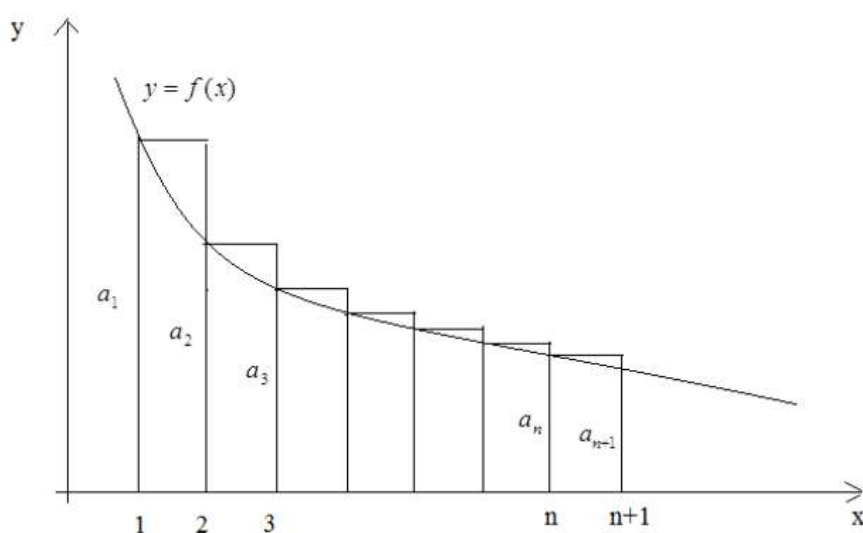


Клочко В. І., Коломієць А. А., Тютюнник О. І., Дубова Н. Б.

ТЕОРІЯ РЯДІВ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Клочко В. І., Коломієць А. А., Тютюнник О. І., Дубова Н. Б.

ТЕОРІЯ РЯДІВ

Електронний навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2026

УДК 517.9(075.8)

Т33

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 8 від 23.12.2025 р.)

Автори:

В. І. Ключко, А. А. Коломієць, О. І. Тютюнник, Н. Б. Дубова

Рецензенти:

С. М. Бак, доктор фізико-математичних наук, професор

О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор

М. В. Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Теорія рядів : навчальний посібник [Електронний ресурс] /
Т33 Ключко В. І., Коломієць А. А., Тютюнник О. І., Дубова Н. Б. – Вінниця :
ВНТУ, 2026. – (PDF, 184 с.)

В навчальному посібнику подано теоретичні відомості з теорії рядів, методи і алгоритми, які використовуються під час дослідження числових рядів на збіжність, встановлення інтервалу збіжності степеневих рядів, розкладанні функцій у ряди Тейлора та Маклорена. Розглянуті методи проілюстровано конкретними прикладами. Наведено варіанти завдань для самостійної роботи здобувачів вищої освіти, питання для самоконтролю.

Навчальний посібник призначено для здобувачів вищої освіти усіх спеціальностей.

УДК 517.9(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 ЧИСЛОВІ РЯДИ.....	6
1.1 Основні поняття	6
1.2 Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами	15
1.2.1 Ряд геометричної прогресії	16
1.2.2 Інтегральна ознака Коші	18
1.2.3 Ознака порівняння	23
1.2.4 Гранична форма ознаки порівняння.....	25
1.2.5 Ознака Д'Аламбера.....	28
1.2.6 Радикальна ознака Коші	34
1.3 Знакозмінні ряди	38
1.3.1 Теорема Лейбніца.....	38
1.3.2 Абсолютна та умовна збіжності	45
1.4 Підсумовування рядів	50
2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	54
2.1 Основні поняття	54
2.2 Алгоритм обчислення області збіжності функціонального ряду.....	60
2.3 Степеневі ряди.....	60
2.3.1 Основні поняття	60
2.3.2 Знаходження інтервалу збіжності	63
2.4 Ряди Тейлора і Маклорена	75
2.4.1 Основні поняття	75
2.4.2 Розвинення в ряд Маклорена деяких функцій	82
2.5 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень	88
3 РЯДИ ФУР'Є	98
3.1 Гармоніки	98
3.2 Розвинення функцій в ряд Фур'є за ортогональними системами функцій.....	99
3.3 Умови розвинення функції в тригонометричні ряди Фур'є	103
3.4 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є періодичної функції.....	106
3.5 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є 2Т-періодичних функцій.....	107
3.6 Розклад в ряд Фур'є неперіодичних функцій.....	115
3.7 Ряд Фур'є в комплексній формі. Інтеграл Фур'є	125
4 ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ.....	132
5 Питання для самоперевірки	138

6 ОСНОВНІ ПІДКАЗКИ ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ	145
7 ТЕСТИ	143
ВІДПОВІДІ ДО ТЕСТІВ.....	157
8 ПРИКЛАД ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	158
9 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....	161
10 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ	167
ЛІТЕРАТУРА.....	183

ВСТУП

Посібник розроблено спеціально для здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей і має на меті надати ґрунтовні знання та практичні навички з однієї з фундаментальних галузей математичного аналізу.

Теорія рядів є невід’ємною частиною сучасної науки та інженерії. Вона дозволяє розкласти складні функції на більш прості доданки, що значно спрощує їх аналіз, обчислення та застосування у різноманітних технічних задачах. Вивчення теорії рядів допоможе вам краще зрозуміти принципи роботи багатьох алгоритмів, що використовуються в обробці сигналів, теорії управління, обчислювальній фізиці та інших інженерних дисциплінах.

Змістовий матеріал навчального посібника дає можливість ознайомитися з основними поняттями: числовими та функціональними рядами, їх збіжністю, степеневими рядами та рядами Фур’є. Особлива увага приділяється практичному застосуванню здобутих знань для вирішення інженерних проблем.

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

1 Основні поняття.

Нехай задана нескінченна послідовність чисел, загальний член якої є відомою функцією натурального аргументу, записаного у вигляді суми:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1.1)$$

Означення

Числовим рядом називають вираз (1.1), а числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідно – першим, другим, n -им членами ряду.

Зауваження (!) Ряди також позначають

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ і т. д.,}$$

де u_n, v_n, c_n – n -ті члени рядів.

Приклад. Записати три перших члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2 + 1}$.

Розв'язування.

Якщо $n=1$, то $a_1 = \frac{5}{2}$.

Якщо $n=2$, то $a_2 = \frac{5^2}{2^2 + 1} = 5$.

Якщо $n=3$, то $a_3 = \frac{5^3}{3^2 + 1} = \frac{125}{10}$.

Надалі постає питання про відшукування суми ряду.

Справжньої суми числового ряду існувати не може, тому що доданків нескінченна множина, але певна сума числового ряду існує. Для побудови відповідного означення розглянемо так звані частинні суми ряду.

Розглянемо частинні суми:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Означення.

n -ою **частинною сумою ряду** називається сума скінченного числа n -перших членів ряду

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n . \quad (1.2)$$

Частинні суми ряду $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ утворюють числову послідовність $\{S_n\}$.

Означення.

Ряд називається **збіжним**, якщо існує кінцева границя частинної суми, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ і S називають **сумою ряду** (1.3)

Означення.

Якщо границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує, то кажуть, що для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суми не існує, отже ряд є **розбіжним**.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

Розв'язування.

Заданий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ за $n \rightarrow \infty$ має вигляд: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1$.

Запишемо частинні суми $S_1 = a_1 = 1$,

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1,$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

Тоді границі частинних сум будуть: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2k} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2k+1} = 1$.

Оскільки послідовність частинних сум не має сталої границі, то ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$.

Розв'язування.

Знайдемо суму n членів ряду. Для цього розкладемо дріб на прості дроби

$$\frac{5}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

та знайдемо коефіцієнти A і B : $5 = (A+B)n + A \rightarrow A=5; \quad B=-5$.

Тоді ряд має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

Знайдемо частинні суми $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right) = 5$.

Тобто ряд збігається, оскільки його сума дорівнює 5.

Сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається границя S послідовності його часткових сум $\{S_n\}$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (1.4)$$

Узагальнимо обчислення суми ряду.

Приклад. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^2 + pn + q}$, де A, p, q – цілі числа.

Розв'язування.

За умовою задачі

$$a_n = \frac{A}{n^2 + pn + q}.$$

Якщо, корені знаменника відрізняються на ціле число, тобто $n^2 + pn + q = (n + a)(n + a + k)$, де k – натуральне число, то члени послідовності частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ легко знайти, оскільки у виразі $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ багато доданків знищується.

Подамо загальний елемент ряду у вигляді елементарних дробових виразів:

$$\frac{A}{n^2 + pn + q} = \frac{1}{k} \left(\frac{A}{n + a} - \frac{B}{n + a + k} \right),$$

і запишемо декілька членів ряду, щоб було видно, які доданки знищуються під час обчислення часткових сум ряду.

Знаходимо n -у часткову суму ряду: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, скоротивши відповідні доданки.

Обчислюємо суму ряду за формулою (1.4)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

і запишемо відповідь.

Приклад. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 5n + 4}.$$

Розв'язування.

Корені знаменника $n = -1$ і $n = -4$ відрізняються на ціле число, тобто $n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n + 1 + 3)$. Отже, члени послідовності часткових сум ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ легко знайти, оскільки у виразі $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, багато доданків знищується.

Розкладемо загальний елемент ряду на елементарні дробі:

$$a_n = \frac{72}{n^2 + 5n + 4} = \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}$$

і запишемо декілька членів ряду:

$$a_1 = \frac{24}{2} - \frac{24}{5}, \quad a_2 = \frac{24}{3} - \frac{24}{6}, \quad a_3 = \frac{24}{4} - \frac{24}{7},$$

$$a_4 = \frac{24}{5} - \frac{24}{8}, \quad a_5 = \frac{24}{6} - \frac{24}{9}, \quad a_6 = \frac{24}{7} - \frac{24}{10},$$

.....

$$a_{n-5} \frac{24}{n-4} - \frac{24}{n-1}, \quad a_{n-4} \frac{24}{n-3} - \frac{24}{n},$$

$$a_{n-3} \frac{24}{n-2} - \frac{24}{n+1}, \quad a_{n-2} \frac{24}{n-1} - \frac{24}{n+2},$$

$$a_{n-1} \frac{24}{n} - \frac{24}{n+3}, \quad a_n \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}.$$

Скорочуємо всі доданки, які можна, знаходимо S_n частинну суму ряду:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{24}{2} + \frac{24}{3} + \frac{24}{4} - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4} = \\ &= 26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4}. \end{aligned}$$

Знаходимо суму ряду за формулою (1.4):

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(26 - \frac{24}{n+2} - \frac{24}{n+3} - \frac{24}{n+4} \right) = 26.$$

Відповідь. $S = 26$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти суму ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 - 5n + 6}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2 + 5n - 6}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 + 3n}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2 + 8n - 5}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2 - 8n - 3}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n(n+1)(n+2)}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$

Відповідь. 1. $S = 2$; 2. $S = 1$; 3. $S = 2$; 4. $S = 2$; 5. $S = 11$;
6. $S = 23$; 7. $S = 1$; 8. $S = 4$; 9. $S = 2$; 10. $S = 1$.

Нехай маємо нескінченний ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$

n -а часткова сума ряду S_n – це сума перших n членів.

n -й залишок ряду – це ряд, який утворюється шляхом відкидання перших n членів початкового ряду.

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots) = S_n + R_n$$

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$$

Отже, R_n – **n -й залишок ряду**, тобто це сума всіх членів, що йдуть після n -го члена

Теорема. Якщо ряд збігається, то n -й залишок прямує до нуля (за $n \rightarrow \infty$).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n$$

Позначимо $S = S_n + R_n$ так:

$$R_n = S - S_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S \pm S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

Зауваження. Якщо суму ряду точно обчислити не можливо, то цю суму обчислюємо наближено. За найближче значення n -ї частини суми. Абсолютна похибка $|\delta| = |R_n|$, якщо $n \rightarrow \infty$ похибка $\delta \rightarrow 0$.

Властивості рядів.

Властивість 1.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається з сумою S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ також збігається,

де k – довільне число і його сума дорівнює kS .

Властивість 2.

Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються, і їх суми дорівнюють S_1 і S_2

відповідно, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$, причому сума дорівнює $S_1 \pm S_2$.

Властивість 3.

Якщо до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ додати чи відняти кінцеве число членів, то одержаний

ряд і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ одночасно збігаються чи розбігаються.

Знаходження частинної суми і її границі для довільного ряду задача нелегка. Тому для з'ясування збіжності ряду застосовують ознаки збіжності.

Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доведення.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ (за $n \rightarrow \infty$ і $(n-1) \rightarrow \infty$). Але $u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1}$ за умови, що $n > 1$,

маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Зауваження. Ця ознака є лише необхідною ознакою збіжності ряду, оскільки обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне. Це видно із прикладу гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним, хоча $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Невиконання необхідної ознаки збіжності ряду є достатньою ознакою його розбіжності.

Достатня умова розбіжності ряду.

Теорема (достатня ознака розбіжності).

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ за $n \rightarrow \infty$, то ряд **розбіжний**.

Доведення.

Дійсно, якби ряд був збіжний, то із ознаки збіжності $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. А це суперечить умові. Отже, ряд розбігається. З умови, що $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, не випливає, що ряд збігається. Теорема характеризує необхідну умову збіжності, але не достатню. Отже, існують розбіжні ряди, для яких $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Приклад. Дослідити на збіжність гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Розв'язування.

Гармонічним рядом називають ряд типу

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається. Покажемо, що ряд розбіжний

таким чином. Як відомо, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Отже, для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ має місце

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмуючи, одержимо:

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Підставляючи значення $n=1, 2, \dots$, одержимо: $1 > \ln 2$, $1 > \ln 3 - \ln 2$, ...

$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$. Додавши рівності, одержимо: $S_n > \ln(n+1)$. Оскільки

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, тобто даний ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність чи розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{5n-2}$.

Розв'язування.

За необхідною ознакою збіжності знайти границю $a_n = \frac{4n}{5n-2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{5n-2} = \frac{4}{5} \neq 0$ – ряд розбіжний.

Для дослідження на збіжність ряду можна перевіряти, чи існує границя S_n суми ряду, а можна застосувати *ознаки збіжності*, що в деяких випадках є зручнішим підходом. Розглянемо достатні ознаки збіжності знакододатних рядів, тобто рядів з додатними членами.

1.2 Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Означення.

Якщо члени ряду є додатними числами, то ряд називається
знакододатним

Особливостями знакододатних рядів є те, що із зростанням n його суми S_n монотонно зростають. Якщо ж до того послідовність S_n обмежена зверху, то ряд є збіжний, бо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. І навпаки, якщо для ряду всі члени додатні, то всі частинні суми $S_n < S$, тобто обмежені зверху. Отже, знакододатний ряд збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність його частинних сум обмежена зверху. Дано ще геометричне тлумачення членів знакододатного ряду та сум ряду. Члени ряду можна тлумачити як площі прямокутників, основи яких дорівнюють одиниці й один із кінців основи проходить через точки $x=1, x=2, x=3 \dots$

Можливі дві ситуації.

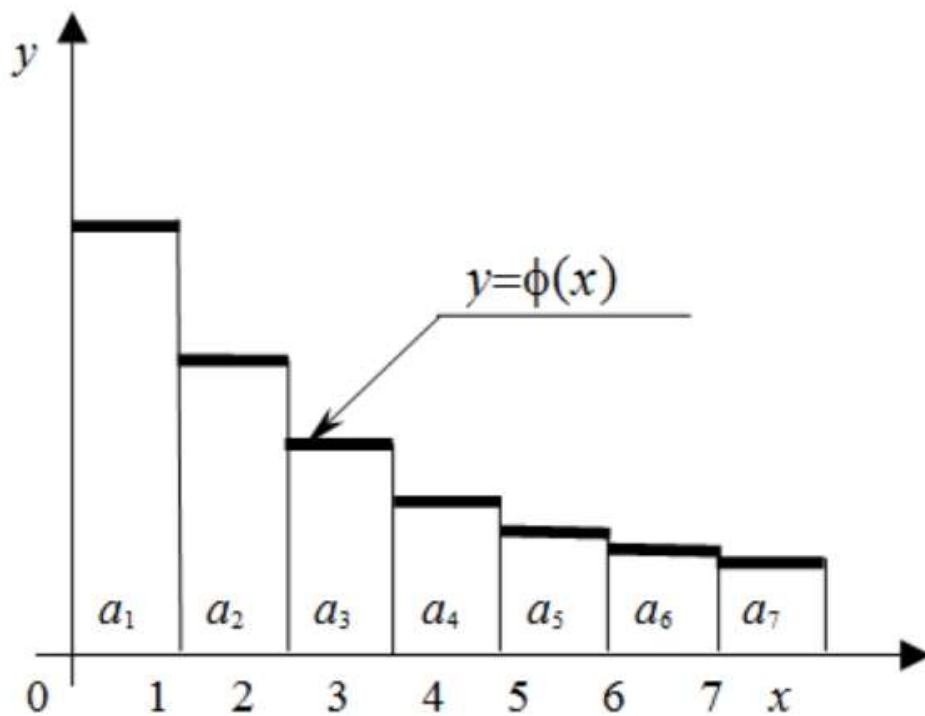


Рисунок 1.1

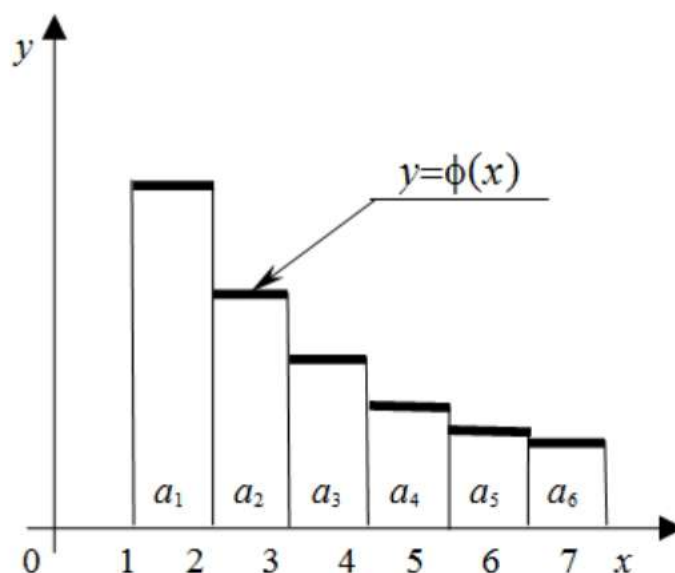


Рисунок 1.2.

