

**Й. Й. Білинський, В. М. Бурдейний, В. Г. Дзісь**

**Лабораторний практикум з фізики**  
**Розділ 2. Електрика**

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

Й. Й. Білинський, В. М. Бурдейний, В. Г. Дзісь

# Лабораторний практикум з фізики

## Розділ 2. Електрика

*Електронний практикум*

Вінниця  
ВНТУ  
2026

УДК 533.21

Б61

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (Протокол № 11 від 26.03.2026 р.)

**Рецензенти:**

- В. Ф. Заболотний**, доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри фізики і методики навчання фізики, астрономії Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.
- А. М. Сільвейстр**, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики і методики навчання фізики, астрономії Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.
- О. Ф. Шевчук**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри Комп'ютерних наук Вінницького національного технічного університету.

**Білинський, Й. Й.**

**Б61** Лабораторний практикум з фізики. Розділ 2. Електрика : практикум [Електронний ресурс] / Білинський Й. Й., Бурдейний В. М., Дзись В. Г. – Вінниця : ВНТУ, 2026. – (PDF, 129 с.).

У практикумі описано цикл лабораторних робіт з електрики, теоретичні відомості для їх виконання. Подаються приклади програм для обробки результатів експерименту у Mathcad.

Практикум може бути використаний здобувачами вищої освіти всіх спеціальностей ВНТУ для самостійної підготовки до виконання лабораторних робіт з фізики.

УДК 533.2

© ВНТУ, 2026

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
Правила техніки безпеки під час виконання лабораторних робіт з електрики.....	7
1. Принцип дії і основні характеристики електровимірювальних приладів.	8
2. Лабораторні роботи.....	16
Лабораторна робота 2–1. Визначення ємності конденсаторів методом порівняння.....	16
Лабораторна робота 2–2. Визначення ємності конденсаторів методом містка змінного струму.....	22
Лабораторна робота 2–5. Визначення електрорушійної сили джерела струму.....	35
Лабораторна робота 2–6. Вимірювання опорів і визначення залежності опору міді від температури.....	42
Лабораторна робота 2–8.	
Вивчення законів Кірхгофа для розгалужених електричних кіл.....	51
Лабораторна робота 2-10. Вивчення термоелектричних явищ та градування термопари.....	64
Лабораторна робота 2-11. Дослідження послідовного кола змінного струму	73
Рекомендована література.....	87
ДОДАТКИ.....	88
Додаток А.....	89
1 Метод найменших квадратів.....	89
1.1 Лінійна залежність.....	90
1.2 Метод найменших квадратів для нелінійної залежності.....	92
1.3 Лінеаризація нелінійних залежностей.....	95
Додаток Б.....	101
1 Приклади обробки результатів фізичного експерименту засобами системи Mathcad.....	101
1.1 Приклад обробки експериментальних даних лабораторної роботи 2-6.	101
1.2 Приклад обробки експериментальних даних лабораторної роботи 2-8.	105
Додаток В.....	112
1 Використання штучного інтелекту у фізичних розрахунках.....	112
1.1 Основні принципи роботи.....	112
2 Розв'язування фізичних задач у ШІ.....	113
2.1 Підготовка задачі до розв'язання в системі ШІ.....	113
2.2 Діалог із ШІ.....	114
Додаток Д.....	119
1 Деякі відомості з математики.....	119
1.1 Тригонометричні функції:.....	119
1.2 Похідна функції.....	119
1.2.1 Таблиця основних похідних.....	120
1.2.2 Правила диференціювання.....	121

1.2.3	Похідна складної функції .....	121
1.3	Інтегральне числення .....	123
1.3.1	Таблиця основних інтегралів .....	124
1.3.2	Означений інтеграл .....	125
2	Фізичні сталі та фізичні властивості речовин .....	126
2.1	Кратні і часткові приставки до одиниць вимірювання.....	126
2.2	Основні фізичні сталі .....	126
2.3	Властивості деяких твердих тіл .....	127
2.4	Діелектрична проникність деяких речовин .....	128
2.5	Робота виходу електронів з поверхні металу .....	128
2.6	Електричні властивості матеріалів за 20 °С .....	128

## Вступ

Лабораторна робота – невелике за обсягом та змістом початкове наукове дослідження здобувача вищої освіти. У процесі виконання лабораторної роботи здобувач набуває навичок застосування теоретичних знань на практиці, вчиться обробляти та аналізувати результати експерименту.

Під час виконання лабораторних робіт здобувачі з великою увагою мають поставитися до вивчення суті фізичних явищ, освоєння техніки та методики проведення фізичного експерименту. Нераціонально приступати до виконання лабораторної роботи, не засвоївши теоретичного матеріалу, не маючи чітких уявлень про мету експерименту, методику та порядок його проведення. Підготовку здобувача до виконання лабораторних робіт викладач перевіряє в ході співбесіди зі здобувачем на початку кожного заняття. До виконання роботи допускаються здобувачі, які засвоїли теоретичний матеріал та мають заготовку для звіту (короткий конспект). Звіт містить такі пункти (заготовка – лише пункти 1–5, пункти 6–7 заповнюються після виконання роботи):

1. Назва лабораторної роботи, її номер і поставлена мета.
2. Короткий конспект теоретичних основ методу вимірювань і схема установки.
3. Порядок виконання роботи.
4. Контрольні запитання.
5. Заготовки таблиць для занесення результатів експерименту та результатів його обробки.
6. Обробка результатів експерименту (обчислення фізичних величин та оцінення їхніх похибок, побудова графіків).
7. Висновки.

Здобувач, який з'явився на лабораторне заняття без заготовки або не засвоїв основних теоретичних положень лабораторної роботи, до занять не допускається.

Одержавши допуск до виконання лабораторної роботи, здобувач приступає до експериментальних досліджень, у процесі яких він проводить вимірювання фізичних величин. Для підвищення точності потрібно вимірювання кожної фізичної величини проводити не менше трьох разів. Результати експерименту потрібно чітко записувати у таблиці. Після закінчення дослідів результати експерименту необхідно подати викладачеві на підпис і приступити до заповнення другої частини звіту

(пункти 6–7). Обробку результатів бажано виконувати на ЕОМ або калькуляторі, розробивши для цього програми.

Робочі документи (програми) системи Mathcad для обробки результатів експерименту вбудовано в електронний практикум, тексти зразків деяких програм наведено у додатку Б. Для запуску робочого документа необхідно активізувати гіперпосилання «Обробка результатів експерименту в Mathcad» у відповідному розділі лабораторної роботи. У цьому випадку запускається система Mathcad та відкривається відповідний робочий документ. В робочому документі системи Mathcad необхідно замінити в шаблонах експериментальні відповідно своїми значеннями. Шаплони (матриці та константи), в які необхідно вносити зміни, виділено жовтим кольором. Результати прочитати в областях, які виділені зеленим кольором.

Графіки необхідно будувати на окрему аркуші паперу (формат не менше, ніж 14×20 см), дотримуючись масштабу.

Під час захисту роботи здобувач має подати повний звіт про виконання лабораторної роботи та дати повні відповіді на поставлені викладачем теоретичні запитання.

## **Правила техніки безпеки під час виконання лабораторних робіт з електрики**

1. Точно виконувати вимоги внутрішнього розпорядку, встановленого в лабораторії, строго дотримуватися правил техніки безпеки під час виконання лабораторних робіт.

2. На вступному занятті пройти інструктаж із техніки безпеки, ознайомитися з розміщенням робочих місць у лабораторії.

3. До виконання лабораторних робіт викладачем допускаються лише ті здобувачі, які засвоїли основні теоретичні положення лабораторної роботи та підготували заготовку (короткий конспект) для її виконання.

4. Перед виконанням лабораторної роботи отримати у лаборанта необхідні прилади, матеріали, методичні вказівки. Перевірити наявність приладів та матеріалів згідно з інструкцією до лабораторної установки.

5. Категорично забороняється без дозволу викладача або лаборанта:

- вмикати розподільні електрощити з напругою 220 та 36 В;
- вмикати в мережу з напругою 220 або 36 В вимірювальні прилади та лабораторні установки;
- замінювати або переносити прилади від однієї лабораторної установки до іншої;
- приступати до виконання лабораторної роботи, якщо складену електричну схему не перевірів лаборант або викладач;
- залишати без нагляду вимірювальні прилади та лабораторні установки;

- користуватися в лабораторії відкритим вогнем, крім спиртівок.

6. Якщо в процесі виконання роботи виявляються деякі поломки вимірювальних приладів, негайно доповідати керівникові занять. Самостійно усувати неполадки приладів категорично заборонено.

7. Після закінчення виконання лабораторної роботи повідомити викладача про завершення експерименту та подати результати на підпис. Вимкнути із мережі прилади. Здати лаборанту отримані у нього прилади, матеріали, методичні вказівки.

8. Студенти, які порушують правила техніки безпеки, до роботи у лабораторії не допускаються.

## 1 Принцип дії і основні характеристики електровимірювальних приладів

Електровимірювальний прилад – це сукупність засобів, за допомогою яких здійснюється вимірювання певної електричної величини.

В приладах безпосереднього оцінення вимірювана величина визначається стрілочним або цифровим способом відліку або з допомогою світлового «зайчика» на градуйованій шкалі. Це амперметри, вольтметри, ватметри, омметри, гальванометри.

Для вимірювання електричних величин в приладах безпосереднього оцінення використовують фізичні явища, на яких створюються обертальний момент і наступне переміщення рухливої системи приладу. Обертальний момент утворюється внаслідок взаємодії постійного магніту і магнітного поля струму в котушці, магнітного поля котушки із струмом і ферромагнетиком, взаємодії магнітних полів котушок зі струмами, взаємодії заряджених тіл. Залежно від використовуваного в приладі принципу взаємодії розрізняють такі системи електровимірювальних приладів: магнітоелектричну, електромагнітну, електродинамічну, індукційну і ін.

Якість електровимірювальних приладів визначається чутливістю, похибками вимірювання, реагуванням на зовнішні електричні і магнітні поля та зміну температури, межами вимірювань, тривалістю щодо перевантажень тощо.

*Чутливістю* електровимірювальних приладів називають відношення лінійного або кутового зміщення покажчика приладу  $\Delta\alpha$  до зміни вимірюваної величини  $\Delta x$ , яка зумовила це зміщення:

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x}.$$

Величина  $C=1/S$ , обернена чутливості, дістала назву *ціни поділки* приладу.

Для характеристики точності електровимірювальних приладів використовують так звані зведені похибки;

$$\varepsilon_{зв} = \pm \frac{\Delta x}{x_n} \cdot 100\%,$$

де  $\Delta x$  – абсолютна похибка вимірюваної величини;

$x_n$  – верхня межа вимірювань (шкали) приладу (його номінальне значення).

Електровимірювальні прилади відповідно до величини їх зведеної похибки згідно з існуючими стандартами поділяються на вісім класів

точності, нанесених на шкалу вимірювального приладу: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. За покажчиком класу точності визначають абсолютну похибку вимірювання:

$$\Delta x = \pm k \cdot \frac{x_n}{100},$$

де  $k$  – клас точності приладу;

$x_n$  – максимальне значення вимірюваної величини.

Прилади класів точності 0,02; 0,05; 0,1; 0,2 використовуються, переважно, для точних лабораторних вимірювань і називаються прецизійними; прилади класів 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 мають назву технічних.

*Прилади магнітоелектричної системи.* Прилади цієї системи складаються з двох основних частин: постійного магніту і котушки, що має вигляд рамки. Принцип дії вимірювального механізму цих приладів оснований на взаємодії сильного магнітного поля постійного магніту з слабким магнітним полем рамки, по якій проходить вимірювальний струм. Схему приладу магнітоелектричної системи наведено на рис. 1.

Магнітна система вимірювального механізму складається з сильного постійного магніту 4, полюсних наконечників 5, нерухомого осердя 2.

Між полюсними наконечниками і осердям розміщується рамка (котушка) 3, що являє собою досить легкий алюмінієвий каркас, на який намотаний тонкий мідний дріт діаметром від 0,03 до 0,2 мм. Така система забезпечує вільне обертання рамки навколо осердя, а отже, і відхилення скріпленої з нею стрілки 1 відносно шкали. Під час проходження струму  $I$  через рамку на неї діє обертальний момент

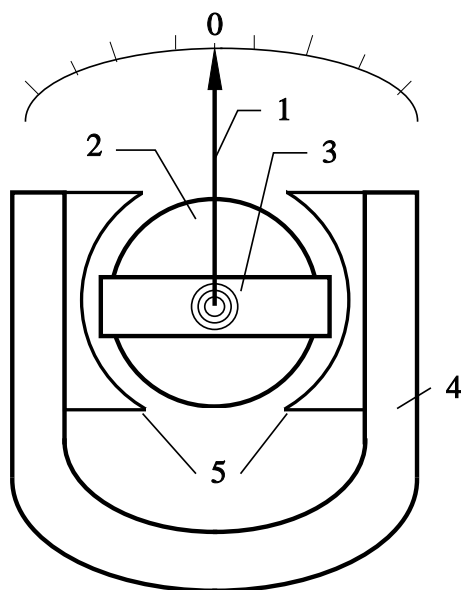


Рисунок 1 – Прилади магнітоелектричної системи

$$M = n B S I ,$$

де  $n$  – кількість витків рамки;

$B$  – магнітна індукція;

$S$  – площа рамки.

Цей момент врівноважується протидійним моментом деформації спіральних пружин, які на рисунку не показані.

Переваги приладів магнітоелектричної системи:

- високий клас точності;
- мають високу чутливість;
- мають рівномірну шкалу;
- невеликі витрати енергії.

Прилади магнітоелектричної системи мають високу чутливість, мале споживання електричної енергії, рівномірну шкалу.

Високоточні прилади класів 0,02; 0,05; 0,1; 0,2 можуть бути лише магнітоелектричної системи.

Недоліки приладів магнітоелектричної системи:

- складна будова;
- можливість вимірювати лише постійний струм;
- чутливість до перевантаження;
- чутливість до зміни температури.

*Прилади електромагнітної системи.* Прилади цієї системи складаються з плоскої або круглої нерухомої котушки, на яку намотаний мідний дріт, і рухомого осердя, виготовленого з м'яких магнітних матеріалів (електротехнічна сталь, пермалой). Принцип дії приладів цієї системи оснований на взаємодії магнітного поля котушки, по якій проходить струм, з рухливим феромагнітним осердям (рис. 2).

Вимірюваний струм  $I$ , що проходить по котушці 3, створює магнітне поле. В це поле втягується осердя у вигляді сталеві пластинки 4, закріпленої на осі 6. Намагніченість осердя і саме магнітне поле котушки пропорційні струму, отже, обертальний момент пропорційний квадрату струму:

$$M_1 = k_1 I^2 ,$$

де  $k_1$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від конструкції приладу.

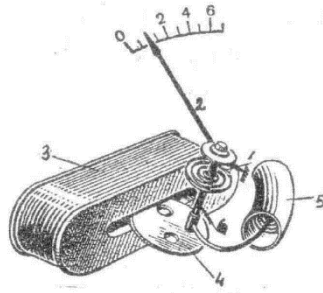


Рисунок 2 – Прилади електромагнітної системи

Протидійний момент  $M_2$  створюється пружинками 1. Він пропорційний куту повороту рухливої частини приладу:

$$M_2 = k_1 \varphi,$$

де  $k_2$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від пружних властивостей пружин.

Для швидкого заспокоєння рухливої частини приладу і стрілки застосовують повітряні демпфери 5. Демпфер – це камера, в якій рухається алюмінієвий поршень. Під час повороту осердя поршень зазнає опору повітря.

Рівновага рухливої частини приладу визначається рівністю протилежно напрямлених моментів:  $M_1 = M_2$ . Звідки

$$\varphi = kI^2,$$

де  $k = \frac{k_1}{k_2}$ . Отже, шкала електромагнітного приладу нерівномірна,

квадратична. Із зміною напрямку струму змінюються як напрям магнітного поля, так і намагніченість осердя. Отже, прилади цієї системи застосовуються для вимірювань постійного і змінного струмів. В останньому випадку вони реагують на діюче значення змінного струму; їх використовують також для вимірювання напруги в електричному колі.

Переваги вимірювальних приладів електромагнітної системи:

- простота;
- надійність;
- дешевизна;
- витримують перевантаження;
- можуть вимірювати змінний і постійний струм.

Недоліки приладів електромагнітної системи:

- невисока точність;
- невелика чутливість;
- нерівномірність шкали;

- чутливість до зовнішніх полів;
- високе споживання енергії(5-15 Вт).

Прилади електромагнітної системи покривають металевими кожухами, або виготовляють астатичними, тобто з двома котушками, включеними послідовно.

*Прилади електродинамічної системи.* Прилади цієї системи відзначаються тим, що їх дія ґрунтується на взаємодії магнітних полів двох котушок (рухомої і нерухомої) із вимірюваним струмом. Одна із взаємодіючих котушок нерухома і складається з двох послідовно з'єднаних котушок 4, між якими є зазор. В ньому розміщується вісь обертання рухомої безкаркасної котушки 3. З віссю скріплена стрілка 1 – покажчик з алюмінієвою пластинкою повітряного демпфера 2 (рис. 3).

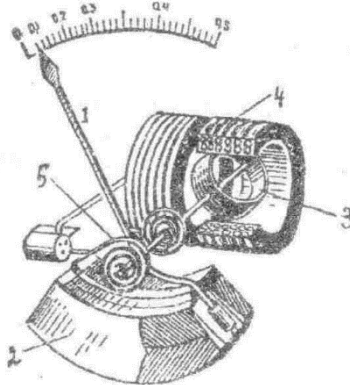


Рисунок 3 – Прилад електродинамічної системи

На осі також ізольовано закріплені кінці двох спіральних пружин 5, які призначені для підведення вимірювального струму і створення протидійного моменту. Власне магнітне поле котушок мале, тому для захисту їх від впливу зовнішніх полів застосовують екранування або прилади виготовляють астатичними.

Котушки в приладах електродинамічної системи залежно від їх призначення з'єднуються послідовно або паралельно. Якщо котушки приладу з'єднати паралельно, то його можна використовувати як амперметр. Якщо обидві котушки з'єднати послідовно і приєднати до них додатковий опір, то прилад може використовуватись як вольтметр. У ватметрах нерухома котушка вмикається в коло струму послідовно, а рухома котушка з додатковим опором – паралельно споживачам енергії.

*Прилади індукційної системи.* Прилади індукційної системи характеризуються тим, що принцип їхньої дії ґрунтується на взаємодії вихрових індукційних струмів в рухомій частині приладу (алюмінієвий диск, насаджений на вертикальну вісь) із змінними магнітними потоками нерухомих електромагнітів. Один із електромагнітів має обмотку з тонкого ізолюваного дроту, яка є обмоткою напруги і включається в коло паралельно навантаженню.

Серед приладів індукційної системи широке застосування мають лічильники електричної енергії змінного струму.

*Прилади електронної системи.* До приладів електронної системи відносяться електронні вольтметри, які складаються з електронних ламп або напівпровідникових приладів і вимірювального механізму магнітоелектричної або електростатичної системи. Прилади електронної системи використовуються для радіотехнічних вимірювань напруги і частоти в значних діапазонах. Такі прилади мають досить великі входні опори, тому їх використовують для вимірювання напруги малопотужних джерел.

*Цифрові прилади.* Прилади цієї системи визначають невідому величину, що вимірюється в дискретно-цифровій формі за допомогою цифрових індикаторів.

Цифрові прилади мають ряд переваг над звичайними, основні з яких: висока точність і швидкість вимірювання, об'єктивність та повна автоматизація процесу вимірювання, можливість передачі результатів на відстані і подальшої їх обробки на ЕОМ.

Поряд з перевагами цифрові прилади мають ряд недоліків; складність схеми, значні габарити, менша надійність.

*Електронно-променеві осцилографи.* Електронно-променеві осцилографи – це електронні прилади для аналізу характеристик електричних сигналів, що змінюються у часі. Основною складовою частиною осцилографа є електронно-променева трубка з одним чи кількома керованими променями, кожний з яких являє собою сфокусований пучок швидкорухомих електронів. На шляху до покритого люмінофором екрана трубки пучок проходить між двома парами відхиляючих пластин вертикального та горизонтального відхилення. Під дією напруги, прикладеної до відповідної пари пластин, промінь і світлова точка на люмінофорі екрана переміщується у вертикальному і горизонтальному напрямках.

*Електровимірювальні прилади зрівноважувального типу.* До цього класу електровимірювальних приладів відносяться мости постійного та змінного струмів та компенсатори (потенціометри) напруги постійного і змінного струмів. Принципи роботи приладів цього класу детально розглянуто в лабораторних роботах 2-2, 2-5, 2-6.

Для правильної і ефективної організації електричних вимірювань потрібно насамперед докладно ознайомитися з основними характеристиками електровимірювальних приладів на їхніх шкалах (табл.1).

Таблиця 1 – Умовні позначення на шкалах електровимірювальних приладів

Позначення	Принцип дії, призначення, положення
1 	Магнітоелектрична система з рухомою рамкою
2 	Магнітоелектрична система з рухомим магнітом
3 	Електромагнітна система
4 	Електродинамічна система
5 	Індукційна система
6 	Для постійного струму чи напруги
7 	Для змінного струму чи напруги
8 	Для змінного і постійного струму чи напруги
9 <b>1.0</b>	Клас точності приладу
10 	Горизонтальне розміщення
11 	Вертикальне розміщення
12 	Шкала приладу має розташовуватися під кутом 60° до горизонту
13 	Вимірювальне коло ізольоване від корпусу приладу і випробуване напругою 2 кВ
14 	Вимірювальне коло ізольоване від корпусу приладу і випробуване напругою 2 кВ
15 	Прилад захищено від зовнішніх магнітних полів
16 	Прилад захищено від зовнішніх електростатичних полів

Довільний електровимірювальний прилад у процесі вимірювань не має змінювати своїх параметрів і режиму дій об'єкта вимірювання. Отже, опір амперметра мусить бути, за змоги, малим, а опір вольтметра – великим. Розширення меж вимірювання амперметрів досягається включенням паралельно амперметру шунта. Розрахунки шунта виконують за формулою:

$$R_{ш} = \frac{R_a}{n-1},$$

де  $n = \frac{I}{I_a}$ , тобто  $I$  – найбільше значення струму, який має вимірювати амперметр;  $I_a$  – сила струму повного відхилення стрілки (граничний струм приладу);

$R_a$  – внутрішній опір приладу;

$R_{ш}$  – опір шунта;

Розширення меж вимірювання вольтметрів досягається включенням послідовно до вольтметра додаткового резистора  $R_0$ . Розрахунок опору додаткового резистора виконують відповідно до формули:

$$R_0 = R_v(n-1),$$

де  $n = \frac{U}{U_v}$  тобто  $U$  – найбільше значення напруги, яку потрібно вимірювати;  $U_v$  – напруга, на яку розрахований вольтметр;

$R_v$  – опір вольтметра;

$R_0$  – додатковий опір.

## 2 Лабораторні роботи

### Лабораторна робота 2–1. Визначення ємності конденсаторів методом порівняння

*Прилади і матеріали:* 1) балістичний гальванометр; 2) випрямляч; 3) вольтметр; 4) набір конденсаторів еталонних конденсаторів; 5) набір конденсаторів із невідомими ємностями; 6) два перемикачі.

*Мета роботи:* освоїти методи вимірювання ємності.

#### *Теоретичні відомості та опис приладів*

Використаємо метод порівняння невідомої електроємності  $C_x$  з відомою електроємністю еталонного конденсатора  $C_e$ . Для визначення заряду й електроємності використовується балістичний гальванометр.

*Балістичним гальванометром* називається приклад, призначений для вимірювання невеликої кількості електрики, що проходить через рамку протягом короткого проміжку часу (малий порівняно з періодом власних коливань рамки).

Під час роботи з балістичним гальванометром спостерігають не просто відхилення рухомої рамки, як у звичайному гальванометрі під час проходження постійного струму, а вимірюють максимальне відхилення рамки під дією миттєвого імпульсу струму. Для забезпечення пропорційності між максимальним відхиленням рамки і кількістю електрики потрібно, щоб імпульс струму закінчився раніше, ніж рамка гальванометра відхилиться від положення рівноваги на помітний кут. З цього випливає, що для таких вимірювань можна застосувати будь-який гальванометр магнітоелектричної системи. Але практично імпульс струму не буває настільки коротким, щоб рамка звичайного гальванометра не встигла відхилитись, поки в колі існує струм. Внаслідок цього для вимірювання короткочасних струмів потрібно штучно збільшувати період коливань рамки. Для цього в деяких випадках на рухому частину звичайного гальванометра прикріплюється спеціальний тягарець у вигляді металевого диска чи двох стержнів (цим збільшується момент інерції рамки).

Поряд із цим існують гальванометри, призначені лише для балістичних вимірювань. Короткочасний струм, тривалість якого  $\tau$  значно менша, ніж період коливань  $T_0$ , не встигає помітно змінити інертну рухому систему. Такий характер дії приводить до затухаючих або аперіодичних коливань системи, які описуються диференціальним рівнянням:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = BSnI , \quad (1)$$

де  $J$  – момент інерції рамки;

$\mu = \Phi_0^2 / R$  – коефіцієнт опору, зумовлений гальмуванням індукційними струмами в рамці;

$D$  – модуль кручення нитки;

$n$  – число витків рамки;

$R$  – повний опір кола (опір рамки гальванометра й опір зовнішнього кола),

$B$  – індукція магнітного поля у вимірювальній системі гальванометра.

Оскільки момент інерції рамки великий і вона не встигає за час  $\tau$  вийти з положення рівноваги, знехтувавши в лівій частині (2.1) другим і третім доданками, знайдемо:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = BSnl, \quad (2)$$

Проінтегруємо цей вираз:

$$J \frac{d\varphi}{dt} = BSn \int_0^{\tau} I dt = BSnq, \quad (3)$$

де  $q$  – повна кількість електрики, яка пройшла через гальванометр.

Піднесемо (3) до квадрата:

$$J^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = B^2 S^2 n^2 q^2, \quad (4)$$

Скористаємося законом збереження і перетворення енергії та застосуємо його для випадку руху рамки:

$$W_k = \frac{J}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad (5)$$

$$W_n = \frac{D\varphi_{\max}^2}{2}, \quad (6)$$

де  $\varphi_{\max}$  – максимальний кут повороту рамки.

Оскільки  $W_k = W_n$ , обертання рамки продовжуватиметься до того часу, поки вся кінетична енергія, набута нею, не перейде в потенціальну енергію закрученої нитки підвісу, то

$$J \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = D\varphi_{\max}^2. \quad (7)$$

Поділивши (3) на (7), дістанемо:

$$J = \frac{B^2 S^2 n^2 q^2}{D\varphi_{\max}^2}. \quad (8)$$

Запишемо вираз для визначення періоду вільних коливань рамки:

$$T = 2\pi / \sqrt{D/J}.$$

Звідки

$$J = T^2 D / 4\pi^2. \quad (9)$$

Прирівнявши (8) і (9), матимемо:

$$q = \frac{TD\varphi_{\max}}{2\pi BSn}. \quad (10)$$

Введемо позначення  $TD/\pi BSn = A$ . Тоді (10) набуде такого вигляду:

$$\varphi_{\max} = q/A. \quad (11)$$

Величина  $A$  називається *балістичною сталою гальванометра*. *Балістична стала* визначає кількість електрики, яка, пройшовши через рухому рамку, спричинить її поворот на кут 1 рад.

Отже, із (11) випливає, що максимальний кут відхилення рухомої рамки балістичного гальванометра пропорційний заряду, який пройшов через неї.

Як правило, кут повороту  $\varphi$  рамки гальванометра відраховується по лінійній шкалі. Тому, позначивши через  $N$  число поділок шкали,  $l$  – відстань від дзеркала гальванометра до шкали і врахувавши, що за відхилення дзеркала на кут  $\varphi$  «зайчик» відхиляється на кут  $2\varphi$ , маємо:

$$\varphi_{\max} = N l_0 / 2l, \quad (12)$$

де  $l_0$  – відстань між поділками.

З (11 і 12) дістанемо:

$$q = AN l_0 / 2l. \quad (13)$$

За формулою (13) можна визначити кількість електрики, якщо відома балістична стала  $A$ .

Балістичну сталу практично визначають під час розрядження конденсатора з відомою ємністю  $C_e$ , зарядженого до певної різниці потенціалів  $U$ . Значення  $U$  вимірюють вольтметром високого класу точності. Тоді заряд на конденсаторі можна визначити досить точно:

$$q = C_e U, \quad (14)$$

і, отже, балістична стала

$$A = C_e \frac{2lU}{N l_0}. \quad (15)$$

Підключаючи тепер у схему замість  $C_e$  невідому ємність, можна визначити  $C_x$  за формулою

$$C_x = \frac{AN_x l_0}{2U_x l} = \frac{U_e N_x}{U_x N_e} C_e. \quad (16)$$

Якщо співвідношення між ємностями еталонного і досліджуваного

конденсаторів незначне ( $0,2 < C_x / C_e < 5$ ), то процес вимірювання значно спрощується. Обидва конденсатори по черзі підключають у схему і заряджають до тієї самої різниці потенціалів  $U$ . Справді, оскільки  $U = const$ , маємо:

$$C_x = q_x / U, \quad C_e = q_e / U, \quad C_x / C_e = q_x / q_e, \quad (17)$$

$$q_e = A\varphi_e, \quad q_x = A\varphi_x, \quad q_x / q_e = \varphi_x / \varphi_e = N_x / N_e. \quad (18)$$

Отже, остаточно

$$C_x = C_e \frac{N_x}{N_e}. \quad (19)$$

Схему вмикання приладів для виконання роботи показано на рис. 4.

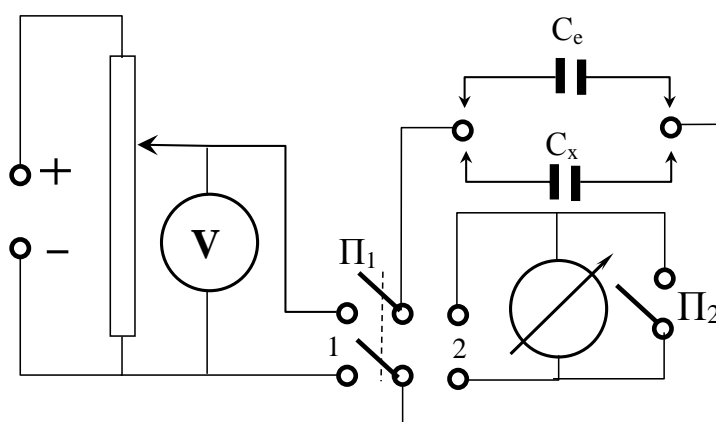


Рисунок 4 – Електрична схема лабораторної установки

Перемикач  $\Pi_1$  слугує для заряджання конденсаторів (положення «1») і для їх розряджання через гальванометр (положення «2»).

До його затискачів по чергово підключають конденсатори з відомою та невідомою ємностями. Паралельно гальванометру ввімкнений перемикач  $\Pi_2$ , призначений для заспокоєння рамки гальванометра.

#### **Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту**

1. Скласти електричне коло за схемою рис. 4, підключити еталонний конденсатор  $C_e$  (перемикач  $\Pi_1$  в положенні «1»). За допомогою ручки регулятора встановити напругу  $U_{max}$  на еталонному конденсаторі (до 3 В), щоб «зайчик» гальванометра зміщувався під час розряджання конденсатора на всю шкалу.

2. Перемикач  $\Pi_1$  перевести в положення «2» і зробити відлік по шкалі для першого коливання. Заспокоїти рамку перемикачем  $\Pi_2$ . Виконати цю операцію кілька разів (не менше п'яти). Визначити середнє значення числа  $N$ . Підставити в (15) і визначити балістичну сталу  $A$  гальванометра. Результати занести до таблиці 1.

3. Змінюючи напругу від 0 до  $U_{max}$  через певні інтервали і відлічуючи відхилення  $N$  «зайчика» під час розряджання конденсатора  $C_e$ , проградувати гальванометр за величиною заряду  $q = f(N)$ . Заряд визначити за формулою (14).

4. Побудувати на основі добутих даних робочий графік  $q = f(N)$ .

5. Увімкнути замість  $C_e$  конденсатори невідомої ємності  $C_{1x}$  і  $C_{2x}$ . Зарядити конденсатори до різниці потенціалів  $U < U_{max}$ . Виконати вимірювання, як в п. 2. Змінити різницю потенціалів і зробити те саме не менше ніж для трьох значень напруги для кожного конденсатора. Результати занести до таблиці 2.

6. Визначити за формулою (19) ємність конденсатора  $C_x$ . Ємності конденсатора  $C_x$ , обчислені за різних напруг, мають бути близькими за абсолютними значеннями. Взяти середнє значення для кожного конденсатора.

7. Оцінити похибку вимірювання ємності.

8. Визначити ємність двох конденсаторів для послідовного і паралельного з'єднання. З'єднати конденсатори  $C_{1x}$ ,  $C_{2x}$  послідовно, а потім паралельно, і виміряти їхні ємності  $C_{xпар}$ ,  $C_{xпос}$ , як зазначено в п. 5, 6. Порівняти експериментальні результати з результатами теоретичних розрахунків за формулами для паралельного з'єднання  $C'_{xпар} = C_{1x} + C_{2x}$  та послідовного  $C'_{xпос} = \frac{C_{1x} \cdot C_{2x}}{C_{1x} + C_{2x}}$ .

