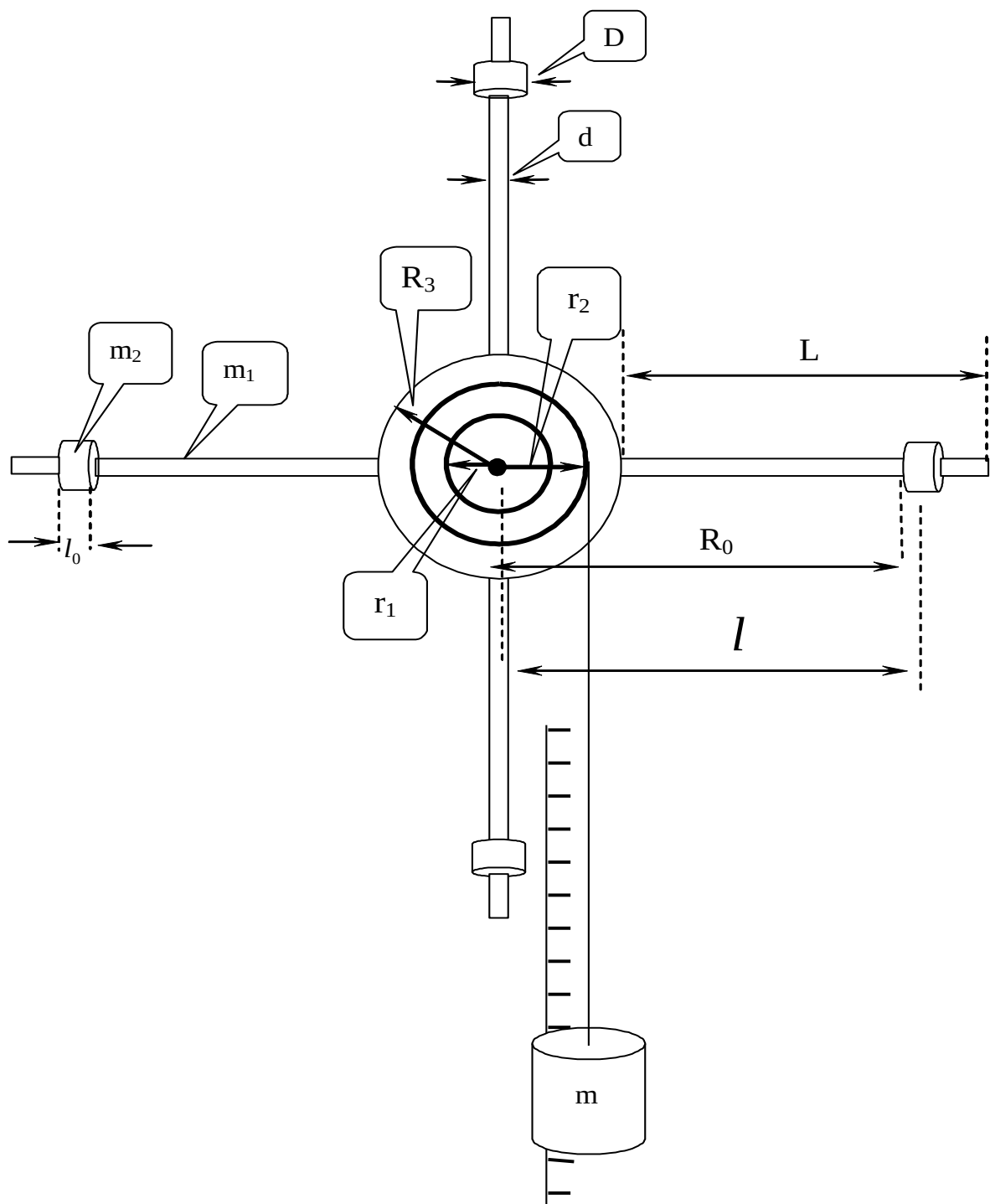


Рисунок 1

Отже, модуль моменту сил, прикладених до маятника Обербека відносно осі обертання, дорівнює

$$M = Fr = m(g - a)r, \quad (4)$$

де m – маса важка,

r – радіус шків.

Оскільки рух важка рівноприскорений, то

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{\varepsilon rt^2}{2}, \quad (5)$$

де h – висота падіння важка масою m ,

t – час падіння.

Отже, модуль кутового прискорення дорівнює

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}. \quad (6)$$

Підставивши у формулу (2) значення з формул (4) і (6), одержимо:

$$I_{\text{екс}} = \frac{mgt^2 r^2}{2h} - mr^2. \quad (7)$$

II метод. Уявно розіб'ємо маятник на систему обертових тіл: чотирьох стержнів довжиною L і масою m_1 , чотирьох циліндричних тіл масою m_2 та довжиною l_0 , диска масою m_3 й радіусом R_3 . Вісь обертання системи проходить через центр диска. Момент інерції маятника дорівнює сумі моментів інерції тіл, що утворюють маятник.

Момент інерції стержня довжиною L відносно осі, що проходить через його центр, дорівнює $I_c = m_1 L^2 / 12$, а його момент інерції відносно осі обертання хрестовини маятника знайдемо за теоремою Штейнера:

$$I_o = I_c + m_1 \left(\frac{L}{2} + R_3 \right)^2 = \frac{m_1 L^2}{12} + m_1 \left(\frac{L}{2} + R_3 \right)^2, \quad (8)$$

де m_1 – маса одного стержня, R_3 – радіус диска, на якому закріплені стержні (рис. 1), $\frac{L}{2} + R_3$ – відстань між віссю обертання та центром мас стержня.

Момент інерції чотирьох таких стержнів:

$$I_1 = \frac{m_1 L^2}{3} + 4m_1 \left(\frac{L}{2} + R_3 \right)^2, \quad (9)$$

де m_1 – маса стержня, що може бути обчислена за формулою:

$$m_1 = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} L,$$

ρ – густина матеріалу стержня ($\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$,

d – його діаметр.

Розміри малих циліндричних тіл (важків), закріплених на стержнях, малі порівняно з відстанню l від осі обертання до центрів мас цих тіл, тому їх можна розглядати як матеріальні точки, сумарний момент інерції яких

$$I_2 = 4m_2 l^2. \quad (10)$$

де $l = R_0 + \frac{l_0}{2}$ – відстань від осі обертання до центрів мас циліндричних тіл (важків),

$$m_2 = \frac{\pi(D^2 - d^2)\rho l_0}{4} - \text{його маса (маса важка вказана на важку установки),}$$

D – діаметр важка,

d – діаметр його отвору (стержня, на якому насаджено важок).

Якщо врахувати реальні розміри циліндричних тіл, то точне значення їх сумарного моменту становитиме:

$$I'_2 = 4m_2 \left(\frac{l_0^2}{12} + l^2 \right). \quad (11)$$

Момент інерції диска, на якому закріплені стержні:

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}, \quad (12)$$

де m_3 – маса диска,

R_3 – радіус диска.

Маса диска

$$m_3 = \pi R_3^2 h_0 \rho, \quad (13)$$

де h_0 – товщина диска

Теоретичне значення моменту інерції всього маятника (моментом інерції пластикових шківів нехтуємо, оскільки їх маса досить мала) дорівнює:

$$I'_{\text{теор}} = I_1 + I'_2 + I_3 = m_1 \left[\frac{L^2}{3} + 4 \left(\frac{L}{2} + R_3 \right)^2 \right] + 4m_2 \left(\frac{l_0^2}{12} + l^2 \right) + \frac{m_3 R_3^2}{2}. \quad (14)$$

Якщо знехтувати моментом інерції I_3 диска, на якому закріплені стержні хрестовини, та вважати важки на стержнях матеріальними точками, то значення моменту інерції всього маятника дорівнює

$$I_{\text{теор}} = I_1 + I_2 = m_1 \left[\frac{L^2}{3} + 4 \left(\frac{L}{2} + R_3 \right)^2 \right] + 4m_2 l^2. \quad (15)$$

Порядок виконання роботи

1. Розмістити важки m_2 на однакових відстанях від осі обертання, внаслідок чого маятник має бути збалансованим.
2. Штангенциркулем виміряти радіуси двоступінчастого шківів r_1 і r_2 .

3. Намотати нитку на шків з радіусом r_1 . Підвісити на гачок нитки важок масою m .

4. Установити нижній край важка точно з фіксованою міткою на лінійці установки.

5. Одночасно відпустити важок і запустити секундомір.

6. Визначити час, за який важок опуститься до нижньої мітки.

7. Визначити відстань h між мітками.

8. Експеримент провести по 3-5 разів для однакового положення важків $m_2 m_1$ за радіуса шківів r_1 , для різних мас важків m на нитці, а потім повторити те саме для радіуса шківів r_2 . Результати всіх вимірів занести в таблицю 1.

9. Для обчислення теоретичного значення моменту інерції маятника Обербека необхідно виміряти довжину стержня хрестовини L , його діаметр d , визначити масу кожного з чотирьох важків m_2 , які знаходяться на хрестовині, і їх довжину l_0 .

10. Виміряти діаметр стержня хрестовини d і відстань R_0 від кожного важка до осі обертання. Виміряти радіус диска R_3 . Дані вимірів записати в таблицю 2.

Обробка результатів експерименту та їх аналіз

1. За формулою (7) обчислити експериментальне значення моменту інерції маятника Обербека для різних радіусів двоступінчастого диска і маси підвішених важків m , знайти середнє його значення

2. Оцінити абсолютну і відносну похибки експерименту.

3. За формулами (14), (15) обчислити теоретичний момент інерції маятника. Порівняйте отримані результати. Проаналізуйте вплив доданків у формулах (14), (15) на загальний момент інерції маятника. Всі деталі маятника виготовлені із інструментальної сталі, її густина $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

4. Порівняти результати, отримані з експерименту і теоретичним шляхом, зробити відповідні висновки.

Контрольні питання

1. Основне рівняння динаміки для обертального руху твердого тіла. (див. С. 38-40). Момент інерції, момент сили, момент імпульсу. Обчислення моментів інерції тіл. Теорема Штейнера (див. С. 31-38).

2. Кінетична енергія обертового (див. С. 33-34).та поступального рухів твердого тіла (див. С. 25-28).

3. Закони збереження імпульсу (див. С. 24-25)? моменту імпульсу (див. С. 37-38) й енергії в механіці Консервативні та дисипативні сили (див. С. 24-28).

4. Фізична суть визначення моменту інерції маятника Обербека експериментальним методом з виведенням робочої формули.

5. Теоретичний розрахунок моменту інерції маятника Обербека з виведенням робочої формули (див. С. 70-73).

6. Вкажіть основні джерела похибок у разі експериментального і теоретичного визначення моменту інерції маятника Обербека. Спробуйте оцінити їх величину (див. С. 22-23).Оцініть вплив кожного доданка розрахункових формул (14), (15) на точність розрахунків.

7. Виведення робочої формули для оцінення граничного значення відносної похибки методом логарифмування для $I_{\text{експ}}$ (див. С. 22-23).

Таблиця 1

Ч.ч.	$m, \text{кг}$	$h, \text{м}$	$t, \text{с}$	$I_{\text{експ}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\varepsilon, \%$
Малий шків $r_1 =$						
1						-
2						-
3						-
4						-
5						-
Великий шків $r_2 =$						
1						-
2						-
3						-
4						-
5						-
С. зн	-	-	-			

Таблиця 2

L, м	d, м	$m_1, \text{кг}$	$l, \text{м}$	$l_0, \text{м}$	$R_0, \text{м}$	$m_2, \text{кг}$	$R_3, \text{м}$	$h_0, \text{м}$	$m_3, \text{кг}$	$I'_{\text{теор}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_{\text{теор}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\varepsilon, \%$

Лабораторна робота № 1.8

Визначення моменту інерції маховика

Мета роботи: вивчення закону збереження механічної енергії шляхом визначення моменту інерції маховика.

Прилади і матеріали: 1. Маховик. 2. Секундомір. 3. Терези. 4. Лінійка з міліметровими поділками. 5. Тягарець. 6. Штангенциркуль.

Теоретичні відомості та опис лабораторної установки

Установка для визначення моменту інерції маховика складається з маховика та шківів, які насаджені на вал (рис. 1). Вал закріплений у двох підшипниках. На шків намотують нитку і до її кінця прикріплюють тягарець масою m . Падаючи, тягарець надає рівноприскореного обертання шківу, а через нього – валу й маховику.

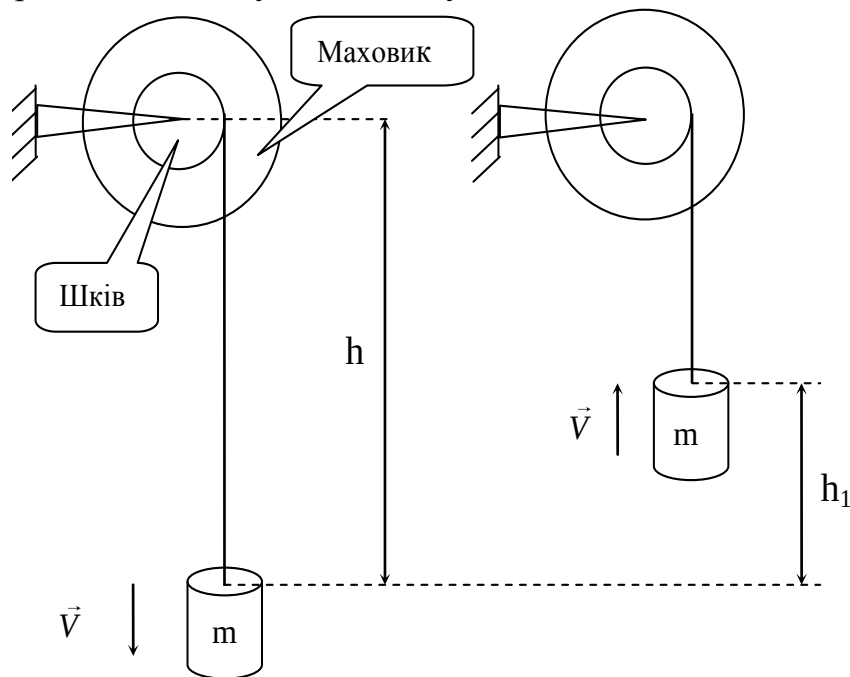


Рисунок 1

Потенціальна енергія тягарця у цьому випадку перетворюється на його кінетичну енергію поступального руху, кінетичну енергію обертального руху маховика і витрачається на перемагання сил тертя (кінетичною енергією обертального руху шківів з валом нехтуємо, адже вона мала порівняно з попередніми складовими).

Кінетична енергія поступального руху тягарця та кінетична енергія обертального руху маховика визначаються за формулами:

$$W_{k(i\ddot{i}\ddot{n}\ddot{o})} = \frac{mV^2}{2}, \quad (1)$$

$$W_{k(o\ddot{o})} = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2)$$

Робота, що затрачається на перемагання сил тертя, за один оберт маховика нехай становить A , а робота за кілька обертів – $A \cdot n_1$ (де n_1 – кількість обертів маховика, які він зробив під дією тягарця).

Отже, для такої системи можна застосувати закон збереження механічної енергії, враховуючи водночас втрати механічної енергії на роботу проти сил тертя:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + An_1. \quad (3)$$

Момент інерції маховика можна визначити за допомогою описаної установки двома методами.