Тоді сума ряду S_n чисельно буде тлумачитись як площа безмежної ступінчастої фігурки, що зверху обмежена ступінчастою лінією $y = \phi(x)$, яка має скінченні розриви в точках $1, 2, 3, \dots$. Водночас можна вважати, що сума ряду – це невластний інтеграл виду $\int_0^{\infty} \phi(x) dx$ (див. рис. 1.1) або $\int_1^{\infty} \phi(x) dx$ (див. рис. 1.2). Очевидно, що у випадку зростання членів знакододатного ряду частинні суми необмежено зростають, тому такий ряд буде розбіжним. Якщо ж члени ряду монотонно спадають, то ряд може бути **збіжним** або **розбіжним**.

Приклад. Дослідити на збіжність чи розбіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{7n-2}$.

Розв'язування.

За необхідною ознакою збіжності знайти границю $a_n = \frac{9n}{7n-2}$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{7n-2} = \frac{9}{7} \neq 0 - \text{ряд розбіжний.}$$

1.2.1 Ряд геометричної прогресії

Розглянемо ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (a \neq 0), \quad (1.5)$$

утворений із членів геометричної прогресії $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$, де a – перший член, q – знаменник прогресії, n -а часткова сума ряду має вигляд $S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$, якщо $q \neq 1$. Ряд (1.5) називають *рядом геометричної прогресії*.

Дослідимо його на збіжність. Знайдемо границю часткової суми:

$$1) \text{ якщо } |q| < 1, \text{ тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-q} - a \frac{q^n}{1-q} \right) = \frac{a}{1-q}.$$

Оскільки границя $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Отже, ряд збігається і його сума дорівнює

$$S = \frac{a}{1-q}$$

2) якщо $|q| > 1$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \pm\infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$, тобто ряд розбігається;

3) якщо $q = 1$, то $S_n = a + a + \dots + a = na$, і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \pm\infty$, тобто ряд розбігається;

4) якщо $q = -1$, то

$$S_n = \begin{cases} a, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

послідовність $\{S_n\}$ не має границі, тобто ряд розбігається.

Отже, ряд (1.5) збіжний за умови $|q| < 1$ і розбіжний за $|q| > 1$.

В наведених прикладах дослідження збіжності ряду здійснювалось безпосередньо за означенням з використанням n -ї часткової суми ряду S_n . Проте цей шлях незручний, оскільки він пов'язаний із згортанням часткової суми ряду S_n та обчисленням границі. На практиці, особливо з появою потужних систем комп'ютерної математики, найчастіше намагаються обчислити суму ряду, а не встановлювати факт збіжності чи розбіжності ряду. Це виправдано у випадку збіжних рядів. Якщо R_n – залишок ряду, тобто $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$, тому $S \approx S_n$. Похибка обчислень дорівнює R_n і $R_n \rightarrow 0$, якщо $n \rightarrow \infty$. Потрібно також додати, що коли границя послідовності часткових сум прямує до нескінченності або не існує, то сума ряду не існує відповідно до введенного

означення. Далі будуть введені інші означення суми ряду, згідно з якими можливе підсумовування розбіжних рядів.

Поняття ряду фактично впроваджено з метою узагальнення дії додавання на випадок нескінченної кількості доданків. Проте, як це буде показано нижче, не всі дії додавання можна перенести на випадок довільних збіжних рядів.

Приклад. Ряд $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} + \dots$, розбігається, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Приклад. Для збіжного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{n-1}$, ($|q| < 1$) необхідна ознака, звичайно, виконується: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

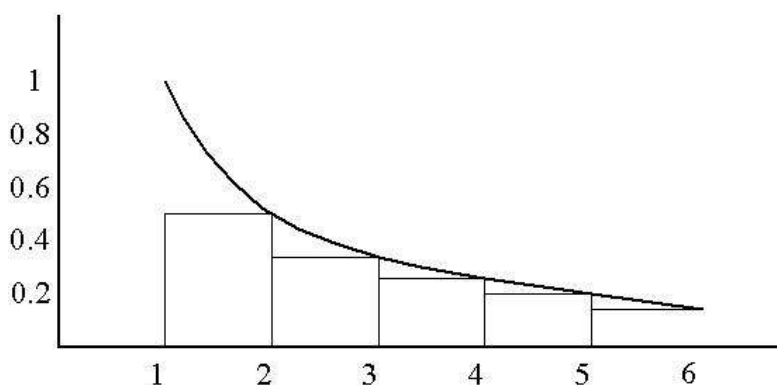
Наслідок. Якщо необхідна ознака не виконується, то ряд розбігається. Доведена ознака є необхідною, а не достатньою.

1.2.2 Інтегральна ознака Коші

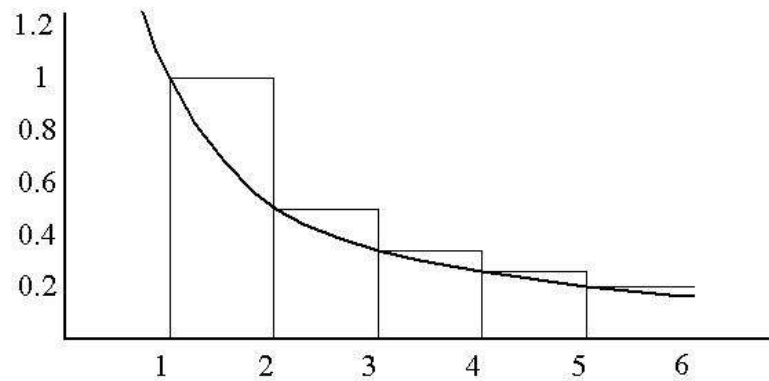
Теорема. Нехай функція $f(x)$ за $x \geq 1$ – неперервна, додатна і спадна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = f(n)$, ($n=1, 2, \dots$), та інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ – збіжні або розбіжні одночасно.

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y = f(x)$, з основою $x \in [1; n]$ (рис. 1.3). Тоді площа трапеції дорівнює інтегралу

$$S_n = \int_1^n f(x) dx.$$



а)



б)

Рисунок 1.3

Позначимо цілі точки основи: $x = 1, 2, \dots, n-1, n, \dots$ і розглянемо дві східчасті фігури. Одна з них (вписана) має площу, що дорівнює

$$f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots + f(n) \cdot 1 = \sigma_n - a_1 \cdot 1,$$

а друга (описана) має площу, що дорівнює

$$f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \dots + f(n-1) \cdot 1 = \sigma_n - a_n \cdot 1,$$

де $\sigma_n = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1$. Площа першої фігури менша за площу цієї криволінійної трапеції, площа другої – більша, тобто має місце нерівність

$$\sigma_n - a_1 < S_n < \sigma_n - a_n.$$

Звідси отримуємо дві нерівності:

$$\sigma_n < S_n + a_1, \quad (1.6)$$

$$\sigma_n > S_n + a_n \quad (1.7)$$

Оскільки функція $f(x)$ додатна, то інтеграл S_n зростає разом з n .
Можливі два випадки:

1) невластний інтеграл збігається, тобто границя $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ існує, тоді $S_n < S$ і з нерівності (1.6) за довільного n знаходимо $\sigma_n < S + a_1$.

Отже, послідовність часткових сум σ_n обмежена, а оскільки розглядається ряд з додатними членами, то ця послідовність і монотонно зростає, а тому має границю. Таким чином, ряд збігається.

2) якщо інтеграл розбігається, то $S_n \rightarrow \infty$ за $n \rightarrow \infty$ і на підставі нерівності (1.7) робимо висновок про те, що часткова сума σ_n також нескінченно зростає, тобто ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити збіжність ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \sim b_n = f(n)$, якщо первісна функції $f(x)$ легко обчислюється.

Розв'язування.

Якщо $b_n = f(n)$ первісна функції $f(x)$ легко обчислюється, то застосовуємо інтегральну ознаку Коші.

Якщо функція $f(x)$, яка набуває в точках $x = n$ ($n \in \mathbb{N}$) значення $f(n) = b_n > 0$, спадає в деякому проміжку $b < x < +\infty$, ($b \geq 1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ і невластний інтеграл $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ або разом збігаються, або разом розбігаються.

1. Спростуємо, за необхідності, значення для a_n , тобто будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такий, що $a_n \sim b_n$ за $n \rightarrow \infty$ і $b_n = f(n)$ вибрані так, щоб функція $f(x)$ мала первісну $F(x)$. Потім застосовуємо теорему порівняння.

2. Досліджуємо на збіжність невластний інтеграл за означенням:

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a).$$

3. Застосовуємо інтегральну ознаку Коші до ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

а потім робимо висновок про збіжність цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, використовуючи теорему порівняння.

Зауваження. Інтегральна ознака Коші застосовується і до рядів вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(\ln n)$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2 - 2)\ln(2n)}$.

Розв'язування.

1. Спростуємо вираз для a_n

$$\frac{3n}{(n^2 - 2)\ln(2n)} \sim \frac{3}{n \ln n}$$

і будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n \ln n}$ за допомогою інтегральної ознаки Коші, оскільки функція $f(x) = \frac{3}{x \ln x}$ має первісну $F(x) = 3 \ln \ln x$.

Потім використовуємо другу ознаку порівняння.

2. Досліджуємо збіжність невластого інтеграла за означенням:

$$\int_2^{+\infty} \frac{3dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{3dx}{x \ln x} = 3 \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln \ln b - \ln \ln 2] = +\infty.$$

Інтеграл розбігається.

3. Застосовуємо інтегральну ознаку Коші:

Функція $f(x) = \frac{3}{x \ln x}$ неперервна на проміжку $[2, +\infty)$ і спадає на ньому

до нуля. Отже, із розбіжності інтеграла випливає розбіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \ln n}$.

За теоремою порівняння розбігається і цей ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2 - 2) \ln(2n)}$.

Завдання для самостійної роботи.

Дослідити ряд на збіжність (інтегральна ознака).

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln(2n)}.$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2 n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2) \sqrt{\ln(2n+1)}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3(n+1)}.$$

$$5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \sqrt[3]{\ln n}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln^3(3n+1)}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln(n+3)}}.$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1) \ln^2 n}.$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+2) \ln^2 n}.$$

$$10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(n^4-2) \ln n}.$$

Відповідь. 1. Ряд розбігається. 2. Ряд збігається. 3. Ряд розбігається.

4. Ряд збігається. 5. Ряд розбігається. 6. Ряд збігається.

7. Ряд розбігається. 8. Ряд збігається. 9. Ряд збігається.

10. Ряд розбігається.

Приклад. Дано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (1.8)$$

За значень параметра $p > 1$ ряд визначає дзета-функцію Рімана $\zeta(p)$.

З'ясуємо, за яких значень параметра p ряд (1.8) збігається. Очевидно, функція $f(x) = \frac{1}{x^p}$ задовольняє умову інтегральної ознаки. Розглянемо окремі випадки.

1. Нехай $p = 1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \ln 1 = \infty. \text{ Отже, ряд розбігається.}$$

2. Нехай $p > 1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)} x^{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-p)b^{p-1}} - \frac{1}{1-p} = -\frac{1}{1-p}.$$

Ряд збігається.

3. Нехай $p < 1$. Обчислимо інтеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \infty.$$

Ряд розбігається.

Звідси робимо висновок про те, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{збіжний} & \text{за } p > 1, \\ \text{розбіжний} & \text{за } p \leq 1. \end{cases}$$

1.2.3 Ознака порівняння

Збіжність чи розбіжність ряду часто встановлюють шляхом порівняння його з іншим рядом, про збіжність чи розбіжність якого відомо.

Для порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \rightarrow \left[\begin{array}{ll} |q| < 1 \rightarrow \text{ряд збіжний} \\ |q| \geq 1 \rightarrow \text{ряд розбіжний} \end{array} \right] \quad (1.9)$$

або гармонічний ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \rightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha \leq 1 \rightarrow \text{ряд розбіжний} \\ \alpha > 1 \rightarrow \text{ряд збіжний} \end{array} \right]$

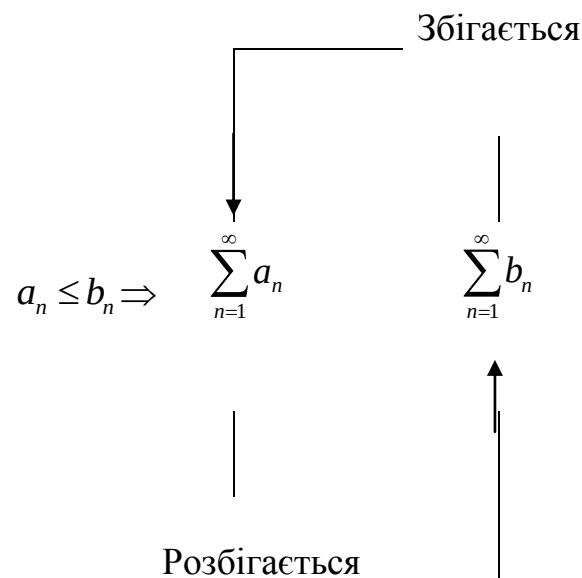
(1.10)

Теорема (ознака порівняння)

Нехай дано два знакододатних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Якщо кожен член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не більший за відповідний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, тобто $u_n \leq v_n$, то із збіжності «більшого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність «меншого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Для кращого запам'ятовування зміст теореми схематично можна показати так:



Приклад. Дослідити на збіжність чи розбіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

Розв'язування

Для порівняння виберемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, який є збіжним і більшим за ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$; таким чином $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Тому за теоремою 1.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність чи розбіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Розв'язування

Для порівняння виберемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним і меншим, ніж ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, таким чином $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. Тому за теоремою 1.4 ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ – розбіжний.

Зауваження. Для цього ряду, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, починаємо з $n=2$, тому що за $n=1$ член ряду не існує. Але це не суперечить властивості 3. Більш зручною формою ознаки порівняння є її гранична форма.

1.2.4 Гранична форма ознаки порівняння

Теорема (гранична ознака порівняння)

Якщо існує скінченна та відмінна від нуля границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k,$$

де $(0 < k < \infty)$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Доведення.

За означенням границі послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ для всіх n , крім, можливо, скінченного числа їх, для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $\left| \frac{u_n}{v_n} - k \right| < \varepsilon$ або $(k - \varepsilon)v_n < u_n < (k + \varepsilon)v_n$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то з лівої частини нерівності і теореми випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (k - \varepsilon)v_n$ також збігається. Але тоді, за властивістю числових рядів, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається також. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то з правої частини нерівності, теореми 1, властивості 1, випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається. Аналогічно, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається (розбігається), то і збіжним (розбіжним) буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n + 3}$.

Розв'язування.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n + 3}$ порівняємо з геометричною прогресією $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$, $q = \frac{1}{8} < 1$ – яка є збіжним рядом, порівняємо $u_n = \frac{1}{8^n + 3} < \frac{1}{8^n} = v_n \rightarrow u_n < v_n$. Оскільки нерівність виконується і більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – збіжний, то і менший $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність чи розбіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Розв'язування.

Для порівняння виберемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, який є збіжним і більшим за ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Таким чином $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Тому за теоремою 1.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$.

Розв'язування.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ порівняємо з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним:

$\frac{1}{\sqrt[5]{n}} \geq \frac{1}{n} \rightarrow u_n \geq v_n$ – із розбіжності меншого випливає розбіжність більшого.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{7}{5n^2}$.

Розв'язування.

Порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який є збіжним.

Використаємо граничну форму порівняльної ознаки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{tg \frac{7}{5n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{за еквівалентністю} \\ tg \alpha \sim \alpha, \quad n \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{5n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{7}{5}.$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд теж збігається, як і ряд, вибраний для порівнювання.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{3}{2n^3} \right)$.

Розв'язування.

Порівняємо з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, який є збіжним. За граничною формою порівняльної ознаки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^6}}{1 - \cos \frac{3}{2n^3}} = \left[\begin{array}{l} \text{за еквівалентністю} \\ 1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2} \end{array} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^6}}{\left(\frac{3}{2n^3} \right)^2} = \frac{4}{9}.$$

Обидва ряди збіжні.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити ряди на збіжність (ознака порівняння)

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3 + 6}{n^3 + 5} \quad .$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n^2} \right).$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^4}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^4 + 3}{n^4 + 2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n+3}{n(n+2)^3}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{7^n + 2n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \arcsin \frac{n^2 + 1}{n^4 - 2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(e^{1/2n^3} - 1 \right).$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n^2}.$$

Відповідь. 1. Ряд збігається. 2. Ряд збігається. 3. Ряд збігається.

4. Ряд розбігається. 5. Ряд збігається. 6. Ряд збігається.

7. Ряд збігається. 8. Ряд збігається. 9. Ряд розбігається.

10. Ряд збігається.

1.2.5 Ознака Д'Аламбера

Теорема.

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} l < 1 \rightarrow \text{ряд збіжний} \\ l > 1 \rightarrow \text{ряд розбіжний} \\ l = 1 \rightarrow \text{невідомо} \end{array} \right\}$$

Доведення.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то за означенням границі для будь-якого $\varepsilon > 0$

знайдеться натуральне число N таке, що для $n > N$ виконується нерівність

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon \text{ або } (l - \varepsilon) < \frac{u_{n+1}}{u_n} < (l + \varepsilon).$$

Нехай $l < 1$. Можна підібрати ε таким чином, що число $l + \varepsilon < 1$.

Позначимо $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тоді з правої частини нерівності $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ одержимо

$u_{n+1} < q \cdot u_n$, $n > N$. Надаючи значень, одержимо нерівності $u_2 < q \cdot u_1$,

$u_3 < q \cdot u_2 < q^2 \cdot u_1$, ..., $u_n < q \cdot u_{n-1} < q^{n-1} \cdot u_1$, ... тобто члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ менше

відповідних членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} q^n u_1$, який збігається як ряд геометричної прогресії

із знаменником $0 < q < 1$. Але тоді за порівняльною ознакою збігається ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n u_1$, відповідно збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Нехай $l > 1$. В цьому випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Звідси випливає що,

починаючи з деякого номера N , виконується нерівність $u_{n+1} > u_n$, тобто члени

ряду із збільшенням номера n зростають. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. За наслідком із необхідної ознаки збіжності ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

Зауваження. Якщо $l=1$ про збіжність ряду теорема відповіді не дає! Застосовують іншу ознаку.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(6n+1)^3}$.

Розв'язування.

Для $u_n = \frac{5^n}{(6n+1)^3}$, виберемо $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(6(n+1)+1)^3}$, знайдемо границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(6(n+1)+1)^3}}{\frac{5^n}{(6n+1)^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(6(n+1)+1)^3} \cdot \frac{(6n+1)^3}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot (6n+1)^3}{(6n+7)^3} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{6n}{6n} + \frac{7}{6n}}{\frac{6n}{6n} + \frac{1}{6n}} \right)^3 = 5 > 1$$

Ряд – розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n^2+1)n!}$.

