І. А. Клєопа, О. І. Тютюнник, А. А. Коломієць

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. А. Клєопа, О. І. Тютюнник, А. А. Коломієць

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Електронний навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2025

УДК 514.12(075.8)
К48

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (Протокол № 3 від 30.09.2025 р.)

Рецензенти:
С. М. Бак, доктор фізико-математичних наук, професор
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук,
М. Б. Ковальчук, доктор педагогічних наук, професор

Клєопа, І. А.

К48 Криві та поверхні другого порядку : навчальний посібник [Електронний ресурс] / Клєопа І. А., Тютюнник О. І., Коломієць А. А. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 126 с.)

ISBN 978-617-8163-69-3 (PDF)

У цьому посібнику розглядаються криві та поверхні другого порядку, їхні основні властивості, рівняння, способи перетворення та графічне подання. Досліджуються циліндричні поверхні та поверхні обертання, що широко використовуються в вищій математиці, фізиці, архітектурі та інженерії.

Посібник містить детальні описи та аналіз таких геометричних об'єктів:

- криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола та їхні основні властивості;
- перетворення кривих: канонічні рівняння, паралельне перенесення та обертання координат;
- поверхні другого порядку: сфери, еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди та циліндри.

Особливу увагу приділено практичним аспектам:

- способам побудови графіків за допомогою аналітичних методів та програмних засобів (GeoGebra, Python);
- використанню кривих і поверхонь у прикладних задачах;
- геометричним та аналітичним методам спрощення рівнянь.

Крім теоретичних відомостей, що відповідають навчальній програмі з курсу вищої математики, розглянуто велику кількість прикладів з докладним поясненням способів їх розв’язання як традиційними методами.

Посібник може бути використаний для проведення практичних та лекційних занять з вищої математики, а також для самостійного вивчення.

Посібник розрахований на здобувачів технічних, економічних та інших спеціальностей і може бути корисним здобувачам, викладачам, дослідникам та всім, хто цікавиться аналітичною геометрією та її застосуваннями.

УДК 514.12(075.8)

ISBN 978-617-8163-69-3 (PDF)

ЗМІСТ

Тема 1 СИСТЕМА КООРДИНАТ

1.1 Система прямокутних декартових координат на площині

Означення 1.1. ***Система прямокутних декартових координат на площині*** – це спосіб визначення положення будь-якої точки за допомогою двох чисел, які називаються координатами цієї точки. Система декартових координат широко використовується в геометрії, фізиці, інженерії, комп’ютерній графіці та навігації. Вона дозволяє математично описувати форми, рухи та просторові відношення між об’єктами.

Координатні осі:

- вісь абсцис *(Ox)* – горизонтальна пряма,
- вісь ординат *(Oy)* – вертикальна пряма.

Обидві осі перпендикулярні одна до одної і перетинаються в точці, яка називається початком координат *O(0,0)*.

Кожній точці площини відповідає лише одна пара чисел *(x, y)*.

Осі координат взаємно перпендикулярні.

Координати точки:

Будь-яка точка на площині позначається як *M(x, y)* де:

- *x* – абсциса (відстань точки від осі *Oy* уздовж осі *Ox*).
- *y* – ордината (відстань точки від осі *Ox* уздовж осі *Oy*).

Зазначимо також, що осі координат ділять площину на чотири частини, які називаються четвертями або квадрантами. Координати точок різних квадрантів мають різні знаки.

Квадранти

Координатні осі розбивають площину на чотири координатні чверті:

- I чверть: $x > 0, y > 0$
- II чверть: $x <0, y> 0$
- III чверть: $x <0, y <0$
- IV чверть: $x>0, y<0$.

Зазначимо, що прямокутними декартовими координатами точки M на площині називаються вістані від цієї точки до координатних осей $O\dot{O}$ і $O\tilde{O}$, виміряні однією одиницею довжини і взяті з відповідними знаками. Якщо числа $x=MN$ і $y=ML$ – координати точки M, то це записується так: *M(x, y)*. Для точок що лежать на осі $O\dot{O}$, $x=0$, а для точок, що лежать на осі $O\tilde{O}$, $y=0$. Якщо точка знаходиться в початку координат, то її обидві координати, *x* і *y*, дорівнюють нулю.

Система прямокутних декартових координат є способом подання положення точок на площині за допомогою чисел. Кожна точка може бути розглянута як вершина прямокутного трикутника, одна зі сторін якого паралельна осі *Ox*, а інша – осі *Oy*.

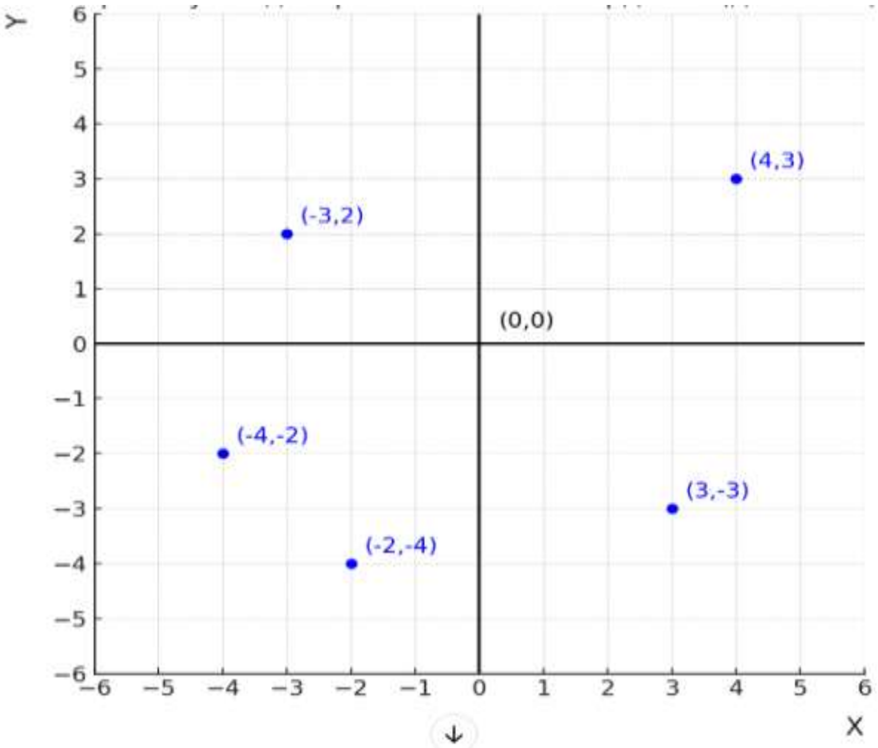

Рисунок 1.1 – Полярна система координат

Відстань між двома точками на площині визначається за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1}$$

Відстань від довільної точки площини до початку координат дорівнює кореню квадратному із суми квадратів її координат.

Приклад. Знайти відстань від точки А(2;4) до початку координат.
Розв'язування.
За формулою (1.1) отримаємо:

$$d = \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Відповідь: $2\sqrt{5}$.

Приклад. Знайти відстань від точки А(2;5) і В (5;4).
Розв'язування.
Згідно з (1.1) отримаємо:

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Відповідь: $\sqrt{10}$.

1.2 Система полярних координат

На площині, окрім декартової системи координат, можна використовувати й інші системи, які дозволяють описувати положення точки за допомогою двох числових параметрів (координат). Однією з найпоширеніших альтернатив є полярна система координат, у якій положення точки визначається радіусом r (відстанню від початку координат) та кутом γ (нахилом відносно фіксованої осі).

Гіперболічні координати корисні в релятивістській фізиці та аналітичній геометрії.

Означення 1.2. ***Полярна система координат (ПСК)*** – двовимірна система координат, в якій кожна точка на площині визначається двома числами – кутом та відстанню.

Полярні координати особливо корисні для опису кругових або спіральних траєкторій, а також у задачах, що мають природну радіальну симетрію. Крім них існують й інші системи, наприклад:

- еліптичні координати, що застосовуються в задачах з еліптичними симетріями;
- параболічні координати, зручні для дослідження потенціальних полів.

Для побудови полярної системи координат вибираємо точку O на площині, яка називається полюсом і з цієї точки проводимо промінь $\overline{OX}$, який називається полярною віссю. На полярній осі задається маштаб (рис. 1.2).

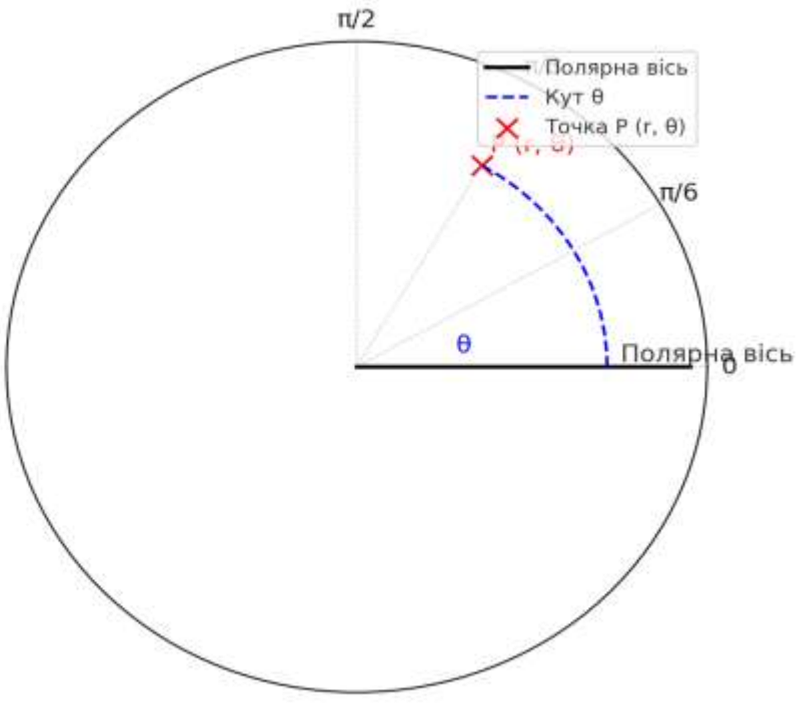

Рисунок 1.2 – Полярна система координат

Будь-яка точка M на площині, що не збігається з полюсом, буде визначатись двома значеннями – це полярний радіус ρ, що дорівнює відстані від полюса до точки M і полярний кут γ, що дорівнює куту між полярною віссю і радіусом-вектором до точки M. Тобто можна однозначно визначити місце положення будь-якої точки на площині, а саме за допомогою двох координат γ, ρ, тобто $M\ (\rho;\gamma)$.

Полярний кут визначається в радіанах, відлік кута починається проти годинникової стрілки і такий напрямок вважається додатним. Прийнято вважати, що кут γ змінюється від 0 до 2π, тобто $0 \le \gamma \le 2\pi$ або $-\pi \le \gamma \le \pi$. Полярний кут вважається від'ємним, якщо вимірювати його кут за годинниковою стрілкою вздовж полярної осі. Точці *O*, тобто полюсу, відповідає полярний радіус, що дорівнює нулю, а полярний кут для полюса не існує.

ρ набуває лише додатних значень, $\rho \ge 0$.

Якщо радіальна відстань ρ від'ємна, то точка M є одиницями від точки O вздовж промення в протилежному напрямку, як кінцевий рядок кута γ. Щоб проіліструвати деякі з цих умовностей, розглянемо точку $M\,(3;\frac{4\pi}{3})$ (рис. 1.3).

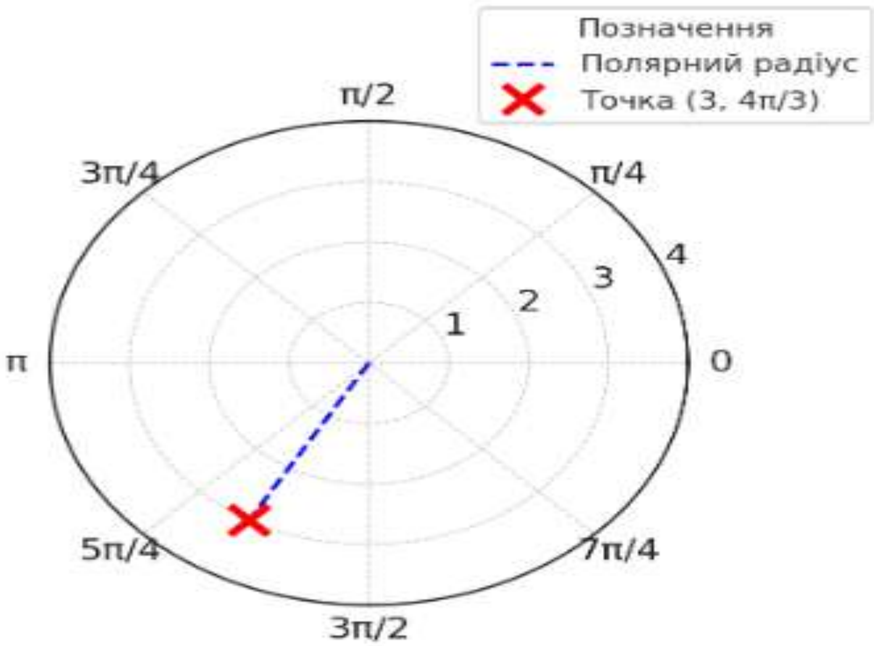

Рисунок 1.3– Графічний розв'язок задачі

Точка M з двома різними наборами полярних координат. Рисунок справа показує, що ця точка M має також полярні координати (-3;$\frac{\pi}{3}$). Це тому, що коли ми використовуємо полярний кут $\gamma = \frac{\pi}{3}$ і відстань $\rho = -3$, то т. M є пряма одиницями від полюса вздовж променя в проміжному напрямку як кінцева точка кута γ.Оскільки точка з полярними координатами $(\rho;\gamma)$ має лежати на колі радіусом ρ з центром на полюсі, то розумно і зручно розмістити точки на сітці концентричних кіл і променів, початкова точка яких знаходиться на полюсі. Зобразимо на рис. 1.4.

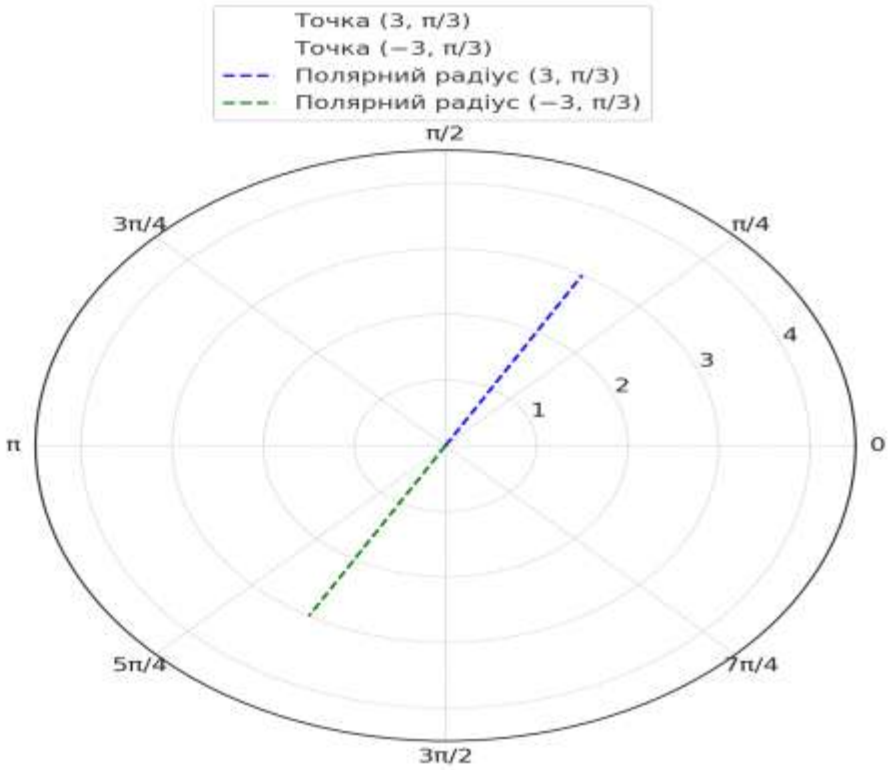

Рисунок 1.4 – Графічний розв'язок задачі

Приклад. Побудуйте такі точки:

$M_1(4;\dfrac{\pi}{4}),\ M_2(2;\dfrac{\pi}{2}),\ M_3(2;\dfrac{3\pi}{4}),\ M_4(-1;\dfrac{\pi}{4}), M_5(4;\dfrac{3\pi}{4}),\ M_6(1;-\dfrac{\pi}{4}),\ M_7(5;\dfrac{\pi}{4}),$
$M_8(-5;\dfrac{5\pi}{4}), M_9(5;\dfrac{9\pi}{4}).$

Розв'язування

З прикладу можна побачити, що точки M_4 та M_6 і точки M_8, M_7 та M_9 визначили однакові точки на площині. Це ілюструє різницю між прямокутними координатами і полярними. Для точки в прямокутних координатах це завдання єдине, у той час як задана точка в полярних координатах може мати багато різних зображень. Це пов'язано насамперед з тим, що полярна система координат використовує концентричні кола для своєї сітки. Ми можемо почати в точці на колі і продовжувати по колу та закінчуватися в точці, з якої ми почали, оскільки одне обтікання навколо кола відповідає куту 2π радіанів або 360°.

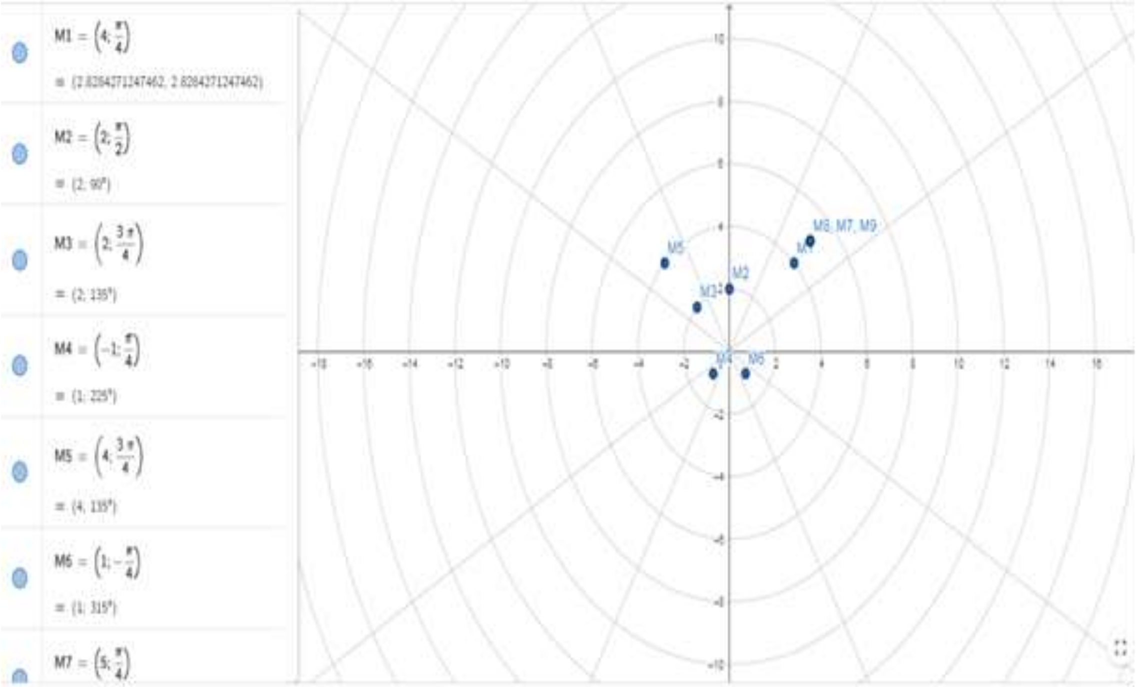

Рисунок 1.5– Графічний розв’язок задачі

Приклад. Знайти два різні зображення в полярних координатах для точки $(3;\frac{\pi}{2})$.

Розв’язування

$(3;\frac{3\pi}{2}),(-3;-\frac{\pi}{2}),(3;\frac{5\pi}{2}),(-3;\frac{7\pi}{2})$.

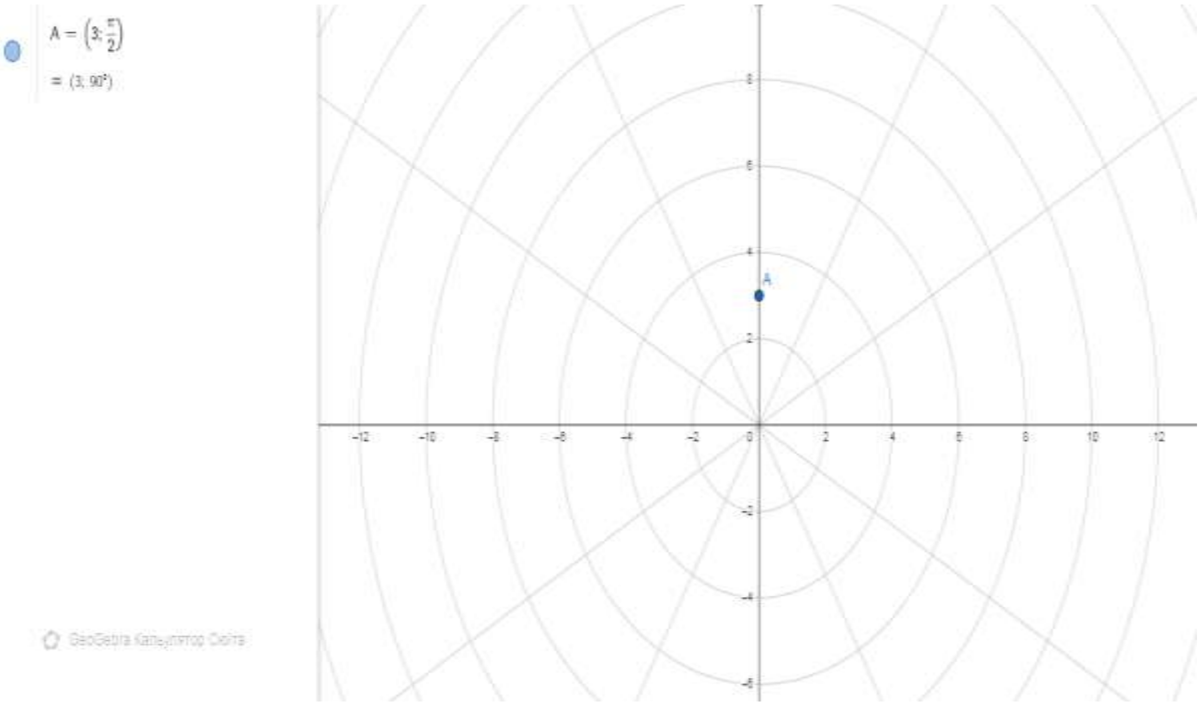

Рисунок 1.6– Графічний розв’язок задачі

Тепер ви знаєте два способи знаходження точки на площині. Один – звичайна декартова система координат, а інший – полярна.

Прямокутна система використовує дві відстані для розташування точки, тоді як полярна – відстань та кут для визначення точки. Ці дві системи можна вивчати незалежно одна від одної, та ми хочемо показати, що між ними може бути взаємозв'язок. Зробимо це таким чином.

Змістимо декартову систему координат з полярним полюсом так, щоб початок координат декартової системи збігся з полюсом точки O полярної системи. Таким чином, полярна вісь полярної системи збігається з додатньою віссю Ox прямокутної системи. Далі опускаємо перпендикуляри від точки M на декартові осі.

Далі із отриманого прямокутного трикутника, катетами якого є декартові координати x та y, можна отримати формули зв'язку між декартовими кординатами x, y та полярними γ, ρ, використовуючи тригонометрію прямокутного трикутника і теорему Піфагора, отже:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\gamma, \\ y &= \rho \cdot \sin\gamma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Із теореми Піфагора можна знайти полярний радіус:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \rho \geq 0 \tag{1.3}$$

та формули оберненого переходу, отримали:

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\gamma &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Кут γ можна ще визначити із тангенса, який дорівнює:

$$tg\gamma = \frac{y}{x}. \tag{1.5}$$

***Приклад*.** Визначити декартові координати точки M $(3; \frac{3\pi}{4})$.

Розв'язування

Оскільки,

$$x = \rho \cdot \cos\gamma = 2 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2},$$

$$y = \rho \cdot \sin\gamma = \rho \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Відповідь: у декартовій системі координат точка M буде мати координати $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

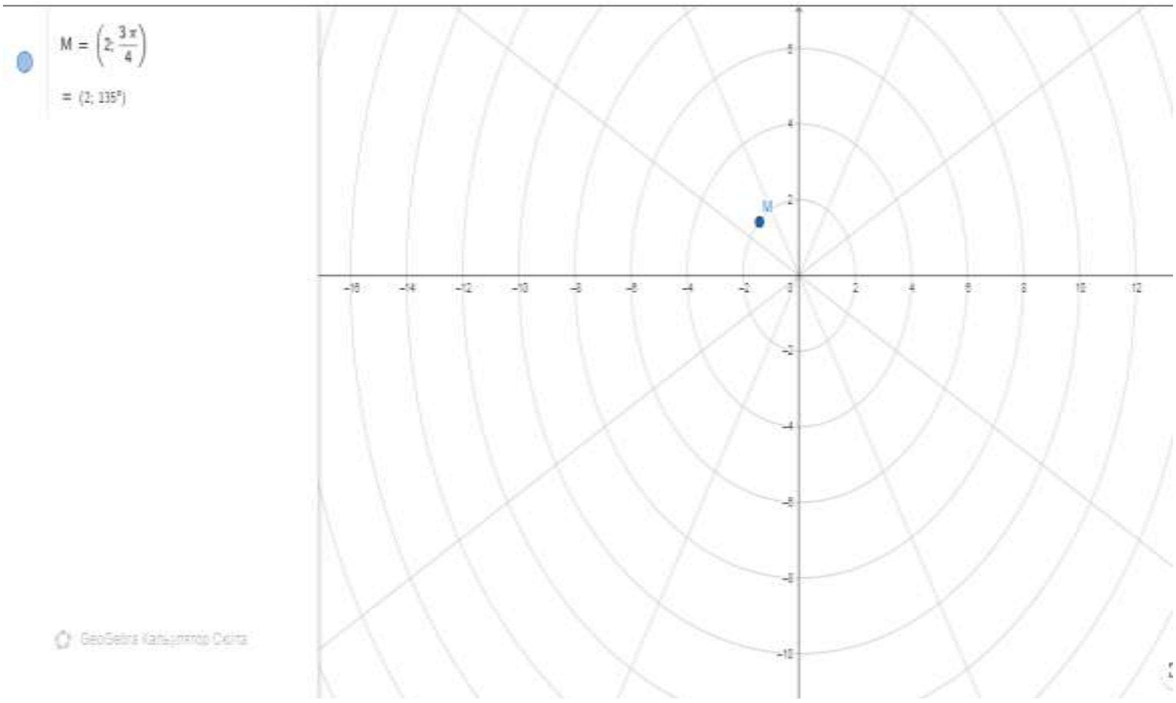

Рисунок 1.7– Графічний розв’язок задачі

Приклад. Відносно декартової прямокутної системи координат написати канонічне рівняння параболи, якщо її рівняння в полярній системі координат має вигляд: $\rho = \dfrac{1}{3 - 3\cos\varphi}$.

Розв'язання

Перепишемо це рівняння параболи у вигляді:

$$\rho = \frac{\frac{1}{3}}{1 - 1\cos\varphi}.$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

отримаємо, що $p = \dfrac{1}{3}$.

Отже, канонічне рівняння параболи $y^2 = \dfrac{2}{3}x$.

Відповідь: $y^2 = \dfrac{2}{3}x$.

1.3 Параметричні рівняння лінії

Деякі задачі певного виду розв'язувати значно простіше, якщо замість канонічних рівнянь кривих другого порядку використовувати параметричні. Вони є досить простими, але містять деякі тригонометричні та гіперболічні функції.

Нехай залежність між змінними *x* і *y* виражена через третю змінну *t*, тобто:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ \mathrm{y} = \mathrm{y(t)}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Змінна *t* називається параметром і визначає положення точки (*x*; *y*) на площині. Наприклад, якщо $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$, то значення параметра $t=3$ відповідає на площині точкам (7; 9), тому що:

$$\begin{cases} x = 2\cdot 3+1 = 7 \\ y = 3^2 = 9 \end{cases}.$$

Якщо *t* змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію *l*. Такий спосіб задання лінії називається параметричним, а рівняння (1.6) – *параметричними рівняннями лінії l*.

Щоб від параметричного рівняння перейти до рівняння $F(\mathrm{x};\mathrm{y})=0$, потрібно будь-яким способом з двох рівнянь виключити параметр *t* (наприклад, з першого рівняння виразити через *x* і результат підставити в друге рівняння). Але такий перехід не завжди доцільний і не завжди можливий, тому доводиться користуватись параметричними рівняннями.

Приклад. На площині *Oxy* задано криву параметричне рівняння якої:

$$\begin{cases} x = 3t+1, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Параметру $t=4$, відповідає на площині точка M(13;16). Виразимо з першого рівняння $t=\dfrac{1-x}{3}$, отримаємо:

$$y=\left(\frac{x-1}{3}\right)^2.$$

Відповідь: $y=\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2$.

Наведемо параметричні рівняння кривих другого порядку: кола, еліпса, гіперболи і параболи.

В параметричних рівняннях t – параметр, а інші позначення мають такий самий смисл, як і раніше: R – радіус кола; a, b – півосі еліпса чи гіперболи; p – відстань між фокусом і директрисою.

Для виявлення виду кривої по її параметричних рівняннях потрібно виключити з них параметр t і звести одержаний вираз до канонічного вигляду.

Параметричне рівняння кола має вигляд:

$$\begin{cases} x = R\cdot\cos t, \\ y = R\cdot\sin t, t\in\left[0;\pi\right]. \end{cases} \qquad (1.7)$$

Параметричне рівняння еліпса має вигляд:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos t, \\ y = b\cdot\sin t, t\in\left[0;\pi\right]. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Розглянемо, наприклад, співвідношення (1.8). Отримаємо:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t \\ \dfrac{y}{b} = \mathrm{sint} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Зведемо отримане рівняння до канонічного вигляду та отримаємо:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Таке рівняння збігається з канонічним рівнянням еліпса. Тому можна сказати, що параметричні рівняння (1.8) описують еліпс.

Параметричне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\text{а)} \begin{cases} x = \pm a\cdot cht, \\ y = b\cdot sht, \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x = a\cdot sht, \\ y = \pm b\cdot cht \end{cases}, \; t\in[-\infty;\infty] \qquad (1.9)$$

Для параметричних рівнянь гіперболи (1.9) виконаємо аналогічні перетворення. Розглянемо випадок (а):

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot cht \\ y = b \cdot sht \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \pm cht \\ \frac{y}{b} = sht \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = ch^2t - sh^2t = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Аналогічно, зробивши перетворення знайдемо для випадку (б):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = -1.$$

Одержано канонічні рівняння гіпербол.

Тобто, рівняння 1.9, а) описує гіперболу, дійсна вісь *2a* якої лежить на осі *Ox,* а рівняння 1.9, б) – спряжену до неї гіперболу, дійсна вісь *2b* якої лежить на осі *Oy*.

Рівняння кола та параболи прості, тому залишаємо дослідити їх самостійно.

Приклад. З'ясувати та побудувати криву, яка задана параметрично:

$$\begin{cases} x = -2t + t^2, \\ y = -t + 1 \end{cases}$$

Розв'язування

Виконаємо перетворення:

$$\begin{cases} x = -2t + t^2 \\ y = -t + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 + 1 - 2t + t^2 \\ y = 1 - t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 + (1 - t)^2 \\ y = 1 - t \end{cases}$$

Виключаємо з цих рівнянь параметр t: $x = y^2 - 1$. Отримаємо рівняння параболи вигляду «зсунута вліво вздовж осі абсцис на одиницю».

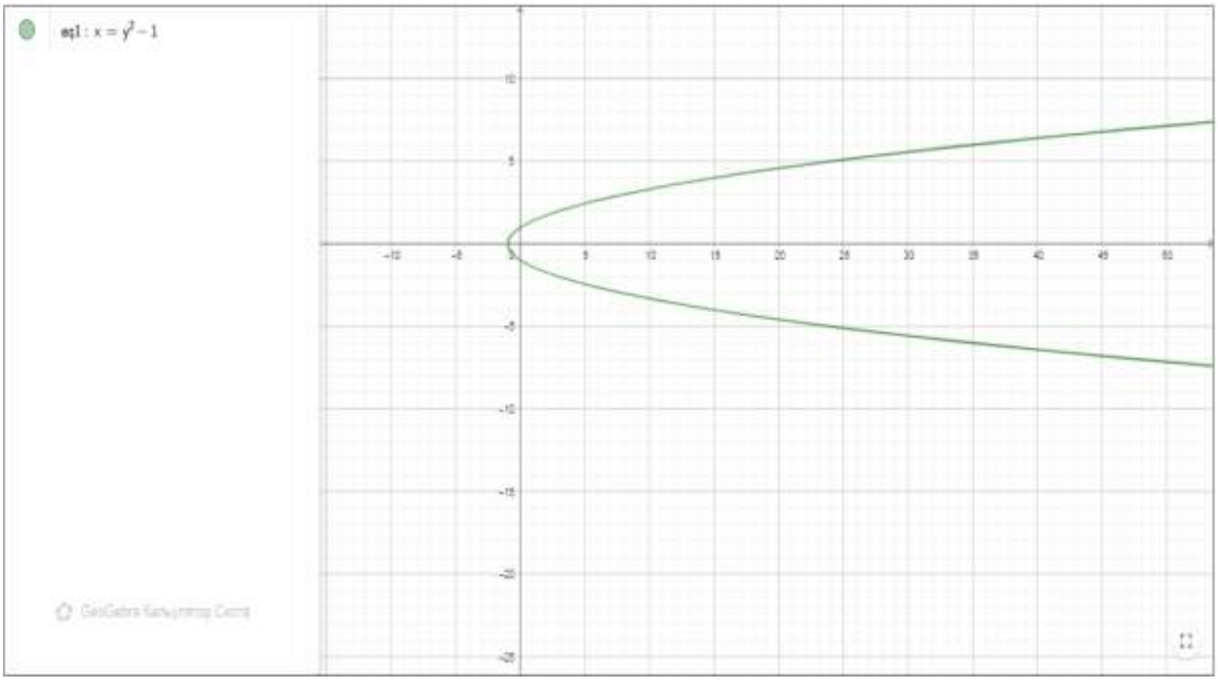

Рисунок 1.8 – Графічний розв’язок задачі

1.4 Додаткові приклади розв’язання задач

Приклад. Скласти канонічне та полярне рівняння еліпса, якщо відомий ексцентриситет та точка A(6;0), що належить еліпсу.

Розв'язання

Оскільки ексцентриситет $e = \dfrac{c}{a}$ і координати точки A задовольняють рівняння еліпса, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = \dfrac{4}{9}, \\ \dfrac{36}{a^2} = 1 \end{cases}$$

Звідки a=6, b^2=20. Тоді фокальний параметр:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

Канонічне рівняння цього еліпса:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

Полярне рівняння еліпса:

$$\rho=\frac{p}{1-e\cdot\cos\gamma}=\frac{10/3}{1-2/3\cos\gamma}=\frac{10}{3-2\cos\gamma}$$

Відповідь: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ та $p=\frac{10}{3-2\cos\gamma}$.

Приклад. Скласти канонічне та полярне рівняння гіперболи, що проходить через точку А (8; 9) та має рівняння асимптоти:

$$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x.$$

Розв'язання

Підставимо в рівняння гіперболи координати точки А(8; 9), отримаємо:

$$\frac{64}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1.$$

Скориставшись рівнянням асимптот правої гілки гіперболи $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}x$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{64}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1\\ \frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}.$$

Отримаємо, розв'язки цієї системи, де $a=2\sqrt{2},\ b=3$, які є дійсною та уявною півосями гіперболи.

Тоді її канонічнет рівняння гіперболи буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Для того щоб скласти полярне рівняння гіперболи спочатку знайдемо ексцентриситет e та фокальний параметр p:

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{8}}=\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}\ ,$$

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{2\sqrt{2}} \quad ,$$

звідси полярне рівняння гіперболи:

$$\rho=\frac{p}{1-e\cdot\cos\gamma}=\frac{9\big/2\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}\cos\gamma}=\frac{9\big/2\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}\cos\gamma}=\frac{9}{2\sqrt{2}-\sqrt{17}\cos\gamma}$$

Відповідь: $\frac{9}{2\sqrt{2}-\sqrt{17}\cos\gamma}$**.**

Приклад. Побудувати лінію. Задану параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=t^2 \end{cases}$$

Розв'язання

Спосіб 1.

Виключимо параметр *t* з параметричних рівнянь цієї лінії.

Виразимо *t* з першого рівняння, та підставимо в друге:

$$\begin{cases} t=x-2 \\ y=(x-2)^2 \end{cases}.$$

Одержали рівняння параболи в точці (2;0). Параболу можна побудувати за допомогою графіка параболи $y=x^2$.

Врахувати, що потрібно змістити вправо по *x* на дві одиниці.

Спосіб 2.

Складаємо таблицю значень *x* і *y*, водночас надамо параметру *t* довільні значення.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9

За даними таблиці будуємо графік лінії – параболу.

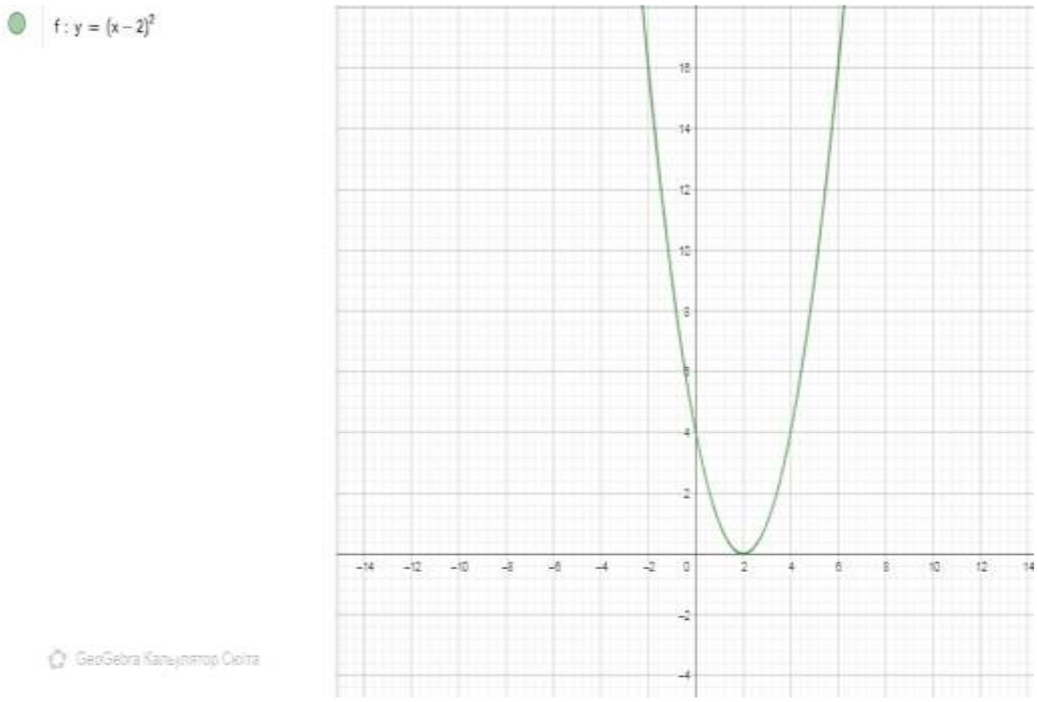

Рисунок 1.9 – Графічний розв'язок задачі

Приклад. Визначити:

а) полярні координати точки $M\ (2\sqrt{3};-2)$;

б) полярні координати точки $M\ (1;1)$.