### **Контрольні запитання**

1. Поясніть будову і принцип дії балістичного гальванометра. Чим відрізняється балістичний гальванометр від звичайного? Який фізичний зміст балістичної сталої?

2. Вектори напруженості й індукції електростатичного поля. Потенціал електростатичного поля та його зв'язок з напруженістю. Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування для обчислення полів рівномірно заряджених нитки та площини.

3. Діелектрики, їх типи та властивості. Діелектрична проникність і сприйнятливність. Поле на поверхні діелектрика. Сегнетоелектрики та п'єзоелектрики.

4. Що називають електроємністю? Одиниці вимірювання електроємності. Конденсатори. Електроємність плоского та циліндричного конденсаторів. Енергія зарядженого конденсатора. Густина енергії. Енергія електростатичного поля.

5. Паралельне та послідовне з'єднання конденсаторів. Виведіть формули для послідовного і паралельного з'єднання конденсаторів.

6. Методи вимірювання електроємності.

7. Поясніть можливі причини розходження розрахункових (теоретичних) і отриманих в роботі значень ємності конденсатора.

Таблиця 1 – Визначення балістичної сталої гальванометра

Номер досліджу	$C_e, \Phi$	$U, B$	$N$	$q, Кл$	$A, Кл/рад$	$\epsilon_A, \%$	
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

Таблиця 2 – Визначення ємності конденсаторів

Номер досліджу	$U_e, B$	$N_e$	$U_x, B$	$N_x$	$C_x, \Phi$	$\Delta C_x, \Phi$	$\epsilon_c, \%$	
$C_{1x}$								
1								
2								
3								
С. зн.	-	-	-	-				
					$C_{2x}$			
1								
2								
3								
С. зн.								
$U_e, B$	$N_e$	$U_x, B$	$N_x$	$C_x, \Phi$	$\Delta C_x, \Phi$	$\epsilon_c, \%$	$C'_x, \Phi$	
Паралельне з'єднання конденсаторів								
1								
2								
3								
С. зн.	-	-	-	-				
Послідовне з'єднання конденсаторів								
1								
2								
3								
С. зн.	-	-	-	-				

## Лабораторна робота 2–2. Визначення ємності конденсаторів методом містка змінного струму

*Прилади і матеріали:* 1) розбірний міст Сотті; 2) набір конденсаторів; 3) розбірний плоский конденсатор із твердим діелектриком.

*Мета роботи:* освоїти методи вимірювання ємності і набути навичок визначення відносної діелектричної проникності.

### Теоретичні відомості та опис приладів

**Електроємність провідників. Конденсатори.** Досліди показують, що із збільшенням заряду на відокремленому електропровідному тілі зростає його потенціал. Водночас різні тіла, яким надано однакові заряди, набувають неоднакових потенціалів. Але для кожного зарядженого тіла відношення заряду до його потенціалу є сталою величиною:

$$\frac{q}{\varphi} = C. \quad (1)$$

Будь-яка зміна заряду  $\Delta q$  спричиняє відповідну зміну потенціалу на величину  $\Delta\varphi$ , так що

$$\frac{\Delta q}{\Delta\varphi} = C. \quad (2)$$

Коефіцієнт пропорційності  $C$  між зарядом (або зміною заряду) та потенціалом (або зміною потенціалу) провідника називають електроємністю. Якщо у формулі

$$\Delta q = C\Delta\varphi \quad (3)$$

покласти, що  $\Delta\varphi = 1$ , то  $C = |\Delta q|$ . Отже, електроємність відокремленого провідника дорівнює тій кількості електрики (в кулонах), яку потрібно передати провіднику, щоб змінити його потенціал на одиницю.

У Міжнародній системі одиниць електроємність провідників вимірюють у фарадах (Ф):

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{K}{V} = \Phi.$$

Отже, за одиницю електроємності 1 фарада в СІ беруть електроємність такого провідника, у якого зміна заряду на 1 кулон викликає зміну потенціалу на 1 вольт.

Фарада – дуже велика одиниця електроємності. Тому на практиці широко користуються похідними одиницями, а саме:

1 мікрофарада ( $\mu\text{кФ}$ ) =  $10^{-6}$  ф, 1 пікофарада ( $\text{пФ}$ ) =  $10^{-12}$  ф.

Оскільки потенціал поверхні тіла сферичної форми визначається за формулою

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}, \quad (4)$$

то електроємність відокремленого сферичного провідника дорівнює:

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R, \quad (5)$$

де  $R$  – радіус сфери (кульки),

$\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища, в якому знаходиться провідник,

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – діелектрична стала.

Ця формула дає підставу стверджувати, що електроємність відокремлених провідників не залежить від хімічної природи речовини провідника, його агрегатного стану, а визначається тільки їх розмірами і формою та залежить від діелектричної проникності середовища, яке оточує провідник.

Систему з двох близько розміщених один від одного провідників, розділених тонким шаром діелектрика, яка призначена для збільшення електроємності, називають *конденсатором*. Як правило, провідники, що утворюють конденсатор, мають форму пластин різної конфігурації, які називають *обкладками*. Одна з обкладок заряджається позитивно, друга – негативно.

Електричне поле конденсатора зосереджене між його обкладками, тобто в малому об'ємі. Тому наявність інших тіл (провідників) біля конденсатора практично не впливає на його електроємність.

Електроємність конденсатора  $C$  визначається відношенням заряду  $q$  на одній його обкладці до різниці потенціалів  $U$  між обкладками:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (6)$$

За формою пластин конденсатори бувають плоскі, циліндричні, сферичні та ін. Залежно від діелектрика між обкладками, конденсатори поділяють на повітряні, паперові, слюдяні, керамічні, електролітичні. Розрізняють конденсатори сталої та змінної ємності. Конденсатори змінної ємності дають змогу плавно регулювати електроємність зміною робочої площі обкладок конденсатора. Робочою називають ту частину площі однієї обкладки конденсатора, яка перекривається іншою обкладкою.

Залежно від типу конденсатора напруженість електричного поля між його обкладками визначається за різними формулами. Наприклад, між обкладками плоского конденсатора поле однорідне. Його напруженість  $E$

залежить від різниці потенціалів  $U$  та відстані  $d$  між обкладками, а саме:

$$E = \frac{U}{d} . \quad (7)$$

Крім електроємності, важливою характеристикою конденсатора є його робоча напруга  $U_{роб}$ . У разі перевищення номінальної робочої напруги електричне поле між обкладками конденсатора може досягти такої величини, що настане електричний пробій поляризованого діелектрика і конденсатор вийде з ладу.

**Плоский конденсатор.** Якщо обкладки конденсатора мають форму двох паралельних між собою площин, то його називають плоским. Розглянемо плоский конденсатор, в якого площа кожної пластини  $S$ , а простір між ними заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю  $\epsilon$  (рис. 1).

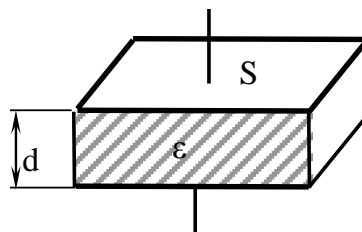


Рисунок 1 – Плоский конденсатор

За означенням електроємності маємо:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} . \quad (8)$$

Поверхнева густина заряду чисельно дорівнює величині електричного заряду, який зосереджений на одиничній площадці поверхні провідника

$$\sigma = \frac{q}{S} .$$

Заряд конденсатора  $q$  визначимо через поверхневу густина  $\sigma$  вільних зарядів на його обкладці з робочою площею  $S$  :

$$q = \sigma S . \quad (9)$$

Визначимо різницю потенціалів електричного поля в діелектрику через напруженість

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed . \quad (10)$$

Напруженість поля в діелектрику конденсатора пов'язана з його діелектричною проникністю та поверхневою густиною заряду на обкладках конденсатора формулою

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} . \quad (11)$$

Підставляючи у вираз (8) замість заряду і різниці потенціалів їхні значення, дістанемо формулу для обчислення електроємності плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} . \quad (12)$$

У загальному випадку діелектрик між обкладками конденсатора може бути шаруватим, тобто складатися з кількох шарів різних речовин із неоднаковими діелектричними проникностями :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\sum d_i / \varepsilon_i} . \quad (13)$$

Щоб збільшити електроємність плоского конденсатора, потрібно, зокрема, збільшити робочу площу обкладок. Для цього кожному з обкладок конденсатора виготовляють із кількох пластин, розділених шарами діелектрика.

**Циліндричний конденсатор.** Дві металеві трубки різних радіусів, вставлені одна в одну коаксіально і розділені шаром діелектрика, утворюють циліндричний конденсатор. Припустимо, що внутрішня обкладка радіуса  $R_1$  заряджена позитивно з лінійною густиною заряду  $\tau$  ( $\tau = \frac{q}{l}$  – лінійна густина заряду чисельно дорівнює величині електричного заряду, який припадає на одиницю довжини провідника), а зовнішня – радіуса  $R_2$  – негативно. Негативний заряд зовнішнього циліндра, як впливає з теореми Остроградського–Гаусса, електричного поля всередині конденсатора не створює. Отже, поле в діелектрику циліндричного конденсатора створюється тільки позитивним зарядом внутрішнього циліндра.

Різницю потенціалів між обкладками циліндричного конденсатора можна обчислити за формулою:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} . \quad (14)$$

Якщо довжина циліндричного конденсатора  $l$ , то

$$C = \frac{\tau l}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2 / R_1)} . \quad (15)$$

**Сферичний конденсатор.** Обкладки такого конденсатора являють собою дві концентричні електропровідні сфери з різними радіусами, розділені тонким шаром діелектрика. Припустимо, що позитивний заряд розміщується на внутрішній сфері. Тоді такий самий за величиною

негативний заряд з'являється на зовнішній обкладці. Негативний заряд зовнішньої сфери, як випливає з теореми Остроградського-Гаусса, електричного поля всередині конденсатора не створює. Отже, поле в зазорі між обкладками сферичного конденсатора створюється тільки позитивним зарядом внутрішньої сфери. Для сферичного конденсатора з внутрішньою сферою радіусом  $R_1$  і зовнішньою радіусом  $R_2$  електрична ємність визначається за формулою:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1). \quad (16)$$

**З'єднання конденсаторів.** Паралельне з'єднання конденсаторів (рис. 2). При паралельному загальна ємність батареї конденсаторів

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_i + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i \quad (17)$$

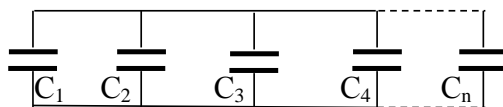


Рисунок 2 – Паралельне з'єднання конденсаторів

Послідовне з'єднання конденсаторів (рис. 3). У випадку послідовного з'єднання загальна електрична ємність батареї конденсаторів визначається із рівняння:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_i} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (18)$$

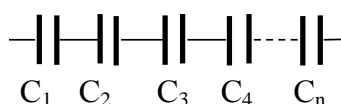


Рисунок 3 – Послідовне з'єднання конденсаторів

Наприклад, для трьох послідовно з'єднаних конденсаторів маємо:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1 C_2 C_3} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}.$$

Ємність конденсаторів здебільшого визначається експериментально.

До основних експериментальних методів вимірювання можна віднести такі методи: порівняння; мостовий та резонансний методи.

**Енергія зарядженого конденсатора.** Для того, щоб надати конденсатору заряд  $dq$ , необхідно виконати елементарну роботу  $dA = U dq$ .

Оскільки  $U = q/C$ , то  $dA = \frac{1}{C} q dq$ . Повна робота виконана під час заряджання конденсатора дорівнює

$$A = \int_0^q \frac{1}{C} q dq = \frac{q^2}{2C}. \quad (19)$$

За законом збереження енергії робота  $A$ , виконана під час заряджання конденсатора, витрачається на збільшення його енергії  $w$ . Отже, енергія зарядженого конденсатора дорівнює

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Uq}{2}. \quad (20)$$

Величина  $w$ , що визначає енергію електричного поля, локалізовану в одиниці об'єму простору, називається густиною енергії електростатичного поля.

$$w = \frac{W}{V}. \quad (21)$$

Знайдемо густину енергії між обкладками плоского конденсатора.

Враховавши, що  $W = \frac{CU^2}{2}$ ,  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ ,  $U = E \cdot d$ ,  $V = s \cdot d$  із (1.21) маємо:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \quad (22)$$

Легко показати, що густина енергії довільного електростатичного поля дорівнює

$$w = \frac{DE}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (23)$$

де  $E$  – модуль вектора напруженості електростатичного поля,

$D = \varepsilon_0 \varepsilon E$  – модуль вектора електростатичної індукції  $\vec{D}$ .

Отже, енергія електростатичного поля, що локалізована у об'ємі  $V$  становить:

$$W = w \cdot V, \text{ якщо } w = const; \quad (24)$$

$$W = \int_V w dV, \text{ якщо } w \neq const. \quad (25)$$

**Конденсатор в колі змінного струму.** Конденсатор у електричному колі змінного струму є реактивним опором. Роль опору відіграє величина

$$X_c = \frac{1}{\omega C}, \quad (26)$$

де  $X_c$  – реактивний опір конденсатора в колі змінного струму,

$C$  – електроємність конденсатора,

$\omega$  – циклічна частота струму.

Напруга на конденсаторі за фазою відстає від струму на кут  $90^\circ$  (рис. 4).

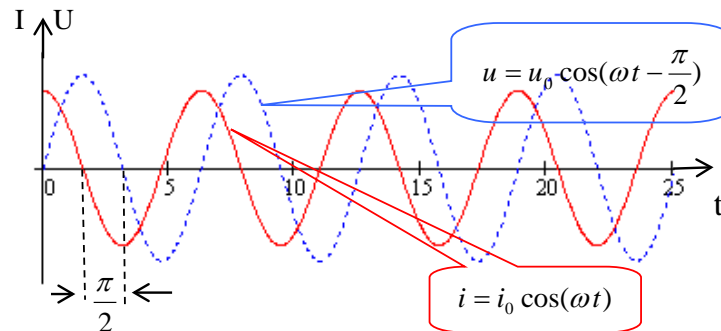


Рисунок 4 – Зсув фаз між струмом та напругою на конденсаторі

Широкого практичного застосування для вимірювання ємності конденсаторів набув метод містка змінного струму. Він має ряд переваг над іншими методами, наприклад: забезпечує високу точність вимірювання; дає змогу за допомогою лише одного еталонного конденсатора вимірювати ємності, які за своїми величинами відрізняються на один-два порядки та ін.

Зручним для вимірювання є метод зрівноваженого містка, принципову схему якого наведено на рис. 5.

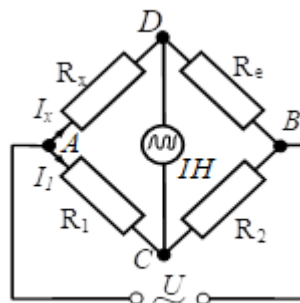


Рисунок 5 – Місток змінного струму

До точок  $A$  і  $B$  підводиться напруга частотою 100-1000 Гц. У гілках  $AC$  і  $AD$  виникають відповідно струми  $I_1, I_x$ . Опори  $R_x, R_1, R_2, R_e$  можна підібрати так, щоб у вітці  $CD$  не було струму. В діагональ містка  $CD$  включено індикатор нуля змінного струму (осцилограф, ламповий вольтметр, телефон). Тоді спади напруги на ділянках  $AC$  і  $AD$  будуть однаковими як за величиною, так і за фазою. За цих умов у гілках  $AC$  і  $CB$  проходить струм  $I_1$ , а у гілках  $AD$  і  $DB$  – струм  $I_x$ . Опори  $R_x, R_1, R_2, R_e$  можуть бути активні, реактивні (ємнісні або індуктивні) чи комплексні. Один із опорів невідомий. Можна показати, що умовами рівноваги містка є

рівність між собою добутоків повних опорів і сум фазових кутів між струмом і напругою протилежних плечей містка, тобто:

$$R_x R_2 = R_1 R_e, \quad (27)$$

$$\varphi_x + \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_3, \quad (28)$$

де  $\varphi$  – зсув фаз між струмом і напругою.

Умови рівноваги для містка змінного струму, як видно, складаються з двох рівнянь: (27) і (28). Це пояснюється тим, що напруги на опорах  $R_x, R_1$  мають збігатися як за амплітудою, так і за фазою.

Умову (27) завжди можна реалізувати підбором опорів плечей містка. Виконання умови (28) залежить від правильності вибору схеми містка. Якщо гілка АСВ містить лише активні (резистивні, омичні) опори, а гілка АDB реактивні опори конденсаторів, то умова (28) виконується

На рисунках 6 і 7 наведено типові схеми містків для вимірювання ємності.

В плече  $R_x$  містка включають невідому конденсатор  $C_x$  (рис. 6). Оскільки, реактивний опір конденсатора в колі змінного струму  $X = \frac{1}{\omega C}$ ,

то значення реактивних опорів конденсаторів становлять  $X_x = \frac{1}{\omega C_x}$ ,  $X_e = \frac{1}{\omega C_e}$ . Місток

врівноважується за допомогою зміни еталонної ємності  $C_e$  і опорів  $R_1, R_2$  доти, доки у гілці  $CD$  не зникне струм. Із (1) замінивши  $R_x, R_e$  на їх значення  $X_x, X_e$  маємо :

$$\frac{R_2}{\omega C_x} = \frac{R_1}{\omega C_e},$$

$$C_x = C_e \frac{R_2}{R_1}. \quad (29)$$

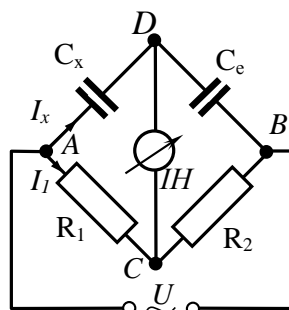


Рисунок 6 – Місток змінного струму

На рис. 7 наведено схему містка Сотті, особливістю якої є застосування реохорда  $R_1R_2$  і сталої ємності (еталонний конденсатор  $C_e$ ). Якщо замість реохорда містка застосувати однорідний дріт з великим питомим опором  $\rho$  то,

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S}; \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S}, \quad (30)$$

де  $l_1, l_2$  – довжина плечей  $AC$  і  $CB$  реохорда.

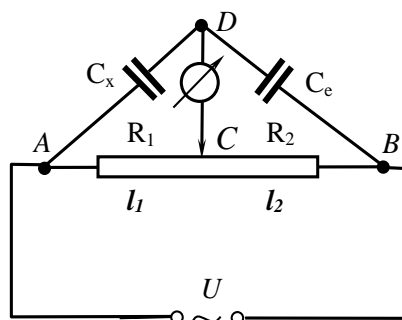


Рисунок 7 – Місток Сотті з реохордом

Із рівнянь 29 і 30 отримаємо робочу формулу для розрахунку електричної ємності конденсатора:

$$C_x = C_e \frac{l_2}{l_1}. \quad (31)$$

Знаючи геометричні розміри конденсатора, можна знайти відносну діелектричну проникність діелектрика. Розглянемо плоский конденсатор. Із рівнянь (1–12) маємо:

$$\varepsilon = C_x \frac{d}{\varepsilon_0 S}, \quad (32)$$

де  $d$  – відстань між обкладками конденсатора,

$S$  – загальна площа однієї пластини,

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала.

В реальному конденсаторі певна частка зарядів виходить на торці та краї зовнішніх поверхонь обкладок, створюючи невелике «крайове» поле поза конденсатором (рис. 8), тобто частина електричних зарядів розміщується на торцях пластин і електростатичне поле розсіюється за межами конденсатора. Для підвищення точності визначення відносної діелектричної проникності діелектрика плоского конденсатора необхідно врахувати поправку на ємність крайового ефекту  $C_k$ , яка враховує розсіювання електричного поля за межами обкладок плоского конденсатора. Значення поправки на ємність крайового ефекту  $C_k$  наведено в паспорті лабораторної установки.

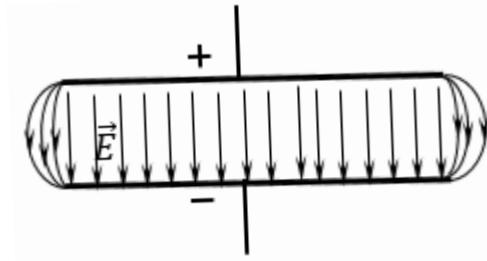


Рисунок 8 – Крайовий ефект

З урахуванням ємності крайового ефекту  $C_k$  маємо:

$$\varepsilon = (C_x - C_k) \frac{d}{\varepsilon_0 S}, \quad (33)$$

Якщо, лінійні розміри плоского конденсатора значно більші, ніж відстань між його обкладками, діелектрик конденсатора не виступає за межі його пластин і відносна діелектрична проникність діелектрика конденсатора значно більша відносної діелектричної проникності повітря  $\varepsilon_c \gg \varepsilon_n$ , то  $C_x \gg C_k$  й для визначення відносної діелектричної проникності можна застосувати формулу (32).

### ***Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту***

1. Виміряти електричні ємності конденсаторів мультиметром. Дані занести в табл. 1

Скласти електричну схему для вимірювання ємностей конденсаторів методом містка Соті (рис. 7).

2. Переміщуючи повзунок реохорда досягти положення, за якого на осцилограф надходить мінімальний сигнал (найточніші виміри будуть за  $l_1 \approx l_2$ , для цього необхідно вдало підібрати  $C_e$ ). Провести не менше трьох вимірювань для різних значень  $C_e$ . За формулою (31) розрахувати ємність невідомого конденсатора. Дослід повторити для трьох інших конденсаторів з невідомою ємністю. Дані занести в табл. 1. З'єднати  $C_{x1}$  і  $C_{x2}$  паралельно. Виміряти їх ємності. Дані занести в таблицю. Провести аналогічні досліди для послідовного з'єднання конденсаторів  $C_{x3}$  і  $C_{x4}$ .  
Перевірити закони послідовного і паралельного з'єднань конденсаторів.

3. Порівняти електроємності конденсаторів, отримані в п.1 і 2.

4. Оцінити похибку вимірювання електричної ємності конденсатора.

5. Виміряти геометричні розміри плоских конденсаторів із сегнетоелектриком. Визначити ємність кожного плоского конденсатора за допомогою мультиметра та розрахувати відносну діелектричну проникність сегнетоелектрика, оцінити похибку відносної діелектричної проникності. Дані занести в таблицю 2.

Таблиця 1 – Визначення ємності конденсаторів

Номер досліду	Вимірювання електроємності мультиметром $C'_x$ , мкф	$C_e$ , мкф	$l_1$	$l_2$	Вимірювання електроємності мостом Сотті $C_x$ , мкф	$\Delta C_x$ , мкф	$\epsilon_c$ , %
1	2	3	4	5	6	7	8
$C_{x_1}$							
1							
2							
3							
С.зн.		–	–	–			
$C_{x_2}$							
1							
2							
3							
С.зн.		–	–	–			
$C_{x_3}$							
1							
2							
3							
С.зн.	–	–	–				
$C_{x_4}$							
1							
2							
3							
С.зн.	–	–	–				
Паралельне з'єднання конденсаторів $C_{x_1}, C_{x_2}$							
1							
2							
3							
С. н.							
Послідовне з'єднання конденсаторів $C_{x_3}, C_{x_4}$							
1							
2							
3							
С.зн.	–	–	–				

Таблиця 2 – Визначення відносної діелектричної проникності сегнетоелектрика

Номер досліджу	S	d	C	$\epsilon$	$\Delta\epsilon$	Відносна похибка %
$C'_{x_1}$						
1						
2						
3						
С. зн.						
$C'_{x_2}$						
1						
2						
3						
С. зн.						
$C'_{x_3}$						
1						
2						
3						
С. зн.						

### **Контрольні запитання**

1. Вектори напруженості й індукції електростатичного поля. Потенціал електростатичного поля та його зв'язок з напруженістю. Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування для обчислення полів рівномірно заряджених нитки та площини.

2. Діелектрики, їх типи та властивості. Діелектрична проникність і сприйнятливність. Поле на поверхні діелектрика. Сегнетоелектрики та п'єзоелектрики.

3. Що називають електроємністю? Одиниці вимірювання електроємності. Електроємність одинокого провідника та від чого вона залежить?

4. Конденсатори. Електроємність плоского, циліндричного та сферичного конденсаторів. Енергія зарядженого конденсатора. Густина енергії електростатичного поля. Енергія електростатичного поля.

6. Паралельне та послідовне з'єднання конденсаторів. Виведіть формули ємності паралельного та послідовного з'єднання конденсаторів.

7. Методи вимірювання електроємності. Як працює місток Сотті?

8. Що таке «крайовий ефект» і за якої умови ним можна знехтувати?  
Чи в усіх типах конденсаторів він спостерігається?
9. Пояснити можливі причини розходження розрахункових (теоретичних) і отриманих в роботі значень ємності конденсатора.
10. Принцип роботи та основні характеристики електровимірювальних приладів.

Література: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11]

## Лабораторна робота 2–5. Визначення електрорушійної сили джерела струму

*Прилади та матеріали:* нормальний елемент, набір гальванічних елементів з невідомими ЕРС джерел живлення, амперметр, вольтметр, гальванометр набір опорів, перемикач, набір з'єднувальних провідників.

*Мета роботи:* набути навичок визначення е.р.с. джерела струму.

### Теоретичні відомості

*Метод вольтметра та амперметра.* Найпростішим для визначення електрорушійної сили джерела  $E$  та його внутрішнього опору  $r$  є метод вольтметра та амперметра (рис. 1).

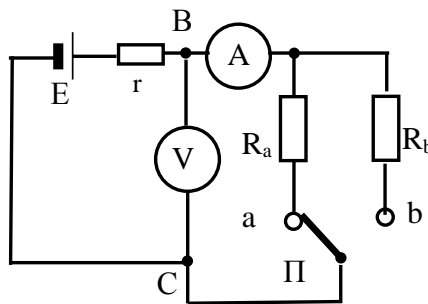


Рисунок 1 – Електрична схема лабораторної установки

За законом Ома для повного кола для двох різних зовнішніх опорів  $R_a, R_b$  маємо:

$$\begin{cases} E = I_a r + I_a R_a + I_a r_A = I_a r + U_a \\ E = I_b r + I_b R_b + I_b r_A = I_b r + U_b \end{cases}, \quad (1)$$

де  $U_a = I_a R_a + I_a r_A$ ,  $U_b = I_b R_b + I_b r_A$  – напруга на ділянці зовнішнього кола для положень «а» і «b» перемикача П),

$I_a, I_b$  – сила струму в електричному колі.

Із системи рівнянь (1) випливає:

$$r = \frac{U_b - U_a}{I_a - I_b}, \quad (2)$$

$$E = U_a + \frac{I_a}{I_a - I_b} (U_b - U_a) = U_a + I_a r. \quad (3)$$

Метод вольтметра та амперметра має невисоку точність, це спричинено тим, що амперметр та вольтметр мають свої внутрішні опори. На електричній схемі (рис. 1) значення внутрішнього опору амперметра  $r_A$  автоматично враховується, тому що вольтметром вимірюється напруга на ділянці ВС, на якій амперметр і один із резисторів  $R_a$  або  $R_b$  з'єднано послідовно. Внутрішній опір вольтметра великий  $r_V \gg R_a, r_V \gg R_b$ . Сила

струму у колі вольтметра буде досить мала.

$$I_{va} = \frac{U_a}{r_V}, \quad I_{vb} = \frac{U_b}{r_V}$$

де  $U$  – покази вольтметра,

$r_V$  – внутрішній опір вольтметра.

Для випадків, коли необхідно знати електрорушійну силу джерела з високою точністю, необхідно врахувати струм у гілці вольтметра (рис. 2).

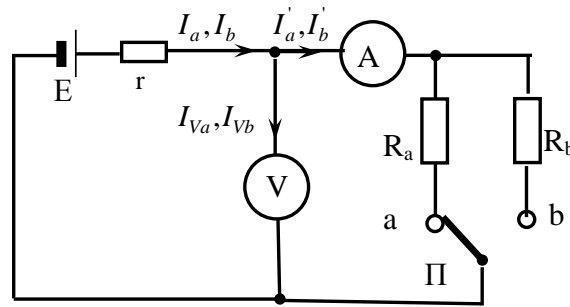


Рисунок 2 – Електрична схема установки з врахуванням струму вольтметра

$$I_{va} = \frac{U_a}{r_V}, \quad I_{vb} = \frac{U_b}{r_V}, \quad (4)$$

За першим правилом Кірхгофа

$$I_a = I'_a + I_{va}, \quad (5)$$

$$I_b = I'_b + I_{vb}, \quad (6)$$

де  $I_a, I_b$  – сила струму на нерозгалуженій ділянці електричного кола,

$I'_a, I'_b$  – відповідно сили струмів у гілках резисторів  $R_a$  і  $R_b$ .

Із врахуванням струму у гілці вольтметра система рівнянь (1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} E = I_a r + I'_a R_a + I'_a r_A = (I_{va} + I'_a) r + U_a, \\ E = I_b r + I_b R_b + I_b r_A = I_b r + U_b \end{cases}, \quad (7)$$

де  $U_a = I_a R_a + I_a r_A$ ,  $U_b = I_b R_b + I_b r_A$  – напруга на ділянці зовнішнього кола за положень «а» і «b» перемикача П.

Із рівнянь (4, 5, 6, 7) маємо:

$$\begin{cases} E = \left( \frac{U_a}{r_V} + I'_a \right) r + U_a \\ E = \left( \frac{U_b}{r_V} + I'_b \right) r + U_b \end{cases}, \quad (8)$$

Із системи рівнянь (8) випливає:

$$r = \frac{(U_b - U_a) r_V}{(U_a - U_b) + (I_a - I_b)}, \quad (9)$$

$$E = U_a + \left( \frac{U_a}{r_v} + I_a \right) r, \quad (10)$$

$$E = U_b + \left( \frac{U_b}{r_v} + I_b \right) r. \quad (11)$$

Рівняння (10, 11) еквівалентні.

*Компенсаційний метод.* Для досягнення високої точності під час вимірювання е.р.с. користуються компенсаційним методом, який зводиться до порівняння е.р.с. двох джерел.

Еталонним джерелом, е.р.с. якого відома, є ртутно–кадмієвий нормальний елемент. Він складається із скляної посудини, в нижній частині якої впаяно платинові електроди (рис. 3). Позитивний полюс – ртуть, негативний – амальгама кадмію. Електролітом є насичений розчин  $\text{CdSO}_4$ , як деполяризатор використовується сульфат ртуті  $\text{HgSO}_4$ .

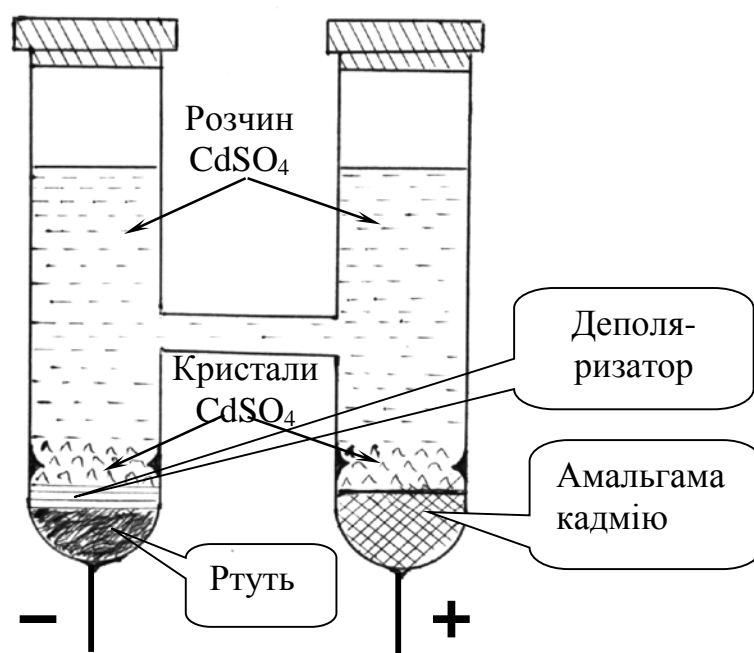


Рисунок 3 – Нормальний елемент

Е.р.с. такого елемента має стабільне значення у межах 1,0185–1,0187 В для насичених і 1,0185–1,0195 В для ненасичених елементів. Основною властивістю нормального елемента є його висока стабільність. Під час проходженні значних струмів елемент легко поляризується і його е.р.с. стає нестабільною. Поновлення стабільності потребує значного часу.

Принципову схему установки зображено на рис. 4.