Розв'язування.

Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n^2+1)n!}$ запишемо $u_n = \frac{3^n}{(2n^2+1)n!}$ та

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2(n+1)^2+1)(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2(n+1)^2+1)(n+1)!}}{\frac{3^n}{(2n^2+1)n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(2(n+1)^2+1) \cdot (n+1)!} \cdot \frac{(2n^2+1)n!}{3^n} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n^2}{2n^2} + \frac{4n}{2n^2} + \frac{3}{2n^2}}{\frac{2n^2}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}} \right) \cdot \frac{1}{n+1} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{4}{2n} + \frac{3}{2n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}} \right) \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Ряд – збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{\sqrt{5n-7}}$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} \text{Для ряду } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{\sqrt{5n-7}} \text{ запишемо } u_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{\sqrt{5n-7}} \text{ та} \\ u_{n+1} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)(2(n+1)-1)}{\sqrt{5(n+1)-7}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)(2(n+1)-1)}{\sqrt{4(n+1)+7}}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{\sqrt{4n+7}}} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)(2(n+1)-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)} \cdot \sqrt{\frac{4n+7}{4n+11}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = \infty > 1 \end{aligned}$$

Ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

Розв'язування.

Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Запишемо відношення:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!}, & a_{n+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}, \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Отже, обчисливши границю відношення сусідніх членів ряду, доводимо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots$$

Розв'язування.

Відповідно до умови завдання випишемо загальний член ряду та знайдемо границю:

$$a_n = \frac{2^n}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot n}{2^n(n+1)} = \frac{2 \cdot n}{n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$$

Ряд розбігається, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty$.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Розв'язування.

Перевіряємо, чи члени ряду додатні. Дійсно,

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

для всіх $n \geq 1$.

Оскільки $\sin x \sim x$ за $x \rightarrow 0$, можна спростити вираз для a_n :

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \sim \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!},$$

тобто, будемо досліджувати на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де

$$b_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}, \text{ причому } a_n \leq b_n,$$

а потім скористаємося теоремою порівняння.

Оскільки b_n містить добуток множників типу факторіалів, то потрібно застосувати ознаку Д'Аламбера.

Обчислимо b_{n+1} :

$$b_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{2^{n+2} (n+1)!}.$$

$$\begin{aligned} l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{2^{n+2} (n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1} n!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Застосовуємо ознаку Д'Аламбера і теорему порівняння.

Оскільки $l = 3/2 > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$$

розбігається. За теоремою порівняння розбігається і цей ряд.

Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{n!} \sin \frac{1}{2^{n+1}}$ – розбігається.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити ряд на збіжність (ознака Д'Аламбера)

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^n (n+1)!}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n (2n+5)!}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n^5 - 1)}{n!}.$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n + 2}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+2)!}{(3n)!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Відповідь. 1. Ряд збігається. 2. Ряд збігається. 3. Ряд розбігається.
4. Ряд збігається. 5. Ряд збігається. 6. Ряд розбігається.
7. Ряд розбігається. 8. Ряд збігається. 9. Ряд збігається. 10. Ряд розбігається.

1.2.6 Радикальна ознака Коші

Теорема.

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} l < 1 \rightarrow \text{ряд збіжний} \\ l > 1 \rightarrow \text{ряд розбіжний} \\ l = 1 \rightarrow \text{невідомо} \end{array} \right\}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми для ознаки Д'Аламбера.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^n$.

Розв'язування.

За радикальною ознакою Коші запишемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n}{2n} + \frac{1}{2n}}{\frac{2n}{2n} - \frac{5}{2n}} \right) = 1, \text{ тому потрібно}$$

застосувати іншу ознаку, наприклад, достатню умову розбіжності ряду.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n}{2n} + \frac{1}{2n}}{\frac{2n}{2n} - \frac{5}{2n}} \right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{5}{2n} \right)^{-\frac{2n}{5}} \right]^{\frac{5}{2}}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{5}{2}}} = e^3 \neq 0$$

Отже, ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^{n^2}$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5+6}{2n-5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{2n-5} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{2n-5} \right)^{\frac{2n-5}{6}} \right]^{n \cdot \frac{6}{2n-5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n-5}} = e^3 \end{aligned}$$

Розглянемо приклади дослідження знакододатних рядів на збіжність.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2 \cdot n + 1} \right)^n + \dots$$

Розв'язування.

Застосовуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2 \cdot n + 1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \cdot n + 1} = \frac{1}{2} < 1,$$

тому ряд збігається.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити ряд на збіжність (радикальна ознака Коші).

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3 + n}{3n^3 - 1} \right)^{n^2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n - 3}{7n + 1} \right)^{n^3}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n + 3} \right)^{n^2}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n + 2}{5n + 1} \right)^{n^2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3n + 1}{5n + 3} \right)^n.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n + 1} \right)^{n^2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n - 1}{9n + 1} \right)^{n/2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} e^{-n}.$$

- Відповідь. 1. Ряд розбігається ($l = +\infty$). 2. Ряд збігається ($l = 0$).
3. Ряд збігається ($l = 0$). 4. Ряд збігається ($l = 0$).
5. Ряд збігається ($l = 0$). 6. Ряд збігається ($l = 3/5$).
7. Ряд збігається ($l = 1/4$). 8. Ряд збігається ($l = 2/3$).
9. Ряд збігається ($l = 3/5$). 10. Ряд розбігається ($l = 3/e$).

Отже, для певного типу рядів необхідно застосовувати певні ознаки для встановлення збіжності.

Узагальнимо всі вказані ознаки збіжності знакододатніх рядів у вигляді таблиці 1 враховуючи вигляд ряду.

Таблиця 1 – Узагальнення застосування ознак збіжності знакододатніх рядів

№	Загальний вигляд ряду	Ознака	Границя	Висновок
1.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n = \frac{P^k(n)}{G^m(n)}$ многочлени	Необхідна ознака	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^k(n)}{G^m(n)} = 0 \rightarrow$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^k(n)}{G^m(n)} \neq 0 \rightarrow$	Невідомо Ряд розбіжний
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ для порівняння вибираємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ із таких: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$	Гранична ознака порівняння.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{Q_n} \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{Q_n} \neq \infty$	Обидва ряди однаково збіжні або розбіжні
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Ознака Д'Аламбера	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$	$\begin{cases} > 1 \rightarrow \text{збіжний} \\ < 1 \rightarrow \text{розбіжний} \\ = 1 \rightarrow \text{невідомо} \end{cases}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Радикальна ознака Коші	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n}$	$\begin{cases} > 1 \rightarrow \text{збіжний} \\ < 1 \rightarrow \text{розбіжний} \\ = 1 \rightarrow \text{невідомо} \end{cases}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Інтегральна ознака Коші	$\int_1^{\infty} U_n dn$	$\int_1^{\infty} U_n dn \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ Однаково збіжні або розбіжні.

Завдання для самостійної роботи

1. Дослідити на збіжність наведені нижче числові ряди, застосувавши розглянуті ознаки збіжності, рекомендовано застосувати таблицю 1.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 2},$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 5},$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!},$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n},$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1\sqrt{10}},$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 3n + 1},$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \dots \cdot n^2}{3^{n+1}},$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!},$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^6 + n^2 + 3}},$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n^n \cdot n!},$$

2. Заповніть таблицю (систематизація знань ознак знакододатніх рядів)

Ряд	Ознака	Обґрунтування вибору ознаки
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$		
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$		

1.3 Знакозмінні ряди

1.3.1 Теорема Лейбніца

Достатні ознаки збіжності розглядалися стосовно рядів з додатними членами. За допомогою ознаки Лейбніца досліджуються ряди, в яких

спостерігається чергування знаків членів ряду, тобто досліджуються ряди вигляду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – додатні числа.

Теорема Лейбніца. Якщо в знакозмінному ряді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n, \quad (a_n > 0) \quad (1.11)$$

числа a_n такі, що

$$1) \ a_1 > a_2 > \dots \quad (1.12)$$

і

2) границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad (1.13)$$

то ряд (1.11) збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена.

Для доведення припущення утворимо часткову суму з парною кількістю $n = 2m$ перших членів ряду (1.11):

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Згідно з умовою (1.12), різниця в дужках є додатною. Тобто, додатна сума S_{2m} , і є монотонно неспадною послідовністю із зростанням m . Перепишемо тепер цю суму інакше:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \quad (1.14)$$

Оскільки за умовою (1.12) кожна різниця в дужках додатна, то внаслідок віднімання цих дужок від a_1 дістанемо число, менше за a_1 , тобто $S_{2m} < a_1$.

Отже, встановлено, що сума S_{2m} за зростання m є неспадною і обмеженою зверху числом a_1 . Тому S_{2m} має границю S , причому вона задовольняє нерівність $0 < S < a_1$. Таким чином, доведено збіжність послідовності парних часткових сум до числа S . Потрібно довести також, що послідовність непарних часткових сум має своєю границею число S .

З цією метою розглянемо суму $n = 2m + 1$ перших членів ряду (1.11):

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

Оскільки згідно з умовою (1.13) $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S.$$

Отже, доведено, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ як для парного, так і для непарного n , тобто, ряд (1.11) збігається.

Одержана під час доведення теореми нерівність $0 < S < a_1$ дає можливість оцінити похибку у разі заміни суми ряду частковою сумою S_n . За такої заміни $S \approx a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n$ відкидаються всі члени ряду, починаючи з a_{n+1} , тобто вираз, що також є знакозмінним рядом $\pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots)$, який називається залишком ряду (1.11). Введемо позначення $R_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots)$. Абсолютна величина R_n за теоремою Лейбніца менша за абсолютну величину першого із відкинутих членів цього ряду (тобто менша за a_{n+1}). Отже, похибка, яку матимемо у випадку заміни S на S_n , не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, де $a_n > 0$.

Розв'язування.

1. Перевіряємо, чи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду).

2. Досліджуємо ряд, складений із модулів, на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

використовуємо теорему порівняння і ознаки збіжності для рядів з додатними членами.

Якщо цей ряд збігається, то він збігається абсолютно.

3. Якщо ряд із модулів розбігається, то залишається ще можливість того, що цей ряд збігається умовно.

Щоб дослідити цю можливість, застосовуємо ознаку Лейбніца.

Якщо члени знакозмінного ряду спадають за абсолютним значенням і наближаються до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ряд збігається (принаймні, умовно).

В такому випадку, якщо умови ознаки Лейбніца виконуються, то цей ряд збігається умовно (оскільки абсолютно він розбігається).

Приклад. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Розв'язування.

1. Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

2. Досліджуємо на збіжність ряд, складений із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Оскільки для $n \rightarrow \infty$

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n},$$

то за другою (граничною) теоремою порівняння ряд із модулів розбігається.

3. Перевіряємо умови ознаки Лейбніца:

а) ряд знакозмінний з $a_n = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$;

б) члени ряду спадають за абсолютним значенням:

$$1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1;$$

в) члени ряду наближаються до нуля за $n \rightarrow \infty$.

Отже, за ознакою Лейбніца цей ряд збігається.

Відповідь. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ збігається умовно.

Узагальнимо алгоритм дослідження на збіжність у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2 – Алгоритм дослідження на збіжність знакозмінних рядів

Загальний вигляд ряду	Ознака	Висновок
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n$ Запишемо ряд, що складений з модулів членів вихідного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Ознака Лейбніца $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \\ U_1 > U_2 > \dots > U_n \rightarrow \text{так} \\ \downarrow \\ \text{ні} \end{cases}$	Якщо «так», то ряд абсолютно збіжний за умови збіжності ряду модулів членів, тобто якщо $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n - \text{збіжний} \right)$ і умовно збіжний за умови розбіжності ряду з модулів членів ряду, тобто $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n - \text{розбіжний} \right).$ Якщо «ні», то ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на умовну та абсолютну збіжності знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$

Розв'язування.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) члени за абсолютною величиною монотонно спадають, оскільки

$$1 > \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{5} > \dots$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Обидві умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, заданий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд, складений з його абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$.

Цей ряд можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, що розбігається,

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{(2n-1)}; \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд розбігається. Отже, заданий знакозмінний ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 4^n}$

Розв'язування.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) члени за абсолютною величиною монотонно спадають, оскільки

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{64} > \frac{1}{9 \cdot 4^3} > \dots$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 \cdot 4^n} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0.$$

Обидві умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, заданий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 4^n}$, складений з абсолютних величин заданого знакозмінного ряду. Дослідимо його на збіжність, застосовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$a_n = \frac{1}{n^2 \cdot 4^n}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 4^{n+1}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 4^n}{(n+1)^2 \cdot 4^{n+1}} = \left[4^{n+1} = 4^n \cdot 4 \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = \frac{1}{4} < 1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, отже, заданий знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити ряд на збіжність

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^5 + n^2 + 1}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 3n^2 + 2}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2 \sqrt{n})}{n^2 \sqrt{n}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - 1}{3n^3}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3}{\sqrt{n^5}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{n^2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n} \right)^n.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{3^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}.$$

Відповідь. 1. Ряд збігається умовно. 2. Ряд збігається абсолютно. 3. Ряд збігається умовно. 4. Ряд збігається абсолютно. 5. Ряд збігається умовно. 6. Ряд збігається умовно. 7. Ряд збігається абсолютно. 8. Ряд розбігається. 9. Ряд збігається абсолютно. 10. Ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$ на збіжність.

Скористаємось теоремою Лейбніца. Перевіримо виконання першої умови.

$$\frac{1}{2} < \frac{8}{4} < \frac{27}{8} < \frac{64}{16} > \frac{125}{32} > \frac{216}{64} > \frac{343}{128} > \frac{512}{256} \dots$$

Умова $\frac{n^3}{2^n} > \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ виконується, починаючи з четвертого номера.

Виконується також і друга умова $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$. Отже, ряд збігається.

Приклад. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ збігається, оскільки

виконуються умови теореми Лейбніца:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \dots, \text{ і } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, n=1, 2, \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Сума n перших членів цього ряду

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

відрізняється від суми ряду S на величину, меншу за $\frac{1}{n+1}$. Дійсно,

$$R_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots \right), \quad |R_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots \right| \Rightarrow |R_n| < \frac{1}{n+1}.$$
 Це свідчить про

досить повільну швидкість збіжності ряду. Так, щоб знайти суму ряду з точністю до 0.001, необхідно взяти суму перших 1000 членів ряду.

1.3.2 Абсолютна та умовна збіжності

Означення. Ряд, що має нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів, називається довільним знакозмінним (далі знакозмінним) рядом.

Приклади знакозмінних рядів:

$$\begin{array}{ll} а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}; & б) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\cos(n+1)}{n^2} \right); \\ в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 3}; & г) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 n. \end{array}$$

Нехай

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (1.15)$$

знакозмінний ряд. Тут числа c_k , ($k=1,2,\dots$) можуть бути як додатними, так і від'ємними, тобто ряд складеться з нескінченної множини як додатних, так і від'ємних членів.

Для знакозмінного ряду (1.15) наведемо важливу ознаку збіжності.

Теорема (достатня ознака збіжності)

Якщо ряд

$$|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| + \dots, \quad (1.16)$$

утворений з абсолютних величин членів знакозмінного ряду (1.15), збігається, то збігається і ряд (1.16).

Наведена ознака дозволяє звести дослідження на збіжність знакозмінного ряду до дослідження відповідного ряду з додатними членами.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{\sin a}{1^2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \frac{\sin 3a}{3^2} + \dots + \frac{\sin na}{n^2} + \dots, \quad (1.17)$$

де α – будь-яке число.

Разом з цим рядом, розглянемо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin na}{n^2} \right| \quad (1.18)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1.19)$$

Ряд (1.19) збігається. Члени ряду (1.18) не більші за відповідні члени ряду (1.19), отже ряд (1.18) також збіжний. Але тоді за теоремою про достатню ознаку збіжності цей знакозмінний ряд також збігається.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду не є необхідною, тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ може збігатися і тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ не збігається. Наприклад, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots, \quad (1.20)$$

збігається, а ряд (гармонічний)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

утворений з абсолютних величин членів ряду (1.19) – розбігається.

Означення. Ряд, абсолютні величини членів якого утворюють збіжний ряд, називають *абсолютно збіжним*.

Означення. Якщо знакозмінний ряд збігається, а ряд, утворений з абсолютних величин його членів, розбігається, то такий ряд називають *неабсолютно* або *умовно збіжним*.

Наприклад, ряд (1.20) є умовно збіжним.

Відмінності абсолютної та неабсолютної збіжності знакозмінних рядів досить істотні. Властивості абсолютно збіжних рядів в багатьох відношеннях нагадують властивості рядів з додатними членами та властивості скінченних сум. Для умовно збіжних рядів деякі властивості скінченних сум не мають місця.

Наприклад, абсолютно збіжні ряди мають, як і звичайні, скінченні суми, переставну властивість: *за будь-якої зміни місць членів абсолютно збіжного ряду він залишається абсолютно збіжним із тією ж самою сумою*.

Доводиться, що коли ряд умовно збіжний, то яке б не було число S , скінченне або нескінченне, існує перестановка членів цього ряду, внаслідок якої утворюється ряд, сума якого дорівнює S . Зокрема, отриманий ряд може виявитися розбіжним.

Мають місце такі теореми.

Теорема Діріхле (переставна властивість)

Якщо числовий ряд (1.15) абсолютно збіжний, то ряд, утворений довільною перестановкою членів ряду (1.15), є збіжним і має ту ж саму суму, що і ряд (1.15).

Теорема Рімана

Якщо числовий ряд (1.14) умовно збіжний, то, яке б не було число A скінченне або $\pm\infty$, можна в ряду (1.14) переставити його члени таким чином, що новоутворений ряд матиме суму, яка дорівнює A .

Приклад. Переставимо члени умовно збіжного ряду

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

так, щоб після кожного додатного члена стояли два від'ємних:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots$$

Утворимо часткову суму S_{3m}

$$S_{3m} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2m},$$

$$\text{де } S_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot n - 1} - \frac{1}{4 \cdot n - 2} - \frac{1}{4 \cdot n} \right) \rightarrow \frac{\ln(2)}{2} = 0,347$$

Отже, $S_{3m} = \frac{1}{2} S_{2m}$. Під час доведення теореми Лейбніца було показано, що $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$, а тому сума S утвореного ряду дорівнює $\frac{1}{2}$ суми S вихідного ряду. Як буде встановлено пізніше, $S \neq 0$. Таким чином, внаслідок перестановки членів умовно збіжного ряду змінилася його сума.

Інша перестановка членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ дає суму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{(2n+2)} + \frac{1}{(4n+1)} + \frac{1}{(4n+3)} \right) \rightarrow \frac{3 \ln 2}{2} = 1,0397207708$$

Разом з тим зауважимо, що будь-які перестановки скінченного числа членів допускаються в усяких рядах; вони не позначаються на сумі ряду.