І метод. Нитка не прикріплена до шківів. У момент, коли тягар повністю опустився, нитка спадає і шків, продовжуючи обертатись, робить n_2 обертів, поки повністю не зупиниться. За цей час за рахунок кінетичної енергії обертального руху маховика, яку він мав у момент спадання нитки, виконується робота, спрямована на перемагання сили тертя, що дорівнює:

$$An_2 = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (4)$$

звідки

$$A = \frac{I\omega^2}{2n_2}. \quad (5)$$

Підставивши (4, 5) у (3), дістанемо:

$$I = \frac{mgh - \frac{mV^2}{2}}{\frac{\omega^2}{2} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right)}. \quad (6)$$

Виразимо лінійну V і кутову ω швидкості через вимірювані в досліді величини – висоту падіння тягарця h і час його падіння t :

$$V = \frac{2h}{t}; \quad (7)$$

$$\omega = \frac{2h}{rt}, \quad (8)$$

де r – радіус шківів.

Замінивши V і ω у (6) на їх значення (7) і (8), знайдемо:

$$I = \frac{mr^2(gt^2 - 2h)}{2h\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)}. \quad (9)$$

II метод. Нитка прикріплена одним кінцем до шківів. Коли тягар повністю опуститься, маховик, продовжуючи обертатись за інерцією, підніме тягар на висоту $h_1 < h$. Система набуде потенціальної енергії

$$W_{II} = mgh_1. \quad (10)$$

Різниця потенціальних енергій системи до досліду і після досліду дорівнюватиме роботі на переміщення сил тертя:

$$mgh - mgh_1 = Fh + Fh_1, \quad (11)$$

де F – сила тертя.

Із (11) маємо:

$$F = \frac{mg(h - h_1)}{h + h_1}. \quad (12)$$

Запишемо закон збереження енергії для першої частини досліду:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + Fh. \quad (13)$$

Підставивши в (13) значення F із (12), маємо:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mg(h - h_1)}{h + h_1} \cdot h. \quad (14)$$

Беручи до уваги (7) і (8), із (14) визначаємо момент інерції маховика:

$$I = mr^2 \left[gt^2 \cdot \frac{h_1}{h(h - h_1)} - 1 \right]. \quad (15)$$

Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту

Завдання 1

1. Визначити на терезах масу тягарця. Виміряти штангенциркулем радіус шківів.

2. Намотати на шків нитку. Підвісити тягарець до другого кінця нитки.

3. Зробити мітку на маховику (помітити частину обода крейдою або приклеїти смужку паперу, щоб легше було визначати кількість обертів маховика). Визначити висоту h , на яку опускається тягарець.

4. За допомогою секундоміра визначити час, протягом якого тягарець опускається на висоту h . Порахувати, скільки обертів n робить маховик від початку руху до повного зупинення.

5. Підрахувати кількість обертів, що їх зробив маховик, поки опускався тягарець, за формулою:

$$n_1 = \frac{h}{2\pi r}, \quad (16)$$

де h – шлях, пройдений тягарцем, що опускався,

r – радіус шківів.

Визначити кількість обертів, що їх зробив маховик після припинення дії тягарця до повного зупинення:

$$n_2 = n - n_1. \quad (17)$$

Знайдені експериментально дані n_1 , n_2 , t і h підставити у формулу (9) й обчислити момент інерції маховика.

6. Дослід повторити 4-5 разів, результати занести в таблицю 1. Знайти середнє арифметичне значення моменту інерції маховика, оцінити абсолютну та відносні похибки.

Завдання 2

1. Нитку довжиною h одним кінцем закріпити на шківі й намотати на нього. До другого кінця нитки прикріпити тягарець.

2. Одночасно пустити тягарець і увімкнути секундомір. Визначити час опускання тягарця.

3. Визначити висоту h_1 (див. рис. 1), на яку піднявся тягарець, поки маховик обертався за інерцією. За формулою (15) обчислити момент інерції маховика.

4. Дослід виконати 4-5 разів; результати занести в таблицю 2; знайти середнє арифметичне значення моменту інерції маховика, абсолютну та відносні похибки.

Завдання 3

1. Нарисувати схематично маховик.

2. Визначити геометричні розміри маховика, його масу.

Обчислити теоретичне значення моменту інерції маховика I_T , уявно розбивши маховик на тіла (диск та диск із отвором), моменти інерції яких відомі.

3. Порівняти значення моментів інерції маховика, визначених за формулами (9), (15) та його теоретичним значенням.

Контрольні питання

1. Робота, потенціальна енергія, кінетична енергія поступального та обертового рухів (див. С. 25-28). Сила тертя. Робота на перемагання сили тертя.
2. Закон збереження енергії в механіці. Дисипативні та консервативні сили (див. С. 26-28).
3. Момент інерції стержня, однорідного диска, диска з центральним отвором, тонкостінного кільця (див. С. 31-33).
4. Основне рівняння динаміки обертового руху (див. С. 38-40). Кутове прискорення, момент сили, момент інерції, момент імпульсу (див. С. 31-33).
5. Теорема Штейнера та її застосування (див. С. 37).
6. Вивести формули для визначення моментів інерції стержня, обруча, диска, диска з центральним отвором (див. С. 31-33).

Таблиця 1

Ч.ч.	m, кг	r, м	h, м	t, с	n	n ₁	n ₂	I ₁ , кг·м ²	ΔI_1 , кг·м ²	ε , %
1										
2										
3										
4										
5										
С.зн.										

Таблиця 2

Ч.ч.	m, кг	r, м	h, м	t, с	h ₁ , м	h ₂ , м	I ₂ , кг·м ²	ΔI_2 , кг·м ²	ε , %
1									
2									
3									
4									
5									
С.зн.									

Лабораторна робота № 1.10

Визначення моментів інерції тіл із закону збереження енергії

Мета роботи: експериментальна перевірка закону збереження енергії в механіці методом визначення моментів інерції тіл кочення.

Прилади і матеріали: 1. Похила площина. 2. Набір тіл кочення. 3. Терези. 4. Штангенциркуль. 5. Лінійка. 6. Секундомір.

Теоретичні відомості

Закон збереження та перетворення енергії є одним з фундаментальних законів природи, справедливим для систем як макроскопічних тіл, так і для елементарних частинок. Він є вираженням вічності й незнищуваності руху в природі, який лише переходить із однієї форми в іншу. Закон збереження та перетворення енергії в природі: в ізольованій системі тіл енергія може переходити із одних видів в інші та передаватися від одного тіла до іншого, але її загальна кількість залишається незмінною.

Якщо в замкнутій системі тіл діють тільки консервативні сили, то взаємні перетворення механічної енергії в інші види (немеханічні форми: внутрішню, хімічну і т. д.) відсутні. Консервативні сили – це сили, робота яких не залежить від траєкторії руху тіла, а визначається лише початковим і кінцевим положеннями тіла:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}. \quad (1)$$

Робота ж цих сил по замкнутому контуру дорівнює нулю

$$A = \oint_S \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

До консервативних сил відносять гравітаційну, кулонівську та інші сили центральних полів.

Замкнена система, в якій діють лише консервативні сили, є консервативною системою. Для неї справедливий закон збереження і перетворення енергії в механіці: *механічна енергія замкнутої системи, в якій діють лише консервативні сили, – величина постійна:*

$$W = W_K + W_n = \text{const}. \quad (2)$$

Крім консервативних сил, в природі існують дисипативні (неконсервативні) сили (дисипація – розсіювання). Прикладом таких сил є сила тертя, прикладом дисипативної системи може бути будь-який

біологічний живий об'єкт. Робота дисипативних сил залежить від траєкторії руху тіла.

Закон збереження механічної енергії не можна застосовувати для замкнутих дисипативних систем. У таких системах, як правило, діють сили тертя або існує залишкова (пластична) деформація, тому що частина механічної енергії в процесі руху розсіюється, перетворюється в немеханічні форми, наприклад, на теплоту.

Нехай тіло масою m скочується без тертя похилою площиною з висоти h (рис. 1). Опором повітря нехтуємо. На тіло діє сила земного тяжіння, яка є консервативною, а система «похила площина – тіло» є замкнутою. Тому для цього випадку можна застосовувати закон збереження механічної енергії

$$W_n = W_K. \quad (3)$$

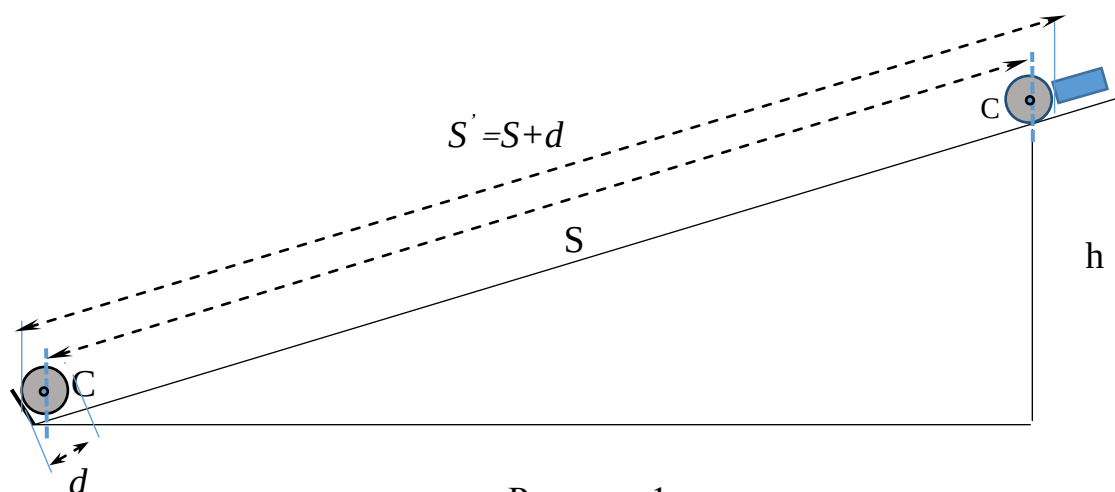


Рисунок 1

Потенціальну енергію тіла обчислюють за формулою

$$W_n = mgh. \quad (4)$$

Кінетична енергія тіла визначається як сума кінетичної енергії поступального й обертального рухів:

$$W_K = W_{\text{пост}} + W_{\text{обр}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (5)$$

де I – момент інерції тіла; ω – кутова швидкість.

З рівнянь (5), (7) і (1) після нескладних перетворень маємо

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (6)$$

Кутова швидкість обертання тіла пов'язана зі швидкістю його поступального руху співвідношенням

$$\omega = \frac{V}{R}, \quad (7)$$

де R – радіус тіла.

Рух тіла рівноприскорений, тому

$$V = at; \quad (8)$$

$$S = \frac{at^2}{2}, \quad (9)$$

де $S = S' - d$ – відстань, яку пройшов центр мас тіла по похилій площині (див. рис. 1),

t – час скочування тіла.

З формул (8) і (9) маємо

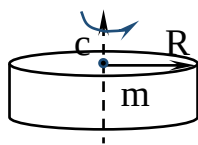
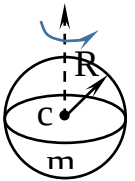
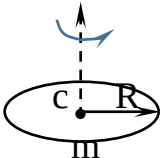
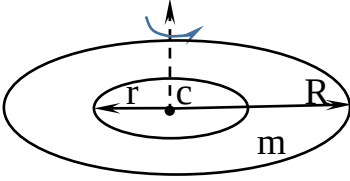
$$V = \frac{2S}{t}. \quad (10)$$

Підставляючи вирази (7), (10) у (6), та розв'язавши рівняння відносно I , одержуємо

$$I_{\text{експ}} = mR^2 \left(\frac{ght^2}{2S^2} - 1 \right). \quad (11)$$

Момент інерції тіл правильної форми можна розрахувати теоретично. Цим способом можна визначити момент інерції будь-якого іншого однорідного тіла правильної форми. Моменти інерції відносно осі, що проходить через центр мас для простих тіл наводяться в таблиці 1.

Таблиця 1

Тіло		Момент інерції
Однорідний циліндр, диск		$I_c = \frac{mR^2}{2}$
Однорідна куля		$I_c = \frac{2}{5}mR^2$
Тонкостінний циліндр, тонкий обруч		$I_c = mR^2$
Диск з центральним отвором, товстостінна труба		$I_c = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$

Порядок виконання роботи

1. Виставити необхідну висоту похилої площини. Ввімкнути установку в мережу. Поставити досліджуване тіло біля осердя електромагніту. Ввімкнути електромагніт (тіло утримується у верхній частині похилої площини за допомогою електромагніту). У разі вимикання живлення електромагніту тіло починає скочуватися вниз й одночасно включається секундомір. Секундомір виключається автоматично в момент досягнення тілом кінця похилої площини.

Спочатку необхідно виконати кілька тренувальних пусків тіла – домогтися того, щоб тіло під час скочування не торкалося бортиків похилої площини.

2. За завданням викладача для кожного з досліджуваних тіл (куля, циліндр та ін.) провести по 5-7 дослідів. Визначити час скочування кожного тіла.

3. Виміряти довжину S' похилої площини і її висоту h . Визначити відстань, яку пройшов центр мас тіла по похилій площині $S = S' - d$, (де d – діаметр тіла).

4. Зробити необхідні виміри геометричних розмірів тіл: радіуси всіх тіл R , висоту кожного циліндра H , радіус отвору циліндра r . Розрахувати масу кожного тіла (густина сталі $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$). Дані усіх вимірів занести в табл. 2.

Обробка результатів експерименту

1. За формулою (11) обчислити момент інерції досліджуваних тіл за результатами експерименту.

2. За формулами табл. 1 для відповідних тіл обчислити теоретичне значення їхніх моментів інерції.

3. Порівняти результати теоретичних обчислень та зіставити їх із результатами експерименту. Зробити висновки.

4. Обчислити абсолютну і відносну похибки експерименту.

Контрольні питання

1. Момент інерції твердого тіла кільця (див. С. 31-33). Кінетична енергія поступального та обертового рухів твердого тіла. Закон збереження енергії в механіці. Консервативні та дисипативні сили (див. С. 25-28).

2. Розрахунок моментів інерції деяких простих тіл (однорідний стержень, диск, диск із центральним отвором, обруч, куля). Теорема Штейнера (див. С. 37-38).

3. Експериментальні методи визначення моментів інерції твердих тіл.

4. Вивести робочу формулу для визначення моменту інерції тіла за допомогою похилої площини (див. С. 81-83).

5. Момент сили. Рівняння моментів. Момент імпульсу (див. С. 31-33). Закон збереження моменту імпульсу (див. С. 38).

6. Гіроскопи. Основне рівняння динаміки оберткового руху (див. С. 38-39).

7. Вивести робочу формулу для оцінення граничного значення відносної похибки методом логарифмування для $I_{\text{експ}}$ (див. С. 22-23).

Таблиця 2

Тіло	№ досл.	m, кг	h, м	S, м	t, с	$I_{\text{експ}},$ кг·м ²	$\Delta I_{\text{експ}},$ кг·м ²	$\epsilon,$ %	R, м	г, м	H, м	$I_{\text{теор}},$ кг·м ²
Куля	1									-	-	
	2									-	-	
	3									-	-	
	4									-	-	
	5									-	-	
	С. зн.									-	-	
Циліндр	1									-		
	2									-		
	3									-		
	4									-		
	5									-		
	С. зн.									-		
Циліндр з отвором	1											
	2											
	3											
	4											
	5											
	С. зн.											

З МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Лабораторна робота № 7.1

Вивчення термодинамічних процесів з ідеальними газами та експериментальне визначення показника адіабати повітря

Мета роботи: Теоретичне вивчення термодинамічних процесів з ідеальними газами та експериментальне визначення показника адіабати повітря.

Прилади та матеріали: прилад Клемана-Дезорма, манометр, насос.

Теоретичні відомості

Стан ідеального газу визначається для цієї маси газу трьома параметрами стану: тиском P , об'ємом V , температурою T . Рівняння, що пов'язує ці параметри, називається рівнянням стану газу.

Рівняння стану ідеального газу у загальному вигляді можна записати так:

$$f(P, V, T) = 0. \quad (1)$$

Рівняння стану ідеального газу легко отримати із основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу. Запишемо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів у формі:

$$P = nkT, \quad (2)$$

де n – концентрація молекул,

k – стала Больцмана ($k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$).

Оскільки

$$n = \frac{N}{V}, \quad (3)$$

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \quad (4)$$

де N – число молекул в об'ємі V ,

m – маса газу,

μ – молярна маса газу,

N_A – число Авогадро ($N_A = 6,022 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$).

Із (2), (3), (4) випливає:

$$P = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{N_A k}{V} T . \quad (5)$$

Врахувавши, що $k N_A = R$, де R – універсальна газова стала $R = 8.314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, отримаємо рівняння стану газу

$$PV = \frac{m}{\mu} RT . \quad (6)$$

Рівняння стану ідеального газу можна також подати у формі:
 $\frac{PV}{T} = \frac{m}{\mu} R = \text{const}$, або

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} . \quad (7)$$

Рівняння (7) встановлює зв'язок між параметрами для двох станів газу.

Термодинамічні процеси, що протікають за одного постійного параметра стану газу та постійної маси газу, називають ізопроцесами.

Теплоємність газів залежить від умов нагрівання. З'ясуємо цю залежність, використовуючи рівняння стану (6) і перший закон термодинаміки, який формулюється так: кількість теплоти dQ , що отримала термодинамічна система, витрачається нею на збільшення її внутрішньої енергії dU та на виконання роботи проти зовнішніх сил dA :

$$dQ = dU + dA. \quad (8)$$

За означенням масова теплоємність чисельно дорівнює кількості теплоти, яку необхідно затратити, щоб температуру тіла (газу) змінити на 1 К:

$$C = \frac{dQ}{dT} . \quad (9)$$

У термодинаміці, крім масової теплоємності, виділяють питому c та молярну C_μ теплоємності, а для газів теплоємність, залежно від способів їх нагрівання: теплоємність за постійного тиску C_P , $C_{P\mu}$ та постійного об'єму – C_V , $C_{V\mu}$.

Питома теплоємність чисельно дорівнює кількості теплоти, яку необхідно затратити, щоб температуру одного кілограма речовини змінити на 1 К:

$$c = \frac{dQ}{mdT} . \quad (10)$$

Молярна теплоємність чисельно дорівнює кількості теплоти, яку необхідно затратити, щоб температуру одного моля речовини змінити на 1 К:

$$C_{\mu} = \frac{\frac{dQ}{m}}{\frac{dT}{\mu}} = \frac{dQ}{\nu \cdot dT} . \quad (11)$$

Для газів, із рівнянь (8) і (9), маємо:

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{dA}{dT} . \quad (12)$$

З рівняння (12) видно, що теплоємності газів можуть набувати різних значень залежно від способів нагрівання газу, тому що одному і тому самому значенню зміни температури dT можуть відповідати різні значення dU і dA .

Елементарна зміна внутрішньої енергії газу для довільного термодинамічного процесу становить:

$$dU = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R dT = \nu \frac{i}{2} R dT , \quad (13)$$

де i – число ступенів вільності молекули газу,

$$\nu = \frac{m}{\mu} - \text{число молів газу,}$$

R – універсальна газова стала.

Елементарна робота газу залежить від типу термодинамічного процесу і в загальному випадку дорівнює

$$dA = p(V)dV , \quad (14)$$

де $p(V)$ – залежність тиску від об'єму.

Розглянемо процеси, що протікають в ідеальному газі за постійної маси газу ($m = \text{const}$).

Процес називається *ізохоричним*, якщо об'єм газу у разі зміни температури залишається постійним ($V = \text{const}$). У такому випадку $dV = 0$. Отже, $dA = 0$, тобто вся теплота, що підводиться до газу, іде на збільшення його внутрішньої енергії. Тоді з рівнянь (11), (1) випливає, що молярна теплоємність газу за постійного об'єму:

$$C_{V\mu} = \frac{\frac{dQ}{m}}{\frac{dT}{\mu}} = \frac{dU}{\frac{m}{\mu} dT} = \frac{i}{2} R . \quad (15)$$

Отже, зміна внутрішньої енергії у довільному термодинамічному процесі складає

$$dU = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R dT = \frac{m}{\mu} c_{v\mu} dT. \quad (16)$$

Процес, що протікає за постійного тиску $p=const$, називається *ізобаричним*. Для цього випадку формула (12) буде мати вигляд:

$$C_{p\mu} = \frac{dU}{\frac{m}{\mu} dT} + \frac{dA}{\frac{m}{\mu} dT} = \frac{dU}{\frac{m}{\mu} dT} + p \frac{dV}{\frac{m}{\mu} dT}. \quad (17)$$

Продиференціюємо рівняння (6) одержимо:

$$pdV + Vdp = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (18)$$

але $p=const$ і $dp=0$, тому $pdV = \frac{m}{\mu} R dT$. Підставляючи ці значення в рівняння (17) і замінивши згідно з (16) dU на $c_{v\mu} dT$, одержимо:

$$C_{p\mu} = C_{v\mu} + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (19)$$

Ізотермічним називається процес, що протікає за постійної температури $T=const$. У цьому випадку $dT=0$ і $dQ=dA$, тобто внутрішня енергія газу залишається постійною, і вся теплота, що підводиться до термодинамічної системи, витрачається на виконання роботи проти зовнішніх сил, молярна теплоємність газу в ізотермічному процесі $C_T = \infty$.

Процес, що протікає без теплообміну із зовнішнім середовищем, називається *адіабатичним*. Оскільки $dQ=0$, перший закон термодинаміки буде мати вигляд:

$$dU + dA = 0 \text{ або } dA = -dU = -\frac{m}{\mu} c_{v\mu} dT.$$

Тобто, під час адіабатичного процесу розширення або стискання робота виконується газом тільки за рахунок зміни запасу внутрішньої енергії. Теплоємність газу в адіабатичному процесі $C_Q=0$, тому, що $dQ=0$.

Виведемо рівняння адіабатичного процесу (рівняння Пуассона).

Виходячи з того, що $dA = -dU = -\frac{m}{\mu} p dV$ і $dU = c_{v\mu} dT$, для одного моля газу ($\frac{m}{\mu} = 1$) маємо:

$$pdV = -c_{v\mu} dT. \quad (20)$$

Поділивши рівняння (18) на (20), враховуючи (19), одержимо:

$$1 + \frac{V}{p} \frac{dp}{dV} = -\gamma \quad (21)$$

або

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}, \quad (22)$$

де $\gamma = c_{p\mu} / c_{v\mu} = c_p / c_v$.

Інтегруючи рівняння (22) після потенціювання, одержимо рівняння Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (23)$$

Величину $\frac{c_p}{c_v}$ можна визначити за допомогою приладу Клемана – Дезорма (рис. 1), що складається з теплоізованого балона А з повітрям за атмосферного тиску p_a насоса та рідинного манометра М. У балон із закритим краном К накачують повітря. Тиск повітря в балоні підвищиться і дорівнюватиме:

$$P_1 = P_a + \rho g h_1, \quad (24)$$

де $\rho g h_1$ — надлишок тиску повітря в балоні.

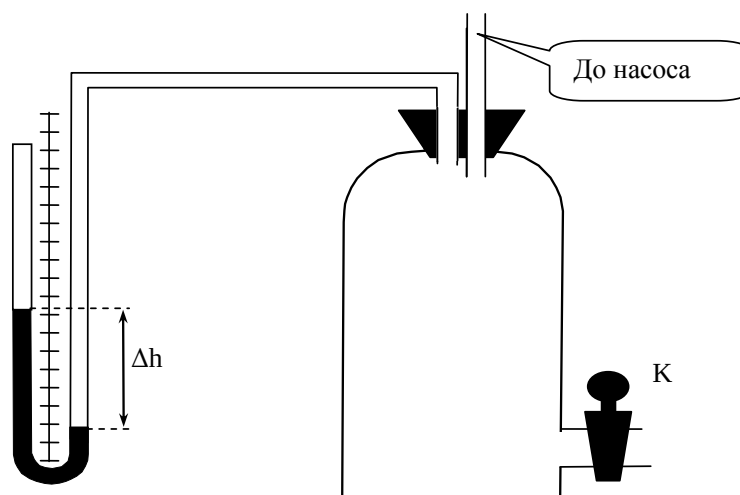


Рисунок 1

Нехай маса повітря після закачування насосом в посудину об'ємом V дорівнює m . Коли кран відкривають, то частина повітря виходить. Позначимо масу повітря, що виходить, через Δm , тоді маса повітря, що залишилась,

$$m_1 = m - \Delta m. \quad (25)$$

Маса повітря m , що знаходиться в балоні, займала перед відкриттям крана об'єм V_1 менший, ніж після відкриття. Оскільки процес короткочасний і значного теплообміну між газом і стінками балона немає, його можна вважати адіабатичним. Згідно з рівнянням Пуассона для маси газу одержимо:

$$p_1 V_1^\gamma = p_n V^\gamma, \quad (26)$$

Унаслідок адіабатичного розширення газу температура його знизиться, а потім внаслідок теплообміну температура газу через невеликий проміжок часу стане дорівнювати кімнатній. Тиск газу у цьому випадку підвищиться до величин $p_3 = p_a + p_2 = p_a + \rho g h_2$. Початковий і кінцевий стан газу розглядається за однакової температури. Тому, на основі закону Бойля-Маріотта,

$$P_1 V_1 = p_3 V. \quad (27)$$

Розв'язуючи рівняння (26) і (27) відносно γ , знаходимо:

$$\gamma = \frac{\lg p_1 - \lg p_a}{\lg p_1 - \lg p_3}. \quad (28)$$

Розкладемо $\lg p_1$ і $\lg p_3$ в ряд Тейлора і підставимо ці значення у формулу (28). Остаточо одержимо:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (29)$$

Порядок виконання роботи

1. У балон накачати насосом невелику кількість повітря. Під час закачування повітря, що стискається під поршнем насоса, нагрівається, тому перед початком вимірювання необхідно почекати 2–3 хвилини, поки завдяки теплообміну температура в балоні дорівнюватиме кімнатній. Після цього виміряти манометром надлишковий тиск повітря h_1 в міліметрах рідинного стовпчика.

2. Відкрити кран **К** і в момент, коли рівні рідини в обох колінах манометра зрівняються, швидко закрити кран. Зачекавши 2–3 хвилини, поки газ, охолоджений під час адіабатичного розширення, нагріється до кімнатної температури, виміряти надлишковий тиск h_2 . Потрібно пам'ятати, що h_1 і h_2 розраховуються як різниця висот рідин в обох

колінах U - подібного манометра.

3. Величини h_1 і h_2 відповідно п. п. 1 і 2 виміряти декілька разів (7-10) і дані записати в таблицю 1.

Обробка результатів експерименту та їх аналіз

1. За формулою (29) обчислити значення відношення теплоємностей для кожної пари величин h_1 і h_2 , оцінити похибки:

абсолютну $\Delta\gamma_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta\gamma_i|$ та відносну $\varepsilon = \frac{\Delta\gamma_c}{\gamma_c} 100\%$.

2. Знайти середнє значення показника адіабаты повітря, абсолютну та відносну похибки, записати кінцевий результат:

$$\gamma = \gamma_c \pm \Delta\gamma_c.$$

Контрольні питання

1. Розподіл енергії за ступенями вільності.
2. Ступені вільності молекул газу.
3. Внутрішня енергія ідеального газу.
4. Робота, що виконується газом в ізопроцесах.
5. Перший закон термодинаміки та його застосування до ізопроцесів.
6. Теплоємності газів.
7. Адіабатичний процес. Рівняння Пуассона в PV , PT та VT -координатах.

Таблиця 1 – Результати експерименту та їх обробки

Ч.ч.	1	2	3			10	Середнє значення
$h_1, \text{м}$							_____
$h_2, \text{м}$							_____
γ							
$\Delta\gamma$							
$\varepsilon, \%$	—	—	—	—	—	—	

Лабораторна робота № 7.2

Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя та середньої довжини вільного пробігу молекул повітря

Мета роботи: визначити коефіцієнт внутрішнього тертя і середню довжину вільного пробігу молекул повітря.

Прилади і матеріали: посудина з капіляром і кранами у верхній та нижній частинах, мензурка, секундомір, термометр, барометр.

Теоретичні відомості

Для визначення коефіцієнта внутрішнього тертя η можна скористатись методом витікання газу через капілярну трубку. Об'єм в'язкої рідини чи газу, що протікає через тонку циліндричну трубку (капіляр) довжиною L , радіусом r за час τ , визначається за формулою Пуазейля:

$$V = \frac{\pi r^4 \Delta p \tau}{8 \eta L}, \quad (1)$$

де Δp – різниця тисків на кінцях капіляра. З цього рівняння визначимо коефіцієнт внутрішнього тертя:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta p \tau}{8 V L}. \quad (2)$$

Кінетична теорія явищ переносу (табл. 1) для газів встановлює зв'язок між коефіцієнтом внутрішнього тертя ідеального газу η , середньою довжиною вільного пробігу його молекул λ і середньою арифметичною швидкістю u їх руху:

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \rho u, \quad (3)$$

де ρ – густина газу.

Густину газу визначимо із рівняння стану ідеального газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu P}{RT}, \quad (4)$$

де P – тиск газу;

R – молярна газова стала ;

T – абсолютна температура;

μ – молярна маса газу.