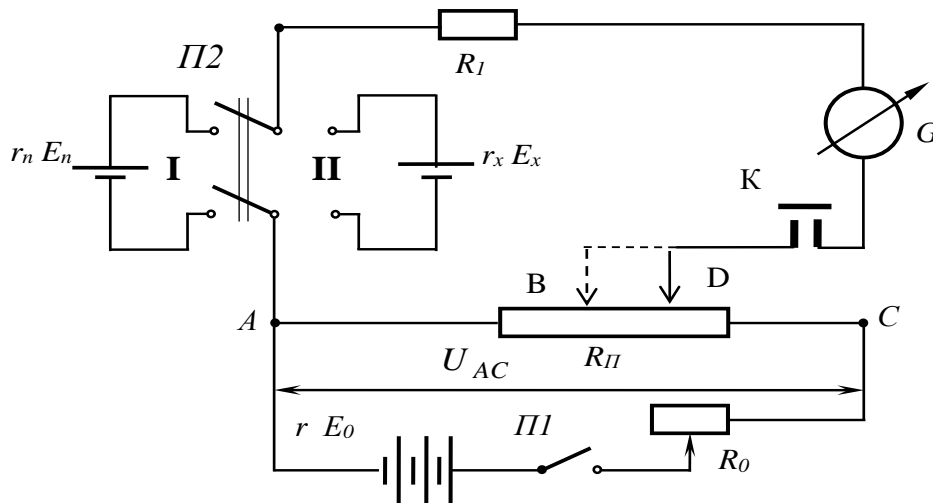


Рисунок 4 – Електрична схема лабораторної установки

Джерело струму, е.р.с. якого більша ніж е.р.с. нормального елемента і е.р.с. невідомого джерела, вмикається через реостат і замикається за допомогою вимикача на потенціометр  $R_{II}$ . Потенціометр  $R_{II}$  являє собою однорідну калібровану ніхромову дротину з рухомих контактом. Потенціал точки А менший за потенціал точки В ( $\varphi(A) < \varphi(B)$ ). Отже, на ділянці потенціометра АВ існує різниця потенціалів  $\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ , яку можна змінювати від 0 до  $U_{AC}$ . За допомогою перемикача до потенціометра можна підключати по чергово джерело з невідомою е.р.с. або нормальний елемент.

Позитивні полюси нормального елемента і невідомого джерела підключаються через гальванометр і резистор  $R_1$  до рухомого контакту потенціометра  $R_{II}$ . Нехай контакт знаходиться у точці В. Якщо різниця потенціалів  $\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$  не дорівнюватиме е.р.с. досліджуваного джерела, то в колі гальванометра з'явиться струм. Якщо ж різниця потенціалів  $\Delta\varphi_{AB} = E_x$ , то струм у колі гальванометра не протікає ( $I_r=0$ ). Виведемо розрахункову формулу для компенсаційного методу за умови, що струм у колі гальванометра  $I_r=0$ .

Нехай для положення 1 перемикача П2 (рис. 4) сила струму у гілці АС дорівнює  $I$ , відповідно спад напруги на ділянці АВ потенціометра  $R_{II}$  становить:

$$U_n = \varphi_A - \varphi_B = IR_{AB}. \quad (12)$$

Оскільки струм через нормальний елемент не протікає, то е.р.с. нормального елемента дорівнює

$$E_n = IR_{AD}. \quad (13)$$

За положення II перемикача П2 спад напруги на ділянці  $AD$  потенціометра  $R_{\Pi}$  становить

$$U_X = \varphi_A - \varphi_D = IR_{AD}, \quad (14)$$

а відповідно е.р.с. невідомого джерела

$$E_x = IR_{AD}. \quad (15)$$

Розділимо рівняння (15) на (14):

$$E_x = \frac{IR_{AD}}{IR_{AB}} E_n = \frac{R_{AD}}{R_{AB}} E_n. \quad (16)$$

Оскільки опір ділянки кола однорідної каліброваної дротини потенціометра пропорційний її довжині, то

$$R_{AB} = \frac{\rho}{s} \ell_n, \quad \text{а} \quad R_{AD} = \frac{\rho}{s} \ell_x, \quad \text{то}$$

$$E_x = \frac{\ell_x}{\ell_n} E_n, \quad (17)$$

де  $\ell_n$  – довжина плеча потенціометра  $R_{\Pi}$  за  $I_r=0$  для положення перемикача П2 в положенні I,

$\ell_x$  – довжина плеча потенціометра  $R_{\Pi}$  за  $I_r=0$  для перемикача П2 в положенні II.

### **Порядок виконання роботи**

*Завдання 1. Визначити внутрішній опір та е.р.с. джерела методом вольтметра та амперметра*

1. Скласти електричне коло за схемою рис. 4. Ввімкнути живлення. Записати значення напруги та струмів на резисторах  $R_a, R_b$  у таблицю 1. Дослід провести для кожного із досліджуваних джерел струму по 3 рази.

2. Обчислити е.р.с. та внутрішній опір джерел (формули 2, 3, 9, 10, 11).

3. Порівняти результати розрахунків за формулами (2, 3) і формулами (9, 10, 11).

4. Оцінити похибки  $\gamma, E$ .

*Завдання 2. Визначити е.р.с. джерела методом компенсації*

1. Скласти електричне коло за схемою рис. 4. Ввімкнути живлення.

2. Замкнути коло джерела  $E_0$ , а потім перемикачем П2 (положення «1») – коло нормального елемента. За допомогою потенціометра  $R_{\Pi}$  домогтися відсутності струму в колі гальванометра. Записати значення  $\ell_n$  в таблицю 2. Дослід повторити не менше 3–5 разів.

3. Перевести перемикач П2 в положення П. За допомогою потенціометра  $R_{\Pi}$  домогтися відсутності струму в колі гальванометра. Записати значення  $\ell_x$  в таблицю 2. Дослід повторити не менше 3–5 разів для кожного із досліджуваних джерел струму.
4. За формулою (17) обчислити  $E_x$  джерел, оцінити похибки, порівняти одержані результати з результатами, одержаними в завданні 1.

### **Контрольні запитання**

1. Постійний електричний струм, густина струму, електричний опір, питомий електричний опір, електропровідність, питома електропровідність. З'єднання резисторів.

2. Різниця потенціалів, електрорушійна сила. Закон Ома для однорідної ділянки електричного кола у диференціальній та інтегральній формах, закон Ома для повного кола. Закон Ома для неоднорідної ділянки електричного кола. Закон Джоуля-Ленца у диференціальній та інтегральній формах.

3. Правила Кірхгофа та їх застосування.

4. [Принцип роботи та основні характеристики електровимірювальних приладів.](#)

5. [Визначення е.р.с. джерела струму методом вольтметра та амперметра.](#)

6. [Визначення е.р.с. джерела струму методом компенсації.](#)

7. [Будова та принцип роботи нормального елемента.](#)

Таблиця 1 – Результати експерименту та його обробки, завдання № 1

Номер досліджу	$I_a, A$	$U_a, B$	$I_b, A$	$U_b, B$	$r_v, Om$	$E, B$	$r, Om$
Джерело № 1							
1							
2							
3							
С.зн							
Джерело № 2							
1							
2							
3							
С.зн							
Джерело № 3							
1							
2							
3							
С.зн							

Таблиця 2 – Результати експерименту та його обробки, завдання № 2

E <sub>n</sub> =															
Номер дослідку	Джерело № 1					Джерело № 2					Джерело № 3				
	$l_n$	$l_x$	E <sub>x</sub> , В	ΔE <sub>x</sub> , В	ε, %	$l_n$	$l_x$	E <sub>x</sub> , В	ΔE <sub>x</sub> , В	ε, %	$l_n$	$l_x$	E <sub>x</sub> , В	ΔE <sub>x</sub> , В	ε, %
1															
2															
3															
С.зн.	-	-				-	-				-	-			

Література: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11]

## Лабораторна робота 2–6. Вимірювання опорів і визначення залежності опору міді від температури

*Прилади і матеріали:* 1) розбірний місток Уїтстона (магазин опорів, гальванометр, реохорд, джерело живлення, з'єднувальні провідники), 2) набір опорів, 3) електропіч, 4) термометр, 5) дротяний мідний резистор.

*Мета роботи:* освоїти методику вимірювання опорів методом моста та дослідження температурної залежності опору міді.

### *Теоретичні відомості та опис приладів*

*Електричний опір ділянки кола* – величина, яка чисельно дорівнює відношенню напруги на кінцях цієї ділянки до сили струму в ній. Для постійного струму електричний опір називається активним. Він залежить від матеріалу провідника, його розмірів і форми.

Для однорідного провідника із сталим поперечним перерізом  $S$  довжиною  $l$

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1)$$

де  $\rho$  – питомий опір провідника.

Електричний опір металів істотно залежить від температури. Взагалі, ця залежність має складний характер, але якщо розглядати обмежені інтервали температур, то залежності опору і питомого опору металів від температури описуються лінійними функціями (рис. 1):

$$\begin{aligned} R_t &= R_0(1 + \alpha \Delta t); \\ \rho_t &= \rho_0(1 + \alpha \Delta t) \end{aligned} \quad (2)$$

де  $R_0, \rho_0$  – значення опору і питомого опору за температури  $t_0$ ;

$R_t, \rho_t$  – опір і питомий опір за температури  $t$ ;

$\alpha$  – температурний (термічний) коефіцієнт опору, який є сталим лише для невеликих температурних інтервалів,

$\Delta t = t - t_0$  – різниця температур.

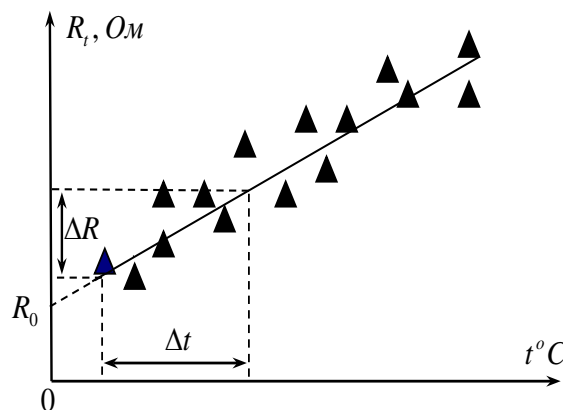


Рисунок 1 – Графік залежності  $R_t = R_0(1 + \alpha \cdot t)$

За  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  різниця температур  $\Delta t = t - t_0 = t$  і рівняння (2) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} R_t &= R_0(1 + \alpha t); \\ \rho_t &= \rho_0(1 + \alpha t) \end{aligned} \quad (3)$$

Для вузьких інтервалів температур ( $\Delta t \sim 100 \dots 300^\circ\text{C}$ )  $\alpha$  і  $R_0$  зручно визначати графічно (рис. 1)  $\alpha = \frac{\Delta R}{\Delta t}$ , але графічний метод має невисоку точність.

На практиці часто для знаходження невідомих параметрів залежності  $\alpha$  і  $R_0$  використовують метод найменших квадратів (МНК). Він дає змогу підібрати такі параметри залежності (2), за яких сума квадратів відхилень експериментальних значень від теоретичних (обчислених за отриманим рівнянням) буде найменшою.

Для лінійної залежності  $y = a + b \cdot x$  система нормальних рівнянь для методу найменших має вигляд:

$$\begin{cases} n \cdot a + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{cases} \quad (4)$$

Для лінійної залежності  $R_t = R_0(1 + \alpha \cdot t)$  система нормальних рівнянь методу найменших квадратів (додаток А) має вигляд

$$\begin{cases} R_0(n + \alpha \sum_{i=1}^n t_i) = \sum_{i=1}^n R_{t_i} \\ R_0(\sum_{i=1}^n t_i + \alpha \sum_{i=1}^n t_i^2) = \sum_{i=1}^n t_i \cdot R_{t_i} \end{cases}, \quad (5)$$

де  $R_{t_i}$  – опір провідника за температури  $t$ ,

$n$  – число пар значень  $t_i, R_{t_i}$ ,

$R_0$  – опір провідника за температури  $t = 0^\circ\text{C}$ ,

$\alpha$  – термічний коефіцієнт опору.

Для знаходження невідомих параметрів  $R_0, \alpha$  залежності  $R_t = R_0(1 + \alpha \cdot t)$  обчислюють суми:  $\sum_{i=1}^n t_i$ ,  $\sum_{i=1}^n R_{t_i}$ ,  $\sum_{i=1}^n t_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n t_i R_{t_i}$ , підставляють їх у систему рівнянь (5), яку розв'язують відносно невідомих параметрів  $\alpha$  і  $R_0$  та будують графік. На графік наносять експериментальні точки з координатами  $t_i, R_{t_i}$  та будують пряму  $R_t = R_0(1 + \alpha \cdot t)$  (рис. 1).

Для більш широких температурних інтервалів термічний коефіцієнт опору залежить від температури, а залежність  $R = f(t)$  нелінійна.

Вивчення температурної залежності опору металів має важливе значення в експериментальній фізиці й особливо в метрології. На властивості металів змінювати опір із зміною температури ґрунтується робота термометрів опору, призначених для вимірювання температури.

*Термометри опору* – це високочутливі прилади, здатні вимірювати різницю температур менш як на 0,001 К. Вони позбавлені цілого ряду недоліків, властивих рідинним термометрам (залежності показів від температури середовища, депресії скла, похибок під час градування тощо), тому термометри опору застосовують в процесі температурних вимірювань у досить широкому інтервалі – від температур поблизу абсолютного нуля до 2000 К.

Найкращим матеріалом для термометрів опору є чиста платина, яка в широкому інтервалі температур стабільно зберігає свої властивості. Крім платини, для виготовлення термометрів опору широко застосовується мідь. Вітчизняна промисловість (зокрема Луцький приладобудівний завод) у широкому асортименті випускає як платинові (індекс типу ТСП), так і мідні (ТСМ) термометри опору. Температурна залежність опору їх добре відома і, вимірявши електричний опір за допомогою містка (як правило, його шкала прокалібрована в одиницях температури), можна точно визначити температуру об'єкта.

В електричних колах резистори (опори) з'єднують між собою паралельно або послідовно.

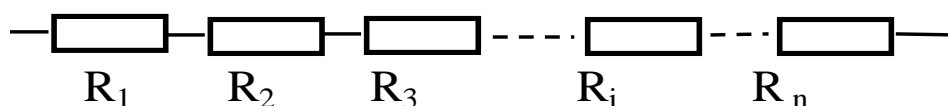


Рисунок 2

У випадку послідовного з'єднання (рис. 2) загальний опір ділянки кола дорівнює сумі опорів окремих резисторів:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_i + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i . \quad (7)$$

У разі паралельного з'єднання (рис. 3) опір ділянки зменшується і його значення можна знайти із рівняння:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} . \quad (8)$$

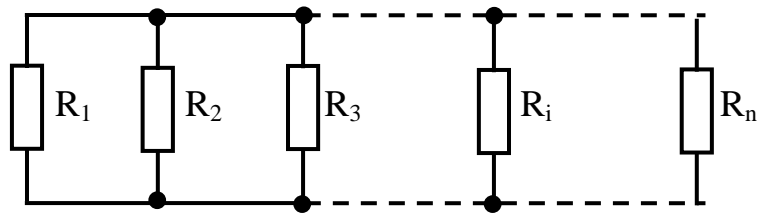


Рисунок 3 – Паралельне з'єднання резисторів

Для вимірювання електричного опору розроблено різноманітні методи. Найбільш поширені із них:

- а) метод визначення опору за допомогою вольтметра та амперметра;
- б) метод омметра;
- в) метод містка постійного струму.

У першому випадку (рис. 4) вимірюють струм  $I$  та спад напруги  $U$  на ділянці кола з ввімкненим невідомим опором  $R$ , а із закону Ома знаходять невідомий опір:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (9)$$

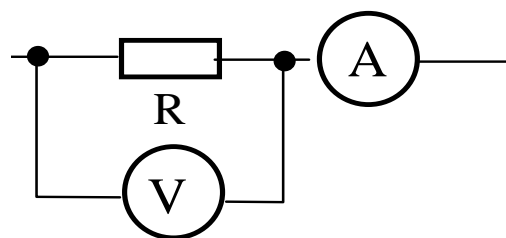


Рисунок 4 – Визначення опору резистора за допомогою вольтметра та амперметра

Точність вимірювання залежить від класу точності вимірювальних приладів та їх внутрішніх опорів.

Омметр – це електровимірювальний прилад для вимірювання опору. Він являє собою мікроамперметр із автономним джерелом живлення. Його шкала прокалібрована не у мікроамперах, а у одиницях опору – омах (Ом). Перед початком вимірювань калібрують прилад і відліки результатів знімають безпосередньо із шкали приладу.

Найточнішим з усіх методів вимірювання опору є метод містка. Цей метод дає змогу вимірювати опори з високою точністю. Точність зумовлена застосуванням змінних зразкових мір опору, з якими порівнюються невідомі опори. Для вимірювання опорів застосовуються одинарні або подвійні мости постійного струму. Одинарні мости, як

правило, застосовуються для вимірювання відносно великих опорів, порядку  $10^6$  Ом, точність вимірювання може сягати 0,001 %.

Подвійні мости застосовуються для вимірювання малих опорів (менше 1 Ом). Це тому, що під час вимірювання малих опорів одинарним мостом виникають великі похибки внаслідок впливу опорів підвідних провідників. За допомогою подвійних містків можна вимірювати опори до  $10^{-6}$  Ом.

Зручною і поширеною містковою схемою є схема *містка Уітстона* (рис. 5). В чотириплечий контур  $ABCD$  ввімкнено опори  $R_1, R_2, R_e, R_x$ , які утворюють так звані плечі містка. Протилежні вершини чотирикутника з'єднують діагоналями, до однієї з яких ввімкнено гальванометр, до другої – джерело струму. Якщо вимикач замкнений, то по гілках  $BD$ ,  $ABC$  і  $ADC$  протікатимуть певні струми. Можна підібрати таке співвідношення плечей, що потенціали  $\varphi_B, \varphi_D$  точок  $B$  і  $D$  будуть однакові. Це означає, що спад напруги на ділянках  $AB$  і  $AD$  та  $BC$  і  $DC$  відповідно буде однаковий:

$$U_x = U_1, U_e = U_2, \quad (10)$$

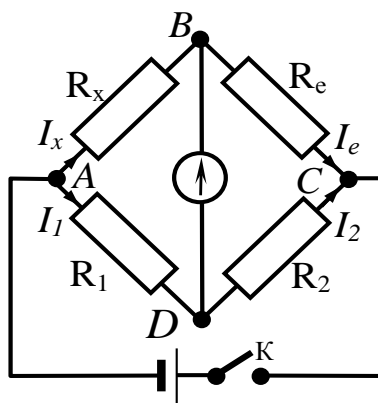


Рисунок 5 – Місток Уітстона

За такого співвідношення між опорамі у вітці  $BD$  струм відсутній, стрілка гальванометра не відхиляється, а співвідношення між струмами у гілках контуру становить

$$I_x = I_e, I_1 = I_2. \quad (11)$$

Знайдемо спад напруги на елементах контуру.

$$\begin{aligned} U_x &= I_x R_x, & U_1 &= I_1 R_1 \\ U_e &= I_e R_e, & U_2 &= I_2 R_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Рівновага містка настає тоді, коли відношення опорів попарно взятих плечей, з'єднаних із кінцями відповідної діагоналі містка, дорівнюють одне одному.

Врахувавши (11), (12) з (10) дістанемо умову рівноваги містка:

$$\frac{I_x R_x}{I_1 R_1} = \frac{I_e R_e}{I_2 R_2} \text{ або } \frac{R_x}{R_1} = \frac{R_e}{R_2}, \text{ звідки } R_x = R_e \frac{R_1}{R_2}. \quad (13)$$

Ділянка  $ABC$  з опором  $R_e$  називається *плечем порівняння*, а ділянка  $ADC$  з опорами  $R_1, R_2$  – *плечем відношення*. Тому метод вимірювання опорів за допомогою містка Уїтстона називається ще *методом порівняння*. У містку Уїтстона в плечі відношення  $ADC$  резистори  $R_1, R_2$  можна замінити реохордом, виготовленим із однорідної дротини з великим питомим опором (рис. 6). Переміщуючи рухомий контакт реохорда, змінюємо відношення  $R_1/R_2$ . Оскільки провідник реохорда однорідний, то можна замінити відношення опорів відношенням довжин ділянок реохорда :

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S}; \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S}; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}, \quad (14)$$

де  $l_1, l_2$  – довжини плеч  $AD$  і  $DB$  реохорда.

Із рівнянь (13) і (14) маємо робочу формулу для розрахунку невідомого опору:

$$R_x = R_e \frac{l_1}{l_2}. \quad (15)$$

Точність вимірювання опорів містком Уїтстона визначається точністю еталонного опору  $R_e$ , граничною чутливістю гальванометра, точністю регулювання та відліку плеч реохорда  $l_1, l_2$ .

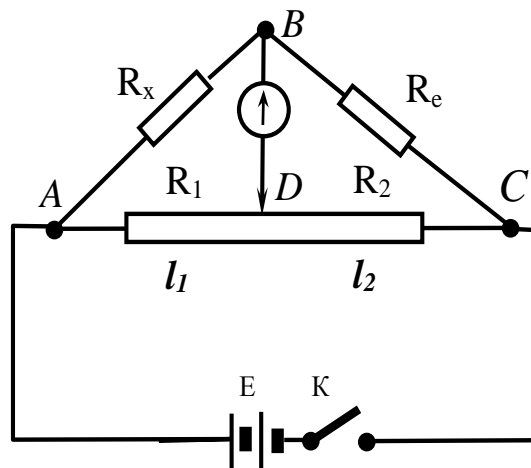


Рисунок 6 – Місток Уїтстона з реохордом

### **Порядок виконання роботи**

#### **Завдання 1. Вимірювання опорів містком Уїтстона**

1. Скласти електричне коло за схемою (рис. 6).
2. Встановити рухомий контакт  $D$  по середині реохорда.

3. Замкнути на короткий час перемикач К.

4. Зменшуючи або збільшуючи опір еталонного магазину, домогтися того, щоб стрілка гальванометра відхилилась вліво або вправо в межах шкали. Переміщуючи рухомий контакт D реохорда, зрівноважити місток (у цьому разі струм у колі гальванометра дорівнює нулю, найменша похибка під час вимірювання опору буде за співвідношення  $l_1 \approx l_2$ ). Записати до таблиці 1 значення еталонного опору ( $R_e$ ) і довжини плечей реохорда  $l_1, l_2$ .

5. Вимірювання повторити 3-5 разів, щоразу змінюючи опір еталонного магазину на  $\pm 10 \div 20$  % від попереднього значення.

6. Підрахувати невідомий опір за формулою (15). Оцінити похибку вимірювання. Дослід провести з резисторами  $R_{x1}, R_{x2}, R_{x3}, R_{x4}$ .

7. Перевірити закони для послідовного та паралельного з'єднання опорів (формули 3, 4). Для цього два опори спочатку з'єднати паралельно і виміряти їх опір (див. п. 2–7), а потім з'єднати їх послідовно і провести аналогічні вимірювання.

### *Завдання 2. Дослідження залежності опору металів від температури*

1. Не вмикаючи електропіч, виміряти за кімнатної температури величину опору резистора, виготовленого із мідного дроту. Для спрощення розрахунків плечі реохорда виставити однаковими, місток зрівноважувати зміною величини еталонного опору магазину еталонних опорів. Покази термометра, значення плечей реохорда та еталонного резистора занести в таблицю 2. За  $l_1 = l_2$  із рівняння (15) маємо

$$R_x = R_e \frac{l_1}{l_2} = R_e.$$

2. Ввімкнути піч. Провести вимірювання опору резистора в інтервалі температури печі 20–100 °С з кроком 5–10 К. За досягнення температури 100 °С вимкнути піч та провести аналогічні виміри під час охолодження мідного резистора. Дані занести у таблицю 2.

3. Побудувати графік залежності  $R = f(t)$ . Визначити з графіка  $R_0, \alpha$  (формула 2) для декількох інтервалів температур.

4. Підібрати методом найменших квадратів параметри **залежності**  $R_t = R_0(1 + \alpha t)$  на основі яких визначити  $R_0, \alpha$  для досліджуваного металу (Додаток А).

5. Порівняти результати, отримані у п. 3 і 4. Зробити висновки

### ***Контрольні питання***

1. Постійний електричний струм, густина струму, електричний опір, питомий опір, залежність опору металів від температури. Електропровідність, питома електропровідність.

2. Різниця потенціалів, напруга, електрорушійна сила. Закон Ома для однорідної ділянки електричного кола у диференціальній та інтегральній формах, закон Ома для повного кола. Закон Ома для неоднорідної ділянки електричного кола. Закон Джоуля-Ленца у диференціальній та інтегральній формах.

3. [З'єднання опорів.](#)

4. [Правила Кірхгофа та методика \(алгоритм\) їх застосування.](#)

5. [Принцип роботи та основні характеристики електровимірювальних приладів.](#)

6. [Методи вимірювання опорів. Особливості вимірювання опорів містковими методами.](#)

7. [Принцип роботи схеми містка Уїтстона. За якого положення рухомого контакту точність вимірювання містком Уїтстона максимальна?](#)

8. [Метод найменших квадратів для лінійної залежності. Суть методу найменших квадратів.](#)

Таблиця 1 – Результати експерименту та його обробки, завдання № 1

Номер досліду	$R_e, \text{Ом}$	$I_1, \text{под.}$	$I_2, \text{под.}$	$R_x, \text{Ом}$	$\Delta R_x, \text{Ом}$	$\varepsilon, \%$
$R_{x_1}$						
1.						
2.						
3.						
С. зн.						
$R_{x_2}$						
1.						
2.						
3.						
С. зн.						
$R_{x_3}$						
1.						
2.						
3.						
С. зн.						
$R_{x_4}$						
1.						
2.						
3.						
С. зн.						
Послідовне з'єднання резисторів $R_{x_1}$ і $R_{x_2}$						
1.						
2.						
3.						
С. зн.						
Паралельне з'єднання резисторів $R_{x_1}$ і $R_{x_4}$						
1.						
2.						
3.						
С. зн.						

Таблиця 2 – Результати експерименту та його обробки, завдання № 2

t, °C	R <sub>e</sub> , Ом	I <sub>1</sub> , под.	I <sub>2</sub> , под.	R <sub>x</sub> , Ом
Нагрівання				
20				
30				
40				
50				
60				
70				
80				
90				
100				
110				
120				
Охолодження				
120				
110				
100				
90				
80				
70				
60				
50				
40				
30				
20				

Література: [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

## Лабораторна робота 2–8

### Вивчення законів Кірхгофа для розгалужених електричних кіл

*Прилади та матеріали:* два джерела живлення, амперметр, вольтметр, набір опорів, перемикач, набір з'єднувальних провідників.

*Мета роботи:* набути навичок розрахунку розгалужених електричних кіл за правилами Кірхгофа.

#### **Теоретичні відомості**

Розглянемо розгалужене електричне коло постійного струму. *Вузлами* або розгалуженнями називаються точки, в яких з'єднано три і більше провідників (рис. 1).

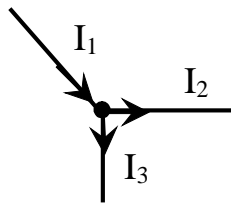


Рисунок 1 – Вузол електричного кола

На електричних схемах вузли позначають великими латинськими літерами. Відповідно електричні кола такого типу називаються *розгалуженими*. Ділянка кола, яка з'єднує два вузли, називається гілкою, а замкнена система гілок називається контуром. Для однозначного визначення контуру по його периметру також ставлять додаткові літери. Якщо у замкненому контурі відсутні джерела, то у більшості випадків такий контур можна замінити еквівалентним резистором. Для розрахунку розгалужених електричних кіл користуються правилами Кірхгофа (німецький фізик Густав-Роберт Кірхгоф, 1824–1887).

**Перше правило Кірхгофа:** алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (1)$$

Струм, який притікає до вузла беруть із знаком «+», а струм, який витікає із знаком «-». Перше правило впливає з умови неперервності постійного струму. В розгалуженому колі постійного струму в окремих гілках кола проходять неперервні струми, а величина електричного заряду, що притікає до будь-якого вузла за довільний проміжок часу, дорівнює величині електричного заряду, що витікає від цього вузла за той самий час.

**Друге правило Кірхгофа:** у довільному простому замкненому контурі розгалуженого кола алгебраїчна сума спадів напруги на окремих ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил,

увімкнених у цей контур.

Це правило стосується простих замкнених контурів, на які можна поділити будь-яке складне розгалужене коло. Його легко вивести, якщо застосувати закон Ома до окремих ділянок простого контуру, наприклад  $ABCD$  (рис. 2), який є складовою частиною розгалуженого кола.

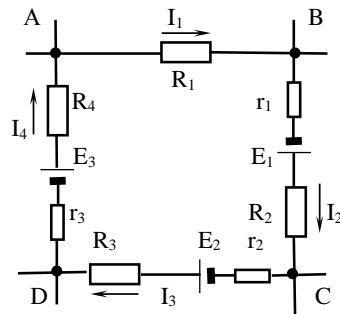


Рисунок 2 – Фрагмент розгалуженого електричного кола

Для кожної з чотирьох ділянок ( $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ) відповідно можна записати:

$$I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B, \quad (2)$$

$$I_2 R_2 + I_2 r_1 = (\varphi_B - \varphi_C) + E_1, \quad (3)$$

$$I_3 R_3 + I_3 r_2 = (\varphi_C - \varphi_D) + E_2, \quad (4)$$

$$I_4 R_4 + I_4 r_3 = (\varphi_D - \varphi_A) + E_3, \quad (5)$$

де  $R, r$  – опори зовнішньої та внутрішньої ділянок замкненого кола. Рівняння (3, 4, 5) називають *законом Ома для ділянки неоднорідного кола*, або *для ділянки, яка містить е.р.с.* Рівняння (2, 3, 4, 5) додамо почленно, маємо:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_2 r_1 + I_3 R_3 + I_3 r_2 + I_4 R_4 + I_4 r_3 = E_1 + E_2 + E_3. \quad (6)$$

Отже, для довільного замкненого простого контуру можна записати:

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i + \sum_{k=1}^M I_k r_k = \sum_{k=1}^M E_k, \quad (7)$$

де  $R_i$  – опір  $i$ -ї гілки контуру,

$I_i$  – сила струму в  $i$ -й гілці контуру,

$N$  – число гілок в контурі,

$E_k$  – електрорушійна сила  $k$ -го джерела,

$r_k$  – внутрішній опір  $k$ -го джерела;

$I_k$  – сила струму, що протікає через  $k$ -те джерело (сила струму, що протікає через  $k$ -те джерело дорівнює силі струму гілки, в яку ввімкнене це джерело, наприклад через джерело  $E_1$  (рис. 2, гілка  $BC$ ) протікає струм  $I_2$ ),

$M$  – число джерел електрорушійних сил в контурі.

Якщо, внутрішній опір джерел значно менший від загального опору

контурі  $\sum_{k=1}^M r_k \ll \sum_{i=1}^N R_i$ , то  $\sum_{i=1}^N I_i R_i \gg \sum_{k=1}^M I_k r_k$  і рівняння за другим правилом Кірхгофа можна подати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{k=1}^M E_k. \quad (8)$$

Отже, система рівнянь за правилами Кірхгофа, записана з врахуванням внутрішніх опорів, має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n I_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N I_i R_i + \sum_{k=1}^M I_k r_k = \sum_{k=1}^M E_k \end{cases}, \quad (9)$$

але якщо внутрішні опори джерел досить малі  $\sum_{k=1}^M r_k \ll \sum_{i=1}^N R_i$ , рівняння, записане за II правилом Кірхгофа, значно спрощується:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n I_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{k=1}^M E_k \end{cases}. \quad (10)$$

Під час розв'язування практичних задач на розрахунки складних (розгалужених) електричних кіл (наприклад, обчислення струмів у гілках розгалуження тощо) за допомогою правил Кірхгофа складають систему рівнянь, кількість яких дорівнює числу шуканих величин. Водночас потрібно стежити, щоб рівняння були незалежними між собою.

Розв'язування задачі проводять за таким алгоритмом:

1. Підраховують число вузлів  $n$  і число гілок  $m$  розгалуженого електричного кола. Довільно визначають напрям струмів у гілках кола для першого вузла, а під час визначення напрямків струмів у наступних вузлах враховують напрямки струмів у попередніх вузлах. Струми, що притікають до вузла, вважають додатними, що витікають, – від'ємними та довільно вибирають напрямки обходу контурів. Керуються такими правилами визначення знаків:

а) якщо технічний напрям струму в ділянці контуру, що має опір  $R$ , збігається з напрямом переміщення вздовж цієї ділянки під час обходу контуру у вибраному напрямі, то спад напруги  $U = IR$  на опорі  $R$  вважають потрібно брати із знаком «+», у протилежному випадку – із знаком «-»;

б) якщо під час обходу контуру у вибраному напрямі доводиться переміщуватися крізь джерело електрорушійної сили так, що потенціал точок контуру зростає (тобто рухатись від негативного полюса до позитивного), то е.р.с. цього джерела потрібно брати із знаком «+», у протилежному випадку – із знаком «-».

2. Складають  $n - 1$  рівняння за першим правилом Кірхгофа і  $m - n + 1$  рівняння за другим правилом Кірхгофа за такою схемою:

а) виділяють вузли розгалуженого кола, і додержуючись правила знаків, складають за першим правилом Кірхгофа  $n - 1$  незалежне рівняння;

б) поділяють складне (розгалужене) коло на прості кола (їх називають контурами); застосовуючи друге правило Кірхгофа до окремих контурів, складають решту  $m - n + 1$  рівняння, причому, рівняння складають так, щоб вони охоплювали всі елементи кола.

3. Підставляють у систему рівнянь відомі величини і розв'язують її відносно невідомих. Якщо під час розв'язування системи рівнянь, складеної за правилами Кірхгофа, дістали від'ємне значення сили струму, то це означає, що його справжній технічний напрямок протилежний показаному на рисунку. Обов'язково перевіряють розв'язок системи рівнянь.

4. Системи лінійних рівнянь розв'язують різноманітними способами: методом підстановки, методом Гаусса, методом оберненої матриці, методом правил Крамера. Якщо система містить 4 і більше рівнянь, то для її розв'язання доцільно застосувати один із пакетів прикладних програм: Mathcad (додаток Б), Matlab, Excel або звернутися до системи ШІ (додаток В).