Розв'язування

а) знаходимо:

$$\rho=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{16}=4$$

або

$$tg\gamma=\frac{y}{x}=tg\,\frac{-2}{2\sqrt{3}}=tg(\frac{-1}{\sqrt{3}}),$$

,

$$\gamma=-\frac{\pi}{6}$$

$$cos\gamma=\frac{x}{\rho}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\gamma=\frac{y}{\rho}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2},$$

$$\gamma=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

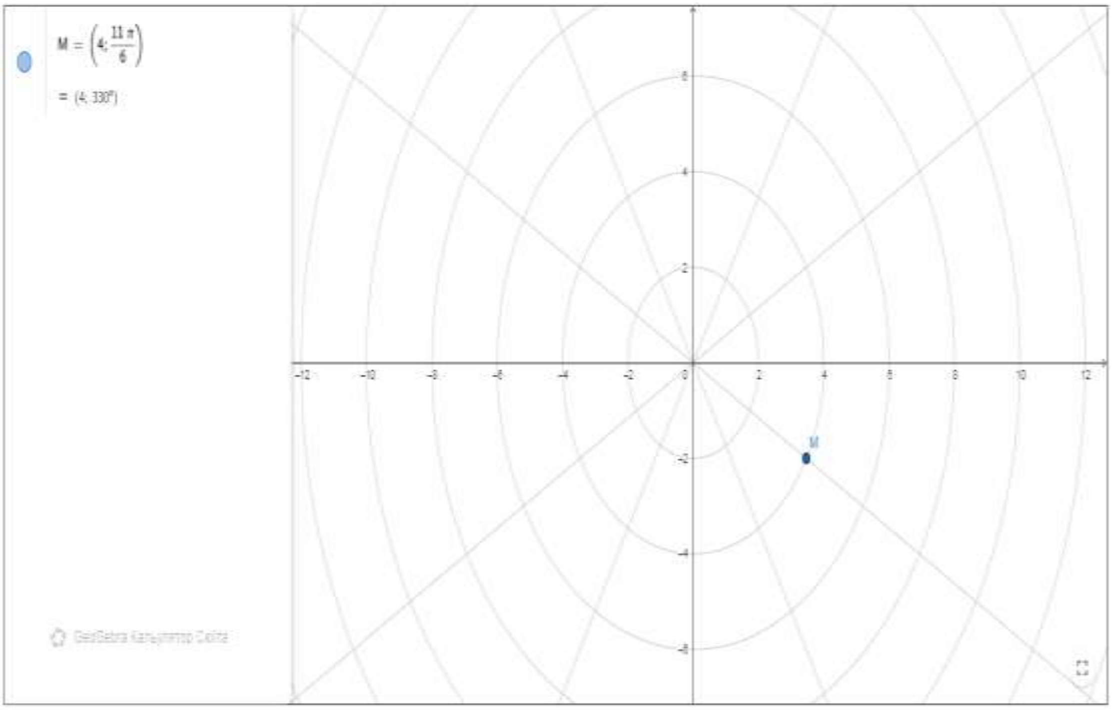

Рисунок 1.10 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: а) точка $M\ (4;-\frac{\pi}{6})$ або $M\ (4;2\pi-\frac{\pi}{6})=(4;\frac{11\pi}{6})$.

б) $tg\gamma=\frac{y}{x}=tg\frac{1}{1}=tg1,$ $\gamma=\frac{\pi}{4}$ або $\gamma=\frac{5\pi}{4}$.

Потрібно врахувати, що $M\ (1;1)$ лежить в I квадранті, тому вибираємо $\gamma=\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\gamma=\frac{\pi}{4}$.

Приклад. Записати рівняння $x^2+y^2=4$ в полярних координатах.

Розв'язування

Використовуючи такі переходи

$$x=\rho\cdot\cos\gamma$$
$$y=\rho\cdot\sin\gamma\ ,$$

отримаємо:

$$(\rho^2\cos^2\gamma+\rho^2\sin^2\gamma)=4$$
$$\rho^2\underbrace{(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)}_{1}=4$$
$$\rho^2=4$$
$$\rho=\pm 2$$

Відповідь: $\rho=\pm 2$**.**

Приклад. Записати рівняння $y^2-2y+x^2=0$ в полярних координатах.

Розв'язування

Перейдемо до полярних систем координат та отримаємо:

$$\rho^2\sin^2\gamma-2\rho\cdot\sin\gamma+\rho^2\cos^2\gamma=0$$
$$\rho^2\sin^2\gamma+\rho^2\cos^2\gamma=2\rho\cdot\sin\gamma$$
$$\rho^2(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)=2\rho\cdot\sin\gamma$$
$$\rho\underbrace{(\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)}_{1}=2\cdot\sin\gamma$$
$$\rho=2\cdot\sin\gamma$$

Відповідь: $\rho=2\cdot\sin\gamma$**.**

Приклад. Записати рівняння лінії $\rho^2=8\sin^2 2\gamma$ в декартових координатах.

Розв'язування

Скористаємося перетворенням:

$$\cos\gamma=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\gamma=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\rho\geq 0$$

та

$$\sin 2\gamma=2\sin\gamma\cdot\cos\gamma$$

отримаємо:

$$\rho^2 = 8\sin^2 2\gamma$$
$$\rho^2 = 32\sin^2\gamma \cdot \cos^2\gamma$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 32\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$
$$(x^2+y^2)^3 = 32x^2y^2$$

Відповідь: $(x^2+y^2)^3 = 32x^2y^2$.

Приклад. Записати рівняння $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 4(x^2-3y^2)$ в полярних координатах.

Розв'язування

Перейдемо до полярних систем координат та отримаємо:

$$(\rho^2\cos^2\gamma + \rho^2\sin^2\gamma)^{\frac{3}{2}} = 4(\rho^2\cos^2\gamma - 3\rho^2\sin^2\gamma)$$
$$(\rho^2)^{\frac{3}{2}} = 4(\rho^2\cos^2\gamma - 3\rho^2\sin^2\gamma)$$
$$\rho^3 = 4\rho^2(\cos^2\gamma - 3\sin^2\gamma)$$
$$\rho = 4(\cos^2\gamma - 3\sin^2\gamma)$$
$$\rho = 4(\underbrace{\cos^2\gamma - \sin^2\gamma}_{\cos 2\gamma} - \underbrace{2\sin^2\gamma}_{1-\cos 2\gamma})$$
$$\rho = 4(\cos 2\gamma - (1-\cos 2\gamma))$$
$$\rho = 4(2\cos 2\gamma - 1)$$

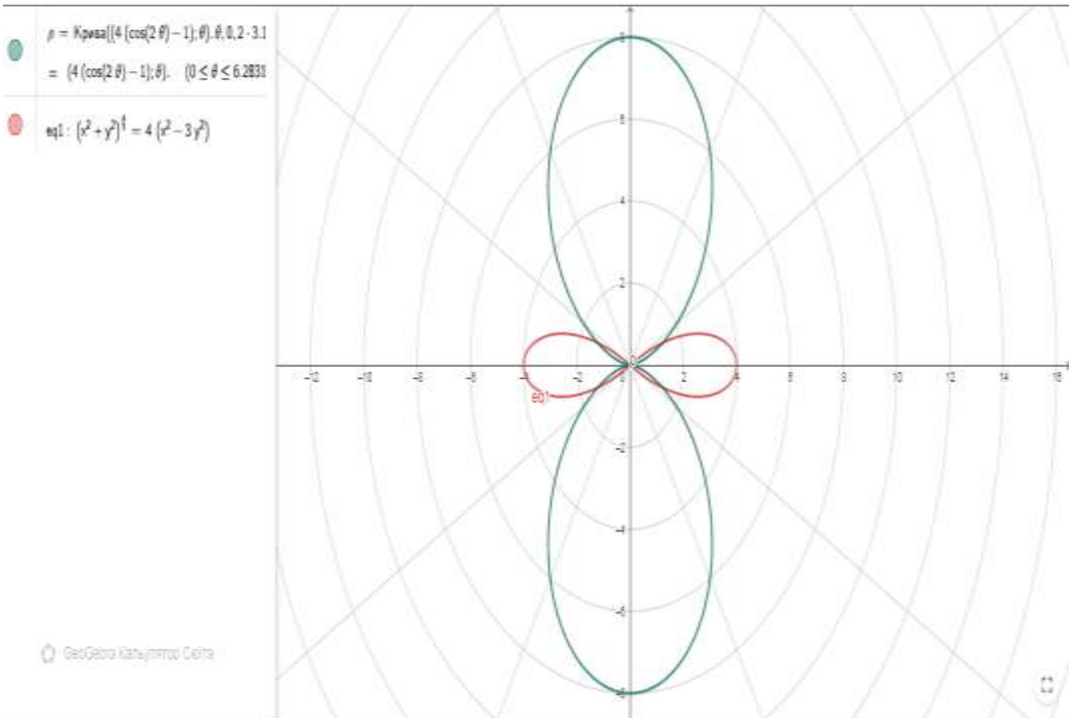

Рисунок 1.11 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: $\rho = 4(2\cos 2\gamma - 1)$.

Приклад. Побудувати лінію $\rho = 2\sin\gamma$.

Розв'язування

Враховуючи, що $\rho \geq 0$, визначаємо область допустимих значень:

$$\begin{aligned} &2\sin\gamma \geq 0 \\ &\sin\gamma \geq 0 \\ &2\pi n + 0 \leq \gamma \leq \pi + 2\pi n, n \in Z \end{aligned} .$$

Із зазначеного бачимо, що $T = 2\pi$ – це найменший додатний період, оскільки sin – періодична функція. Це означає, що рисувати рисунок ми будемо від $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, а потім все нарисоване повторимо через $T = 2\pi$.

Із знайденої області допустимих значень видно, що $0 \leq \gamma \leq \pi$, тобто в секторі від π до 2π нічого не буде, бо цей проміжок не входить в область допустимих значень. Отже, рисунок буде лише від 0 до π . Далі складаємо таблицю і по точках побудуємо рисунок.

γ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
ρ	0	0,38	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0,38	0

Отже, отримали:

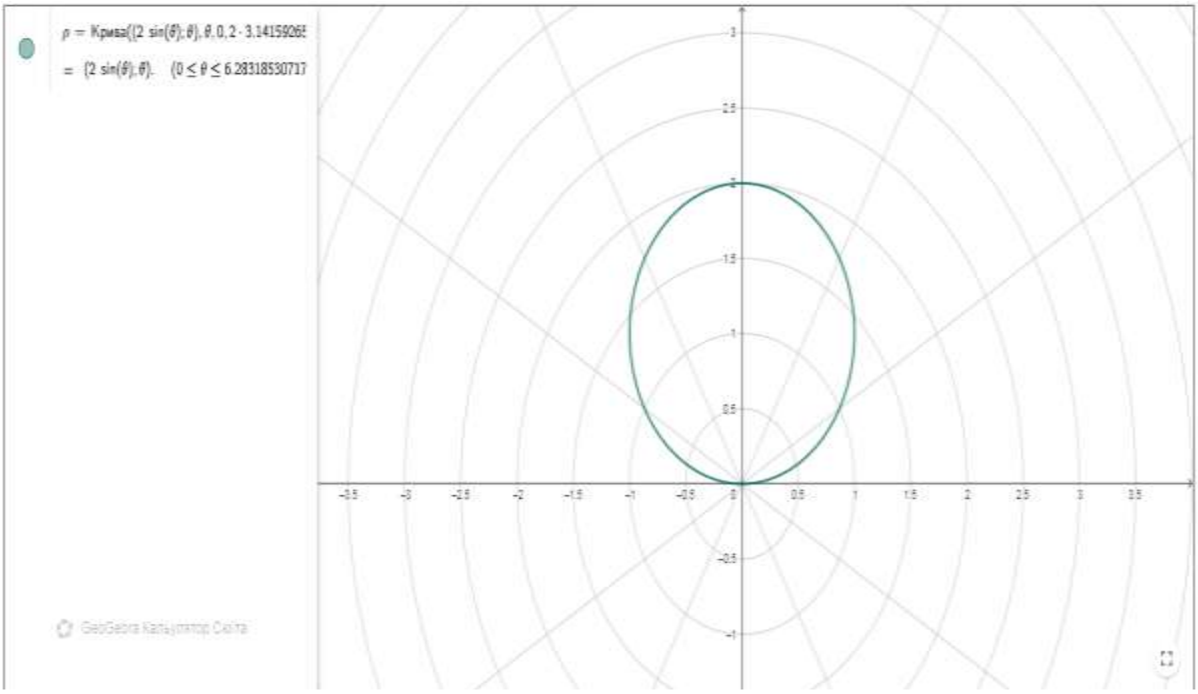

Рисунок 1.12 – Графічний розв'язок задачі

Приклад. Побудувати лінію $\rho = a\sin 4\gamma$.

Розв'язування

1. За *a=1* будемо мати $\rho = \sin 4\gamma$.

Спершу визначаємо область допустимих значень з умови, що $\rho \ge 0$.

$$\sin 4\gamma \ge 0$$

Отже, $$2\pi n + 0 \le 4\gamma \le \pi + 2\pi n \quad .$$

$$\frac{\pi n}{2} + 0 \le \gamma \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Це ми знайшли, де існує наша функція.

Також із знайденої області допустимих значень бачимо, що

$$T = \frac{\pi}{2}$$

– найменший додатний період. Це означає, що рисувати рисунок можемо від $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$, а потім все нарисоване повторити через період $T = \frac{\pi}{2}$.

Крім того, з області допустимих значень можна побачити, що область визначення лише від 0 до $\frac{\pi}{4}$ ($0 \le \gamma \le \frac{\pi}{4}$), а не до $\frac{\pi}{2}$, тобто в секторі від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ нічого не буде, бо він не входить в область визначення.

Тому рисунок буде лише від 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Далі складаємо таблицю і по точках побудуємо рисунок в секторі $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{4}$.

γ	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отже, отримали чотирипелюсткову троянду, кожна пелюстка довжиною *a=1.*

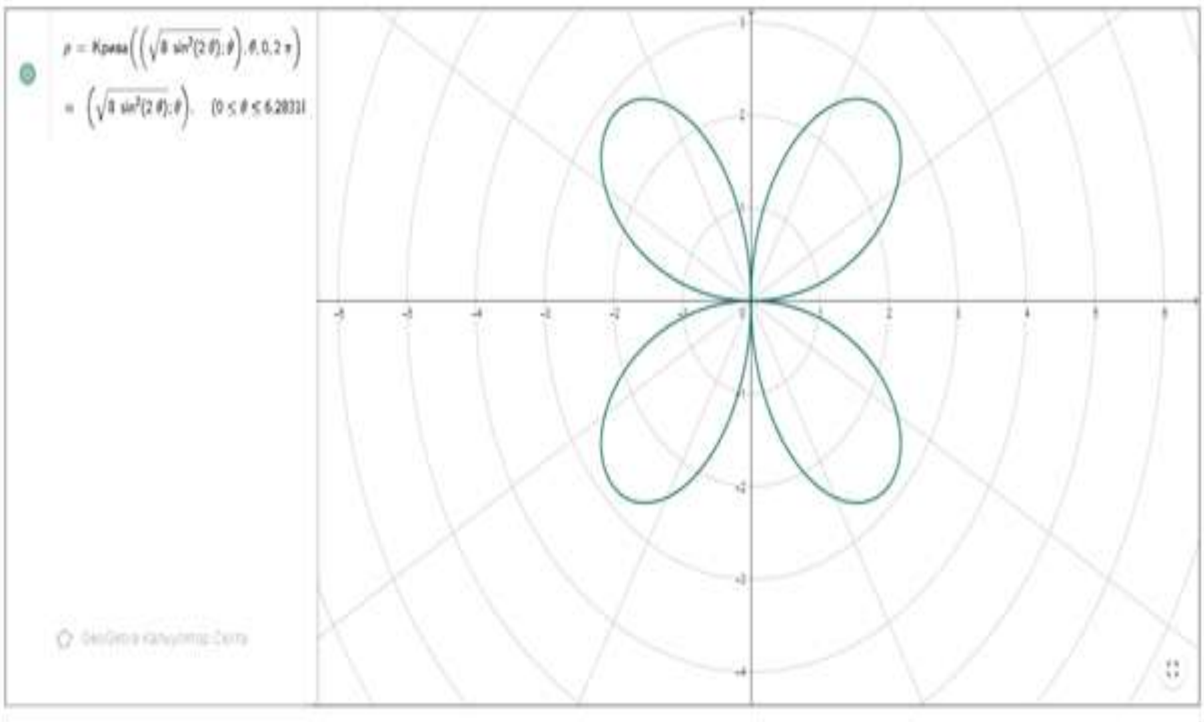

Рисунок 1.13- Графічний розв’язок задачі

2. За $a=2$ маємо $\rho = \sin 4\gamma$.

Пелюстки витянулися на довжину $a=2$.

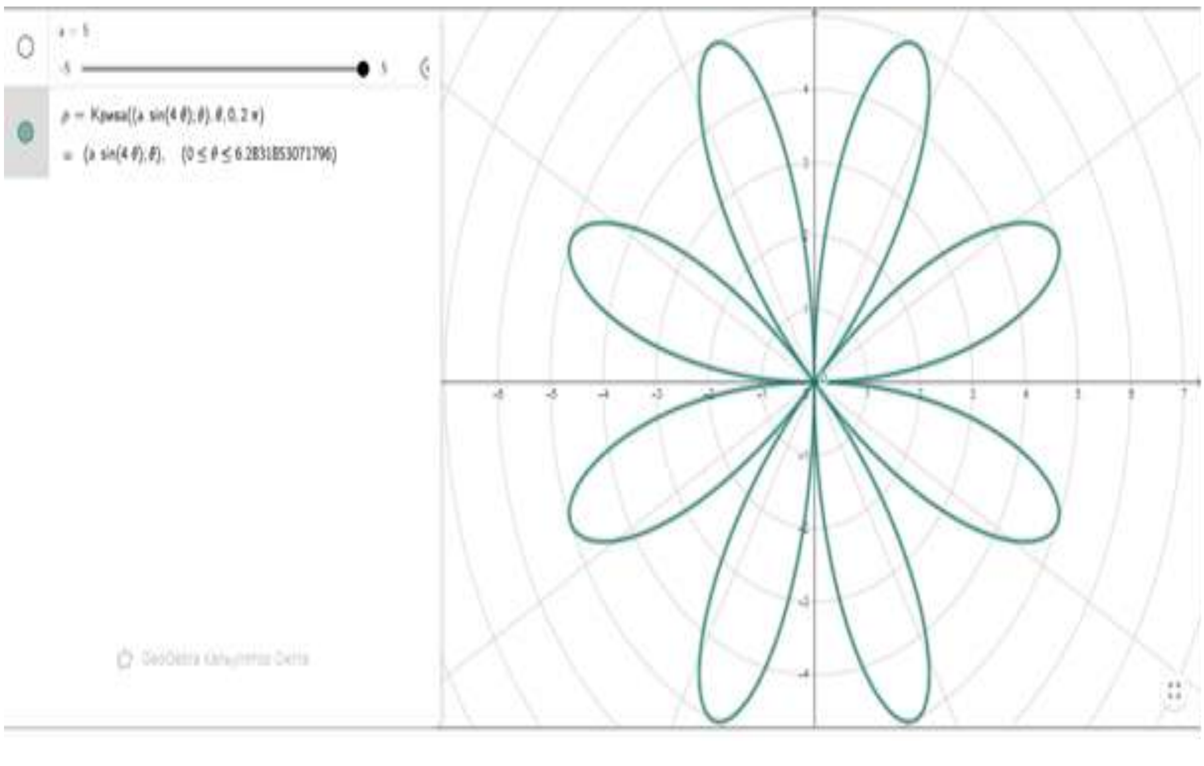

Рисунок 1.14 – Графічний розв’язок задачі

Приклад. Побудувати лінію $\rho = 3\cos 3\gamma$ – трипелюсткову троянду.

Розв'язування

$$3\cos 3\gamma \ge 0, \rho \ge 0$$

$$\cos 3\gamma \ge 0$$

ОДЗ: $$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 3\gamma \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \le \gamma \le \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

за $n = 0$:

$-\frac{\pi}{6} \le \gamma \le \frac{\pi}{6}$ – сектор, в якому буде рисунок, тобто одна з пелюсток;

за $n = 1$:

$-\frac{\pi}{2} \le \gamma \le \frac{5\pi}{6}$ – друга пелюстка;

за $n = 2$:

$\frac{7\pi}{6} \le \gamma \le \frac{3\pi}{2}$ – третя пелюстка.

Пелюстка:

γ	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{6}$
ρ	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0

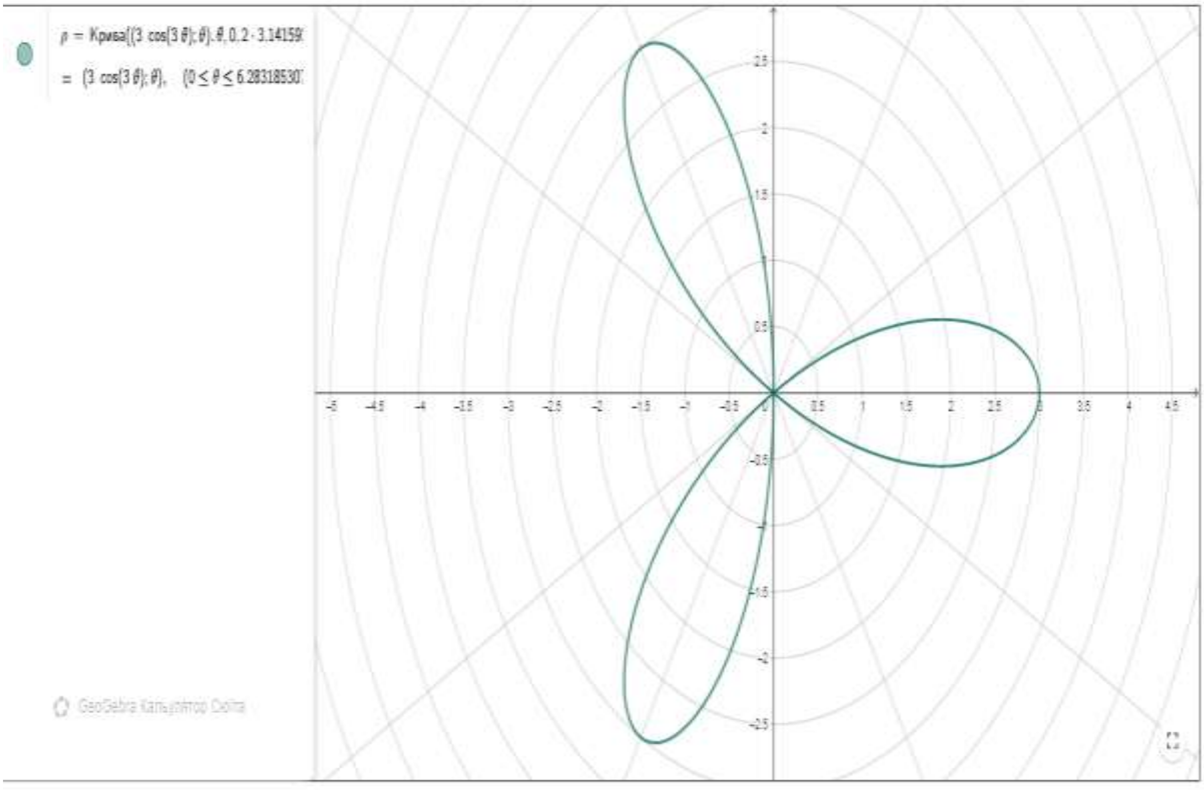

Рисунок 1.15 – Графічний розв'язок задачі

Приклад. Побудувати лінію $\rho = a(1+\cos\gamma)$ – карділоїд.

Розв'язування

$$a(1+\cos\gamma) \ge 0, \rho \ge 0$$

$$1+\cos\gamma \ge 0$$

$$\text{ОДЗ: } \cos\gamma \ge -1$$

$$2\pi n + 0 \le \gamma \le 2\pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$T = 2\pi$$

$0 \le \gamma \le 2\pi$ – область визначення рисунку.

Складаємо таблицю:

γ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	$2a$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)a$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}2+1)a$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{1}{2}a$	$0.3a$	$0.1a$	0

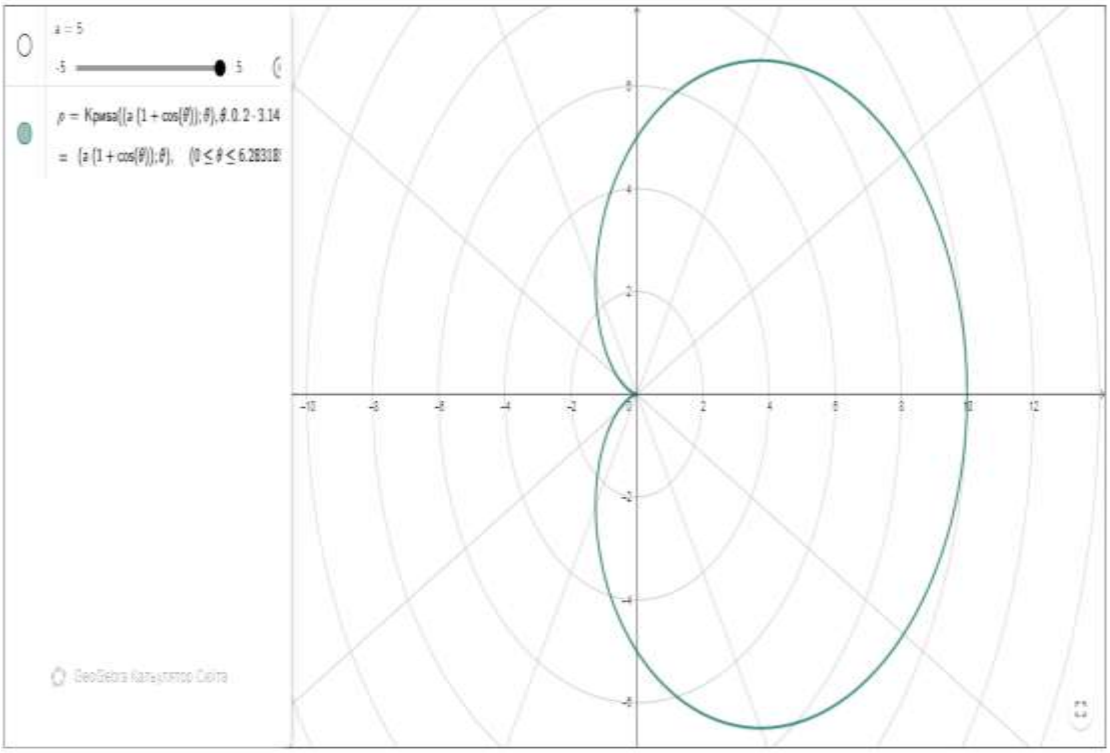

Рисунок 1.16 – Графічний розв'язок задачі

Можна продовжити таблицю і знайти координати точок, що нижче полярної осі. А можна так, оскільки функція парна, тобто $\rho(-\gamma) = \rho(\gamma)$, $\rho(-\gamma) = a(1+\cos(-\gamma)) = a(1+\cos\gamma) = \rho(\gamma)$, а це означає, що функція симетрична відносно полярної осі, тобто можна просто відобразити іншу половину рисунку.

Приклад. Задано точку *(1,2)* і кут нахилу прямої до осі *x*, який дорівнює 30°. Потрібно знайти параметричне рівняння цієї прямої.

Розв'язок

Знайдемо напрямний вектор прямої: Кут нахилу прямої до осі *x* (позначимо його як $\alpha=30^\circ$) дає напрямний вектор прямої:

$$\vec{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

Параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $P_0(1,2)$ і має напрямний вектор $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, можна записати так:

$$x(t) = x_0 + t \cdot v_x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$y(t) = y_0 + t \cdot v_y = 2 + \frac{1}{2}t$$

Відповідь: $x(t) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, y(t) = 2 + \frac{1}{2}t$.

Тема 2 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1 Загальне рівнянння кривих другого порядку

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \tag{2.1}$$

Коефіцієнти цього рівняння – довільні дійсні числа, причому a_{11}, a_{12}, a_{22} не дорівнюють одночасно нулю.

Щоб привести загальне рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду, спочатку виконують поворот системи координат, усуваючи член із добутком змінних. Далі, зміщуючи початок координат, досягають подальшого спрощення рівняння.

Формули повороту прямокутної декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \tag{2.2}$$

Формули паралельного переносу системи координат мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

де $(x_0; y_0)$ – координати точки, в яку переноситься початок координат.

Алгоритм виконання перетворення повороту системи координат запишемо в такому вигляді:

1. Складають характеристичне рівняння кривої у вигляді:

$$S^2 - (a_{11} + a_{22})S + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0, \tag{2.4}$$

де S_1 і S_2 – його корені.

2. Тангенс кута повороту системи координат знаходять за формулами:

$$tg\alpha_1 = \frac{S_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad tg\alpha_2 = \frac{S_2 - a_{11}}{a_{12}}. \tag{2.5}$$

Далі знаходять $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \tag{2.6}$$

3. Знаходять коефіцієнти рівняння кривої в новій системі координат.

Рівняння кривої другого порядку в новій системі координат $(OX'Y')$, буде мати вигляд:

$$a_{11}{}'x'^2 + a_{22}{}'y'^2 + 2a_{10}{}'x' + 2a_{20}{}'y' + a_{00} = 0, \qquad (2.7)$$

де $a_{11}{}' = S_1$, $a_{22}{}' = S_2$.

$$a_{10}{}' = a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha. \qquad (2.8)$$

Звідси:

$$a_{20}{}' = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha.$$

$$a_{00}{}' = a_{00}.$$

4. Шляхом паралельного переносу системи координат одержують канонічне рівняння кривої.

Приклад. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої:

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 10x - 20y + 10 = 0.$$

Розв'язання

1. В цьому рівнянні: $a_{11} = 5,\ a_{12} = 1,\ a_{22} = 5,\ a_{10} = -5,\ a_{20} = -10,\ a_{00} = 10$.

2. Складаємо характеристичне рівняння кривої: $S^2 - 10S + 24 = 0$. Знайдемо його корені: $S_1 = 4, S_2 = 6$.

3. Обчислимо тангенс кута повороту координатних осей:

$$tg\alpha_1 = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2},\ tg\alpha_2 = \frac{6-5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$(tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 = -1$, тобто ці два кути визначають взаємно перпендикулярні напрями).

З рівності $tg\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ випливає, що кут повороту може знаходитись в другій або четвертій чвертях, а з $tg\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ясно, що кут повороту α може знаходитись в першій або в третій четвертях.

Зручно завжди брати для $tg\alpha$ з двох можливих значень – додатне, а кут повороту α – в першій чверті $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким чином, з двох можливих значень тангенса беремо $tg\alpha = \frac{1}{2}$.

4. За формулами:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

знайдемо $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ i } \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Потім, за формулами:

$$a_{11}{}' = S_1,\ a_{22}{}' = S_2,\ a_{10}{}' = a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha,$$
$$a_{20}{}' = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha,\ a_{00}{}' = a_{00}$$

знайдемо коефіцієнти при змінних в новому рівнянні:

$$a_{11}{}' = S_1 = 4, a_{22}{}' = S_2 = 6,$$
$$a_{10}{}' = -5\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - 10\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{20}{\sqrt{5}},$$
$$a_{20}{}' = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 10\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{15}{\sqrt{5}},$$
$$a_{00}{}' = 10.$$

Рівняння кривої в системі $(OX'Y')$ буде мати вигляд:

$$4x'^2 + 6y'^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}x' - \frac{30}{\sqrt{5}}y' + 10 = 0.$$

За допомогою паралельного переносу системи координат одержане рівняння зведемо до канонічного вигляду.

Для цього групуємо члени, які містять одну і ту саму змінну, одержимо:

$$\left(4x'^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}x'\right) - \left(6y'^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}y'\right) + 10 = 0.$$

Коефіцієнти при старших членах потрібно винести за дужки:

$$4\left(x'^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x'\right) - 6\left(y'^2 + \frac{5}{\sqrt{5}}y'\right) + 10 = 0$$

В кожній дужці виділимо повний квадрат:

$$4\left[\left(x'-\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2-5\right]-6\left[\left(y'+\frac{5}{4\sqrt{5}}\right)^2-\frac{5}{16}\right]+10=0$$

$$4\left(x'-\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2-20-6\left(y'+\frac{5}{4\sqrt{5}}\right)^2-\frac{15}{8}+10=0$$

або

$$4\left(x'-\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2+6\left(y'+\frac{5}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{95}{8}$$

Виконаємо тепер паралельний перенос координатної системи $X'OY'$. Формули перетворення запишемо так:

$$\begin{aligned} x' &= \overline{x}+x_0 \\ y' &= \overline{y}+y_0 \end{aligned}.$$

Звідки

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x'-x_0 \\ \overline{y} &= y'-y_0 \end{aligned}.$$

Введемо позначення в рівняння:

$$x'-\frac{5}{\sqrt{5}}=\overline{x}$$

$$y'+\frac{5}{4\sqrt{5}}=\overline{y}$$

Порівнюючи ці позначення з формулами, отримаємо, що:

$$x_0=\frac{5}{\sqrt{5}},\ y_0=-\frac{5}{4\sqrt{5}},$$

$$4\overline{x}^2+6\overline{y}^2=\frac{95}{8} \text{ або } \frac{32\overline{x}^2}{95}+\frac{48\overline{y}^2}{95}=1$$

Задане рівняння визначає еліпс. Вигляд заданої кривої показано на рисунку 2.1.

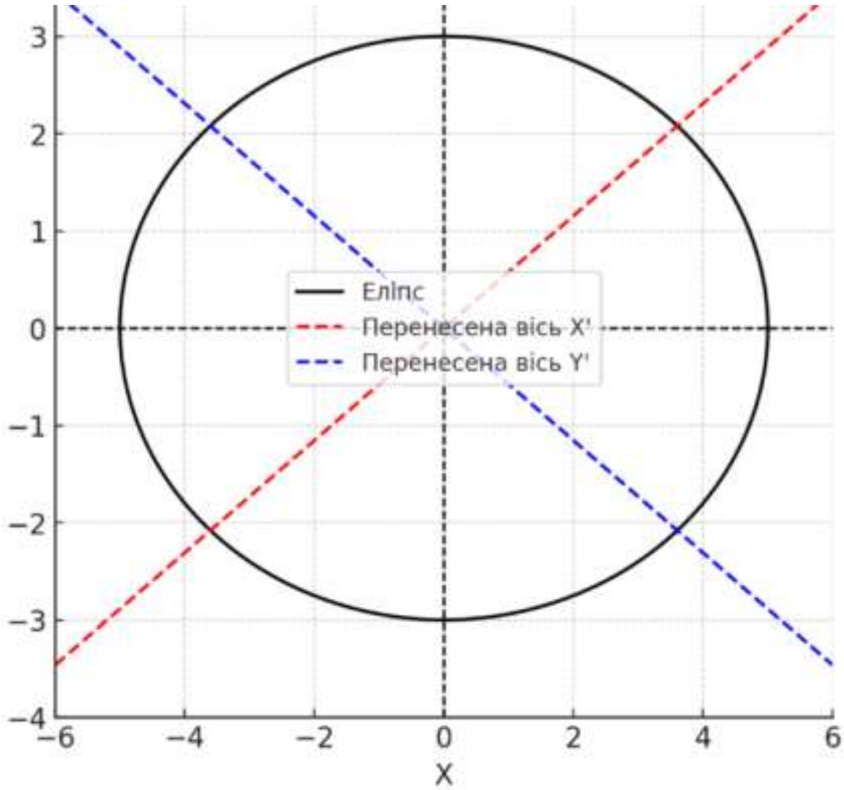

Рисунок 2.1 – Еліпс та його паралельне перенесення

Відповідь: $\frac{32\overline{x}^2}{95}+\frac{48\overline{y}^2}{95}=1$.

Приклад. Спростити рівняння кривої: $3x^2+6x-y-2=0$. Схематично побудувати цю криву.

Розв'язання

Групуємо члени з однойменними координатами:

$$(3x^2+6x)-y-2=0.$$

Виділимо повний квадрат для виразу, що містить *x:*

$$3(x^2+2x+1-1)-y-2=0,$$
$$3((x+1)^2-1)-y-2=0,$$
$$3(x+1)^2-3-y-2=0,$$
$$3(x+1)^2-y-5=0,$$
$$y=3(x+1)^2-5$$

Це рівняння праболи зміщене на $O_1(-1;-5)$. Якщо перенести параболу на *(h, k),* то рівняння зміниться. Наприклад, якщо перенести на *(2,3),* отримаємо:

$$y-k=3(x+1-h)^2-5$$
$$y-3=3(x+1-2)^2-5,$$
$$y=3(x-1)^2-2.$$

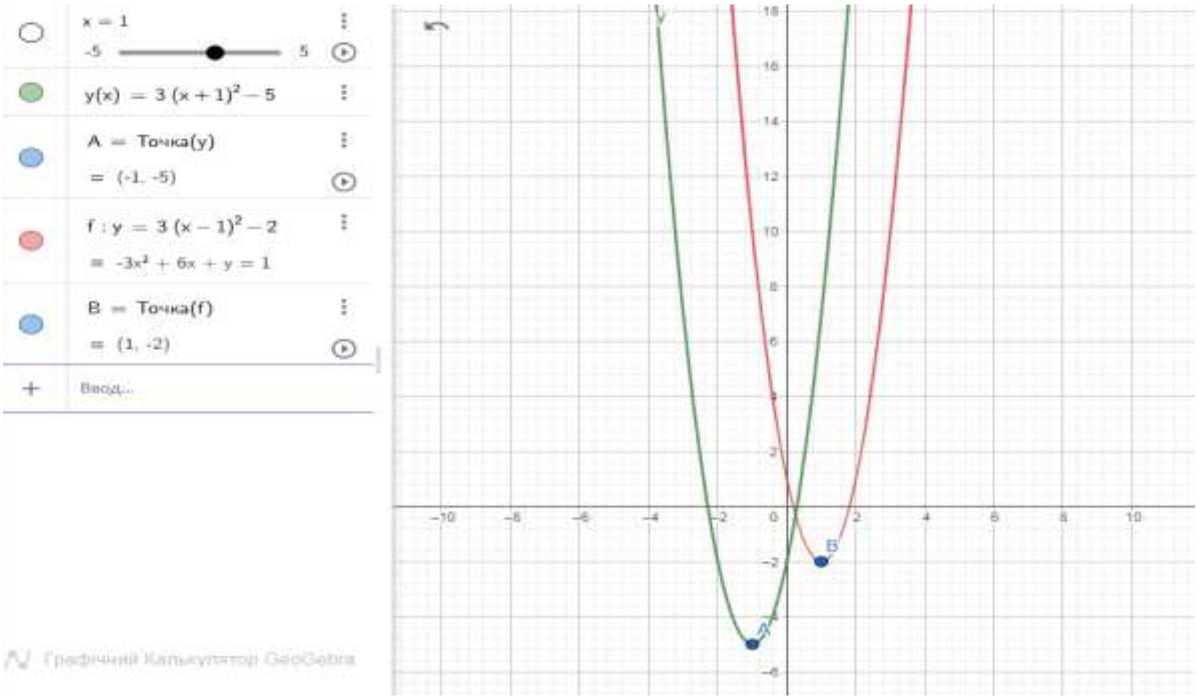

Рисунок 2.2 – Графічний розв’язок задачі

2.1.1 Центр лінії другого порядку. Асимптотичні напрямки кривих другого порядку

Означення 2.1. ***Центром ліній другого порядку*** називається точка *С*, якщо вона є центром симетрії цієї лінії.

Теорема 1. Для того, щоб точка $C(x_0; y_0)$ була центром лінії другого порядку, заданої рівнянням (2.1), необхідно і достатньо, щоб пара чисел $(x_0; y_0)$ була розв'язком системи:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Наслідок. Для того, щоб початок координат був центом лінії, заданої рівнянням, необхідно і достатньо, щоб $a_{10} = a_{20} = 0$.

Означення 2.2. ***Центральними лініями*** називаються лінії, що мають один центр**.**

Означення 2.3. ***Нецентральними лініями*** називаються лінії, що не мають центрів або мають більше одного центра**.**

Вирази $I_1 = a_{11} + a_{22}$ та $I_2 = a_{11}a_{22} - a^2_{12}$ називаються ***інваріантами перетворення***.

Лінія є центральною тоді і лише тоді, коли $I_2 \neq 0$.

Еліпс і гіпербола є центральними кривими, оскільки вони мають єдиний центр – початок координат у системі, в якій ці криві задані канонічними рівняннями.

Парабола не має жодного центра.

Означення 2.4. ***Асимптотичним напрямком відносно лінії*** γ називається напрямок, визначений ненульовим вектором $\vec{p}$, якщо пряма, паралельна вектору $\vec{p}$, або має з лінією не більше однієї спільної точки, або міститься в лінії γ.

Напрямок, визначений ненульовим вектором $\vec{p}(p_1; p_2)$, є асимптотичним напрямком відносно лінії γ, заданої рівнянням (2.1), тоді і лише тоді, коли $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$.

Враховуючи те. що $k = \dfrac{p_2}{p_1}$ і розділивши це рівняння на p_1^2, одержимо:

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-I_2}}{a_{22}}, \text{ де } I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \qquad (2.10)$$

Можливі три випадки:

1) $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, тобто $a_{22} \neq 0$.

Відносно лінії γ не ісує асимптотичних напрямків. Такі лінії відносяться до ліній еліптичного типу.

2) $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Відносно лінії γ існує лише один асимптотичний напрямок. Такі лінії відносяться до ліній параболічого типу.

3) $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

Відносно лінії y існує два асимптотичних напрямки. Такі лінії відносяться до ліній гіперболічного типу. Так відносно гіперболи існує два асимптотичних напрямки, які збігаються з напрямками її асимптот.

Означення 2.5. Якщо точка M_0, яка належить лінії другого порядку γ, є центром цієї лінії, то вона називається **особливою точкою** лінії, у іншому випадку точка M_0 називається **звичайною точкою**.