За молекулярно-кінетичною теорією газів, середня арифметична швидкість молекул газу становить:

$$u = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (5)$$

Таблиця 1 – Явища переносу в ідеальних газах

Явище (закон)	Величи- на, що перено- ситься	Рівняння	Формула коефіцієнта та його розмірність	Зв'язок між коефіцієн- тами
Дифузія (закон Фіка)	Маса	$\Delta m = -D \frac{dp}{dx} \Delta S \Delta \tau$ $j_m = -D \text{grad } p$	$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\ell}, \left[\frac{m^2}{c} \right]$	$D = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\lambda}{\rho c_v}$
В'язкість (закон Ньютона для в'язкого тертя)	Імпульс	$\Delta P = -\eta \frac{dv}{dx} \Delta S \Delta \tau$ $F = -\eta \frac{dv}{dx} \Delta S$	$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\ell},$ [Па · с]	$\eta = \rho D$
Теплопро- відність (закон Фур'є)	Теплова енергія	$\Delta Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta \tau$ $q = -\lambda \frac{dT}{dx} \Delta S$ $j_Q = -\lambda \text{grad } T$	$\lambda = \frac{\rho \bar{v} \bar{\ell} c_v}{3}$ [Вт / м К]	$\lambda = \rho c_v D$ $\lambda = c_v \eta$

(D, η, λ – відповідно коефіцієнти дифузії, динамічної в'язкості та теплопровідності, ΔS – площа шарів, $\Delta \tau$ – проміжок часу, Δm – перенесена маса, j_m – густина потоку маси, ΔP – перенесений імпульс, F – сила в'язкого тертя між шарами, ΔQ – перенесена кількість теплоти, q – тепловий потік, j_Q – густина теплового потоку, ρ – густина газу, $\bar{v}$ – швидкість руху шарів газу, T – температура, $\bar{v}$ – середня арифметична швидкість руху молекул газу, $\bar{\ell}$ – середня довжина вільного пробігу молекул газу, c_v – питома теплоємність за постійного об'єму)

Із рівнянь (2 – 5) після нескладних перетворень одержимо формулу для визначення середньої довжини вільного пробігу молекул повітря:

$$\bar{\lambda} = 1,86 \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{RT}{\mu}}. \quad (6)$$

Лабораторна установка (рис. 1): герметична посудина має шкалу, кран К1 для заповнення її водою і кран К2 для витікання води. Крізь корок

посудини проходить капіляр L, радіус і довжину якого задано. Капіляр не має торкатися поверхні води.

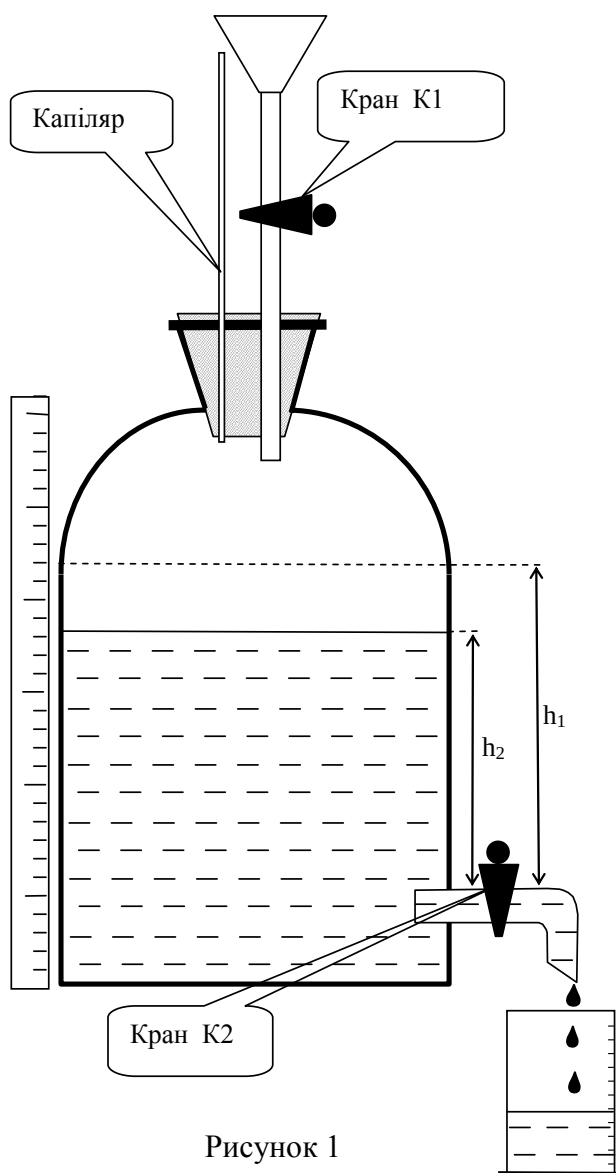


Рисунок 1

За закритих кранів тиск повітря над рідиною в посудині дорівнює атмосферному, оскільки посудина з'єднана з атмосферою через капіляр. Якщо за закритого крану K_1 відкрити кран K_2 , то внаслідок витікання води тиск у посудині стане зменшуватись і всередину через капіляр почне просочуватись повітря. Внаслідок в'язкого тертя повітря буде повільно надходити крізь капіляр в посудину і тиск у посудині стане меншим за атмосферний. Через певний час процес набуде усталеного режиму, водночас сума тисків газу і рідини всередині посудини на рівні отвору з крана K_2 дорівнюватиме атмосферному тиску:

$$P_1 + \rho_1 g h_1 = P_{атм},$$

де P_1 – тиск газу в посудині;

ρ_1 – густина рідини;

g – прискорення вільного падіння;

h_1 – висота стовпчика рідини у поточний момент.

Об'єм повітря, що надійде в посудину через капіляр, дорівнюватиме об'єму води, що витікла через кран K_2 з посудини в мензурку. У цьому випадку на кінцях капіляра встановиться різниця тисків

$$\Delta p = p_{\text{атм}} - p_1 = \rho_1 g h_1,$$

яка зумовлює протікання повітря через капіляр в посудину. Ця різниця з часом зменшуватиметься із зниженням висоти стовпчика рідини. Але оскільки площа перерізу посудини велика, а об'єм рідини, що витікає, порівняно малий, то зміна висоти стовпчика рідини і різниці тисків будуть незначними. Тому в формулі (2) за різницю тисків на кінцях капіляра можна взяти середнє значення гідростатичного тиску на початку і в кінці досліду, тобто:

$$\Delta p = \frac{h_1 + h_2}{2} \rho_1 g, \quad (7)$$

Порядок виконання роботи

1. Перед початком досліду посудина має бути не менше ніж наполовину заповнена водою. У разі необхідності воду потрібно залити через кран K_1 , який після цього потрібно обов'язково закрити (див. рис. 1)
2. Відкрити кран K_2 , щоб вода витікала в допоміжну склянку.
3. Коли через 5-10 секунд вода почне витікати окремими краплинами (процес приходить в усталений режим), прибрати допоміжну склянку і підставити мензурку, одночасно ввімкнути секундомір і записати в таблицю 1 значення висоти рівня води h_1 в посудині.
4. Коли в мензурці збереться $50\text{--}100\text{ см}^3$ води, зупинити секундомір, закрити кран K_2 і записати в таблицю новий рівень води в посудині h_2 .
5. Виміряти кімнатну температуру T і атмосферний тиск $P_{\text{атм}}$.
6. Усі дані вимірювань, а також значення радіуса капіляра r та його довжину L , занести в таблицю 1.
7. Дослід повторити 5-7 разів, результати вимірювань занести в таблицю 1.

Обробка результатів експерименту

1. За формулою (7) обчислити значення надлишкового тиску Δp .
2. За формулою (2) визначити коефіцієнт внутрішнього тертя повітря η .

3. За формулою (6) обчислити середню довжину вільного пробігу молекул повітря $\bar{\lambda}$.
4. Оцінити абсолютну та відносну похибки експерименту. Зробити висновки.

Контрольні питання

1. Середня довжина вільного пробігу молекул та число їх зіткнень в одиницю часу.
2. Явища переносу в газах: теплопровідність, в'язкість, дифузія. Закони Фіка, Фур'є та Ньютона для в'язкого тертя для явищ переносу. Фізична суть коефіцієнтів переносу та їх одиниці вимірювання.
3. Зв'язки між коефіцієнтами дифузії, в'язкості і теплопровідності.
4. Формула Пуазейля.
5. Поняття градієнта.
6. Тиск під стовпчиком рідини.
7. Конвективний теплообмін. Рівняння Ньютона-Ріхмана для конвективного теплообміну.

Таблиця 1 – Результати експерименту та їх обробки

Ч.ч.	$P_{\text{атм}} = \text{Н/м}^2$					$T = \text{К}$					
	$r = \text{м}$					$L = \text{м}$					
	$h_1,$ м	$h_2,$ м	$\Delta P,$ Па	$V,$ м ³	$\tau,$ с	$\eta,$ Па·с	$\Delta\eta,$ Па·с	$\varepsilon_\eta,$ %	$\lambda,$ м	$\Delta\lambda,$ м	$\varepsilon_\lambda,$ %
1								—			—
2								—			—
3								—			—
4								—			—
5								—			—
6								—			—
7								—			—
С. зн.	—	—	—	—	—						

Лабораторна робота № 7.3

Визначення коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса

Мета роботи: визначити коефіцієнт в'язкості рідини за кімнатної температури.

Прилади і матеріали: прилад Стокса, терези (електронна вага), поліпропіленові кульки, мікрометр, лінійка, секундомір, термометр, пінцет.

Теоретичні відомості

Розглянемо шар в'язкої рідини або газу (рис. 1), який знаходиться між двома паралельними поверхнями А і В твердих тіл, що рухаються вертикально відносно нерухомої системи координат $ХОУ$ зі швидкостями V_1 , V_2 . У шарі рідини (газу) встановлюється такий стан руху, в якому шари цієї рідини (газу), що прилягають до поверхонь твердих тіл, мають однакові з ними швидкості, а проміжні шари ковзають один по одному із швидкостями, що рівномірно зростають від швидкості V_1 до швидкості V_2 (рис. 1). Розподіл швидкостей для ламінарного потоку в'язкої рідини по трубці круглого перерізу приведено на рисунку 2.

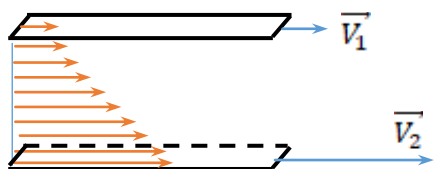


Рисунок 1

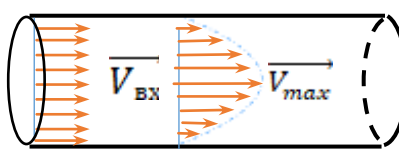


Рисунок 2

В'язкість, або внутрішнє тертя рідини (газу), проявляється у дії сили, що перешкоджає відносному руху шарів рідини. Між шарами рідини (газу) відбувається перехід молекул із одного шару в інший. Молекули переносять з собою за час $\Delta\tau$ імпульс ΔP , тому один шар прискорюється, а інший сповільнюється. Процес описується законом Ньютона для в'язкого тертя:

$$\Delta P = -\eta \cdot \text{grad}(V) \cdot \Delta S \cdot \Delta\tau, \quad (1)$$

де ΔS – площа поверхні зіткнення шарів,

η – коефіцієнт внутрішнього тертя (коефіцієнт динамічної в'язкості),

$\text{grad}(V)$ – градієнт швидкості.

Градієнт швидкості – це вектор, який показує напрям найшвидшого зростання швидкості. Він обчислюється за співвідношенням:

$$\text{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}. \quad (2)$$

Знак мінус у рівнянні (1) вказує на те, що імпульс переноситься проти градієнта швидкості.

Для одновимірного випадку $\text{grad}(V) = \frac{dV}{dx} \vec{i}$, а його модуль

$$|\text{grad}(V)| = \frac{dV}{dx}. \quad (3)$$

Тому для одновимірного випадку закон Ньютона для в'язкого тертя можна подати у вигляді:

$$\Delta P = -\eta \frac{dV}{dx} \Delta S \cdot \Delta \tau. \quad (4)$$

Оскільки $F = \frac{\Delta P}{\Delta \tau}$, то модуль сили внутрішнього тертя може бути обчислений за формулою:

$$F_t = \eta \frac{dV}{dx} \Delta S. \quad (5)$$

Сила в'язкого тертя направлена проти руху тіла.

Коефіцієнт внутрішнього тертя чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, яка виникає між двома сусідніми шарами, що мають поверхню зіткнення $S = 1 \text{ м}^2$ і рухаються один відносно одного так, що градієнт швидкості $\frac{dV}{dx} = 1 \frac{\text{м/с}}{\text{м}}$.

Встановимо розмірність коефіцієнта в'язкості в системі СІ. Із (5) для скінченної зміни ΔV , Δx маємо $\eta = \frac{\Delta P \cdot \Delta x}{\Delta V \cdot \Delta S \cdot \Delta \tau}$, або

$$[\eta]_{\text{CI}} = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}^2} = \frac{H}{\text{м}^2} \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Коефіцієнт внутрішнього тертя рідин і газів залежить від температури, Явище внутрішнього тертя має велике практичне значення. Наприклад, змащення мастилами тертьових поверхонь у механізмах дозволяє замінити зовнішнє тертя (сухе) значно меншим внутрішнім тертям мастил. Зниження тертя значно продовжує час експлуатації механізмів.

Основними методами визначення коефіцієнтів внутрішнього тертя є:

- 1) метод Стокса;
- 2) метод капілярних трубок;
- 3) метод загасаючих коливань, спричинених кулею чи диском, підвішеним на пружній нитці, у досліджуваному в'язкому середовищі;

4) метод двох обертових коаксіальних циліндрів, установлених таким чином, що коли зовнішній циліндр приводиться в обертання, то внутрішній циліндр, підвішений на пружній нитці, повертається під дією сили внутрішнього тертя на деякий кут, за яким визначається коефіцієнт в'язкості.

У цій роботі для визначення коефіцієнта в'язкості рідини застосовується метод Стокса.

Метод Стокса – це абсолютний метод. Під час визначення коефіцієнта внутрішнього тертя за методом Стокса опускають дуже маленьку тверду кульку у досліджувану в'язку рідину. Шар рідини, що безпосередньо дотикається поверхні кульки, прилипає до неї і далі рухається разом з нею. Рідина чинить опір руху кульки. Сила опору виникає внаслідок тертя між шарами рідини, що прилягають до прилиплої до поверхні кульки шару рідини, тобто опір середовища визначається внутрішнім тертям рідини.

На кульку, що опускається у рідині, діє три сили (рис. 3): сила земного тяжіння, сила Архімеда, сила в'язкого тертя.

Сила земного тяжіння:

$$P = m_{\kappa} g = \rho_{\kappa} V_{\kappa} g = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \rho_{\kappa} \cdot g, \quad (6)$$

де m_{κ} – маса кульки,

$$V_{\kappa} = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ – об'єм кульки,}$$

ρ_{κ} – густина матеріалу кульки,

r – радіус кульки,

g – прискорення вільного падіння.

Сила Архімеда (дорівнює вазі рідини, витісненої кулькою, і направлена до поверхні рідини):

$$F_A = m_p g = \rho_p V_{\kappa} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p g, \quad (7)$$

де m_p – маса рідини, витісненої кулькою,

ρ_p – густина рідини.

Сила в'язкого тертя залежить від в'язкості рідини, форми тіла та його геометричних розмірів. Силу в'язкого тертя для кульки, яка рухається

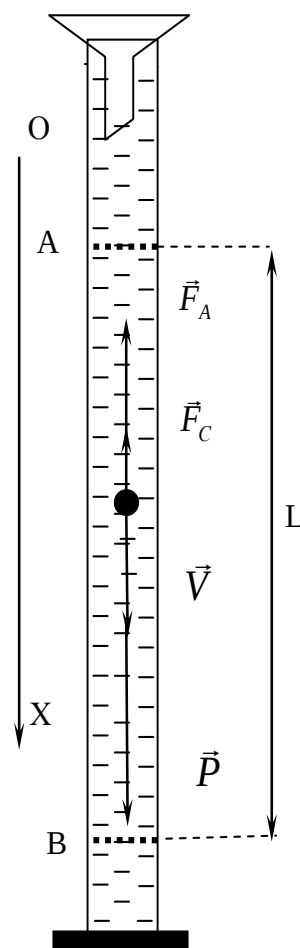


Рисунок 3

у в'язкому середовищі, визначають за формулою Стокса і називають силою Стокса:

$$F_C = 6\pi\eta rV, \quad (8)$$

де η – коефіцієнт в'язкого тертя рідини,

V – швидкість руху кульки відносно рідини.