**Приклад 1.** Знайти струми у гілках електричного кола (рис. 3), якщо:

$E_1=3$  В,  $E_2=7$  В,  $E_3=4$  В,  $E_4=5$  В,  $E_6=10$  В,  $R_1=6$  Ом,  $R_2=3$  Ом,  $R_3=5$  Ом,  $R_4=5$  Ом,  $R_5=2,6$  Ом,  $R_6=4$  Ом,  $R_7=2$  Ом,  $R_8=4$  Ом.

Внутрішні опори джерел:  $r_1=1$  Ом,  $r_2=1$  Ом,  $r_3=1$  Ом,  $r_4=1$  Ом.

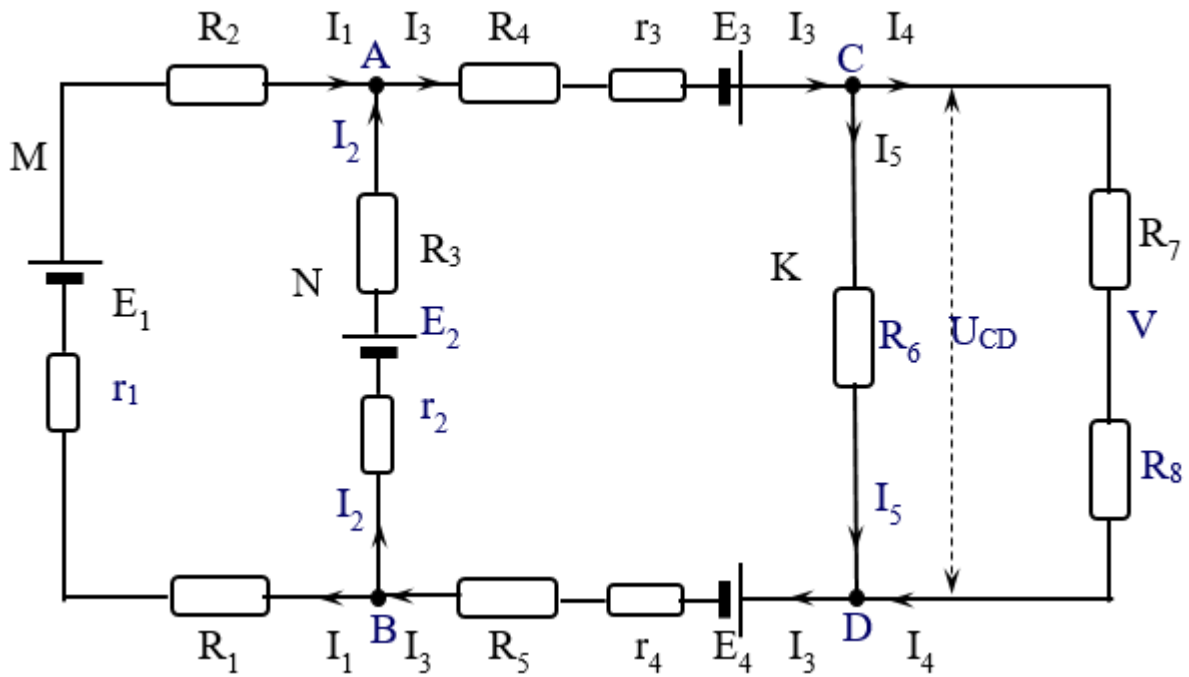


Рисунок 3 – Електрична схема (Приклад 1).

### Розв'язання

Проведемо аналіз електричного кола. Електричне коло (рис. 3) має:  $n = 4$  вузли і  $m = 6$  гілок. У контурі DKCVD відсутні джерела ЕРС. Для електричного кола (рис. 3) необхідно скласти  $n-1=4-1=3$  рівняння за першим правилом Кірхгофа і  $m-n+1=6-4+1=3$  рівняння за другим правилом Кірхгофа. Отже, за правилами Кірхгофа необхідно скласти систему із 6 рівнянь.

Визначаємо напрямки струмів у гілках електричного кола.

Для вузла А напрями струмів вибираємо довільно. Вважаємо, що струми  $I_1, I_2$  входять у вузол А, а струм  $I_3$  виходить.

Для вузла В напрями струмів вибираємо з урахуванням напрямів струмів у вузлі А. Отже, струми  $I_1, I_2$  виходять з вузла В, а струм  $I_x$  виходить. За першим правилом Кірхгофа для вузла В маємо:

$$-I_1 - I_2 + I_x = 0, \quad (11)$$

або

$$I_x = I_1 + I_2. \quad (12)$$

Для вузла А

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

або

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (13)$$

Із рівнянь (11, 12) маємо:

$$I_x = I_1 + I_2 = I_3. \quad (14)$$

Отже, у вузол В входить струм  $I_x = I_3$

Для вузла С струм  $I_3$  входить у вузол, струми  $I_4, I_5$  – виходять.

$$I_3 - I_4 - I_5 = 0. \quad (15)$$

Для вузла D струми  $I_4, I_5$  входить у вузол, струм  $I_3$  – виходить.

$$-I_3 + I_4 + I_5 = 0. \quad (16)$$

Методом еквівалентних перетворень у контурі CVDKC замінимо резистори  $R_6, R_7, R_8$  на їм еквівалентний  $R_{\text{екв}}$ :

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_6 \cdot (R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{4 \cdot (2 + 4)}{4 + 2 + 4} = 2,4 \text{ (Ом)}$$

Після еквівалентних перетворень електрична схема (рис. 3) набуде вигляду (рис. 4):

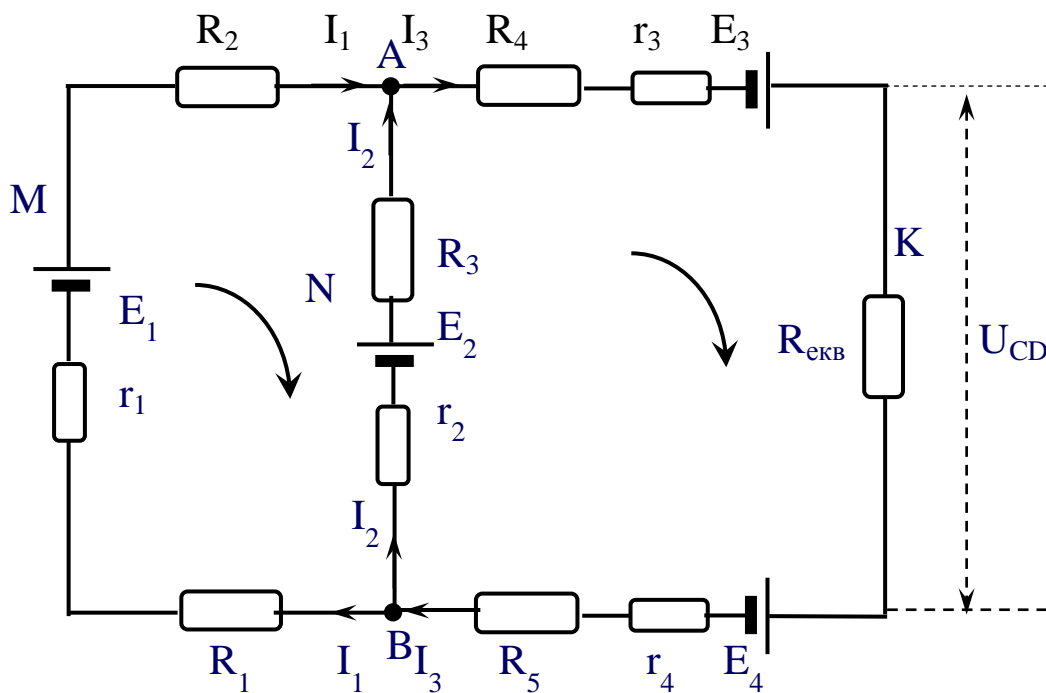


Рисунок 4 – Еквівалентна електрична схема задачі для прикладу 1

Електричне коло (рис. 4) має два вузли ( $n_1=2$ ) і три гілки ( $m_1=3$ ). Нам необхідно скласти  $n_1-1=2-1=1$  рівняння за першим правилом Кірхгофа і  $m_1-n_1+1=3-2+1=2$  рівняння за другим правилом Кірхгофа. За правилами Кірхгофа для еквівалентного електричного кола нам необхідно скласти систему з 3-х рівнянь. Таким чином, завдяки еквівалентній заміні, ми скоротили число рівнянь у системі з 6 до 3. Це значно спрощує розв'язок поставленої задачі.

Складемо рівняння за правилами Кірхгофа для електричного кола, показаного на рисунку 4.

Для вузла А:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (17)$$

Для контуру АКВНА :

$$R_4 I_3 + r_3 I_3 + R_{\text{екв}} I_3 + r_4 I_3 + R_5 I_3 + r_2 I_2 + R_3 I_2 = E_3 - E_4 + E_2. \quad (18)$$

Для контуру АНВМА :

$$-R_3 I_2 - r_2 I_2 + R_1 I_1 + r_1 I_1 + R_2 I_1 = -E_2 + E_1. \quad (19)$$

Упорядкуємо рівняння 17, 18, 19 за зростанням індексів струму та об'єднаємо їх у систему

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ (r_2 + R_3)I_2 + (R_4 + r_3 + R_{\text{екв}} + r_4 + R_5)I_3 = E_2 + E_3 - E_4. \\ (R_1 + r_1 + R_2)I_1 - (R_3 + r_2)I_2 = E_1 - E_2 \end{cases} \quad (20)$$

Підставимо у систему рівнянь (20) числові значення

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ (1 + 5)I_2 + (5 + 1 + 2,4 + 1 + 2,6)I_3 = 7 + 4 - 5. \\ (6 + 1 + 3)I_1 - (5 + 1)I_2 = 3 - 7 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 6I_2 + 12I_3 = 6. \\ 10I_1 - 6I_2 = -4 \end{cases} \quad (22)$$

Із третього рівняння системи (22) визначимо  $I_1$ , з другого  $I_3$ :

$$I_1 = \frac{-4 + 6I_2}{10} = \frac{-2 + 3I_2}{5},$$

$$I_3 = \frac{6 - 6I_2}{12} = \frac{1 - I_2}{2}.$$

Підставимо значення  $I_1, I_3$  у перше рівняння системи (22), розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{-2 + 3I_2}{5} + I_2 - \frac{1 - I_2}{2} = \frac{-4 + 6I_2 + 10I_2 - 5 + 5I_2}{10} = \frac{-9 + 21I_2}{10} = 0$$

$$I_2 = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \text{ (A)}$$

Знайдемо струми  $I_1, I_3$ :

$$I_1 = \frac{-2 + 3I_2}{5} = \frac{-2 + 3 \cdot \frac{3}{7}}{5} = -\frac{1}{7} \text{ (A).}$$

$$I_3 = \frac{1 - I_2}{2} = \frac{1 - \frac{3}{7}}{2} = \frac{2}{7} \text{ (A).}$$

Напругу  $U_{CD}$  на еквівалентному резисторі  $R_{\text{екв}}$  та струми  $I_4, I_5$  знайдемо за законом Ома для однорідної ділянки кола (рис. 3, рис. 4)

$$U_{CD} = I_3 R_{\text{екв}} = \frac{2}{7} \cdot 2,4 = \frac{24}{35} \text{ (В)}$$

$$I_4 = \frac{U_{CD}}{R_7 + R_8} = \frac{24/35}{2 + 4} = \frac{4}{35} \text{ (A)}, \quad I_5 = \frac{U_{CD}}{R_6} = \frac{24/35}{4} = \frac{6}{35} \text{ (A)}.$$

Перевіримо баланс струмів у вузлах за першим правилом Кірхгофа:

- вузол А:  $I_1 + I_2 - I_3 = -\frac{1}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = 0$ ;
- вузол В:  $-I_1 - I_2 + I_3 = -\left(-\frac{1}{7}\right) - \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = 0$ ;
- вузол С:  $I_3 - I_4 - I_5 = \frac{2}{7} - \frac{4}{35} - \frac{6}{35} = 0$ ;
- вузол D:  $-I_3 + I_4 + I_5 = -\frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{6}{35} = 0$ .

Під час розрахунку розгалужених електричних кіл у цій лабораторній роботі необхідно знати величину внутрішнього опору джерела  $r$  та його електрорушійну силу  $E$ . Для їх визначення скористаємося методом вольтметра та амперметра (рис. 5). Будемо вважати, що внутрішній опір вольтметра:  $r_V \gg r, r_V \gg R_a, r_V \gg R_b$ , тому струмом у колі вольтметра будемо нехтувати. Якщо внутрішній опір і електрорушійну силу джерела необхідно знайти з високою точністю, то необхідно врахувати силу струму у гілці вольтметра (Лабораторна робота 2.5).

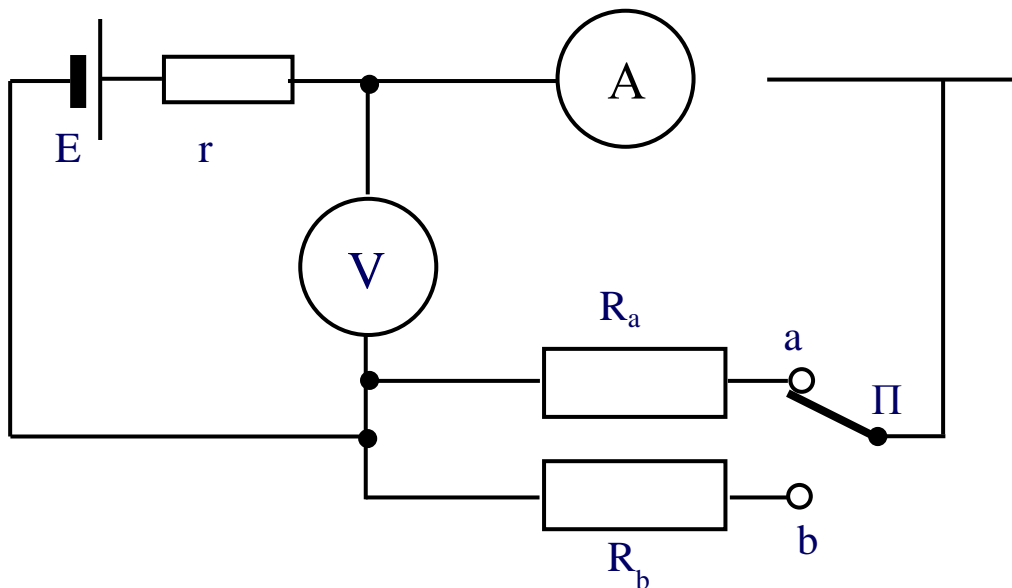


Рисунок 5 – Електрична схема для визначення  $r, E$  джерела ЕРС

За законом Ома для повного кола для двох різних зовнішніх опорів  $R_a, R_b$  маємо:

$$\begin{cases} E = I_a r + I_a R_a = I_a r + U_a \\ E = I_b r + I_b R_b = I_b r + U_b \end{cases}, \quad (23)$$

де  $U_a = I_a R_a, U_b = I_b R_b$  – спад напруги на резисторах  $R_a, R_b$  (відповідно для

положень «а» і «b» перемикача П),  $I_a, I_b$  – сила струму в електричному колі. Із системи рівнянь (23) випливає:

$$r = \frac{U_b - U_a}{I_a - I_b}, \quad (24)$$

$$E = U_a + \frac{I_a}{I_a - I_b}(U_b - U_a) = U_a + I_a r. \quad (25)$$

### *Порядок виконання роботи*

1. Зібрати схему (рис. 5) для визначення внутрішнього опору та електрорушійної сили джерела. Виміряти спад напруги та силу струму для двох положень перемикача П. Дані занести в таблицю 1. За формулами (24, 25) обчислити внутрішній опір  $r_1$  та електрорушійну силу джерела  $E_1$ . Провести аналогічні виміри для другого джерела.
2. Зібрати відповідно до номера бригади одну із електричних схем, наведених на рисунках 6–11 ( $r_1, r_2$  – внутрішні опори джерел електрорушійної сили).

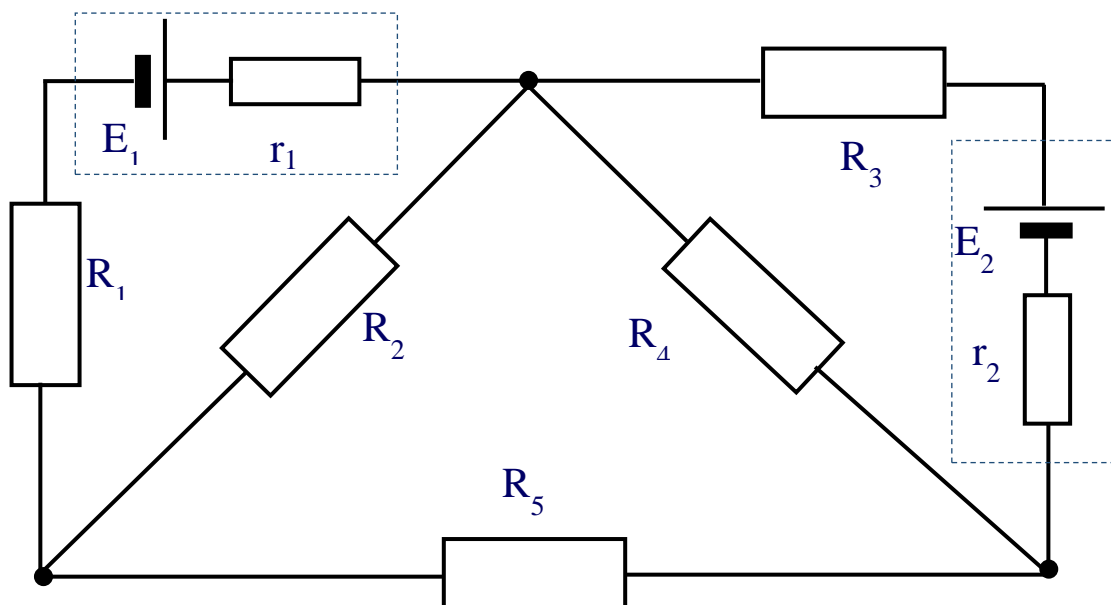


Рисунок 6 – Електрична схема для виконання лабораторної роботи бригадами № 1, 7

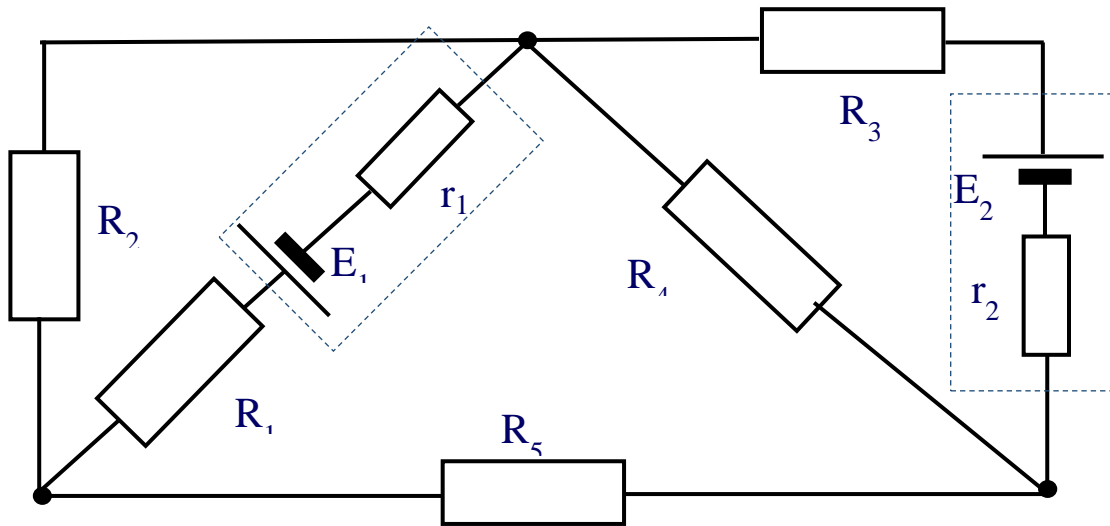


Рисунок 7 – Електрична схема для виконання лабораторної роботи бригадами № 2, 8

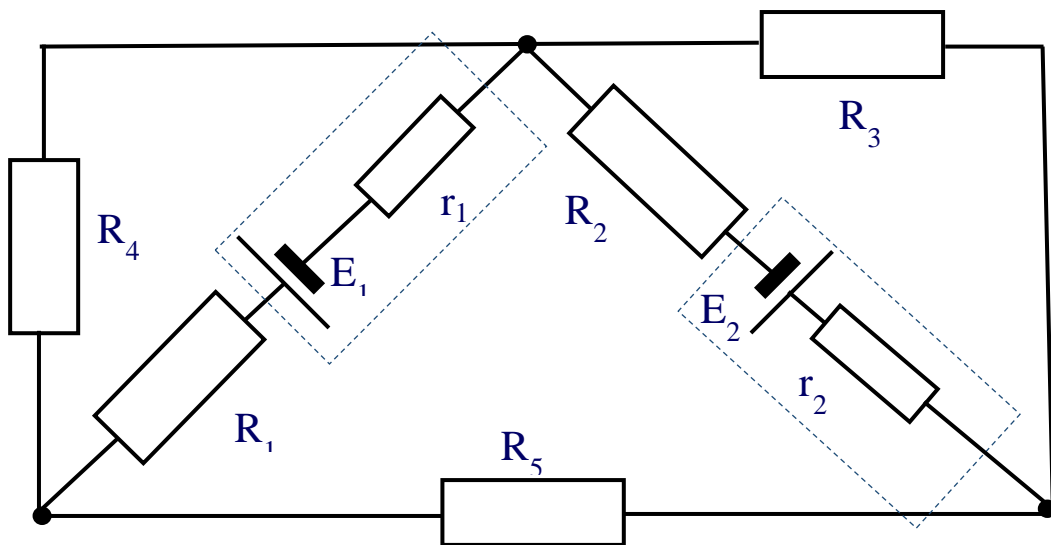


Рисунок 8 – Електрична схема для виконання лабораторної роботи бригадами № 3, 9

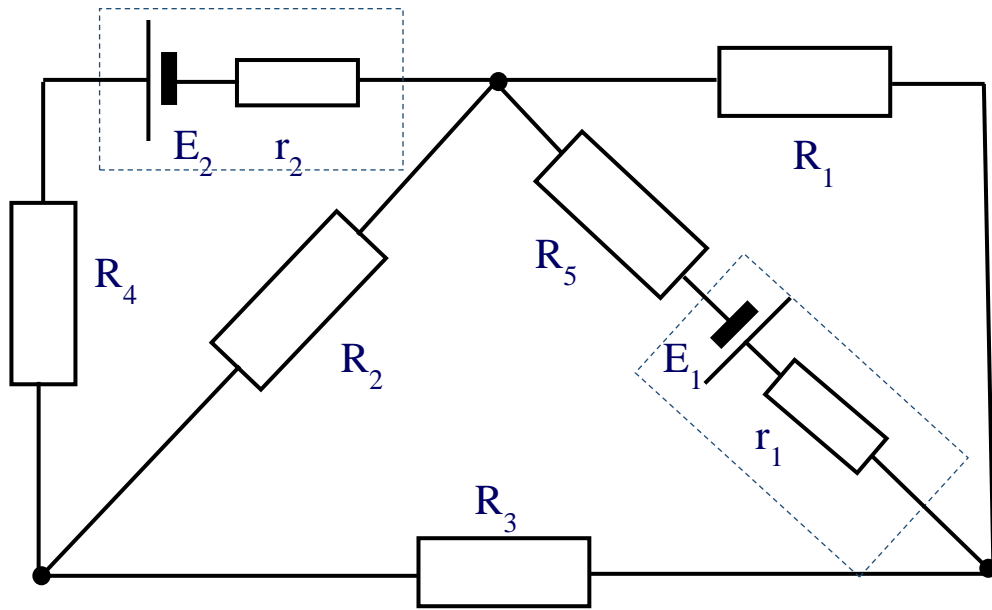


Рисунок 9 – Електрична схема для виконання лабораторної роботи бригадами № 4, 10

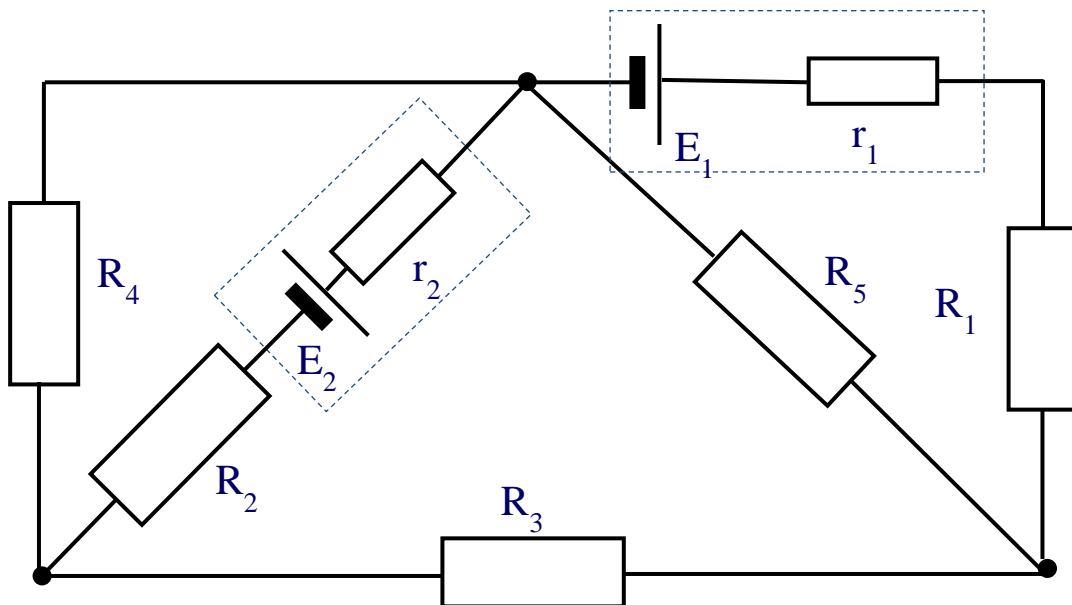


Рисунок 10 – Електрична схема для виконання лабораторної роботи бригадами № 5, 11

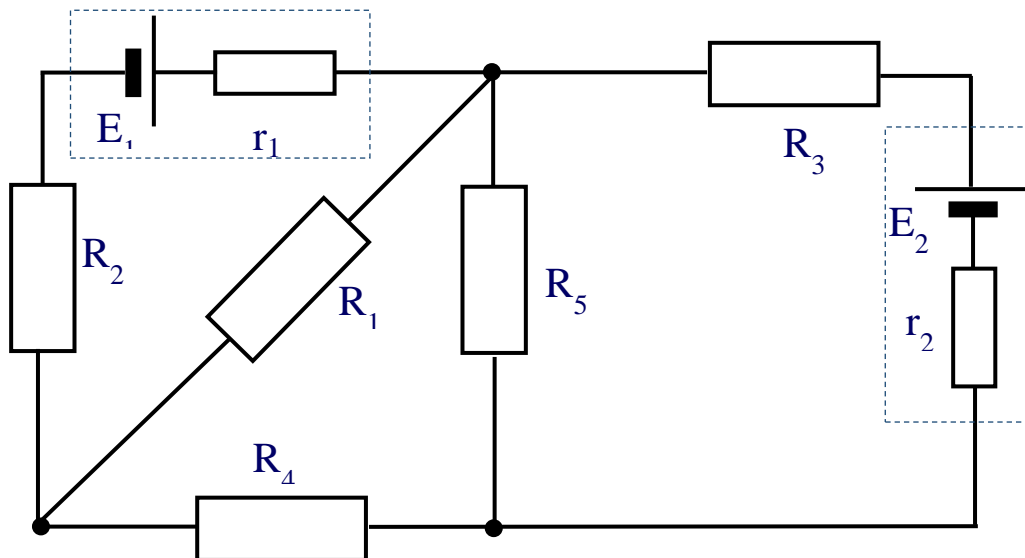


Рисунок 11 – Електрична схема для виконання лабораторної роботи бригадами № 6, 12

Виміряти напруги на резисторах електричної схеми та струми у її гілках (вольтметр необхідно вмикати у коло паралельно до споживача, а амперметр – послідовно). Під час вимірювання обов’язково потрібно позначити на електричній схемі у конспекті полярність напруги на резисторах та технічний напрям струму у гілках електричного кола. За законом Ома для однорідної ділянки електричного кола знайти опори резисторів. Результати вимірювань занести в таблицю 2.

3. Скласти систему рівнянь за правилами Кірхгофа (9) для складеної електричної схеми, підставити в неї відомі  $E_i, r_i, R_i$  та обчислити невідомі струми  $I_i$ . Для розв’язування системи рекомендується скористатися системою [Mathcad \(додаток Б\)](#) або звернутися до [ІІІ \(додаток В\)](#).

4. Порівняти експериментально виміряні струми з одержаними на основі розрахунків за правилами Кірхгофа. Довести, що в межах допустимих похибок результати узгоджуються.

5. Перевірити за показами амперметрів перше правило Кірхгофа (формула (1)) і показати, що цю формулу застосовано у межах точності вимірювань.

6. Оцінити похибки вимірювань.

7. Додаткове завдання. Обчислити невідомі струми у гілках електричного кола за умови  $r_1=0, r_2=0$ .

### **Контрольні питання**

1. Електрорушійна сила джерела струму. Напруга. Сила струму. Густина струму. Опір. Питомий опір. Послідовне та паралельне з’єднання опорів. Електропровідність. Питома електропровідність. Закон Ома в інтегральній та диференційній формах для однорідної ділянки електричного кола. Закон Ома для повного кола. Закон Ома для

неоднорідної ділянки електричного кола.

2. [Принцип роботи та основні характеристики електровимірювальних приладів.](#)

3. [Правила Кірхгофа та особливості їх застосування. Який їх фізичний зміст?](#) За яких умов, розраховуючи електричні кола в цій роботі за правилами Кірхгофа, можна знехтувати внутрішніми опорами амперметрів, вольтметрів та внутрішніми опорами джерел електрорушійної сили.

4. [Виведення II правила Кірхгофа.](#)

5. [Алгоритм \(методика\) розрахунку електричних кіл за правилами Кірхгофа.](#)

6. Що означають від'ємні значення струму?

7. [Які ви знаєте методи визначення е.р.с. джерел струму?](#)

Таблиця 1 – Визначення  $E$  та  $r$  джерел електричного струму

Джерело № 1						
$I_{1a}, A$	$U_{1a}, B$	$I_{1b}, A$	$U_{1b}, B$	$E_1, B$	$r_1, Om$	
Джерело № 2						
$I_{2a}, A$	$U_{2a}, B$	$I_{2b}, A$	$U_{2b}, B$	$E_2, B$	$r_2, Om$	

Таблиця 2 – Результати експерименту

Експериментальне значення струмів у гілках електричного кола						
$I_{e1}, A$	$I_{e2}, A$	$I_{e3}, A$	$I_{e4}, A$	$I_{e5}, A$		
$U_1, B$	$U_2, B$	$U_3, B$	$U_4, B$	$U_5, B$		
$R_1, Om$	$R_2, Om$	$R_3, Om$	$R_4, Om$	$R_5, Om$		
Значення струмів у гілка електричного кола розраховане за правилами Кірхгофа при $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0,$						
$I_1, A$	$I_2, A$	$I_3, A$	$I_4, A$	$I_5, A$		
Значення струмів у гілка електричного кола розраховане за правилами Кірхгофа при $r_1 = 0, r_2 = 0,$						
$I_{01}, A$	$I_{02}, A$	$I_{03}, A$	$I_{04}, A$	$I_{05}, A$		

Література: [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]

## Лабораторна робота 2-10

### Вивчення термоелектричних явищ та градування термопар

*Прилади і матеріали:* еталонна термопара, досліджувана термопара, мікроамперметр, посудина Дюара, заповнена сумішшю води з льодом, мілівольтметр Ш 4500.

*Мета роботи:* вивчення термоелектричних явищ та набуття навичок градування термопар.

#### *Теоретичні відомості та опис приладів*

В сучасній науці і техніці дедалі ширше застосовуються прилади і установки, дія яких ґрунтується на фізичних явищах, що поєднуються під загальною назвою термоелектричних.

**Явище Зеебека.** Перший термоелектричний ефект був відкритий ще в 1821 році німецьким фізиком Томасом Зеебеком (1770–1831). Зеебек спостерігав виникнення термоелектрорушійної сили (термо-е.р.с.) в колі, що складається з двох неоднакових електронних провідників, контакти (спаї) яких підтримуються за різних температур. *Величина термо-е.р.с. змінюється прямо пропорційно різниці температур спаїв, тобто*

$$E = \alpha(T_2 - T_1), \quad (1)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт термо-е.р.с., що чисельно дорівнює тій термоелектрорушійній силі, яка виникає в колі за різниці температур спаїв в 1 Кельвін. Встановимо фізичну суть цієї величини з формули

$$\alpha = \frac{E}{T_2 - T_1} = \frac{E}{\Delta T}, \text{ або } \alpha = \frac{dE}{dT}. \quad (2)$$

Видно, що в СІ коефіцієнт термо-е.р.с. вимірюється в В/К. Оскільки за величиною коефіцієнт термо-е.р.с. невеликий, то на практиці його вимірюють у мВ/К або мкВ/К.

Явище термо-е.р.с. безпосередньо пов'язане з контактною різницею потенціалів (к.р.п.). Явище контактної різниці потенціалів описується законами Вольта.