Фундаментальне питання підсумовування (обчислення суми) ряду.

Приклад. Обчислити суму знакозмінного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0,$$

із заданою точністю α .

Розв'язування.

1. Якщо $a_{n+1} < a_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то для залишку ряду R_n справедлива нерівність.

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

2. Якщо $a_{n+1} < \alpha$, то і $|R_n| < \alpha$ і тому, розв'язуючи нерівність

$$a_{n+1} < a_n,$$

знаходимо кількість членів ряду, які необхідно взяти для обчислення суми із заданою точністю α .

3. Безпосередньо обчислюємо n -у частинну суму і записуємо відповідь:

$$S \approx S_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n.$$

Приклад. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^3)^2}$$

з точністю $\alpha = 0,001$.

Розв'язування.

1. Цей ряд знакозмінний і збігається (абсолютно).

Члени ряду спадають за абсолютним значенням:

$$\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{n}{(1+n^3)^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

отже, справедлива нерівність

$$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2}.$$

2. Якщо $a_{n+1} < \alpha$, то і $|R_n| < \alpha$. Тому, розв'язуючи нерівність

$$\frac{n+1}{(1+(n+1)^3)^2} < \frac{1}{1000},$$

знаходимо кількість членів ряду, які необхідно взяти для обчислення суми ряду із заданою точністю α . Отримуємо $n \geq 3$, тобто, досить взяти перших три члени ряду.

3. Обчислюємо

$$S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{81} - \frac{3}{28^2} \approx -0,229$$

Відповідь. $S \approx -0,229 \pm 0,001$

1.4 Підсумовування рядів

В попередніх пунктах проводилось дослідження збіжності ряду, користуючись безпосередньо означенням збіжності за формулою n -ї

часткової суми ряду та ознак збіжності. Проте дослідження за означенням пов'язано з трудомісткими обчисленнями часткових сум ряду та пошуками границі їхньої послідовності. За допомогою ознак встановлюється лише факт збіжності або розбіжності ряду.

Розглянемо підходи до обчислення та оцінювання суми ряду. В підрозділі 1.3 вже частково розглядалося оцінювання суми збіжного ряду. Введемо означення.

Означення. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то різницю між його сумою S та частковою сумою S_n

$$R_n = S - S_n \quad (1.21)$$

називають n -им залишком ряду.

Зауваження. Залишок ряду також є рядом

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Залишок є похибкою, що виникає, коли за наближене значення суми ряду S береться часткова сума S_n : $S \approx S_n$.

Оскільки S є границею послідовності $\{S_n\}$, то, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

Отже, абсолютна величина залишку R_n може бути як завгодно малою, якщо тільки число n взятє достаньом великим.

Проте оцінювання похибки найпростіше можна здійснити лише у випадку знакозмінного ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n, \text{ оцінка має вигляд } |S - S_n| \leq c_{n+1}.$$

В загальному випадку – це складна задача. Якщо розробниками математичних систем передбачено підсумовування широкого класу рядів, то, скориставшись ними, можна наближено обчислити суму ряду.

Наприклад, сума ряду $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ ($a \neq 0$), у якого $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, дорівнює

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Часткові суми та залишки ряду:

$$S_1 = 1;$$

$$R_1 = S - S_1 = 1;$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5;$$

$$R_2 = 0,5;$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75;$$

$$R_3 = 0,025;$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,875;$$

$$R_4 = 0,125;$$

.....

$$S_8 = 1,9921875;$$

$$R_8 = 0,0078125;$$

і т. д.

Таким чином, завжди є можливість наближено обчислити суму збіжного ряду, взявши деяку кількість перших його членів. Водночас виникає проблема з'ясування величини похибки, що виникає.

На окремих прикладах можна побачити, що іноді вдається оцінити величину похибки і тим самим установити, скільки потрібно брати членів ряду, щоб отримати його суму з потрібною точністю.

Основною задачею теорії рядів є дослідження збіжності ряду. Знаходження суми збіжного ряду має другорядне значення, оскільки після того як з'ясовано збіжність ряду, наближена сума його в більшості випадків легко може бути знайдена.

Поняття ряду фактично впроваджено для узагальнення дії додавання на випадок нескінченного числа доданків. Проте не всі властивості дії додавання справедливі для будь-яких збіжних рядів.

2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1 Основні поняття

Узагальненням числових рядів є ряди, членами яких є функції. Такі ряди використовуються як досить потужний засіб наближеного розв'язання рівнянь, і взагалі, наближених обчислень як для задання функції, так і для означення функції, тобто є засобом введення нових функцій.

Означення. Вираз

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (2.1)$$

члени якого є функціями від x , називають функціональним.

Послідовність функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... вважається заданою на множині $E \in (-\infty; \infty)$.

Надавши x певних числових значень, дістанемо різні числові ряди, які можуть виявитися збіжними або розбіжними.

Значення $x = x_0$, за якого числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

збігається, називають *точкою збіжності ряду* (2.1). Множину всіх значень $x \in E$, в яких функціональний ряд (2.1) збігається, називають *областю збіжності функціонального ряду*.

В області збіжності ряду його сума є деякою функцією від x . Позначимо її через $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Приклад. Розглянемо функціональний ряд

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Розв'язування.

Цей ряд збігається для всіх значень x з інтервалу $(-1;1)$. Для всіх значень x , що задовольняють умову $|x|<1$, сума ряду дорівнює $\frac{1}{1-x}$ (сума ряду геометричної прогресії із знаменником x). Таким чином, в інтервалі $(-1;1)$ цей ряд визначає функцію

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Відомо, що скінченна сума неперервних функцій є функцією неперервною, а інтеграл від скінченної суми інтегрованих функцій дорівнює сумі інтегралів від кожного доданка. Аналогічна властивість справджується у разі диференціювання скінченної суми диференційованих функцій. Під час вивчення функціональних рядів необхідно з'ясувати питання щодо перенесення зазначених властивостей скінченних сум на функціональні ряди.

Покажемо, що для довільних функціональних рядів ці властивості можуть виявитися несправедливими.

Приклад. Розглянемо ряд

$$x + (x^{\frac{1}{3}} - x) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + \dots + (x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}}) + \dots$$

Розв'язування.

Часткова сума дорівнює $S_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$. За $x > 0$ та за $n \rightarrow \infty$ часткова сума прямує до 1, $S_n(x) \rightarrow 1$. Для $x = 0$ часткова сума $S_n(x) \rightarrow 0$. І, нарешті, якщо $x < 0$, то $S_n(x) \rightarrow -1$ за $n \rightarrow \infty$.

Отже, сума ряду дорівнює

$$S(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

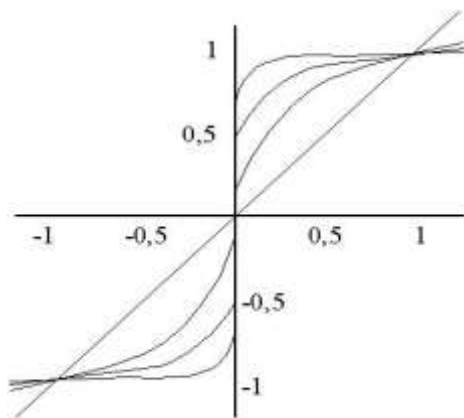


Рисунок 2.1

Таким чином, сума ряду є розривною в точці $x=0$. На цьому прикладі ми переконались в тому, що властивості скінченних сум функцій справедливі не для всяких рядів. Доведемо, що розглянута властивість має місце у випадку певного характеру збіжності, а саме – для рівномірно збіжних рядів. Це поняття у посібнику розглядається лише частково.

На рис. 2.1 наведено графіки перших часткових сум ряду. Із зростанням номера часткові суми наближаються до $S(x)$.

Достатня ознака рівномірної збіжності Вейерштрасса

Теорема. Функціональний ряд (2.1) збігається рівномірно на відрізку $[a;b]$, якщо існує такий збіжний числовий ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2.2)$$

з додатними членами, що для всіх значень $x \in [a;b]$ виконується нерівність

$$|u_n(x)| \leq a_n. \quad (2.3)$$

Якщо виконується нерівність (2.3), то ряд (2.1) називають **мажорантним**.

Безпосередньо з означення випливає, що ряд, мажорантний в деякій області, збігається у всіх точках цієї області. Це означає, що сума функціонального ряду (2.1) є функцією $S(x)$, яка визначена на відрізку.

Нехай S – сума числового ряду (2.2), тоді її можна подати у вигляді доданків

$$S = S_n + R_n,$$

де S_n , R_n – відповідно часткова сума та залишок ряду (2.1).

Внаслідок збіжності ряду маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. Візьмемо тепер довільне $\varepsilon > 0$, та знайдемо таке N , що для $n > N$ буде виконуватись нерівність

$$R_n < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Тоді для знайдених номерів n має місце співвідношення і для ряду (2.1):

$$S_n(x) + R_n(x) = S(x),$$

де

$$\begin{aligned} S_n(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), \\ R_n(x) &= u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Із нерівностей (2.3), (2.4) та рівності (2.5) випливає, що

$$|R_n(x)| < |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| < a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = R_n < \varepsilon,$$

тобто

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon,$$

для всіх $n > N$ і для всіх x , які належать відрізку $[a; b]$. Це і означає рівномірну збіжність ряду (2.1).

В області збіжності ряду його сума є деякою функцією від x . Позначимо її через $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Приклад. Функціональний ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots \quad (2.6)$$

рівномірно збігається у будь-якому інтервалі осі Ox , оскільки

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

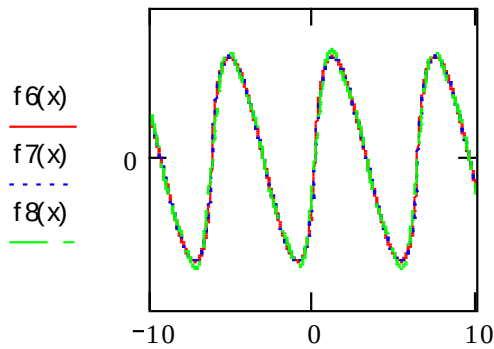


Рисунок 2.2

ряд обернених квадратів теж збігається. На рис. 2.2 наведено графіки часткових сум $S_{10}(x)$, $S_{100}(x)$, $S_{1000}(x)$ ряду (2.6). Часткові суми, починаючи вже з $n=10$, майже збігаються.

Сформулюємо три важливі властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Теорема. Сума ряду неперервних функцій, мажорантних (значення яких рівні) на деякому відрізку $[a;b]$, є функцією, неперервною на цьому відрізку.

Теорема. Якщо ряд неперервних функцій

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad x \in [a;b] \quad (2.7)$$

мажорантний на відрізку $[a;b]$, то сума цього ряду є функцією, інтегрованою на відрізку $[a;b]$ і інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду, утвореного з інтегралів від цих функцій,

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x u_1(t)dt + \int_a^x u_2(t)dt + \dots + \int_a^x u_n(t)dt + \dots, \quad (2.8)$$

де a, x – належать відрізку $[a;b]$.

Зауваження. Верхня межа інтегрування може бути сталою, проте в цьому випадку внаслідок інтегрування одержується вже не функціональний, а числовий ряд.

Наведемо приклад використання зазначеної вище теореми з метою розвинення функцій у степеневий ряд. Далі будуть розглянуті інші приклади.

Приклад. Функціональний ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

мажорантний, а, отже, і рівномірно збіжний за $|x| \leq a < 1$. Сума ряду дорівнює

$\frac{1}{1+x^2}$ (сума геометричного ряду із знаменником $-x^2$), тобто інтегруванням

вихідного ряду дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt$$

або

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (2.9)$$

Зазначимо, що рівномірна збіжність ряду є достатньою, але не є необхідною умовою його почленного інтегрування. Ряд, який одержується шляхом почленного інтегрування рівномірно збіжного ряду, також є рівномірно збіжним рядом.

Теорема. Якщо ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad x \in [a; b], \quad (2.10)$$

утворений із функцій, що мають неперервні похідні на відрізку, збігається на цьому відрізку до суми $S(x)$, і ряд

$$u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots, \quad (2.11)$$

утворений з похідних від його членів, мажорантний на тому самому відрізку, то сума ряду (2.10) є диференційовною функцією на $[a; b]$ і її похідна дорівнює похідній від суми вихідного ряду, тобто

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots \quad (2.12)$$

Зауваження. Мажорантність ряду (2.10), а також диференційованість його суми не є припущенням, а, як наслідок, випливає з умов теореми.

2.2 Алгоритм обчислення області збіжності функціонального ряду

Приклад. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Розв'язування.

Для кожного допустимого значення x розглядаємо цей ряд як числовий і досліджуємо на збіжність, застосовуючи теореми порівняння, ознаки Коші, Д'Аламбера та інші. Таким чином знаходимо ті значення x , за яких цей ряд збігається. Сукупність таких значень x утворює область збіжності ряду.

У випадку застосування ознак Д'Аламбера або Коші робимо:

1. Знаходимо $\varphi(x)$ за однією із формул (якщо границі існують).

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \quad \text{або} \quad l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$$

де $f_n(x)$ – загальний член ряду.

2. Оскільки за ознаками Д'Аламбера або Коші ряд збігається за $l < 1$ і розбігається за $l > 1$, знаходимо інтервал збіжності, розв'язуючи нерівність $l(x) < 1$.

3. Досліджуємо поведінку ряду в граничних точках інтервалу збіжності.

Записуємо відповідь.

2.3 Степеневі ряди

2.3.1 Основні поняття

До найважливіших класів функціональних рядів відносять степеневі ряди.

Означення.

Степеневим рядом називають функціональний ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2.13)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі числа, коефіцієнти ряду.

Надаючи x певне значення x_0 , одержимо числовий ряд, який може збігатися, а може розбігатися.

Означення.

Якщо одержаний ряд збіжний, то точка x_0 називається **точкою збіжності** цього ряду.

Означення.

Сукупність числових значень аргументу x , при яких ряд (2.13) збігається, називається його **областю збіжності**.

Областю збіжності степеневому ряду завжди є інтервал, що може вироджуватись в точку.

Для з'ясування питання збіжності степеневому ряду розглянемо теорему Абеля.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (2.13) збігається в точці x_0 , то він абсолютно збігається для всіх x , для яких виконується $|x| < |x_0|$.

Доведення.

За умовою ряд (2.13) збігається. Відповідно за необхідною ознакою збіжності: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. Звідси випливає, що величина $a_n x_0^n$ обмежена, тобто, знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх n виконується нерівність $|a_n x_0^n| \leq M$.

Нехай $|x| < |x_0|$, тоді величина $q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$ і відповідно,

$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \frac{|x|}{|x_0|} \leq M q^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, тобто модуль кожного члена ряду не перевищує відповідного члена збіжного ряду ($q < 1$) геометричної прогресії. Тому за ознакою порівняння за $|x| < |x_0|$ ряд (2.13) абсолютно збіжний.

Наслідок. Якщо ряд розбігається за деякого значення x_0 , то він розбігається за будь-якого x , для якого $|x| > |x_0|$.

Доведення.

Дійсно, якщо допустити збіжність ряду в точці x_1 , для якої $|x_1| > |x_0|$, то за теоремою Абеля ряд збігається для всіх x , для яких $|x| < |x_1|$ і зокрема в точці x_1 , що суперечить умові.

З теореми Абеля випливає, що, якщо $x_0 \neq 0$ – точка збіжності степеневому ряду, то інтервал $(-|x_0|, |x_0|)$ складається із точок збіжності цього ряду. Покладемо $|x_0| = R$.

Означення

Інтервалом збіжності степеневому ряду (2.13) називають такий інтервал $(-R, R)$ з центром в початку координат, що для будь-якої точки з цього інтервалу ряд збігається абсолютно, а для точок x , що лежать поза інтервалом, ряд розбігається. R – радіус збіжності степеневому ряду.

Якщо ряд (2.13) збігається тільки в одній точці $x_0 = 0$, то вважається, що $R = 0$, якщо ряд (2.13) збігається для всіх значень $x \in R$, то вважається, що $R = \infty$.

Відмітимо, що на кінцях збіжності степеневому ряду, тобто за $x = -R$ і $x = R$, збіжність ряду перевіряється в кожному випадку окремо.

Означення

Степеневим рядом також називають ряд:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

де $n = \overline{1, \infty}$ a_n – коефіцієнти степеневому ряду.

Цей степеневий ряд записаний за степенями двочлена $(x - x_0)$. Якщо $x_0 = 0$ отримаємо ряд за степенями x . Такий степеневий ряд збігається в інтервалі $|x - x_0| < R$ і розбігається поза ним $|x - x_0| > R$.

2.3.2 Знаходження інтервалу збіжності. Властивості степеневих рядів

Для знаходження радіуса збіжності ряду (2.13) складемо ряд із модулів членів цього степеневого ряду та застосуємо відносно нього ознаку Д'Аламбера.

Нехай маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.14)$$

Розглянемо ряд, утворений із абсолютних величин його членів:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 + \dots + |a_n||x|^n + \dots \quad (2.15)$$

Припустимо, що існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, скінченна або нескінченна.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Нехай $L \neq 0$ – скінченне число.

За ознакою Д'Аламбера, якщо $L|x| < 1$, або $|x| < \frac{1}{L}$, $-\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}$, то ряд (2.14) збігається абсолютно.

Для $L|x| > 1$ або $|x| > \frac{1}{L}$ ряд (2.14) розбігається. Отже, як радіус збіжності степеневого ряду візьмемо число $\frac{1}{L}$, тоді формула для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду має вигляд

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Якщо $L = 0$, то степеневий ряд збігається за довільного $x \in (-\infty; \infty)$ і $R = +\infty$.

Якщо $L = +\infty$, то ряд (2.15), а отже і ряд (2.14), збігається лише в точці $x = 0$ і $R = 0$.

Аналогічно, скориставшись радикальною ознакою Коші, одержимо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Зауваження. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то $R = \infty$. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, то $R = 0$.

Приклад. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{5n-3}$.

Розв'язування.

Знайдемо члени ряду $a_n = \frac{2^n}{5n-3}$ та $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{5(n+1)-3} = \frac{2^n \cdot 2}{5n+2}$.

Знайдемо радіус: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^n}{5n-3}}{\frac{2^n \cdot 2}{5n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{5n+2}{5n-3} \right| = \frac{1}{2}$ центр ряду в

точці $x_0 = 0$ інтервал збіжності $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Дослідимо ряд на кінцях інтервалу:

За $x = -\frac{1}{2}$ маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{5n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n-3}$, цей ряд еквівалентний ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n-3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n}$, який умовно збіжний.