Складемо на основі другого закону Ньютона рівняння руху кульки у векторній формі:

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_C = m\vec{a}, \quad (9)$$

де $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ – вектор прискорення кульки

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_C. \quad (10)$$

Спроекуємо отримане рівняння на вісь OX , направимо її вздовж руху кульки (рис. 4), отримаємо:

$$m \frac{dV}{dt} = P - F_A - F_C. \quad (11)$$

Беручи до уваги рівняння (6, 7, 8), із (11) маємо:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k \frac{dV}{dt} + 6\pi\eta rV = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_k - \rho_p). \quad (12)$$

Ми отримали диференціальне рівняння, яке описує рух кульки у в'язкому середовищі. Після нескладних перетворень рівняння (12) можна звести до вигляду:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta}{\rho_k \cdot r^2} V = \frac{(\rho_k - \rho_p)g}{\rho_k}. \quad (13)$$

Розв'язок диференціального рівняння (13) задовольняє функція

$$V = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho_p)}{9\eta} \left(1 - e^{-\frac{9\eta}{2\rho_k r^2} t} \right). \quad (14)$$

Проаналізуємо рівняння (14), очевидно, що з часом величина $e^{-\frac{9\eta}{2\rho_k r^2} t}$ досить швидко зменшується і через досить малий проміжок часу τ швидкість руху кульки в рідині набуває постійної швидкості V_0 (рис. 3). Це означає, що всі сили, які діють на кульку, зрівноважились, і її подальший рух стає рівномірним:

$$V_0 = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho_p)}{9\eta}. \quad (15)$$

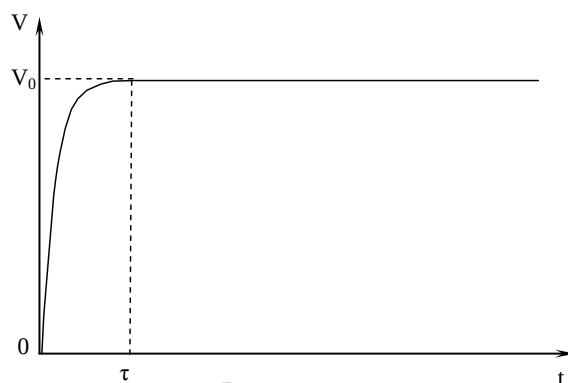


Рисунок 4

Простіше рівняння (15) можна отримати із виразу (12). Вважатимемо (без доведення), що кулька у рідині через деякий час τ буде рухатися з постійною швидкістю $V = V_0$, тобто її прискорення $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$. За цих умов рівняння руху кульки (12) набуває вигляду $6\pi\eta r V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_k - \rho_p)$, розв'язавши яке, отримаємо (15).

Коефіцієнт внутрішнього тертя за допомогою описаного методу можна визначити на віскозиметрі Стокса. Він являє собою скляний циліндр, заповнений досліджуваною рідиною (див. рис. 2). У центрі циліндра зверху розташовано лійку B , через яку кульки потрапляють у центральну частину циліндра з рідиною. На бічній поверхні циліндра знаходяться дві позначки – N і M , відстань між якими L . Падаючи, кулька спочатку рухається прискорено, а далі – рівномірно. Позначка N ставиться в тому місці, де рух кульки стає рівномірним. Вимірюючи секундоміром час руху кульки від позначки N до позначки M і відстань між ними, обчислюють швидкість падіння кульки V_0 . Кульки, що впали на дно циліндра, збираються на сітці і можуть бути з нею вийняті з циліндра.

Розв'язавши рівняння (15) відносно коефіцієнта внутрішнього тертя, врахувавши, що $V_0 = \frac{L}{t}$ (де t – час, за який кулька проходить відстань між мітками), одержуємо таку формулу для його розрахунку:

$$\eta = \frac{2(\rho_k - \rho_p)r^2gt}{9L}. \quad (16)$$

Формула (16) справедлива для випадку, якщо кулька рухається в посудині нескінченних розмірів, заповненій рідиною. Для посудин скінченних розмірів вносяться поправки на вплив близькості стінок і дна посудини. З внесенням зазначених поправок розрахункова формула (16) для визначення коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса набуває такого вигляду:

$$\eta_y = \frac{2}{9} \frac{(\rho_K - \rho_P) r^2 g t}{L \cdot \left(1 + 2.4 \frac{r}{R}\right) \cdot \left(1 + 1.33 \frac{r}{H}\right)} = \frac{\eta}{\left(1 + 2.4 \frac{r}{R}\right) \cdot \left(1 + 1.33 \frac{r}{H}\right)}, \quad (17)$$

де R – радіус циліндра,

H – висота стовпчика рідини в циліндрі.

Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту

1. Відібрати 5-7 кульок. Мікрометром виміряти діаметр кожної пронумерованої кульки. Після визначення діаметра кульки, результати записати у таблицю 1, зберігаючи нумерацію (номер кульки у планшеті та номер запису її діаметра у таблиці мають збігатися).

2. Визначити відстань L між мітками циліндра.

3. Опустити окремо кожну кульку через лійку у циліндр з рідиною і за допомогою секундоміра визначити час t її руху між мітками. Результати вимірювань записати у таблицю. Дослід повторити для всіх кульок.

3. За формулою (16) обчислити значення коефіцієнта в'язкості досліджуваної рідини за даними вимірювань часу руху для кожної кульки окремо. Знайти середнє значення коефіцієнта в'язкості. Оцінити середнє значення абсолютної та відносної похибок коефіцієнта в'язкості.

4. За формулою (17) обчислити для середніх значень часу руху кульки уточнене значення в'язкості та порівняти його із значенням, отриманим за формулою (16).

Контрольні питання

1. Явища переносу в газах: теплопровідність, в'язкість, дифузія. Закони Фіка, Ньютона для в'язкого тертя та Фур'є для явищ переносу. Фізична суть коефіцієнтів переносу, зв'язок між ними.

2. Коефіцієнти явищ переносу і їх фізичний зміст та одиниці вимірювання.

3. Зв'язки між коефіцієнтами дифузії, в'язкості і теплопровідності.

4. Градієнт та його фізичний зміст.

5. Експериментальні методи визначення коефіцієнта в'язкості.

6. Сила Архімеда. Сила в'язкого тертя. Сила Стокса.

7. З'ясувати основні джерела похибки у цій лабораторній роботі.

Таблиця 1 – Результати експерименту та їх обробки

$\rho_k = \text{кг/м}^3$			$\rho_p = \text{кг/м}^3$		$T = K$		$H = \text{м}$	$R = \text{м}$
Ч.ч.	$d=2r, \text{м}$	$L, \text{м}$	$t, \text{с}$	$\eta, \text{Па}\cdot\text{с}$	$\Delta\eta, \text{Па}\cdot\text{с}$	$\varepsilon, \%$	$\eta_y, \text{Па}\cdot\text{с}$	
I.								
2								
3								
...								
С.зн.								

3.1 Загальні теоретичні відомості до лабораторних робіт 7.4, 7.5

Більшість фізичних явищ у природі і техніці, як правило, супроводжується зміною температури тіл у просторі та часі. Тому температура тіла є функцією координат x, y, z і часу t :

$$T = f(x, y, z, t). \quad (3.1)$$

Сукупність миттєвих значень температур в усіх точках простору або тіла, що розглядається, називають температурним полем. Графічно температурне поле зображають ізотермічними поверхнями, які є геометричним місцем точок з однаковими температурами. Лінії перетину ізотермічних поверхонь з будь-якою площиною (рис. 3.1) будуть ізотермами в околі цієї площини з температурами $t, t \pm \Delta t, t \pm 2\Delta t, \dots, t \pm n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

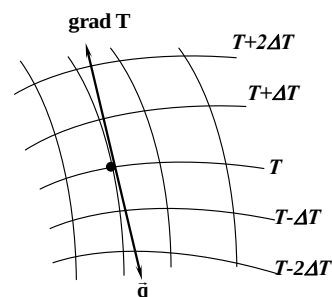


Рисунок 3.1

Якщо порівняти відношення різниці температур ΔT між ізотермами до відстані між ними в напрямку її нормалі $\vec{n}$ із відношенням до відстаней $\vec{r}$ у інших напрямках, то очевидно, що найбільший перепад температури на одиницю довжини буде спостерігатися у напрямку нормалі (рис. 3.2):

$$\frac{\Delta T}{\Delta n} > \frac{\Delta T}{\Delta r_i}. \quad (3.2)$$

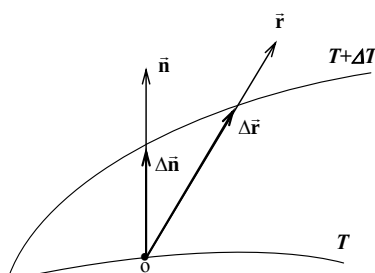


Рисунок 3.2

Зміна температури у просторі характеризується градієнтом температури $grad\ T$. Він визначається як вектор, спрямований по нормалі до ізотермічної поверхні в напрямі збільшення температури і чисельно дорівнює:

$$grad\ T = \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}. \quad (3.3)$$

З математичного аналізу відомо, що

$$grad\ T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.4)$$

Отже, градієнт температури – це вектор, який вказує напрямок найшвидшого зростання температури. Для одновимірного випадку маємо:

$$\text{grad } T = \frac{dT}{dx} \vec{i}. \quad (3.5)$$

Зміна температури тіл відбувається під час теплообміну між ними. У термодинаміці під теплообміном або теплопередачею розуміють процес передачі певної кількості теплоти між частинами тіла або тілами з різними температурами. Кількісною характеристикою цього процесу є кількість теплоти. Під час теплообміну виконується закон збереження кількості теплоти:

$$Q_1 = Q_2, \quad (3.6)$$

де Q_1 – теплота, яку перше тіло віддає другому,

$Q_2 - Q_1$ – теплота, яку друге тіло отримує від першого.

Якщо C_1, C_2, m_1, T_1, T_2 – відповідно питомі теплоємності маси та початкові температури тіл, між якими відбувається процес теплообміну, то за $T_1 > T_2$ маємо:

$$Q_1 = C_1 m_1 (T_1 - T), \quad (3.7)$$

$$Q_2 = C_2 m_2 (T - T_2), \quad (3.8)$$

де T – кінцева температура тіл.

Із рівнянь (3.6), (3.7), (3.8) маємо:

$$C_1 m_1 (T_1 - T) = C_2 m_2 (T - T_2). \quad (3.9)$$

Рівняння (3.9) називають рівнянням теплового балансу. Якщо в процесі теплообміну змінюється агрегатний стан речовини або діють внутрішні джерела теплоти, то у рівнянні теплового балансу необхідно врахувати теплоту, яка поглинається або виділяється в цих процесах.

Тепловий потік – це вектор, який вказує напрямок переносу теплоти і чисельно дорівнює кількості теплоти, перенесеної за одиницю часу від гарячої частини тіла до холодної. Його модуль дорівнює:

$$q = \frac{Q}{\Delta \tau}. \quad (3.10)$$

Векторна фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що переноситься через одиницю площі в нормальному напрямку за одиницю часу, називається густиною теплового потоку. Модуль густини теплового потоку дорівнює:

$$j_q = \frac{Q}{S \Delta \tau} = \frac{q}{S} \quad (3.11)$$

Розрізняють три типи теплопередачі: конвективний теплообмін, теплове випромінювання та теплопровідність.

Конвективний теплообмін – передача енергії потоком рідини чи газу внаслідок різних густин їх шарів. Передача теплоти у цьому випадку здійснюється за рахунок переміщення та змішування гарячих і холодних шарів рідини або газу. Тепловіддача конвекцією – дуже складний процес, який залежить від багатьох факторів: природи виникнення і режиму руху, швидкості руху $\mathcal{G}$, фізичних і хімічних властивостей середовища – густини ρ , в'язкості η , теплоємності C , форми поверхні θ , її геометричних розмірів ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , температури T_c поверхні стінки, температури газу (рідини) T_r . Кількість теплоти, що передається під час конвективного теплообміну, є функцією таких основних параметрів:

$$Q = f(\mathcal{G}, T_c, T, \rho, n, C, \Theta, \ell_1, \ell_2, \ell_3) \quad (3.12)$$

Інтенсивність конвективного теплообміну залежить переважно від товщини пограничного шару рідини біля стінки і від температурного градієнта в ньому. Визначити взаємозв'язок між цими параметрами дуже важко. Тому в основу практичних розрахунків тепловіддачі покладено формулу Ньютона-Ріхмана:

$$Q = \alpha S(T_c - T_r)\Delta\tau, \quad (3.13)$$

де α – коефіцієнт конвективної тепловіддачі (він показує потужність теплового потоку, який проходить крізь 1 м² поверхні за різниці температур між стінкою та рідиною 1 К) – його розмірність (Вт/м² К),

$\Delta\tau$ – проміжок часу.

Вивчення процесу теплопередачі під час конвекції зводиться до визначення коефіцієнта теплообміну α , який досить ускладнюється, оскільки залежить від багатьох параметрів. Ця залежність встановлюється експериментально, в ході моделювання цих процесів.

Теплове випромінювання – це процес поширення теплової енергії за допомогою електромагнітних хвиль. Цей процес описується законами Кірхгофа, Стефана-Больцмана, Ламберта, Планка.

Теплопровідність. Під час теплопровідності відбувається процес передачі внутрішньої енергії від одного тіла до іншого без виконання роботи, тобто відбувається обмін кінетичною енергією молекул в процесі їх зіткнення. Розрізняють стаціонарну ($\text{grad } T = \text{const}$) і нестаціонарну ($\text{grad } T \neq \text{const}$) теплопровідності.

Стаціонарний процес описується рівнянням Фур'є, згідно з яким питомий тепловий потік (за рахунок теплопровідності) від гарячої до холодної стінки тіла дорівнює:

$$j_q = -\lambda \text{grad} T, \quad (3.14)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності,

$\text{grad} T$ – градієнт температури, це вектор, який показує напрямок найшвидшого зростання температури.

$$\text{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

Відповідно тепловий потік між ними

$$q = -\lambda \text{grad} T \cdot S. \quad (3.15)$$

Для одновимірної стінки модуль теплового потоку та його густина дорівнюють:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S, \quad (3.16)$$

$$j_q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (3.17)$$

Розглянемо нескінченну плоску однорідну стінку (рис. 3.3) з площею поперечного перерізу S , товщиною Δx , температурою на її торцевих поверхнях $T_1, T_2, (T_1 > T_2)$.