*Перший закон Вольта.* Під час дотику двох провідників, виготовлених з різних металів, між ними виникає контактна різниця потенціалів, яка залежить від хімічного складу речовини та їх температури.

*Другий закон Вольта.* Контактна різниця потенціалів, що виникає на кінцях розімкненого кола, складеного з кількох металевих провідників, які перебувають за однакової температури, не залежить від хімічного складу речовини проміжних провідників і дорівнює контактній різниці

потенціалів крайніх провідників.

Причини виникнення контактної різниці потенціалів:

а) неоднакова робота виходу електронів із металу  $A$  (різні їх внутрішні потенціали  $\phi$ );

б) неоднакова концентрація вільних електронів  $n$  у провідниках.

Цей процес описується рівнянням:

$$U_{12} = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}, \quad (3)$$

де  $e$  – заряд електрона,

$k$  – стала Больцмана,

$T$  – абсолютна температура.

Другий доданок у формулі (3) для визначення к.р.п.  $U$  (концентраційний член) і є відповідальним за виникнення термо-е.р.с. Справді, розглянемо замкнене коло з двох електронних провідників  $A$  і  $B$  з різними концентраціями електронів  $n_A$  і  $n_B$ . Як відомо, за другим законом Вольта за однакової температури спаїв 1 і 2 результуюча к.р.п. в замкненому колі дорівнює нулю. Це означає, що к.р.п.  $U_1$  на контакті 1 і  $U_2$  на контакті 2 мають протилежну полярність. Отже, можна записати

$$U = U_2 - U_1. \quad (4)$$

Якщо ж спаї мають різну температуру, наприклад  $T_2 > T_1$ , то

$$U_1 = \frac{A_A - A_B}{e} + \frac{kT_1}{e} \ln \frac{n_B}{n_A}, \quad (5)$$

$$U_2 = \frac{A_A - A_B}{e} + \frac{kT_2}{e} \ln \frac{n_B}{n_A}. \quad (6)$$

Враховуючи, що робота виходу  $A$  та концентрація електронів провідності  $n$  в металах не залежить від температури, маємо

$$E = U_2 - U_1 = \frac{k}{e} \ln \frac{n_B}{n_A} (T_2 - T_1). \quad (7)$$

Позначимо

$$\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_B}{n_A}. \quad (8)$$

Тоді з (7) отримаємо формулу Зеебека  $E = \alpha(T_2 - T_1)$ .

Оцінимо величину  $\alpha$  для металів. Для цього покладемо

$$\frac{n_B}{n_A} \approx 2,7. \text{ Тоді } \ln \frac{n_B}{n_A} = 1. \text{ Отже, } \alpha = \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ В/К} = 80 \text{ мкВ/К}.$$

На практиці коефіцієнт термо-е.р.с. для металів має ще менші значення, що знаходяться в межах від 0,5 до 50 мкВ/К.

**Явище Пельтьє.** В 1834 році французький фізик і метеоролог Жан Пельтьє (1785–1845) відкрив другий термоелектричний ефект, обернений до явища Зеебека. Якщо в електричному колі, складеному з неоднакових електронних провідників, пропускати постійний струм від зовнішнього джерела (наприклад, акумулятора), то між спаями цього кола утворюється різниця температур. Іншими словами, під час проходження постійного струму в неоднорідному колі відбувається перенесення теплоти від одного спаю до другого. Внаслідок цього один спай охолоджується, другий нагрівається.

Другий термоелектричний ефект дістав назву *явища Пельтьє*. Додаткову теплоту, що переноситься від одного спаю до другого, називають теплотою Пельтьє, її позначають через  $Q_p$ . Напрямок перенесення теплоти Пельтьє однозначно пов'язаний з напрямом струму в колі: якщо за одного напрямку струму через контакт двох провідників теплота Пельтьє, наприклад, виділяється, то за протилежного напрямку струму вона поглинається в цьому спайі.

Кількість теплоти Пельтьє, що виділяється (або поглинається) на контакті, прямо пропорційна кількості електрики, що пройшла через цей контакт

$$Q_p = \theta I t , \quad (9)$$

де  $\theta$  – коефіцієнт Пельтьє,

$I$  – струм,

$t$  – час.

Якщо  $I t = 1 \text{ Кл}$ , то  $\theta = Q_p$ . Отже, коефіцієнт Пельтьє чисельно дорівнює тій кількості теплоти в джоулях, яка виділяється (або поглинається) на контакті двох різних електронних провідників під час проходження крізь нього заряду в 1 кулон.

Як випливає з формули (9), коефіцієнт Пельтьє вимірюється у вольтах. За величиною коефіцієнт Пельтьє невеликий і для різних пар металів становить  $10^{-2}$ - $10^{-4}$  В.

Перші кроки щодо практичного використання явища Пельтьє було зроблено ще в 1838 році, коли російський фізик Е. Х. Ленц (1804–1865) на контакті вісмуту з сурмою за допомогою електричного струму заморозив краплину води. Тепер розроблено і створено найрізноманітніші прилади, дія яких ґрунтується на явищі Пельтьє. Промисловість випускає різні прилади й установки для термоелектричного охолодження окремих блоків радіоелектронної апаратури, вакуумної техніки, медичного обладнання тощо.

**Явище Томсона.** Видатний англійський фізик Уїльям Томсон (1824–1907) розробляв термодинамічну теорію термоелектричних явищ і в 1856 році теоретично передбачив *третій термоелектричний ефект*, названий пізніше його ім'ям. Експериментально явище Томсона виявив Леру в 1867 році. Цей ефект полягає в додатковому перенесенні (виділенні або поглинанні) теплоти на окремих ділянках хімічно однорідного провідника у випадку утворення в ньому градієнта температури й одночасного пропускання постійного електричного струму.

За класичною електронною теорією явище Томсона пояснюється локальними неоднорідностями провідника, що виникають під час утворення в ньому градієнта температури. Справді, в процесі нагрівання одного кінця провідника виникає дифузійний потік електронів від гарячого кінця до холодного, що призводить до утворення дещо неоднакових локальних значень їх концентрації в різних частинах провідника. Хімічно однорідний провідник стає електрично неоднорідним. Його сусідні елементарні об'єми можна розглядати як контактуючі між собою різні провідники. А на контакті неоднорідних електронних провідників під час проходження постійного струму має місце явище Пельтьє. Характер цього ефекту (виділення чи поглинання теплоти), як відомо, залежить від напрямку струму через контакт.

Отже, явище Томсона відрізняється від явища Пельтьє тим, що неоднорідність електричного кола забезпечується не різним хімічним складом електронних провідників, а неоднаковою температурою окремих частин того самого провідника.

Теоретичні розрахунки Томсона, підтвержені експериментально, приводять до висновку, що в явищі Томсона кількість теплоти, яка виділяється (чи поглинається) в одиниці об'єму провідника за одиницю часу, прямо пропорційна градієнту температури і густині струму:

$$Q_T = \sigma_T j V t \frac{dT}{dl}, \quad (10)$$

де  $\sigma_T$  – коефіцієнт Томсона, що залежить від роду провідника і його стану, зокрема від температури тієї частини провідника, в якій виділяється теплота Томсона,

$j$  – густина струму,

$V$  – об'єм,

$t$  – час.

Для невеликих значень градієнта температури можна прийняти

$\sigma_T = const$ . Чисельно коефіцієнт Томсона  $\sigma_T$  дорівнює кількості теплоти, що виділяється щосекунди в одиниці об'єму провідника, в якому створено одиничний градієнт температури, і проходить струм одиничної густини. Його розмірність – В/К. За величиною коефіцієнт Томсона невеликий. Наприклад, для вісмуту  $\sigma_T \approx 10^{-5} \frac{B}{K}$ .

**Термоелементи.** *Термопарою* (термоелементом) (рис. 1) називають пристрій з двох різнорідних провідників, з'єднаних між собою надійним контактом (зварені або спаяні). В місцях з'єднань провідників підтримується різна температура, водночас на кінцях провідників згідно з рівнянням 1 виникає термоелектрорушійна сила.

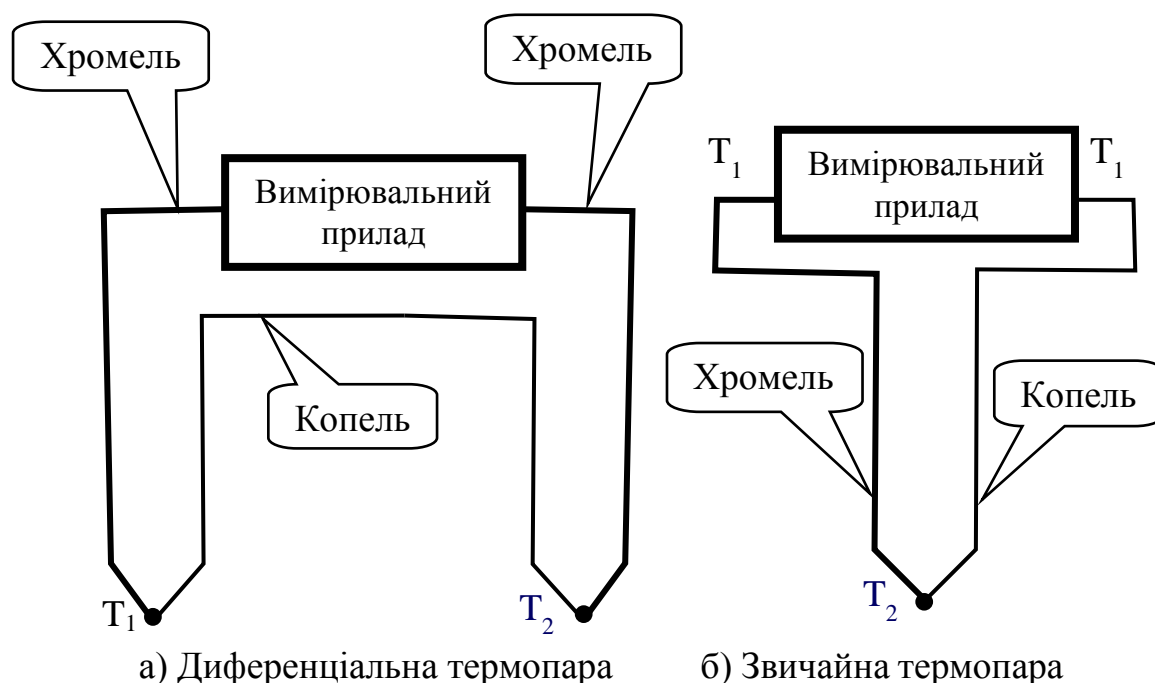


Рисунок 1 – Типи термопар

Термопари використовують для вимірювання та контролю температури.

Термопара і прилад для вимірювання термо-е.р.с. (електронний мілівольтметр, потенціометр) утворюють термоелектричний термометр (рис. 2).

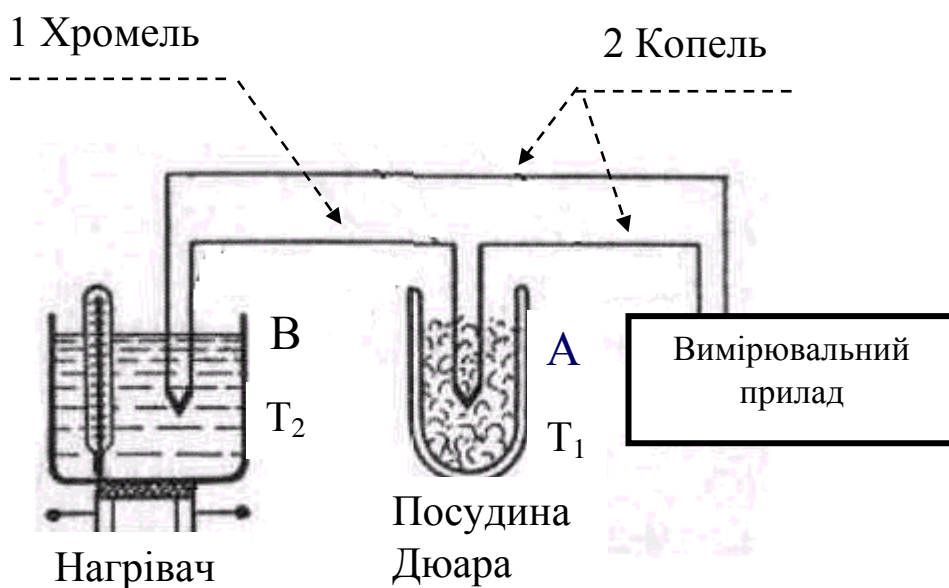


Рисунок 2 – Термоелектричний термометр

Термопара, у якої обидва спаї виражені явно і під час роботи один із них підтримується за сталої температури, наприклад  $273\text{ K}$  ( $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), називається *диференціальною* (рис. 1, а). У диференціальних термопар вимірювальний прилад включається в розрив одного з провідників (електродів) термопари. Термопара з одним явно вираженим спаєм, в якій роль другого спаю відіграють клемми для вмикання в коло, називається простою (рис. 1, б). Другий «спай» має температуру навколишнього середовища. У звичайних термопарах вимірювальний прилад підключається безпосередньо до двох електродів термопари. Якщо один спай термопари, наприклад А, підтримувати за сталої температури ( $273\text{ K}$ ), а другий В нагрівати, то прилад покаже певні значення е.р.с.; за цими значеннями будується графік залежності е.р.с. термопари від температури. Такий термоелектричний термометр являє собою диференціальну термопару. Диференціальні термопари широко застосовуються в лабораторіях в процесі наукових досліджень. У цьому випадку один із спаїв поміщають у посудину Дюара, наповнену подрібненим льодом і дистильованою водою (цим підтримується температура холодного спаю  $T_1=273\text{ K}$  ( $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ )), а другий знаходиться за температури  $T_2$ .

За виміряною термо-е.р.с. з таблиць визначають або відразу невідому температуру (диференціальна термопара), або різницю між невідомою температурою і температурою навколишнього середовища (проста термопара).

Для вимірювання невеликої різниці температур можна скористатись

батареєю з десятків чи навіть сотень металевих термопар. Залежно від робочих температур на практиці застосовують такі типи термопар:

1. До 1900 К – група ПП, платина – платинородій (90 % Pt , 10 % Rh) ( $\alpha = 6,4 \cdot 10^{-3}$  мВ/К.)

2. До 1300 К – група ХА, хромель (90 % Ni, 10 % Cr) – алюмель (95 % Ni, 59 % AlSiMg) ( $\alpha = 4,1 \cdot 10^{-2}$  мВ/К.)

3. До 900 К – група ХК, хромель – копель (56 % Cu, 44 % Ni) ( $\alpha = 6,95 \cdot 10^{-2}$  мВ/К.)

4. До 600 К – група МК, мідь – копель ( $\alpha = 4,75 \cdot 10^{-2}$  мВ/К). Для температур від низьких до 600 К широко застосовують мідь–константанові термопари із сталюю  $\alpha = 4 \cdot 10^{-2}$  мВ/К.

На рис. 2 наведено схему установки для градуювання термопари.

Гарячий спай В термопари знаходиться в електропечі, а холодний спай А термопари – в посудині Дюара, заповненій сумішшю води з льодом. Температура електропечі вимірюється електронним або звичайним термометром. Термо-електрорушійна сила (ТЕРС) термопари досить мала. Найзручніше ТЕРС термопари вимірювати безпосередньо потенціометром або електронним мілівольтметром (мультиметром).

ТЕРС термопари також можна розраховувати за силою струму, який протікає у колі термопари (рис. 3).

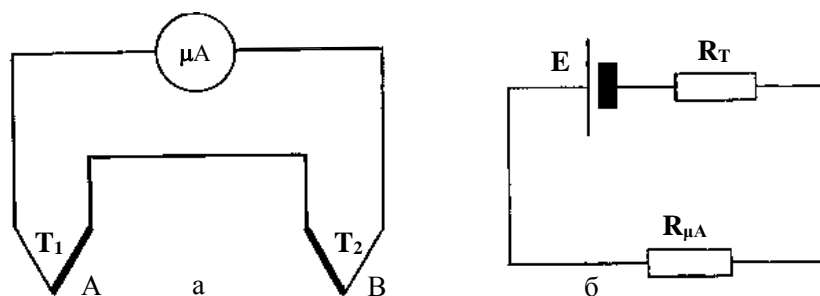


Рисунок 3 – Диференціальна термопара (а), еквівалентна схема диференціальної термопари (б)

У коло досліджуваної термопари ввімкнений мікроамперметр із внутрішнім опором  $R_{\mu A}$ , якщо опір термопари  $R_T$ , то в колі виникне струм

$$I = \frac{E}{R_{\mu A} + R_T}, \text{ або } E = I(R_{\mu A} + R_T), \quad (11)$$

де  $E$  – термо-електрорушійна сила термопари.

## **Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту**

1. Помістити холодні кінці досліджуваної та зразкової термопари в посудину, заповнену сумішшю води з льодом, а гарячі – в електропіч.

2. Ввімкнути електропіч. Записати значення температури печі  $T_2$  під час її нагрівання (для  $T \approx 290...450\text{ K}$ , з інтервалом 10 K) та значення електрорушійної сили термопари, або струму  $I_1$  в колі термопари – в таблицю 1. Для випадку визначення ТЕРС методом мікроамперметра  $E$  розраховується за формулою (11), опір термопари  $R_T$  та внутрішній опір мікроамперметра  $R_{\mu A}$  наведено у паспорті лабораторної установки, а у разі вимірювання ТЕРС потенціометром або електронним мілівольтметром значення  $E$  безпосередню визначаються за показами вимірювальних приладів. Провести аналогічні виміри під час охолодження електропечі.

3. Методом найменших квадратів (додаток А) визначити сталу термопари  $\alpha$  для всього інтервалу температури. Для лінійної залежності  $E = \alpha \cdot \Delta T$  за методом найменших квадратів  $\alpha$  визначається із рівняння

$$\alpha \sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^2 = \sum_{i=1}^n (T_i \cdot E_i).$$

4. В одній системі координат побудувати точковий графік залежності  $E_i = f(\Delta T_i)$  і графік лінійної залежності  $E = \alpha \cdot \Delta T$ . Визначити з точкового графіка для декількох (3–5) інтервалів температур сталу термопари  $\alpha = \frac{\Delta E}{\Delta T}$ . Порівняти її значення із значенням  $\alpha$ , отриманим методом найменших квадратів.

### **Контрольні запитання**

1. Контактна різниця потенціалів. Закони Вольта. У чому полягає суть термоелектричних явищ? Яка їх природа? Явища Зеебека, Пельтьє та Томсона.

2. Принцип роботи термопари. Які є типи термопар? Охарактеризуйте сферу застосування термопар.

3. Охарактеризуйте методи вимірювання і контролю температури.

4. Які переваги і недоліки термопар порівняно з іншими методами вимірювання температури?

5. Термоелектричні холодильники. Принцип роботи.

Таблиця 1 – Результати експерименту та його обробки

Номер дослідю	$T_1,$ $K$	$T_2,$ $K$	$\Delta T,$ $K$	$I, *$ $\mu A$	$E, *$ $mB$	$\alpha,$ $mB/K$	
<i>Нагрівання</i>							
		293					
		303					
		313					
		323					
		333					
		343					
		353					
		363					
		373					
		383					
		393					
		403					
<i>Охолодження</i>							
		403					
		393					
		383					
		373					
		363					
		353					
		343					
		333					
		323					
		293					

\*Для методу при визначенні ТЕРС методом мікроамперметра  $E$  розраховується за формулою (11), а при вимірюванні ТЕРС потенціометром або електронним мілівольтметром значення  $E$  безпосередню визначаються за показами вимірювального приладу.

Література: [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]

## Лабораторна робота 2-11

### Дослідження послідовного кола змінного струму

*Прилади та матеріали:* блок живлення ВС-24, амперметр, вольтметр, набори резисторів, котушок індуктивності, перемикач, набір з'єднувальних провідників.

*Мета роботи:* набути навичок дослідження та розрахунку нерозгалужених електричних кіл змінного струму

### Теоретичні відомості

*Змінний електричний струм. Основні характеристики змінного струму.* Змінним називається струм, що змінює свою величину або напрямок з часом. Струм, який змінюється за законом синуса або косинуса, називається синусоїдальним або гармонічним (рис. 1).

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

$$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

де  $i$  – миттєве значення сили струму, це значення струму у довільний момент часу, (миттєві величини позначаються малими латинськими літерами  $e, u, i$ , миттєвих значень за 1 період безкінечна кількість),

$I_0$  або  $I_m$  – амплітудне значення струму (це максимальне значення струму за період, позначається великими літерами  $I$  з індексами «0» або «m»),

$\omega$  – циклічна частота коливань.

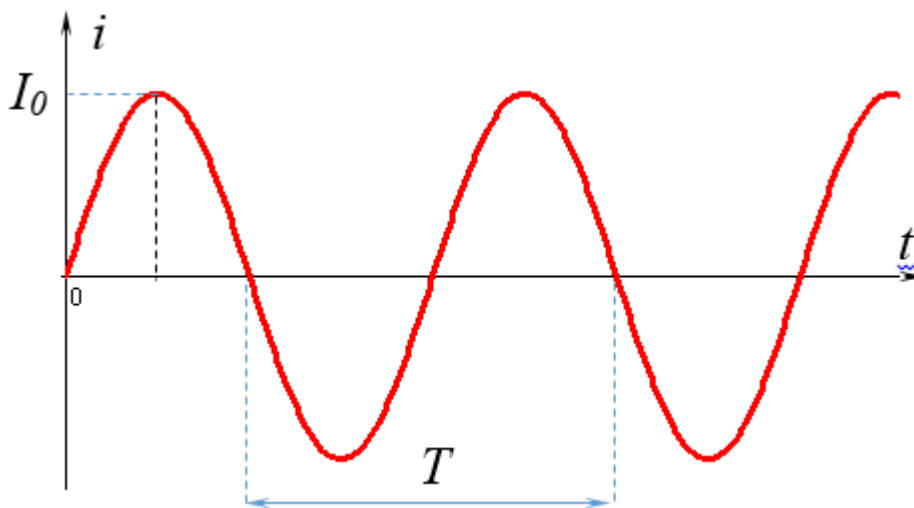


Рисунок 1 – Змінний гармонічний струм

Циклічна частота коливань – число повних коливань, виконаних системою за проміжок часу  $2\pi$  секунд.

$$\omega = 2\pi\nu, \quad (3)$$

де  $\nu$  – частота коливань;

$T$  – період коливань.

Частота коливань – число повних коливань виконаних системою за 1 секунду, вимірюється в герцах (Гц)

$$1\text{Гц} = \frac{1}{\text{с}}$$

В Європі промисловою частотою змінного струму є частота 50 Гц.

Період коливань – проміжок, часу протягом якого система виконає 1 повне коливання, вимірюється в секундах.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4)$$

$\Phi = (\omega t + \varphi_0)$  – фаза коливань.

$\varphi_0$  – початкова фаза коливань.

Аналогічні рівняння можна записати для електрорушійної сили та напруги:

$$e = E_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (5)$$

$$e = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6)$$

$$u = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (7)$$

$$u = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8)$$

де  $e, u$  – відповідно миттєві значення електрорушійної сили та напруги,

$E_0, U_0$  – відповідно амплітудні значення електрорушійної сили та напруги.

*Генератор змінного струму.* Розглянемо рамку, яка може обертатися з кутовою швидкістю  $\omega$  в магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$  (рис. 2).

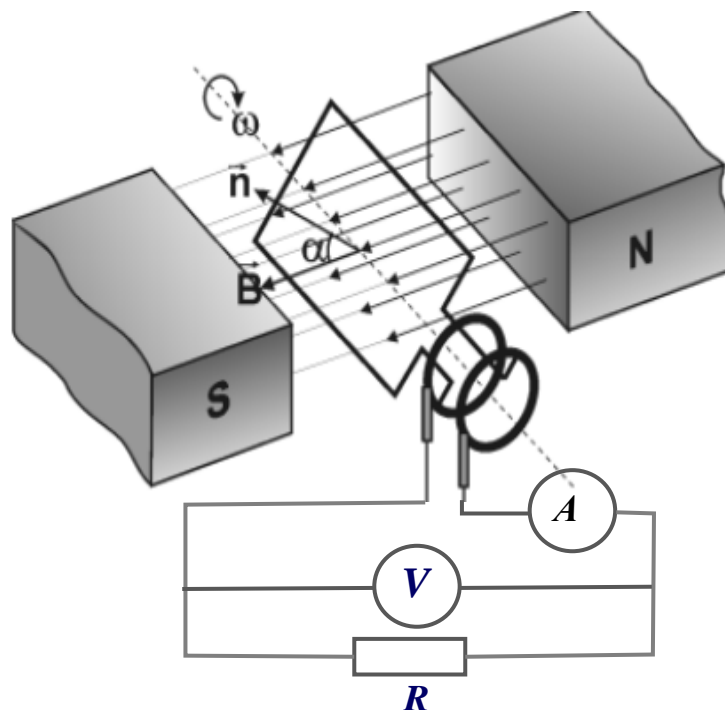


Рисунок 2 – Генератор змінного струму

Рамку пронизує магнітний потік

$$\Phi_B = BS \cos \alpha, \quad (9)$$

де  $S$  – площа рамки,

$$\alpha - \text{кут між нормалю } \vec{n} \text{ та вектором індукції магнітного поля } \vec{B}$$

$$\alpha = \omega t + \varphi_0, \quad (10)$$

де  $\varphi_0$  – початкова фаза, кут між нормалю  $\vec{n}$  та вектором індукції магнітного поля  $\vec{B}$  в момент часу  $t = 0$  (рис. 3)

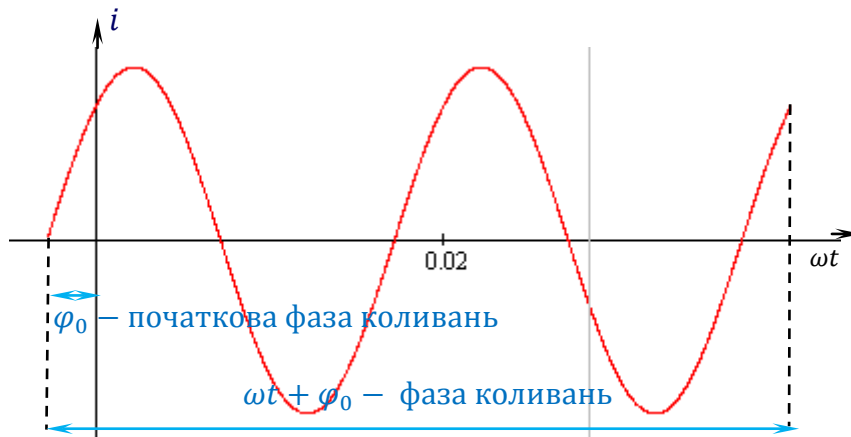


Рисунок 3 – Фази струму

$$\Phi_B = BS \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (11)$$

За законом електромагнітної індукції Фарадея–Ленца на виході генератора отримаємо електрорушійну силу, яка змінюється за гармонічним законом:

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BS \cos(\omega t + \varphi_0))}{dt} = \omega BS \sin(\omega t + \varphi_0) = E_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (12)$$

де  $E_0 = BS\omega$  – амплітудне значення електрорушійної сили (якщо рамка має  $N$  витків, то очевидно, що  $E_0 = NBS\omega$ )

$$e = E_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (13)$$

Відповідно напруга на резисторі  $R$  (див. рис. 2) також змінюється за гармонічним законом:

$$u = U_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (14)$$

*Ефективне значення струму, напруги та електрорушійної сили.* Ефективним значенням сили змінного струму називають величину постійного струму, дія якого має такий самий тепловий ефект або виконує таку саму роботу, що і змінний струм за час одного періоду. Елементарна кількість теплоти, яка виділиться на активному опорі під час проходження змінного електричного струму за елементарний проміжок часу  $dt$ :

$$dQ = i^2 R dt = (I_0 \cos(\omega t + \varphi_0))^2 R dt, \quad (15)$$

Відповідно, за один період теплота становитиме:

$$Q = \int_0^T (I_0 \cos(\omega t + \varphi_0))^2 R dt = \frac{I_0^2 RT}{2}. \quad (17)$$

Аналогічну теплову дію має постійний струм величиною  $I_{\text{еф}}$ :

$$Q = I_{\text{еф}}^2 RT, \quad (18)$$

отже

$$I_{\text{еф}}^2 RT = \frac{I_0^2 RT}{2}. \quad (19)$$

Ефективне значення змінного струму дорівнює:

$$I_{\text{еф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Відповідно ефективні значення електрорушійної сили та напруги змінного струму дорівнюють:

$$E_{\text{еф}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}, \quad (21)$$

$$U_{\text{еф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (22)$$

Більшість електровимірювальних приладів прокалібровані для ефективних значень струму або напруги. В електротехніці прийнято, що ефективні значення змінного струму, напруги та електрорушійної сили записуються без індексів «еф» біля них.

*Активний опір у колі змінного струму.* Активний опір у колі змінного струму, поводиться аналогічно, як у колі постійного струму (рис. 4). Напряга на активному опорі за фазою співпадає з фазою струму (рис. 5). Закон Ома для ділянки кола змінного струму із активним опором:

$$I = \frac{U_R}{R}, \quad (23)$$

де  $U_R, I$  – відповідно ефективне значення напруги та струму,  
 $R$  – активний опір.

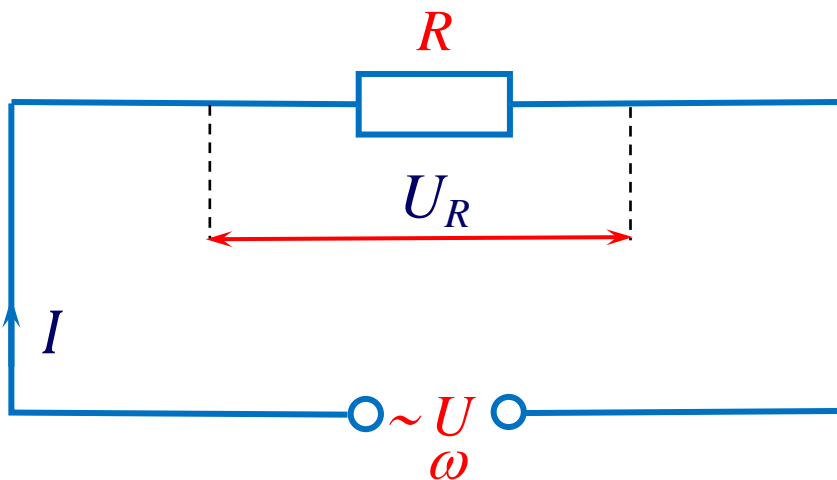


Рисунок 4 – Активний опір у колі змінного струму

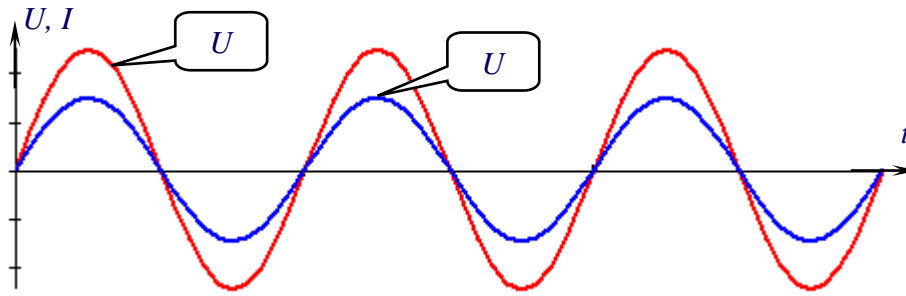


Рисунок 5 – Графік миттєвих значень струму та напруги на активному опорі

В процесі аналізу електричних кіл змінного струму широко використовується метод векторних діаграм. Суть цього методу полягає в тому, що величина, яка змінюється за гармонічним законом, зображається у вигляді вектора, модуль якого дорівнює амплітуді коливань і який обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю, що дорівнює циклічній частоті коливань  $\omega$  навколо довільно вибраної осі. На векторних діаграмах вектори прийнято зображати під кутами  $\varphi_i$  між напругами та струмами у електричному колі змінного струму. Як вісь вибирається вектор іншої коливальної величини, а  $\varphi$  є зсувом фаз між коливальними величинами. Наприклад, для нерозгалуженого кола змінного струму вектор сили струму відкладають по горизонталі і цю вісь вважають опорною для векторної діаграми.

Побудуємо векторну діаграму для струму та напруги для кола змінного струму із активним опором (рис. 6). Вектори відкладаємо на діаграмі у відповідних масштабах. Напруга на активному опорі за фазою співпадає із фазою струму.