За $x = \frac{1}{2}$ маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{5n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3}$, цей ряд еквівалентний ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$, що є розбіжним.

Тоді інтервал збіжності дорівнює $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Приклад. Знайти інтервал збіжності степеневому ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$.

Розв'язування.

Знайдемо радіус за радикальною ознакою Коші: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,

якщо $R = 0$, то ряд збіжний в одній точці $x_0 = 0$.

Приклад. Знайти інтервал збіжності степеневому ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n} \cdot x^{n+1}$.

Розв'язування.

Для знаходження інтервалу збіжності використовуємо ознаку

Д'Аламбера: $u_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{5n}$ та $u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{5(n+1)}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot x \cdot 5n}{5(n+1) \cdot x^{n+1}} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x| \cdot 1 < 1$. Маємо $-1 < x < 1$. Дослідимо

на кінцях інтервалу. Для $x = -1$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{5n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{5n}$,

порівнюючи з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним, а також враховуючи, що ознака

Лейбніца виконується, робимо висновок, що цей ряд умовно збіжний. Для

$x = 1$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)^n}{5n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n}$ – умовно збіжний аналогічно.

Отже, інтервал збіжності ряду $x \in [-1; 1]$.

Приклад. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_1^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n}$.

Розв'язування.

Для знаходження інтервалу збіжності використовуємо ознаку

Д'Аламбера: $u_n = \frac{(x+2)^n}{5^n}$ та $u_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}}{5^{n+1}}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1} \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot (x+2)^n} \right| = |x+2| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} = |x+2| \cdot \frac{1}{5} < 1$,

маємо $-5 < x + 2 < 5$ або $-5 - 2 < x < 5 - 2$, тому $-7 < x < 3$. Дослідимо на кінцях інтервалу. За $x = -7$ отримаємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7+2)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, для якого теорема Лейбніца не виконується, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n \neq 0$, тому ряд розбіжний. За $x = 3$ отримаємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, для якого не виконується необхідна ознака збіжності ряду, тому ряд розбіжний. Отже, інтервал збіжності ряду $x \in (-7; 3)$, а радіус збіжності $R = 5$.

На інтервалі збіжності степеневий ряд визначає функцію $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ця функція називається сумою степеневого ряду.

Можна довести, що сума степеневого ряду неперервна і має неперервні похідні будь-якого порядку на інтервалі збіжності ряду. Крім того, похідна суми є сумою похідних, тобто $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot u_n x^{n-1}$. Аналогічно

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} \dots$$

Також можна показати, що інтеграл від суми степеневого ряду дорівнює сумі ряду, складеного з інтегралів відповідних членів ряду, тобто

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n x^n dx \text{ для будь-яких } x \in [a; b] \text{ з інтервалу збіжності.}$$

Приклад. Знайти суму степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Розв'язування.

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \div \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Цей ряд збігається на інтервалі $x \in (-1; 1)$ і його сума має неперервну похідну $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}$. Одержаний ряд збіжний на $(-1; 1)$ до функції $\frac{1}{1+x}$ (сума геометричної прогресії). $S'(x) = \frac{1}{1+x}$. Проінтегрувавши його, одержимо $S(x) = \ln|1+x| + C$, де $C = \text{const}$.

Сформулюємо основні властивості степеневих рядів:

Властивість 1

Сума $S(x)$ степеневого ряду (2.13) є неперервною функцією на інтервалі збіжності $(-R; R)$.

Властивість 2

Степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ і $\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$, радіусами збіжності яких відповідно є R_1 і R_2 можна почленно додавати, віднімати, перемножати. Водночас радіус збіжності результувального ряду не менший за найменше з чисел R_1 і R_2 .

Властивість 3

Степеневий ряд всередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності, що і вихідний ряд.

Властивість 4

Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на кожному відрізку всередині інтервалу збіжності. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності, що і вихідний ряд.

Приклад. Знайти радіус збіжності, інтервал збіжності наведених нижче рядів та дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot x)^n;$$

$$в) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2^n}.$$

а) застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n \cdot (n+1)!} = \frac{|x|}{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже, ряд збігається для всіх значень x , тобто $R = \infty$. Інтервал збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$.

Потрібно зауважити, що за необхідною ознакою збіжності загальний член цього ряду прямує до нуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

за будь-якого фіксованого x ;

б) ряд розбігається за всіх x , крім $x = 0$, оскільки $(nx)^n \rightarrow \infty$, яке б не було x , відмінне від нуля. Тут $R = 0$;

в) тут

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{x(n+1)} \right| = |x| \frac{n}{n+1} \rightarrow |x| \quad \text{за} \quad n \rightarrow \infty.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збігається, якщо $|x| < 1$, і розбігається, якщо $|x| > 1$. Отже, $R = 1$ і інтервал збіжності буде таким $(-1; 1)$.

На кінцях інтервалу ($x = \pm 1$) дослідження ряду за допомогою ознаки Д'Аламбера неможливе, тому застосуємо інші ознаки.

За $x = 1$ дістанемо гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

який, як відомо (див. п. 1.2.3), розбігається.

За $x = -1$ дістанемо знакозмінний ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots,$$

який збігається умовно (див. п. 1.3).

Отже, область збіжності ряду визначається системою нерівностей

$$-1 < x < 1;$$

г) застосуємо ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x-3|^{2n}}{2^n}} = \frac{|x-3|^2}{2} < 1,$$

$$|x-3| < \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} < x-3 < \sqrt{2}, \quad 3-\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{2}.$$

Тут $R = \sqrt{2}$, а інтервал збіжності $(3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$.

За $x = 3 \pm \sqrt{2}$ маємо ряд $1+1+1+\dots$, який розбігається. Отже, область збіжності цього ряду $(3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Розв'язування.

1. Якщо існують границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ або } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

то можна знайти радіус збіжності степеневогоряду за формулою Д'Аламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (2.16)$$

або за формулою Коші

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (2.17)$$

Інтервалом збіжності ряду є $-R < x - x_0 < R$, $x_0 - R < x < x_0 + R$.

Тобто ряд збігається в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, розбігається в інтервалах $(-\infty; x_0 - R) \cup (x_0 + R; +\infty)$. В точках $x = x_0 - R$ та $x = x_0 + R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись. Тут потрібні додаткові дослідження. Кожну точку потрібно підставити у вихідний ряд. Отримаємо числовий ряд, який дослідимо за відповідною ознакою (див. п.1.2).

Продемонструємо це графічно (рис. 2.3).



Рисунок 2.3

Зауваження. Формули (2.16) і (2.17) застосовуються лише тоді, коли всі коефіцієнти степеневого ряду a_n не дорівнюють нулю, в протилежному випадку знаходимо $\varphi(x)$ за однією із формул

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} \quad \text{або} \quad \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|},$$

де $f_n(x)$ – загальний член ряду.

За ознаками Даламбера або Коші ряд збігається для $\varphi < 1$ і розбігається для $\varphi > 1$. Отже, знаходимо інтервал збіжності, розв'язуючи нерівність $\varphi(x) < 1$.

1. Досліджуємо поведінку степеневого ряду в граничних точках інтервалу збіжності $x = x_0 \pm R$. Записуємо відповідь.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (x+1)^n.$$

Розв'язування.

1. В цьому випадку $a_n = \frac{(n+1)^5}{2n+1} \neq 0$ для всіх n . Тому можна застосовувати формулу (2.16) або (2.17) для радіуса збіжності степеневогоряду.

За формулою Д'Аламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \div \frac{(n+2)^5}{2n+3} = 1.$$

Отже, інтервал збіжності визначається нерівностями $-1 < x+1 < 1$ і має вигляд $(-2; 0)$.

2. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках інтервалу збіжності. В точці $x = -2$ степеневий ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (-1)^n$$

і в точці $x = 0$ степеневий ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (1)^n$$

Обидва ряди розбігаються, оскільки не задовольняють необхідну умову збіжності рядів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (\pm 1)^n \neq 0.$$

Отже, в цих точках ряд розбігається. Область збіжності степеневогоряду $-(-2; 0)$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x-2)^{2n}.$$

Розв'язування.

1. В цьому випадку $a_n = 0$ для всіх непарних n . Тому не можна застосовувати формули для радіуса збіжності степеневогоряду.

Використаємо ознаку Коші, обчислюємо:

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|},$$

де $f_n = \frac{1}{n+1}(x-2)^{2n}$.

Знаходимо $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}(x-2)^{2n}} = (x-2)^2.$$

За ознакою Коші, ряд збігається за $\varphi < 1$ і розбігається за $\varphi > 1$. Отже, інтервал збіжності знаходиться із нерівності $(x-2)^2 < 1$.

2. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках інтервалу збіжності.

В точці $x=1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^{2n}$$

розбігається.

В точці $x=3$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

розбігається. Тому область збіжності степеневому ряду $(1;3)$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти область збіжності степеневих рядів.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n9^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x+3)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2 3^n} (x+2)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^n} (x+4)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (x+2)^{2n+1}$

Відповідь. 1. $(-7; 11)$. 2. $(2; 4)$. 3. $(-7; -3)$. 4. $[-2; 1)$.
 5. $[-1; 5)$. 6. $[1; 5]$. 7. $[-4; -2]$. 8. $[-5; 1)$.
 9. $(-6; -2]$. 10. $(-\infty; +\infty)$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n} + 1)^{x+1}}.$$

Розв'язування.

1. Для кожного фіксованого x всі члени ряду додатні:

$$a_n = \frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n} + 1)^{x+1}} > 0 \quad n \geq 1.$$

2. Використовуємо другу (граничну) теорему порівняння. Маємо

$$\frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n} + 1)^{x+1}} \sim \frac{1}{n^{2(x+1)-3}} \quad \text{за } n \rightarrow \infty.$$

Оскільки за $2(x+1) - 3 > 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(x+1)-3}}$$

збігається, а за $2(x+1) - 3 \leq 1$ – розбігається (як узагальнений гармонічний), то за другою теоремою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2 + \sqrt{n} + 1)^{x+1}}$$

збігається для всіх $x > 1$. Тому, область збіжності ряду $(1; \infty)$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(x^2 - 4x + 7)^n}.$$

Розв'язування.

1. Для того, щоб застосувати ознаку Д'Аламбера, знаходимо $\phi(x)$ за формулою

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_n|} = \frac{\frac{4^{n+1}}{(n+1)^3 |x^2 - 4x + 7|^{n+1}}}{\frac{4^n}{n^3 |x^2 - 4x + 7|^n}} = \frac{4}{|x^2 - 4x + 7|}.$$

2. Оскільки за ознакою Д'Аламбера ряд збігається за $\varphi < 1$ і розбігається за $\varphi > 1$, знаходимо інтервал збіжності, розв'язуючи нерівність $\varphi(x) < 1$:

$$\frac{4}{|x^2 - 4x + 7|} < 1,$$

Отримуємо $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$.

3. Проведемо дослідження на збіжність ряду в граничних точках:

за $x=1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

збігається (як узагальнений гармонічний, $p = 3 > 1$);

за $x=3$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ також збігається. Область збіжності ряду $-(-\infty; 1] \cup [3; \infty)$

Завдання для самостійної роботи

Знайти область збіжності функціональних рядів.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^{x+3}}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x^2 - 6x + 10)^n}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^{x^2+4x} + 3}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2 - 5x + 9)^n}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2-2} + 1}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2(x^2 + 3)^n}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n + \sqrt{n})^x}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2 - 4x + 8)^n}.$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^{3+3x-x^2}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2 (x^2 - 2x + 6)^n}.$$

Відповідь.

1. $(3; +\infty)$. 2. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. 3. $(-\infty; 5) \cup (1; +\infty)$. 4. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.
 5. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 6. $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$. 7. $(3; +\infty)$. 8. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
 9. $(0; 3)$. 10. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Алгоритм обчислення радіуса збіжності степеневих рядів узагальнимо у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3 – Обчислення радіусу збіжності степеневих рядів

Загальний вигляд ряду	Ознака	Границя	Межі інтервалу	Кінці інтервалу
$\sum_{n=1}^{\infty} (x - x_0)^n \cdot a_n$	Д'Аламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = x - x_0 \cdot l$	$ x - x_0 \cdot l < 1$ збіжний	$-\frac{1}{l} + x_0 < x < \frac{1}{l} + x_0$ $x \in \left(-\frac{1}{l} + x_0; \frac{1}{l} + x_0 \right)$	$x = \frac{1}{l} + x_0$ $x = -\frac{1}{l} + x_0$
$\sum_{n=1}^{\infty} (x - x_0)^n \cdot a_n$	Радикальна ознака Коші. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(x - x_0)^n \cdot a_n} = x - x_0 \cdot l$	$ x - x_0 \cdot l > 1$ розбіжний	$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{l} + x_0 \right) \cup \left(\frac{1}{l} + x_0; +\infty \right)$	$x = \frac{1}{l} + x_0$ $x = -\frac{1}{l} + x_0$

2.4 Ряди Тейлора і Маклорена

2.4.1 Основні поняття

У п. 2.3 встановлено, що для степеневого ряду його сума $S(x)$ в інтервалі збіжності цього ряду є функцією, визначеною (можливо, і в одному або обох кінцях інтервалу), неперервною та нескінченно диференційованою.

Розглянемо обернену задачу: задано функцію $f(x)$, знайти степеневий ряд, сумою якого є задана функція $f(x)$. Таку задачу називають задачею розвинення функції $f(x)$ у степеневий ряд.

Таким чином, завдання полягає в тому, щоб з'ясувати, яку функцію і в якій області можна розгорнути у степеневий ряд.

Важливість такого розвинення полягає в тому, що функцію $f(x)$ можна наближено замінити сумою n перших членів степеневого ряду, тобто многочленом, а обчислення значень многочлена потребує виконання лише найпростіших арифметичних операцій. Потрібно також додати, що з'являється можливість оцінювання точності отриманих наближених значень функції або знаходження значення аргументу за заданими значеннями функції. Заміна функції $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ спрощує як в математиці, так в її застосуваннях, розв'язання задач аналізу, обчислення інтегралів, розв'язання функціональних та диференціальних рівнянь тощо.

Раніше (у диференціальному численні функції однієї змінної) було показано, що функцію $f(x)$, яка має всі похідні до $(n+1)$ -го порядку включно, в околі точки $x = x_0$, можна подати формулою Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (2.18)$$

де залишковий член якої $R_n(x)$ у формі Лагранжа має вигляд:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (2.19)$$

де точка ξ лежить між x і x_0 .

Якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційована в околі точки $x = x_0$, то у формулі Тейлора n можна брати як завгодно великим. Припустимо, що в околі точки x_0 залишковий член формули Тейлора прямує до нуля за $n \rightarrow \infty$.

Тоді, перейшовши в формулі (2.18) до границі за $n \rightarrow \infty$, дістанемо в правій частині формули (2.18) ряд, який називають *рядом Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{x-x_0}{1!} + \dots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots \quad (2.20)$$

Рівність (2.18) справедлива тільки в тому випадку, коли залишковий член формули Тейлора $R_n(x) \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$ і $x, x_0 \in [a; b]$. Тоді ряд у формулі (2.20) збігається, і його сума дорівнює цій функції $f(x)$. Нехай $S_n(x)$ є частковою сумою ряду у формулі (2.20). Тоді функцію $f(x)$ можна подати у вигляді суми часткової суми ряду та залишкового члена формули Тейлора

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

$$\text{де } S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ за $x \in (-R+x_0; x_0+R)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$, $x \in (-R+x_0; x_0+R)$. Отже, функція $f(x)$ є сумою ряду Тейлора.

Отже стає зрозумілим, що функція подається рядом Тейлора (2.20) на відріжку $[a; b]$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ за $x, x_0 \in [a; b]$. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, то ряд не збігається до цієї функції, хоча він може і збігатися, проте, до іншої функції.

Приклад Коші. Функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

в точці $x = 0$ має похідні будь-якого порядку і всі вони дорівнюють нулю.

Дійсно, значенню аргумента $x_0 = 0$ надамо приріст Δx , тоді $x_0 + \Delta x = \Delta x$. Обчислимо приріст функції

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = e^{-\frac{1}{(x_0 + \Delta x)^2}} - f(0) = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}.$$

Якщо $x \neq 0$, то похідна в цих точках дорівнює

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Якщо $x = 0$, то значення похідної першого порядку обчислимо за означенням, скориставшись правилом Лопіталя:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \left(-\frac{2}{(\Delta x)^3}\right)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x) \cdot e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{2} = 0.$$

Аналогічно переконуємося в тому, що $f''(0) = f'''(0) = \dots = 0$.

Отже, ряд Тейлора цієї функції має вигляд:

$$f(x) \sim 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots$$

Сума ряду збігається із значенням функції $f(x)$ лише в одній точці $x = 0$.

В точках $x \neq 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$ сума ряду не збігається із значеннями функції $f(x)$.

Зауваження. Ряд Тейлора функцій, які розглядатимуться нижче, збігається до функції $f(x)$ в області його збіжності.

Якщо у формулі (2.20) покласти $x_0 = 0$, то дістанемо ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (2.21)$$

який називають *рядом Маклорена*.

Отже, якщо $f(x)$ нескінченно диференційовна в околі точки $x = x_0$, то за формулою Тейлора число « n » можна брати як завгодно великим.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Припустимо, що в розглядуваному околі залишок $R_n(x) \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$. Якщо перейти в формулі Тейлора до границі за $n \rightarrow \infty$, дістанемо праворуч нескінченний ряд, що **називають рядом Тейлора** виду:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2.22)$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то дістанемо **ряд Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2.23)$$

Формально ряд Тейлора можна побудувати для будь-якої нескінченно диференційовної функції в околі точки x_0 , але це ще не означає, що він буде збіжним до цієї функції $f(x)$. Нехай для функції $f(x)$ побудований відповідний їй ряд Тейлора.

Теорема

Для того, щоб ряд Тейлора (2.22) збігався до $f(x)$ в точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб в цій точці залишковий член формули Тейлора рухався до нуля за $n \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Таким чином задача розкладу функції в степеневий ряд зводиться до знаходження значень x , для яких $R_n(x) \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$.

Теорема

Якщо модулі всіх похідних функції $f(x)$ обмежені в околі точки x_0 числом $M > 0$, то для будь-якого x з цього околу ряд Тейлора функції $f(x)$ збігається до функції $f(x)$, тобто має місце розклад (2.22).

Приклад. Розгорнути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора за степенями x , ($x_0 = 0$).

Розв'язування.

1. Перетворимо функцію $f(x)$ до вигляду, який допускає використання табличних рядів функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$.

2. Знаходимо ряд Тейлора функції, використавши табличний ряд та дії додавання (віднімання) рядів, множення ряду на число.