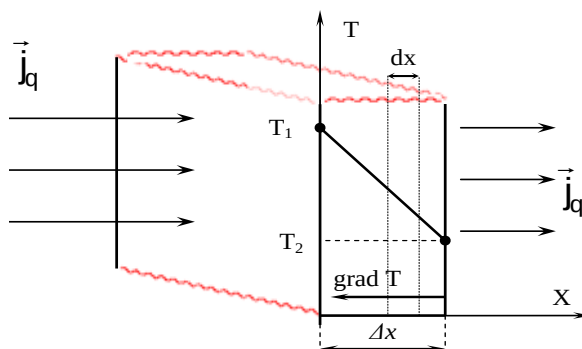


Рисунок 3.3 – Плоска однорідна теплопровідна стінка

Вважаючи, що бічна поверхня стінки абсолютно нетеплопровідна, знайдемо кількість перенесеної теплоти через поперечний переріз стінки за час $\Delta \tau$. Для цього помножимо ліву та праву частини рівняння Фур'є на $S \Delta \tau dx$

$$j_q S \Delta \tau dx = -\lambda S \Delta \tau dT \quad (3.18)$$

і проінтегруємо його в напрямі теплового потоку від x_1 до x_2 і за температурою від T_1 до T_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} J_q S \Delta \tau dx = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda S \Delta \tau dT. \quad (3.19)$$

Урахувавши, що $Q = j_q S \Delta \tau$, $\Delta x = \delta = x_2 - x_1$ – товщина стінки, $T_2 - T_1 = -(T_1 - T_2) = -\Delta T$, $\Delta T = T_1 - T_2$ – різниця температур між стінками, маємо:

$$Q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S \Delta \tau. \quad (3.20)$$

Ми отримали рівняння Фур'є в інтегральній формі.

$$R = \frac{\Delta x}{\lambda}, \quad (3.21)$$

де величину R назвемо термічним опором стінки.

Із рівнянь (3.20), (3.21) маємо:

$$Q = \frac{\Delta T}{R} S \Delta \tau. \quad (3.22)$$

Знайдемо розподіл температури за товщиною однорідної стінки з теплоізолюваною бічною поверхнею (див. рис. 3.3). Нехай ($T_1 > T_2$).

Виділимо елемент стінки товщиною dx_i ($i=1,2,3,\dots,n$). За усталеного режиму модуль теплового потоку в кожному шарі буде однаковий, тому що $q = \text{const}$. Для довільного шару dx , на основі рівняння Фур'є, враховуючи, що $T_1 > T_2$, маємо:

$$q dx = -\lambda dT. \quad (3.23)$$

Інтегруючи останній вираз, знайдемо розподіл температур за товщиною однорідної стінки (або довжини стержня):

$$\int dT = - \int \frac{q}{\lambda} dx$$

або

$$T = -\frac{q}{\lambda} x + C, \quad (3.24)$$

де C – стала інтегрування.

Отже, температура за товщиною стінки розподіляється за лінійним законом. Сталу інтегрування C легко знайти з початкових умов. Враховуючи, що за $x=0, T=T_1$, із попереднього рівняння маємо $C=T_1$.

Температура на відстані x від гарячої поверхні стінки дорівнює:

$$T = T_1 - \frac{q}{\lambda} x = T_2 + \frac{q}{\lambda} x. \quad (3.25)$$

Розглянемо стінку, яка має два шари з коефіцієнтами теплопровідності λ_1, λ_2 та товщинами $\Delta x_1, \Delta x_2$. Площі поперечних перерізів стінок однакові $S_1 = S_2 = \Delta S$. Нехай температура гарячої поверхні стінки T_1 , холодної – T_2 , а на межі між ними – T_{12} (рис. 3.4).

Обидва шари стінки пронизує тепловий потік q , який становить:

$$q = \lambda_1 \frac{T_1 - T_{12}}{\Delta x_1} S, \quad (3.26)$$

$$q = \lambda_2 \frac{T_{12} - T_2}{\Delta x_2} S. \quad (3.27)$$

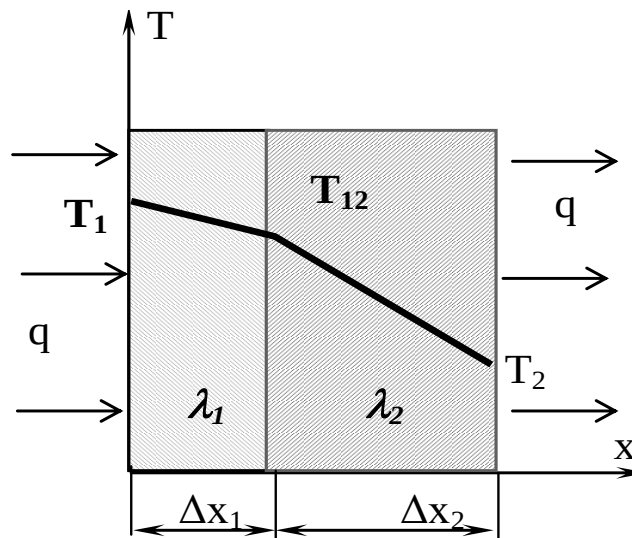


Рисунок 3.4 – Двошарова плоска теплопровідна стінка

Із рівнянь (3.26), (3.27) випливає:

$$T_{12} = \frac{\frac{\lambda_1}{l_1} T_1 + \frac{\lambda_2}{l_2} T_2}{\frac{\lambda_1}{l_1} + \frac{\lambda_2}{l_2}}$$

$$T_{12} = \frac{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} T_1 - \frac{\Delta x_2}{\lambda_2} T_2}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}}, \quad (3.28)$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2}} S = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2} S, \quad (3.29)$$

де R_1, R_2 – термічні опори стінок.

За проміжок часу $\Delta \tau$ через стінку пройде кількість теплоти

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ell_1}{\lambda_1} + \frac{\ell_2}{\lambda_2}} S \Delta \tau = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2} S \Delta \tau. \quad (3.30)$$

Із рівняння (3.30) видно, що термічні опори в напрямку теплового потоку додаються. Термічний опір багатошарової плоскої стінки дорівнює сумі опорів її окремих шарів:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{\lambda_i}, \quad (3.31)$$

де n – число шарів стінки,

i – номер шару.

Густина теплового потоку через стінку

$$j_q = \frac{T_1 - T_n}{\sum R_i}. \quad (3.32)$$

Перепад температури на i -му шарі

$$\Delta T_i = \frac{R_i}{R} (T_1 - T_n). \quad (3.33)$$

Очевидно, що коли $R_i \ll R$, то перепад температури на такому шарі досить малий.

Лабораторна робота № 7.4

Визначення коефіцієнта теплопровідності металів

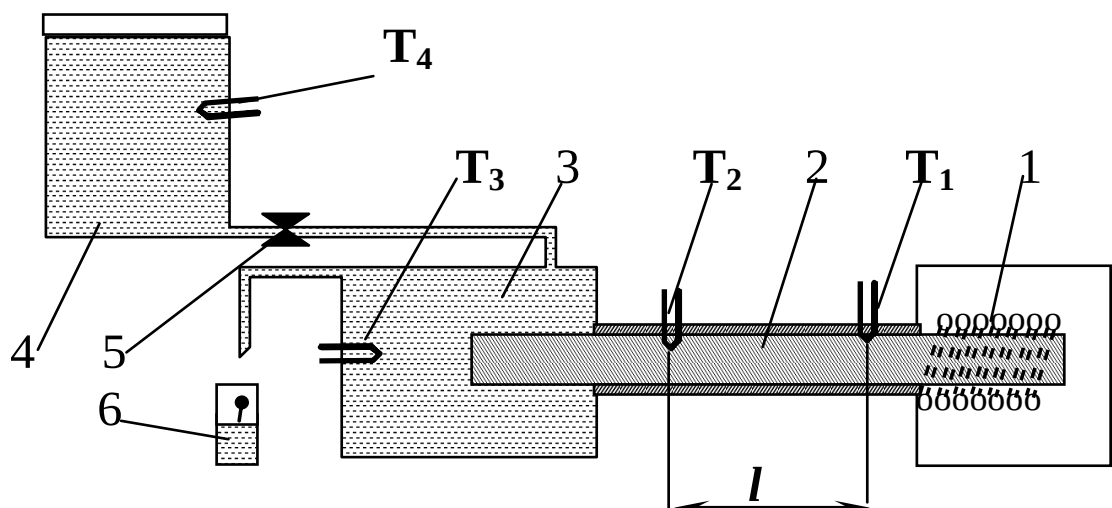
Прилади та матеріали: установка для визначення коефіцієнта теплопровідності металів, термопари, мілівольтметр, секундомір, мірний стакан.

Мета роботи: визначити коефіцієнт теплопровідності міді.

Принцип роботи установки

(теоретичні відомості див. на С. 105–111)

Метали мають високу теплопровідність, тому для визначення коефіцієнта їх теплопровідності зручно застосувати метод порівняння теплового потоку. Схему лабораторної установки для визначення коефіцієнта теплопровідності металів наведено на рис. 1.



1 – нагрівач, 2 – мідний стержень, 3 – холодильник, 4 – посудина з холодною водою, 5 – кран, 6 – мірний стакан

Рисунок 1 – Схема установки для визначення коефіцієнта теплопровідності металів

За допомогою термопар T_1, T_2 фіксується перепад температури на металевому стержні, а диференційною термопарою T_{34} – між холодильником та холодною водою у посудині. За ввімкненого електронагрівника установки через її холодильник повільно пропускається вода. У випадку усталеного режиму теплообміну кількість теплоти, що передається від нагрівника через стержень з теплоізованою бічною поверхнею до холодильника, дорівнює кількості теплоти, яка витрачається

на нагрівання проточної води

$$Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ell} S \tau, \quad (1)$$

$$Q = cm(T_3 - T_4), \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності (Вт/м·К),

S – площа поперечного перерізу стержня,

ℓ – віддаль між корольками диференційної термопари T_{12} ,

$T_1 - T_2 = \Delta T_{12}$ – перепад температури між контрольними точками стержня,

$T_3 - T_4 = \Delta T_{34}$ – перепад температури між холодильником установки та холодною водою у посудині,

c – теплоємність води,

m – маса води, що пройшла через холодильник за час τ , $m = \rho V$ (ρ – густина води, V – об'єм).

З рівнянь (1), (2) легко отримати робочу формулу для розрахунку коефіцієнта теплопровідності досліджуваного металу:

$$\lambda = c\rho \frac{(T_3 - T_4) V \ell}{(T_1 - T_2) S \tau} = c\rho \frac{\Delta T_{34} V \ell}{\Delta T_{12} S \tau}. \quad (3)$$

Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту

1. Увімкнути електронагрівник лабораторної установки. Відкривши кран 5 (рис. 1), відрегулювати ним витрати води – 10 - 20 крапель за хвилину.

2. Після встановлення усталеного режиму теплопередачі (за стабілізації перепадів температури) записати значення ΔT_{12} і ΔT_{34} та зафіксувати час, протягом якого в мірному стакані збереться 100-150 мл води. Під час досліду відлік температури потрібно проводити не менше трьох разів (на початку, в середині і після закінчення досліду). Дані занести в таблицю 1.

3. Не змінюючи параметрів установки (перепаду температури та швидкості потоку води), провести ще дві серії досліду. Одержані дані занести в таблицю 1.

4. Знайти середнє значення результатів експерименту для кожної серії вимірювань. За середніми значеннями виміряних величин розрахувати за формулою (3) λ . Визначити за формулою (3.21) термічний опір стінки стержня. Оцінити їх похибки.

Контрольні питання

1. Основні поняття теплопередачі: кількість теплоти, тепловий потік,

питомий тепловий потік, перепад і градієнт температури стінки та її повний термічний опір.

2. Типи теплопередачі: теплопровідність, теплове випромінювання, конвективний теплообмін та їх фізична суть.

3. Явища переносу в газах: теплопровідність, в'язкість, дифузія. Закони Фур'є, Ньютона та Фіка для явищ переносу. Фізична суть коефіцієнтів переносу, зв'язок між ними та одиниці вимірювання.

4. Рівняння Фур'є для плоскої одношарової стінки. Розподіл температур за товщиною стінки. Термічний опір стінки. Багатошарова теплопровідна стінка, розподіл температур за товщиною плоскої багатошарової стінки

5. Конвективний теплообмін. Закон Ньютона-Ріхмана.

Таблиця 1 – Результати експерименту та їх обробки

№ досл.	T_1 , К	T_2 , К	T_3 , К	T_4 , К	V , M^3	τ , с	λ , $\frac{Вт}{м \cdot К}$	ε_λ , %	R , $\frac{м^2 К}{Вт}$
1									
2									
3									
С.зн.	-	-	-		-	-			

Лабораторна робота № 7.5

Визначення коефіцієнта теплопровідності твердих тіл з низькою теплопровідністю

Прилади та матеріали: установка для визначення коефіцієнта теплопровідності матеріалів з низькою теплопровідністю, термопари, гальванометр, еталонний та досліджувані зразки, штангенциркуль, мікрометр, регулятор напруги.

Мета роботи: визначити коефіцієнт теплопровідності матеріалів з низькою теплопровідністю.

Принцип роботи установки

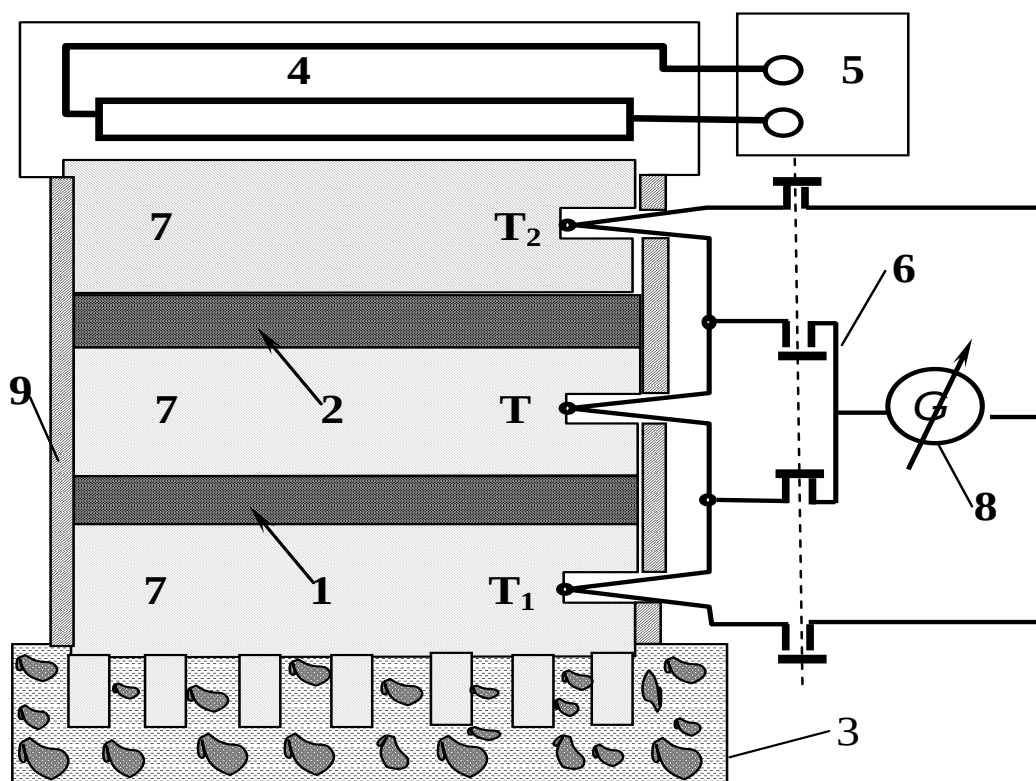
(теоретичні відомості див. на с. 105–111)

Для вимірювання коефіцієнта теплопровідності речовин з низькою теплопровідністю зручно застосовувати метод порівняння градієнтів температур. Зразки еталонного та досліджуваного матеріалу розміщують між трьома алюмінієвими шайбами діаметром ~ 5 см і товщиною ~ 10 – 15 мм (рис. 1). Еталонним зразком слугує диск із фторпласту, досліджувані зразки–диски із різноманітних матеріалів з низькою теплопровідністю (картон, пінопласт, будівельні матеріали і т. д.). Вимірювальна комірка складається з системи алюмінієвих дисків з термопарами, між якими розміщено зразки матеріалів з відомою та невідомою теплопровідністю. Вона розміщена між нагрівником 4 та холодильником 3. Для зменшення втрат тепла в навколишнє середовище комірка покрита шаром теплоізолятора. Нагрівачем слугує спіраль електроплитки, а холодильником – металева циліндрична посудина, заповнена сумішшю води з льодом. Завдяки цьому в холодильнику підтримується постійна температура $T = 273$ К ($t = 0^\circ\text{C}$). На системі зразків нагрівник і холодильник утворюють певну різницю температур. Процес передачі теплоти переходить у стаціонарний режим через 10–15 хвилин роботи установки. Оскільки коефіцієнти теплопровідності зразків значно менші за коефіцієнт теплопровідності металу (алюміній), то градієнт температури на кожній з металевих шайб буде на кілька порядків меншим, ніж на зразках. Можна вважати, що кожна металева шайба має по всій довжині практично сталу температуру. Отже, температура верхньої металевої шайби та верхнього шару досліджуваного зразка – T_2 , температура середньої шайби та нижньої частини еталонного зразка – T_1 . З досить

високою точністю цю систему шайб можна розглядати як двошарову плоску стінку, теплопровідність якої описується рівняннями (3.26, 3.27). У досліді достатньо виміряти перепади температури між нижньою та верхньою поверхнями досліджуваного зразка $\Delta T_2 = T_2 - T$ та між нижньою та верхньою поверхнями еталонного зразка $\Delta T_1 = T - T_1$. Датчиками температури слугують дві диференційні термопари ХК, які по чергові підключаються до гальванометра. Очевидно, що електрорушійна сила термопар буде пропорційною перепаду температур між спаями:

$$E_1 = \alpha(T_2 - T), E_2 = \alpha(T - T_1), \quad (1)$$

де α – коефіцієнт термо-ерс термопар.