Означення 2.6. Пряма, що проходить через звичайну точку кривої другого порядку, називається **дотичною до цієї кривої** в точці M_0, якщо вона або має з кривою дві збіжні точки перетину, або повністю лежить на цій кривій.

Теорема 2. В кожній звичайній точці лінії другого порядку існує одна і лише одна дотична. Якщо лінія задана загальним рівнянням, то дотична в точці $M_0(x_0; y_0)$ цієї лінії має рівняння:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0 \quad (2.11)$$

Оскільки всі точки еліпса, гіперболи та параболи є звичайними, у кожній такій точці можна провести лише одну дотичну пряму.

Рівняння дотичних до ліній, заданих канонічними рівняннями:

1) еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=\frac{1}{b^2},\ a_{00}=-1,\ a_{12}=a_{10}=a_{20}=0.$$

Рівняння дотичної до еліпса в точці $M_0(x_0;y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \tag{2.12}$$

2) гіпербола:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=-\frac{1}{b^2},\ a_{00}=-1,\ a_{12}=a_{10}=a_{20}=0.$$

Рівняння дотичної до гіперболи в точці $M_0(x_0;y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \tag{2.13}$$

3) парабола:

$$y^2=2px,\ a_{11}=0,\ a_{22}=1,,\ a_{1_1}=a_{12}=a_{20}=a_{00}=0$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$yy_0=p(x+x_0) \tag{2.14}$$

Використовуючи відповідні формули, можна довести кілька цікавих геометричних властивостей дотичних до еліпса, гіперболи та параболи:

1) дотична до еліпса або гіперболи утворює однакові кути з фокальними радіусами точки дотику. Це означає, що промені, проведені з фокусів до точки дотику, відбиваються симетрично від дотичної;

2) відрізок дотичної до гіперболи, розташований між її асимптотами, ділиться навпіл у точці дотику. Це випливає з симетрії гіперболи відносно її асимптот;

3) дотична до параболи утворює однакові кути з фокальним радіусом точки дотику та з променем, що виходить із цієї точки паралельно осі параболи. Це пояснює, чому параболічні рефлектори спрямовують світло чи звук від фокуса у вигляді паралельного пучка.

2.1.2 Діаметри лінії другого порядку. Спряжені напрямки. Осі

Нехай в афінній системі $\left(O\vec{e_1}\vec{e_2}\right)$ лінія γ задана:

$$F(x;y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Візьмемо який-небудь вектор $\vec{p}\left(p_1;p_2\right)$ неасимптотичного напрямку відносно цієї лінії.

Означення 2.7. Множина середин усіх хорд лінії (2.1), паралельних вектору $\vec{p}\left(p_1;p_2\right)$ неасимптотичного напрямку, називається **діаметром**, спряженим хордам, визначеним напрямком $\vec{p}$.

Говорять, що діаметр спряжений вектору $\vec{p}$.

Властивості діаметрів лінії другого порядку

1. Якщо крива другого порядку має центр, то будь-який її діаметр обов'язково проходить через цей центр. Це випливає з означення центральних кривих, до яких належать еліпси та гіперболи.
2. Для центральної кривої другого порядку будь-яка пряма, що проходить через її центр (за винятком асимптотичних прямих у випадку гіперболи), є її діаметром.
3. У нецентральної кривої другого порядку (наприклад, параболи) всі її діаметри мають асимптотичний напрямок, тобто напрямок, який визначає необмежене зростання координат точок кривої.

Означення 2.8. Два діаметри центральної кривої другого порядку називаються ***спряженими***, якщо кожен із них ділить навпіл усі хорди кривої, які паралельні іншому діаметру.

На рис. 2.3 зображено спряжені діаметри d_1 і d_2 гіперболи, кола.

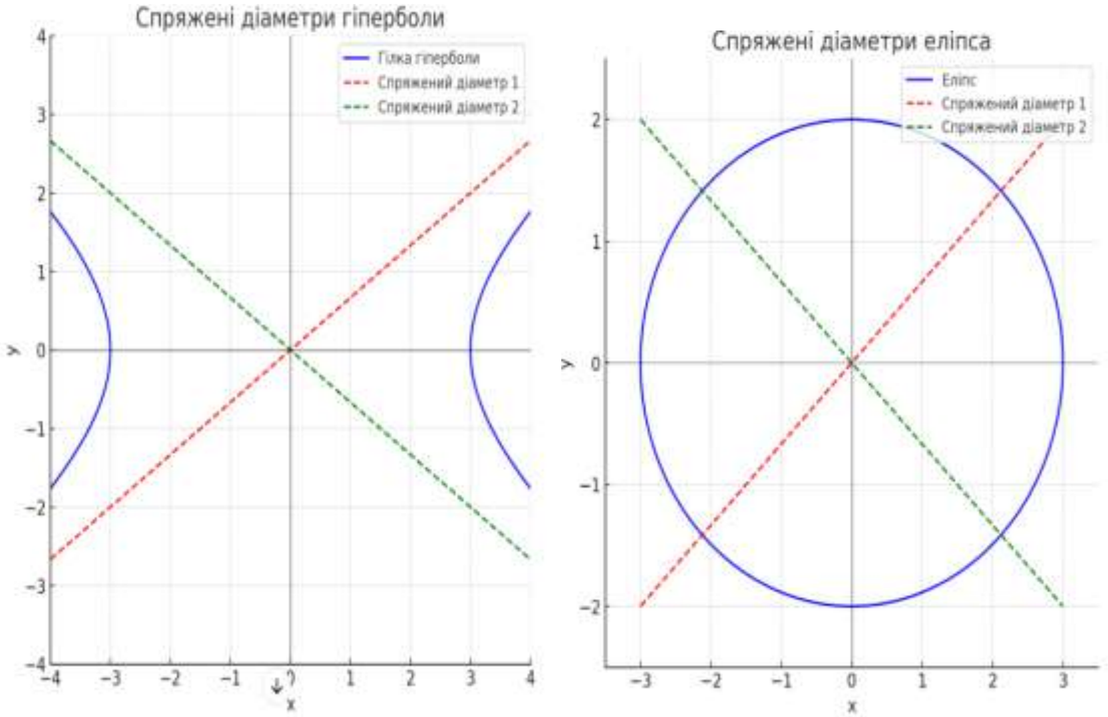

Рисунок 2.3 – Спряжені діаметри

Означення 2.9. Напрямок називається ***головним*** відносно заданої кривої другого порядку, якщо він є спряженим до перпендикулярного йому напрямку. Оскільки спряженість є взаємною властивістю, то якщо певний напрямок є головним, то і перпендикулярний до нього напрямок також буде головним.

Якщо крива другого порядку задана загальним рівнянням у прямокутній декартовій системі координат: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, то кутові коефіцієнти головних напрямків можна знайти за формулою:

$$k_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} + \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}, \qquad (2.15)$$

причому

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Означення 2.10. ***Головним діаметром кривої другого порядку*** називається такий діаметр, який є перпендикулярним до спряжених хорд. З цього випливає, що головний діаметр є також віссю симетрії цієї кривої другого порядку, оскільки він визначає напрямок, вздовж якого розташовані симетрично точки кривої.

Теорема 3. Центральна крива другого порядку, за винятком кола, має два і тільки два головних діаметри. Для кола будь-який діаметр є головним, оскільки всі його осі є симетричними.

Нецентральна крива другого порядку (наприклад, парабола) має лише один головний діаметр, який збігається з її віссю симетрії.

Будь-яка крива другого порядку має принаймні одну вісь симетрії.

Еліпс із нерівними півосями та гіпербола мають дві осі симетрії.

Коло має нескінченну кількість осей симетрії, оскільки воно однаково виглядає у всіх напрямках.

Парабола має єдину вісь симетрії, яка проходить через її фокус і перпендикулярна до директриси.

Класифікація кривих другого порядку

Нехай лінія другого порядку γ в прямокутній системі координат $\left(O\vec{i}\,\vec{j}\right)$ задана:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Суть класифікації кривих другого порядку полягає в тому, щоб, правильно вибравши нову прямокутну систему координат (отриману шляхом повороту та паралельного переносу початку координат), максимально спростити рівняння кривої. Після зведення рівняння до зручного вигляду можна визначити, до якого типу кривих другого порядку вона належить.

2.2 Канонічні рівняння кривих другого порядку та їх властивості

Рівняння другого порядку і вище можуть визначати реальні криві, сукупності кривих, точки (вироджені криві) або порожню множину (уявні криві).

Під кривими другого порядку розуміють криві, які описуються алгебраїчними рівняннями другого порядку. Сюди відносяться: коло, еліпс, гіпербола і парабола. В різних системах прямокутних координат рівняння одних і тих самих кривих набувають різного вигляду. В цьому параграфі будемо вибирати системи координат таким чином, щоб рівняння вказаних кривих були найпростішими. Такі рівняння називаються канонічними.

2.2.1 Коло

Коло – це множина всіх точок на площині, що знаходяться на однаковій відстані від певної фіксованої точки, яка називається його центром (рис. 2.4). Точка O є центром кола. Відстань від центра до будь-якої точки на колі називається його *радіусом*.

Канонічне рівняння кола з центром в точці $O(a,b)$ і радіусом r має вигляд:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{2.16}$$

В окремому випадку, коли центр кола співпадає з початком координат, його рівняння має вигляд:

$$x^2+y^2=r^2 \tag{2.17}$$

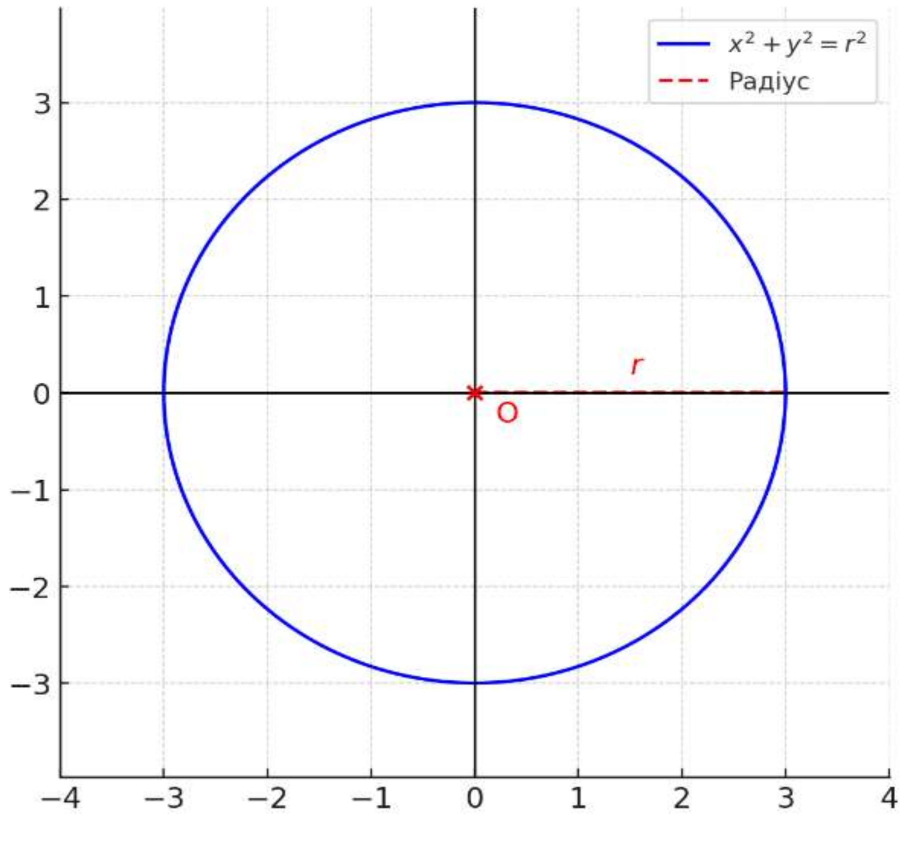

Рисунок 2.4 – Канонічне рівняння кола

Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2.18)$$

являє собою коло, якщо коефіцієнти при квадратах координат дорівнюють один одному, тобто $A=C$, і якщо відсутній член з добутком координат xy, тобто $B = 0$.

Щоб знайти точки перетину кола та прямої, заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, потрібно розв'язати систему цих двох рівнянь. Виключивши одну з координат, наприклад y, отримаємо квадратне рівняння відносно x.

Аналіз коренів цього рівняння дозволяє визначити взаємне розташування прямої та кола:

1. Якщо квадратне рівняння має два різні дійсні корені (дискримінант більше нуля), то пряма перетинає коло у двох різних точках, тобто є січною.
2. Якщо квадратне рівняння має один подвійний дійсний корінь (дискримінант дорівнює нулю), то точка перетину єдина, тобто пряма дотикається до кола.
3. Якщо квадратне рівняння не має дійсних коренів (дискримінант менше нуля), то пряма і коло не мають спільних точок, тобто пряма проходить зовні кола. Взаємне розташування точки $M_0(x_0, y_0)$ і кола визначається такими умовами:
   1) якщо $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ то точка M_0 лежить на колі;
   2) якщо $x_0^2 + y_0^2 > r^2$, то точка M_0 лежить за межами кола;
   3) якщо $x_0^2 + y_0^2 < r^2$, то точка M_0 лежить всередині кола.

Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – довільна точка кола, то дотична до кола в цій точці має рівняння:

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2 \quad \text{або} \quad xx_0 + yy_0 = r^2 \qquad (2.19)$$

залежності від того, визначається чи ні коло рівнянням (2.16) або (2.17).

Приклад. Написати рівняння кола, діаметром якого є відрізок MN, де $M(-2;3)$, $N(6;-3)$.

Розв'язання

Координати центра $C(a,b)$ кола знайдемо як координати точки, яка ділить відрізок MN навпіл:

$$a = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2\,;\ b = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{3-3}{2} = 0\,.$$

Радіус кола:

$$R = \rho(C, M) = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (-3)^2} = 3.$$

Тоді $(x-2)^2 + y^2 = 9$ – шукане рівняння кола.

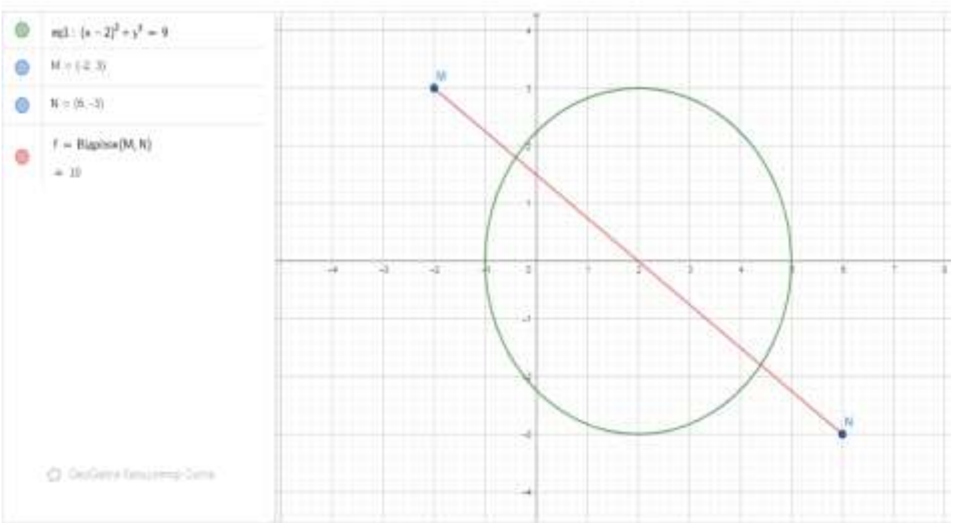

Рисунок 2.5 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $(x-2)^2 + y^2 = 9$.

Приклад. Визначте, яка лінія описується рівнянням $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$.

Розв'язання

Звівши рівняння до канонічного вигляду, отримаємо:

$$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 0.$$

Отримали рівняння кола з центром в точці *O (-5; 2).*

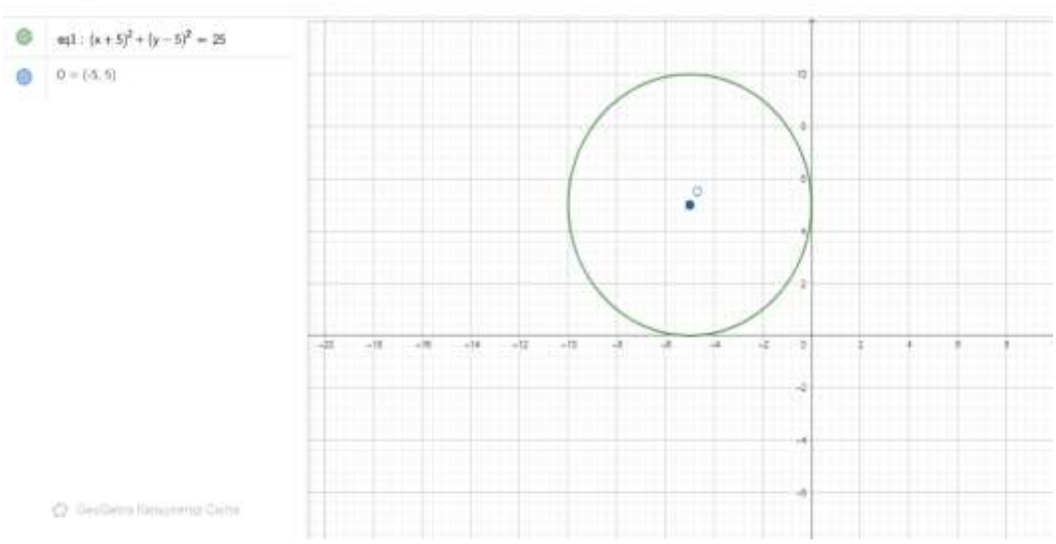

Рисунок 2.6 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 0$

Приклад. Рівняння кола $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$ привести до канонічного вигляду.

Розв'язання

Виділяючи повні квадрати в лівій частині цього рівняння, отримаємо:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + 4 - 4 - 25 = 0,$$
$$\text{або } (x+2)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

Отримали рівняння кола з центром в точці O *(-2; 5)* та *R*=5.

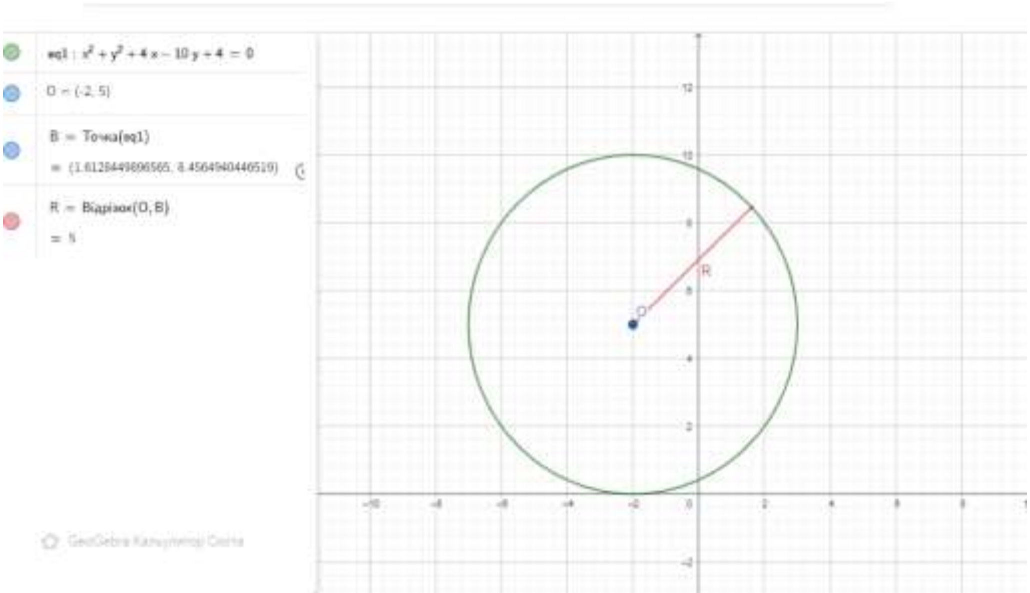

Рисунок 2.7 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25$.

2.2.2 Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок тієї ж площини, які називаються **фокусами,** є величина постійна, дорівнює *2a* (рис. 2.8)

Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2.20)$$

де *a* – велика, *b* – мала півосі еліпса, причому *a, b, c (c* – половина відстані між фокусами) пов'язані співвідношенням, $a^2 - b^2 = c^2$, *a>c.*

Якщо точка $M(x, y)$ належить еліпсу, то за означенням маємо:

$$MF_1 + MF_2 = 2a. \qquad (2.21)$$

Координати фокусів еліпса: $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$.

Відстань між фокусами еліпса дорівнює *2c*.

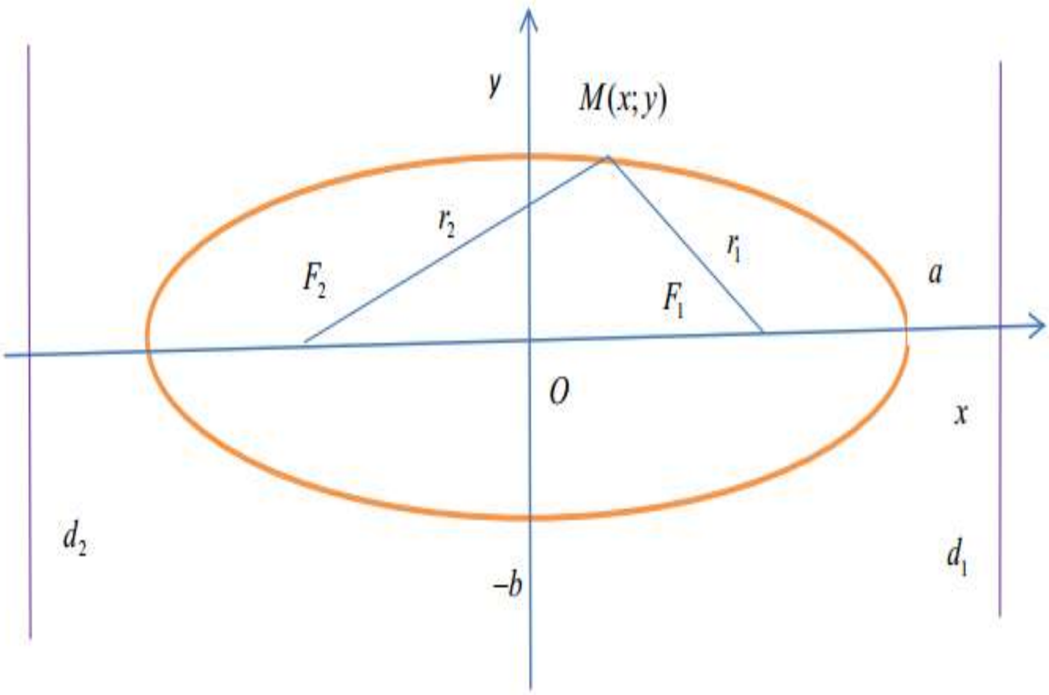

Рисунок 2.8 – Канонічне рівняння еліпса

Приклад. Уявімо, що в кімнаті є еліптична галерея. Якщо людина стоїть в одному з фокусів еліпса і шепоче, то інша людина, що стоїть у другому фокусі, чітко чує цей шепіт, навіть якщо вони знаходяться на великій відстані один від одного. Чому так відбувається?

Розв'язання

Розглянемо еліпс із рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де **фокуси** розташовані в точках $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$, а $c=\sqrt{a^2-b^2}$. *Оптична властивість еліпса* полягає в тому, що будь-який промінь, випущений з одного фокуса, після відбиття від внутрішньої сторони еліпса проходить точно через другий фокус.

У реальному житті ця властивість використовується: у галереях шепоту (наприклад, у будівлі Капітолію в США); в акустичних відбивачах (еліптичні зали в театрах і музеях); у рефлекторних антенах (наприклад, у супутникових тарілках). Тому можна сказати, що еліпс має унікальну акустичну властивість: всі звукові хвилі, випущені з одного фокуса, після відбиття збираються в іншому фокусі. Це пояснює, чому людина, яка стоїть у фокусі еліптичної кімнати, може шепотіти, а інша людина у протилежному фокусі чітко почує звук, навіть якщо всі інші не почують нічого.

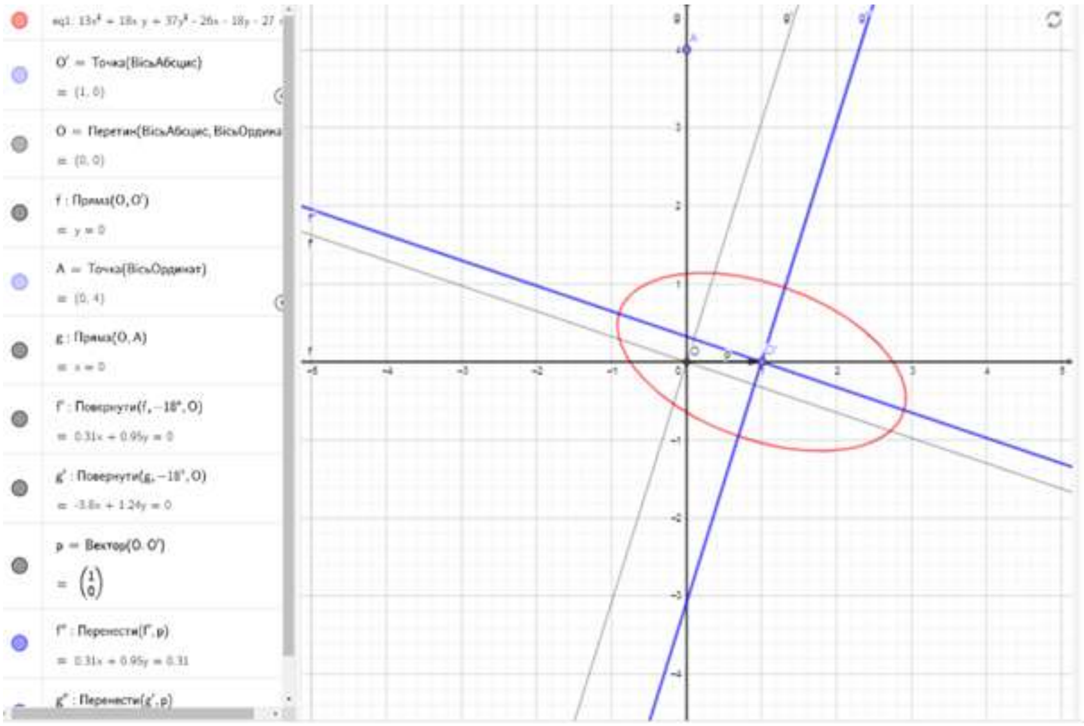

Рисунок 2.9 – Оптична властивість еліпса

Означення 2.11. ***Вершинами еліпса*** називаються точки перетину еліпса з осями координат $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$.

Означення 2.12. ***Осями*** еліпса називаються відрізки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$.

Означення 2.13. Форма еліпса характеризується його **ексцентриситетом**, який дорівнює відношенню відстані *(2c)* між фокусами до великої осі $(2a)$ $e = \dfrac{c}{a} < 1$.

Означення 2.14. Відстані r_1 і r_2 деякої точки еліпса $M(x,y)$ до його фокусів називаються фокальними ***радіусами-векторами*** цієї точки, причому $r_1 + r_2 = 2a$ (сума фокальних радіусів-векторів будь-якої точки еліпса дорівнює його більшій осі), і визначаються за формулами:

$$r_1 = a - ex, \tag{2.22}$$

де r_1 – правий фокальний радіус-вектор;

$$r_2 = a + ex \tag{2.23}$$

r_2 – лівий фокальний радіус-вектор.

В окремому випадку, коли $a=b(c=0, e=0)$ фокуси зливаються в одній точці – центрі, еліпс перетворюється на коло з рівнянням: $x^2+y^2=r^2$.

Взаємне розташування точки $M_0(x_0, y_0)$ і еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ визначається такими умовами:

1) якщо $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$, то точка M лежить на еліпсі:

2) якщо $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}>1$, то точка M лежить за межами еліпса;

3) якщо $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}<1$, то точка M лежить всередині еліпса.

Означення 2.15. ***Директрисами*** еліпса називаються дві прямі PQ і P_1Q_1, паралельні малій осі і віддалені від неї на відстані, що дорівнюють $\frac{a}{e}$.

Їх рівняння мають вигляд:

$$x=\frac{a}{e} \text{ і } x=-\frac{a}{e}, \quad \text{або} \quad x=\frac{a^2}{c},\ x=-\frac{a^2}{c} \tag{2.24}$$

Відношення відстані будь-якої точки еліпса до фокуса та її відстані до відповідної директриси є сталою величиною, що дорівнює ексцентриситету еліпса:

$$\frac{r_1}{d_1}=e \quad \text{і} \quad \frac{r_2}{d_2}=e. \tag{2.25}$$

Таким чином, еліпс можна визначити як множину точок на площині, для яких відношення відстані до фіксованої точки (фокуса) та відстані до певної прямої (директриси) є сталою величиною, меншою за одиницю.

Рівняння еліпса з осями, паралельними координатним осям, має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{2.26}$$

де (x_0, y_0) – координати центра елшса.

Еліпс має з будь-якою прямою дві точки перетину (дійсні або ті, які збігаються).

Означення 2.16. ***Дотична до еліпса*** – це пряма, яка має з еліпсом лише одну спільну точку. Вона проходить через цю точку і не перетинає еліпс у жодній іншій точці.

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad (2.27)$$

З будь-якої точки можна провести до еліпса дві дотичні. Залежно від розташування цієї точки відносно еліпса можливі такі випадки:

1. Якщо точка знаходиться поза еліпсом, то до нього можна провести дві різні дотичні.
2. Якщо точка лежить на еліпсі, то дотичні збігаються, тобто існує лише одна дотична, яка проходить через цю точку.
3. Якщо точка знаходиться всередині еліпса, то дійсних дотичних не існує, а аналітичні розрахунки дають уявні (комплексні) корені, що означає відсутність дотичних у реальному просторі.

Приклад. Дано рівняння еліпса $25x^2+64y^2=1600$.

Обчислити довжину його півосей, знайти координати фокусів, ексцентриситет, директриси і відстань між ними.

Знайти фокальні радіуси точки $M\left(\sqrt{13};10\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$ і точки еліпса, відстань від яких до лівого фокуса F_1 дорівнює 14.

Розв'язання

Розділивши обидві частини цього рівняння на 1600, одержимо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1,$$

звідки $a^2=64$, $b^2=25$.

Таким чином, довжини півосей дорівнюють відповідно $a=8$ і $b=5$.

Оскільки $b^2=a^2-c^2$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{39}$.

Тоді координати фокусів: $F_1(-\sqrt{39};0)$ і $F_2(\sqrt{39};0)$.

Знайдемо ексцентриситет:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{39}}{8}$$

Запишемо рівняння директрис:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{64}{\sqrt{39}}.$$

Відстань між ними отримаємо:

$$d=\left|\frac{64}{\sqrt{39}}-\left(-\frac{64}{\sqrt{39}}\right)\right|=\frac{128}{\sqrt{39}}.$$

Точка $M\left(\sqrt{13};10\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$ лежить на еліпсі.

Знайдемо її фокальні радіуси:

$$r_1=8+\frac{\sqrt{39}}{8}\sqrt{13}=8+\frac{\sqrt{507}}{8},$$
$$r_2=8-\frac{\sqrt{39}}{8}\sqrt{13}=8-\frac{\sqrt{507}}{8}$$

Знайдемо абсциси точок, відстань від яких до лівого фокуса дорівнює 14:

$$14=8+\frac{\sqrt{39}}{8}x,$$
$$x=\frac{48}{\sqrt{39}}=\frac{16\sqrt{39}}{13}$$

Підставляючи знайдене значення x у рівняння еліпса, знайдемо ординати цих точок:

$$y=\pm 5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}=\pm 5\sqrt{1-\frac{\sqrt{39}}{52}}=\pm 5\left(\frac{52-\sqrt{39}}{52}\right)$$

Отже, умові задачі задовольняють дві точки:

$$\left(\frac{16\sqrt{39}}{13};\frac{5(52-\sqrt{39})}{52}\right) \text{ та } \left(\frac{16\sqrt{39}}{13};-\frac{5(52-\sqrt{39})}{52}\right).$$

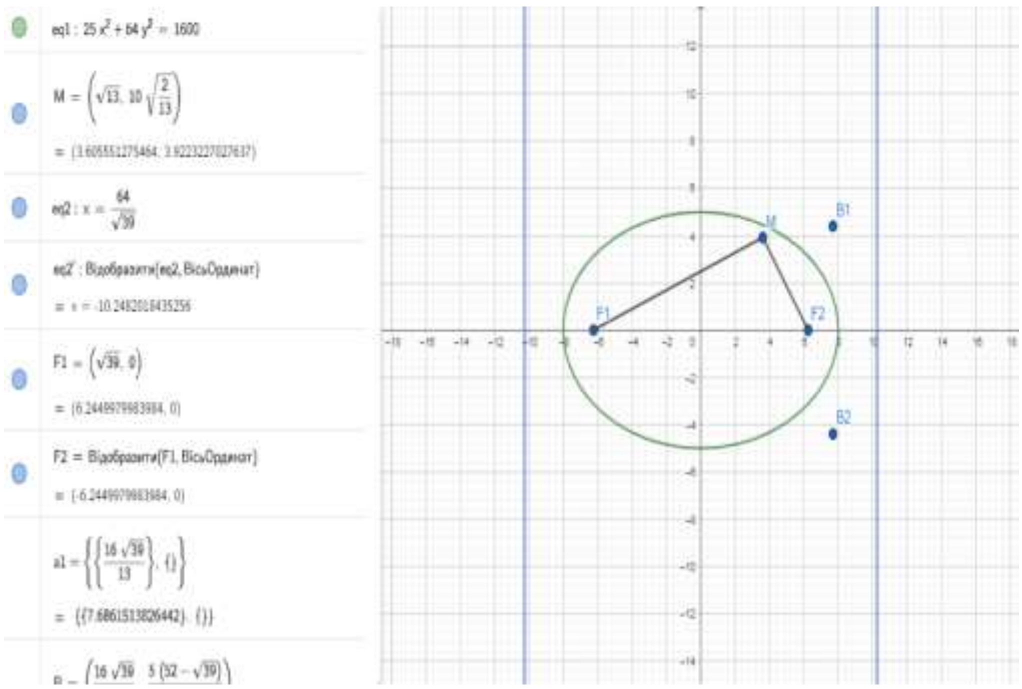

Рисунок 2.10 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: $r_1=8+\frac{\sqrt{39}}{8}\sqrt{13}=8+\frac{\sqrt{507}}{8}$ та $r_2=8-\frac{\sqrt{39}}{8}\sqrt{13}=8-\frac{\sqrt{507}}{8}$.

Приклад. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат, симетричного відносно початку системи координат, якщо відстань між директрисами дорівнює 10, а відстань між фокусами – 6.

Розв'язання

Тут $d=10$ і $2c=6$, тобто $c=3$.

Рівняння директрис мають вигляд $y=\pm\frac{b}{e}$, а відстань d між ними дорівнює: $\frac{2b}{e}$, оскільки $d=10$, то:

$$\frac{2b}{e}=10,\quad e=\frac{c}{b},\quad e=\frac{3}{b}.$$

Із системи рівнянь отримаємо:

$$\frac{2b}{e}=10,\quad e=\frac{3}{b}.$$

Знайдемо:

$$b^2=15.$$

Оскільки $c^2=b^2-a^2$, отримаємо:

$$a^2=b^2-c^2=6.$$

Отже, канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{15}=1.$$

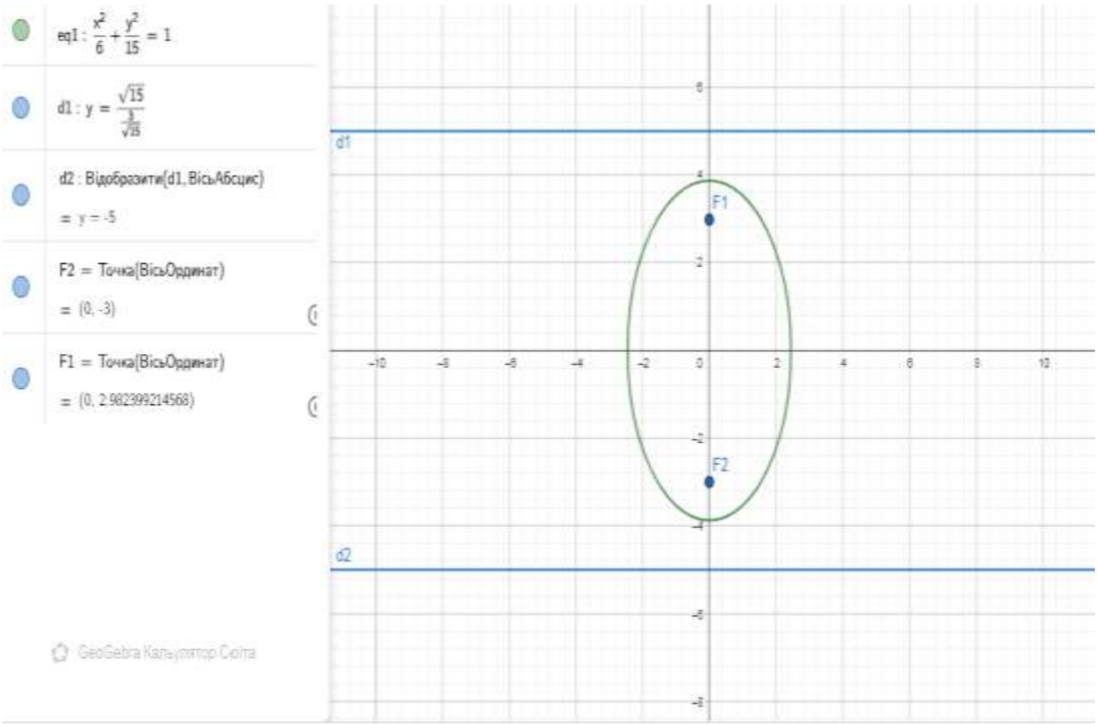

Рисунок 2.11 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{15}=1$.

Приклад. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$ в точці $M\left(2;\sqrt{5}\right)$.

Розв'язання

Скористаємося формулою :

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

В нашому випадку: $x_0=-1$, $y_0=\frac{1}{2}$, $a^2=9$, $b^2=12$.

Запишемо рівняння шуканої дотичної:

$$\frac{2x}{9}+\frac{\sqrt{5}y}{12}=1$$

Помножимо рівняння на 36, щоб позбутися дробів:

$$8x+3\sqrt{5}y=36$$

А тепер побудуємо графік еліпса та дотичної.

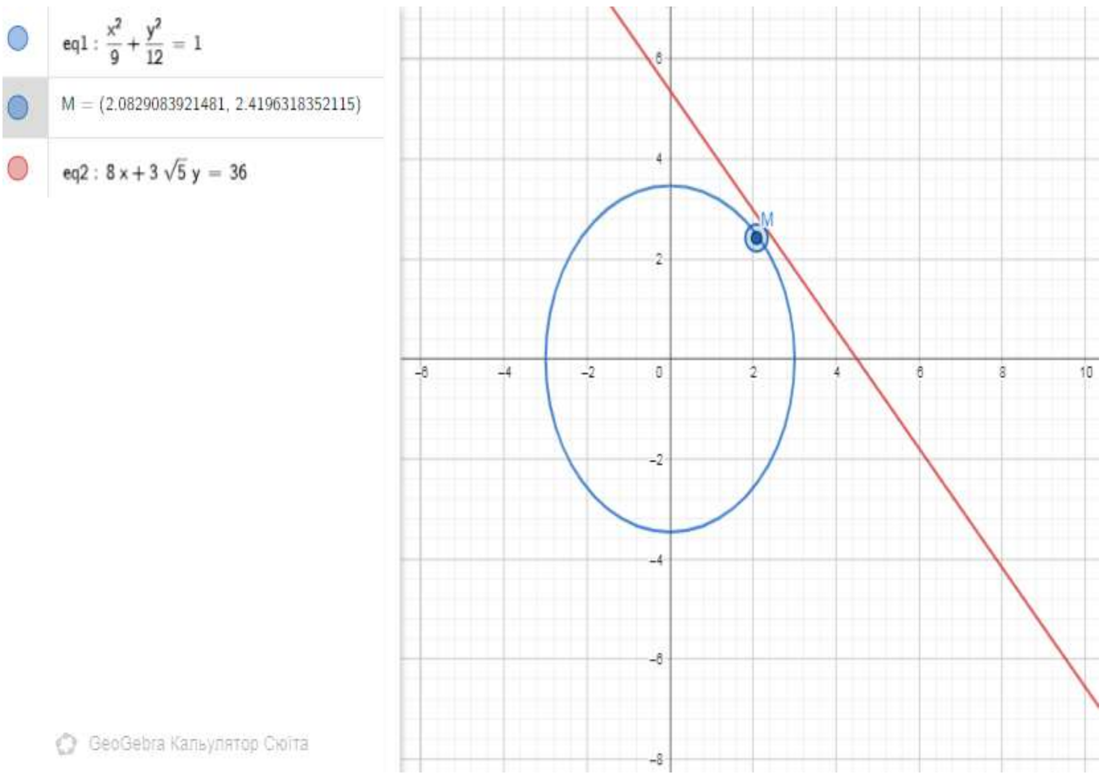

Рисунок 2.12 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: $8x+3\sqrt{5}y=36$.