3. Визначаємо область збіжності отриманого ряду до функції $f(x)$.

Зауваження. Якщо необхідно розгорнути функцію в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, то спочатку робимо заміну змінної $t = x - x_0$, знаходимо ряд за степенями t і повертаємося до змінної x .

Приклад. Розгорнути функцію

$$f(x) = \frac{3}{2 - x - x^2}$$

в ряд Тейлора за степенями x , ($x_0 = 0$).

Розв'язування.

1. Щоб застосувати табличний ряд, розкладаємо задану функцію на елементарні дробі:

$$\frac{3}{2 - x - x^2} = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x + 2}.$$

2. Використовуємо табличний ряд

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1; 1).$$

отримуємо

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1).$$

$$\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad x \in (-2; 2).$$

Таким чином,

$$\frac{3}{2 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) \cdot x^n.$$

3. Областю збіжності отриманого ряду є перетин вищевказаних областей збіжності, тобто $(-1; 1) \cap (-2; 2) = (-1; 1)$.

Отже, $\frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) \cdot x^n, \quad \forall x \in (-1; 1).$

Завдання для самостійної роботи

Розгорнути функції в ряди Тейлора ($x_0 = 0$).

1. $\frac{5}{6-x-x^2}.$
2. $\ln(1-x-20x^2).$
3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$
4. $\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$
5. $\frac{x}{3+2x}.$
6. $\sqrt[4]{16+x}.$
7. $xe^{2x^2+1}.$
8. $\frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}.$
9. $\ln(12x^2+7x+1).$
10. $\cos^2 3x.$

Відповідь.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n, x \in (-2, 2).$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n - 5^n}{n} x^n, x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty).$
4. $\frac{x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n 3^{2n+1}} x^{2n+1}, \quad x \in (-3, 3).$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} x^{n+1}, x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$
6. $2 + \frac{x}{32} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-5)}{2^{6n-1} n!} x^n, x \in [-16, 16].$
7. $e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{2n+1}, x \in (-\infty, +\infty).$

$$8. \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{n! 3^{4n+1}} x^n, x \in [-27, 27].$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^n + 3^n}{n} x^n, x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

$$10. 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{2n}}{2(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty).$$

2.4.2 Розвинення в ряд Маклорена деяких функцій

Розвинення в ряд Маклорена функції $f(x) = e^x$

Всі похідні від функції e^x також дорівнюють e^x :
 $f'(x) = f''(x) = \dots = f^n(x) = e^x$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) і в точці $x = 0$ вони дорівнюють
 $f'(0) = f''(0) = \dots = f^n(0) = e^0 = 1$. За формулою Маклорена (2.23) одержуємо ряд, збіжність якого до функції e^x ще необхідно обґрунтувати:

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2.24)$$

Згідно з формулою Лагранжа залишковий член формули Тейлора має вигляд:

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0; x).$$

Обчислимо границю залишкового члена:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} = e^{\xi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Оскільки залишок прямує до нуля за будь-якого скінченного значення x , то такий ряд збігається і його сума дорівнює e^x за будь-якого x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2.25)$$

Розвинення функції $f(x) = \sin(x)$ в ряд Маклорена

Знаходимо послідовно похідні від $f(x) = \sin(x)$ та обчислюємо значення функції і її похідних в точці $x=0$. Крім того, визначимо загальний вигляд похідної $f^n(x)$:

$$f(x) = \sin x,$$

$$f(0) = \sin 0 = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(0) = -\cos 0 = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0,$$

.....

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

.....

.....

Підставивши отримані значення функції та її похідних у формулу (2.23), отримаємо ряд функції $f(x) = \sin(x)$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.26)$$

Доведення того факту, що залишок $\frac{(-1)^n x^{2n+1} \cos \xi x}{(2n+1)!}$ прямує до нуля за будь-якого x , тобто, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, проводиться аналогічно до попереднього випадку.

Розглянутий спосіб розвинення функції в ряд на основі формули (2.23) є загальним, проте в багатьох, практично важливих випадках, розвинення функцій в ряд Тейлора можна отримати на основі властивості диференціювання степеневих рядів. Розглянемо приклади.

Диференціювання степеневих рядів

Диференціюванням обох частин рівності (2.26) дістанемо розвинення в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos(x)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2.27)$$

Алгебраїчні перетворення

Під час розвинення функцій у степеневий ряд використовують уже відомі розвинення, наприклад, формули (2.24), (2.26), (2.27). Розглянемо випадок використання алгебраїчних перетворень на прикладі розвинення в ряд Маклорена гіперболічних функцій із використанням формули (2.24).

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

У розвиненні функції $f(x) = e^x$ (2.24) замінимо x на $(-x)$, тоді

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2.28)$$

Якщо від ряду (2.24) відняти ряд (2.28) та поділити на 2, то отримаємо ряд функції $\operatorname{sh} x$;

якщо ж вказані ряди додати та розділити на 2, то дістанемо ряд функції chx :

$$\begin{aligned} shx &= 1 + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ chx &= 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2 \cdot n)!}. \end{aligned} \quad x \in (-\infty < x < +\infty)$$

Біномний ряд

Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = (1+x)^m, \quad (2.29)$$

де m – довільне дійсне число.

Зауважимо, що функція (2.29) задовольняє диференціальне рівняння

$$(1+x) \cdot f'(x) = m \cdot f(x) \quad (2.30)$$

і початкову умову $f(0)=1$. Тоді степеневий ряд, сума якого задовольняє рівняння (2.30) і умову $f(0)=1$, шукаємо у вигляді:

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Оскільки за початковою умовою $S(0)=1$, то, підставивши $x=0$ у ліву та праву частини, отримаємо $a_0=1$, і ряд запишеться у вигляді:

$$S(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.31)$$

Підставивши у рівняння (2.30) замість $f(x)$ і $f'(x)$ відповідно $S(x)$ і $S'(x)$, дістанемо тотожність

$$(1+x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) = m(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots).$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах тотожності, знаходимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів

$$a_1 = m,$$

$$a_1 + 2a_2 = m \cdot a_1,$$

...

$$n \cdot a_n + (n+1) \cdot a_{n+1} = m \cdot a_n,$$

...

Звідси, розв'язавши послідовно систему, отримаємо коефіцієнти ряду

$$a_0 = 1, \quad a_1 = m, \quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3},$$

.....

$$a_n = \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n},$$

.....

які називаються біномними коефіцієнтами. Підставивши їх у формулу (2.31), дістанемо степеневий ряд:

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot x^n + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} \cdot x^n. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Якщо m – ціле додатне число, то починаючи з члена, в якому міститься x^{m+1} , всі коефіцієнти дорівнюють нулю, степеневий ряд перетворюється на многочлен. Якщо m – дробове число або ціле від'ємне, то отримаємо ряд. Визначимо радіус збіжності ряду (2.32):

$$u_{n+1}(x) = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot x^n, \quad u_n(x) = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+2)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)(n-1)!}{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+2)n!} \cdot x \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n+1}{n} \right| = |x|.$$

Таким чином, ряд (2.32) збігається, якщо $|x| < 1$. Можна довести, що ряд збігається до функції $(1+x)^m$ (тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ за умови $|x| < 1$).

В інтервалі $(-1;1)$ ряд (2.32) зображає функцію $S(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння (2.32) і умову $S(0) = 1$.

Оскільки диференціальне рівняння (2.30) і початкову умову $S(0) = 1$ задовольняє лише єдина функція, то сума ряду (2.32) тотожно дорівнює функції $(1+x)^m$, і тоді біномний ряд має вигляд:

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots, \quad |x| < 1. \quad (2.33)$$

Зокрема, для $m = -1$ дістаємо ряд геометричної прогресії, знаменник якої $q = -x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| < 1. \quad (2.34)$$

Для $m = 0,5$ біномний ряд має вигляд:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3 - \frac{5}{128} \cdot x^4 + \frac{7}{256} \cdot x^5 - \frac{21}{1024} \cdot x^6, \quad |x| < 1.$$

Для $m = -0,5$ біномний ряд набуває вигляду:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{5}{16} \cdot x^3 + \frac{35}{128} \cdot x^4 - \frac{63}{256} \cdot x^5 + \frac{231}{1024} \cdot x^6, \quad |x| < 1. \quad (2.35)$$

Узагальнимо отримані розклади для елементарних функцій у вигляді таблиці.

Таблиця 4 – Розклад елементарних функцій в ряд

Елементарна функція.	Інтервал збіжності
$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$4. (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$x \in \begin{cases} [-1, 1], & m \geq 0, \\ (-1, 1], & -1 < m < 0, \\ (-1, 1), & m \leq -1 \end{cases}$
$5. \arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + \dots$	$x \in [-1, 1]$
$6. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \in (-1, 1]$
$7. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in [-1, 1]$

2.5 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Нехай необхідно знайти значення функції $f(x)$ в точці $x = x_1$ із заданою точністю $\varepsilon > 0$. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(-R; R)$ можна розкласти в степеневий ряд і $x_1 \in (-R; R)$, то точне значення $f(x_1)$ дорівнює сумі цього ряду за умови $x = x_1$, тобто $u_0 + u_1x_1 + u_2x_1^2 + \dots + u_nx_1^n + \dots$, а наближене – частинній сумі $S_n(x_1)$, тобто:

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = u_0 + u_1x_1 + u_2x_1^2 + \dots + u_nx_1^n.$$

Точність цієї рівності збільшується із збільшенням n . Абсолютна похибка цієї наближеної рівності дорівнює модулю залишку ряду, тобто:

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)|, \text{ де } R_n(x_1) = u_{n+1}x_1^{n+1} + u_{n+2}x_1^{n+2} + \dots$$

Таким чином, похибку $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ можна знайти, оцінивши залишок ряду $R_n(x_1)$. Для рядів Лейбніца: $R_n(x_1) = |u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + \dots| < |u_{n+1}(x_1)|$. В інших випадках складають ряд із модулів членів ряду і для нього намагаються знайти додатний ряд (як правило, це ряд геометричної прогресії), суму якого б можна було легко знайти. Як оцінку $|R_n(x_1)|$ беруть величину залишку цього утвореного ряду.

Елементарні функції розкладають в ряд Маклорена за степенями x . Похибку, яку допускають під час заміни функції (суми ряду) многочленом, можна визначити, оцінивши залишковий член ряду, обчисленням значень функцій.

Приклад. Знайти наближено $\sin 1$ з точністю до 0,001.

Розв'язування.

Запишемо розклад в ряд функції $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

Покладемо $x=1$ тоді $\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \dots$. Якщо відкинути всі члени, починаючи з 4-го, то похибка буде за абсолютною величиною менша за $\frac{1}{7!} \approx 0,0002 < 0,001$ (за теоремою Лейбніца). Звідси

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{120 - 20 + 1}{120} \approx 0,8417 \text{ (з точністю до 0,001).}$$

Приклад. Обчислити число e з точністю до 0,001.

Розв'язування.

Запишемо розклад функції для $x=1$: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$. Маємо знакододатний ряд. Візьмемо n доданків і оцінимо похибку $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) = \frac{1}{n \cdot n!},$$

тобто $R_n(x) < \frac{1}{n \cdot n!}$. Підберемо найменше натуральне число n , щоб

виконувалась нерівність $\frac{1}{n \cdot n!} < 0,001$. Ця нерівність виконується за $n \geq 6$.

Тому маємо: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,718$.

Наближене обчислення інтегралів

Нескінченні ряди застосовуються також для наближених обчислень невизначених та визначених інтегралів в тому випадку, коли первісна не виражається в кінцевому вигляді через елементарні функції або ж знаходження первісної ускладнене.

Інтеграли, які не беруться в кінцевому вигляді через елементарні функції

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_a^b e^{x^2} dx, \dots, \int_a^b \sqrt[3]{1+x^5} dx, \text{ обчислюють за допомогою рядів.}$$

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ з точністю до $\varepsilon > 0$.

Якщо підінтегральну функцію можна розкласти в ряд по степенях x та інтервал збіжності $(-R; R)$ містить в собі відрізок $[a; b]$, то для обчислення цього інтеграла можна скористатися властивістю почленного інтегрування такого ряду.

Похибку обчислення визначають аналогічно обчисленню значень функції.

Приклад. Обчислити $\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язування.

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$. Замінімо x на $\frac{-x^2}{2}$, отримуємо:

$$e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 + \frac{\frac{-x^2}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^3}{3!} + \dots$$

Проінтегруємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx &= \int_0^1 \left(1 + \frac{\frac{-x^2}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^3}{3!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} - \dots \end{aligned}$$

Знайдемо член ряду, менший за задану точність

$\frac{1}{3456} = 2,89935185 \cdot 10^{-4} < 0,001$. Тому всі члени ряду, починаючи з 5-го,

відкидаємо: $\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} \approx 0,855$.

Наближене розв'язування диференціальних рівнянь

Якщо розв'язок диференціального рівняння не виражається через елементарні функції в кінцевому вигляді або спосіб його розв'язування занадто складний, то для наближеного розв'язування можна використати ряд Тейлора.

Якщо не вдається проінтегрувати диференціальне рівняння в елементарних функціях, то його розв'язок, що задовольняє деяку початкову умову, шукаємо у вигляді степеневого ряду:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння у вигляді розкладу до четвертого відмінного від нуля члена $y' = x^2 + xy + 1$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язування.

За умовою задано $y(0) = 1$, тоді $y'(0) = 0^2 + 0 \cdot 1 + 1 = 1$.

Знайдемо $y'' = 2x + y + xy'$ і значення за $x = 0$: $y'' = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, також і інші похідні $y''' = 2 + y' + y' + xy''$ і значення за $x = 0$: $y''' = 4$.

Можемо записати розв'язок $y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}$.

Приклад. Обчислити $\sqrt[3]{28}$ з точністю до 0,00001.

Розв'язування.

Для обчислення використаємо біномний ряд

$$(1 + x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

З цією метою виконаємо перетворення:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27 + 1} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{27}} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Отже, ряд використовуємо за $x = \frac{1}{27}$, $m = \frac{1}{3}$:

$$3\left(1 + \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2} \frac{1}{27^2} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{6} \frac{1}{27^3} + \dots \right) =$$

$$3 \left(1 + \frac{1}{81} - \frac{1}{6561} + \frac{5}{1594323} - \frac{10}{129140163} \right) = 1,0121948747.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Розв'язування.

Замінивши функції e^x та $\sin(x)$ відповідними рядами Маклорена, отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^x - 2 - 2 \cdot x - x^2}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2. \end{aligned}$$

Інтегрування функцій

Під час вивчення теорії імовірностей важливу роль відіграє функція Лапласа

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Наведений інтеграл в закінченому вигляді не обчислюється, оскільки інтеграл $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ не виражається в елементарних функціях.

Розвинемо підінтегральну функцію в ряд. З цією метою у формулу (2.37) підставимо замість x вираз $\frac{-t^2}{2}$:

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 2!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n \cdot n!}.$$

Тоді функція $\phi(x)$ буде подана рядом

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \dots \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot 2^n \cdot n!},$$

що збігається на всій числовій осі і який можна використати для обчислення значень функції $\phi(x)$.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_0^b f(x) dx$$

з точністю α , де $f(x)$ розвинена в степеневий ряд, який має радіус збіжності $R > b$.

Розв'язування.

Практично обчислення зводиться до додавання того чи іншого числового ряду. В цьому випадку такий ряд отримується, якщо розгорнути підінтегральну функцію у степеневий ряд і зінтегрувати його почленно.

1. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд за степенями x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

і визначаємо його область збіжності.

2. Степеневий ряд можна інтегрувати почленно на будь-якому відрізку, який належить інтервалу збіжності. Тому, проінтегрувавши почленно отриманий ряд і використавши формулу Ньютона–Лейбніца, отримуємо

$$\int_0^b f(x) dx = \int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

3. Обчислюємо суму числового ряду з заданою точністю (оцінюючи остачу ряду).

Зауваження. Якщо розгорнути підінтегральну функцію в ряд не за степенями x , а за степенями $\left(x - \frac{b}{2}\right)$, то ряд буде збігається швидше, тобто для забезпечення заданої точності може знадобитись менше доданків, але, як наслідок, обчислення буде складнішим.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx$$

з точністю $\alpha = 0,001$.

Розв'язування.

1. Розгорнути підінтегральну функцію в ряд Тейлора за степенями x

$$\begin{aligned} \cos(100x^2) &= 1 - \frac{(10^2 x^2)^2}{2!} + \frac{(10^2 x^2)^4}{4!} - \frac{(10^2 x^2)^6}{6!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(10^2 x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n} x^{4n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Розвинення справедливе для всіх x .

2. Інтегруємо почленно отриманий ряд:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,1} \cos(10^2 x^2) dx &= \int_0^{0,1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n} x^{4n}}{(2n)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!} \int_0^{0,1} x^{4n} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{4n}}{(2n)!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \Big|_0^{0,1} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}. \end{aligned}$$

3. Оцінюємо залишок ряду. Оскільки ряд знакозмінний,

$$a_n = \frac{1}{10(4n+1)(2n)!} > a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}$$

і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то справедлива нерівність

$$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{10(4n+5)(2n+2)!}.$$

Для обчислення інтеграла з заданою точністю достатньо взяти два члени ряду, оскільки

$$R_1 \leq \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 4!} < 0,001.$$

4. Виконуючи обчислення, отримуємо

$$\int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{10 \cdot 5 \cdot 2!} \approx 0,090.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли з точністю $\alpha = 0,001$.

$$1. \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$2. \int_0^1 \sin x^2 dx.$$

$$3. \int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

$$4. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx.$$

$$5. \int_0^{0,5} e^{-x^2/4} dx.$$

$$6. \int_0^{2/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} dx.$$

$$7. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx.$$

$$8. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$$

$$9. \int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$10. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}} dx.$$

Відповідь. 1. 0,747.

2. 0,310.

3. 0,494.

4. 0,190.

5. 0,508.

6. 0,490.

7. 0,662.

8. 0,608.

9. 0,012.

10. 0,495.

Інтегрування диференціальних рівнянь

За допомогою степеневих рядів в деяких випадках можна знаходити й загальні розв'язки диференціальних рівнянь, проте найчастіше вдається знайти тільки розв'язок, що задовольняє початкову умову.

Як правило, розв'язок у вигляді степеневого ряду

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2.36)$$

відшукується у таких випадках, коли не вдається зінтегрувати диференціальне рівняння в елементарних функціях. Невизначені коефіцієнти a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ знаходяться шляхом підстановки ряду (2.36) в рівняння і порівнянням коефіцієнтів при однакових степенях бінома $x - x_0$ в лівій та правій частинах отриманої рівності. З цим способом ми ознайомились під час знаходження біномного ряду (пункт 2.4.2). Особливо зручно таким методом розв'язувати лінійні диференціальні рівняння.