1– еталонний зразок, 2–досліджуваний зразок, 3–холодильник,
4–нагрівник, 5–регулятор напруги, 6–перемикач, 7–алюмінієві шайби,
8–гальванометр, 9–теплоізолятор, T, T_1, T_2 – спаї термопар

Рисунок 1 – Установка для визначення коефіцієнта теплопровідності матеріалів з малим коефіцієнтом теплопровідності

Також очевидно, що

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \beta n_1 \\ E_2 &= \beta n_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

де n – відхилення зайчика гальванометра,

β – ціна поділки гальванометра

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3)$$

Із рівнянь (3.26, 3.27, 1), враховуючи, що $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_e$, випливає :

$$\lambda = \frac{n_2 \Delta x S_e}{n_1 \Delta x_e S} \lambda_e, \quad (4)$$

де λ, λ_e – відповідно коефіцієнти теплопровідності досліджуваного та еталонного зразків,

$\Delta x, \Delta x_e$ – їх товщини,

S, S_e – площі поперечного перерізу.

Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту

1. Виміряти та записати в таблицю 1 товщини досліджуваного й еталонного зразків

2. Скласти установку (рис. 1). Помістити на нижню шайбу, яка знаходиться на холодильнику, еталонний зразок, після чого на нього поставити: середню шайбу, досліджуваний зразок, верхню шайбу з нагрівником. Закріпити термопари та теплоізолювати вимірювальну комірку.

3. Заповнити холодильник установки сумішшю води з льодом. Увімкнути нагрівник. Після стабілізації температури записати покази приладів.

4. Дослід провести для трьох різних значень потужності нагрівача.

5. Розрахувати коефіцієнт теплопровідності досліджуваного матеріалу за формулами (3.21, 4). Оцінити похибки λ . Дані занести в таблицю 1.

Таблиця 1 – Результати експерименту та його обробки

Тип досліджуваного зразка _____										
№ досл.	Δx_e , м	Δx , м	S_e , м ²	S , м ²	n_1	n_2	λ_e , $\frac{Вт}{м \cdot К}$	λ , $\frac{Вт}{м \cdot К}$	ε , %	R , $\frac{м^2 К}{Вт}$
1										
2										
3										

Контрольні питання

1. Основні поняття теплопередачі: кількість теплоти, тепловий потік, питомий тепловий потік, перепад температур, градієнт температури, повний термічний опір.

2. Типи теплопередачі: теплопровідність, теплове випромінювання, конвективний теплообмін та їх фізична суть.

3. Явища переносу в газах: теплопровідність, в'язкість, дифузія. Закони Фур'є, Ньютона та Фіка. Фізична суть коефіцієнтів переносу, зв'язок між ними й одиниці вимірювання.

4. Рівняння Фур'є для плоскої одношарової стінки. Розподіл температур за товщиною стінки. Термічний опір стінки. Багатошарова теплопровідна стінка, розподіл температур за товщиною плоскої багатошарової стінки.

5. Конвективний теплообмін. Закон Ньютона-Ріхмана.

Лабораторна робота № 7.6

Визначення зміни ентропії під час нагрівання і плавлення свинцю

Мета роботи: визначити приріст ентропії під час фазового переходу першого роду на прикладі плавлення свинцю.

Прилади і матеріали: нагрівальна піч, термopapa; електронний потенціометр.

Теоретичні відомості

Стан термодинамічної системи може бути описаний, коли відомо будь-яку пару із трьох параметрів: об'єм V , абсолютна температура T , тиск p .

Крім цього його можна однозначно задати за допомогою внутрішньої енергії U . В багатьох випадках характеризують стан термодинамічної системи за допомогою поняття ентропії.

З погляду термодинаміки ентропія системи – це функція її стану, яка визначається з точністю до довільної константи. Різниця ентропії двох рівноважних станів 2 і 1 за означенням дорівнює зведеним кількості теплоти, яку необхідно надати системі, щоб перевести її із стану 1 в стан 2 довільним шляхом (рис. 1).

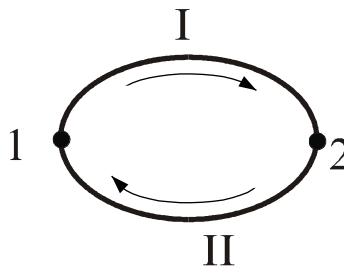


Рисунок 1

Таким чином, якщо ентропію в станах 1 і 2 позначити через S_1 і S_2 , то згідно з означенням:

$$S_1 - S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (1)$$

де $-\frac{\delta Q}{T}$ зведена кількість теплоти;

T – температура, за якої здійснюється перехід.

Для безмежно малої зміни ентропії системи

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2)$$

Оскільки кількість теплоти не є функцією стану, то диференціал цієї функції неповний і позначається символом δ , на відміну від повного, який позначається символом d .

З погляду статистичної (молекулярної) фізики ентропія – величина, прямо пропорційно залежна від логарифму термодинамічної імовірності (статистичної ваги):

$$S = k \ln \Omega, \quad (3)$$

де k – стала Больцмана;

Ω – термодинамічна імовірність системи.

Якщо задається стан кожної молекули системи, то сукупність цих станів називається мікростаном системи. Всякому макростану відповідає певний мікростан тіла. Розглянемо, наприклад, розподіл молекул між двома половинами посудини, в якій знаходиться газ. Характеризувати стан газу будемо кількістю молекул, що знаходяться в лівій половині посудини.

Стан окремої молекули будемо, наприклад, визначати тим, в якій половині вона знаходиться. Нехай повне число молекул дорівнює чотирьом. Стан, за якого в лівій частині знаходиться одна молекула, а в правій – три, є мікростаном (рис. 2), котрому відповідають чотири мікростани (рис. 3). Кількість різних мікростанів, які відповідають певному макростану, називають статистичною (термодинамічною) вагою, або термодинамічною імовірністю. У наведеному прикладі термодинамічна імовірність макростану дорівнює чотирьом. Як стверджують розрахунки, термодинамічна імовірність пропорційна імовірності звичайного макростану і максимальна для рівноважного стану системи.

Для прикладу, що розглядається, це відповідає стану, за якого в лівій і правій частинах посудини перебуває однакове число молекул.

Стан, який здійснюється відносно малою кількістю способів, називається впорядкованим, а той, що здійснюється відносно великою кількістю способів, – невпорядкованим.

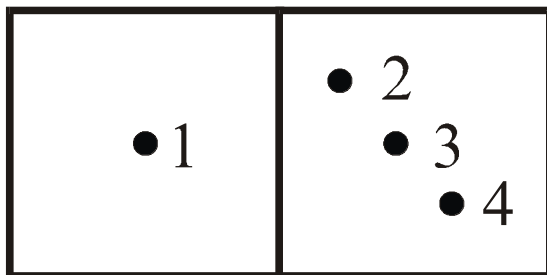
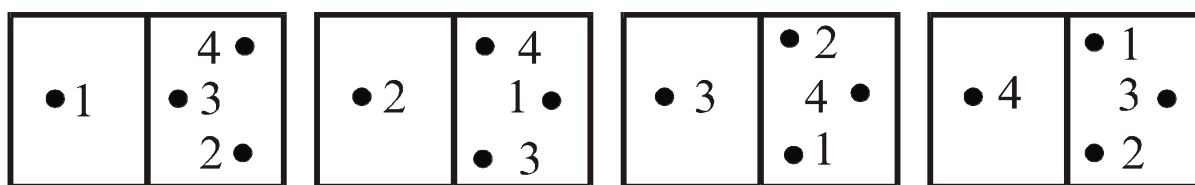


Рисунок 2



перший стан;

другий стан;

третій стан;

четвертий стан

Рисунок 3

Таким чином, за фізичним змістом ентропія є кількісною мірою ступеня молекулярного безпорядку в системі. Цей висновок дозволяє зрозуміти рівняння (2). Надання системі теплоти приводить до підсилення теплового руху молекул і, відповідно, до збільшення ступеня безпорядку в системі. Чим вища температура, а з нею і внутрішня енергія системи, тим відносно меншою виявиться частка безпорядку, обумовленого наданням системі такої кількості теплоти.

У цій роботі зміна ентропії визначається під час нагрівання свинцю від кімнатної температури до температури плавлення і під час плавлення свинцю, тобто, за фазового переходу першого роду. Взагалі фазою називають макроскопічну фізично однорідну частину речовини, яка може бути віддалена від системи механічним шляхом.

Перехід речовини з однієї фази в іншу, що супроводжується виділенням або поглинанням теплоти, називається фазовим переходом першого роду. Перехід без виділення або поглинання теплоти називається фазовим переходом другого роду (наприклад, перехід речовини з однієї кристалічної модифікації в іншу).

Плавлення, будучи фазовим переходом першого роду, відбувається за сталої температури, яка називається температурою плавлення кристалічної речовини. Температура плавлення залежить від тиску. Ця залежність виражається рівнянням Клапейрона-Клаузіуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V'_2 - V'_1)}, \quad (4)$$

де q_{12} – питома теплота фазового переходу;

T – температура фазового переходу;

V'_1 і V'_2 – питомий об'єм відповідно першої та другої фаз;

dT – зміна температури фазового переходу за відповідної зміни його тиску на dp .

Повна зміна ентропії під час нагрівання і плавлення свинцю:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2, \quad (5)$$

де ΔS_1 – зміна ентропії під час нагрівання свинцю. від кімнатної температури T_1 до температури плавлення T_n ;

ΔS_2 – зміна ентропії у випадку повного плавлення свинцю.

Застосувавши рівняння (1) до виразу (5), одержимо:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q_1}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q_2}{T}. \quad (6)$$

Для процесу нагрівання (ділянка 1-2, рис. 4)

$$\delta Q_1 = cm dT,$$

де c – питома теплоємність твердого свинцю;

m – маса свинцю.

Для процесу плавлення (ділянка 2-3)

$$\delta Q_2 = \lambda dm,$$

де λ – питома теплота плавлення.

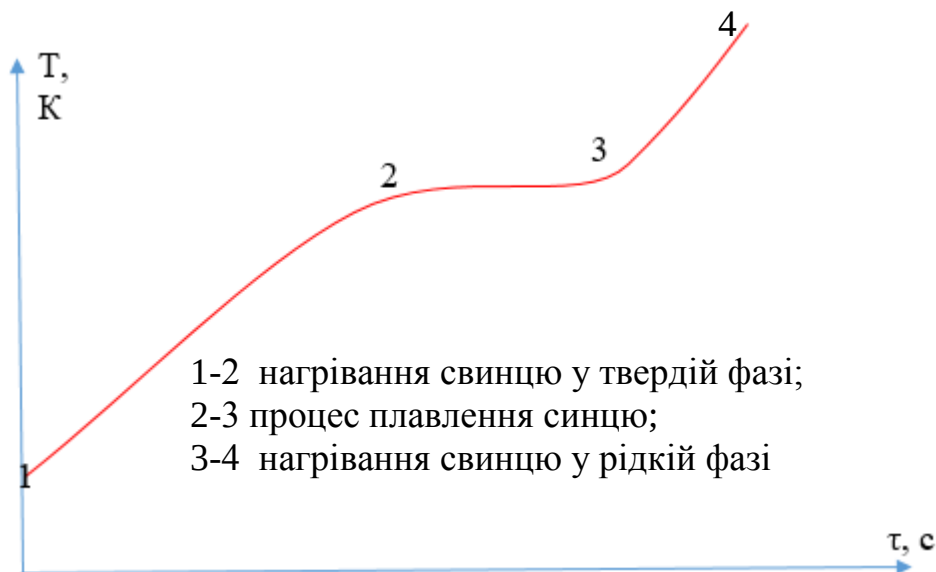


Рисунок 4

Таким чином:

$$\Delta S = \int_{T_k}^{T_n} \frac{cm dT}{T} + \int_0^m \frac{\lambda dm}{T} = cm \int_{T_k}^{T_n} \frac{dT}{T} + \frac{\lambda}{T} \int_0^m dm = cm \ln \frac{T_n}{T_k} + \frac{\lambda m}{T_n} = m \left(c \ln \frac{T_n}{T_k} + \frac{\lambda}{T_n} \right) \quad (7)$$

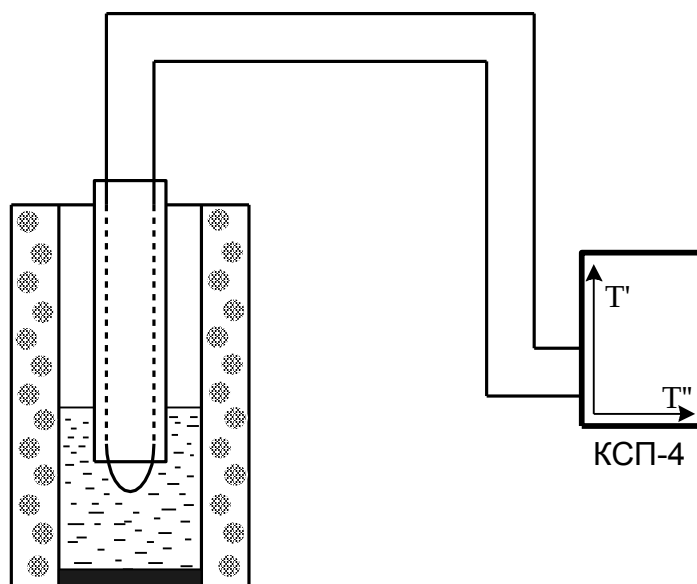


Рисунок 5

Робочу схему установки зображено на рис. 5. У цій роботі температура свинцю вимірюється термопарою (хромель-алюмель). Один спай термопари занурений у свинець, що розміщений у нагрівальній печі, а другий спай знаходиться за кімнатної температури T_k . Значення перепаду температур ΔT визначають за значеннями ЕРС термопари. Температуру свинцю розраховують за формулою

$$T = \Delta T + T_k . \quad (8)$$

Порядок виконання роботи

1. Записати у таблицю значення напруги живлення та струму, що проходить через спіраль печі. Під час проведення досліду потужність печі не змінювати.
2. Записати значення початкової температури за показанням кімнатного термометра.
3. Одночасно ввімкнути піч і секундомір.
4. Фіксувати значення електрорушійної сили термопари через кожну 1 хвилину в інтервалі температур від T_k до 563 К (290 °С) та через 30 с – в інтервалі температур 563–608 К (290–335 °С).
5. Вимкнути коло печі і продовжувати фіксувати температуру під час охолодження свинцю до температури 563 К (290 °С).