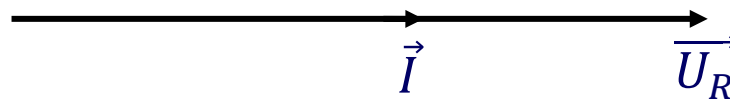


Рисунок 6 – Векторна діаграма струму та напруги на активному опорі

*Індуктивність у колі змінного струму.* Розглянемо ідеальну котушку індуктивності, тобто котушку, активний опір якої дорівнює нулю  $R_k=0$ . У реальних котушок індуктивності  $R_k \neq 0$ . Індуктивність у колі змінного струму веде себе як реактивний опір. Напруга на котушці індуктивності випереджає струм за фазою на кут  $90^\circ$  (рис. 7, 8)

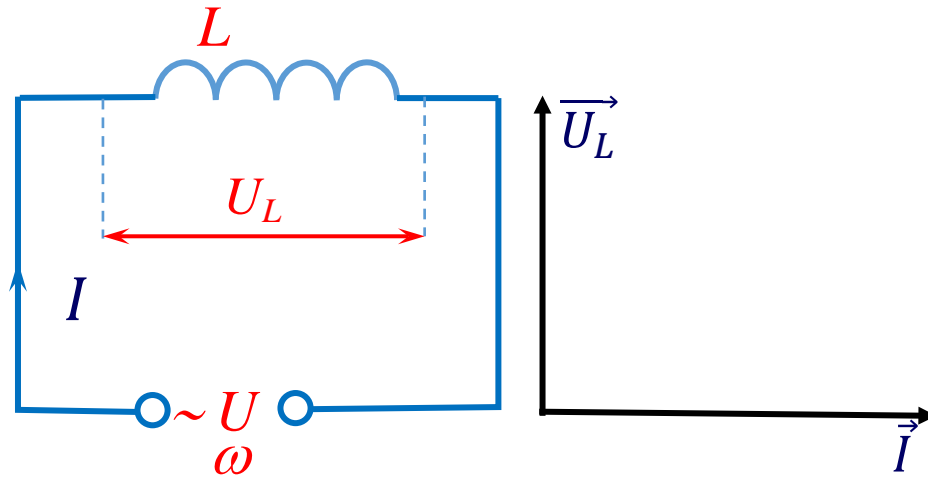


Рисунок 7 – Котушка індуктивності у колі змінного струму

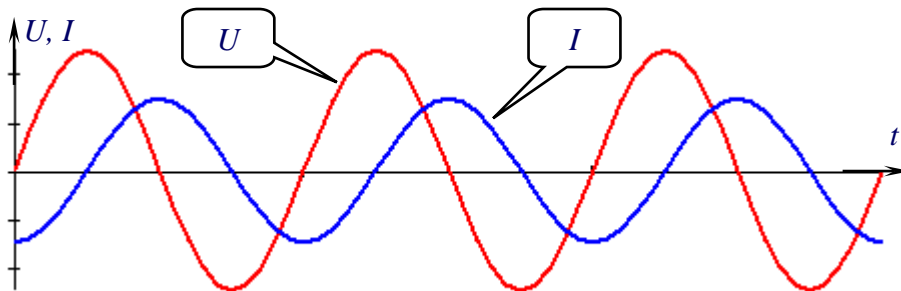


Рисунок 8 – Графік миттєвих значень струму та напруги на котушці індуктивності

Величина реактивного опору котушки індуктивності визначається за формулою:

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L. \quad (24)$$

Закон Ома для ділянки кола змінного струму з індуктивністю

$$I = \frac{U_L}{X_L} = \frac{U_L}{\omega L} = \frac{U_L}{2\pi\nu L}. \quad (25)$$

*Конденсатор у колі змінного струму.* Конденсатор у колі змінного струму веде себе як реактивний опір. Напруга на конденсаторі відстає від струму за фазою на кут  $90^\circ$  (рис. 9, 10) .

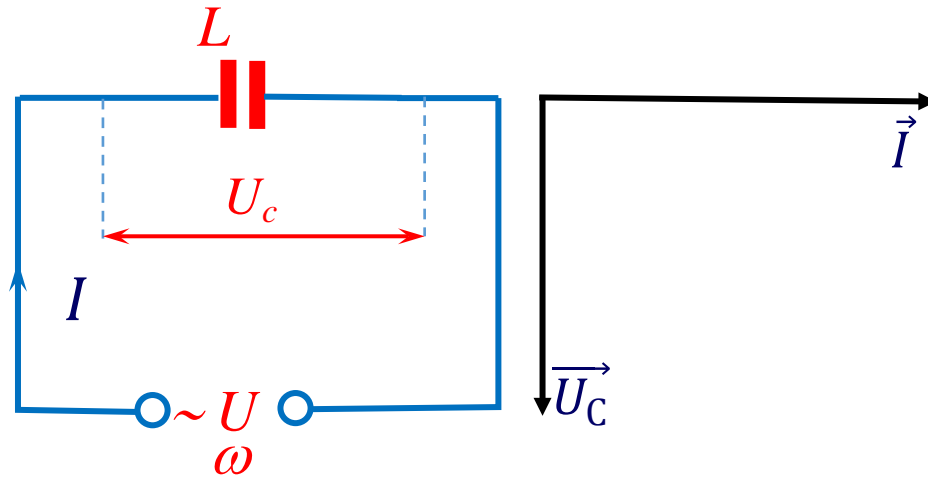


Рисунок 9 – Конденсатор у колі змінного струму

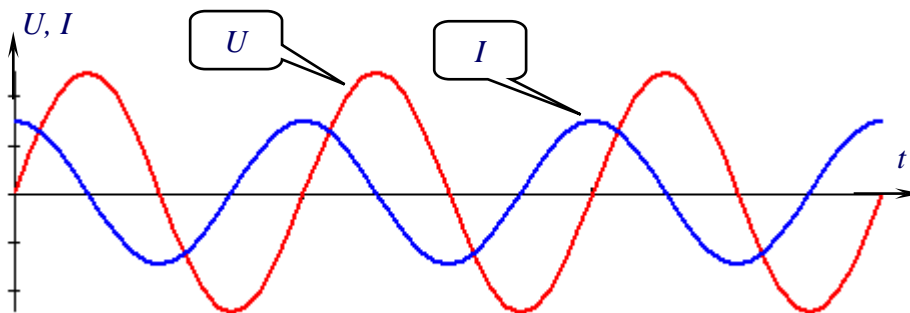


Рисунок 10 – Графік миттєвих значень струму та напруги на конденсаторі

Величина реактивного опору конденсатора визначається за формулою:

$$X_C = 1/\omega C = 1/2\pi\nu C. \quad (26)$$

Закон Ома для ділянки кола змінного струму з конденсатором

$$I = \frac{U_C}{X_C} = \frac{U_C}{1/\omega C} = \omega C U_C = 2\pi\nu C U_C. \quad (27)$$

*Активний опір, індуктивність та конденсатор у колі змінного струму. Повний опір кола змінного струму.* Розглянемо електричне коло змінного струму (рис. 11) яке містить активний опір, індуктивність та конденсатор які з'єднані послідовно. Таке електричне коло називають послідовним або нерозгалуженим.

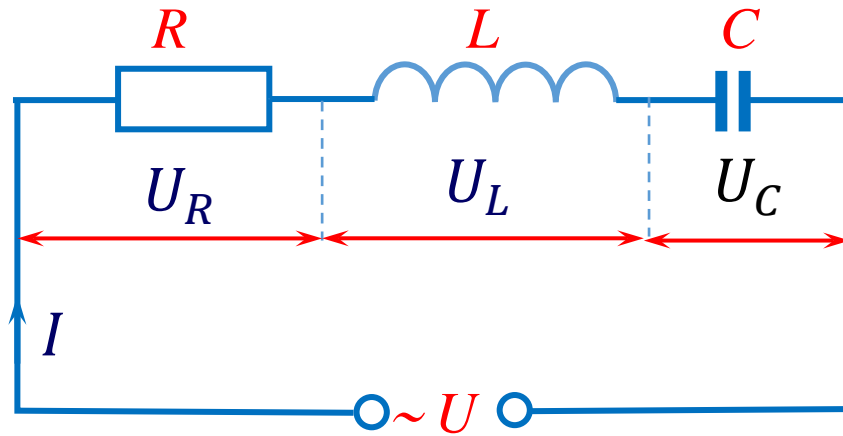


Рисунок 11 – Активний опір, котушка індуктивності та конденсатор у колі змінного струму

Побудуємо векторну діаграму струму та напруги для послідовного кола змінного струму (рис. 12) та графік миттєвих значень струму та напруги (рис. 13).

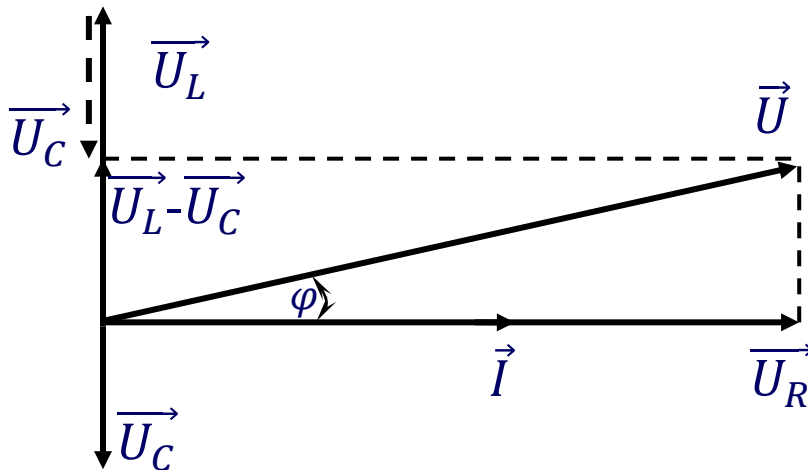


Рисунок 12 – Векторна діаграма

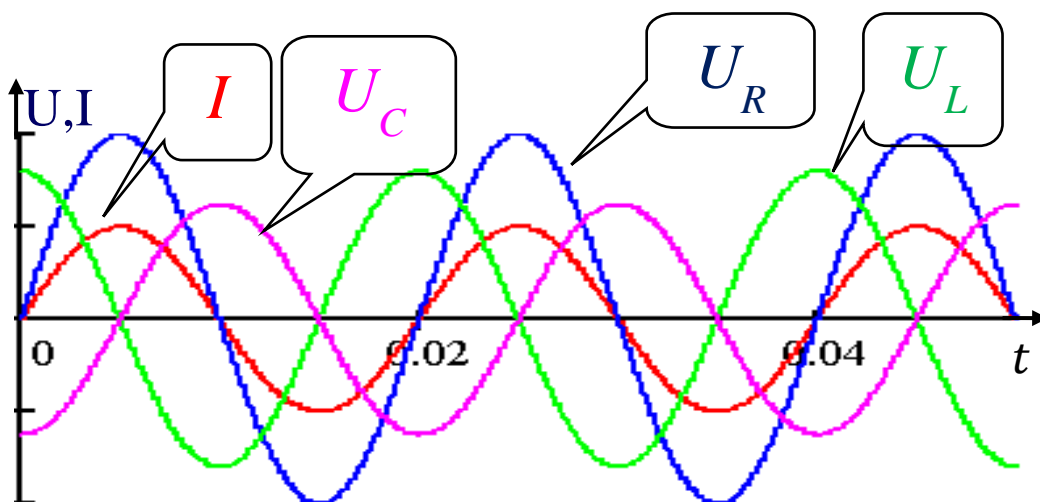


Рисунок 13 – Графік миттєвих значень струму та напруги

Нехай напруга на ділянці кола  $U$ , сила струму у колі  $I$ , повний опір електричного кола  $Z$ . За законом Ома маємо:

$$U = IZ; \quad (28)$$

$$U_R = IR; \quad (29)$$

$$U_L = IX_L = I\omega L; \quad (30)$$

$$U_C = IX_C = \frac{I}{\omega C}. \quad (31)$$

Вектор повної напруги дорівнює (рис. 12):

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C, \quad (32)$$

або

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2; \quad (33)$$

Із рівнянь 28, 29, 30, 31, 33 маємо:

$$(IZ)^2 = (IR)^2 + \left(I\omega L - \frac{I}{\omega C}\right)^2. \quad (34)$$

або

$$Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2. \quad (35)$$

Повний опір кола змінного струму або імпеданс (повний опір кола змінного струму називають імпедансом) становить:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (36)$$

Закон Ома для ділянки кола змінного струму, яка містить активний опір, котушку індуктивності та конденсатор, з'єднані послідовно, набуває вигляду:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (37)$$

Зауважимо, що формули 25, 27, 37 справедливі для амплітудних та ефективних значень струму і напруги, але вони не виконуються для їх миттєвих значень

Зсув фаз  $\varphi$  між струмом і напругою визначається із співвідношення (рис.12):

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R \cdot I}{Z \cdot I} = \frac{R}{Z}. \quad (38)$$

Якщо послідовне електричне коло змінного струму містить декілька активних опорів, котушок індуктивності та конденсаторів, то його повний опір

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n R_i\right)^2 + \left(\omega \sum_{i=1}^m L_i - \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^k \frac{1}{C_i}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\sum_{i=1}^n R_i)^2 + \left(2\pi\nu \sum_{i=1}^m L_i - \frac{1}{2\pi\nu} \sum_{i=1}^k \frac{1}{C_i}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n R_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m X_{Li} - \sum_{i=1}^k X_{Ci}\right)^2} \end{aligned} \quad (39)$$

де  $n, m, k$  – відповідно кількість активних опорів, котушок індуктивності та конденсаторів у послідовному (нерозгалуженому) електричному колі,

$R_i$  – величина  $i$ -го активного опору,

$L_i$  – індуктивність  $i$ -ої котушки індуктивності,

$C_i$  – електрична ємність  $i$ -го конденсатора.

*Реальна котушка індуктивності у електричному колі змінного струму*

Раніше ми розглянули ідеальну котушку індуктивності. Реальні котушки індуктивності мають реактивний опір  $X_L$  та власний активний опір  $R_k$ , який зумовлений опором дроту котушки. Активний опір котушки індуктивності не враховують у разі виконання умови  $R_k \ll X_L$ .

На рис. 14 наведено еквівалентну електричну схему реальної котушки індуктивності у колі змінного струму та її векторну діаграму.

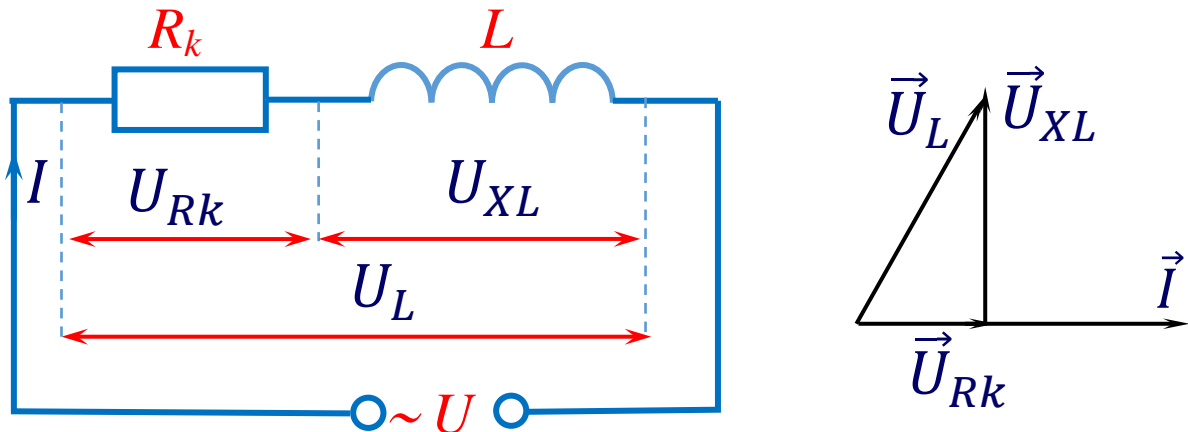


Рисунок 14 – Реальна котушка індуктивності у електричному колі змінного струму

Повний опір котушки індуктивності у колі змінного струму

$$Z_k = \sqrt{R_k^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R_k^2 + (2\pi\nu L)^2} = \sqrt{R_k^2 + X_L^2}. \quad (40)$$

Закон Ома для ділянки кола для реальної котушки індуктивності

$$I = \frac{U_L}{Z_k} = \frac{U_L}{\sqrt{R_k^2 + X_L^2}}. \quad (41)$$

У електричному колі змінного струму з котушкою індуктивності можна виміряти тільки силу струму  $I$  і напругу на котушці  $U_L$ . Складові напруги  $U_{Rk}$  і  $U_{XL}$  розраховують:

$$U_L^2 = U_{Rk}^2 + U_{XL}^2, \quad (42)$$

$$U_{Rk} = IR_k, U_{XL} = IX_L = I\omega L. \quad (43)$$

Активний опір котушки вимірюють містком постійного струму або омметром. Активний опір також можна знайти із закону Ома для однорідної ділянки кола, але котушку потрібно включити у коло постійного струму (рис. 15). Реактивна складова опору котушки відіграє важливу роль тільки у момент замикання та розмикання кола

(екстраструми замикання та розмикання), а в усталеному режимі роботи сила струму визначається напругою  $U$  та активним опором котушки  $R_k$  (рис. 15)

$$R_k = \frac{U}{I}. \quad (44)$$

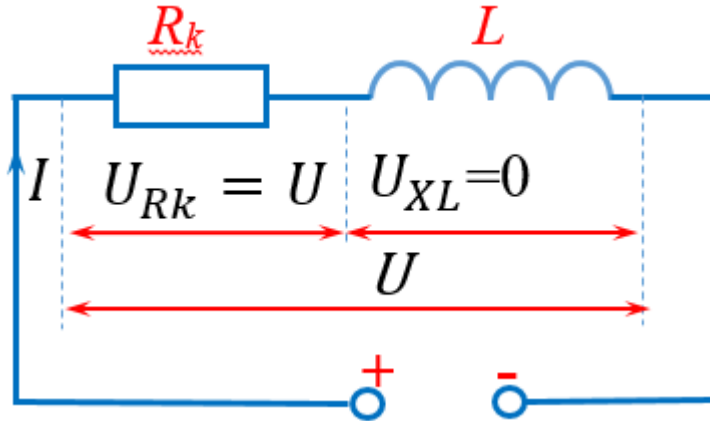


Рисунок 15

*Потужність у колі змінного струму.* У електричному колі змінного струму розрізняють активну, реактивну та повну потужності.

Активна потужність – це потужність, яка розсіюється на активному опорі.

$$P = I^2 R = IU \cos \varphi. \quad (45)$$

Реактивна потужність – це потужність, яка розсіюється на реактивному опорі, тобто на котушці індуктивності та конденсаторі. Вона визначає інтенсивність обміну електричною енергією між джерелом і реактивним навантаженням. Реактивна потужність не виконує корисної роботи. Вона характеризує енергію електричного та магнітного полів, які циркулюють між обкладками конденсатора та навколо котушки індуктивності. Тут енергія електричного поля перетворюється в енергію магнітного поля і навпаки

$$Q = I^2(X_L - X_C) = I^2(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = IU \sin \varphi. \quad (46)$$

$$[Q]_{ci} = \text{ВАр (вольт-ампер-реактивний)}$$

Згідно з формулою, (40) реактивна потужність може бути як додатною величиною  $Q > 0$  (якщо навантаження має активно-індуктивний характер), так і від'ємною  $Q < 0$  (якщо навантаження має активно-ємнісний характер).

Повна потужність

$$S = IU = I^2 Z. \quad (47)$$

$$[S]_{ci} = \text{ВА (вольт-ампер)}$$

Зв'язок між  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  для кола змінного струму визначається рівнянням:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (48)$$

Потужності у електричному колі змінного струму можуть бути подані трикутником потужності (рис. 16)

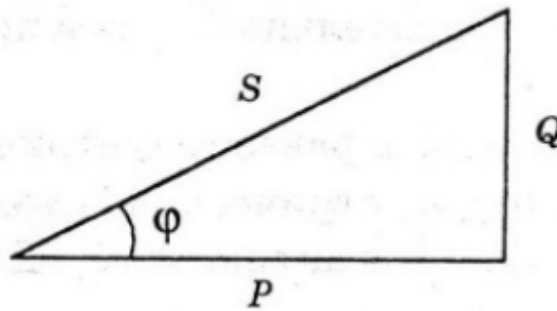


Рисунок 16 – Трикутник потужностей

Зсув фаз між струмом та напругою у колі змінного струму (рис. 16)

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z}. \quad (44)$$

Для більш раціонального використання потужності джерела змінного струму, потрібно намагатися зробити навантаження таким, щоб  $\cos\varphi$  електричного кола був близький до одиниці.

### Порядок виконання роботи та обробка результатів експерименту

Скласти електричне коло за схемою, наведеною на рис. 17.

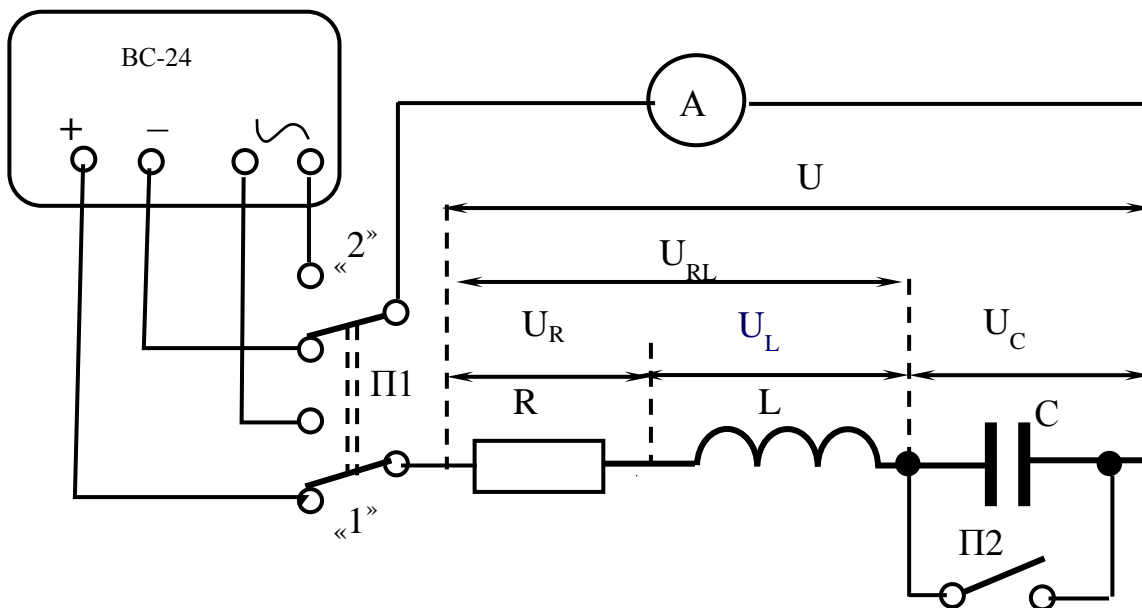


Рисунок 17 – Електрична схема лабораторної установки

**Завдання 1.** Визначення активного опору котушки індуктивності.

1. На блоці живлення BC-24 виставити вихідну наругу напругу 5 В. Лабораторну установку перемикачем «П1» перевести в режим роботи «Постійний струм».

2. Перемикачем «П2» заблокувати конденсатор С.

3. Виміряти значення постійного струму в електричному колі, напругу на котушці індуктивності  $U_L$ . Дослід провести для трьох різних напруг з інтервалом 3–5 В. Результати записати у таблицю 1.

4. За законом Ома для однорідної ділянки електричного кола визначити активний опір котушки індуктивності  $R_k = \frac{U_l}{I}$  ( $U_l, I$  – результати вимірювань у режимі роботи «Постійний струм»), оцінити його відносну похибку. Результати записати в таблицю 1.

**Завдання 2.** Дослідження кола змінного струму.

1. Лабораторну установку перемикачем «П1» перевести в режим роботи «Змінний струм».

2. Перемикачем «П2» розблокувати конденсатор С.

3. Виміряти значення змінного струму в електричному колі, напругу на активному опорі  $U_R$ , котушці індуктивності  $U_L$ , конденсаторі  $U_C$  та вхідну напругу  $U$ . Дослід провести за трьох різних напруг з інтервалом 3–5 В. Результати записати у таблицю 2.

4. За результатами дослідів у режимі роботи «Змінний струм» за законом Ома для електричного кола змінного струму визначити повний опір кола  $Z = \frac{U}{I}$ , активний опір резистора  $R = \frac{U_R}{I}$ , повний опір котушки індуктивності  $Z_L = \frac{U_L}{I}$ , реактивний опір конденсатора  $X_C = \frac{U_C}{I}$ , електричну ємність конденсатора  $C = \frac{1}{2\pi\nu X_C}$ . Результати записати в таблицю 2.

5. Розрахувати реактивний опір котушки індуктивності  $X_L = \sqrt{Z_L^2 - R_k^2}$ , індуктивність котушки  $L = \frac{X_L}{2\pi\nu}$ , активну  $U_{RL} = IR_L$  та реактивну  $U_{XL} = IX_L$  складові напруги на котушці індуктивності. Результати записати в таблицю 2.

6. Обчислити  $Z_{теор}$

$$Z_{теор} = \sqrt{(R + R_k)^2 + (X_L - X_C)^2}$$

7. Обчислити зсув фаз між струмом та напругою в електричному колі змінного струму.

$$\cos\varphi = \frac{R + R_k}{Z}$$

8. Розрахувати активну, реактивну та повну потужності (формули 45, 46, 47), перевірити баланс потужності (рівняння 48).

9. Побудувати у масштабі векторну діаграму струму та напруги для третьої серії дослідів таблиці 2.

### Контрольні питання

1. Змінний електричний струм. Основні характеристики змінного струму.

2. [Генератор змінного струму](#). Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея, правило Ленца. Явище електромагнітної самоіндукції. Індуктивність соленоїда та тороїда. Енергія магнітного поля котушки індуктивності з струмом.

3. [Ефективне значення струму, напруги та електрорушійної сили](#).

4. [Активний опір](#), [індуктивність](#) та [конденсатор у колі змінного струму](#). Реактивний опір котушки індуктивності та конденсатора у колі змінного струму. [Повний опір кола змінного струму](#). Закон Ома для кола змінного струму. Зсув фаз між струмом та напругою в електричному колі змінного струму.

5. Ідеальна та реальна котушки індуктивності.

6. Побудова векторних діаграм напруги та струму.

7. [Активна потужність](#), [реактивна потужність](#), [повна потужність у колі змінного струму](#).

Таблиця 1 – Результати експерименту в режимі роботи «Постійний струм»

Номер досліду	$U_L$ , В	I, А	$R_k$ , Ом	$\Delta R_k$ , Ом	$\varepsilon_R$ , %
1					-
2					-
3					-
С. зн.	=	=			

Таблиця 2 – Результати експерименту в режимі роботи «Змінний струм»  $\nu = 50$  Гц

Номер досліду	I, А	U, В	Z, Ом	$U_R$ , В	R, Ом	$U_C$ , В	$X_C$ , Ом	C, Ф	$U_L$ , В	$Z_L$ , Ом
1										
2										
3										
С. зн.	-	-		-		-			-	

Продовження таблиці 2

Номер досліду	$X_L$ , Ом	L, Гн	$U_{RL}$ , В	$U_{XL}$ , В	$Z_{теор}$ , Ом	$\cos\varphi$	P, Вт	Q, ВАР	S, ВА
1									
2									
3									
С. зн.			-	-			-	-	-

## Рекомендована література

1. Чолпан П. П. Фізика. К. : Вища шк., 2005. 567 с.
2. Кучерук І. М., Андріанов В. М. Обробка результатів фізичних досліджень. К. : Вища школа, 1981. 216 с.
3. Дуценко В. П. Фізичний практикум. Ч 2. К. : Вища школа, 1984. 253 с.
4. Бушок Г. Ф., Венгер Є. Ф. Курс фізики: У 3 кн. Кн. 2. Електрика і магнетизм : навч. посіб. К. : Вища шк., 2003. 278 с.
5. Андріяшик М. В., Вербицький Б. І., Король А. М. Курс фізики : модульно-рейтингова система навчання : підручник для студ. вищ. техн. навч. закладів. Київ : Фламенко, 2008. 530 с.
6. Король А. М., Андріяшик М. В. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електрика і магнетизм. Оптика. Елементи квантової механіки, фізики атома, атомного ядра і елементарних частинок : підручник для студ. вищ. техн. навч. закладів. К. : Фірма «Інкос», 2006. 344 с.
7. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальна фізика. Електрика та магнетизм. К. : Вища школа, 1990. 367 с.
8. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики : навчальний посібник для студ. техн. і пед. спец. вищ. навч. закладів: У 3 т. Т. 2. Електрика і магнетизм. Київ : Техніка , 2006. 452 с.

## **ДОДАТКИ**



Отриману нами систему рівнянь (А.2) називають системою нормальних рівнянь. Найкращою буде та емпірична залежність, для якої сума квадратів відхилень буде найменшою. Види регресії звичайно називаються за типом апроксимувальних функцій: лінійна, поліноміальна, експонентна, логарифмічна й т. п.

Під час визначення невідомих параметрів рівняння регресії необхідно, щоб вибірка складалася з  $n \geq (5 \dots 7)m$  пар значень  $X, Y$  ( $m$  – число невідомих коефіцієнтів у рівнянні регресії), у іншому випадку коефіцієнти рівняння регресії можуть бути статистично незначимими.

### 1.1 Лінійна залежність

Досить часто в процесі побудови емпіричної функції використовують лінійну залежність:  $y = a + b \cdot x$ .

Для лінійної залежності відносну міру тісноти зв'язку між факторами  $y$  і  $x$  характеризує коефіцієнт кореляції (у MathCAD для обчислення коефіцієнта кореляції вбудовано функцію  $\text{corr}(x,y)$ )

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (\text{A.3})$$

де  $\bar{x}, \bar{y}$  – середні значення.

Коефіцієнт кореляції може набувати значень:  $-1 \leq r \leq 1$  (табл. А.1).

Таблиця А.1

Значення коефіцієнта кореляції $r_{xy}$ для лінійної залежності $y = a + b \cdot x$	Оцінка міри тісноти зв'язку
1	2
$ r_{xy}  < 0.1$	Відсутній
$0.1 <  r_{xy}  \leq 0.3$	Слабкий
$0.3 <  r_{xy}  \leq 0.5$	Помірний
$0.5 <  r_{xy}  \leq 0.7$	Помітний
$0.7 <  r_{xy}  \leq 0.9$	Сильний
$0.9 <  r_{xy}  \leq 0.99$	Дуже сильний
$0.99 <  r_{xy}  \leq 1$	Повний (стверджувати про функціональність немає підстав, функціональність потрібно доводити)

Коефіцієнт кореляції  $r > 0$ , якщо кутовий коефіцієнт прямої додатний ( $b > 0$ ), і  $r < 0$ , якщо кутовий коефіцієнт прямої від'ємний ( $b < 0$ ). Модуль коефіцієнта кореляції  $|r| = 1$ , якщо всі точки лежать на прямій і  $|r| < 1$ , якщо точки розсіюються навколо прямої (рис. А.1). Для  $|r| \approx 0.7 \div 1$  зв'язок між незалежною змінною  $X$  та залежною змінною  $Y$  можна формально описати лінійною емпіричною залежністю, але це ще не означає, що вони дійсно між собою пов'язані функціонально лінійною залежністю (табл. А.1).

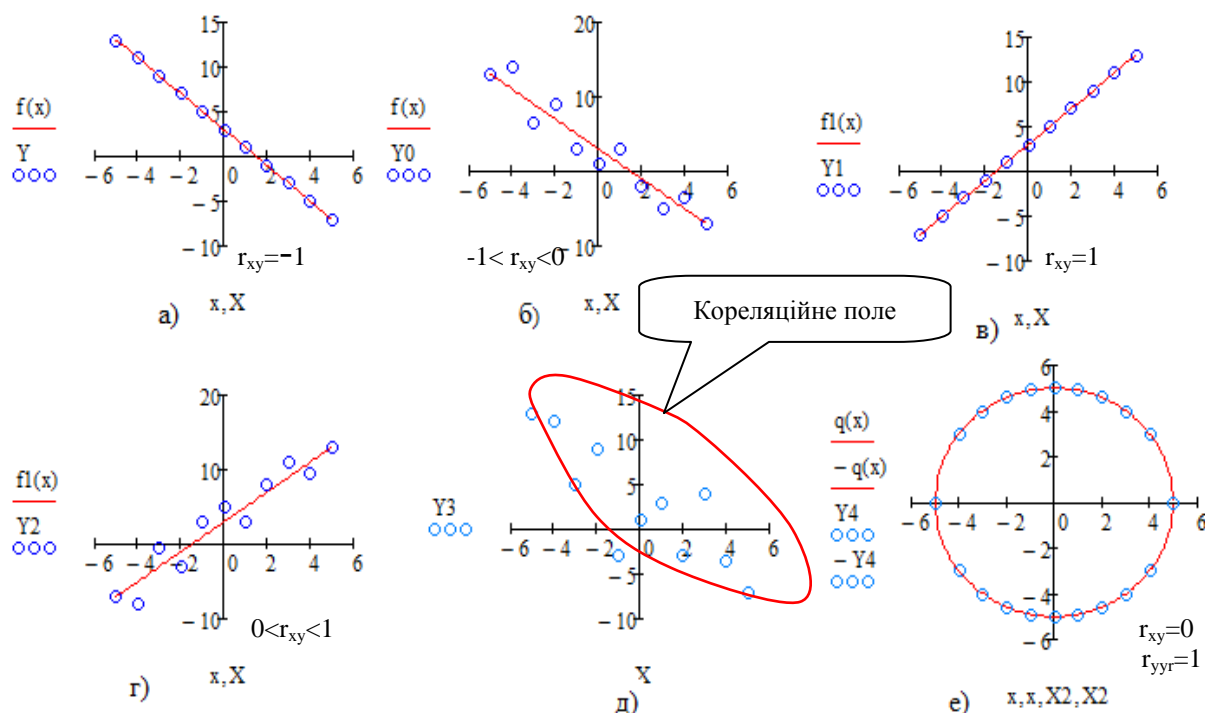


Рисунок А.1 – Коефіцієнт кореляції

Для нелінійної залежності коефіцієнт кореляції не може бути повноцінним критерієм міри тісноти зв'язку між залежною та незалежною змінними. Наприклад, для точок  $X, Y$ , які лежать на колі (рис. А.1, е), незважаючи на те, що зв'язок між ними описується залежністю  $y^2 + x^2 = R^2$ , коефіцієнт кореляції  $r_{xy} = 0$ . Коефіцієнт кореляції  $r_{Y,YR}$ , обчислений для експериментальних значень  $Y$  та отриманих за рівнянням регресії  $YR$  як для лінійної, так і для нелінійної функції, характеризує якість вибраної функції, якщо тип функції підбрано вдало, то  $r_{Y,YR} \sim 1$ .