Можна також шукати розв'язок у вигляді ряду Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Розглянемо застосування методу невизначених коефіцієнтів до побудови розв'язку задачі Коші у вигляді степеневого ряду. Крім того з'ясуємо, яким чином можуть вводитись нові функції.

Якщо точка $x = 0$ є особливою точкою диференціального рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x),$$

тобто вона є точкою розриву коефіцієнтів $p_1(x)$, $p_2(x)$ і $q(x)$, то розв'язок можливо і не записуватиметься у вигляді суми степеневого ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (2.37)$$

Подамо розв'язок диференціального рівняння у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^{\alpha} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots),$$

де α – деяке дійсне число.

Якщо $\alpha \geq 0$ і $\alpha = m$, то цей узагальнений степеневий ряд збігається із рядом (2.37).

3 РЯДИ ФУР'Є

3.1 Гармоніки

Означення. Функція синуса або косинуса лінійного аргументу називається гармонікою

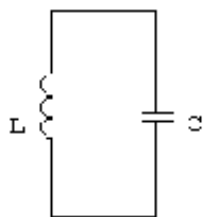
$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \text{ або } f(t) = A \cos(\omega t + \phi_0). \quad (3.1)$$

Більшість фізичних процесів, наприклад, вільне коливання математичного маятника, змінний струм в коливальному контурі та інші описуються диференціальним рівнянням.

Приклад. Знайти характер зміни напруги струму на конденсаторі контура, зображеного на рис. 3.1.

Розв'язування.

Запишемо рівняння, яке характеризує зміну напруги в контурі.



$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + U_c = 0. \text{ Розв'язок рівняння має вигляд}$$

$$u_c = A_1 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t + A_2 \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t,$$

Рисунок 3.1 – Контур конденсатора де $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Відповідь можна записати також у вигляді гармоніки $U_c = A \cos(\omega t + \varphi)$. Формули для обчислення A та φ будуть наведені нижче.

Для побудови гармоніки $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ достатньо побудувати її на періоді T . Для цього необхідно:

1. Визначити одну з точок перетину гармоніки з віссю Ot : $\cos(\omega t + \varphi) = 0$ звідси, наприклад, $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ та $t_0 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$. Цю точку вибираємо як початок відрізка довжиною $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
2. Знайти кінцеву точку цього відрізка

$$t_2 = t_0 + T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} = \frac{5\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}.$$

3. Визначити середину відрізка $t_1 = \frac{t_2 + t_0}{2} = \frac{3\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$, де гармоніка також перетинає вісь Ot .

4. На вказаному відрізку $\{t_0, t_2\}$ побудувати графік функції $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

5. Визначити точки $t_1 = \frac{1}{2}(t_1 + t_0)$ та $t_2 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, в яких гармоніка набуває максимального значення A та мінімального значення $-A$, тощо.

6. Продовжити отриманий графік на всю числову вісь, отримаємо (рис. 3.2) графік гармоніки $f(t) = A(\cos \omega t + \varphi)$.

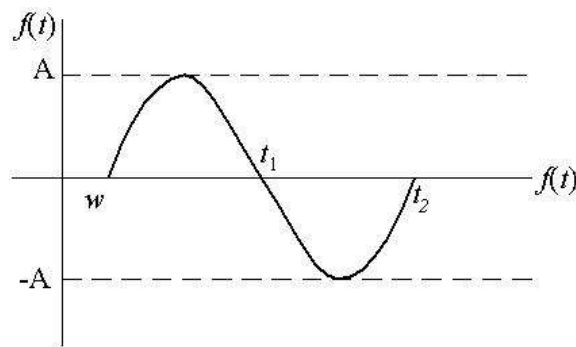


Рисунок 3.2 – Графік гармоніки $f(t) = A(\cos \omega t + \varphi)$

3.2 Розвинення функцій в ряд Фур'є за ортогональними системами функцій

Нехай на проміжку $[a, b]$ задано ортогональну систему функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots \quad (3.2)$$

Означення. Ряд

$$C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n(t), \quad (3.3)$$

де C_n , $n=1, 2, \dots$ – довільні числові коефіцієнти, називається рядом Фур'є за ортогональною системою функцій (3.2).

Побудуємо ряд (3.3) функції $f(t)$, заданої на відрізку $[a; b]$.

Нехай на проміжку $[a;b]$ задано неперервну функцію $f(t)$ і ортогональну систему функцій (3.2).

Припустимо, що $f(t)$ може бути подана рядом за системою (3.2), тобто, за умови $t \in [a;b]$ маємо:

$$f(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) + \dots \quad (3.4)$$

де C_n , $n=1,2,\dots$ – коефіцієнти.

Визначимо ці коефіцієнти за умови, що ряди

$$f(t)\varphi_k(t) = C_1\varphi_1(t) \cdot \varphi_k(t) + \dots + C_k\varphi_k(t) \cdot \varphi_k(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) \cdot \varphi_k(t) + \dots \quad (3.5)$$

для $k=1,2,\dots$, можемо почленно інтегрувати за $t \in [a;b]$.

Ряд (3.5) одержано із ряду (3.4) множенням на функцію $\varphi_k(t)$. Зінтегруємо ліву та праву частину ряду (3.5), отримаємо

$$\int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt = C_1 \int_a^b \varphi_1(t) \cdot \varphi_k(t)dt + \dots + C_k \int_a^b \varphi_k(t) \cdot \varphi_k(t)dt + \dots + C_n \int_a^b \varphi_n(t) \cdot \varphi_k(t)dt + \dots$$

За означенням ортогональності системи функцій (3.2) всі інтеграли, окрім одного, дорівнюють нулю:

$$\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_k(t)dt = 0 \text{ за } k \neq i \text{ та позначимо } \int_a^b [\varphi_k(t)]^2 dt = (\varphi_k)^2.$$

Тоді отримаємо

$$\int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt = C_k (\varphi_k)^2.$$

Отже, формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є мають вигляд:

$$C_k = \frac{1}{(\varphi_k)^2} \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt, \quad k=1,2,3,\dots \quad (3.6)$$

Таким чином, якщо для заданої функції $f(t)$ будується ряд за системою функцій (3.2) (можливість такого розвинення буде з'ясовано нижче), то коефіцієнти ряду (3.4) визначаються за формулою (3.6).

Означення. Ряд $C_1\varphi_1(t) + \dots + C_k\varphi_k(t) + \dots$, коефіцієнти якого визначаються за формулою (3.6), називається рядом Фур'є функції $f(t)$ за ортогональною системою функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$. Коефіцієнти C_k , які обчислюються за формулою (3.23), називаються коефіцієнтами Фур'є.

Зауваження 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k\varphi_k(t)$, може і не збігатися до функції $f(t)$, хоча під час обчислення коефіцієнтів C_k за формулами (3.4) використовується функція $f(t)$. Тому до з'ясування умов збіжності ряду до функції $f(t)$ будемо замість знака « $=$ » писати символ « $\sim$ »:

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k\varphi_k(t).$$

2. Якщо ортогональна система функцій (3.19) нормована, то коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$C_k = \int_a^b f(t)\phi_k(t)dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

або $C_k = (f; \phi_k)$.

3. Система функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ є аналогом до координат базису у випадку розвинення вектора за базисом.

4. У подальшому будуть розглядатися ряди Фур'є за системами функцій, тобто за тригонометричними функціями. Такі ряди називаються *тригонометричними рядами Фур'є*.

З іншого боку, часто визначення ряду Фур'є «будують» через поняття гармонік.

Найпростішими періодичними функціями є тригонометричні $\sin x$, $\cos x$. Найпростішим періодичним процесом є просте гармонічне коливання (рух), який задається функцією $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, де A – амплітуда коливання, ω – частота, φ_0 – початкова фаза. Основний період функції $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Функцію такого типу називають **простою гармонікою**. Перетворимо її:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin \omega t \cos \varphi_0 + A \cos \omega t \sin \varphi_0 = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

де $a = A \cos \varphi_0$, $b = A \sin \varphi_0$. Звідси випливає, що просте гармонічне коливання описується періодичними функціями $\cos \omega t$, $\sin \omega t$.

Виникає питання, чи будь-яку періодичну функцію, яка описує періодичний процес, можна подати у вигляді суми простих гармонік, якщо так, то яким чином знайти коефіцієнти гармоніки? За допомогою тригонометричного ряду практично будь-яку періодичну функцію можна подати у вигляді ряду, членами якого є прості гармоніки.

Періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ можна подати у вигляді тригонометричного ряду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.8)$$

де a_0, a_n, b_n – коефіцієнти тригонометричного ряду,

$\frac{a_0}{2}$ – вільний член.

Припустимо, що ряд (3.8) можна інтегрувати на відрізку $[-\pi, \pi]$. Знайдемо коефіцієнти a_0, a_n, b_n . Для цього проінтегруємо (3.8) в межах від $-\pi$

$$\text{до } \pi: \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0.$$

$$\text{Звідси} \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (3.9).$$

Для знаходження решти коефіцієнтів потрібно розглянути деякі інтеграли. Якщо n і k – цілі числа, то мають місце такі рівності: якщо $n \neq k$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx = 0$; якщо $n = k$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$.

Помножимо обидві частини рівності (3.8) на $\cos kx$ і проінтегруємо в межах від $-\pi$ до π . Враховуючи описані вище інтеграли, одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx + n_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx \right) = \\ &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \pi. \end{aligned}$$

Звідси
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (3.10)$$

Аналогічно знайдемо коефіцієнт b_k , помноживши обидві частини рівності (3.8) на $\sin kx$. Одержимо:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (3.11)$$

Означення. Тригонометричний ряд (3.8), коефіцієнти якого обчислюються за формулами (3.9), (3.10), (3.11), називають рядом Фур'є функції $f(x)$, а коефіцієнти a_0, a_n, b_n – коефіцієнтами ряду Фур'є функції $f(x)$.

3.3 Умови розвинення функції в тригонометричні ряди Фур'є

Встановимо достатні умови збіжності ряду Фур'є до функції $f(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$. Введемо додаткові означення.

Означення. Функція $f(t)$ називається кусково-монотонною на проміжку $[a, b]$, якщо цей проміжок поділяється на скінченну кількість проміжків

$$[a, t_1] [t_1, t_2] [t_2, t_3] \dots [t_n, b], \quad (3.12)$$

на кожному з яких функція $f(t)$ монотонна.

На рис. 3.3 наведено приклад кусково-монотонної функції.

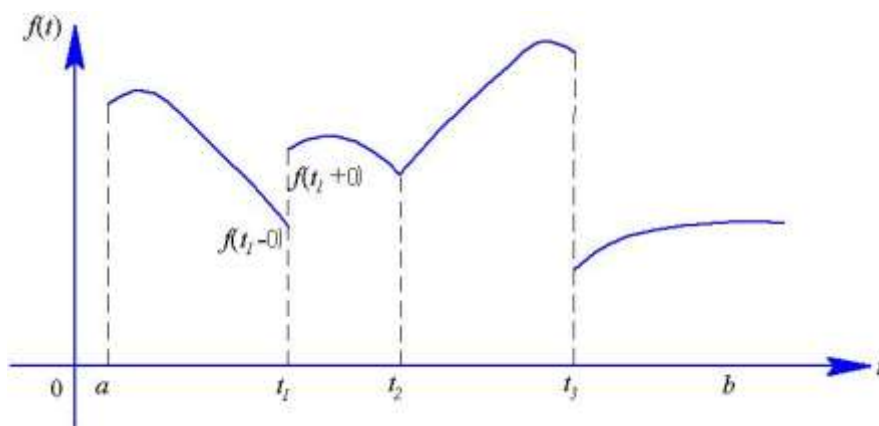


Рисунок 3.3 – Кусково-монотонна функція

Означення. Функція $f(t)$ називається кусково-неперервною на проміжку $[a, b]$, якщо цей проміжок можна поділити на скінченну кількість проміжків (3.12), на кожному з яких функція $f(t)$ неперервна.

Кусково-монотонна функція $f(t)$ має таку властивість, що в будь-якій точці $t \in [a, b]$ існують односторонні границі.

$$\lim_{t \rightarrow t_i - 0} f(t) = f(t_i - 0),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i + 0} f(t) = f(t_i + 0).$$

Функція $f(t)$, графік якої наведено на рис. 3.3, кусково-неперервна на проміжках $[a, t_1]$, $[t_1, t_3]$, $[t_3, b]$, а кусково-монотонна на проміжках $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_3, b]$.

Сформулюємо (без доведення) теорему про умови розвинення функції в тригонометричний ряд Фур'є.

Теорема. Якщо функція $f(t)$ задана на проміжку $[-\pi, \pi]$ і є на ньому кусково-неперервною, то її тригонометричний ряд Фур'є збіжний у всіх

точках проміжку $[-\pi, \pi]$. Якщо $S(t)$ – сума тригонометричного ряду Фур'є функції $f(t)$, то $S(t) = f(t)$ у всіх точках неперервності функції $f(t)$.

Якщо t_0 – точка розриву першого роду функції $f(t)$, то

$$S(t_0) = t[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$$

на кінцях проміжку ряд збігається і

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)].$$

Сформульована теорема називається *теоремою Діріхле*, а умови, що визначаються цією теоремою, називаються *умовами Діріхле*.

Як було відмічено, достатніми умовами розвинення функції $f(t)$ в ряд Тейлора є диференційованість нескінченну кількість разів її в проміжку збіжності. А щоб розгорнути функцію $f(t)$ в ряд Фур'є від неї вимагається, щоб вона мала більш слабкі властивості, допускаються також розриви (скінченна кількість точок розриву першого роду).

На відміну від рядів Тейлора, поведінка рядів Фур'є функції в околі точки відіграє значно меншу роль.

Умови розвинення функції в ряд Фур'є можуть бути також іншими.

Приклади.

1. Функція $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ задовольняє умови Діріхле на проміжку $[-\pi, \pi]$. Точка $t = 0$ є точкою розриву першого роду.

2. Функції Уолша $W(k, t)$ також задовольняють умови Діріхле за $t \in [-1, 1]$. Вони мають на вказаному проміжку $k + 2$ точки розриву першого роду.

3. Функція $f(t) = \frac{1}{t-1}$ на проміжку $[-\pi, \pi]$ не задовольняє умови Діріхле, оскільки точка $t = 1$ є точкою розриву другого роду. Ця функція задовольняє умови Діріхле на будь-якому проміжку, що не містить точку $t = 1$.

4. Розглянемо приклад функції, для якої не виконуються деякі умови Діріхле, це – функція $f(t) = \sin \frac{1}{t}$ (рис. 3.4).

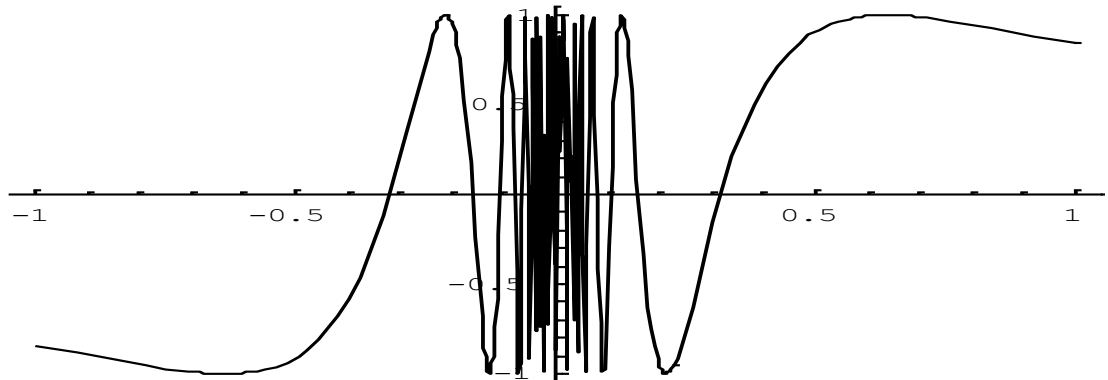


Рисунок 3.4 – Графік функції $f(t) = \sin \frac{1}{t}$

Не дивлячись на те, що функція обмежена, неперервна і монотонна на проміжках, об'єднанням яких є проміжок $[-\pi, \pi]$, вона не задовольняє умови Діріхле, оскільки кількість таких проміжків нескінченна.

3.4 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є періодичної функції

Ряд Фур'є застосовується не лише для розвинення функцій, заданих на проміжку, а й для розвинення періодичних функцій, заданих на всій числовій прямій. Розглянемо ряд Фур'є функції $f(t)$, заданої на проміжку $[-\pi; \pi]$ (за межами відрізка функцію не задано). У цьому випадку ряд будується за ортогональною системою тригонометричних функцій:

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

Відповідні норми цих функцій дорівнюють

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \quad \|\cos t\| = \|\sin t\| = \dots = \|\cos nt\| = \|\sin nt\| = \dots = \sqrt{\pi}.$$

Тригонометричний ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad (3.13)$$

а його коефіцієнти обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt. \quad (3.14)$$

Кожний доданок $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ має зміст і поза проміжком $[-\pi; \pi]$ і є 2π -періодичною функцією, оскільки функції $\sin nt$, $\cos nt$ є 2π -періодичними за $n=1,2,\dots$:

$$\cos(n(t + 2\pi)) = \cos(nt + 2\pi n) = \cos(nt), \sin(n(t + \pi)) = \sin(nt + \pi n) = \sin(nt).$$

Звідси випливає, що ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ має період 2π . Такий самий період має і сума $S(t)$ цього ряду у випадку його збіжності. Таким чином, сума ряду $S(t)$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ збігається з функцією $f(t)$ (з урахуванням теореми Діріхле), а зовні цього проміжку $S(t)$, оскільки вона 2π -періодична, продовжує функцію $f(t)$ з проміжку $[-\pi; \pi]$ періодично на всю числову пряму. Аналогічний результат має місце для функції $f(t)$ за $t \in [-l, l]$.

3.5 Розвинення в тригонометричний ряд Фур'є $2T$ -періодичних функцій

Нехай $f(t)$ є $2T$ -періодичною функцією або заданою на проміжку $[-T, T]$ і задовольняє умови Діріхле.

Заміною $x = \frac{\pi}{T}t$ функція $f(t)$ перетворюється в 2π -періодичну (довести самостійно). Далі можна використати результати розвинення в ряд Фур'є функцій 2π -періодичних або заданих на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Розглянемо інший підхід. Як було відмічено в підрозділі 3.3, система функцій $1, \cos \frac{\pi t}{T}, \sin \frac{\pi t}{T}, \dots, \cos \frac{k\pi t}{T}, \sin \frac{k\pi t}{T}, \dots$ є ортогональною на проміжку $[-T, T]$. Тому ряд Фур'є за такою системою функцій набуває вигляду:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{n\pi t}{T} \right), \quad (3.15)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt, n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Якщо $f(t)$ – $2T$ -періодична функція, то ряд описує її на всій числовій осі, якщо ж вона задана на проміжку $[-T, T]$, то ряд (3.15) описує її тільки на цьому проміжку.