Обробка результатів експерименту

1. Побудувати графік залежності температури свинцю від часу під час нагрівання та охолодження $T = f(\tau)$.

2. Визначивши ділянки графіка, паралельні осі часу, знайти температуру плавлення свинцю $T_{пл}$ та температуру кристалізації $T_{кр}$.

3. Обчислити температуру плавлення свинцю за формулою

$$T_n = \frac{T_{пл} + T_{кр}}{2}, \quad (9)$$

4. Визначити приріст ентропії під час нагрівання і плавлення свинцю за формулою (7). Маса свинцю дорівнює 0,076 кг.

5. Визначити потужність нагрівальної печі та її коефіцієнт корисної дії.

$$P = IU, \quad (10)$$

$$\eta = \frac{mc(T_{пл} - T_0) + m\lambda}{IU\tau} 100\%. \quad (11)$$

6. Оцінити основні джерела похибок у цій роботі.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте перший і другий закони термодинаміки
2. Що таке ентропія, який її фізичний зміст та статистичне трактування?
3. Зміна ентропії у ізопроцесах із ідеальними газами. Зміна ентропії у випадку нагрівання рідин та твердих тіл. Зміна ентропії під час плавлення, кристалізації, випаровування та конденсації речовин.
4. Фазові переходи першого і другого роду. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса.
5. Питомі теплоти плавлення, кристалізації, випаровування, конденсації.

Таблиця 1 – Результати експерименту та їх обробки

№ досл.	τ , с	T_K , К	E , мВ	ΔT , К	T , К	ΔS , $\frac{Дж}{К}$	m , кг	c , $\frac{Дж}{кг\text{ }К}$	λ , $\frac{Дж}{кг}$	m , кг	U , В	I , А	P , Вт
1													
2													
3													
...													
n													

ЛІТЕРАТУРА

1. Фізика : навчально-методичний посібник для дистанційного навчання / Фат'янова Н. Б., Шелест Т. М., Галушак І. В., Меньшов Ю. В. – Харків : НТУ «ХП», 2020. – 164 с.
2. Гапченко С. Д. Механіка : навчально-методичний посібник для самостійної роботи з дисципліни «Фізика» / Гапченко С. Д. – Харків : ТОВ «В СПРАВИ», 2021. – 116 с.
3. Фелінський Г. С. Загальна фізика : підручник / Фелінський Г. С. – Київ : Видавництво «Каравела», 2020. – 655 с.
4. Фізика і комп'ютерні технології : навчальний посібник / Зачек І. Р. та ін. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2019. – 360 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Фізичні константи та фізичні величини

Основні фізичні сталі

Фізична стала	Позна-чення	Числове значення та одиниці вимірювання
Прискорення вільного падіння	g	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	G, γ	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Стала Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярна газова стала	R	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Число Лошмідта	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Елементарний заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Швидкість світла у вакуумі	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Стала Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{К}^4)$
Стала Віна	b	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{Дж}$
Стала Планка	h	$6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Рідберга	R	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радіус Бора	a	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптоновська довжина хвилі електрона	Λ_0	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	μ_B	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Енергія іонізації атома водню	E_i	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \quad (13,6 \text{ еВ})$
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Електрична стала	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнітна стала	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

Густина твердих тіл

<i>Тверде тіло</i>	$\rho \cdot 10^{-3}, \text{ кг/м}^3$	<i>Тверде тіло</i>	$\rho \cdot 10^{-3}, \text{ кг/м}^3$
Алюміній	2,70	Мідь	8,93
Барій	3,50	Нікель	8,90
Ванадій	6,02	Свинець	11,3
Вісмут	9,80	Срібло	10,5
Залізо	7,88	Цезій	1,90
Літій	0,53	Цинк	7,15

Густина рідин

<i>Рідина</i>	<i>Густина, кг/м³</i>	<i>Рідина</i>	<i>Густина, кг/м³</i>
Вода (при 4°C)	$1,00 \cdot 10^3$	Сірковуглець	$1,26 \cdot 10^3$
Гліцерин	$1,26 \cdot 10^3$	Спирт	$0,80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$		

Густина газів (за нормальних умов)

<i>Газ</i>	<i>Густина, кг/м³</i>	<i>Газ</i>	<i>Густина кг/м³</i>
Водень	0,09	Гелій	0,18
Повітря	1,29	Кисень	1,43

**Множники і приставки для утворення десяткових кратних
і частинних одиниць та їхні найменування**

Приставка		Множник	Приставка		Множник
Найменування	Позначення		Найменування	Позначення	
Екса	Е	10^{18}	Деци	д	10^{-1}
Пета	П	10^{15}	Сант	с	10^{-2}
Тера	Т	10^{12}	Мілі	м	10^{-3}
Гіга	Г	10^9	Мікро	мк	10^{-6}
Мега	М	10^6	Нано	н	10^{-9}
Кіло	К	10^3	Піко	п	10^{-12}
Гекто	г	10^2	Фемто	ф	10^{-15}
Дека	да	10	Атто	а	10^{-18}

Додаток Б

Таблиці похідних та інтегралів

Таблиця основних похідних

	Елементарна функція $y = f(x)$	Складна функція $y = f(u), \quad u = f(x)$
1.	$(x^n)' = nx^{n-1}.$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'.$
2.	$(\sin x)' = \cos x.$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$
3.	$(\cos x)' = -\sin x.$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$
4.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$
5.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$
6.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
7.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
8.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$
9.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}.$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{u^2+1}.$
10.	$(a^x)' = a^x \ln a.$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$
11.	$(e^x)' = e^x.$	$(e^u)' = e^u \cdot u'.$
12.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$
13.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1, \quad (a \neq 0).$
4. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0).$
 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad (a \neq 0).$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \quad (a \neq 0).$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1, \quad (a > 0).$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0); \quad \int e^x dx = e^x + C.$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

Додаток В

Система штучного інтелекту

Штучний інтелект (ШІ) стає одним із найпотужніших інструментів сучасної фізики. Алгоритми машинного навчання та нейромережі здатні обробляти величезні обсяги даних з експериментів і симуляцій, прискорюючи процес аналізу та відкриття нових фізичних законів. Завдяки AI ми маємо можливість моделювати складні фізичні системи, такі як квантові об'єкти, поведінку яких надзвичайно складно передбачити за допомогою традиційних методів. Нейромережі допомагають знаходити закономірності в даних, які раніше залишалися прихованими для людського ока, відкриваючи нові перспективи для фізичних досліджень. Це робить ШІ незамінним інструментом у фізиці майбутнього. Для перевірки точності власних розрахунків під час обробки експериментальних даних лабораторних робіт з фізики зручно використовувати ШІ. В мережі Інтернет існує значна кількість систем ШІ, які легко пристосувати для обробки результатів фізичного експерименту, наприклад: Smodin's Physics AI Solver; My Physics Calculator; Фізика Mathway; Альберт Ейнштейн; UTexas Physics Problem Solver.

Підказка штучного інтелекту – це письмове запитання, яке ви вводите в інтерфейс чат-бота для отримання відповіді. Потрібно зазначити, що її якість значною мірою залежить від якості запиту – якщо підказка надто розпливчаста або незрозуміла, інструмент може видати нерелевантні або безглузді результати. Ось декілька порад, які допоможуть сформулювати чітку та лаконічну команду та підвищити шанси отримати правдиву та об'єктивну інформацію:

- використовуйте конкретні ключові слова та фрази, які відповідають темі чи завданню;
- уникайте надто складних мовних конструкцій або заплутаних структур у реченнях;
- використовуйте приклади – це допоможе уточнити вашу мету та скерувати чат-бот у потрібному напрямі;
- задавайте потрібний тон запиту за допомогою прикметника (наприклад, «дружній», «професійний», «нормативний» тощо);
- вказуйте назву аудиторії, для якої ви готуєте матеріал (учні, батьки учнів або колеги);

- зазначайте умову, яка зробить відповідь більш конкретною (наприклад, «у відповіді використовуй короткі речення або просту лексику»);

- уточнюйте та повторюйте. Якщо отриманий результат виявився не таким, як ви очікували, зробіть повторний, більш конкретний та цільовий запит. Такі експерименти дозволять визначити, які типи запитань слід ставити чат-боту для отримання якісної відповіді;

- постійно оцінюйте вихідні дані та перевіряйте отриману інформацію.

Додаток Г
Приклади обробки результатів фізичного експерименту засобами
системи Mathcad

Обробка результатів лабораторної роботи 1.7
засобами системи Mathcad

Лістинг 1

ORIGIN := 1

Результати експерименту (Значення фізичних величин введено у міжнародній системі одиниць СІ)

m := 0.35 << маса важка, кг

g := 9.81 << прискорення вільного падіння, м/с²

h := 0.28 << висота, м

r1 := 0.025 << радіус малого шківа, м

t1 := $\begin{pmatrix} 4.71 \\ 4.52 \\ 4.82 \\ 4.48 \\ 4.58 \end{pmatrix}$ << матриця значень часу для
малого шківа, с

r2 := 0.04 << радіус великого шківа, м

t2 := $\begin{pmatrix} 2.93 \\ 3.07 \\ 3.03 \\ 2.84 \\ 2.79 \end{pmatrix}$ << матриця значень часу для
великого шківа, с

ρ := 7800 << питома густина сталі, кг/м³

$$I_{\text{екс}}(m, t, r, h) := \frac{m \cdot g \cdot t^2 \cdot r^2}{2 \cdot h} - m \cdot r^2 \quad \ll \text{розрахункова формула для обчислення експериментального значення моменту інерції маятника Обербека}$$

Розрахунок експериментального значення моменту інерції маятника Обербека для дослідів з малим шківом, кг м²

i := 1..5 << задано діапазон індексів матриці

$$I_{\text{експ1}}_i := I_{\text{екс}}(m, t1_i, r1, h)$$

$$I_{\text{експ1}} = \begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.078 \\ 0.089 \\ 0.077 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

Розрахунок експериментального значення моменту інерції маятника Обербека для дослідів з великим шківом, кг м²

$$I_{\text{експ2}}_i := I_{\text{екс}}(m, t2_i, r2, h)$$

$$I_{\text{експ2}} = \begin{pmatrix} 0.084 \\ 0.092 \\ 0.09 \\ 0.079 \\ 0.076 \end{pmatrix}$$

I_експ := stack(I_експ1, I_експ2) << об'єднано матриці I_експ1 і I_експ2

$$I_{\text{експ}} = \begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.078 \\ 0.089 \\ 0.077 \\ 0.08 \\ 0.084 \\ 0.092 \\ 0.09 \\ 0.079 \\ 0.076 \end{pmatrix}$$

<< виведено значення об'єднаної матриці

$n := \text{rows}(I_{\text{експ}}) = 10$ << визначено чило рядків об'єднано матриці

$j := 1 \dots n$ << задано діапазон індексів матриць для розрахунку середніх значень

$$I_c := \frac{\sum I_{\text{експ}}}{n} = 0.083 \quad \text{<< середнє значення експериментального моменту інерції маятника, кг м}^2$$

$$\Delta I_j := |I_{\text{експ}j} - I_c| \quad \Delta I = \begin{pmatrix} 0.002 \\ 0.0047 \\ 0.006 \\ 0.0061 \\ 0.0026 \\ 0.0009 \\ 0.0091 \\ 0.0067 \\ 0.0042 \\ 0.007 \end{pmatrix} \quad \text{<< відхилення експериментальних значень моментів інерції від середнього значення, кг м}^2$$

$$\Delta I_c := \frac{\sum \Delta I}{n} = 0.0049 \quad \text{<< середня абсолютна похибка моменту інерції маятника, кг м}^2$$

$$\varepsilon := \frac{\Delta I_c}{I_c} \cdot 100 = 5.963 \quad \text{<< середня відносна похибка моменту інерції маятника, \%}$$

Геометричні розміри елементів маятника Обербека (Лабораторна робота 1-7, рис.3.8), м

$$L := 0.4 \quad d := 0.006 \quad l := 0.26 \quad l_0 := 0.04 \quad h_0 := 0.018$$

$$R_0 := 0.24 \quad R_3 := 0.036 \quad D := 0.03$$

$$m_1 := \frac{\rho \cdot \pi \cdot d^2 \cdot L}{4} = 0.088 \quad \text{<< маса одного стержня, кг}$$

$$m_2 := \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2) \cdot \rho \cdot l_0}{4} = 0.212 \quad \ll \text{ маса циліндра на стержні, кг}$$

$$m_3 := \pi \cdot R_3^2 \cdot h_0 \cdot \rho = 0.572 \quad \ll \text{ маса диска на якому} \\ \text{закріплені стержні маятника, кг}$$

Теоретичне значення моменту інерції маятника з врахуванням моменту інерції диска на якому закріплені стержні маятника, кг м²

$$I'_{\text{теор}} := m_1 \cdot \left[\frac{L^2}{3} + 4 \cdot \left(\frac{L}{2} + R_3 \right)^2 \right] + 4 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{l_0^2}{12} + l^2 \right) + \frac{m_3 \cdot R_3^2}{2} = 0.08209$$

Теоретичне значення моменту інерції маятника без врахування моменту інерції диска на якому закріплені стержні маятника, кг м²

$$I_{\text{теор}} := m_1 \cdot \left[\frac{L^2}{3} + 4 \cdot \left(\frac{L}{2} + R_3 \right)^2 \right] + 4 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{l_0^2}{12} + l^2 \right) = 0.08172$$

Момент інерції диска на якому закріплені стержні маятника, кг м²

$$I_3 := \frac{m_3 \cdot R_3^2}{2} = 0.00037$$

Електронне навчальне видання

**Йосип Йосипович Білинський
Володимир Мефодійович Бурдейний
Віктор Григорович Дзісь**

Лабораторний практикум з фізики. Розділ 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка

Практикум

Рукопис оформив *В. Дзісь*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 10.08.2026 р.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2026-111.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

Тел. (0432) 65-18-06.

press.vntu.edu.ua;

Email: rvv.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.