Важливими характеристиками рівняння регресії є відносна середня арифметична похибка  $\varepsilon$  (її наводять у відсотках) та абсолютна середня квадратична похибка  $s$  :

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_i - YR_i}{Y_i} \right| \cdot 100,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - YR_i)^2}.$$

Найпростіший спосіб апроксимації МНК довільних даних за допомогою полінома першого степеня, тобто функції вигляду  $y = a + b \cdot x$ .

Знайдемо суму квадратів відхилень точок від лінії регресії

$$\delta = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2.$$

Введемо позначення

$$\varphi(x_i, y_i, a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2, \quad (\text{A.4})$$

де  $\varphi(x_i, y_i, a, b)$  – цільова функція.

Знайдемо частинні похідні по  $a$  та  $b$  від цільової функції

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a + b \cdot x_i)],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [(y_i - (a + b \cdot x_i)) \cdot x_i].$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля, отримаємо систему нормальних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів для лінійної залежності:

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Розв'язуємо систему нормальних рівнянь. Отримані значення коефіцієнтів використовуємо в рівнянні регресії  $y = a + b \cdot x$ . За аналогічною методикою обчислюються коефіцієнти й будь-які інші види регресії, які відрізняються тільки громіздкістю відповідних математичних перетворень. У MathCAD системи нормальних рівнянь зручно розв'язувати методом оберненої матриці.

## 1.2 Метод найменших квадратів для нелінійної залежності

На практиці переважна більшість процесів описується нелінійними залежностями. Виходячи із суті МНК, можна розробити систему нормальних рівнянь для будь-якої нелінійної залежності.

### Приклад А.1. Для нелінійної залежності

$$y = a + b / x, \quad (\text{A.6})$$

розробити систему нормальних рівнянь для визначення невідомих параметрів МНК та знайти параметри цієї емпіричної залежності для експериментальних даних таблиці А.2.

Результати, отримані за МНК, порівняти з результатами, отриманими МВТ (методом вибраних точок ми отримали  $F(x) = 2 + \frac{25}{x}$ ).

Таблиця А.2

x	1	1.5	3	4	6.5	10	11	12.5
y	27	17.5	11.7	8	6.9	4.4	4.2	4.0

### Розв'язування

Аналогічно, як і для лінійної залежності, для нелінійного випадку маємо

$$\varphi(x_i, y_i, a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + b/x_i)]^2. \quad (\text{A.7})$$

Знайдемо частинні похідні по  $a$  та  $b$  від цільової функції (А.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a + b/x_i)], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ (y_i - (a + b/x_i)) \frac{1}{x_i} \right]. \end{aligned}$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля, отримаємо систему нормальних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \end{cases}. \quad (\text{A.8})$$

Знайдемо розв'язок системи (А.8), використовуючи матричні засоби системи MathCAD (лістинг А.1).

Лістинг А.1

Функцію для МНК позначимо через  $f(x)$ , а для МВТ -  $F(x)$ .

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad \text{data} := \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 3 & 4 & 6.5 & 10 & 11 & 12.5 \\ 27 & 17.5 & 11.7 & 8 & 6.9 & 4.4 & 4.2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{data} := \text{data}^T$$

$$n := \text{rows}(\text{data}) \quad X := \text{data}^{(1)} \quad Y := \text{data}^{(2)}$$

$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{X_i} \right) \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{X_i} \right) & \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X_i)^2} \end{bmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B$$

$$a = 2.328 \quad b = 24.33 \quad f(x) := a + \frac{b}{x}$$

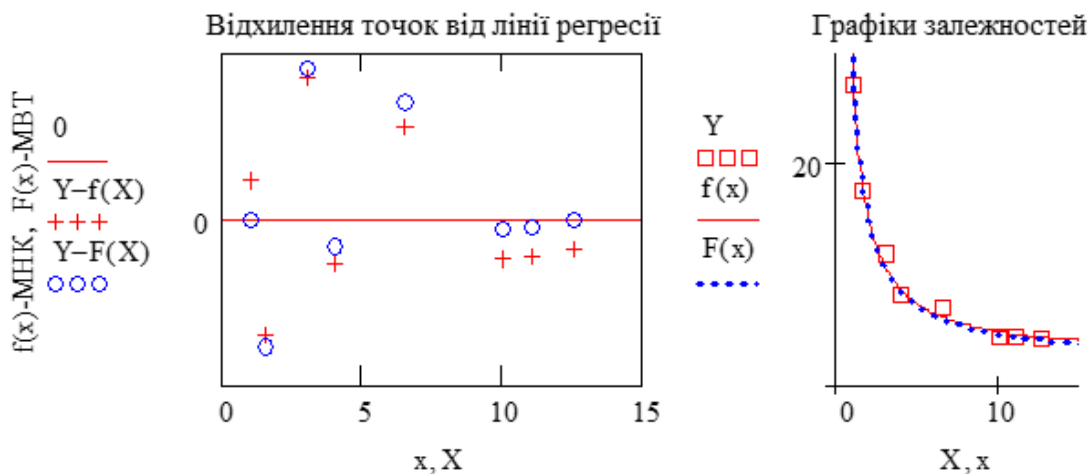
Суми квадратів відхилень (значення параметрів для МВТ див. рівняння (7.1, 7.2)):

$$\text{МНК} \quad \sum_{i=1}^n (Y_i - f(X_i))^2 = 3.985$$

$$\text{МВТ} \quad F(x) := 2 + \frac{25}{x} \quad \sum_{i=1}^n (Y_i - F(X_i))^2 = 4.417$$

Отже, МНК в порівнянні з МВТ дає меншу суму квадратів відхилень експериментальних точок від лінії регресії.

$$\text{scale} := \max(|f(X) - Y|, |F(X) - Y|) \cdot 1.1 \quad x := 0, 0.1..15 \quad i := 1..n$$



### 1.3 Лінеаризація нелінійних залежностей

Деякі нелінійні функції методом еквівалентних перетворень можна звести до лінійного виду. Така процедура називається лінеаризацією функції. Вона дає можливість спростити процедуру розробки систем нормальних рівнянь МНК, встановити тісноту зв'язку між змінними та встановити вид нелінійної функції.

Під час лінеаризації функцій потрібно дотримуватися таких рекомендацій:

1. Для функцій типу  $y = a + b \cdot \varphi(x)$  вводять заміну  $t = \varphi(x)$  (приклад А.2).
2. Для степеневих, показникових функції та функцій, які містять добутки, застосовують метод логарифмування (приклади А.3, А.4).
3. Для дробово-ірраціональних функцій ліву та праву частини функції підносять до степеня  $n = -1$  (приклад А.5).

Лінеаризуємо нелінійну залежність

$$y = a + b \cdot \frac{1}{x}. \quad (\text{A.9})$$

Введемо нову змінну

$$t = \frac{1}{x}. \quad (\text{A.10})$$

Підставимо (А.10) у (А.9), отримаємо:

$$y = a + b \cdot \frac{1}{x} = a + b \cdot t. \quad (\text{A.11})$$

Отже, ввівши нову змінну, ми лінеаризували нелінійну залежність (А.9)

**Приклад А.2.** Лінеаризувати нелінійну залежність  $y = a + \frac{b}{\sqrt{x}}$  та розробити для неї систему нормальних рівнянь МНК.

#### Розв'язування

Введемо нову змінну

$$t = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (\text{A.12})$$

Підставимо (А.12) у рівняння  $y = a + \frac{b}{\sqrt{x}}$ , отримаємо:

$$y = a + b \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = a + b \cdot t .$$

Отже, ввівши нову змінну, ми лінеаризували нелінійну залежність  $y = a + \frac{b}{\sqrt{x}}$ , маємо  $y = a + b \cdot t$ .

Систему нормальних рівнянь для нелінійної залежності  $y = a + \frac{b}{\sqrt{x}}$  можна отримати досить простим методом. Для цього записуємо систему нормальних рівнянь для лінійної залежності для змінних  $t, y$

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n t_i + b \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i \end{cases} . \quad (\text{A.13})$$

Замінивши  $t$  на  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  у системі рівнянь (A.13), отримаємо систему нормальних рівнянь для знаходження параметрів нелінійної залежності  $y = a + \frac{b}{\sqrt{x}}$ .

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sqrt{x_i}} \end{cases} . \quad (\text{A.14})$$

**Приклад А.3.** Лінеаризувати та розробити систему нормальних рівнянь МНК для степеневі функції

$$y = a \cdot x^b . \quad (\text{A.14})$$

### Розв'язування

Прологарифмуємо степеневу функцію

$$\ln(y) = \ln(a) + b \cdot \ln(x) . \quad (\text{A.15})$$

Введемо нові змінні:

$$z = \ln(y) , \quad (\text{A.16})$$

$$t = \ln(x) , \quad (\text{A.17})$$

$$A = \ln(a) . \quad (\text{A.18})$$

Маємо:

$$z = A + b \cdot t . \quad (\text{A.19})$$

Запишемо для отриманої лінійної функції  $z = A + b \cdot t$  систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} nA + b \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n z_i \\ A \sum_{i=1}^n t_i + b \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i \cdot z_i \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Перейдемо у системі рівнянь (A.20) до старих змінних  $x, y, a$  згідно зі співвідношеннями (A.16, A.17, A.18, A.19), отримаємо систему нормальних рівнянь МНК для степеневій залежності  $y = a \cdot x^b$ :

$$\begin{cases} n \cdot \ln(a) + b \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \sum_{i=1}^n \ln(y_i) \\ \ln(a) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + b \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2) = \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \cdot \ln(z_i) \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Із системи рівнянь (A.21) простіше визначити не значення параметра  $a$ , а його логарифм тобто  $A = \ln(a)$ . Визначивши  $A$ , повертаємося до  $a$ . З (A.19) маємо:

$$a = e^A \quad (\text{A.22})$$

**Приклад А.4.** Лінеаризувати та розробити систему нормальних рівнянь МНК для показникової функції:

$$y = a \cdot b^x \quad (\text{A.23})$$

#### Розв'язування

Логарифмуємо показникову функцію та вводимо нові змінні:  $\ln(y) = \ln(a) + x \cdot \ln(b)$ ,  $z = \ln(y)$ ,  $A = \ln(a)$ ,  $B = \ln(b)$ , отримаємо

$$z = A + B \cdot x \quad (\text{A.24})$$

Записуємо за аналогією до степеневій функції систему нормальних рівнянь для показникової функції:

$$\begin{cases} n \ln a + \ln b \sum x_i = \sum \ln y_i \\ \ln a \sum x_i + \ln b \sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

**Приклад А.5** Лінеаризувати та розробити систему нормальних рівнянь МНК для функції

$$y = \frac{ax}{b+x} \quad (\text{A.26})$$

#### Розв'язування

Піднесемо ліву та праву частини рівняння (A.26) до степеня -1:

$$y^{-1} = \left( \frac{ax}{b+x} \right)^{-1}, \quad (\text{A.27})$$

Отримаємо

$$\frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{a}. \quad (\text{A.28})$$

Введемо нові змінні:

$$Y = \frac{1}{y}, \quad (\text{A.29})$$

$$X = \frac{1}{x}, \quad (\text{A.30})$$

$$A = \frac{1}{a}, \quad (\text{A.31})$$

$$B = \frac{b}{a}. \quad (\text{A.32})$$

Із рівнянь (A.26 – A.32) отримаємо еквівалентну лінійну функцію для нелінійної залежності  $y = \frac{ax}{b+x}$ :

$$Y = A + B \cdot X. \quad (\text{A.33})$$

Запишемо систему нормальних рівнянь для лінійної залежності (A.33):

$$\begin{cases} nA + B \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i \\ A \sum_{i=1}^n X_i + B \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \end{cases}. \quad (\text{A.34})$$

Повернемося в (A.34) до попередніх змінних:

$$\begin{cases} n \cdot \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{b}{a} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i \cdot y_i} \end{cases}. \quad (\text{A.35})$$

Після нескладних перетворень із (A.35) отримаємо систему нормальних рівнянь для нелінійної залежності  $y = \frac{ax}{b+x}$ :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} - b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = n \\ a \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i \cdot y_i} - b \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \end{cases}. \quad (\text{A.36})$$

Система нормальних рівнянь для функції  $y = \frac{ax}{b+x}$  розроблена, виходячи з основ МНК, має вигляд:

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 - b \sum x_i y_i = \sum x_i^2 y_i \\ a \sum x_i y_i - b \sum y_i^2 = \sum x_i y_i^2 \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Системи (А.36, А37) нормальних рівнянь дають однакові результати, але (А.36) змінює область визначення функції ( $x_i \neq 0, y_i \neq 0$ ).

Системи нормальних рівнянь можна отримати для будь-яких нелінійних залежностей. Системи нормальних рівнянь для методу найменших квадратів наведено в таблиці А.3, індекси у всіх сумах нормальних рівнянь змінюються від 1 до n).

Таблиця А.3

Ч.ч.	Тип залежності	Система нормальних рівнянь (n - число пар значень x, y)
1	2	3
1	$y = a + bx$	$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$
2	$y = \alpha \cdot x$	$\alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
3	$R = a(1 + b \cdot \Delta t)$	$\begin{cases} a(n + b \sum_{i=1}^n \Delta t_i) = \sum_{i=1}^n R_i \\ a(\sum_{i=1}^n \Delta t_i + b \sum_{i=1}^n \Delta t_i^2) = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot R_i \end{cases}$
4	$y = a + b/x$	$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \end{cases}$
5	$y = \frac{1}{a + bx}$	$\begin{cases} a \sum y_i^2 + b \sum x_i y_i^2 = \sum y_i \\ a \sum x_i y_i^2 + b \sum x_i^2 y_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$
6	$y = \frac{x}{a + bx}$	$\begin{cases} a \sum y_i^2 + b \sum x_i y_i^2 = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i y_i^2 + b \sum x_i^2 y_i^2 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$
7	$y = \frac{a}{b + x}$	$\begin{cases} na - b \sum y_i = \sum x_i y_i \\ a \sum y_i - b \sum y_i^2 = \sum x_i y_i^2 \end{cases}$
8	$y = \frac{ax}{b + x}$	$\begin{cases} a \sum x_i^2 - b \sum x_i y_i = \sum x_i^2 y_i \\ a \sum x_i y_i - b \sum y_i^2 = \sum x_i y_i^2 \end{cases}$

Продовження таблиці А.3

1	2	3
9	$y = \frac{ax^2}{b+x}$	$\begin{cases} a\sum x_i^4 - b\sum x_i^2 y_i = \sum x_i^3 y_i \\ a\sum x_i^2 y_i - b\sum y_i^2 = \sum x_i y_i^2 \end{cases}$
10	$y = ab^x$	$\begin{cases} n \ln a + \ln b \sum x_i = \sum \ln y_i \\ \ln a \sum x_i + \ln b \sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i \\ y_i \neq 0 \end{cases}$
11	$y = ae^{bx}$	$\begin{cases} n \ln a + b \sum x_i = \sum \ln y_i \\ \ln a \sum x_i + b \sum (x_i)^2 = \sum x_i \ln y_i \\ y_i \neq 0 \end{cases}$
12	$y = \frac{1}{a + b \cdot e^{-x}}$	$\begin{cases} n a + b \sum \exp(-x_i) = \sum \frac{1}{y_i} \\ a \sum \exp(-x_i) + b \sum \exp(-2x_i) = \sum \frac{\exp(-x_i)}{y_i} \\ y_i \neq 0 \end{cases}$
13	$y = a + b \ln x$	$\begin{cases} n a + b \sum \ln x_i = \sum y_i \\ a \sum \ln x_i + b \sum (\ln x_i)^2 = \sum y_i \cdot \ln x_i \\ x_i \neq 0 \end{cases}$
14	$y = ax^b$	$\begin{cases} n \ln a + b \sum \ln x_i = \sum \ln y_i \\ \ln a \sum \ln x_i + b \sum (\ln x_i)^2 = \sum \ln x_i \cdot \ln y_i \\ x_i \neq 0, y_i \neq 0 \end{cases}$
15	$y = a \exp\left(\frac{b}{x}\right)$	$\begin{cases} n \ln a + b \sum (1/x_i) = \sum \ln y_i \\ \ln a \sum 1/x_i + b \sum (1/x_i)^2 = \sum (\ln y_i / x_i) \end{cases}$
16	$y = a + bx^2$	$\begin{cases} n a + \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i^4 = \sum (x_i^2 y_i) \end{cases}$
17	$y = a + bx + cx^2$	$\begin{cases} n a + b \sum x_i + c \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 = \sum (x_i y_i) \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 = \sum (x_i^2 y_i) \end{cases}$
18	$y = a + bx^3$	$\begin{cases} n a + \sum x_i^3 = \sum y_i \\ a \sum x_i^3 + b \sum x_i^6 = \sum (x_i^3 y_i) \end{cases}$
19	$z = a + bx + cy$	$\begin{cases} n \cdot a + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n z_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ a \sum_{i=1}^n y_i + b \sum_{i=1}^n x_i y_i + c \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i z_i \end{cases}$

## Додаток Б

### 1 Приклади обробки результатів фізичного експерименту засобами системи Mathcad

#### 1.1 Приклад обробки експериментальних даних лабораторної роботи 2-6

Лістинг Б 1

##### Лабораторна робота 2-6. Завдання 2

Введення експериментальних даних

Температура град. Цельсія, Електричний опір Ом

ORIGIN := 1

Нагрівання		Охолодження	
Температура	Електричний опір	Температура	Електричний опір
$t_n :=$	$R_n :=$	$t_{ox} :=$	$R_{ox} :=$
(15)	(45.8)	(114)	(64.1)
20	47.3	108	62.1
25	48.4	101	61.7
30	48	97	60.8
35	49.5	93	59
40	50.4	86	58
45	51.8	82	57.6
50	52.2	75	57.3
55	53.2	71	55.9
60	54.8	65	55.8
65	55	61	54.3
70	56.5	55	53.9
75	56.9	51	51.9
80	57.2	47	51.6
85	58.7	41	50.3
90	59.6	35	49
95	60	30	48.8
100	61.5	25	48.1
105	62.8	20	46.8
110	63.3	18	46.4

$T := \text{stack}(t_n, t_{ox})$  <<Об'єднано матриці температури при нагріванні та охолодженні мідного резистора.

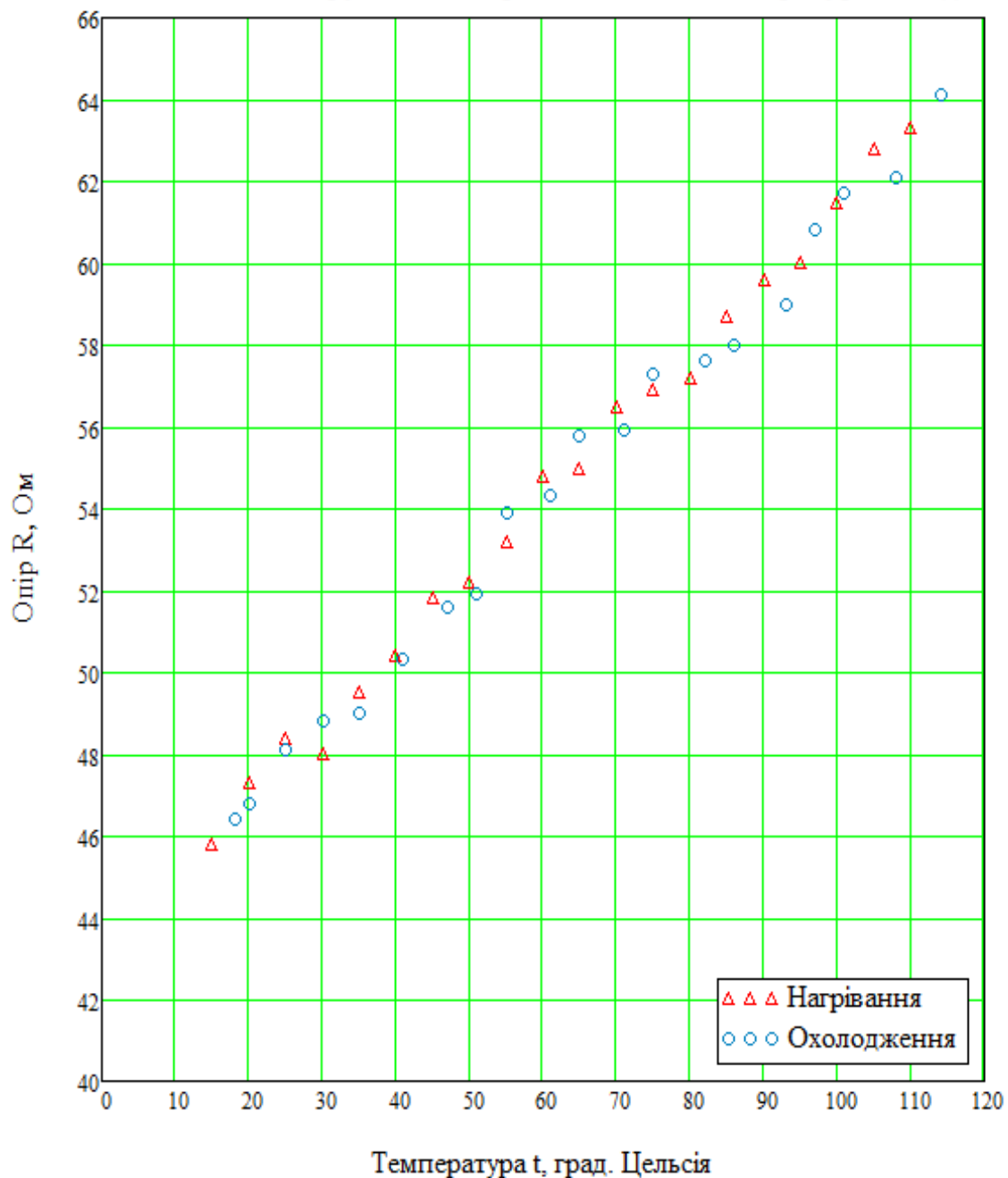
$R := \text{stack}(R_n, R_{ox})$  <<Об'єднано матриці значення електричного опору при нагріванні та охолодженні мідного резистора.

$r := \text{corr}(T, R) = 0.996$  <<коефіцієнт кореляції між  $T$  і  $R$ ,  $r > 0.99$ , отже зв'язок між  $T$  і  $R$  повний.

## Продовження лістингу Б 1

Для аналізу експериментальних даних будуюмо точковий графік

Залежність опору мідного провідника від температури  $R=f(t)$



$T := \text{stack}(tn, to) \ll$  Об'єднано матриці температури при нагріванні та охолодженні мідного резистора.

$R := \text{stack}(Rn, Rox) \ll$  Об'єднано матриці значення електричного опору при нагріванні та охолодженні мідного резистора.

$r_{\text{ww}} := \text{corr}(T, R) = 0.996$   $\ll$  коефіцієнт кореляції між  $T$  і  $R$ ,  $r > 0.99$ , отже зв'язок між  $T$  і  $R$  повний.

### Продовження лістингу Б 1

Визначення невідомих параметрів лінійної залежності опору від температури. Залежність має вигляд:  $R=R_0(1+\alpha T)=R_0+\alpha R_0 T$ . Введемо новий параметр  $\beta=\alpha R_0$ . Отримаємо еквівалентну нову лінійну залежність  $R=R_0+\beta T$ . Невідомі параметри  $R_0$  і  $\beta$  залежності визначимо методом найменших квадратів. Скористаємося вбудованою функцією Mathcad *linfit*.

Формуємо допоміжну функцію для функції *linfit*:

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \ll \text{коefficient при } R_0 \\ \ll \text{коefficient при } \beta \end{array}$$

Визначаємо невідомі параметри  $R_0$  і  $\beta$  залежності  $R=R_0+\beta T$ :

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ \beta \end{pmatrix} := \text{linfit}(T, R, F)$$
$$\begin{pmatrix} R_0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.315 \\ 0.18 \end{pmatrix} \ll \text{значення параметрів залежності}$$

Повертаємося до старого параметра  $\alpha$  залежності.

$$\alpha := \frac{\beta}{R_0} = 4.148 \times 10^{-3} \ll \text{значення параметра } \alpha \text{ залежності } R=R_0(1+\alpha T)$$

$$R_0 = 43.315 \ll \text{значення параметра } R_0 \text{ залежності } R=R_0(1+\alpha T)$$

Задаємо функцію залежності електричного опору мідної дротини від температури:

$$f(x) := R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot x)$$

$$n := \text{rows}(R) = 40 \quad \ll \text{число пар значень } T, R$$

$$i := 1..n \quad \ll \text{задано інтервал зміни індексів матриць } T \text{ і } R$$

$$R_{t_i} := f(T_i) \quad \ll \text{розрахунок значень електричного опору за формулою } R_t=R_0(1+\alpha T)$$

$$\Delta R_i := |R_i - R_{t_i}| \quad \ll \text{відхилення експериментальних значень від розрахованих за формулою } R_t=R_0(1+\alpha T)$$

$$SRV := \sum_{i=1}^n (\Delta R_i)^2 = 7.814 \ll \text{сума квадратів відхилень експериментальних значень від розрахованих за формулою } R_t=R_0(1+\alpha T)$$

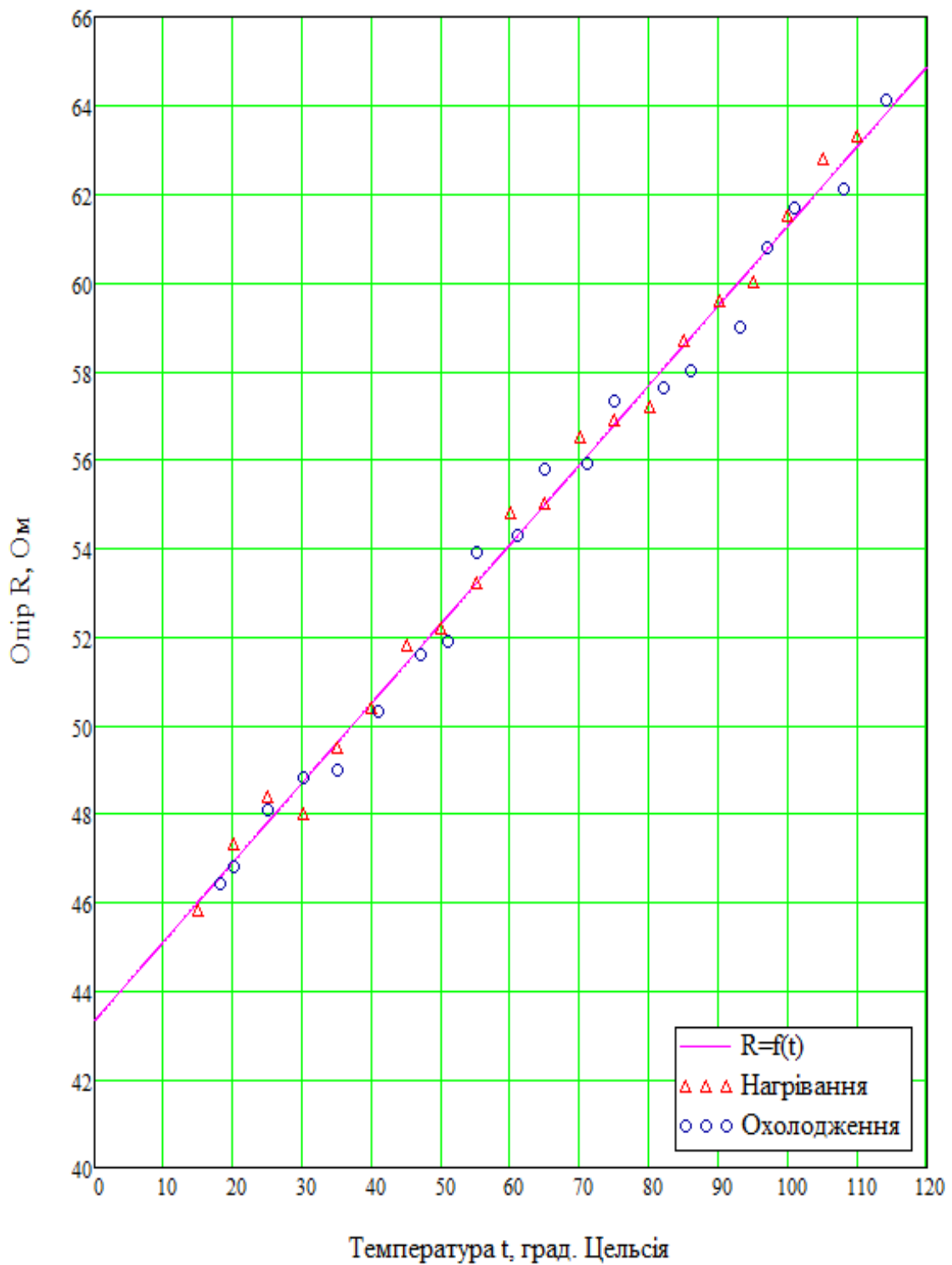
$$\varepsilon := \frac{100}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\Delta R_i}{R_i} = 0.651 \quad \ll \text{Відносна середня арифметична похибка рівняння апроксимації}$$

Продовження лістингу Б 1

Будуємо графік

$t := 0, 0.1 .. 120$  <<задано інтервал зміни аргументу функції  $f(t)=R_0(1+\alpha t)$

Залежність опору мідного провідника від температури  $R=f(t)$



## 1.2 Приклад обробки експериментальних даних лабораторної роботи 2-8

### Експериментальна частина

1. Складаємо схему для визначення внутрішнього опору та електрорушійної сили джерел. Визначаємо напруги  $U_{1a}$ ,  $U_{1b}$ ,  $U_{2a}$ ,  $U_{2b}$  на зовнішній ділянці кола та струми в колі  $I_{1a}$ ,  $I_{1b}$ ,  $I_{2a}$ ,  $I_{2b}$  за різних зовнішніх опорів для кожного джерела ЕРС. Результати вимірювань записуємо у таблицю Б.1 (значення ЕРС та внутрішніх опорів джерел записано у таблицю після проведення розрахунків).

Таблиця Б.1 – Визначення  $E$  та  $r$  джерел електричного струму

Джерело № 1					
$I_{1a}$ , А	$U_{1a}$ , В	$I_{1b}$ , А	$U_{1b}$ , В	$E_1$ , В	$r_1$ , Ом
1,4	5,8	0,64	6,5	7,089	0,921
Джерело № 2					
$I_{2a}$ , А	$U_{2a}$ , В	$I_{2b}$ , А	$U_{2b}$ , В	$E_2$ , В	$r_2$ , Ом
2,1	8,31	0,95	9,8	11,039	1,304

3. Складаємо електричну схему (рис. Б.1)

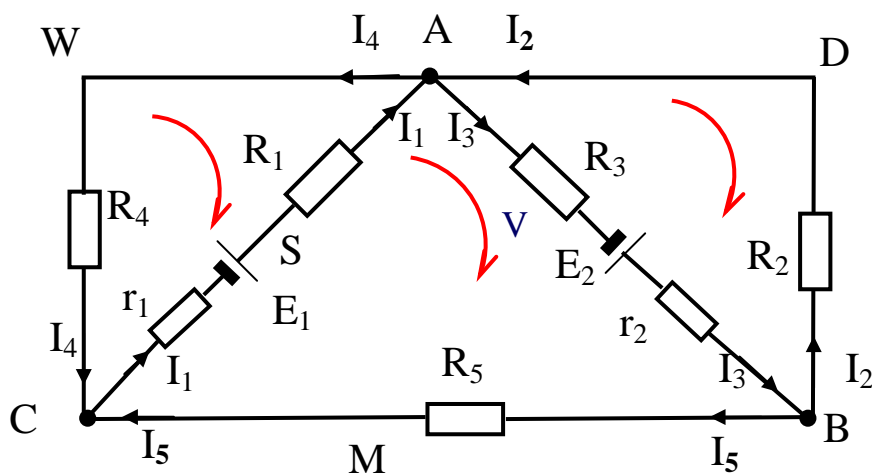


Рисунок Б.1 – Електрична схема

Проводимо вимірювання напруги  $U_i$  на резисторах та струму  $Ie_i$  у гілках електричного кола. Одночасно на рисунку показуємо напрямки струмів в гілках та полярності напруги на резисторах.

Результати дослідів записуємо у таблицю Б.2 (значення струмів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  записано в таблицю після проведення відповідних розрахунків за правилами Кірхгофа).