Приклад. Написати рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$, паралельної прямій $2x-y=-17$.

Розв'язання

Оскільки дотична паралельна прямій $2x-y=-17$, то її кутовий коефіцієнт $k=2$.

Рівняння можна записати у вигляді:

$$y=2x+C.$$

Значення C визначимо з умови дотику до прямої еліпса $A^2a^2+B^2b^2=C^2$, оскільки, $a^2=25$, $b^2=24$, $A=2$, $B=-1$, підставимо в рівняння та отримаємо:

$$25\cdot4+24\cdot1=C^2,$$
$$C=\pm2\sqrt{31}.$$

Отже, умову задачі задовольняють дві дотичні:

$$y=2x+2\sqrt{31} \quad \text{та} \quad y=2x-2\sqrt{31}.$$

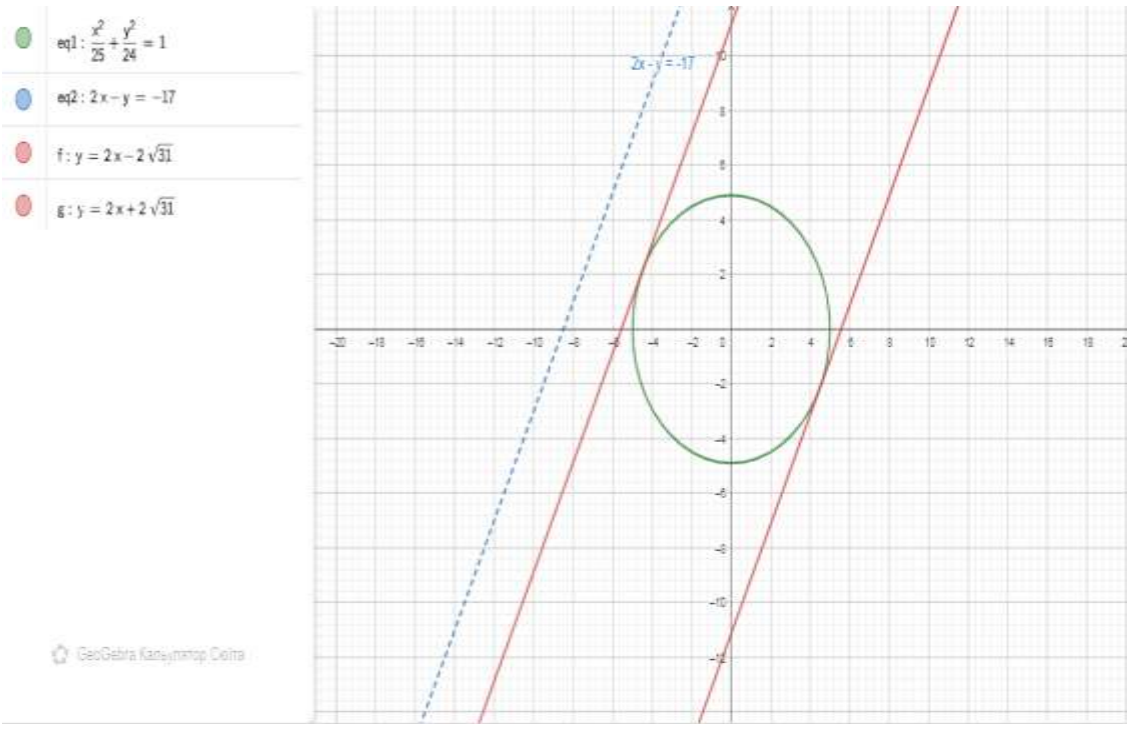

Рисунок 2.13 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $y=2x+2\sqrt{31}$ та $y=2x-2\sqrt{31}$.

2.2.3 Гіпербола

Гіпербола – це геометричне місце точок на площині, для яких абсолютне значення різниці відстаней до двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є сталою величиною (рис. 2.14).

Більш формально, якщо дано дві точки F_1, F_2 , які називаються фокусами гіперболи, то гіпербола – це множина всіх точок *M(x,y)* на площині, що задовольняють умову:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a\,, \tag{2.28}$$

де *a* – це піввісь гіперболи, яка визначає відстань від центра до вершин гіперболи.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{2.29}$$

Означення 2.17. ***Фокальна відстань*** – відстань від центра гіперболи до фокуса, яка позначається *сс* і визначається за формулою:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.30}$$

де *b* – це мала піввісь, яка пов’язана з піввіссю *аа* та фокальною відстанню *c* рівнянням:

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{2.31}$$

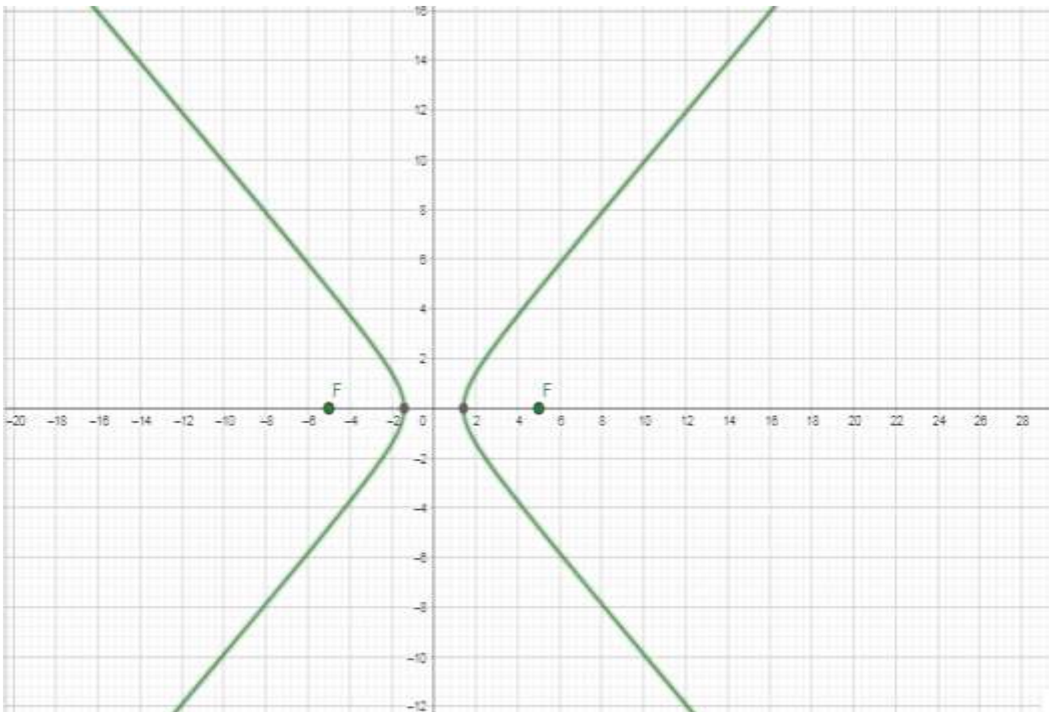

Рисунок 2.14 – Канонічне рівняння гіперболи

Координати фокусів гіперболи: $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$.

Відстань між фокусами дорівнює: $2c$ $(2a<2c)$.

Означення 2.18. Д***ійсними вершинами*** називаються точки перетину гіперболи з віссю абсцис $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$.

Означення 2.19. ***Дійсною віссю*** гіперболи називається відрізок $A_1A_2=2a$.

Означення 2.20. ***Уявними вершинами*** називаються точки $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$**.**

Означення 2.21. ***Уявною віссю*** гіперболи називається відрізок $B_1B_2=2b$.

Означення 2.22. ***Ексцентриситетом*** гіперболи називається відношення відстані між центром гіперболи та її фокусом до довжини дійсної півосі:

$$e=\frac{c}{a}>1 \tag{2.32}$$

Гіпербола складається з двох гілок і розташована симетрично відносно осей координат.

Означення 2.23. ***Фокальними радіусами-векторами*** цієї точки називаються відстані r_1 і r_2 від деякої точки гіперболи *M (x; y)* до його фокусів, причому $|r_1-r_2|=2a$ (модуль різниці фокальних радіусів-векторів будь-якої точки гіперболи дорівнює його дійсній осі) і визначаються формулами:

$r_1=ex-a$, якщо точка *M* лежить на правій гілці;

$r_2=ex+a$, якщо точка *M* лежить на лівій гілці.

Означення 2.24. ***Директрисами*** гіперболи називаються прямі PQ і P_1Q_1, які перпендикулярні до фокальної осі і віддалені від центра на відстані $\frac{a}{e}$.

Їх рівняння:

$$x=\frac{a}{e} \quad \text{і} \quad x=-\frac{a}{e} \quad \text{або} \quad x=\frac{a^2}{c},\ \ x=-\frac{a^2}{c}. \tag{2.33}$$

Для будь-якої точки гіперболи відношення її відстані до фокуса та відстані до відповідної директриси залишається незмінним і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{r_1}{d_1}=e \quad \text{та} \quad \frac{r_2}{d_2}=e. \tag{2.34}$$

Рівняння гіперболи з осями, паралельними координатним осям, має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{2.35}$$

Означення 2.25. ***Асимптотами*** гіперболи називаються прямі SR і S_1R_1, задані рівняннями:

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x \tag{2.36}$$

Довжину дійсної і уявної півосей гіперболи дають параметри a і b, що входять у рівняння гіперболи.

Для гіперболи можливі три випадки: $a>b$, $a<b$ і $a=b$.

Означення 2.26. Якщо $a=b$, то рівняння гіперболи має вигляд: $x^2-y^2=a^2$ і гіпербола називається ***рівносторонньою*** (рівнобічною) (рис. 1.12).

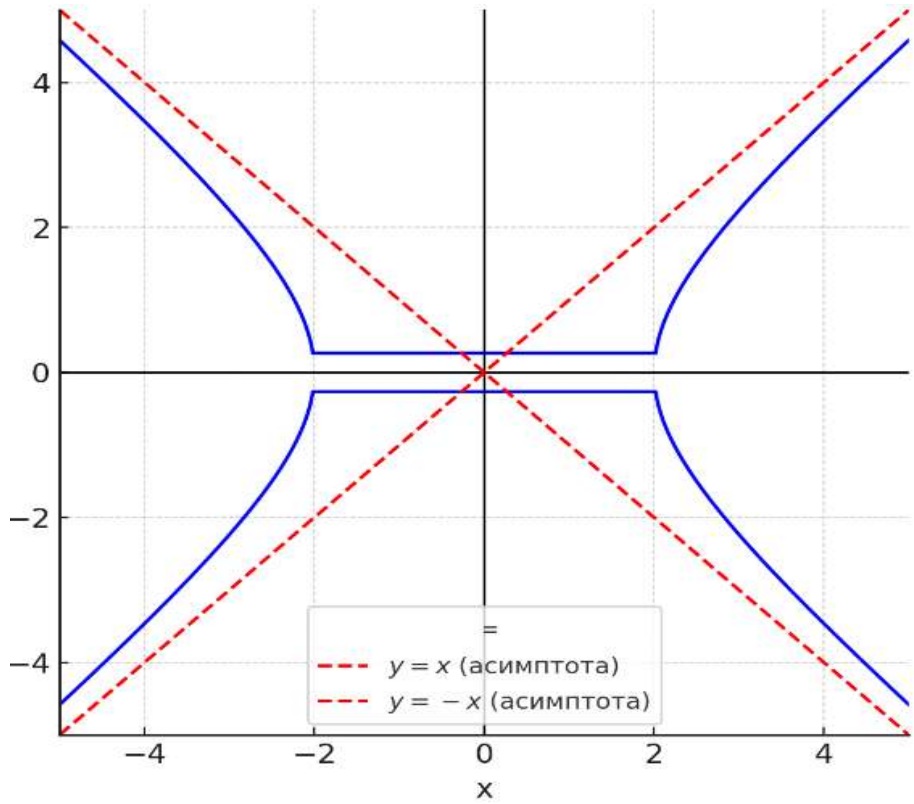

Рисунок 2.15 – Рівностороння гіпербола

Її асимптотами є бісектриси координатних кутів.

Означення 2.27. ***Спряженими гіперболами*** називаються дві гіперболи, у яких одна і та сама асимптотична система (спільні асимптоти), але вони розташовані взаємно перпендикулярно, та які мають рівняння: одна – $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, а інша – $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Властивості спряжених гіпербол

1) вони мають спільний центр, однакові асимптоти та взаємно обернені дійсні й уявні осі: $y=\pm\frac{b}{a}x$;

2) симетрія – рівняння однієї гіперболи можна отримати з іншої шляхом перестановки *x* і *y;*

3) фокусні відстані – фокусні точки розташовані на відповідних осях координат, і їх положення визначається як: $c^2 = a^2 + b^2$;

4) однакова ексцентриситетність – обидві гіперболи мають однаковий ексцентриситет: $e = \dfrac{c}{a}$;

5) геометричний зв'язок – спряжені гіперболи є слідами перерізу конічної поверхні площинами, які проходять через центр.

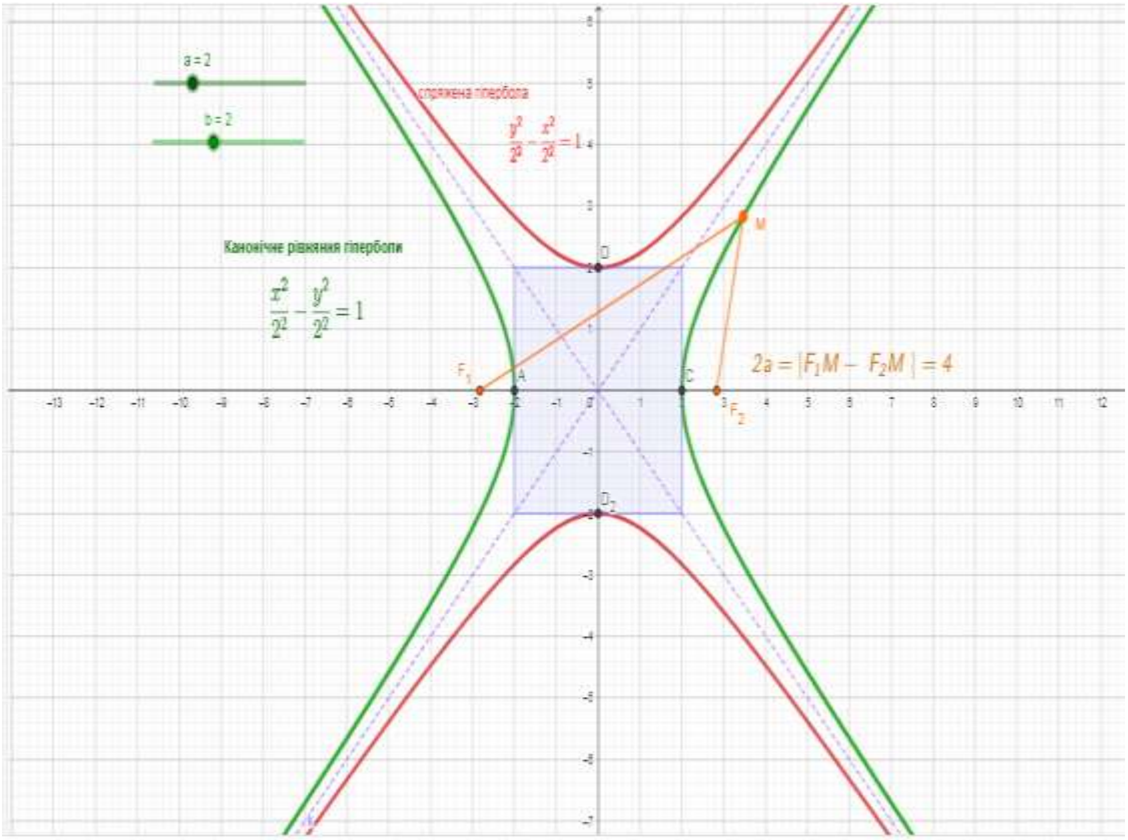

Рисунок 2.16 – Спряженні гіперболи

Якщо за осі координат прийняти асимптоти рівносторонньої гіперболи, то її рівняння буде мати вигляд: $xy = k$, де $k = \dfrac{a^2}{2}$.

Рівняння дотичної до гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \qquad (2.37)$$

З будь-якої точки площини можна провести дві дотичні до гіперболи. Якщо точка лежить на гіперболі, ці дотичні збігаються. Точки, з яких можна провести дві реальні дотичні, утворюють зовнішню область гіперболи, тоді як точки внутрішньої області є такими, з яких дотичні є уявними.

Приклад. Дано рівняння гіперболи $5x^2-9y^2=45$.

Обчислити довжину її півосей, координати фокусів і ексцентриситет. Знайти рівняння асимптот, директрис і фокальні радіуси точок $M(6;4)$, $N(-4;2)$.

Розв'язання

Розділивши обидві частини цього рівняння на 45, зведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1,$$

Звідки:

$$a^2=9, b^2=5 \quad \text{і} \quad a=3, b=\sqrt{5}$$

Оскільки $b^2=c^2-a^2$, то:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+5}=\sqrt{14}.$$

Тоді координата фокусів:

$$F_1\left(0;-\sqrt{14}\right) \text{ і } F_2\left(\sqrt{14};0\right)$$

Знайдемо ексцентриситет:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Запишемо рівняння директрис:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{3}{\frac{\sqrt{14}}{3}}=\frac{9}{\sqrt{14}}.$$

Рівняння асимптот будуть:

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}x.$$

Оскільки точка $M(6;4)$ лежить на правій гілці гіперболи ($x_M>0$), то її фокальні радіуси:

$$r_1=a+ex=3+2\sqrt{14},$$
$$r_2=-a+ex=-3+2\sqrt{14}.$$

Оскільки точка $N(-4;2)$ лежить на лівій гілці гіперболи ($x_N<0$), то її фокальні радіуси:

$$r_1=-a-ex=-3+\frac{4\sqrt{14}}{3},$$

$$r_2=a-ex=3-\frac{4\sqrt{14}}{3}.$$

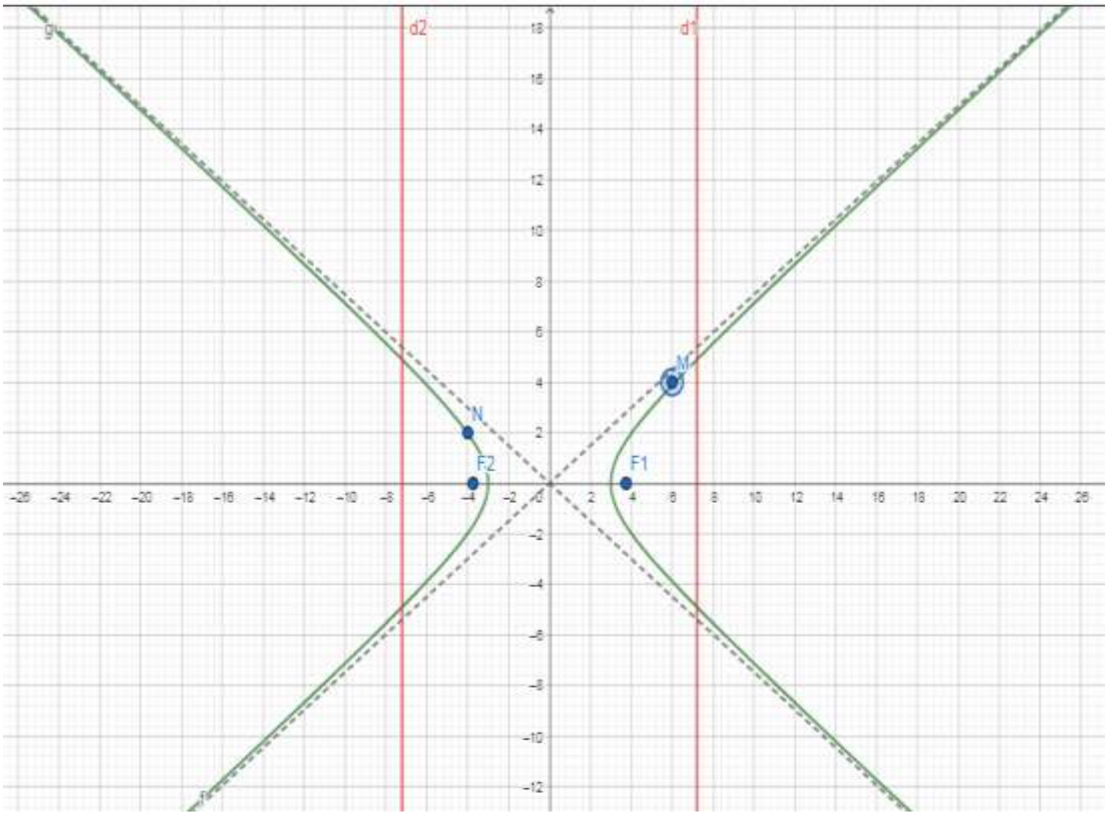

Рисунок 2.17 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}x$.

Приклад. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Oy симетрично відносно початку системи координат, якщо відстань між директрисами дорівнює 12, а ексцентриситет гіперболи дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Розв'язання

Оскільки фокуси гіперболи лежать на осі Oy, то рівняння директрис

$$y=\pm\frac{b}{e}$$

і ексцентриситет

$$e=\frac{c}{b}.$$

Відстань між директрисами:

$$d = \left| \frac{b}{e} - \left(-\frac{b}{e} \right) \right| = \frac{2b}{e} = 12 .$$

Таким чином:

$$b = 6e = 3\sqrt{5} ,$$

Оскільки $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}$, або $e^2 b^2 = a^2 + b^2$, підставимо в рівність значення e і b; отримаємо:

$$\frac{5}{4} \cdot 9 \cdot 5 = a^2 + 20 .$$

$$a^2 = \frac{145}{4} .$$

Тоді рівняння гіперболи має вигляд:

$$-\frac{x^2}{\frac{145}{4}} + \frac{y^2}{20} = 1 .$$

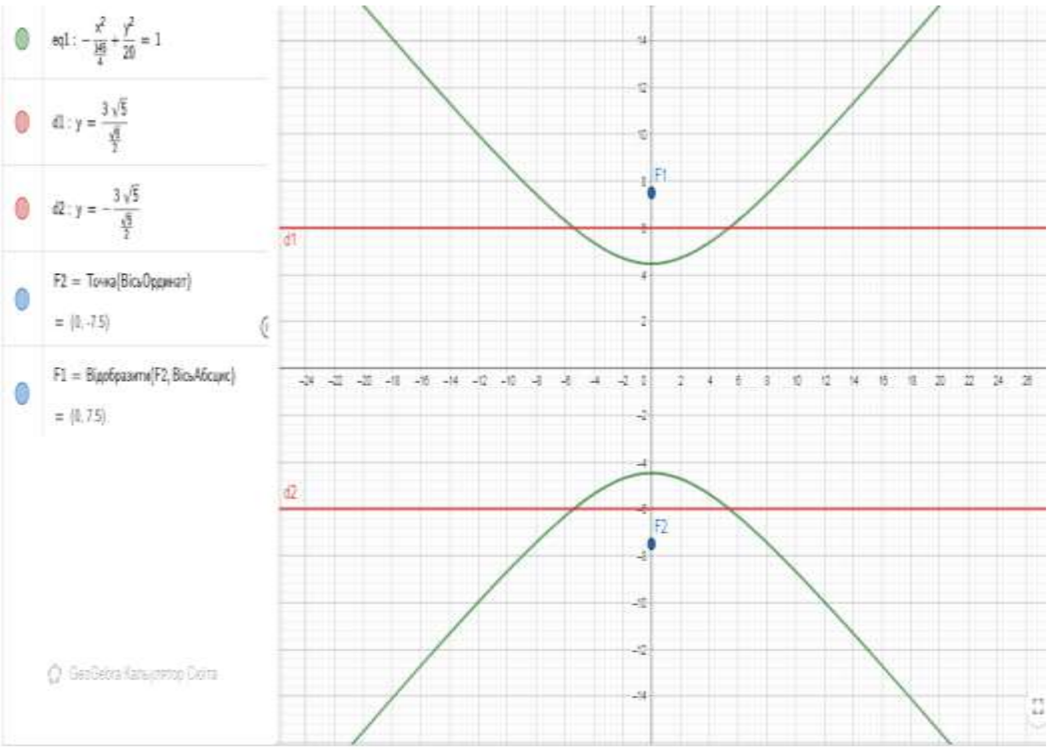

Рисунок 2.18 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $-\frac{x^2}{\frac{145}{4}} + \frac{y^2}{20} = 1 .$

Приклад. До гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ провести дотичну через точку:

$$1)\ M\left(-\sqrt{5};\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\quad 2)\ N(2;0).$$

Розв'язання

1) безпосередньою підстановкою координат точки M в рівняння гіперболи переконуємося, що точка M належить гіперболі.

Отже, для написання дотичної до гіперболи, яка проходить через цю точку, можна скористатися формулою: $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ та отримаємо:

$$\frac{-\sqrt{5}x}{16}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}y}{9}=1,$$

$$\text{або } 9\sqrt{5}x+16\sqrt{3}y+144=0$$

Відповідь: $9\sqrt{5}x+16\sqrt{3}y+144=0$

2) точка $N(2;0)$ гіперболі не належить, тому формулою $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ користуватися не можна.

Рівняння дотичної будемо шукати у вигляді:

$$y-0=k(x-2)$$

$$\text{або } -kx+y+2k=0.$$

Зручно скористатися умовою $A^2a^2-B^2b^2=C^2$ дотику прямої до гіперболи.

$$A=-k,\ B=1,\ C=2k,\ a^2=16,\ b^2=9.$$

Тоді:

$$16k^2-9=4k^2,$$

$$k=\pm\frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

Умову задачі задовольняють дві прямі:

$$y=\pm\frac{3}{2\sqrt{3}}(x-2),$$

$$\text{або } -3x+2\sqrt{3}y+6=0 \text{ і } 3x+2\sqrt{3}y-6=0.$$

Відповідь: $-3x+2\sqrt{3}y+6=0$ і $3x+2\sqrt{3}y-6=0$.

2.2.4 Парабола

Параболою називається множина всіх точок на площині, рівновіддалених від заданої точки (фокуса) та певної прямої (директриси) (рис. 2.19).

Канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px, \tag{2.38}$$

де p – відстань від фокуса до директриси.

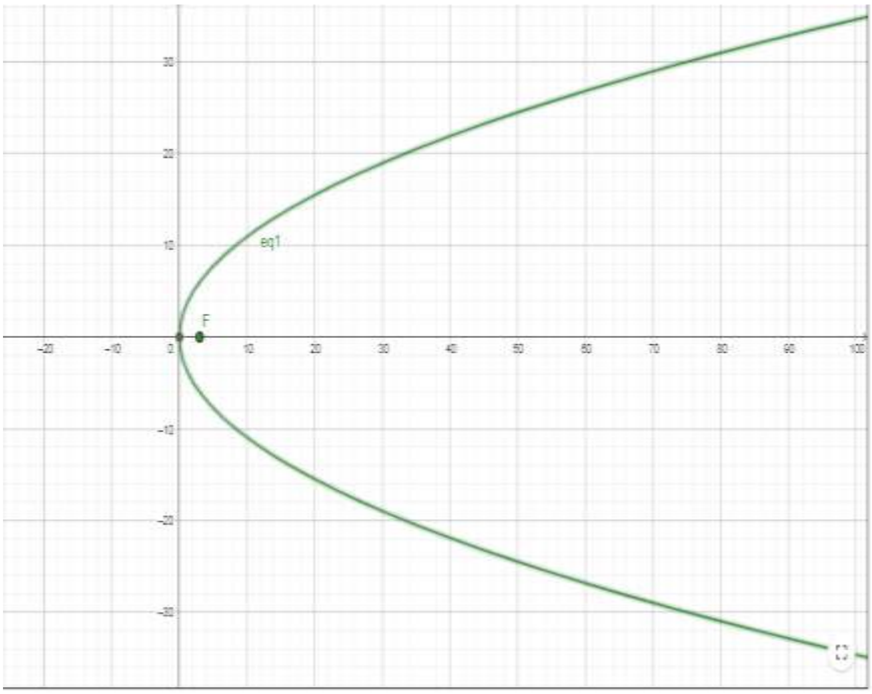

Рисунок 2.19 – Канонічне рівняння параболи

Вершина параболи розташована в початку координат, а її віссю симетрії є вісь Ox (вісь абсцис).

Координати фокуса $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$

Рівняння директриси PQ параболи має вигляд:

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{2.39}$$

Фокальний радіус-вектор точки $M(x;y)$ параболи дорівнює:

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{2.40}$$

Дотична до параболи $y^2 = 2px$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має рівняння:

$$yy_0 = p(x + x_0) \tag{2.41}$$

Ексцентриситет параболи вважається таким, що дорівнює одиниці: $e = 1$.

Якщо віссю симетрії параболи є вісь ординат (рис. 1.17), то рівняння параболи має вигляд:

$$x^2 = py. \tag{2.42}$$

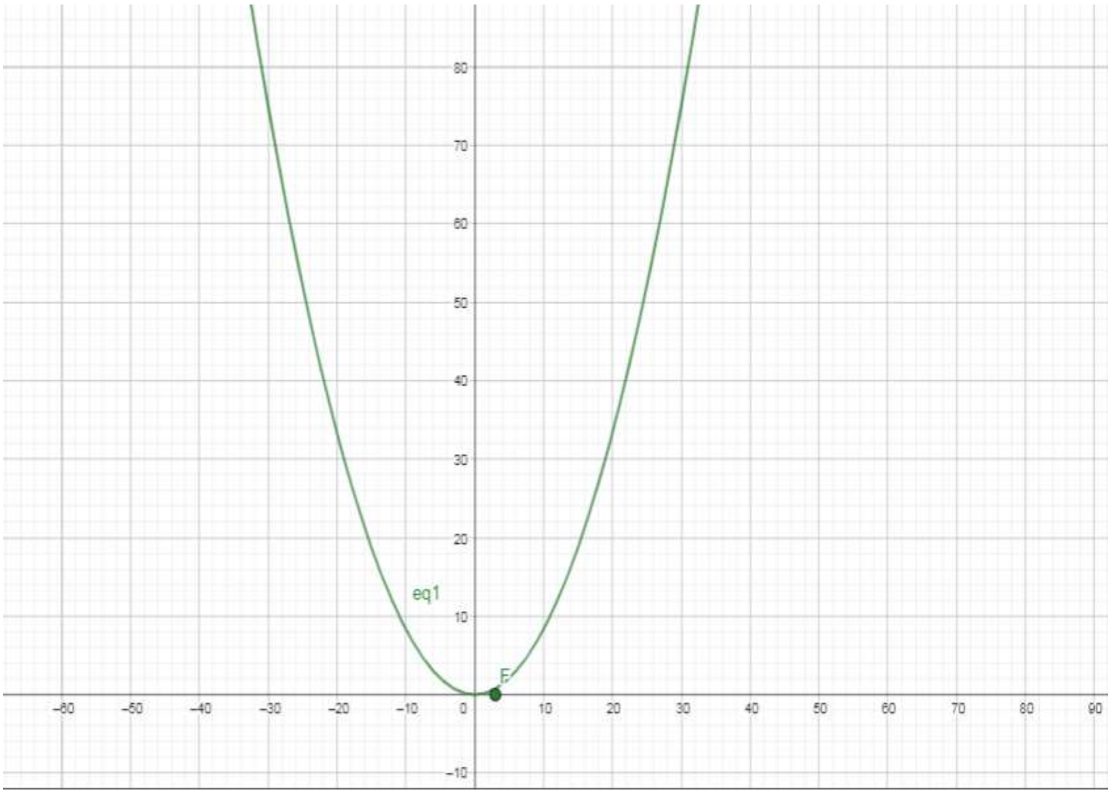

Рисунок 2.20 – Канонічне рівняння параболи

Рівняння директриси в цьому випадку має вигляд:

$$y = -\frac{p}{2}. \tag{2.43}$$

Рівняння параболи з віссю симетрії, паралельною одній з координатних осей, має вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \text{ або } (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0), \tag{2.44}$$

де $(x_0; y_0)$ – координати вершини параболи.

Приклад. Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи $y^2 = 10x$. Обчислити довжину фокального радіуса точки *M(2;5)*.

Розв'язання

Парабола задана канонічним рівнянням вигляду $y^2 = 2px$.

Отже, $2p = 10$, $p = 5$.

Тоді координати фокуса $F(2;0)$, рівняння директриси: $x = -2.5$. Довжину фокального радіуса точки *M (2; 4)* обчислимо за формулою:

$$r = x + \frac{p}{2} = 2.5 + 2.5 = 5$$

Відповідь: $F(2;0)$, рівняння директриси: $x = -2.5, r = 5$.

Приклад. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі *Oy,* якщо вона проходить через точку *A(2;-4),* з центром на початку системи координат.

Розв'язання

Так як парабола симетрична відносно осі *Oy* і має вершину в початку системи координат, то її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$.

Оскільки точка $A(2;-4)$ лежить на параболі, то її координати задовольняють рівнянню параболи, тобто $2 = 2p\cdot(-4)$, звідки:

$$p = -\frac{1}{2}.$$

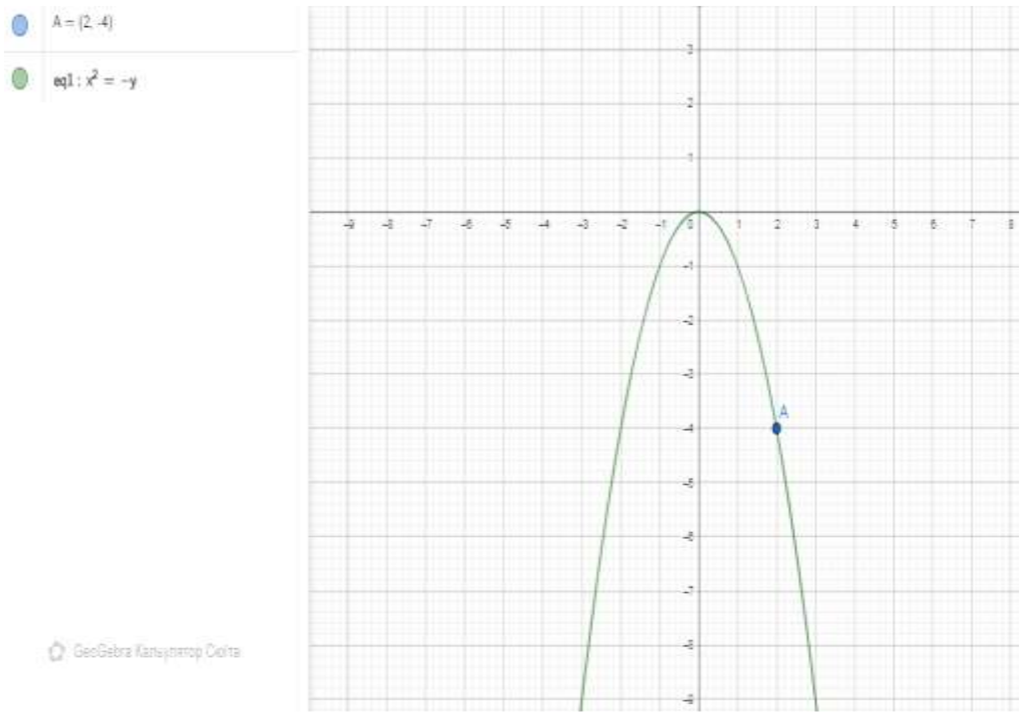

Рисунок 2.21 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $x^2 = -y$.

Приклад. Знайти точку на параболі $y^2 = 5x$, яка знаходиться від директриси на відстані $d = 10$.

Розв'язання

За означенням параболи для будь-якої її точки виконується співвідношення:

$$\frac{r}{d} = 1.$$

Отже, $r = d = 10$.

За формулою:

$$r = x + \frac{p}{2},$$

$$10 = x + 1{,}25.$$

$$x = 8{,}75.$$

Підставляючи x = 8,75 у рівняння параболи, знайдемо відповідні йому значення y:

$$y = \pm\sqrt{5 \cdot 8{,}75} = \pm 6{,}6$$

Таким чином, умову задачі задовольняють дві точки: $(8{,}75; 6{,}6)$ і $(8{,}75; -6{,}6)$.

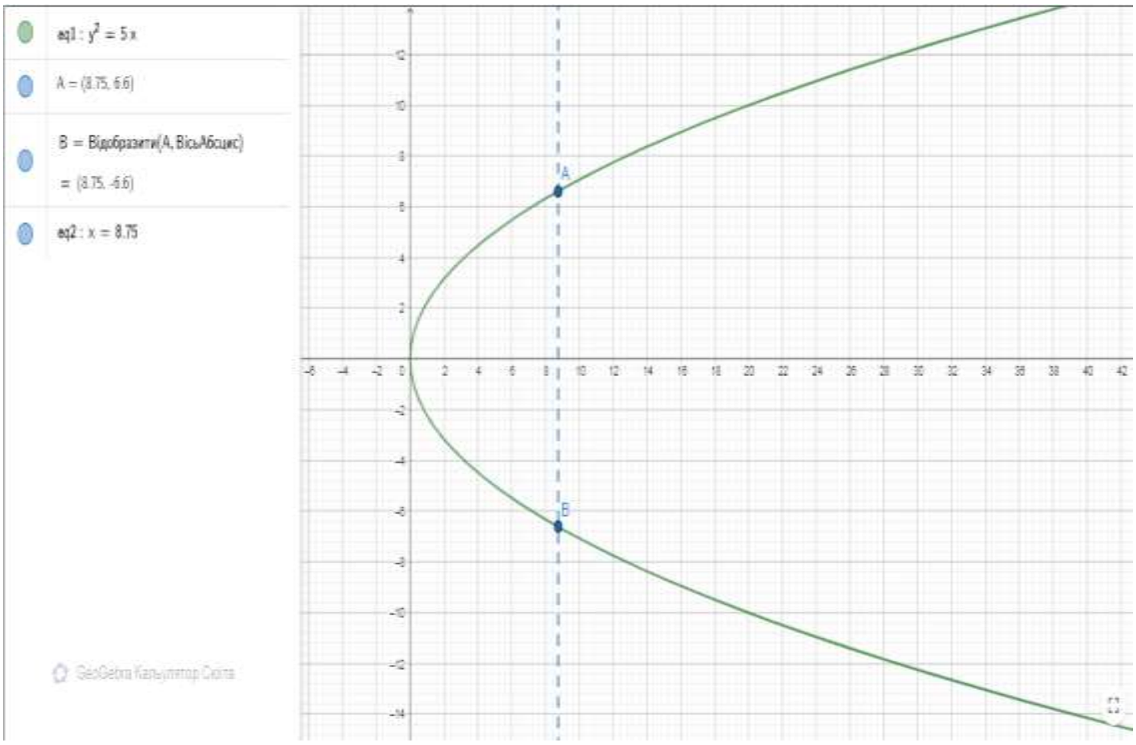

Рисунок 2.22 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $(8{,}75; 6{,}6)$ і $(8{,}75; -6{,}6)$.

2.3 Криві вищих порядків

Криві вищих порядків – це криві, що описуються алгебраїчними рівняннями порядку вище другого.

Такі криві широко застосовуються в різних прикладних задачах, зокрема під час обчислення площ, довжин дуг, центрів мас, моменів інерції тощо.

Основні види кривих вищих порядків

1. ***Кубічні криві*** $(n=3)$, описуються рівнянням:

$$Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+Fxy+Gy^2+Hx+Iy+J=0. \qquad (2.45)$$

Приклади: кардіоїда, астроїда, сингулярні криві (наприклад, кубічна парабола).

2. ***Криві четвертого порядку*** $(n=4)$, відомі як квадратичні криві або лімасони.

Описуються рівняннями типу:

$$Ax^4+Bx^3y+Cx^2y^2+Dxy^3+Ey^4+........=0 \qquad (2.46)$$

Приклади: лемніската Бернуллі, астроїда, еліптичні криві.

3. ***Криві вищих порядків*** $(n>4)$.

Приклад. Містять складніші алгебраїчні криві, такі як гіпотрохоїди, еліптичні функції, ріманові поверхні. Використовуються в теорії механіки, космонавтиці та інженерії.

Приклад практичного застосування: астроїда використовується у фізиці для моделювання профілів механічних деталей; лемніската Бернуллі зустрічається у теорії електромагнітних полів; еліптичні криві широко використовуються в криптографії.

Декартів листок (лат. *folium Cartesii*) – це одна з класичних алгебраїчних кривих третього порядку, яка названа на честь французького математика Рене Декарта.

Декартів листок задається рівнянням у декартових координатах:

$$x^3+y^3-3xy=0, \qquad (2.47)$$

В параметричному вигляді рівняння можна записати так:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{3at^3}{1+t^3}, \end{cases} \qquad (2.48)$$

де t – параметр, який пробігає всі дійсні значення, a – параметр, що визначає розмір кривої.

В полярній системі, коли полюс збігається з початком координат, а полярна вісь – з віссю Ox, рівнянням кривої буде:

$$r = \frac{3}{2} \cdot \frac{a \sin 2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}. \qquad (2.49)$$

Геометричні властивості

Декартів листок має симетрію відносно бісектриси першого та третього координатних кутів (прямої $y = x$).

Крива має особливу точку в початку координат $O(0,0)$, яка є точкою перетину гілок.

Має асимптоту, задану рівнянням:

$$x + y + a = 0. \qquad (2.50)$$

Це означає, що за великих значень *xx* і *yy* крива прямує до цієї прямої.

Для $x > 0, y > 0$ існує петля – характерна особливість Декартового листка.

Для побудови Декартового листка потрібно:

- Визначити точки перетину кривої з осями координат:

- якщо $x = 0$ то $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0,$
- якщо $y = 0$ то $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$

Отже, початок координат є єдиною точкою перетину з осями.

- Знаходимо точки максимуму:

З рівнянь параметризації видно, що максимальна точка петлі знаходиться в $\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$.

- Будуємо асимптоту $x + y + a = 0$, до якої крива наближається на великих значеннях x, y.

На рис. 2.23 ми зобразили Декартів листок за допомогою Geogebra.

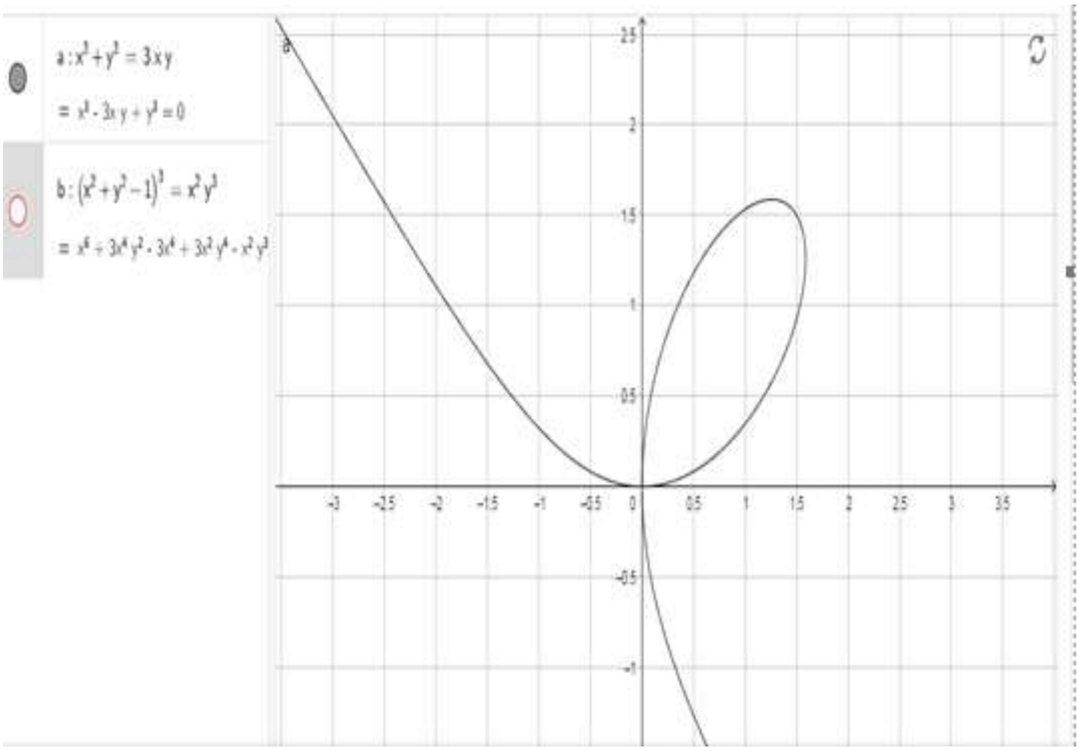

Рисунок 2.23 – Декартів листок

Приклад. Побудувати рівняння $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ та $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$. Результатом є побудова графіка, зображеного на рисунку 2.24.

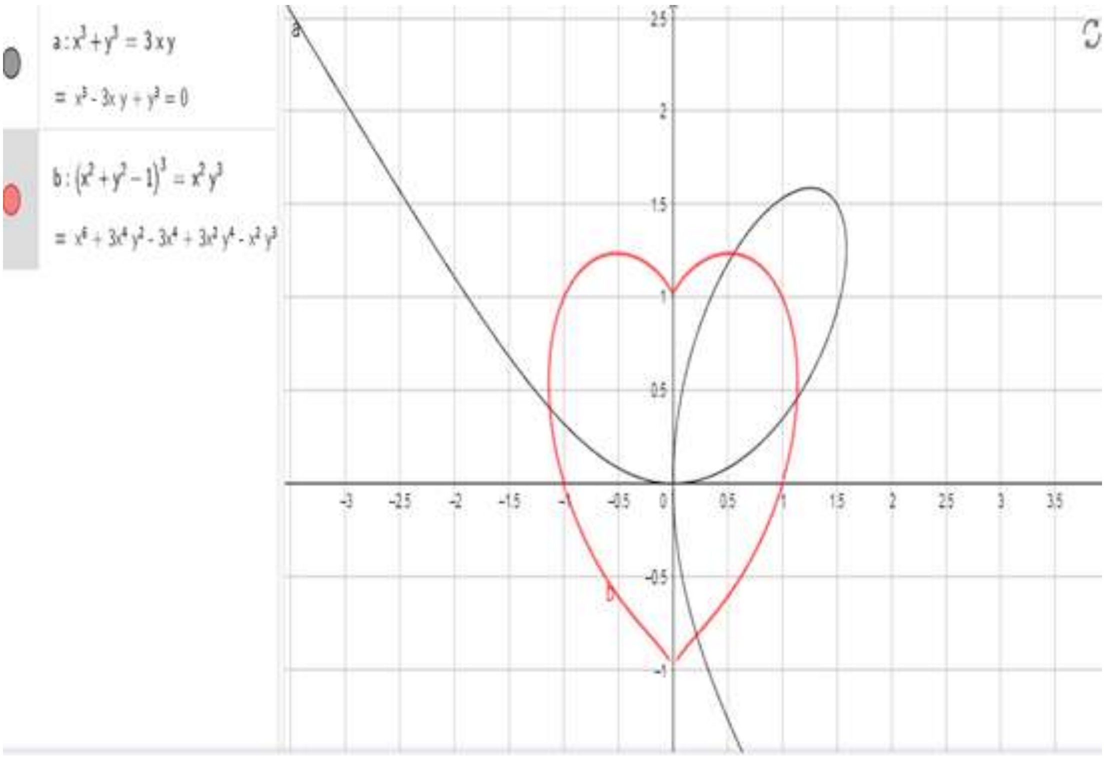

Рисунок 2.24 – Графічний розв’язок задачі

Лемніската Бернуллі – це плоска алгебраїчна крива четвертого порядку, яка схожа на знак нескінченності ∞ або вісімку.

Ця крива названа на честь швейцарського математика Якоба Бернуллі, який вивчав її у 1694 році.

Лемніската є геометричним місцем точок, добуток відстаней яких до двох фіксованих точок (фокусів) є сталою величиною.

У декартових координатах рівняння має вигляд:

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2), \tag{2.51}$$

де a – параметр, що визначає розмір лемніскати.

У полярних координатах рівняння спрощується:

$$r^2=2a^2\cos 2\theta, \tag{2.52}$$

де r – полярний радіус,
θ – полярний кут.

Геометричні властивості:

- фокуси лемніскати розташовані в точках $(\pm a, 0)$ на осі x;
- крива симетрична відносно осей Ox і Oy;
- форма лемніскати схожа на два сполучених еліпси, які дотикаються у початку координат;
- радіус-крива проходить через чотири точки перегину, що відрізняє її від стандартних еліпсів.

За $x^2+y^2=a^2$ лемніската перетинає вісь xx у точках $(\pm a, 0)$.

Параметричні рівняння леміскати Бернуллі:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}c\dfrac{t+t^3}{1+t^4}; \\ y=\sqrt{2}c\dfrac{t-t^3}{1+t^4} \end{cases}, \quad t\in(-\infty;\infty) \tag{2.53}$$

Для побудова лемніскати:

1. Вибираємо фокуси $F_1(-a;0), F_2(a;0)$.

2. Визначаємо множину точок, для яких виконується умова:

$$\mathrm{PF_1}\cdot\mathrm{PF_2}=a^2.$$

3. Наносимо ключові точки кривої та з’єднуємо їх плавною лінією, що утворює форму вісімки.

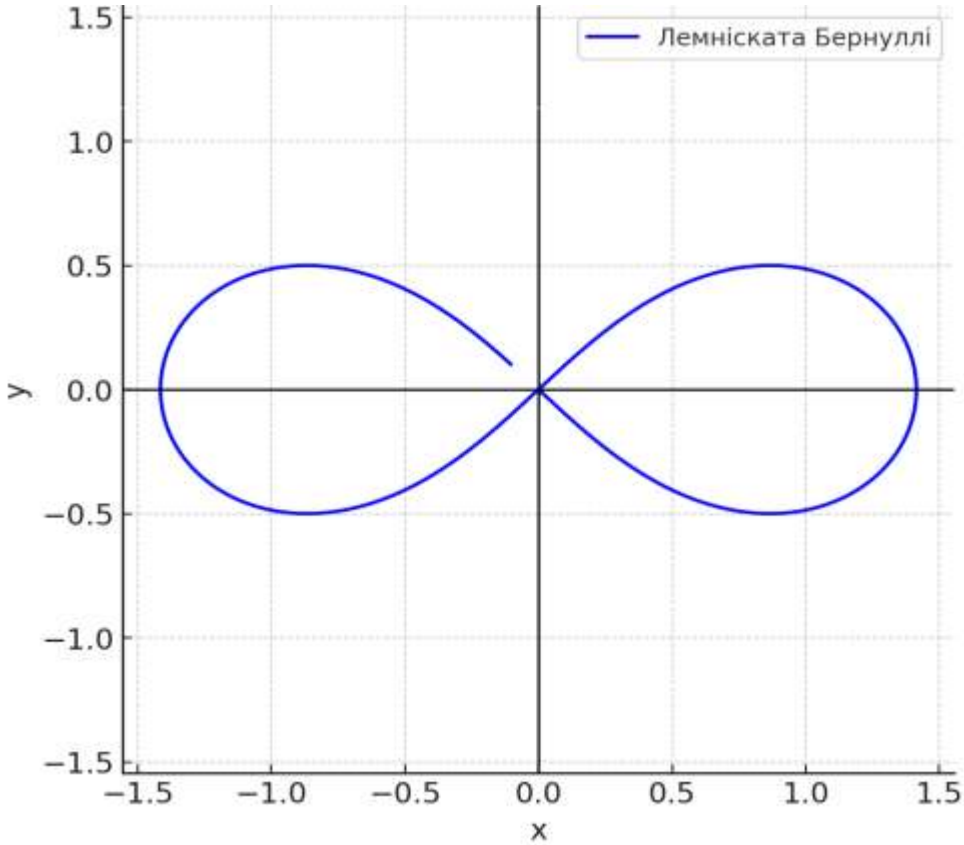

Рисунок 2.25 – Крива «лемніската Бернуллі»

Рівняння леміскати в полярній системі координат, де початок – точка O(0; 0), є полюс, а вісь Ox є полярною віссю, має вигляд:

$$r^2 = 2c^2 \cdot \cos 2\varphi . \tag{2.54}$$

Полярний кут φ належить інтервалам:

$$(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}).$$

Параметр *t* і полярний кут *φ* пов’язані формулою:

$$\mathrm{t}^2 = tg(\frac{\pi}{4};-\varphi). \tag{2.55}$$

Кардіоїда – це плоска алгебраїчна крива другого порядку, яка отримала свою назву через схожість на серце (від грец. καρδία – «серце»). Вона є окремим випадком епіциклоїди, коли радіус рухомого кола дорівнює радіусу нерухомого.

Кардіоїду можна визначити як множину точок, відстань яких від певної точки (фокуса) дорівнює відстані до деякої нерухомої прямої (директриси).

У декартових координатах рівняння можна записати у вигляді:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \qquad (2.56)$$

Геометричні властивості:
- кардіоїда симетрична відносно горизонтальної або вертикальної осі, залежно від рівняння;
- у кардіоїди є особлива точка перегину на осі симетрії;
- будь-яка точка кардіоїди знаходиться на однаковій відстані від фокуса та від кола, що котиться без ковзання.

Побудувати кардіоїду можна двома методами.

Метод епіциклоїди

1. Беремо нерухоме коло радіуса *a*.
2. На його межі вибираємо точку.
3. Починаємо котити ще одне коло радіуса *a* без ковзання вздовж першого.
4. Траєкторія вибраної точки буде кардіоїдою.

Полярний спосіб

1. Відкладаємо точки за формулою:

$$r = a(1 - \cos\theta) \qquad (2.57)$$

2. З’єднуємо отримані точки плавною лінією.

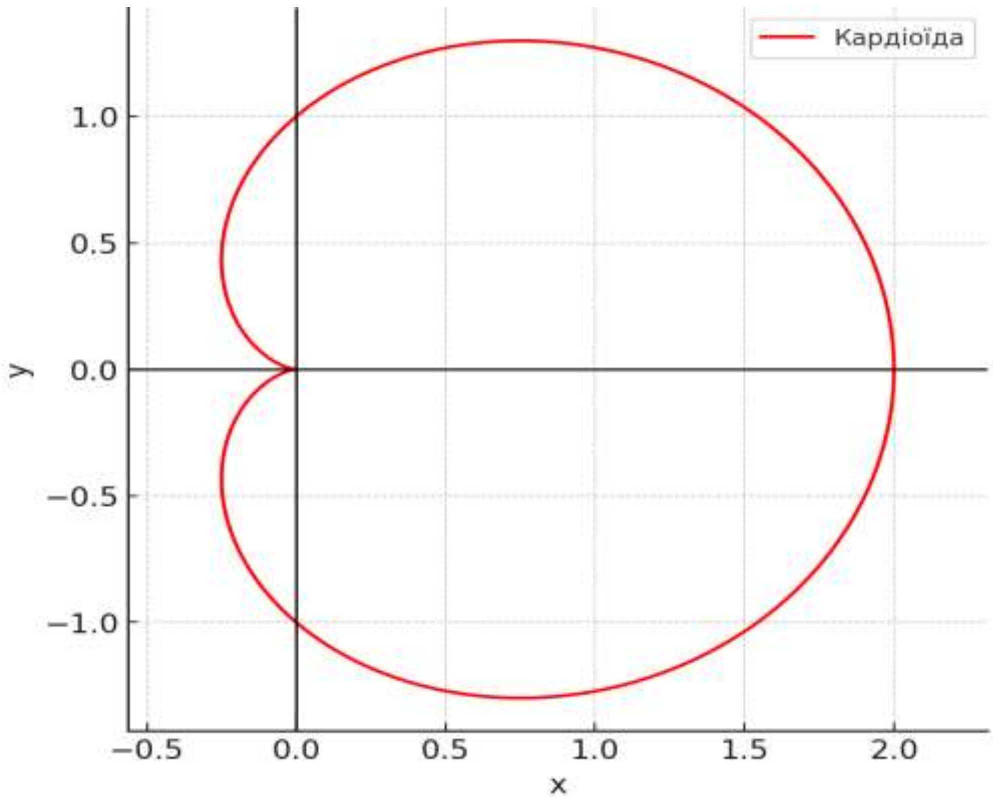

Рисунок 2.26 – крива «Кардіоїда»

Параметричними рівняннями кривої будуть:

$$\begin{cases} x = a\cos t(1-\cos t); \\ y = a\sin t(1-\cos t). \end{cases} \quad (2.58)$$

В полярних координатах кардіоїда має чотири варіанти рівнянь:

$$а)\ r = a(1-\cos\theta),\ б)\ r = a(1+\cos\theta),\ \text{в)}\ r = a(1-\sin\theta),\ \text{г)}\ r = a(1+\sin\theta)$$

Криві Гвідо Гранді або троянда, або родонія – це сімейство кривих, які мають форму пелюсток і описуються рівнянням у полярних координатах:

$$r = a\cos k\varphi \text{ або } r = a\sin k\varphi, \quad (2.59)$$

де a – масштабний параметр, який визначає розмір кривої,
n – параметр, що визначає кількість пелюсток,
φ – полярний кут.

Властивості кривих Гвідо Гранді:

- якщо *nn* парне, то крива має *2n* пелюсток;
- якщо *nn* непарне, то кількість пелюсток дорівнює *n*;
- крива є симетричною відносно координатних осей;
- всі пелюстки проходять через початок координат.

Побудова «троянд»

Для побудови «троянд» (кривих Гвідо Гранді) використовуються полярні рівняння.

Для $r =$ $r = a\cos n\varphi$ – пелюстки розташовані вздовж осей координат.

Для $r = a\sin n\varphi$ – пелюстки зміщені на $\frac{90^\circ}{2n}$.

Параметричні рівняння кривих можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x = a\sin k t\cos t); \\ y = a\sin k t\sin t) \end{cases} \quad (2.60)$$

або

$$\begin{cases} x = a\cos k t\cos t); \\ y = a\cos k t\sin t) \end{cases} \quad (2.61)$$

У декартових координатах рівняння можна записати у вигляді:

$$(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2 \quad (2.62)$$

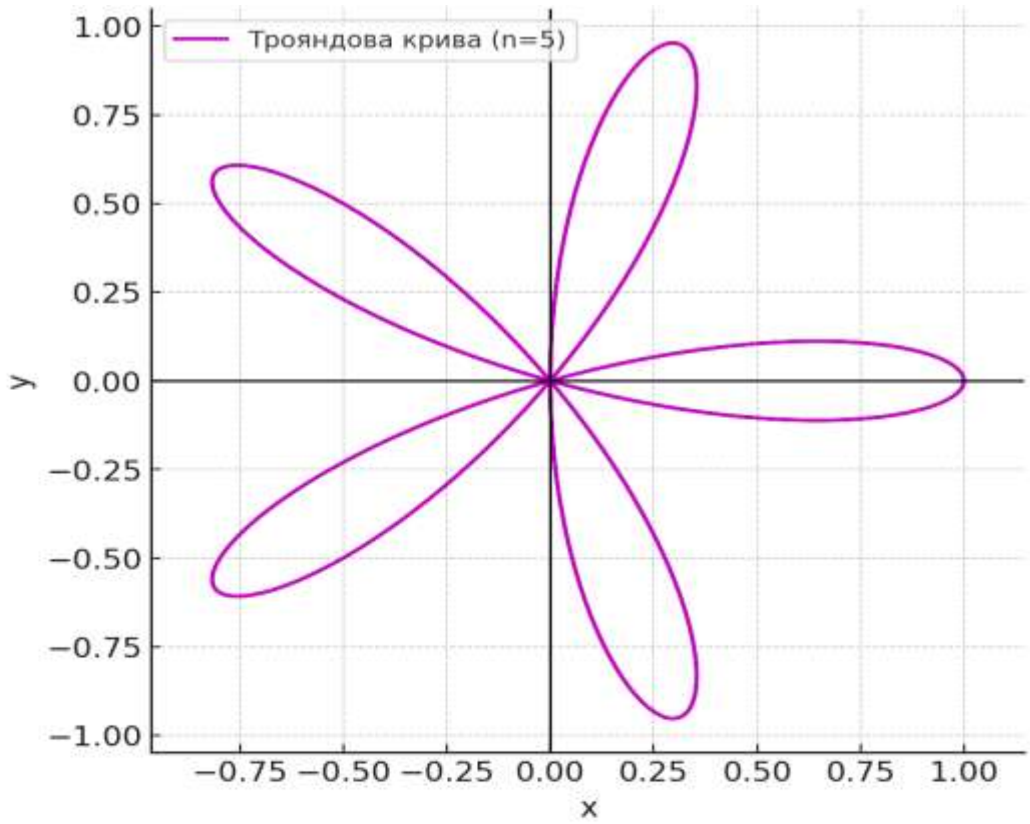

Рисунок 2.27 – Криві Гвідо Гранді або «троянди»

Астроїда – це плоска алгебраїчна крива четвертого порядку, яка має форму зіркоподібної фігури з чотирма «гострими» вершинами. Вона є частковим випадком гіпоциклоїди – кривої, яку описує точка кола, що котиться без ковзання всередині більшого кола.

Астроїда також відома як стійка циклоїда або дельтоїда другого роду.

У *декартових координатах* канонічне рівняння астроїди:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=1, \qquad (2.63)$$

де a – параметр, що визначає розмір кривої.

У *параметричній формі а*строїда також може бути подана через параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t \end{cases}, \qquad t\in[0;2\pi] \qquad (2.64)$$

де t – параметр, що змінюється від *0* до 2π.

Геометричні властивості:

- астроїда симетрична відносно осей координат;
- має чотири вершини в точках $(\pm a;0)$ і $(0;\pm a)$;
- дотичні до астроїди в кожній точці утворюють обвідну родину відрізків, що ковзають по координатних осях;
- астроїда є траєкторією точки, що знаходиться на окружності радіуса $\frac{a}{4}$, яка котиться всередині великої окружності радіуса *a*.

Побудова астроїди

1. Вибираємо параметр *a*, який визначає розмір фігури.
2. Використовуємо параметричні рівняння для обчислення точок кривої.
3. Будуємо симетричну фігуру з чотирма гострими вершинами.

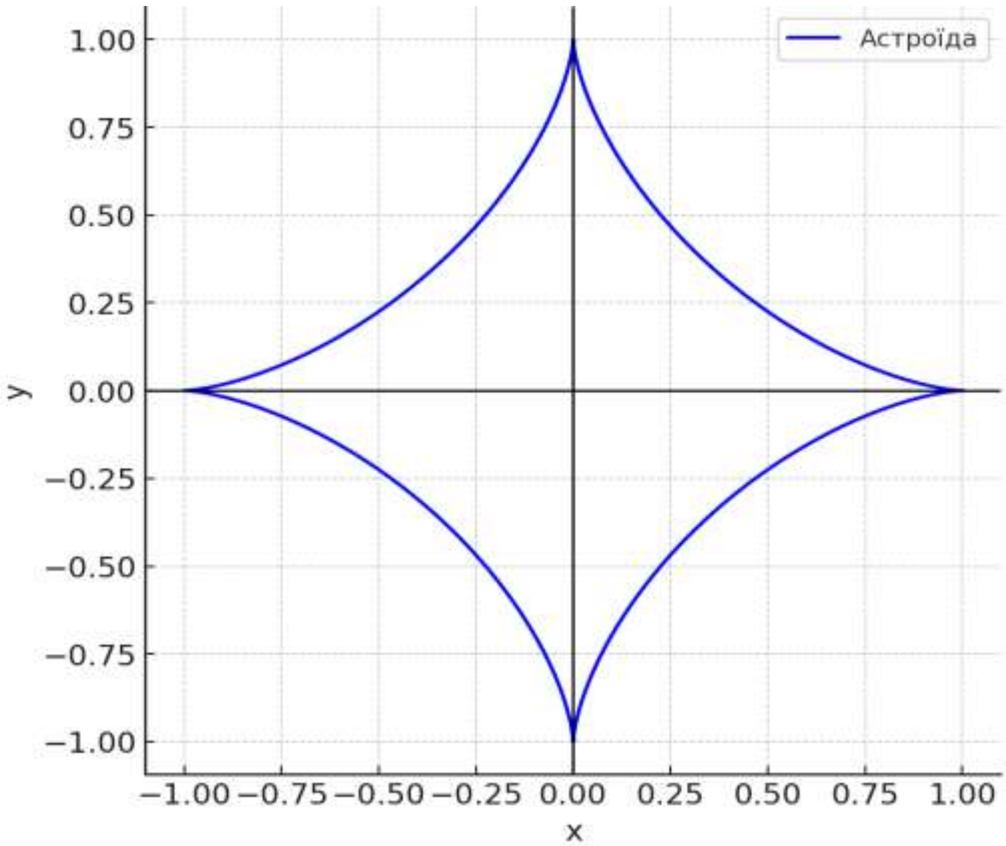

Рисунок 2.28 – Крива «Астроїда»

Циклоїда – це траєкторія точки, що належить колу, яке котиться без ковзання вздовж прямої.

Параметричне рівняння циклоїди, якщо коло радіуса *R* котиться вздовж осі *Ox,* то рівняння циклоїди має вигляд:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (-\infty;\infty) \tag{2.65}$$

Рівняння циклоїди в декартових координатах:

$$x + \sqrt{y(2a - y)} = aAr\cos\frac{a - y}{a}. \qquad (2.66)$$

Властивості циклоїди:
- циклоїда періодична – кожен її цикл має довжину *2πR*;
- вона має точки перегину в моментах, коли точка контакту кола з прямою збігається з точкою траєкторії;
- внутрішня нормаль до циклоїди в кожній точці проходить через центр кола;
- довжина однієї дуги циклоїди дорівнює *8R*.

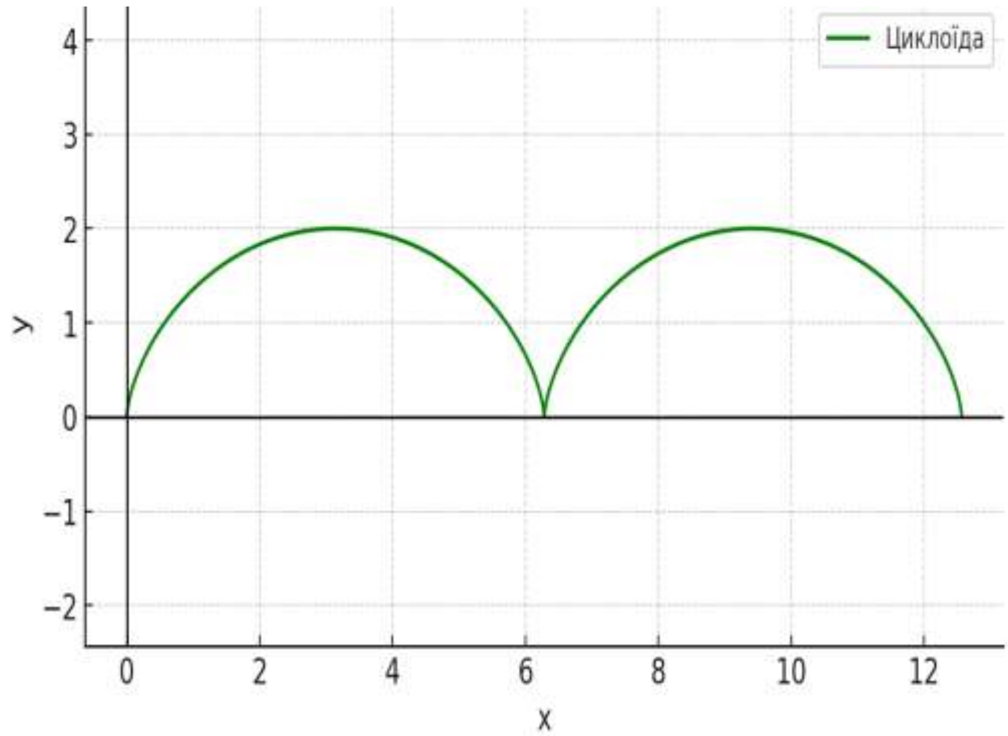

Рисунок 2.29 – Крива «Циклоїда»

Спіраль Архімеда – це плоска крива, яку описує точка, що рівномірно рухається вздовж прямої, що обертається навколо свого початку. Ця спіраль названа на честь давньогрецького математика Архімеда, який її вивчав.

У полярних координатах рівняння спіралі:

$$r = a\theta, \qquad (2.67)$$

де r – радіус-вектор (відстань від початку координат),

θ – полярний кут у радіанах,

a – коефіцієнт, що визначає відстань між витками спіралі (крок спіралі).

У декартових координатах спіраль можна виразити у вигляді параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x = (a\theta)\cos\theta; \\ x = (a\theta)\sin\theta. \end{cases} \tag{2.68}$$

Властивості спіралі Архімеда:

- відстань між сусідніми витками постійна і дорівнює $2\pi a$;
- спіраль починається в початку координат і рівномірно розкручується назовні;
- має нескінченну кількість витків у теоретичному випадку;
- використовується для моделювання рівномірного збільшення відстані з фіксованою швидкістю.

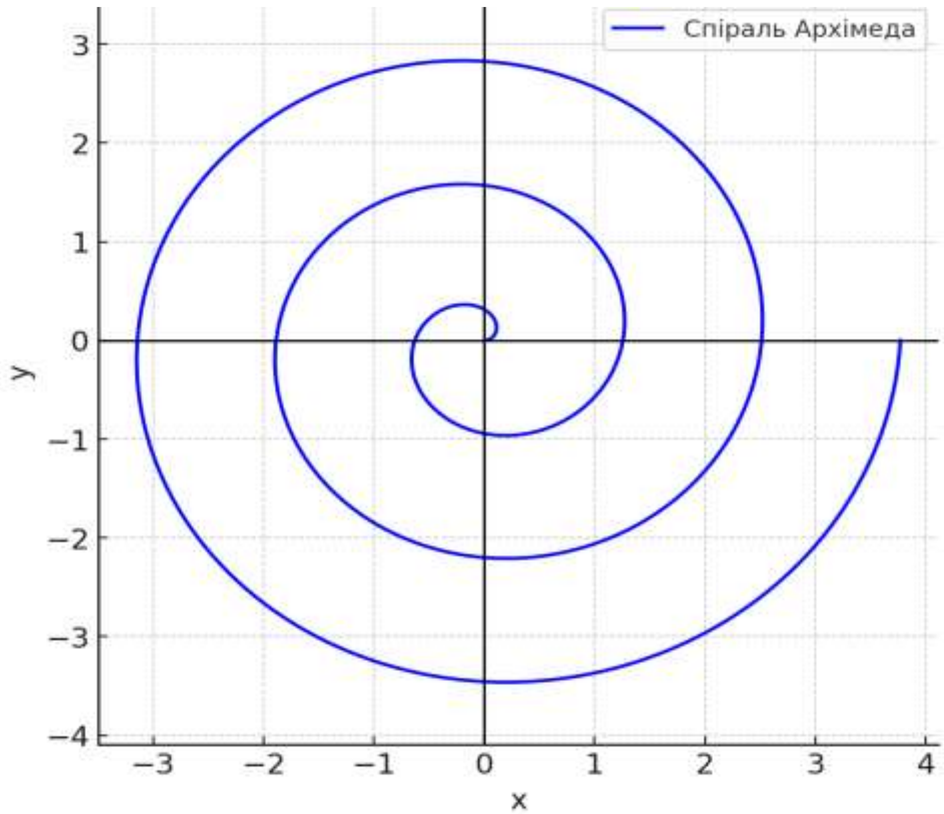

Рисунок 2.30 – Крива «Спіраль Архімеда»

Гіперболічна спіраль – це крива, траєкторія якої описується точкою, що рухається по спіралі до центра координат, але ніколи його не досягає. Вона є прикладом обернено-пропорційної спіралі, оскільки її радіус-вектор обернено залежить від кута повороту.

Рівняння гіперболічної спіралі у полярних координатах:

$$r = \frac{a}{\theta} \tag{2.69}$$

У декартових координатах рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{a}{\theta}\right)\cos\theta; \\ x = \left(\dfrac{a}{\theta}\right)\sin\theta \end{cases} \tag{2.70}$$

Властивості гіперболічної спіралі:
- гіперболічна спіраль не має центра, оскільки за $\theta \to \infty,\ r \to 0$, але ніколи не досягає початку координат;
- за $\theta \to \infty,\ r \to 0$, тобто спіраль необмежено розходиться від центра;
- спіраль має нескінченну кількість витків, які стають дедалі щільнішими за наближення до центра;
- є інверсною кривою до спіралі Архімеда відносно одиничного кола.

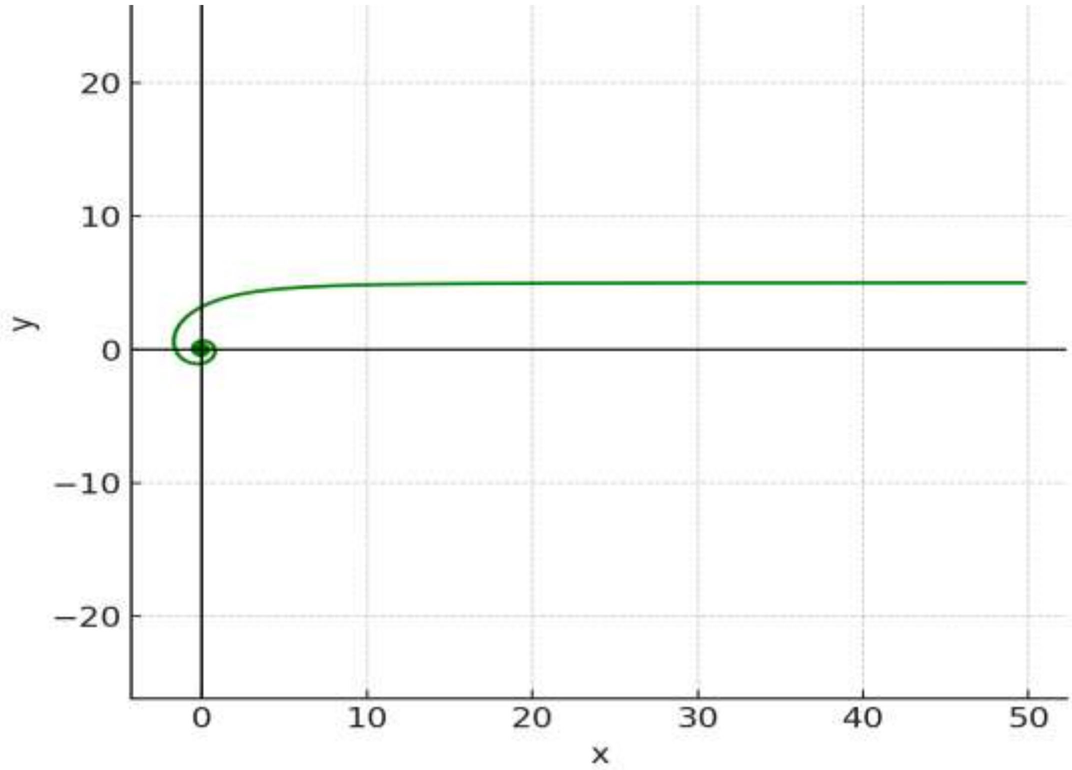

Рисунок 2.31 – Крива «Гіперболічна спіраль»

Логарифмічна спіраль – це крива, яка розгортається від центра, у цьому разі її радіус зростає експоненційно зі збільшенням кута повороту. Вперше логарифмічну спіраль описав Рене Декарт у 1638 році, а пізніше вона була детально досліджена Якобом Бернуллі, який назвав її Spira mirabilis – «чудова спіраль».

Рівняння логарифмічної спіралі у полярних координатах:

$$r = r_0 e^{k\varphi}. \qquad (2.71)$$

В цьому рівнянні k – параметр спіралі, який дорівнює:

$$k = \frac{\ln q}{2\pi} \qquad (2.72)$$

Величина q називається коефіцієнтом зростання. Якщо $q > 1$ – спіраль називається правою. Коли $q < 1$ – спіраль вироджується в коло.

Властивості логарифмічної спіралі:

- масштабна інваріантність: під час збільшення спіралі вона залишається подібною самій собі;
- постійний кут між радіус-вектором і дотичною – це головна відмінність логарифмічної спіралі від інших спіралей;
- не має центра: спіраль закручується до центра нескінченно, але ніколи його не досягає.

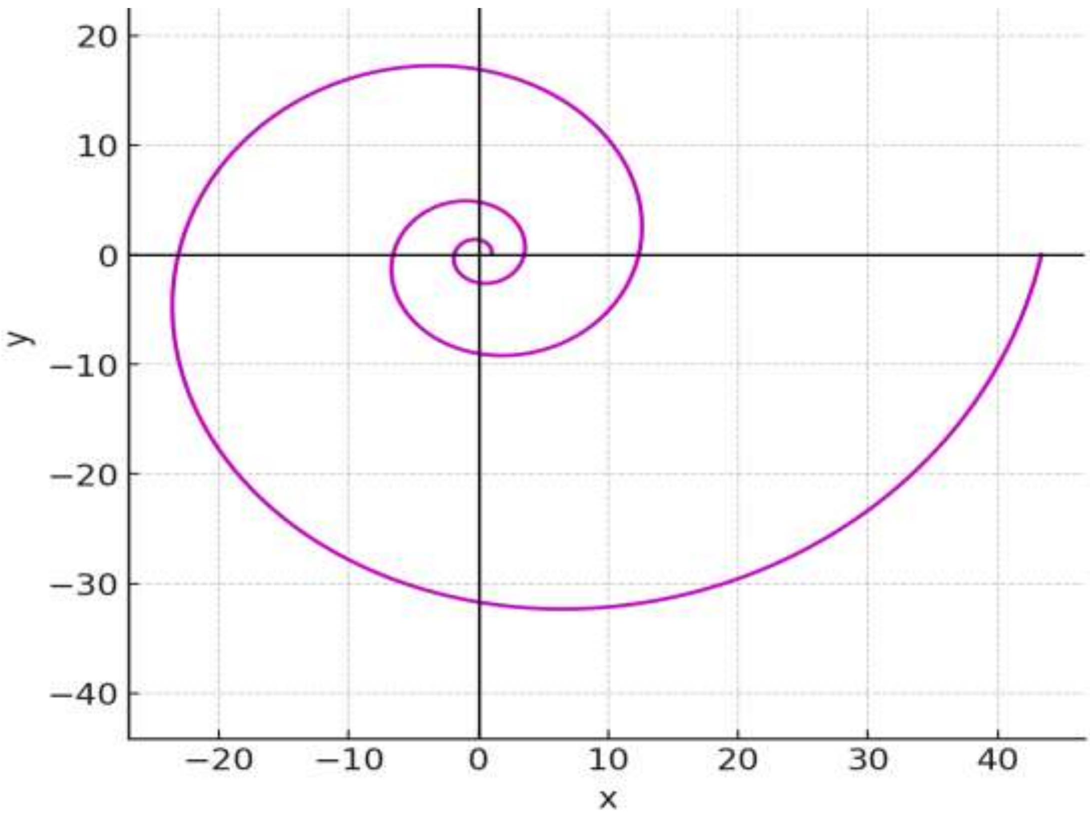

Рисунок 2.32 – Крива «Логарифмічна спіраль»

2.4 Додаткові приклади розв’язання задач

Приклад. Складти рівняння кола, яке проходить через три точки *A(0;2), B (1; 1)* і $C(2;-2)$

Розв'язання

Рівняння кола будемо шукати у вигляді:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Оскільки точки *A, B* і *C* належать шуканому колу, то, підставляючи в записане рівняння їх координати, одержимо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4 + 2E + F = 0, \\ 2 + D + E + F = 0, \\ 8 + 2D - 2E + F = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $E = 4$, $D = 6$, $F = -2$.

Тоді $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ – шукане рівняння.

Для знаходження радіуса і центра кола зведемо останнє рівняння до канонічного вигляду:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Звідки точка *O(-3; -2)* – центр кола, а його радіус дорівнює 5.

Рівняння кола будемо шукати у канонічному вигляді:

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = R^2$$

Підставляючи в це рівняння координати точок *A, B* і C, одержимо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 4b + 4 = R^2, \\ a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = R^2, \\ a^2 + b^2 - 4a + 2b + 8 = R^2. \end{cases}$$

Отримаємо: $a = -3$, $b = -2$, $R = 5$.

Отже, $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ – шукане рівняння кола, точка *O(-3; -2)* – його центр, а радіус дорівнює 5.

Відповідь: $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$

Приклад. Складсти рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=9$ в точці $M(1;3)$.