Таблиця Б.2 – Результати експерименту

Експериментальне значення струмів у гілках електричного кола				
$I_{e1}, A$	$I_{e2}, A$	$I_{e3}, A$	$I_{e4}, A$	$I_{e5}, A$
1,1	0,3	1,8	0,6	0,4
$U_1, B$	$U_2, B$	$U_3, B$	$U_4, B$	$U_5, B$
3,1	0,5	7,0	2,7	3,0
$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$R_4, Ом$	$R_5, Ом$
2,818	1,667	3,889	4,5	7,5
Значення струмів у гілках електричного кола розраховане за правилами Кірхгофа				
$I_1, A$	$I_2, A$	$I_3, A$	$I_4, A$	$I_5, A$
1,114	0,274	2,038	0,65	0,465

*Підготовка даних до обробки засобами Mathcad*

Записуємо систему рівнянь за правилами Кірхгофа для електричного кола (рис. Б.1) За першим правилом Кірхгофа записуємо 2 рівняння:

- для вузла А:  $I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0$ ;
- для вузла С:  $-I_1 + I_4 + I_5 = 0$ .

За другим правилом Кірхгофа записуємо 3 рівняння:

- для контуру ASCWA:  $-(R_1 + r_1)I_1 - R_4I_4 = -E_1$ ;
- для контуру ANBCSA:  $(R_3 + r_2)I_3 + R_5I_5 + (r_1 + R_1)I_1 = E_1 + E_2$ ;
- для контуру: ADBVA:  $-R_2I_2 - (r_2 + R_3)I_3 = -E_2$ .

Проводимо розрахунки засобами Mathcad (Лістинг Б.2). Всі фізичні величини у робочий документ Mathcad вводимо у Міжнародній системі одиниць СІ.

### Лабораторна робота 2-8

#### 1. Розрахунок внутрішніх опорів та електрорушійних сил джерел

ORIGIN := 1

Джерело ЕРС №1

$$I_{1a} := 1.4 \quad U_{1a} := 5.8 \quad I_{1b} := 0.64 \quad U_{1b} := 6.5$$

$$r_1 := \frac{U_{1b} - U_{1a}}{I_{1a} - I_{1b}} = 0.921 \ll \text{Внутрішній опір джерела №1, Ом}$$

$$E_1 := U_{1a} + \frac{I_{1a}}{I_{1a} - I_{1b}} \cdot (U_{1b} - U_{1a}) = 7.089 \ll \text{ЕРС джерела №1, В}$$

Джерело ЕРС №2

$$I_{2a} := 2.1 \quad U_{2a} := 8.3 \quad I_{2b} := 0.95 \quad U_{2b} := 9.8$$

$$r_2 := \frac{U_{2b} - U_{2a}}{I_{2a} - I_{2b}} = 1.304 \ll \text{Внутрішній опір джерела №2, Ом}$$

$$E_2 := U_{2a} + \frac{I_{2a}}{I_{2a} - I_{2b}} \cdot (U_{2b} - U_{2a}) = 11.039 \ll \text{ЕРС джерела №2, В}$$

Продовження лістингу Б.2

2. Розрахунок струмів у гілках електричного кола за правилами Кірхгофа

Введення результатів експерименту:

$$I_e := \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.3 \\ 1.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \ll \text{Матриця експериментальних значень сили струму у гілках електричного кола, А}$$

$$U := \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0.5 \\ 7.0 \\ 2.7 \\ 3.0 \end{pmatrix} \ll \text{Матриця експериментальних значень напруги на резисторах, В}$$

$$n := \text{rows}(U) = 5 \ll \text{Визначено число рядків матриць експериментальних даних}$$

$$i := 1..n \ll \text{Задано інтервал зміни індексів}$$

$$R_i := \frac{U_i}{I_{e_i}} \ll \text{Розрахунок електричних опорів резисторів}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2.818 \\ 1.667 \\ 3.889 \\ 4.5 \\ 7.5 \end{pmatrix} \ll \text{Результати розрахунку електричних опорів резисторів, Ом}$$

Для розв'язування системи рівнянь використовуємо блок Given. У тілі блока Given рівняння системи записуємо без фігурної дужки системи рівнянь через знак рівності Булевої алгебри. Для розв'язування системи рівнянь у блоці Given використовуємо вбудовану функцію системи MATHCAD Find.

$$I := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ll \text{Задано початкові наближення струмів}$$

Продовження лістингу Б.2

Given << Відкрито блок Given

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

$$-I_1 + I_4 + I_5 = 0$$

$$-(R_1 + r_1) \cdot I_1 - R_4 \cdot I_4 = -E_1$$

$$(R_3 + r_2) \cdot I_3 + R_5 \cdot I_5 + (r_1 + R_1) \cdot I_1 = E_1 + E_2$$

$$-R_2 \cdot I_2 - (r_2 + R_3) \cdot I_3 = -E_2$$

I := Find(I) << Розв'язування системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.108 \\ 0.275 \\ 2.038 \\ 0.655 \\ 0.454 \end{pmatrix} \ll \text{Результати розрахунку сили струмів за правилами Кірхгофа, А}$$

Перевірка розв'язку ;

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

$$-I_1 + I_4 + I_5 = 0$$

$$-(R_1 + r_1) \cdot I_1 - R_4 \cdot I_4 = -7.089 \quad -E_1 = -7.089$$

$$(R_3 + r_2) \cdot I_3 + R_5 \cdot I_5 + r_1 + R_1 \cdot I_1 = 18.029 \quad E_1 + E_2 = 18.129$$

$$-R_2 \cdot I_2 - (r_2 + R_3) \cdot I_3 = -11.039 \quad -E_2 = -11.039$$

Перевірка першого правила Кірхгофа за показами амперметрів.  
Ціна найменшої поділки амперметра 0.2 А. Абсолютна похибка 0,1 А.

$$I_{e1} + I_{e2} - I_{e3} + I_{e4} = 0.2 \quad \ll \text{Сума струмів для вузла А}$$

$$-I_{e1} + I_{e4} + I_{e5} = -0.1 \quad \ll \text{Сума струмів для вузла С}$$

Результати вимірювання струмів узгоджуються у межах похибок з результатами розрахунків за I правилом Кірхгофа.

$$\Delta I_{e_i} := |I_i - I_{e_i}| \ll \text{Розрахунок модуля різниці між розрахунковими та експериментальними значеннями струмів, А}$$

$$\varepsilon_i := \frac{\Delta I_{e_i}}{I_{e_i}} \cdot 100 \ll \text{Оцінка відносних похибок експериментальних значень струмів, \%}$$

Продовження лістингу Б.2

$$\Delta I_e = \begin{pmatrix} 0.008 \\ 0.025 \\ 0.238 \\ 0.055 \\ 0.054 \end{pmatrix} \ll \text{Результати розрахунку } \Delta I_e, A \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0.753 \\ 8.43 \\ 13.195 \\ 9.087 \\ 13.44 \end{pmatrix} \ll \text{Відносні похибки експериментальних значень струмів, \%}$$

Розробимо порівняльну таблицю

$$S := ("I, A" \quad "I_e, A" \quad "\Delta I_e, A" \quad "\epsilon, \%") \ll \text{Шапка таблиці}$$

$$REZ := \text{augment}(I, I_e, \Delta I_e, \epsilon) \ll \text{Об'єднання матриць}$$

$$REZ := \text{stack}(S, REZ) \ll \text{Приєднання шапки}$$

$$REZ = \begin{pmatrix} "I, A" & "I_e, A" & "\Delta I_e, A" & "\epsilon, \%" \\ 1.108 & 1.1 & 0.008 & 0.753 \\ 0.275 & 0.3 & 0.025 & 8.43 \\ 2.038 & 1.8 & 0.238 & 13.195 \\ 0.655 & 0.6 & 0.055 & 9.087 \\ 0.454 & 0.4 & 0.054 & 13.44 \end{pmatrix} \ll \text{Підсумкова матриця. Матрицю виводимо у форматі таблиці}$$

**Додаткове завдання.** Оцінімо вплив внутрішніх опорів джерел на силу струмів у гілках електричного кола. Прийнемо, що внутрішні опори джерел рівні 0.

$$r_1 := 0 \quad r_2 := 0$$

$$I_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ll \text{Задано початкові наближення струмів}$$

Given  $\ll$  Відкрито блок Given

$$I_0_1 + I_0_2 - I_0_3 + I_0_4 = 0$$

$$-I_0_1 + I_0_4 + I_0_5 = 0$$

$$-(R_1 + r_1) \cdot I_0_1 - R_4 \cdot I_0_4 = -E_1$$

$$(R_3 + r_2) \cdot I_0_3 + R_5 \cdot I_0_5 + (r_1 + R_1) \cdot I_0_1 = E_1 + E_2$$

$$-R_2 \cdot I_0_2 - (r_2 + R_3) \cdot I_0_3 = -E_2$$

$$I_0 := \text{Find}(I_0) \ll \text{Розв'язування системи рівнянь при } r_1=0, r_2=0$$

Продовження лістингу Б.2

$$\begin{pmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ I_{04} \\ I_{05} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.319 \\ 0.539 \\ 2.608 \\ 0.749 \\ 0.569 \end{pmatrix}$$

<< Результати розрахунку сили струмів за правилами Кірхгофа при  $r_1=0$  і  $r_2=0$ , А

$$\Delta I_{e_i} := |I_i - I_{0i}| \quad \ll \text{Розрахунок модуля різниці струмів при: } r_1=0.921 \text{ Ом, } r_2=1.304 \text{ Ом і } r_1=0, r_2=0.$$

$$\varepsilon_{1_i} := \frac{\Delta I_{e_i}}{I_i} \cdot 100 \quad \ll \text{Оцінка відносних похибок при розрахунку струмів без врахування значень внутрішніх опорів джерел, \%}$$

$$\Delta I_e = \begin{pmatrix} 0.211 \\ 0.264 \\ 0.57 \\ 0.095 \\ 0.116 \end{pmatrix} \quad \ll \text{Результати розрахунку } \Delta I, \text{ А}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 19.007 \\ 96.275 \\ 27.977 \\ 14.502 \\ 25.504 \end{pmatrix} \quad \ll \text{Відносні похибки струмів, при розрахунку струмів без врахування значень внутрішніх опорів джерел, \%}$$

Розробимо порівняльну таблицю:

$$S1 := ("I, A" \quad "I_0, A" \quad "\Delta I_e, A" \quad "\varepsilon_1, \%") \quad \ll \text{Шапка таблиці}$$

$$REZ1 := \text{augment}(I, I_0, \Delta I_e, \varepsilon_1) \quad \ll \text{Об'єднання матриць}$$

$$REZ1 := \text{stack}(S1, REZ1) \quad \ll \text{Приєднання шапки}$$

$$REZ1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & "I, A" & "I_0, A" & "\Delta I_e, A" & "\varepsilon_1, \%\" \\ \hline 2 & 1.108 & 1.319 & 0.211 & 19.007 \\ \hline 3 & 0.275 & 0.539 & 0.264 & 96.275 \\ \hline 4 & 2.038 & 2.608 & 0.57 & 27.977 \\ \hline 5 & 0.655 & 0.749 & 0.095 & 14.502 \\ \hline 6 & 0.454 & 0.569 & 0.116 & 25.504 \\ \hline \end{array}$$

<< Підсумкова матриця.  
Матрицю виводимо у форматі таблиці

**Висновки.** Результати проведених експериментальних досліджень і теоретичних розрахунків електричних кіл узгоджуються у межах похибок експерименту. Під час розрахунку електричних кіл за правилами Кірхгофа внутрішні опори джерел можна не враховувати тільки за виконання умови:

$$\max(r_j) \ll \min(R_i), \quad j=1..n, \quad i=1..m,$$

де  $n$  – кількість джерел,  $r_j$  – внутрішній опір  $j$ -го джерела,  $m$  – число гілок розгалуженого електричного кола,  $R_i$  – опір  $i$ -ої гілки електричного кола.

## Додаток В

### 1 Використання штучного інтелекту у фізичних розрахунках

#### 1.1 Основні принципи роботи

Штучний інтелект (ШІ) стає одним із найпотужніших інструментів сучасної фізики. Алгоритми машинного навчання та нейромережі здатні обробляти величезні обсяги даних з експериментів і симуляцій, прискорюючи процес аналізу та відкриття нових фізичних законів. Завдяки ШІ ми маємо можливість моделювати складні фізичні системи, такі як квантові об'єкти, поведінку яких надзвичайно складно передбачити за допомогою традиційних методів. Нейромережі допомагають знаходити закономірності в даних, які раніше залишалися прихованими для людського ока, відкриваючи нові перспективи для фізичних досліджень. Це робить ШІ незамінним інструментом у фізиці майбутнього. Для перевірки точності власних розрахунків під час обробки експериментальних даних лабораторних робіт з фізики зручно використовувати ШІ. В мережі Інтернет існує значна кількість систем ШІ, які легко пристосувати для обробки результатів фізичного експерименту, наприклад: Smodin's Physics AI Solver; My Physics Calculator; Фізика Mathway; Альберт Ейнштейн; UTexas Physics Problem Solver.

Підказка штучного інтелекту – це письмове запитання, яке ви вводите в інтерфейс чат-бота для отримання відповіді. Потрібно зазначити, що її якість значною мірою залежить від якості запиту – якщо підказка надто розпливчата або незрозуміла, інструмент може видати нерелевантні або безглузді результати. Ось декілька порад, які допоможуть сформулювати чітку та лаконічну команду й підвищити шанси отримати правдиву та об'єктивну інформацію:

- використовуйте конкретні ключові слова та фрази, які відповідають темі чи завданню;
- уникайте надто складних мовних конструкцій або заплутаних структур у реченнях;
- використовуйте приклади – це допоможе уточнити вашу мету та скерувати чат-бот у потрібному напрямі;
- задавайте потрібний тон запиту за допомогою прикметника (наприклад, «дружній», «професійний», «нормативний» тощо);
- вказуйте назву аудиторії, для якої ви готуєте матеріал (учні, батьки учнів або колеги);
- зазначайте умову, яка зробить відповідь більш конкретною (наприклад, «у відповіді використовуй короткі речення або просту лексику»);
- уточнюйте та повторюйте. Якщо отриманий результат виявився не таким, як ви очікували, зробіть повторний, більш конкретний та цільовий

запит. Такі експерименти дозволяють визначити, які типи запитань потрібно ставити чат-боту для отримання якісної відповіді;

- постійно оцінюйте вихідні дані та перевіряйте отриману інформацію.

## 2 Розв'язування фізичних задач у ШІ

**Приклад В.1.** Знайти струми у гілках електричного кола (рис. В.1), якщо:

$E_1=10$  В,  $E_2=3$  В,  $E_3=2$  В,  $E_4=2$  В,  $E_5=3$  В,  $E_6=10$  В,  $R_1=1$  Ом,  $R_2=3$  Ом,  $R_3=2$  Ом,  $R_4=5$  Ом,  $R_5=2$  Ом,  $R_6=3$  Ом,  $R_7=3$  Ом,  $R_8=5$  Ом. Вважати, що внутрішні опори джерел  $r_k \ll 1$  Ом.

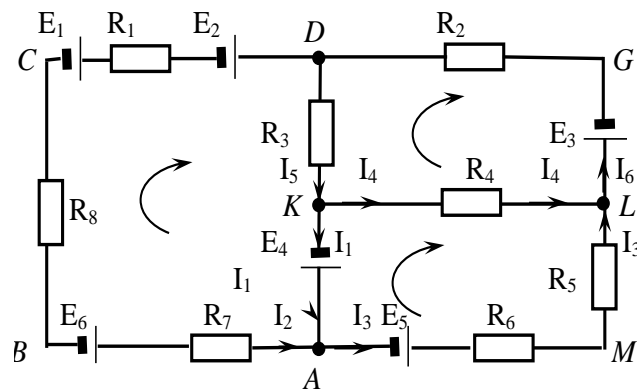


Рисунок В.1 – Електрична схема

### 2.1 Підготовка задачі до розв'язання в системі ШІ

Електричне коло (рис. В.1) має: число вузлів  $n = 4$ , число гілок  $m = 6$ .

Складемо  $n - 1 = 4 - 1 = 3$  рівняння за першим правилом Кірхгофа:

Для вузла А  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Для вузла К  $-I_1 - I_4 + I_5 = 0$

Для вузла L  $I_3 + I_4 - I_6 = 0$

Складемо  $m - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$  рівняння за другим правилом Кірхгофа, внутрішні опори джерел не враховуємо:

- для контуру ABCDKA:

$$-I_2R_7 - I_2R_8 - I_2R_1 + I_5R_3 = E_1 + E_2 + E_4 - E_6,$$

- для контуру KDGLK:

$$-I_5R_3 - I_6R_2 - I_4R_4 = E_3,$$

- для контуру KLMAK:

$$I_4R_4 - I_3R_5 - I_3R_6 = -E_4 - E_5.$$

Одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ -I_2R_7 - I_2R_8 - I_2R_1 + I_5R_3 = E_1 + E_2 + E_4 - E_6 \\ -I_5R_3 - I_6R_2 - I_4R_4 = E_3 \\ I_4R_4 - I_3R_5 - I_3R_6 = -E_4 - E_5 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Підставимо у рівняння (B.1) числові значення  $E_m, R_i$ , маємо:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ -9I_2 + 2I_5 = 5 \\ -5I_4 - 2I_5 - 3I_6 = 2 \\ -5I_3 + 5I_4 = -5 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Для перевірки роботи ШІ систему рівнянь (B.2) розв'яжемо засобами системи Mathcad, отримаємо значення струмів:

$$I_1 = \frac{147}{157}A = 0,93631A, I_2 = -\frac{73}{157}A = -0,46497A, I_3 = \frac{74}{157}A = 0,47134A, I_4 = -\frac{83}{157}A = -0,52866A, \\ I_5 = \frac{64}{157}A = 0,40764A, I_6 = -\frac{9}{157}A = -0,05732A$$

Ми отримали від'ємні значення струмів  $I_2, I_4, I_6$ , це означає, що їх дійсний технічний напрямок протилежний до показаного на рис. B.1.

Розрахунок розгалужених електричних кіл за правилами Кірхгофа зручно проводити використовуючи систему штучного інтелекту (ШІ). ШІ досить добре зчитує та аналізує текст, математичні формули. Для розпізнання елементів електричних схем та аналізу їх роботи рисунки мають бути з високою роздільною здатністю порядку 600 dpi і більше. Елементи електричних схем мають бути виконані з додержанням міжнародних стандартів позначення елементів електричних кіл. Електричні кола для роботи з системою ШІ рекомендується виконувати у спеціальних графічних редакторах: *sPlan, Eagle, KiCad*.

## 2.2 Діалог із ШІ

Перевіримо розв'язок задачі (рис. B.1) покроково методом Гаусса, використовуючи генеративний ШІ на базі LLM (Large Language Models). Для цього ШІ відправимо підготовлену й перевірену на основі правил Кірхгофа систему рівнянь B.2.

**Виконаємо діалог із ШІ:**

Розв'язати систему рівнянь, використовуючи покрокове перетворення методом Гаусса:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ -9I_2 + 2I_5 = 5 \\ -5I_4 - 2I_5 - 3I_6 = 2 \\ -5I_3 + 5I_4 = -5 \end{cases}$$

Розглянемо розв'язок системи **покроково методом Гаусса**, отриманої ШІ.

### 1. Запишемо систему рівнянь у вигляді розширеної матриці

Порядок змінних:  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

### 2. Виключимо $I_1$

Додаємо перший рядок до другого:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_2 + R_1 \\ \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & -5 \end{matrix} \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

### 3. Виключимо $I_2$

$$\begin{aligned} R_4 &= R_4 + 9R_2 \\ \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & 11 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & -5 \end{matrix} \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

### 4. Виключимо $I_3$

Спершу шосте рівняння ділимо на  $-5$ :

$$R_6 = \frac{1}{-5} R_6$$
$$0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1$$

Тепер додаємо  $9R_6$  до  $R_4$  і віднімаємо  $R_6$  від  $R_3$ :

$$R_4 = R_4 + 9R_6, R_3 = R_3 - R_6$$

Отримуємо:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

**5. З четвертого рядка знайдемо  $I_5$**

$$11I_5 = 14 \Rightarrow I_5 = \frac{14}{11}$$

**6. Повертаємося у п'ятий рядок**

$$-5I_4 - 2I_5 - 3I_6 = 2$$

Підставляємо  $I_5$ :

$$-5I_4 - \frac{28}{11} - 3I_6 = 2$$

**7. З третього рядка:**

$$\begin{array}{l} 2I_4 - I_6 = -1 \\ I_6 = 2I_4 + 1 \end{array}$$

**8. Підставляємо це у попереднє:**

$$-5I_4 - \frac{28}{11} - 3(2I_4 + 1) = 2$$

$$-5I_4 - 6I_4 - 3 - \frac{28}{11} = 2$$

$$-11I_4 = 2 + 3 + \frac{28}{11}$$

$$-11I_4 = \frac{55}{11} + \frac{28}{11} = \frac{83}{11}$$

$$I_4 = -\frac{83}{121} = -\frac{83}{157}$$

**9. Далі:**

$$I_6 = 2I_4 + 1 = 2 \cdot \left( \frac{83}{11} - \frac{83}{157} \right) + 1 = -\frac{166}{157} + \frac{157}{157} = -\frac{9}{157},$$

$$I_3 = 1 + I_4 = 1 - \frac{83}{157} = \frac{74}{157}$$

$$I_2 = I_3 + I_4 - I_5 = \frac{74}{157} - \frac{83}{157} - \frac{64}{157} = -\frac{73}{157}$$

$$I_1 = I_3 - I_2 = \frac{74}{157} + \frac{73}{157} = \frac{147}{157}$$

## 10. Остаточний результат

$I_1$	$= \frac{147}{157} \approx 0.9363$
$I_2$	$= -\frac{73}{157} \approx -0.4650$
$I_3$	$= \frac{74}{157} \approx 0.4713$
$I_4$	$= -\frac{83}{157} \approx -0.5287$
$I_5$	$= \frac{64}{157} \approx 0.4076$
$I_6$	$= -\frac{9}{157} \approx -0.0573$

Виконаємо перевірку розв'язку системи матричним методом у середовищі **MATLAB**.

Зроби це у **Mathcad**.

Нижче – готове **рішення в Mathcad** у трьох зручних варіантах:

### ✓ 1. Через матрицю коефіцієнтів + Isolve

Введіть у Mathcad ( строго по рядках, як написано ):

```
A :=
[ 1  1  -1  0  0  0
 -1  0  0  -1  1  0
  0  0  1  1  0  -1
  0 -9  0  0  2  0
  0  0  0 -5  -2  -3
  0  0 -5  5  0  0 ]
```

```
b :=
[ 0
  0
  0
  5
  2
 -5 ]
```

```
I := Isolve(A,b)
```

Після натискання Enter, Mathcad видасть:

```
I =  
0.936305  
-0.4650  
0.471338  
-0.528662  
0.407643  
-0.057325
```

Тобто:

### **Змінна Значення**

I <sub>1</sub>	0.9363
I <sub>2</sub>	-0.4650
I <sub>3</sub>	0.4713
I <sub>4</sub>	-0.5287
I <sub>5</sub>	0.4076
I <sub>6</sub>	-0.0573

Отже, використовуючи ШІ досягається можливість суттєво зменшити час для перевірки або для уточнення результатів лабораторної роботи

## Додаток Д

### 1 Деякі відомості з математики

#### 1.1 Тригонометричні функції:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x.$$

Незалежна змінна  $x$  визначається радіанною мірою (якщо не обумовлене протилежне).

Основні тригонометричні формули:

1.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$  ;

2.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$  ;

3.  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  ;

4.  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  ;

5.  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  ;  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$  ;

6.  $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$  ;

7.  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  ;

8.  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  ;

9.  $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)$  ;

10.  $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$  ;

11.  $a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$ , де  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ .

#### 1.2 Похідна функції

Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо похідна функції  $y = f(x)$  існує в кожній точці деякого проміжку  $(a; b)$  і кожній точці  $x_0$  з цього проміжку поставлено у відповідність похідну функції  $y = f(x)$  в цій точці, то отриману функцію називають похідною функції  $y = f(x)$  і позначають одним з символів:

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Операція знаходження похідної деякої функції називається *диференціюванням* цієї функції. На практиці для знаходження похідної функції використовують таблицю похідних елементарних функцій та правила диференціювання

### 1.2.1 Таблиця основних похідних

Нехай  $C$ ,  $n$  та  $a$  – сталі, ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ), тоді:

1.  $C' = 0$ .
2.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .
3.  $(\sin x)' = \cos x$ .
4.  $(\cos x)' = -\sin x$ .
5.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .
6.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .
7.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
8.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
9.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .
10.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$ .
11.  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

$$12. (e^x)' = e^x.$$

$$13. (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$14. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

### 1.2.2 Правила диференціювання

Нехай  $U = f(x)$ ,  $V = \varphi(x)$  – диференційовані функції,  $C$  – стала, тоді:

$$1. (C \cdot U)' = C \cdot U';$$

$$2. (U \pm V)' = U' \pm V';$$

$$3. (U \cdot V)' = U' V + U V';$$

$$4. \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' V - U V'}{V^2}.$$

### 1.2.3 Похідна складної функції

Якщо  $y = f(u)$ , а  $u = \varphi(x)$ , то функція  $y = f(\varphi(x))$  називається *складною функцією*. Прикладом складних функцій є:  $y = \cos(2x - 5)$ ,  $y = e^{\lg x}$ ,  $y = \ln^3 x$ ,  $y = \sqrt[3]{1 - 7x^2}$ .

В цьому випадку похідну (складної функції) потрібно шукати за правилом:

$$y' = f'(u)_u \cdot \varphi'(x)_x. \quad (*)$$

Наприклад,  $y = \sin(1 - x^2)$  – складна функція, тоді її похідну потрібно шукати за правилом (\*), а саме

$$\begin{aligned} y' &= (\sin(1 - x^2))' = \cos(1 - x^2) \cdot (1 - x^2)' = \\ &= \cos(1 - x^2) \cdot (-2x) = -2x \cos(1 - x^2). \end{aligned}$$

*Таблиця основних похідних для випадку складної функції*

$y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  – складна функція

1.  $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ .

2.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ .

3.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ .

4.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ .

5.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ .

6.  $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

7.  $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

8.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ .

9.  $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{u^2+1}$ .

10.  $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ .

11.  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ .

12.  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

13.  $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ .

*Похідна функції, заданої параметрично*

В деяких випадках залежність між  $x$  та  $y$  задається параметрично. В загальному вигляді параметричне задання функції є таким:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \text{де } t \text{ – деякий параметр.}$$

Похідну функції заданої параметрично потрібно шукати за наступним правилом:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

### *Похідні вищих порядків*

Нехай  $y = f(x)$  – диференційована функція,  $f'(x)$  – теж диференційована функція, то тоді, похідна від похідної  $f'(x)$  називається другою похідною функції  $f(x)$ , і позначається  $f''(x)$ . Тобто,  $f''(x) = (f'(x))'$ .

Похідні вищих порядків вводяться аналогічно:

$$f'''(x) = (f''(x))', \quad f^{(IV)}(x) = (f'''(x))', \quad \text{і т.д.}$$

*Приклад.*  $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 5x + 12$ .

$$f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 5;$$

$$f''(x) = 40x^3 - 18x;$$

$$f'''(x) = 120x^2 - 18.$$

### **1.3 Інтегральне числення**

Функцію  $F(x)$  називають *первісною* функції  $f(x)$ , якщо виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Якщо функція  $F(x)$  первісна функції  $f(x)$ , то будь-яка інша функція  $\Phi(x) = F(x) + C$ , де  $C$  – довільна константа, теж буде первісною функції  $f(x)$ .

Множину (сімейство) всіх первісних функції  $f(x)$  називають *неозначеним інтегралом* цієї функції і позначають так:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

де  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$ ,

$C$  – довільна стала (*стала інтегрування*).

### Правила інтегрування

Нехай  $f(x)$  та  $\varphi(x)$  – деякі функції, а  $k$  – стала, тоді

$$1. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x);$$

$$2. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx;$$

$$3. \int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx.$$

#### 1.3.1 Таблиця основних інтегралів

Нехай  $a$  та  $n$  – сталі, тоді:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1,$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0).$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad (a \neq 0).$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \quad (a \neq 0).$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1, \quad (a > 0).$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0);$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

### 1.3.2 Означений інтеграл

Означеним інтегралом функції  $f(x)$  в межах від  $a$  до  $b$  називають границю інтегральної суми, за умови, що  $\Delta x_i \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), і позначають

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta x_i \right).$$

Для обчислення означеного інтеграла на практиці використовують формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де  $f(x)$  – підінтегральна функція;

$a, b$  – межі інтегрування;

$F(x)$  – первісна функції  $f(x)$ .

#### Основні властивості означеного інтеграла

1. Якщо межі інтегрування рівні, то інтеграл дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

2. Зміна місцями меж інтегрування змінює знак інтеграла на протилежний:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3. Для будь-яких чисел  $a, b, c$  виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx .$$

5. Інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx .$$

## 2 Фізичні сталі та фізичні властивості речовин

### 2.1 Кратні і часткові приставки до одиниць вимірювання

Найменування	Відношення до основної одиниці	Скорочене позначення	
		українське	міжнародне
фемто	$10^{-15}$	<i>ф</i>	<i>f</i>
піко	$10^{-12}$	<i>п</i>	<i>p</i>
нано	$10^{-9}$	<i>н</i>	<i>n</i>
мікро	$10^{-6}$	<i>мк</i>	<i>μ</i>
мілі	$10^{-3}$	<i>м</i>	<i>m</i>
санти	$10^{-2}$	<i>с</i>	<i>c</i>
деци	$10^{-1}$	<i>д</i>	<i>d</i>
дека	10	<i>да</i>	<i>da</i>
гекто	$10^2$	<i>г</i>	<i>h</i>
кіло	$10^3$	<i>К</i>	<i>k</i>
мега	$10^6$	<i>М</i>	<i>M</i>
гіга	$10^9$	<i>Г</i>	<i>G</i>
тера	$10^{12}$	<i>Т</i>	<i>T</i>

### 2.2 Основні фізичні сталі

Фізична стала	Позначення	Числове значення та одиниці вимірювання
Прискорення вільного падіння	<i>g</i>	9,81 м/с <sup>2</sup>
Гравітаційна стала	<i>G, γ</i>	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> /(кг· с <sup>2</sup> )
Стала Авогадро	<i>N<sub>A</sub></i>	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>

Фізична стала	Позначення	Числове значення та одиниці вимірювання
Молярна газова стала	R	8,31 Дж/(моль·К)
Число Лошмідта	$V_m$	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Елементарний заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Швидкість світла у вакуумі	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Стала Стефана- Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К}^4)$
Стала Віна	b	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{Дж}$
Стала Планка	h	$6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Зведена стала Планка	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Рідберга	R	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радіус Бора	a	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_0$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	$\mu_B$	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Енергія іонізації атома водню	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 eВ)
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Електрична стала	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнітна стала	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

### 2.3 Властивості деяких твердих тіл

Речовина	Густина, $\text{кг/м}^3$	Температура плавлення, K	Питома теплоємність, Дж/(кг·К)	Питома теплота плавлення, Дж/кг	Коефіцієнт теплового розширення, $\text{K}^{-1}$
Алюміній	$2,7 \cdot 10^3$	932	$9,2 \cdot 10^2$	$3,8 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Залізо	$7,8 \cdot 10^3$	1803	$4,6 \cdot 10^2$	$2,7 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Цинк	$7,1 \cdot 10^3$	692	$4,0 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^{-5}$
Мідь	$8,9 \cdot 10^3$	1356	$3,8 \cdot 10^2$	$1,8 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^{-5}$
Латунь	$8,5 \cdot 10^3$	1173	$3,8 \cdot 10^2$	–	$1,9 \cdot 10^{-5}$
Олово	$7,3 \cdot 10^3$	505	$2,5 \cdot 10^2$	$5,8 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^{-5}$
Свинець	$1,14 \cdot 10^4$	600	$1,2 \cdot 10^2$	$2,5 \cdot 10^4$	$2,9 \cdot 10^{-5}$
Лід	$0,9 \cdot 10^3$	273	$2,09 \cdot 10^3$	$3,35 \cdot 10^5$	$5,1 \cdot 10^{-5}$

## 2.4 Діелектрична проникність деяких речовин

Гас	2	Слюда	6
Парафін	2	Фарфор	6
Ебоніт	2,6	Скло	6 – 10
Кварц	2,7	Вода	81

## 2.5 Робота виходу електронів з поверхні металу

Метал	$A, eV$	Метал	$A, eV$	Метал	$A, eV$
Вольфрам	4,5	Магній	3,5	Срібло	4,5
Залізо	4,5	Мідь	4,5	Тантал	4,1
Калій	2,0	Нікель	5,0	Рубідій	2,13
Літій	2,4	Платина	5,3	Цезій	1,97

## 2.6 Електричні властивості матеріалів за 20 °С

Матеріал	Питомий опір, $10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$	Температурний коефіцієнт опору, $K^{-1}$	Матеріал	Питомий опір, $10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$	Температурний коефіцієнт опору, $K^{-1}$
Алюміній	2,7	0,0038	Константан	48	0,00002
Мідь	1,72	0,0043	Нікелін	40	0,000017
Срібло	1,6	-	Ніхром	100	0,00026
Залізо	9,8	0,0062	Ртуть	94	0,0009
Сталь	12	0,006	Свинець	22	0,0042
Вольфрам	5,5	0,0051	Графіт	800	-

*Електронне навчальне видання*

**Йосип Йосипович Білінський  
Володимир Мефодійович Бурдейний  
Віктор Григорович Дзись**

# **Лабораторний практикум з фізики**

## **Розділ 2. Електрика**

**Практикум**

Рукопис оформив *В. Дзись*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 04.06.2026

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2026-073.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

Тел. (0432) 65-18-06.

press.vntu.edu.ua;

Email: irvc.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.