Розв'язання

За формулою маємо: $xx_0+yy_0=R^2$, і запишемо рівняння дотичної, де в нашому випадку отримаємо:

$$x_0=1, y_0=3, R=3:$$
$$1\cdot x+3\cdot y=9 \text{ або } x+3y-9=0.$$

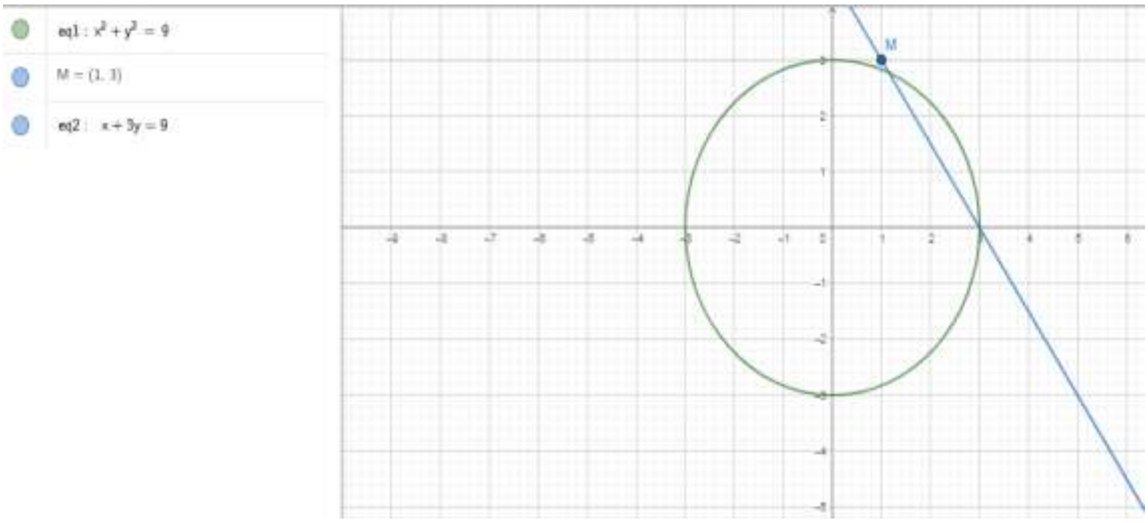

Рисунок 2.33 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $x+3y-9=0$.

Приклад. Провести до параболи $y^2=9x$ дотичну через точку *А (3; -6).*

Розв'язання

Точка *А(3;-6)* не належить параболі $(-6)^2\neq 9\cdot 3$, формула $yy_0=p(x+x_0)$ не задовольняє нашу умову.

Оскільки шукана дотична проходить через точку А *(3;-6),* то її рівняння буде мати вигляд:

$$y+6=k(x-3).$$

Спільні точки прямої $y+6=k(x-3)$ і цієї параболи $y^2=9x$ знайдемо через систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2=9x, \\ y+6=k(x-3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{9} \\ y + 6 = k(\dfrac{y^2}{9} - 3) \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{9} \\ \dfrac{k}{9} y^2 - y - 3k - 6 = 0 \end{cases},$$

Це рівняння буде мати корені, коли дискримінант дорівнює нулю.

$$D = b^2 - 4ac = 0,$$

$$D = 1^2 + 4 \cdot \frac{k}{9} \cdot (3k + 6) = 0,$$

$$D = 1 + 4\frac{k}{9} \cdot 3(k + 2) = 1 + \frac{4k}{3} \cdot (k + 2) = 3 + 4k^2 + 8k.$$

Спрощуючи отримане рівняння, маємо квадратне рівняння відносно k:

$$4k^2 + 8k + 3 = 0,$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 48 = 16,$$

$$\sqrt{D} = 4,$$

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + 4}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

$$k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 - 4}{2 \cdot 4} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

Таким чином, умову задачі задовольняють дві прямі:

$$y + 6 = -\frac{1}{2}(x - 3) \text{ і } y + 6 = -\frac{3}{2}(x - 3),$$

або

$$x + 2y + 9 = 0$$

та

$$3x + 2y + 3 = 0.$$

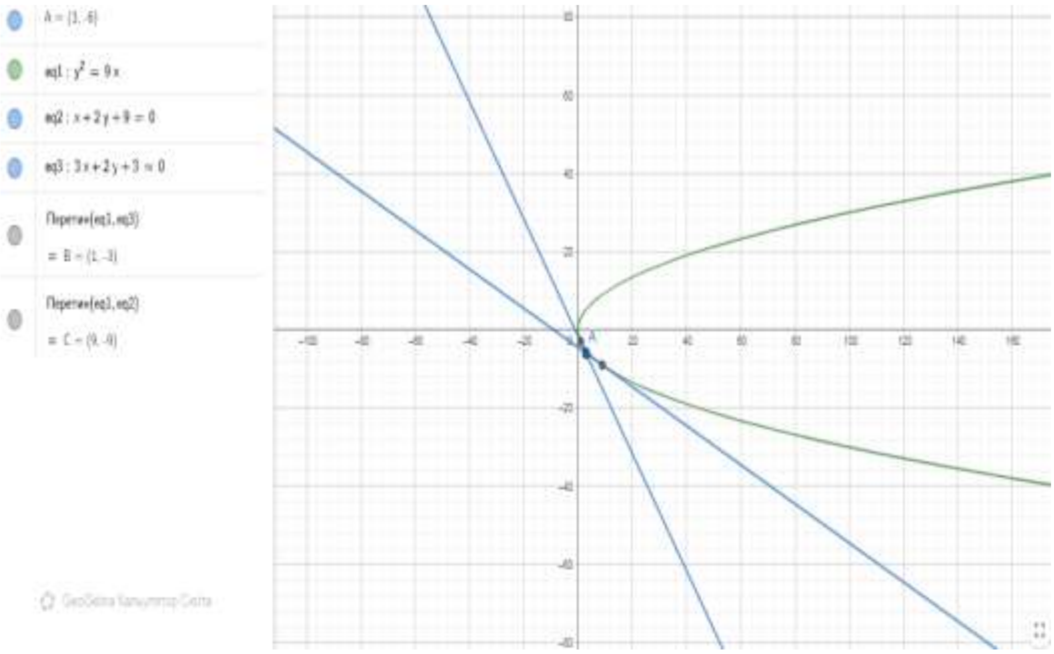

Рисунок 2.34 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $x+2y+9=0$, $3x+2y+3=0$.

Приклад. Провести дотичну до параболи $y^2 = 15x$, яка паралельна прямій $5x - y + 7 = 0$.

Розв'язання.

Кутовий коефіцієнт $k = 5$, так як дотична паралельна прямій $5x - y + 7 = 0$, тому рівняння можна записати у вигляді $y = 5x + C$. Значення С визначимо з умови, що дотична і парабола мають одну спільну точку. Спільні точки дотичної і параболи знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = 15x \\ \{y = 5x + C' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{15} \\ y = 5 \cdot \dfrac{y^2}{15} + C \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{15} \\ y = \dfrac{y^2}{3} + C \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{15} \\ \dfrac{y^2}{3} - y + C = 0 \end{cases}.$$

Рівняння має рівні між собою корені, коли дискримінант дорівнює нулю, тобто коли:

$$D = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot C = 0,$$

$$1 - \frac{4}{3}C = 0,$$

$$C = \frac{3}{4}.$$

Отримаємо рівняння дотичної $y = 5x + \frac{3}{4}$.

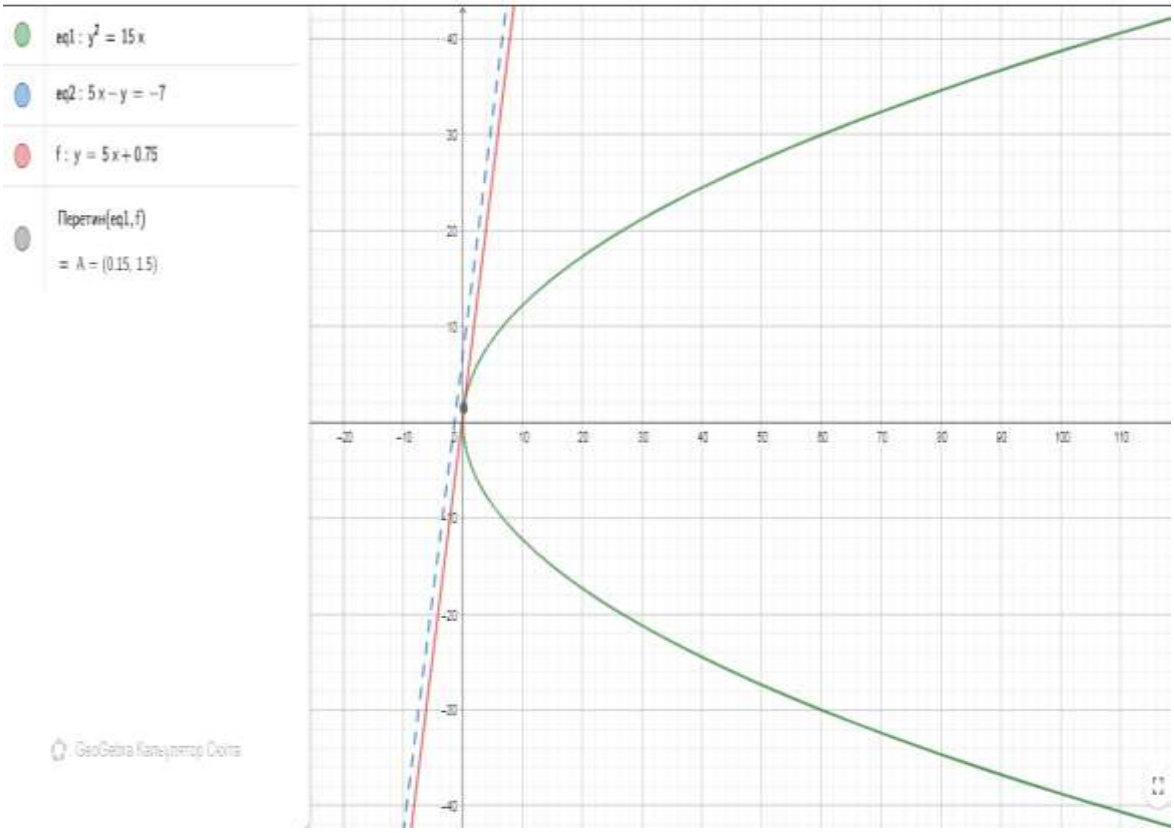

Рисунок 2.35 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: $y = 5x + \frac{3}{4}$.

Приклад. Скласти рівняння еліпса, якщо його фокуси лежать на осі абсцис і симетричні відносно початку коодинат, якщо:

1) півосі відповідно дорівнюють 6 і 4;
2) відстань між фокусами дорівнює 10 і велика піввісь – 6;
3) велика піввісь дорівнює 24 і ексцентриситет дорівнює 0,5;
4) мала піввісь дорівнює 12 і ексцентриситет дорівнює 0,6;

5) сума осей дорівнює 40 і відстань між фокусами дорівнює $4\sqrt{10}$;

6) ексцентриситет дорівнює $\frac{2}{3}$ 2/3 і точка еліпса A_1 (2;-5).

Розв'язання

1. За умовою $a=6,\ b=4$. Тоді за формулою: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ отримаємо:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

2. За умовою $2c=10,\ c=5,\ a=6$.
Оскільки $b^2=a^2-c^2$, то:

$$b^2=6^2-5^2=36-25=11.$$

Звідси, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1.$

3. За умовою задачі $a=24$.
З формули $b^2=a^2-c^2$ знайдемо *c і b*:

$$0.5=\frac{c}{24},\quad c=12,$$
$$b^2=576-144=430.$$

Звідси отримаємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{574}+\frac{y^2}{430}=1.$

4. Із рівності $2b=12,\ \ b=6$, тоді $c=0.6a$.
Оскільки $b^2=a^2-c^2$, то:

$$36=0.36a^2,\quad a^2=100.$$

Звідси рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

5. За умовою $2(a+b)=40,\ \ a+b=20$, тоді:

$$2c=4\sqrt{10},\ \ c=2\sqrt{10},\ \ c^2=40 \text{ та } 40=a^2-b^2.$$

З системи рівнянь знайдемо *a і b:*

$$\begin{cases} a+b=20; \\ a^2-b^2=40, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=20; \\ a-b=2, \end{cases}$$

отримаємо

$$a=11, \quad b=9.$$

Звідси $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{81}=1$.

6. Координати точки A_1 (2;-5) задовольняють рівняння:

$$\frac{4}{a^2}+\frac{25}{b^2}=1.$$

Крім того:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{2}{3}.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{4}{a^2}+\frac{25}{b^2}=1; \end{cases} \\ \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{4}{9}, \end{cases}$$

звідси $a^2=9, \ b^2=5.$

Отримаємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Приклад. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 12 і відстань між директрисами = 6;

2) уявна піввісь дорівнює 5 і ексцентриситет = 4;

3) асимптоти перпендикулярні та директриса задана рівнянням $x=\pm 3\sqrt{2}$;

4) асимптоту, яка проходить через точку $A_1(5;8)$, задано рівнянням $y=\frac{4}{3}x$.

Розв'язання

1. За умовою задачі $2c=12,\ c=6$ і відстань між директрисами $\frac{2a}{e}=6$.

З формули: $e=\frac{c}{a}\ \rightarrow\ a=\frac{c}{e}$, отримаємо:

$$a^2=18.$$

Оскільки $b^2=c^2-a^2$, то:

$$b^2=36-18=18.$$

Звідси рівняння гіперболи буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{18}=1.$$

2. За умовою задачі $b=5,\ e=4$, з формули: $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$, отримаємо:

$$\frac{5}{a}=\sqrt{16-1},\ \ \frac{5}{a}=\sqrt{15},\ \ a=\frac{5}{\sqrt{15}}.$$

Рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{3x^2}{5}-\frac{y^2}{25}=1.$$

3. Якщо асимптоти гіперболи перепендикулярні, то $a=b$.
З рівняння директриси маємо:

$$\frac{a}{e}=3\sqrt{2}.$$

Використовуючи формулу

$$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1},$$

отримаємо:

$$e=\sqrt{2}\ \text{ і }\ a=b=6.$$

Отже, рівняння шуканої гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1.$

4. Із рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{b}{a}x$ випливає:

$$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}, \quad b=\frac{4}{3}a.$$

Точка $A_1(5;4)$ належить гіперболі, то з формули: $\frac{25}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1$, отримаємо:

$$\frac{25}{a^2}+\frac{16\cdot 9}{16a^2}=1,$$
$$a^2=16,$$
$$b^2=\frac{256}{9}.$$

Звідси, рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{256}=1.$

Приклад. Через точку A(2;-2) провести прямі, паралельні асимптотам гіперболи $9x^2-6y^2=36$.

Розв'язання

Запишемо у канонічній формі рівняння гіперболи: $9x^2-6y^2=36$, поділивши обидві частини заданого рівняння на 36:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1.$$

Отримаємо:

$$a^2=4, \ \ b^2=6,$$
$$a=2, \ \ b=\sqrt{6}.$$

З рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{b}{a}x$ отримаємо:

$$y=\frac{\sqrt{6}}{2}x, \ y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x.$$

Щоб провести прямі, паралельні асимптотам, потрібно щоб їхні коефіцієнти кутові дорівнювали відповідним кутовим коефіцієнтам асимптот.

Тому рівняння прямої, що проходить через точку А(2;-2), буде мати вигляд:

$$y+2=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(\mathrm{x}-2)\,.$$

Рівняння першої прямої:

$$y+2=\frac{\sqrt{6}}{2}(\mathrm{x}-2),$$

$$\mathrm{y}+2=\frac{\sqrt{6}x}{2}-\sqrt{6}, \qquad .$$

$$\sqrt{6}x-2y-4-2\sqrt{6}=0.$$

Рівняння другої прямої:

$$y+2=-\frac{\sqrt{6}}{2}(\mathrm{x}-2),$$

$$\mathrm{y}+2=-\frac{\sqrt{6}x}{2}+\sqrt{6},$$

$$-\sqrt{6}x-2y-4+2\sqrt{6}=0.$$

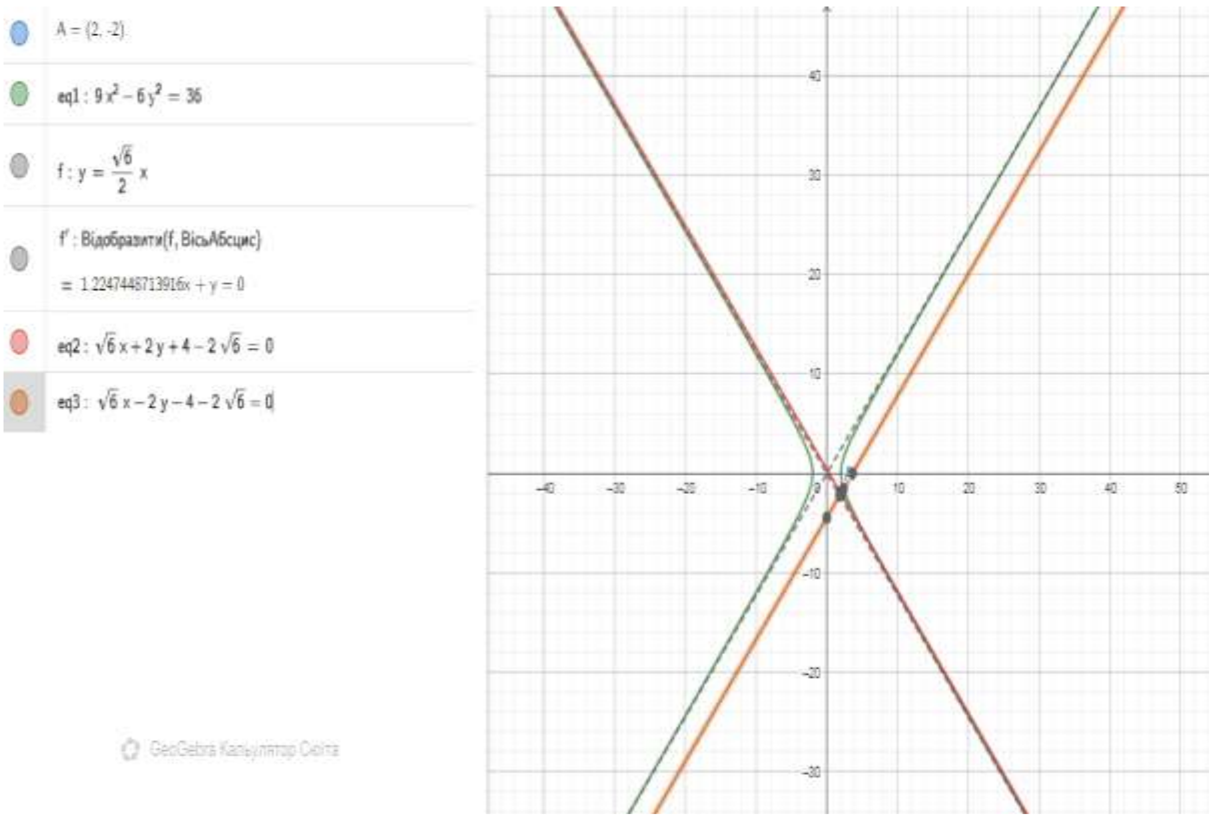

Рисунок 2.36 – Графічний розв’язок задачі

Приклад. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:
1) відстань від фокуса, що лежить на осі Ох, до вершини дорівнює 7;
2) відстань від директриси до фокуса, що лежить на осі Оу, дорівнює 4;
3) парабола симетрична осі абсцис і проходить через точку А (3;-3);
4) парабола симетрична осі ординат і проходить через точку А (-3;5).

Розв'язання

1. За умовою задачі $\frac{p}{2}=7$, звідси $p=14$.

Отримаємо рівняння параболи з формули $y^2=2px$; воно буде мати вигляд:

$$y^2=28x.$$

2. За умовою задачі $p=4$.

Оскільки парабола симетрична відносно *Oy*, то за формулою: $x^2=2py$ отримаємо:

$$x^2=8y.$$

3. Рівняння параболи має вигляд: $y^2=2px$. Оскільки парабола симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку А(3;-3), отримаємо:

$$(-3)^2=2\cdot 3p,$$
$$9=6p,$$
$$p=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

Звідси отримаємо рівняння параболи:

$$y^2=2\cdot\frac{3}{2}x=3x.$$

4. Рівняння параболи, симетричної відносно осі ординат, має вигляд:

$$y^2=2px.$$

Оскільки парабола проходить через точку А (-3;5), то:

$$(-3)^2=2\cdot 5p,$$
$$9=10p,$$
$$p=\frac{9}{10}.$$

Отримаємо рівняння параболи:

$$x^2=2\cdot\frac{9}{10}y=\frac{9}{5}y.$$

Приклад. Звести до найпростішого вигляду рівняння кривої:

$$x^2+y^2+4x+2y+6=0$$

Розв'язання

Це рівняння не містить члена з добутком координат. Збираємо в цьому рівнянні члени, що містять однойменні координати:

$$(x^2+4x)+(y^2+2y)+6=0$$

Доповнюємо вираз в дужках до повних квадратів:

$$(x^2+4x+4)-4+(y^2+2y+1)-1+6=0,$$

або

$$(x+2)^2+(y+1)^2+1=0$$

Це рівняння не може мати місця за дійсних значень x і y. Тому рівняння не визначає ніякої лінії на площині.

Відповідь: $(x+2)^2+(y+1)^2+1=0$

Приклад. Рівняння кола $x^2+y^2=ax$ записати в полярній системі координат.

Розв'язання

Використаємо зв'язок між полярними і декартовими координатами точки:

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi.$$

Тоді рівняння кола можна переписати в такому вигляді:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=a\rho\cos\varphi \text{ або } \rho=a\cos\varphi.$$

Відповідь: $\rho=a\cos\varphi$.

Приклад. Відносно декартової прямокутної системи координат написати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо його рівняння в полярній системі координат $\rho=\dfrac{25}{13-12\cos\varphi}$.

Розв'язання

Перепишемо це рівняння еліпса у вигляді:

$$\rho=\frac{\frac{25}{13}}{1-\frac{12}{13}\cos\varphi}$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням $\rho=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$, отримаємо:

$$e=\frac{12}{13},\; p=\frac{b^2}{a}=\frac{25}{13}.$$

Значення a і b знайдемо із системи рівнянь:

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{12}{13},$$
$$\frac{b^2}{a}=\frac{25}{13},$$
$$a=13,\; b=5.$$

Тоді $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$ – шукане канонічне рівняння цього еліпса.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1.$

Приклад. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дано її рівняння в полярних координатах $\rho=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$.

Розв'язання

Праву частину цього рівняння подамо у такому вигляді:

$$\rho=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{5}{4}\cos\varphi},$$

порівняємо отримане рівняння з рівнянням:

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}.$$

Із системи рівнянь отримаємо:

$$e=\frac{5}{4},\; p=\frac{9}{4}$$

або

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{25}{16},$$
$$\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4},$$

знайдемо: $a^2=16,\ b^2=9$

Тоді шукане рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

Приклад. Виключити параметр t з параметричних рівнянь лінії

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

Розв'язання

З параметричних рівнянь отримаємо:

$$\begin{cases} \cos t=\dfrac{x}{a} \\ \sin t=\dfrac{y}{b} \end{cases}.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівнянь та додамо почленно їх, що дасть нам рівняння еліпса в прямокутних декартових координатах:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Приклад. Звести до найпростішого вигляду рівняння кривої:

$$x^2+y^2+4y+4=0$$

Розв'язання

Це рівняння може бути записано так:

$$x^2+(y^2+4y+4)=0,$$

або

$$x^2+(y+2)^2=0.$$

Ця рівність має місце тільки за $x=0$ і $y=-2$.

Тому це рівняння визначає на площині одну точку $(0;-2)$.

Приклад. Знайти два спряжених діаметри кривої $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$, один з яких проходить через початок координат.

Розв'язання

Дана крива центральна, тому що $I_2\neq 0$.

Рівняння її діаметра буде:

$$(x-y-2)+k(-x+2y-3)=0,$$

де k – кутовий коефіцієнт спряженого діаметра.

Оскільки шуканий діамегр проходить через початок координат, то вільний член його рівняння має дорівнювати нулю, тобто

$$-2-3k=0,$$

Звідки

$$k=-\frac{2}{3}.$$

Підставивши значення параметра в загальне рівняння діаметра і перетворивши його, одержимо:

$$5x-7y=0.$$

Це рівняння одного із шуканих діаметрів, його кутовий коефіцієнт $k'=\frac{5}{7}$.

Отже, рівняння спряженого йому діаметра буде:

$$(x-y-2)+\frac{5}{7}(-x+2y-3)=0,$$

або

$$2x+3y-29=0.$$

Відповідь: $(x-y-2)+\frac{5}{7}(-x+2y-3)=0$ або $2x+3y-29=0$.

Приклад. Знайти вісь параболи

$$x^2-2xy+y^2+x-2y+3=0.$$

Розв'язання

Усі діаметри цієї параболи мають кутовий коефіцієнт $k=1$.

Вісь параболи є діаметр, спряжений перпендикулярним хордам, тобто хордам з кутовим коефіцієнтом $k_1=-1$.

Рівняння всякого діаметра цієї параболи буде мати вигляд:

$$2x-2y+1+k(-2x+2y-2)=0,$$

за $k=-1$ ми одержимо рівняння осі:

$$4x-4y+3=0.$$

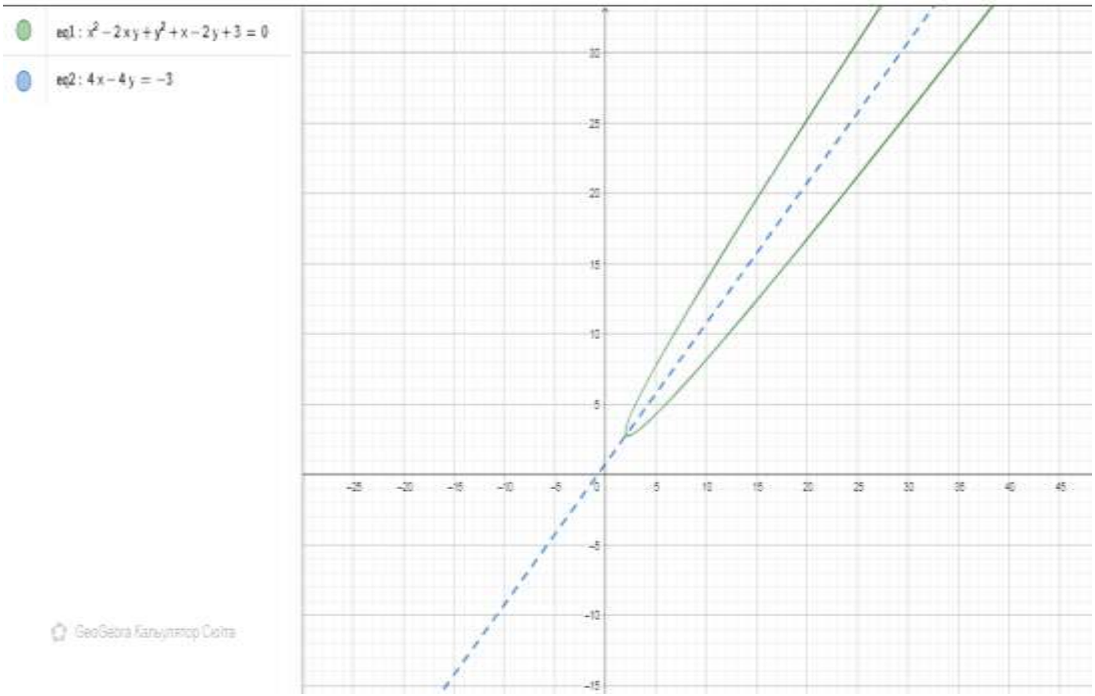

Рисунок 2.37 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $4x-4y+3=0$

Тема 3 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поверхні другого порядку – це множина точок у тривимірному просторі, координати яких задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fzy + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad (3.1)$$

де *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J* – деякі коефіцієнти.

За своєю структурою це рівняння нагадує загальне рівняння кривої другого порядку, але відрізняється наявністю додаткової змінної – z. Варто зазначити, що рівняння поверхонь другого порядку не обов’язково мають містити змінну z.

Розглянемо, наприклад, рівняння:

$$1.\ Ax + By + C = 0,$$
$$2.\ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Перше рівняння є загальним рівнянням прямої на площині, тоді як друге визначає площину у просторі. Якщо ж перше рівняння розглядати у тривимірних координатах, воно описуватиме не пряму, а окремий випадок площини, що паралельна осі аплікат *(Oz)*.

Отже, щоб рівняння визначало поверхню другого порядку, необхідно виконання умови: принаймні один з коефіцієнтів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ має бути відмінним від нуля.

Очевидно, що форма поверхні залежить від значень цих коефіцієнтів. У цьому розділі ми розглянемо циліндричні поверхні, поверхні обертання та поверхні, що описуються рівняннями у канонічній формі.

3.1 Циліндричні поверхні

Циліндри другого порядку – це поверхні, рівняння яких у декартовій системі координат містять лише дві змінні (*x, y* або *x, z* або *y, z*), а третя змінна може набувати будь-яких значень.

Загальне рівняння циліндра другого порядку має вигляд:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0\,. \qquad (3.2)$$

Це рівняння задає плоску криву, яка визначає перетин циліндра з площиною, а сама поверхня утворюється шляхом паралельного переносу цієї кривої уздовж третьої осі.

Основні види циліндрів другого порядку

Еліптичний циліндр – це нескінченна поверхня другого порядку, яка є узагальненням колового циліндра, але з еліпсом як основою.

Рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.3}$$

Властивості:

- нескінченна поверхня, утворена перенесенням еліпса вздовж осі z;
- поверхня симетрична відносно осей координат;
- перерізи**:**

$z = const$ – еліпси;

$x = const$, $y = const$ – прямі**.**

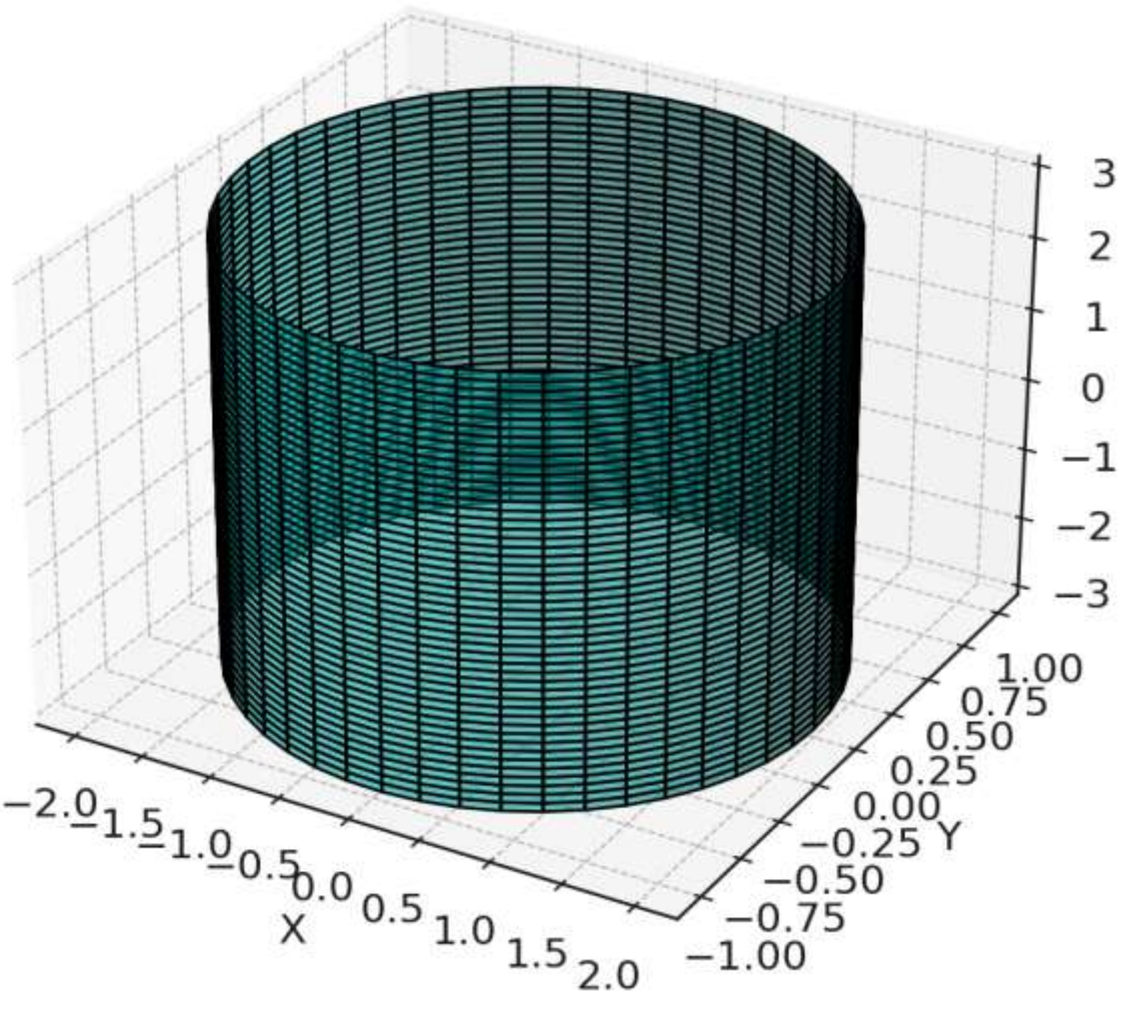

Рисунок 3.1 – Еліптичний циліндр

Гіперболічний циліндр – це нескінченна поверхня другого порядку, що утворюється під час перенесення гіперболи вздовж певного напрямку, зазвичай уздовж осі *z*.

Рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.4)$$

Основні властивості:

- нескінченна поверхня, утворена гіперболою, що переноситься вздовж осі *z*;
- поверхня симетрична відносно осей *xx*, *yy* та координатних площин;
- перерізи:

  $z = const$ – гіперболи;

  $x = const$, $y = const$ – прямі.

У разі, коли $a = b$, гіпербола є рівнобічною.

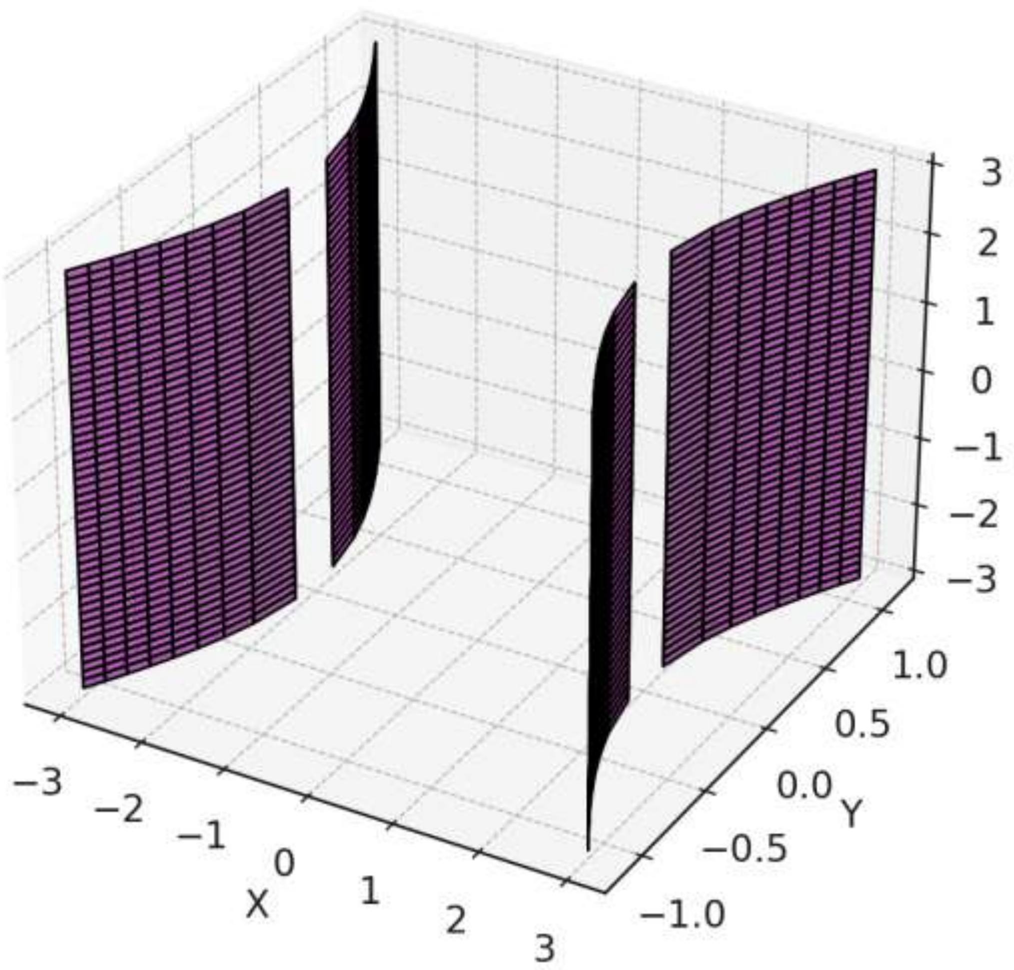

Рисунок 3.2 – Гіперболічний циліндр

Параболічний циліндр – це нескінченна поверхня другого порядку, яка утворюється шляхом паралельного перенесення параболи вздовж осі *z*.

Рівняння має вигляд:

$$y = ax^2. \qquad (3.5)$$

Властивостями параболічного циліндра є:

- нескінченна поверхня, утворена параболою, що переноситься вздовж осі *z*;
- перерізи:

$z = const$ – еліпси;

$x = const$, $y = const$ – прямі.

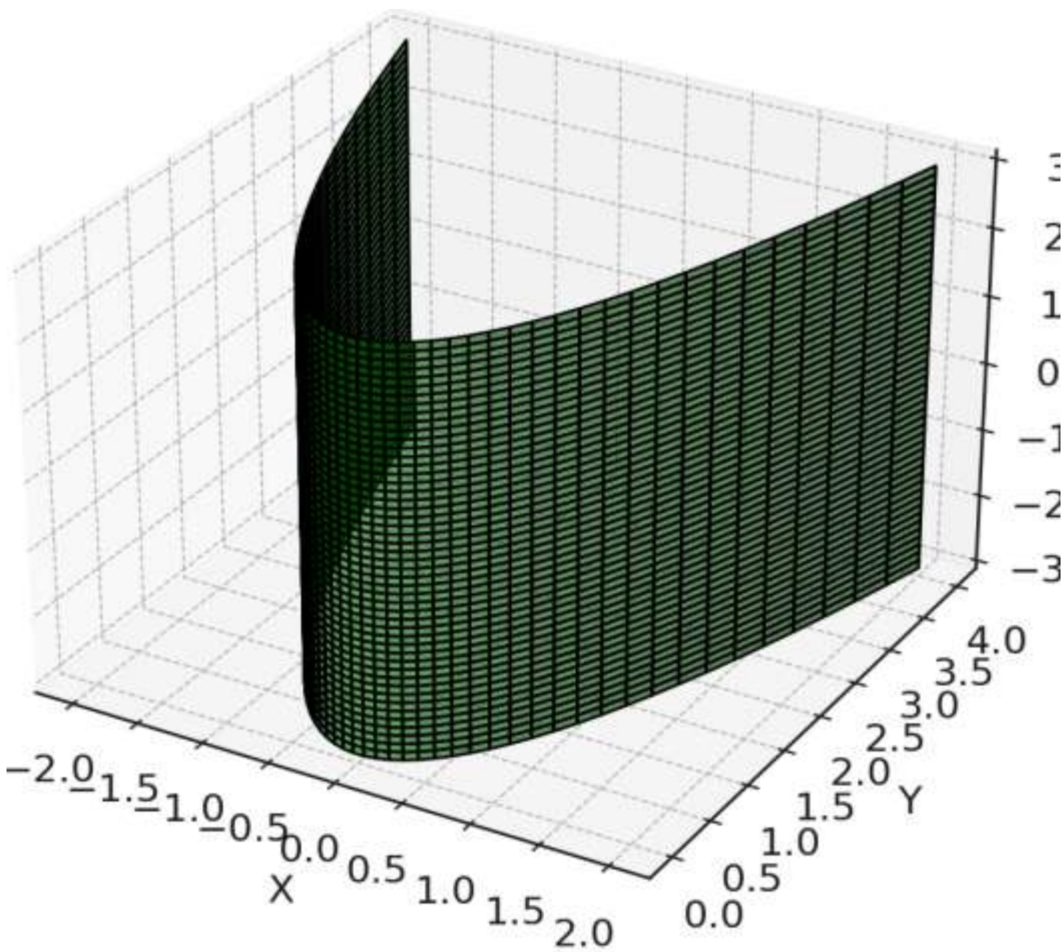

Рисунок 3.3 – Параболічний циліндр

Відмінність від поверхонь другого порядку

- Циліндри не обмежені вздовж однієї координати, тобто вони нескінченні в одному напрямку.
- Їхні рівняння містять тільки дві змінні, на відміну від поверхонь другого порядку, де є всі три змінні *x*, *y*, *z*.
- Будь-який поперечний переріз є кривою другого порядку (еліпс, гіпербола, парабола).

3.2 Конічні поверхні

Конічні поверхні – це поверхні, які утворюються під час руху прямої (твірної), що проходить через фіксовану точку (вершину) і перетинає деяку криву (керівну).

Конічна поверхня задається рівнянням:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{3.6}$$

Якщо відсутній член Cz^2, то це конус.

Класифікація конічних поверхонь

Прямий круговий конус – керівна крива є колом.

Рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2. \tag{3.7}$$

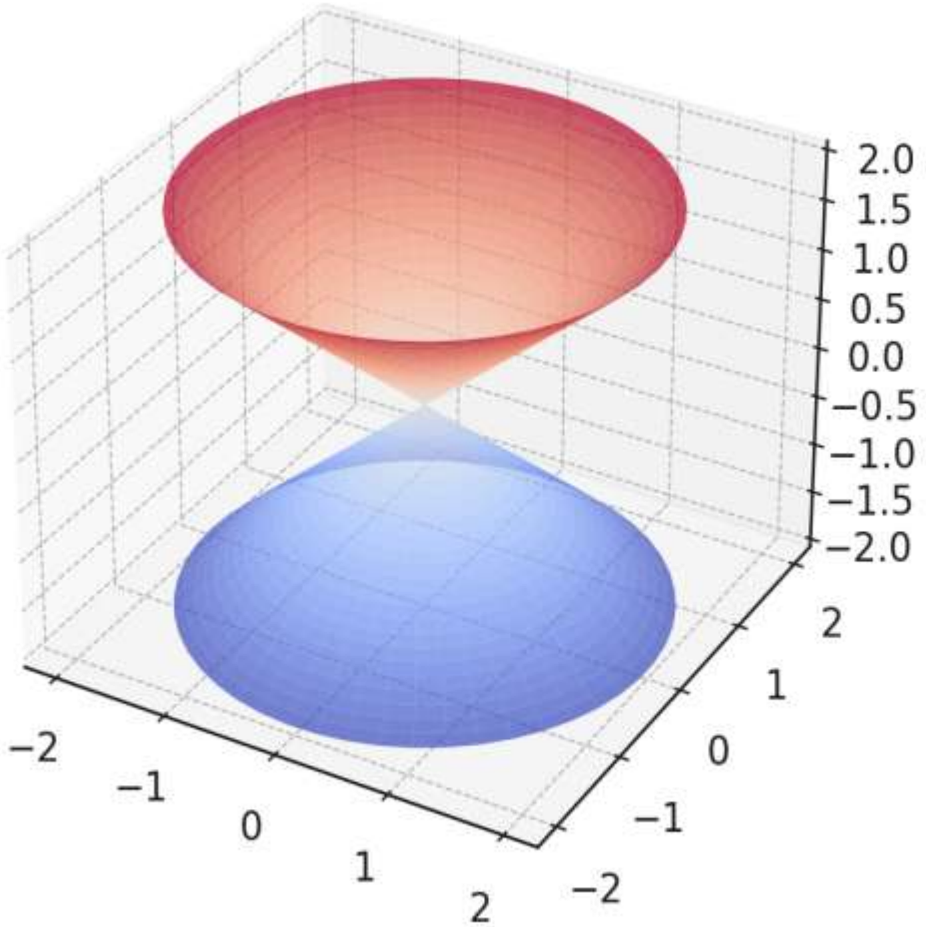

Рисунок 3.4 – Прямий круговий конус

Еліптичний конус – це поверхня другого порядку, рівняння якої в канонічному вигляді має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (3.8)$$

Основні властивості еліптичного конуса:

Центр симетрії – початок координат (якщо рівняння записано в канонічному вигляді).

Дві асимптотичні конічні поверхні – конус складається з двох частин (гілок), які перетинаються в початку координат.

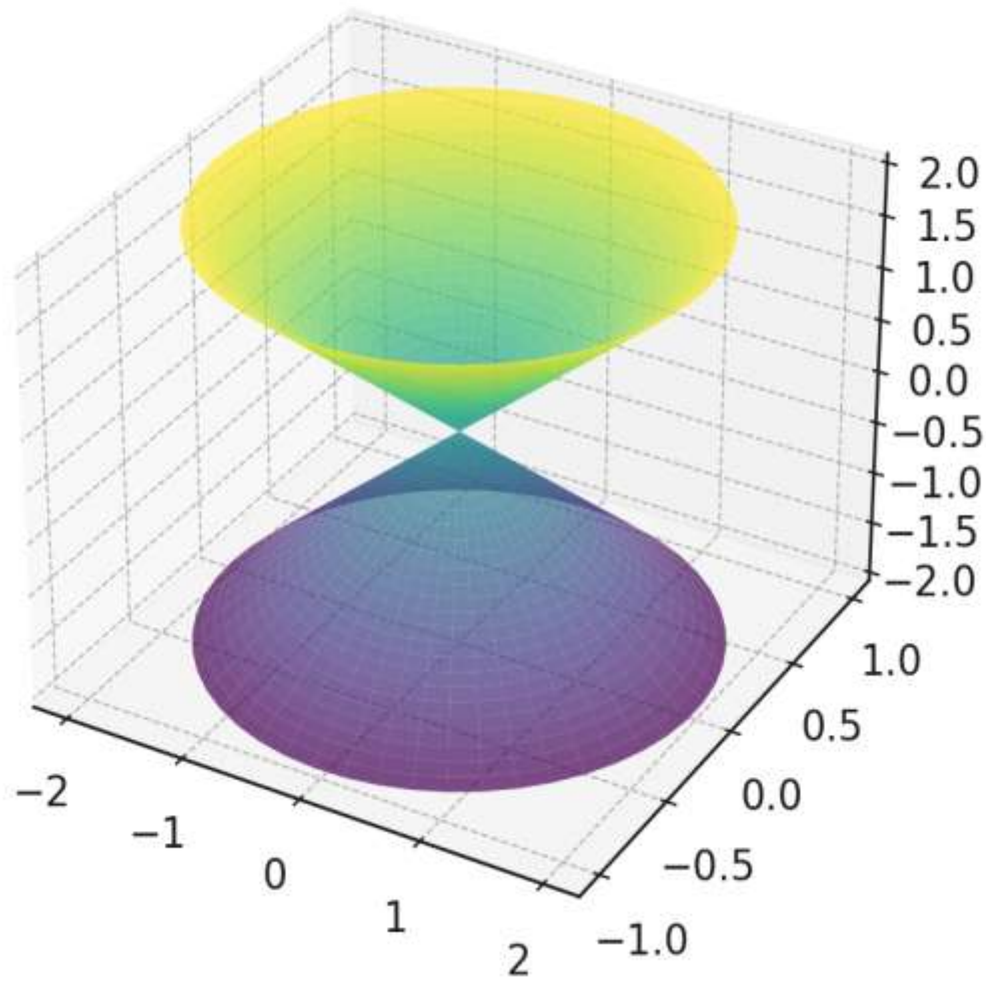

Рисунок 3.5 – Еліптичний конус

Гіперболічний конус – це поверхня, яка локально має геометрію гіперболічного простору, за винятком вершини, де виникає конічна сингулярність. Його можна уявити як площину, оснащену гіперболічною метрикою, яка згорнута так, що довжини кіл навколо вершини не відповідають евклідовим сподіванням.

Рівняння має вигляд:

$$x^2 - y^2 = z^2. \qquad (3.9)$$

Властивості гіперболічного конуса

Гіперболічний конус є двовимірною поверхнею, яка локально має гіперболічну геометрію (від'ємну кривину), за винятком вершини.

Вершина є конічною сингулярністю, де можуть виникати кутові дефекти.

Відстань між двома точками на конусі визначається за гіперболічною метрикою.

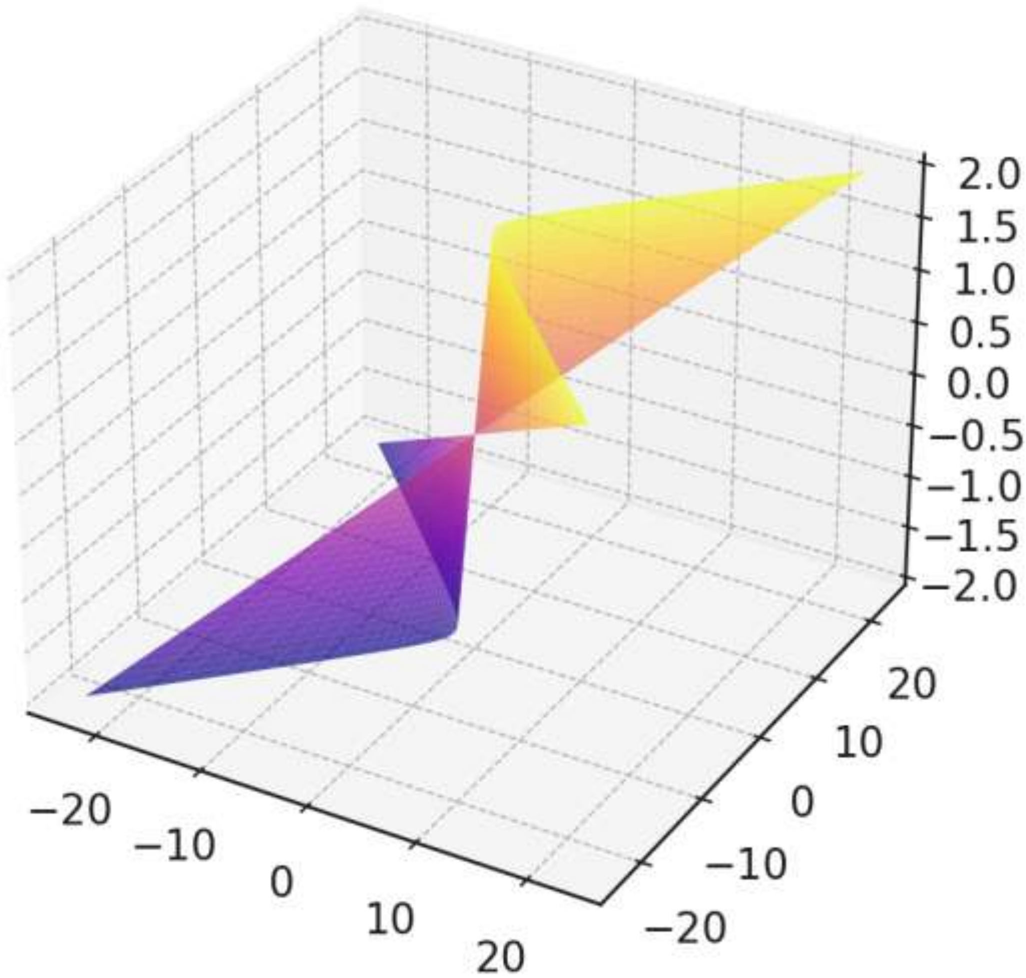

Рисунок 3.6 – Гіперболічний конус

Основні властивості конічних поверхонь:

- вершина є єдиною особливою точкою поверхні;
- всі твірні проходять через вершину;

- переріз конічної поверхні площиною може давати еліпс, параболу або гіперболу.

3.3 Поверхні обертання

Поверхня обертання – це поверхня, яка утворюється шляхом обертання деякої плоскої кривої (твірної) навколо нерухомої осі в просторі. Такі поверхні часто зустрічаються в геометрії, фізиці та техніці.

Еліпсоїд – це тривимірна поверхня, яка є узагальненням еліпса на тривимірний простір.

Рівняння еліпсоїда бути мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.10}$$

Форма: замкнена опукла поверхня. Всі перерізи – еліпси. Якщо $a = b = c$, отримуємо сферу.

Всі перерізи еліпсоїда площинами є еліпсами.

Фокуси: подібно до еліпса, еліпсоїд має три фокальні осі, де можна визначити фокуси залежно від ексцентриситетів.

Центральна симетрія: еліпсоїд симетричний відносно свого центра та координатних площин.

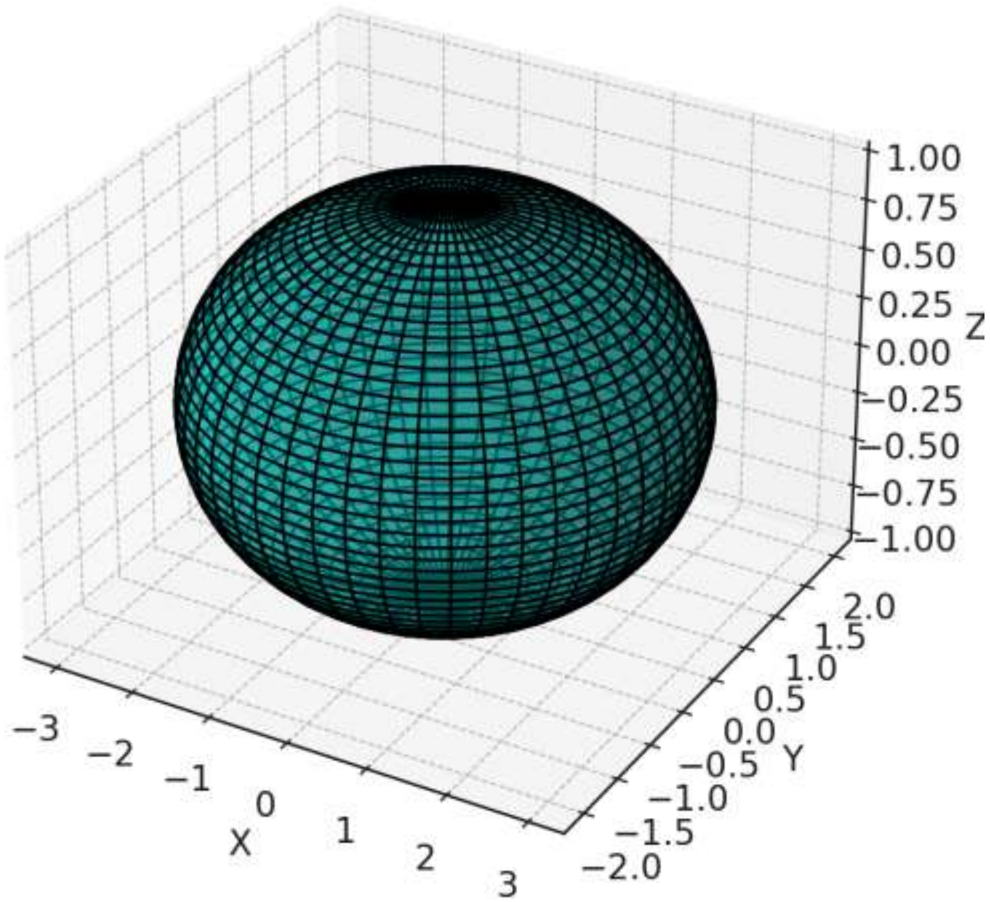

Рисунок 3.7 – Еліпсоїд

Однопорожнинний гіперболоїд – це поверхня другого порядку, яка має вигляд однієї зв’язної частини (порожнини) і нагадує гіперболічну обертальну поверхню (сідлоподібну форму).

Його канонічне рівняння в декартових координатах:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.11)$$

Властивості:
- має перервну (нескінченну) поверхню;
- перерізи:

$z=const$ – гіперболи.

$x=const$, $y=const$ – еліпси.

Нагадує гіперболоїд обертання, що часто зустрічається в архітектурі.

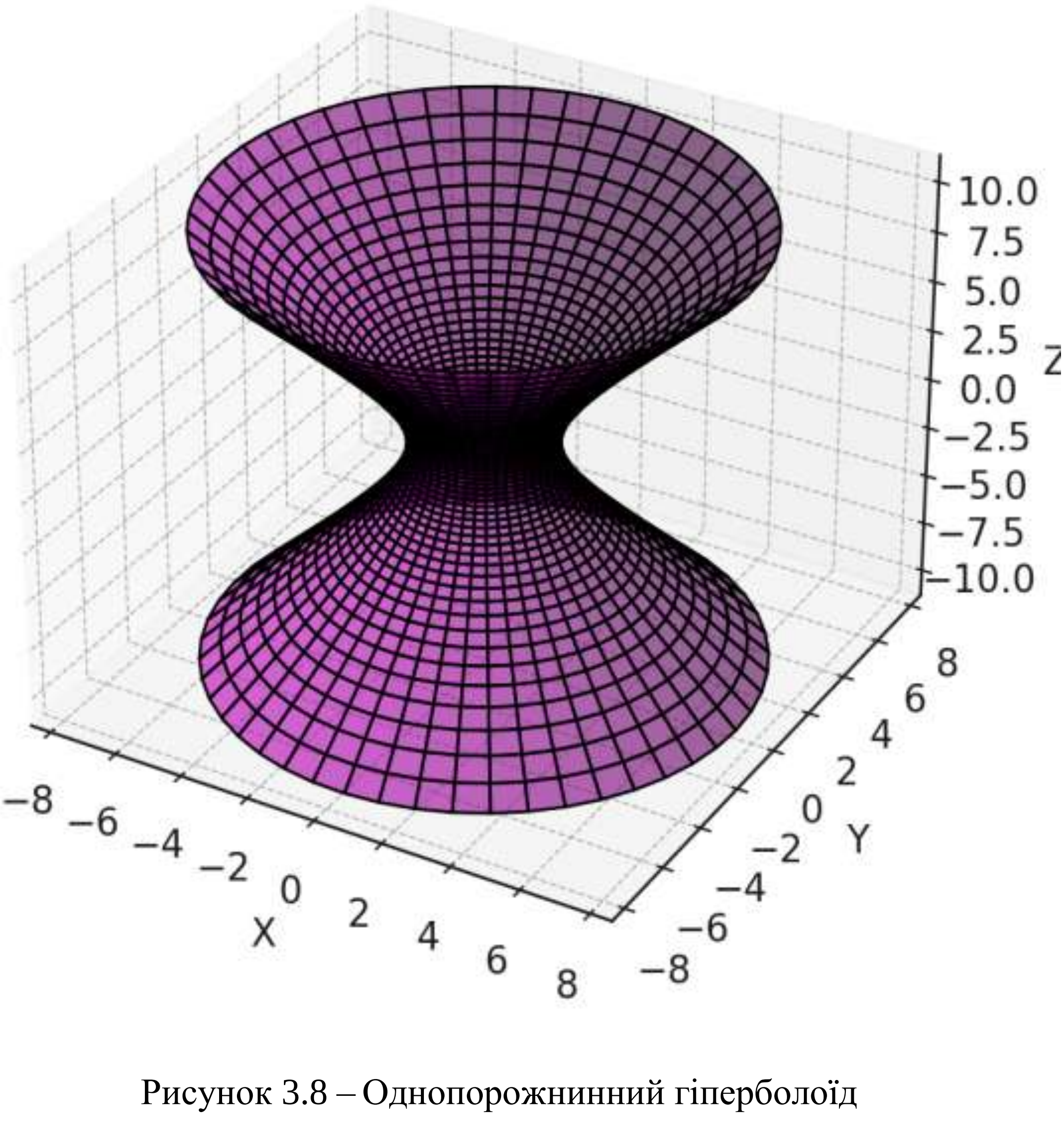

Рисунок 3.8 – Однопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинний гіперболоїд – це поверхня другого порядку, яка складається з двох несуміжних частин (порожнин), що симетрично розташовані відносно центра.

Він є множиною точок, які задовольняють канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3.12)$$

Властивості:

- складається з двох окремих частин;
- перерізи:

$z=const$ - гіперболи.

$x=const$, $y=const$ - еліпси;

- асимптотична поведінка: на великих значеннях |z| поверхня нагадує два нескінченні листки, що розходяться; не має асимптотичних площин, оскільки її частини відокремлені одна від одної.

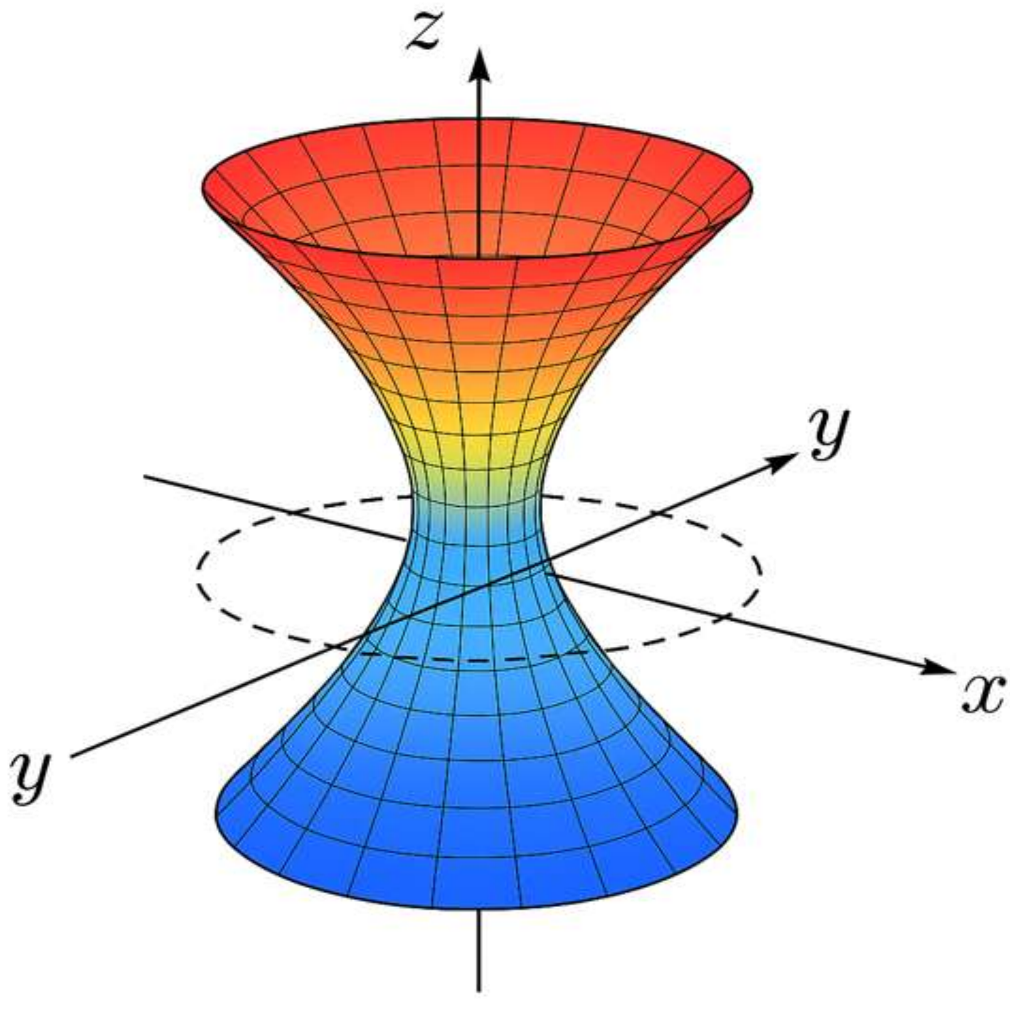

Рисунок 3.9 – Двопорожнинний гіперболоїд

Еліптичний параболоїд

Рівняння бути мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\,. \qquad (3.13)$$

Форма:

- має одну вершину – точку мінімуму або максимуму залежно від знака;
- вигнутий у бік більшого значення z (якщо с > 0, то «чаша» спрямована вгору, якщо с < 0, то вниз);
- нагадує параболічну антену або супутникову тарілку.

Перерізи:

$z=const$ – еліпси.

$x=const$, $y=const$ – параболи.

Симетрія: має центр симетрії в точці (0,0,0); симетричний відносно осей *x*, *y*, *z*. *Нескінченність*: продовжується нескінченно у напрямку осі z, утворюючи нескінченну чашоподібну форму.

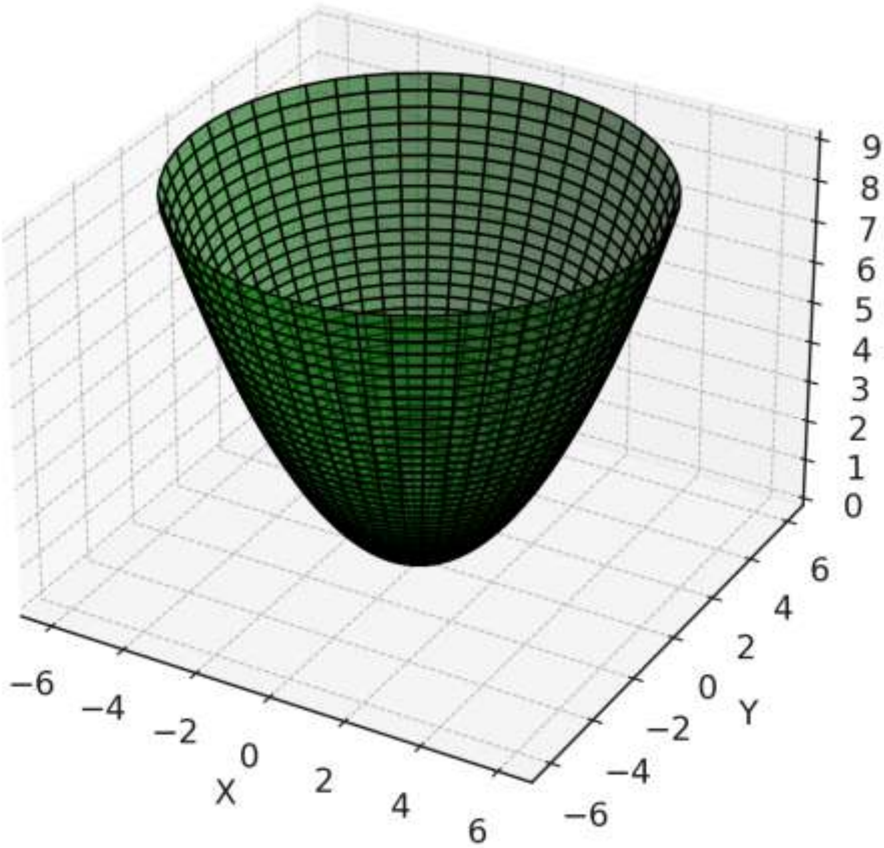

Рисунок 3.10 – Еліптичний параболоїд

Гіперболічний параболоїд («сідло»)

Гіперболічний параболоїд – це одна з найважливіших поверхонь другого порядку, що належить до класу нелінійних квадратичних поверхонь. Його називають «сідлом», оскільки форма цієї поверхні нагадує сідло коня: у двох перпендикулярних напрямах вона має протилежну кривину – одна частина загинається вгору, а інша вниз.

Рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \qquad (3.14)$$

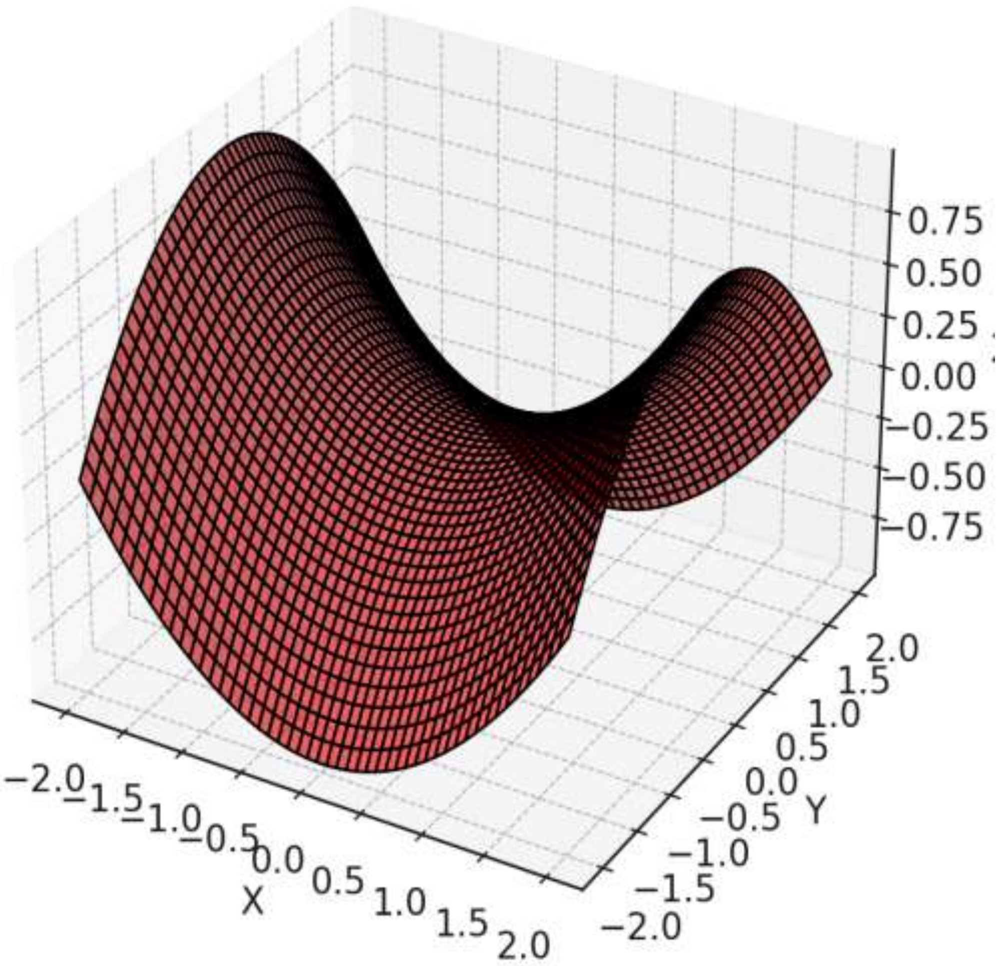

Рисунок 3.11 – Гіперболічний параболоїд

Властивості:

- центр симетрії: точка (0,0,0) є сідловою точкою, тобто місцем, де поверхня змінює свою кривину;
- несамоперетинальна поверхня: у кожному перерізі вона має або параболічну, або гіперболічну форму;

- асимптотичні напрямки: на поверхні існують лінії, уздовж яких кривина дорівнює нулю — це прямі, що визначають структуру поверхні, має два «крила», які розходяться у різні боки.

Сфера обертання – це поверхня, що утворюється під час обертання кола навколо його діаметра. Вона є частковим випадком еліпсоїда обертання, коли обидві півосі рівні між собою.

У тривимірному просторі рівняння сфери з центром у точці (x_0, y_0, z_0) та радіусом *R* має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{3.15}$$

Якщо центр сфери збігається з початком координат (0,0,0), рівняння спрощується до:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3.16}$$

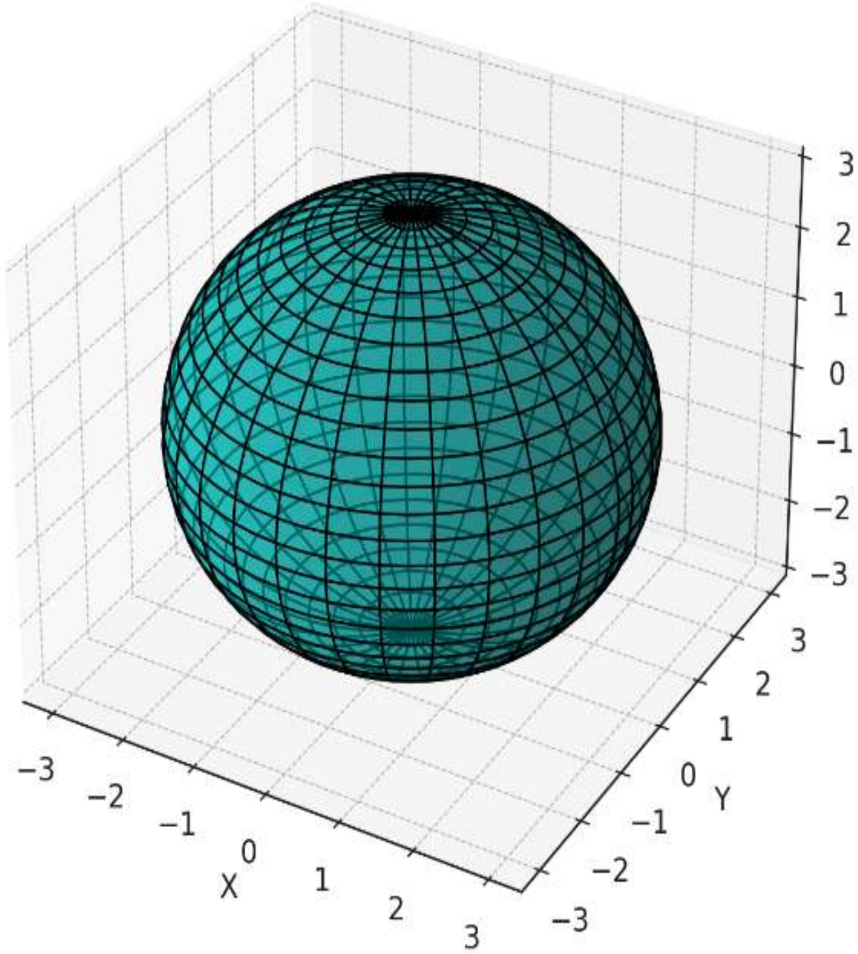

Рисунок 3.12 – Сфера обертання

Властивості сфери:

- сфера симетрична відносно будь-якої площини, що проходить через її центр;
- геодезичні лінії – найбільш короткі шляхи між двома точками на сфері є дугами великих кіл;
- будь-який переріз сфери площиною дає в перерізі коло. Якщо площина проходить через центр сфери, утворюється велике коло.

Об'єм сфери:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (3.17)$$

Площа поверхні:

$$S = 4\pi R^2 \qquad (3.18)$$

3.4 Додаткові приклади розв’язання задач

Приклад. Дано рівняння поверхні другого порядку:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z = 1.$$

1. Визначити тип цієї поверхні;
2. Знайти переріз поверхні площиною z = 0;
3. Побудувати графік цієї поверхні.

Розв'язання

1. Перетворимо рівняння:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = z$$

Це рівняння еліптичного параболоїда, оскільки змінна z знаходиться окремо і залежить від квадратичної суми x та y. Вершина параболоїда: (0,0,0). Вісь симетрії параболоїда спрямована вздовж осі z. За зростання z утворюються еліптичні перерізи.

2. Переріз площиною $z = 0$.

Підставимо $z = 0$:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$$

Це рівняння виконується лише для $x = 0$, $y = 0$, тобто в точці (0,0,0). Переріз площиною $z = 0$ дає одну точку – вершину параболоїда.

3. Побудуємо графік еліптичного параболоїда.

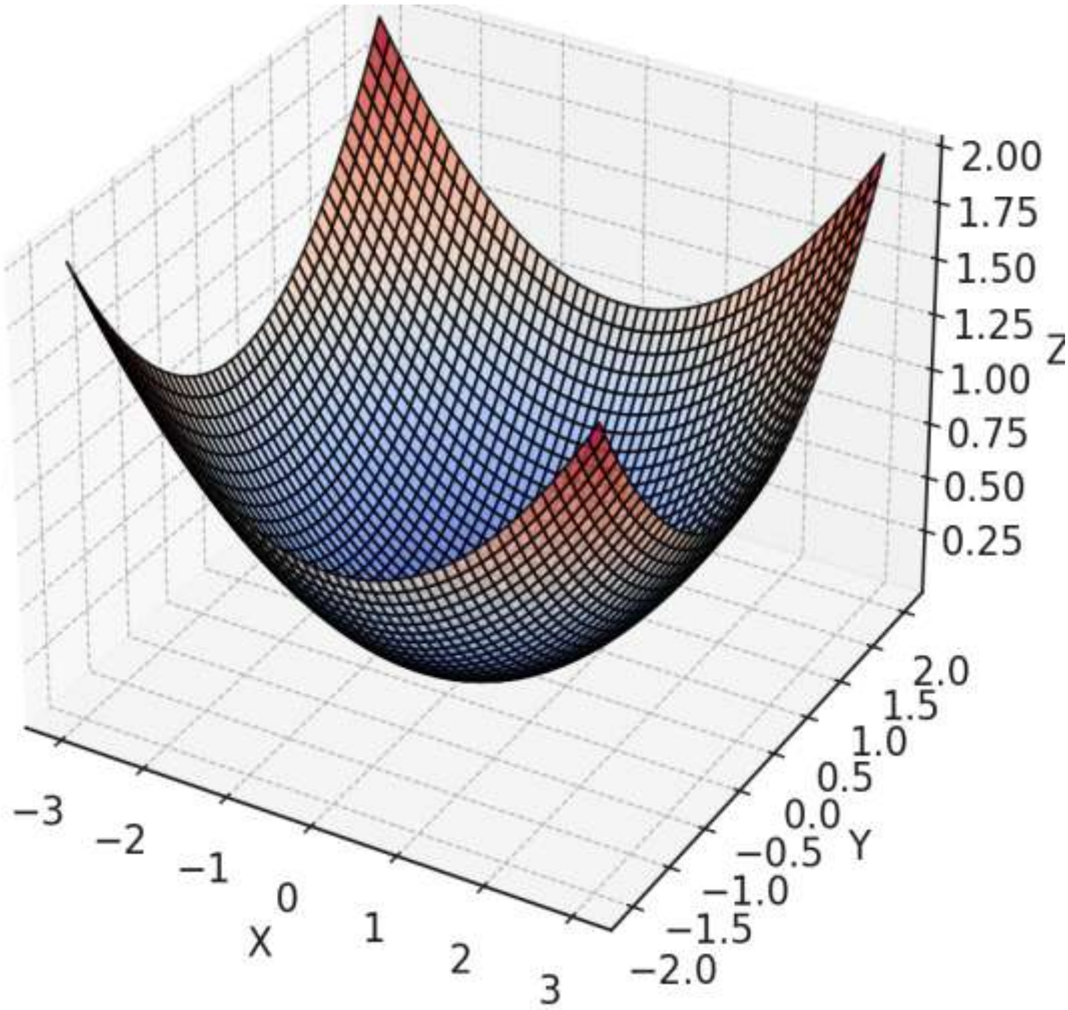

Рисунок 3.15 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$.

Приклад. Дано рівняння сфери у просторі:

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=16.$$

Визначити центр і радіус сфери.

Розв'язання

1. Визначимо центр і радіус сфери

Загальне рівняння сфери має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Порівняємо з нашим рівнянням:

$$(\text{x}-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=16.$$

Центр сфери: $C(2,-3,1)$

Радіус: $R=\sqrt{16}=4$

Відповідь: С$(2,-3,1)$, $R=4$.

Приклад. Дано рівняння сфери:

$$(\text{x}-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

і рівняння площини:

$$x+y+z=3.$$

Знайти точки перетину сфери та площини, а також побудувати графік.

Розв'язання

Записуємо рівняння у параметричній формі:
Центр сфери: $(1,-2,3)$
Радіус: $R=\sqrt{9}=3$
Рівняння площини:

$$x+y+z=3.$$

Щоб знайти перетин, підставимо $z=3-x-y$ в рівняння сфери:

$$(\text{x}-1)^2+(y+2)^2+(3-x-y)-3^2=9.$$

Спрощуємо рівняння:

$$(\text{x}-1)^2+(y+2)^2+(-x-y)^2=9,$$
$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(x^2+2xy+y^2)=9,$$
$$2x^2+2y^2+2xy-2x+4y+5=9,$$
$$2x^2+2y^2+2xy-2x+4y-4=0,$$
$$x^2+y^2+xy-x+2y-2=0.$$

Це рівняння кола, що є перерізом сфери площиною.

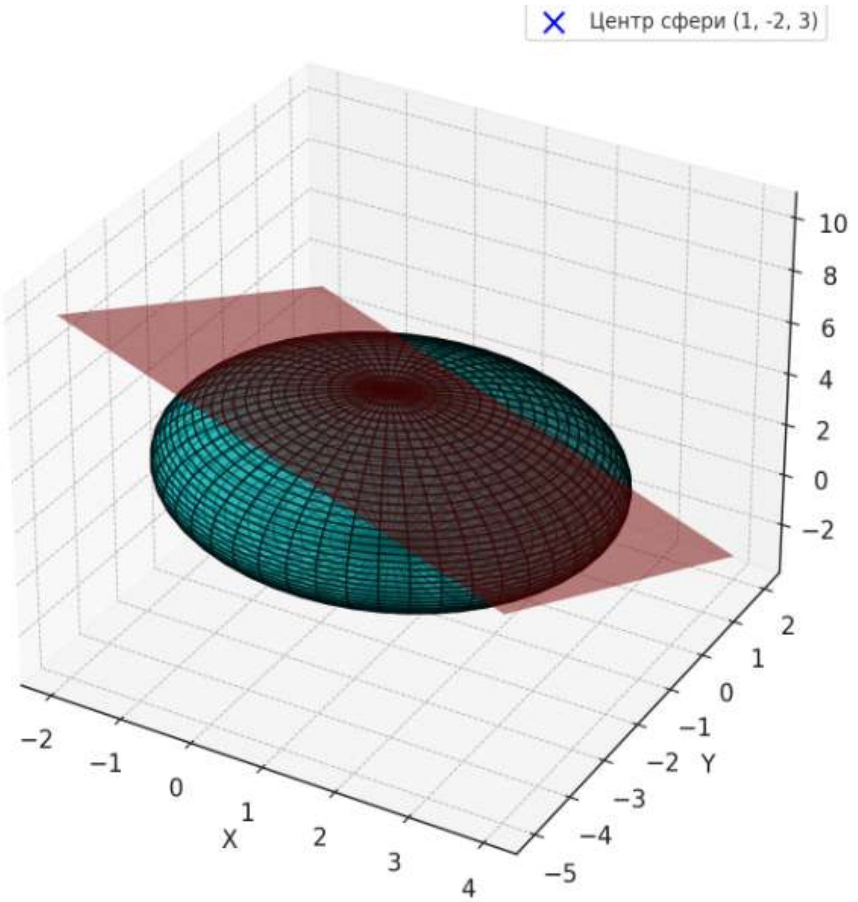

Рисунок 3.13 – Графічний розв’язок задачі

Ось графік сфери обертання (блакитний) і площини $x + y + z = 3$ (червона). Точки їхнього перетину утворюють коло на сфері.

Відповідь: $x^2 + y^2 + xy - x + 2y - 2 = 0$.

Приклад. Дано рівняння поверхні другого порядку:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

1. Визначити тип цієї поверхні;
2. Знайти переріз поверхні площиною z = 0;
3. Побудувати графік цієї поверхні.

Розв'язання

1. Рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Це однопорожнинний гіперболоїд, оскільки змінна *z* має знак «мінус». Оскільки «мінус» стоїть перед z^2, вісь гіперболоїда спрямована вздовж осі *z*; *a* = 2 – відстань по осі *x*, *b* = 3 – відстань по осі *y*, *c* = 4 – розтягнення вздовж осі *z*.

2. Щоб зрозуміти форму цієї поверхні, розглянемо перерізи площинами.

Переріз площиною $z = 0$:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Це рівняння еліпса з півосями $a = 2$, $b = 3$.

Переріз площиною $x = 0$ або $y = 0$:

$$\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Це рівняння гіперболи, що свідчить про розширення поверхні вздовж осі z.

3. Нарисувати осі координат x, y, z.

Відзначити переріз за $z = 0$ – еліпс з півосями 2 та 3.

Намітити перерізи гіперболами в площинах $x = 0$ та $y = 0$.

Плавно з'єднати лінії, щоб утворилася форма воронкоподібної поверхні.

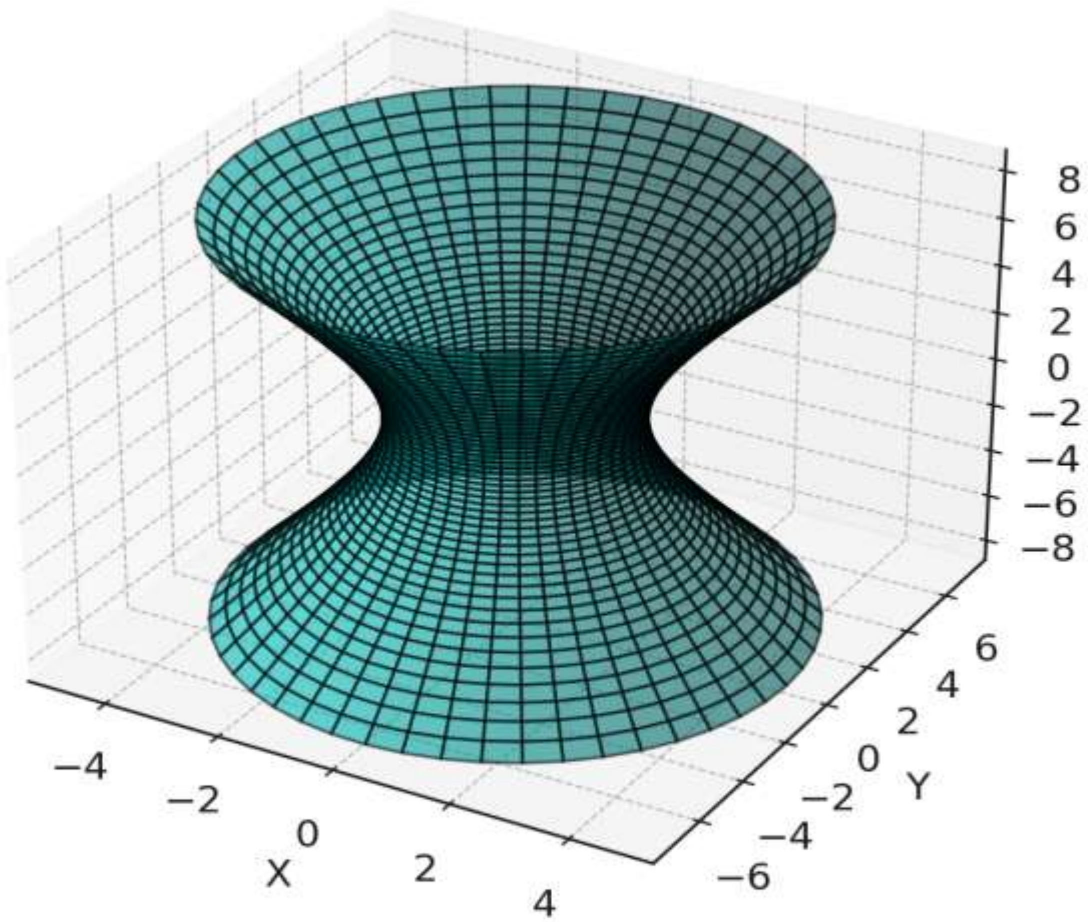

Рисунок 3.14 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$

Приклад. Визначити, яку поверхню задає рівняння:

$$x^2 = 8(y^2 + z^2).$$

Розв'язання

$$x^2 = 8(y^2 + z^2),$$
$$x^2 = 8y^2 + 8z^2,$$
$$x^2 - 8y^2 - 8z^2 = 0,$$
$$\frac{x^2}{8} - y^2 - z^2 = 0 \,\Big|\, :(-1),$$
$$-\frac{x^2}{(\sqrt{8})^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{1^2} = 0.$$

Отримаємо рівняння конуса (конічну поверхню), де $a = \sqrt{8},\ b = 1,\ c = 1$.

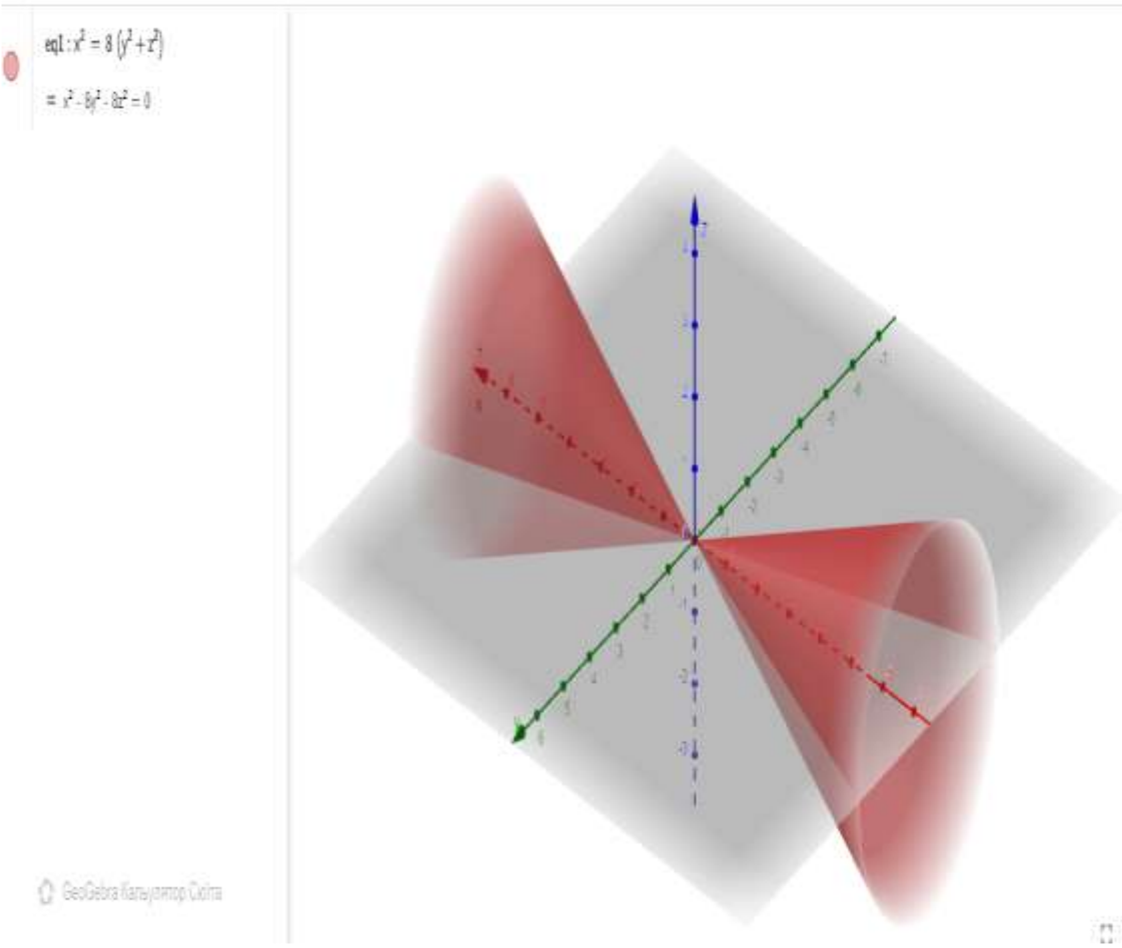

Рисунок 3.16 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: $-\frac{x^2}{(\sqrt{8})^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{1^2} = 0.$

Приклад. Визначити, яку поверхню задає рівняння

$$2x^2+3y^2-z^2=18.$$

Розв'язання

$$2x^2+3y^2-z^2=18,$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{18}=1,$$

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}-\frac{z^2}{(\sqrt{(18)})^2}=1.$$

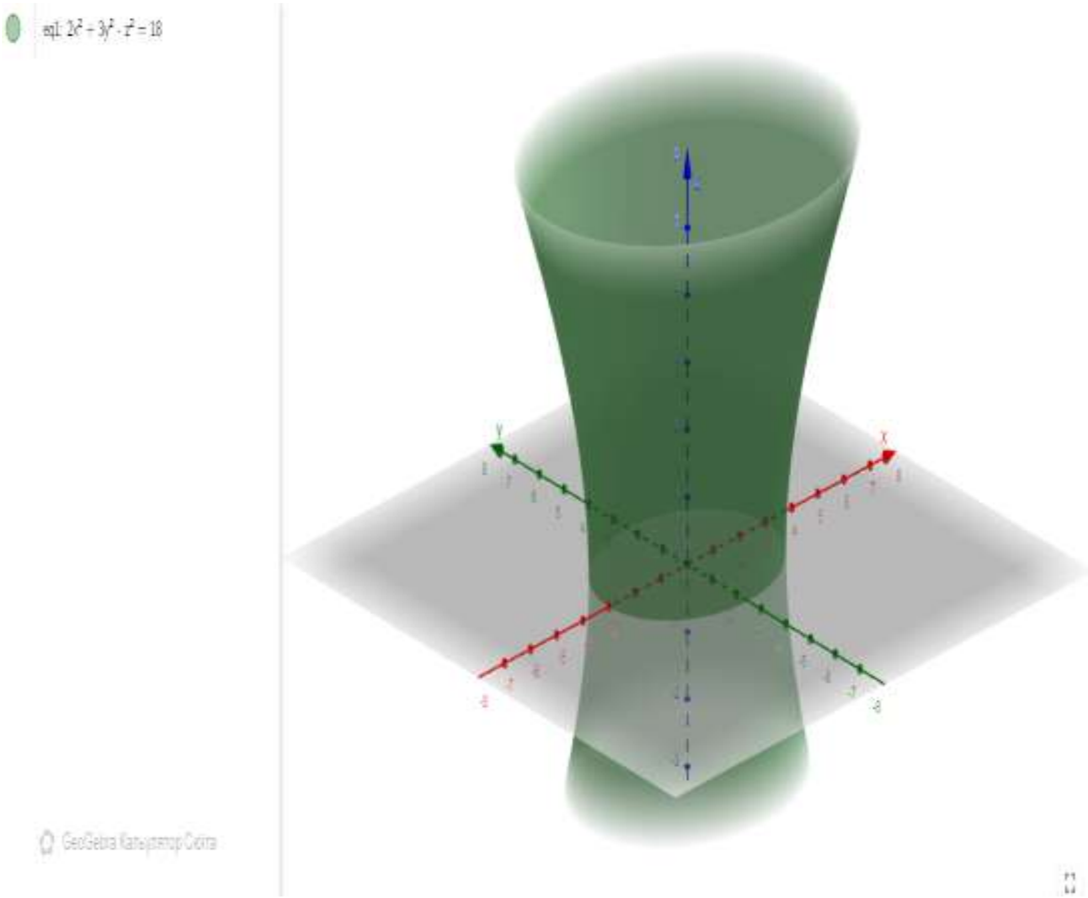

Рисунок 3.17 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: отримаємо рівняння однопорожнинного гіперболоїда, де $a=3,\ b=\sqrt{6},\ c=\sqrt{18}$.

Приклад. Визначити, яку поверхню задає рівняння:

$$3x^2+4y^2-8z^2-18x+8y+32z+23=0.$$

Розв'язання

Спочатку запишемо її рівняння у канонічному вигляді. Для цього виділимо повні квадрати відносно змінних x, y та z:

$$3x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 18x + 8y + 32z + 23 = 0,$$
$$3(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 2y + 1) - 8(z^2 - 4z + 4) - 27 - 4 + 32 + 23 = 0,$$
$$3(x-3)^2 + 4(y+1)^2 - 8(z-2)^2 = -24 \,|: 24,$$
$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{6} - \frac{(z-2)^2}{3} = -1.$$

Введемо заміну:

$$\bar{x} = x - 3,\ \bar{y} = y + 1,\ \bar{z} = z - 2.$$

Звідси канонічне рівняння:

$$\frac{\bar{x}}{8} + \frac{\bar{y}}{6} - \frac{\bar{z}}{3} = -1.$$

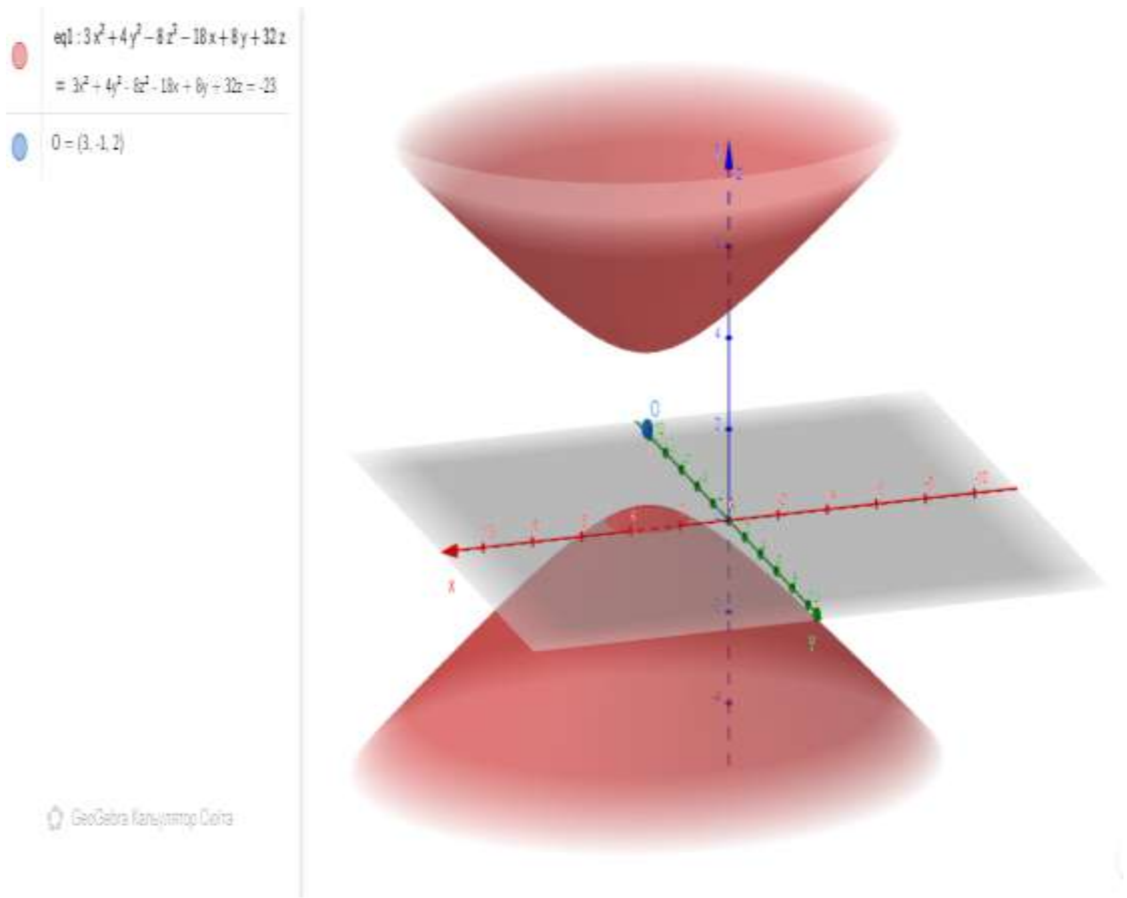

Рисунок 3.18 – Графічний розв’язок задачі

Відповідь: отримали двопорожнинний гіперболоїд з центром у точці $\bar{O}$(3; -1; 2).

Приклад. Дано рівняння поверхні:

$$y^2 = 4x.$$

1. Визначити тип цієї поверхні.
2. Дослідити її геометричні властивості.
3. Побудувати її графік.

Розв'язання

1. Це рівняння не містить змінної *zz*, тобто поверхня не змінюється вздовж осі *z*. Це означає, що рівняння описує параболічний циліндр із напрямною параболою $y^2 = 4x$, яка лежить у площині *xy*.

2. Параметр параболи – *p = 1*, отже, фокус параболи знаходиться у точці *(1,0,0)*. Вісь симетрії – вздовж осі *xx*, поверхня нескінченна вздовж осі *z*.

Перерізи поверхні
Горизонтальний переріз (за *z* = *const*) – парабола.
Вертикальний переріз (за $x = const$) – дві паралельні прямі.

3. Побудова графіка

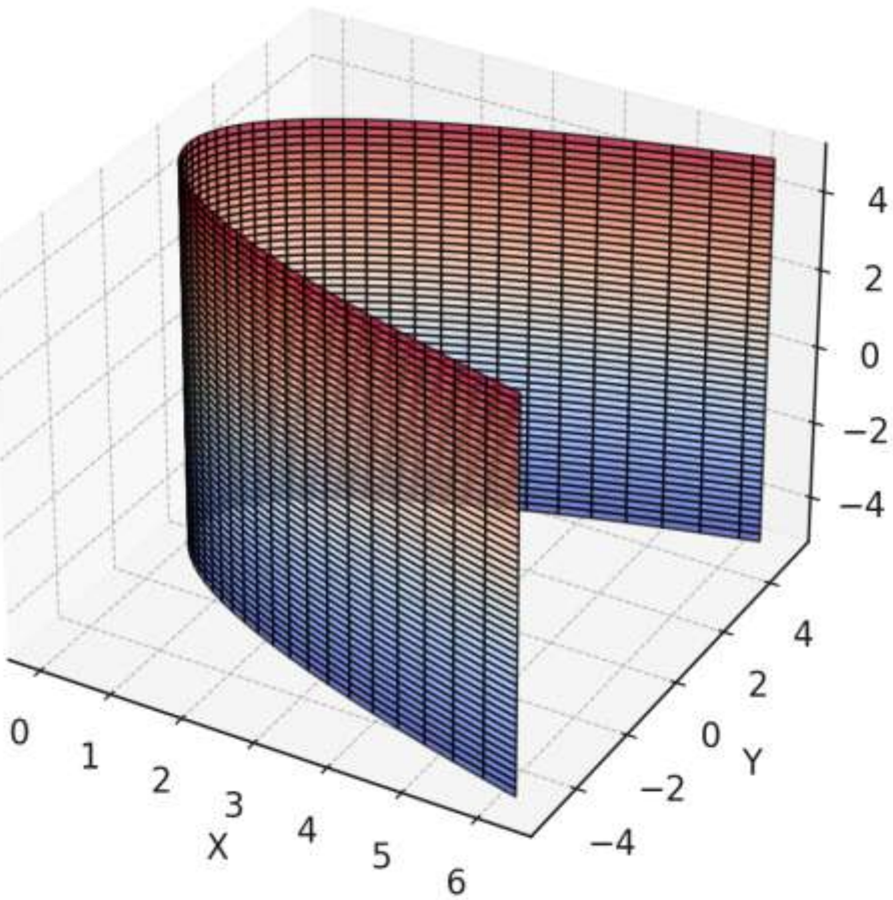

Рисунок 3.19 – Графічний розв’язок задачі

Приклад. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні:

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

у точці A (2,3,3).

Розв'язання

1. Обчислимо частинні похідні функції:

$$f(x, \text{y}) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

Частинна похідна за x:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}.$$

Частинна похідна за y:

$$\frac{df}{dy} = \frac{2y}{9}.$$

2. Обчислимо значення похідних у точці (2,3):

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{(2,3)} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\left.\frac{df}{dy}\right|_{(2,3)} = \frac{2(3)}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

3. Запишемо рівняння дотичної площини.
Формула для дотичної площини:

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

Підставляємо значення:

$$z - 3 = 1(x - 2) + \frac{2}{3}(y - 3).$$

Розкриваємо дужки:

$$z - 3 = x - 2 + \frac{2}{3}y - 2,$$

$$z = x + \frac{2}{3}y - 1.$$

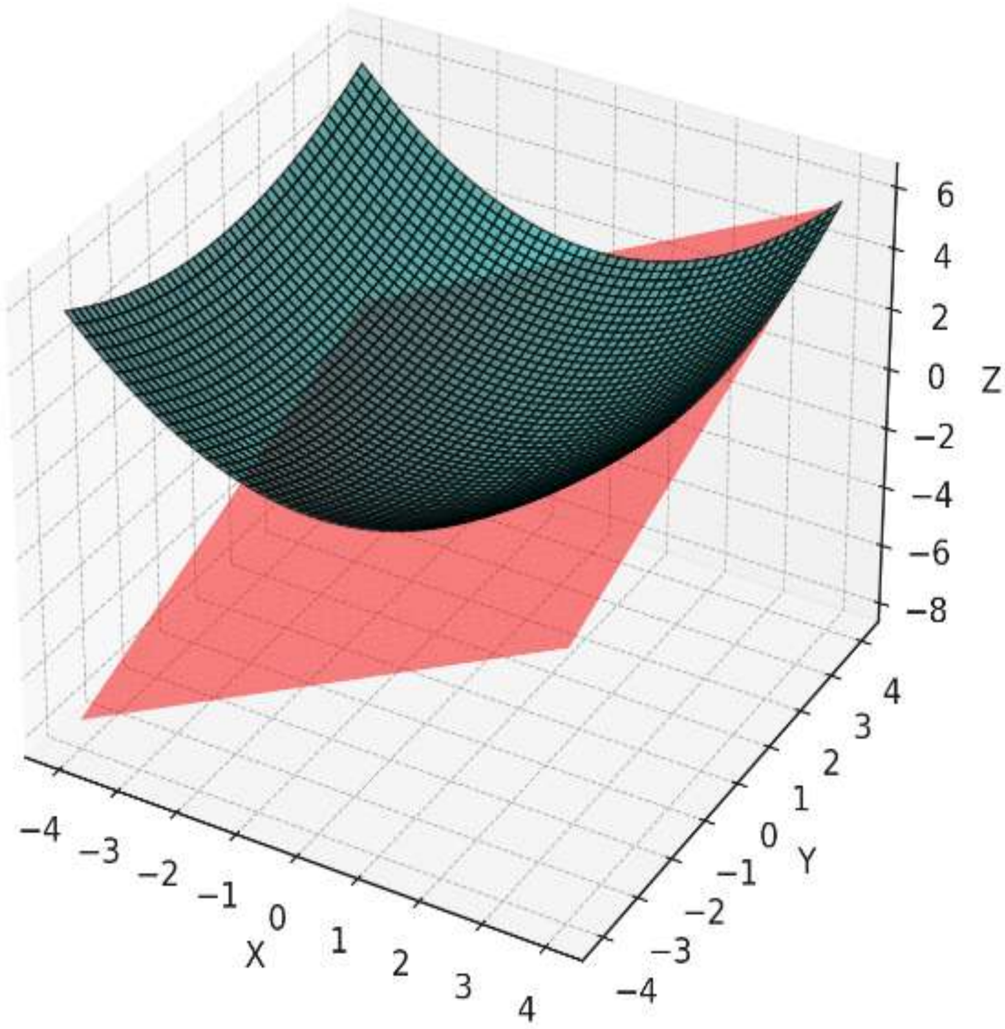

Рисунок 3.20 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: $z = x + \frac{2}{3}y - 1.$

Приклад. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

у точці (2,3,5).

Розв'язання

1. Формула дотичної площини до поверхні

Якщо поверхня задана рівнянням:

$$F(x, y, z) = 0,$$

то рівняння дотичної площини в точці (x_0, y_0, z_0) має вигляд:

$$f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0.$$

2. Знайдемо частинні похідні функції.
Нехай

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}-1.$$

Частинна похідна за x:

$$\frac{df}{dx}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}.$$

Частинна похідна за y:

$$\frac{df}{dy}=\frac{2y}{9}.$$

Частинна похідна за z:

$$\frac{df}{dz}=-\frac{2z}{16}=-\frac{z}{8}.$$

2. Обчислимо значення похідних у точці (2,3,5).

$$f_x(2,3,5)=\frac{2}{2}=1,$$
$$f_y(2,3,5)=\frac{2(3)}{9}=\frac{2}{3},$$
$$f_z(2,3,5)=-\frac{5}{8}.$$

3. Запишемо рівняння дотичної площини:

$$1(x-2)+\frac{2}{3}(y-3)-\frac{5}{8}(z-5)=0,$$
$$x-2+\frac{2}{3}y-2-\frac{5}{8}z+\frac{25}{8}=0,$$
$$x+\frac{2}{3}y-\frac{5}{8}z+\frac{9}{8}=0.$$

Графіком буде гіперболоїда однопопорожнинна $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ (бірюзова поверхня), разом із дотичною площиною в точці (2,3,5) (червона площина).

Точка дотику позначена чорним маркером.

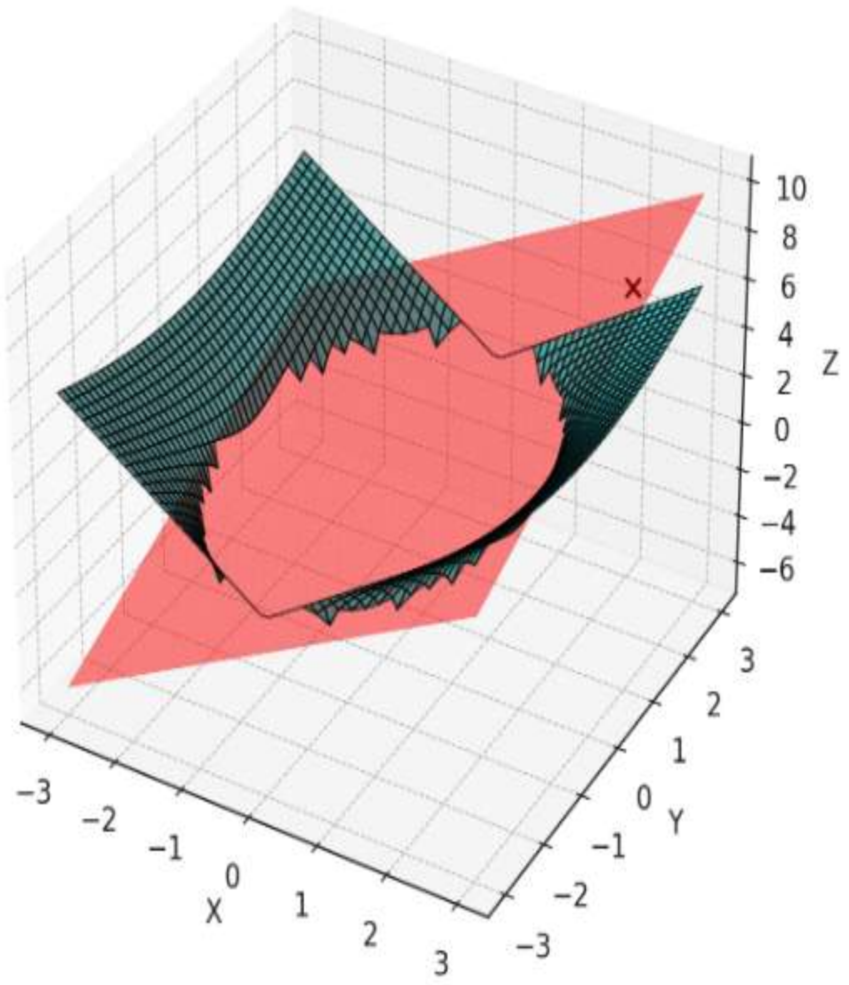

Рисунок 3.21 – Графічний розв'язок задачі

Відповідь: $x+\frac{2}{3}y-\frac{5}{8}z+\frac{9}{8}=0$.

Тест для самоперевірки

Частина 1: Теоретичні питання (одна правильна відповідь)

1. *Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:*

а) $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$;

б) $Ax+By+C=0$;

в) $y=ax+b$;

г) $x^2+y^2=R^2$.

2. *Яке рівняння описує коло?*

а) $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$;

б) $x^2+y^2=R^2$;

в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$;

г) $y^2=4ax$.

3. *Яке з наведених рівнянь відповідає еліпсу?*

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$;

б) $x^2+y^2=R^2$;

в) $x^2-y^2=R^2$;

г) $y^2=4ax$.

4. *Для якої кривої другого порядку рівняння має вигляд:* $y^2=4ax$?

а) парабола;
б) гіпербола;
в) еліпс;
г) коло.

5. *Як називається множина точок, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок є сталою?*

а) парабола;
б) гіпербола;
в) еліпс;
г) коло.

6. *Яке загальне рівняння має поверхня другого порядку?*

а) $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$;

б) $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$;

в) $Ax+By+Cz+D=0$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

7. Яка з наведених поверхонь є еліпсоїдом?

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

г) $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$.

8. *Яка поверхня другого порядку описується рівнянням:* $z = x^2 + y^2$?

а) гіперболоїд,
б) еліпсоїд,
в) параболоїд,
г) конус.

9. *Вкажіть назву поверхні, що задана рівнянням:*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z.$$

а) конус;
б) еліптичний параболоїд;
в) гіперболічний параболоїд;
г) еліпсоїд.

10. Записати рівняння лінії: $\rho = \frac{3}{1 - 2\cos\varphi}$ *в декартовій системі координат.*

а) $\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$;

б) $\frac{(x+2)^2}{1} + \frac{y^2}{3} = 1$;

в) $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$;

г) $\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{y^2}{3} = 1$.

11. *Яке з наведених рівнянь відповідає однопорожнинному гіперболоїду?*

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

в) $x^2+y^2+z^2=R^2$;

г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

12. *Які з наведених рівнянь описують гіперболу?*

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b}=1$;

б) $x^2+y^2=R^2$;

в) $x^2-y^2=1$;

г) $y^2=4ax$.

Частина 2: Встановлення відповідності

1. Зіставте рівняння кривих із їхніми назвами:

№ рівняння	***Рівняння***	***Назва кривої***
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$	а) коло
2	$y^2=4ax$	б) еліпс
3	$x^2+y^2=R^2$	в) гіпербола
4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b}=1$	г) парабола

2. Зіставте рівняння поверхонь з їхніми назвами:

№ рівняння	***Рівняння***	***Назва кривої***
1	$x^2+y^2+z^2=R^2$	а) однопорожнинний гіперболоїд
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	б) двопорожнинний гіперболоїд
3	$z=x^2+y^2$	в) еліпсоїд
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	г) параболоїд

Частина 3: Відкрите запитання

1. Поясніть, як геометрично відрізняються однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди?
2. Наведіть приклади реальних об'єктів, форма яких наближена до поверхонь другого порядку.
3. Опишіть основні властивості еліпса та наведіть приклад його використання у природі чи техніці.
4. У чому геометрична відмінність між гіперболою та параболою?

Частина 4: Завдання на перетворення рівнянь

Ці завдання перевірять вміння зводити рівняння кривих до канонічного вигляду.

1. Зведіть рівняння еліпса до канонічного вигляду та знайдіть його центр, півосі та фокуси:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y - 11 = 0.$$

2. Зведіть рівняння кола до стандартного вигляду та визначте його центр і радіус:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0.$$

3. Для гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$ відомо, що її ексцентриситет дорівнює 2.

Знайдіть співвідношення між a і b.

Питання для самоперевірки

1. Що називається колом?
2. Який вигляд має рівняння кола з центром в точці $O(a;b)$ і радіусом r?
3. Які існують випадки взаємного розташування точки $M_0(x_0;y_0)$ і кола $x^2+y^2=r^2$ (три випадки)?
4. Який вигляд має дотична до кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ в точці $M_0(x_0;y_0)$?
5. Який вигляд має в прямокутній декартовій системі координат рівняння кола з центром в точці C і радіусом r в кожному з таких випадків:
   а) $C(2;-5),\ r=3$;
   б) $C(0;0),\ r=1$?
6. Чи лежить: а) точка $M(\sqrt{21};3)$ на колі $x^2+y^2=30$;
   б) точка $M(3;5)$ на колі $x^2-2x-y+y^2=0$?
7. Яке будемо мати геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння:
   а) $y=\sqrt{64-x^2}$;
   б) $y=-\sqrt{64-x^2}$?
8. Що називається еліпсом?
9. Чому в означенні еліпса потрібно, щоб $a>c$?
   Яку одержимо криву, якщо: а) $a=c$ *;б)* $a<c$ *?*
10. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?
11. Що називається фокусами, вершинами, осями еліпса?
12. Що називається ексцентриситетом еліпса? Чому він дорівнює?
13. Що називається фокальними радіусами-векторами точки *M(x;y)* еліпса? Якими формулами вони виражаються?
14. Які існують випадки взаємного розташування точки $M_0(x_0;y_0)$ і еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$? (три випадки)
15. Що називається директрисами еліпса? Який вигляд мають їх рівняння?
16. Що називається дотичною до еліпса? Який вигляд має рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точці $M_0(x_0;y_0)$?
17. Що називається гіперболою?
18. Чому в означенні гіперболи потрібно, щоб $c>a$?
    Яку одержимо криву, якщо: а) $a=c$, б) $a<c$?
19. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?

20. Що називається фокусами, дійсними і уявними вершинами, дійсною і уявною віссю гіперболи?

21. Що називається ексцентриситетом гіперболи? Чому він дорівнює?

22. Що називається фокальними радіусами-векторами точки *M (x: y)* гіперболи? Якими формулами вони виражаються?

23. Що називається директрисами гіперболи? Який вигляд мають їх рівняння?

24. Що називається асимптотами гіперболи? Який вигляд мають їх рівняння?

25. Чи перетинають асимптоти гіперболу?

26. Чи існують на гіперболі точки *M:*

а) рівновіддалені від фокусів F_1 і F_2;

б) рівновіддалені від директрис d_1 і d_2;

в) такі, що задовольняють умову $2F_1M = MF_2$?

27. В якому випадку гіпербола називається рівносторонньою? В якому випадку дві гіперболи називаються спряженими? Які вони мають асимптоти?

28. Який вигляд має рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M_0(x_0; y_0)$

29. Що називається параболою?

30. Чому в означенні параболи потрібно, щоб фокус F не лежав на директрисі? Яку одержимо криву, якщо припустимо, що F належить на директрисі?

31. Який вигляд має канонічне рівняння параболи?

32. Що називається директрисою параболи? Який вигляд має її рівняння?

33. Який вигляд має рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$ в точці $M_0(x_0; y_0)$?

34. Що називається ексцентриситетом параболи? Чому він дорівнює?

35. Як задаються рівняння еліпса, гіперболи, параболи в полярних координатах?

36. Який вигляд має загальне рівняння лінії другого порядку?

37. Які потрібно виконати дії для того, щоб звести загальне рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду?

38. Який вигляд мають формули повороту і формули паралельного переносу прямокутної декартової системи?

39. Яка точка називається центром лінії другого порядку? Яка необхідна і достатня умова того, щоб точка була центром лінії другого порядку?

40. Які лінії називаються центральними, нецентральними? Яка умова того, що лінія буде центральною? Наведіть приклади центральних і нецентральних ліній.

41. Який напрямок називається асимптотичним?

42. Які існують типи ліній другого порядку? (три основних типи)

43. Напишіть загальний вигляд рівняння кривої, для якої осі координат мають асимптотичні напрямки. До якого типу належить ця крива?

44. Яка необхідна і достатня умова того, що:

а) вісь *Ox* має асимптотичний напрямок;

б) вісь *Oy* має асимптотичний напрямок?

45. Яка точка лінії другого порядку називається звичайною точкою?

46. Що називається дотичною до лінії другого порядку?

47. Який вигляд мають рівняння дотичних до ліній другого порядку, заданих канонічними рівняннями? (еліпс, гіпербола, парабола)

48. Які мають цікаві геометричні властивості дотичні до еліпса, гіперболи, параболи?

49. Що називається діаметром лінії другого порядку?

50.Чому в означенні діаметра передбачається, що вектор $\vec{p}(p_1; p_2)$ не має асимптотичного напрямку?

51. Які властивості мають діаметри лінії другого порядку?

52. Які діаметри лінії другого порядку називаються спряженими?

53. Чи має парабола спряжені діаметри?

54. Який напрямок називається головним?

55. Як обчислюються кутові коефіцієнти головних напрямків?

56. В якому випадку діаметр лінії другого порядку називається головним?

57. Скільки має головних діаметрів центральна лінія другого порядку, відмінна від кола? Скільки має головних діаметрів нецентральна лінія другого порядку?

58. Для яких кривих асимптота одночасно є головним діаметром?

59. Скільки осей симетрії має еліпс, гіпербола, парабола?

60. В чому полягає «Ідея класифікації» ліній другого порядку?

61. Скільки існує типів ліній другого порядку? Назвіть їх.

62. Як визначається прямокутна і полярна система координат?

63. Що називається геометричним місцем точок?

64. Який вигляд мають параметричні рівняння лінії?

65. Що називають параметром лінії, заданої параметричним рівнянням?

66. Що таке поверхні другого порядку?

67. Яка поверхня називається циліндричною?

68. Запишіть канонічні рівняння еліптичного циліндра.

69. Запишіть канонічні рівняння гіперболічного циліндра.

70. Запишіть канонічні рівняння параболічного циліндра.

71. Яка поверхня називається конічною?

72. Запишіть канонічні рівняння кругового конуса

73.Запишіть канонічні рівняння еліптичного конуса.

74. Що називається сферою?

75. Запишіть канонічне рівняння сфери.

76. Яке рівняння має сфера з центром в початку координат?

77. Наведіть канонічне рівняння еліпсоїда.

78. Наведіть канонічні рівняння однопорожнинного гіперболоїда.

79. Наведіть канонічні рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

80. Наведіть канонічні рівняння еліптичного параболоїда.

81. Наведіть канонічні рівняння еліптичного гіперболічного параболоїда

82. Який алгоритм визначення вигляду поверхні за рівнянням другого порядку?

ЛІТЕРАТУРА

1. Петрук В. А., Прозор О. П., Клєопа І. А. Вища математика з прикладними задачами. Ч.2 : навчальний посібник. Вінниця, ВНТУ, 2020. 132 с.

2. Абрамчук І. В., Барковська А. А., Дереч В. Д. Методи розв`язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. ВНТУ, 2023. 103 с.

3. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 2: електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. Вінниця : ВНТУ, 2023. 102 с.

4. Кирилащук С. А., Бондаренко З. В., Клочко В. І. Вища математика. Частина 3. Індивідуальні завдання: електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. Вінниця : ВНТУ 2021. 120 с.

5. Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. Окремі розділи спецкурсу вищої математики. Частина 2 : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. Вінниця : ВНТУ, 2023. 119 с.

6. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч.посіб. К. : ІгнатексУкраїна, 2013. 648 с.

7. Вища математика: підручник : у 2 кн. Кн. 2 / Кулініч Г. Л. та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. К. : Либідь, 2003. 368 с.

8. Числові та функціональні ряди. Ряди Фур’є. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / Укладачі : М. І. Чернєй, Г. К. Новикова, Н. Л. Денисенко. К. : НТУУ «КПІ», 2016. 62 с.

9. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. 2 / за ред. проф. Ю. К. Рудавського. Львів : Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2003. 232 с.

10. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навч.посіб. Ч. 3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі. К. : Книги України ЛТД, 2009. 400 с.

11. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика : підручник. Д. : Видавництво Сталкер, 2003. 496 с.

12. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій : підручник / Іващенко В. П. та ін. Дніпропетровськ, 2013. 425 с.

13. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. К. : Ігнатекс-Україна, 2018. 648 с.

Електронне навчальне видання

Ірина Анатоліївна Клєопа
Оксана Іванівна Тютюнник
Альона Анатоліївна Коломієць

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *І. Клєопа*

Редактор *Т.Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 21.11.2025 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2025-169.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.