Якщо $f(t)$ – парна функція, то ряд (3.15) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{T}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

На випадок якщо $f(t)$ – непарна функція, то ряд (3.15) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{T}, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Обґрунтуємо більш детально розклад парних та непарних функцій у ряд Фур'є.

Ряди Фур'є для парних і непарних 2π -періодичних функцій або заданих на проміжку $[-\pi; \pi]$.

З означення парних і непарних функцій випливає, що якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$.

Дійсно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^0 f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(-x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)dx.$$

Аналогічно можна довести, що якщо $f(x)$ – непарна, то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.

Якщо в ряд Фур'є розкладається непарна функція $f(x)$, то в силу зазначеного вище коефіцієнти ряду Фур'є обчислюють за формулами:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

тобто ряд Фур'є непарної функції містить тільки синуси: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

Якщо $f(x)$ – парна функція, то $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$,

$b_n = 0$, тобто ряд Фур'є парної функції містить тільки косинуси:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = -\pi, x = \pi, x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Розв'язання.

Оскільки функція непарна, то $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$.

Отже $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin nx$.

Лема. Якщо $f(x)$ періодична функція з періодом $T > 0$, то

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{T+a} f(x)dx, \text{ де } a \in \mathbb{R}.$$

Доведення.

Маємо: $\int_0^T f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{T+a} f(x)dx + \int_{T+a}^T f(x)dx$. Перетворимо останній

інтеграл:

$$\int_{T+a}^T f(x)dx = - \int_T^{T+a} f(x)dx = - \int_0^a f(u+T)du = \left\{ \begin{array}{l} u = x - T, \\ du = dx \end{array} \right\} = - \int_0^a f(x)dx$$

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{T+a} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_a^{T+a} f(x)dx.$$

$$\text{Звідси маємо } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$, $x \in [0; 2\pi]$.

Розв'язання.

Функція має період $T = 2\pi$ і інтегрована на відрізку $[0; 2\pi]$. Враховуючи лему, маємо $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos nx dx \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{x}{n} \sin nx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\pi}{n} \sin 2n\pi - 0 + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{\pi n^2} (\cos 2n\pi - \cos 0) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin nx dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \right) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} \cos 2n\pi + 0 + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin 2n\pi - \frac{1}{n^2} \sin 0 \right) = -\frac{2}{n}$$

$$\text{Отже, } f(x) \sim \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx.$$

Приклад. Розгорнути в тригонометричний ряд Фур'є періодичну, з періодом $T=2$ функцію, визначену на всій числовій осі і задану на відрізку $[-1;1]$ співвідношенням:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0,5 & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Дайте відповідь на запитання: «Чи задовольняє задана функція умови теореми Діріхле?»

2. Запишіть необхідні формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad l = \frac{T}{2}.$$

Або

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad l = \frac{T}{2}.$$

3. Обчисліть коефіцієнт a_0

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 x dx = x \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$$

$$a_0 = 1,5.$$

4. Обчисліть коефіцієнт a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 \cos n\pi x dx - \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos n\pi x \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right| = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_{-1}^0 + \\ &+ \left(\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx \right) = \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2}; \end{aligned}$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2}.$$

5. Обчисліть коефіцієнт b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 \sin n\pi x dx + \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x; \\ dv = \sin n\pi x \Rightarrow v = -\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{1}{n\pi} x \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx \right) = \\ &= -\frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) + \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}.$$

6. Запишіть тригонометричний ряд Фур'є в загальному вигляді:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

або

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right).$$

7. Запишіть тригонометричний ряд Фур'є цієї функції

$$f(x) = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2n-1)\pi x}{\pi^2 (2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{\pi n},$$

або

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Приклад. Розгорнути функцію $f(x) = t$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$ в ряд Фур'є в комплексній формі.

Розв'язання.

1. Перевірте, що задана функція задовольняє умови теореми Діріхле.

2. Запишіть комплексну форму ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

3. Запишіть формулу для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є в комплексній формі:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

4. Обчисліть коефіцієнти $c_n, n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ e^{inx} = dv, v = -\frac{1}{in} e^{-inx} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{x e^{-inx}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\left(-\frac{x e^{-inx}}{in} - \frac{1}{(in)^2} e^{-inx} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-inx e^{-inx} - e^{-inx}}{(in)^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx} (inx + 1)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-in\pi} (in\pi + 1) - e^{-i\pi} (1 - in\pi)}{n^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi n^2} ((in\pi + 1) \cos n\pi - (1 - in\pi) \cos n\pi) = \\
&= \frac{1}{2\pi n^2} \cos n\pi (in\pi + 1 - 1 + in\pi) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos n\pi}{n^2} in\pi = \frac{(-1)^n}{n}, n \neq 0.
\end{aligned}$$

Для $n = 0$ отримаємо:

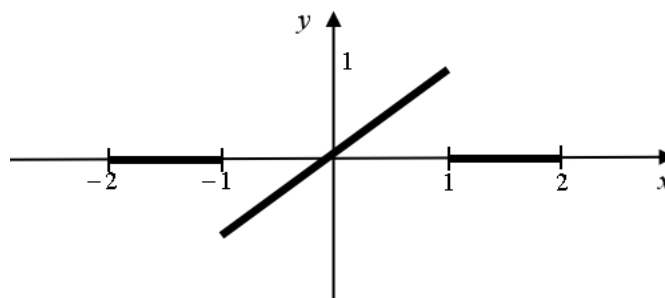
$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$$

5. Запишіть комплексну форму ряду Фур'є функції $f(t) = t$:

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx}, \quad n \neq 0.$$

$$a_0 \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану графіком:



Розв'язання.

Період $T = 2l = 4$. Запишемо задану функцію $f(x) = x$, $x \in (-1; 1)$. Це непарна функція, тому $a_0 = a_n = 0$. Обчислимо b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 0 dx \right) = \left\{ \begin{array}{l} u = x, dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ du = dx, v = -\frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{2} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{2x}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) dx = \\ &= \left(-\frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

3.6 Розклад в ряд Фур'є неперіодичних функцій

Нехай на проміжку $[a; b]$ задана обмежена, кусково-монотонна функція $f(x)$. Продовжимо цю функцію на всю числову вісь періодичним чином. Отриману функцію можна розкласти в ряд Фур'є, який в кожній точці проміжку буде збігатися до $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Якщо $f(x)$ задана на $[0; l]$, то її зручно спочатку до визначити на відрізку $[-l; 0]$ за формулами $f(x) = f(-x)$ або $f(-x) = -f(x)$; в результаті одержимо парну або непарну функцію, яка після періодичного поширення на всю числову вісь стане $2l$ -періодичною. Функція може бути розкладена в ряд Фур'є тільки за косинусом (для парної) чи тільки за синусом (для непарної).

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є за косинусом функцію $f(x) = \sin x$, $x \in [0; \pi]$.

Розв'язання.

Продовжимо задану функцію на відрізок $[-\pi; 0]$ парним чином і поширимо на період 2π , $b_n = 0$. $f(x) = |\sin x|$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) dx = -\frac{1}{\pi(n+1)} \cos(n+1)x \Big|_0^{\pi} - \\ & - \frac{1}{\pi(1-n)} \cos(1-n)x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi(1+n)} (\cos(1+n)\pi - 1) + \frac{1}{\pi(n-1)} (\cos(n-1)\pi - 1) = \\ & = \frac{-(n-1)((-1)^{n-1} - 1) + (n+1)((-1)^{n-1} - 1)}{\pi(n^2 - 1)} = \frac{2((-1)^{n-1} - 1)}{\pi(n^2 - 1)}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Отже, $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2((-1)^{n-1} - 1)}{n^2 - 1} \cos nx$, де $x \in R$.

Розкладемо функцію $f(x)$ на проміжку $(-l; l)$ в ряд Фур'є.

Розклад функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{l} x \right)$$

Для обчислення коефіцієнтів a_n, b_n скористаємось формулами:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \cos \left(\frac{2\pi n}{l} x \right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) dx$$

Обчислимо коефіцієнти в загальному вигляді:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (-x) dx = -\frac{2}{l} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = -\frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (-x) \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна} \\ \frac{2\pi n}{l} x = t \rightarrow x = -\frac{l}{2}, t = -\pi n \\ dx = \frac{dt \cdot l}{2\pi n} \rightarrow x = \frac{l}{2}, t = \pi n \end{array} \right] = \\ &= -2 \int_{-\pi n}^{\pi n} \left(\frac{1}{2\pi n} t \right) \sin t \left(\frac{dt}{2\pi n} \right) = -\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2} \right) \int_{-\pi n}^{\pi n} t \cos t dt = \left| \begin{array}{c} \text{заміна частинами} \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \cos t dt, \quad v = \sin t \end{array} \right| = \\ &= \frac{-1}{2\pi^2 n^2} \left[(t \sin t) \Big|_{-\pi n}^{\pi n} - \int_{-\pi n}^{\pi n} \sin t dt \right] = \left| \begin{array}{c} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = \cos(-\pi n) \end{array} \right| = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (-x) \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) dx = \left[\begin{array}{c} \text{заміна} \\ \frac{2\pi n}{l} x = t \rightarrow x = -\frac{l}{2}, t = -\pi n \\ dx = \frac{dt \cdot l}{2\pi n} \rightarrow x = \frac{l}{2}, t = \pi n \end{array} \right] = \\ &= -2 \int_{-\pi n}^{\pi n} \left(\frac{1}{2\pi n} t \right) \sin t \left(\frac{dt}{2\pi n} \right) = -\left(\frac{1}{2\pi^2 n^2} \right) \int_{-\pi n}^{\pi n} t \sin t dt = \left| \begin{array}{c} \text{заміна частинами} \\ u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \sin t dt, \quad v = -\cos t \end{array} \right| = \\ &= \frac{-1}{2\pi^2 n^2} \left[(-t \cos t) \Big|_{-\pi n}^{\pi n} - \int_{-\pi n}^{\pi n} (-\cos t) dt \right] = \frac{1}{2\pi^2 n^2} [\pi n (\cos \pi n) + \pi n (\cos \pi n)] = \\ &= \left| \begin{array}{c} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = \cos(-\pi n) \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi^2 n^2} 2\pi n (-1)^n + 0 = \frac{(-1)^n}{\pi n}. \end{aligned}$$

Розклад функції $f(x)$ має вигляд:

$$-x = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\pi n} \cdot \sin \frac{2\pi n}{l} x \right], \text{ на періоді } (-l; l)$$

Задаємо період $(-2; 2)$, тоді $l = 2$.

$$-x = -\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - \frac{1}{3\pi} \sin(3\pi x) + \dots$$

Знайдемо і побудуємо першу гармоніку, якщо $n=1$, $y_1 = -\frac{1}{\pi} \sin \pi x$ на періоді $(-2, 2)$.

Під час побудови графіка можна встановити межі по координатах, колір для зображення лінії, товщину лінії, а також можна виділити лінію пунктиром. Можна на рисунку записати назву функції.

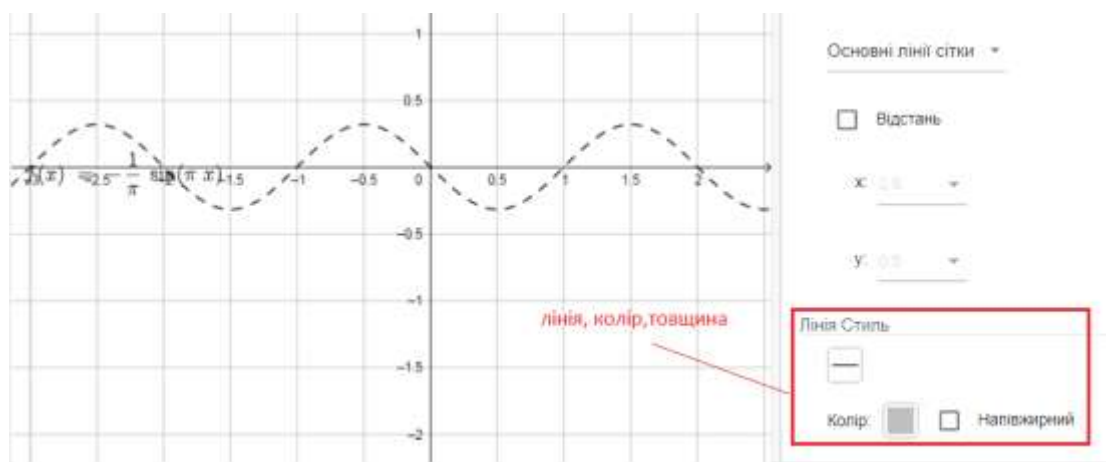


Рисунок 3.5

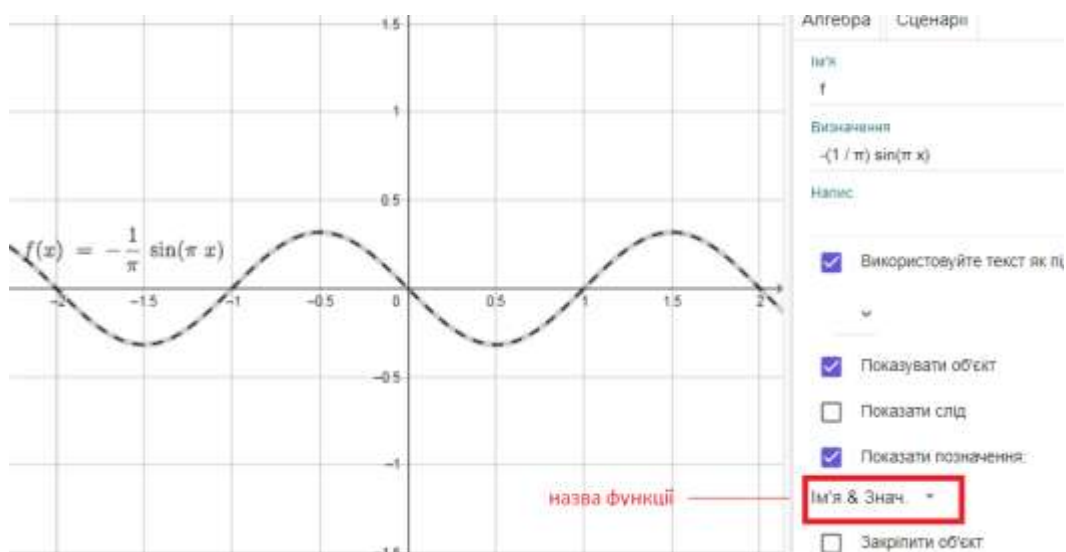


Рисунок 3.6

Знайдемо і побудуємо другу гармоніку $y_2 = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$, якщо $n = 2$ на періоді $(-2, 2)$.

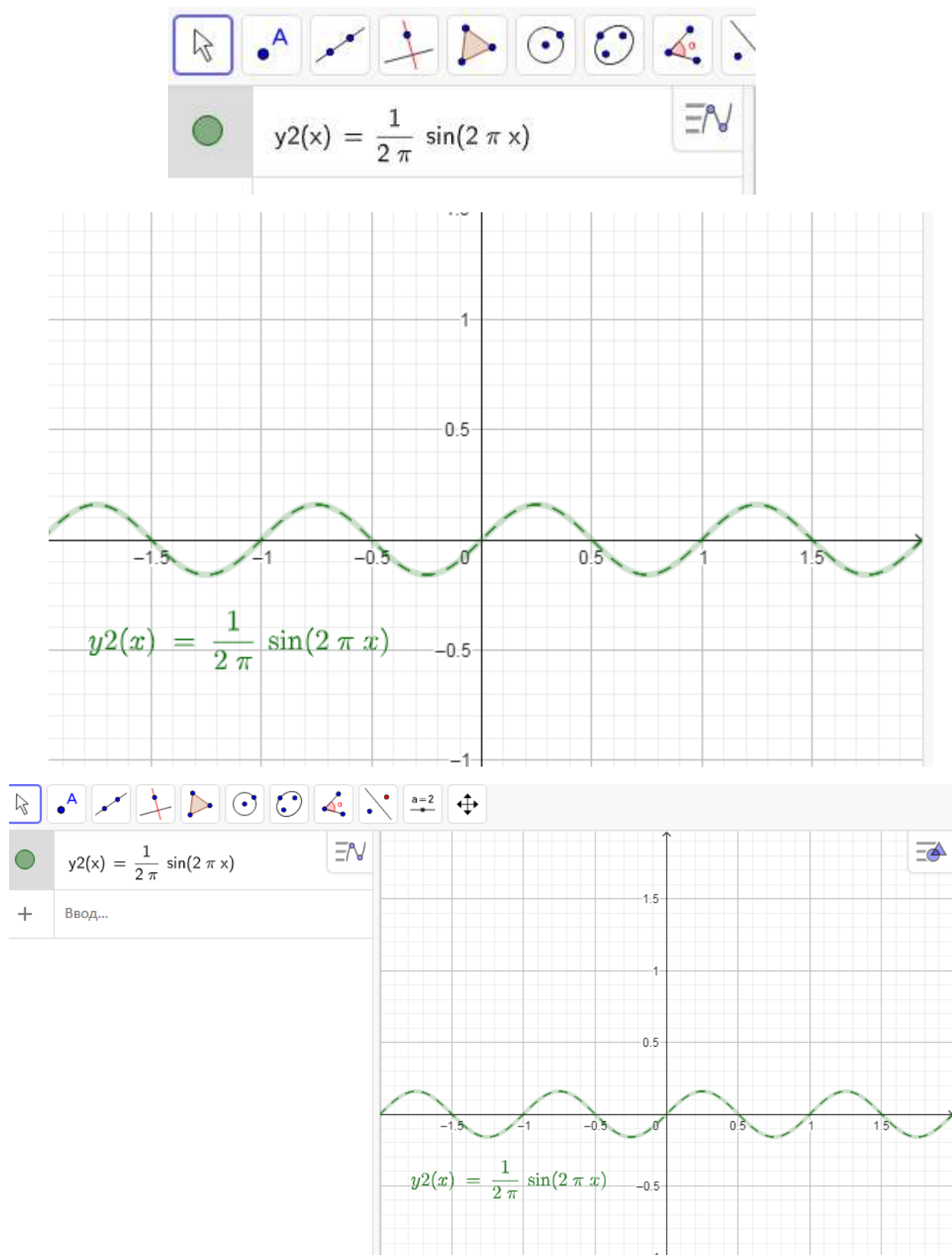


Рисунок 3.7

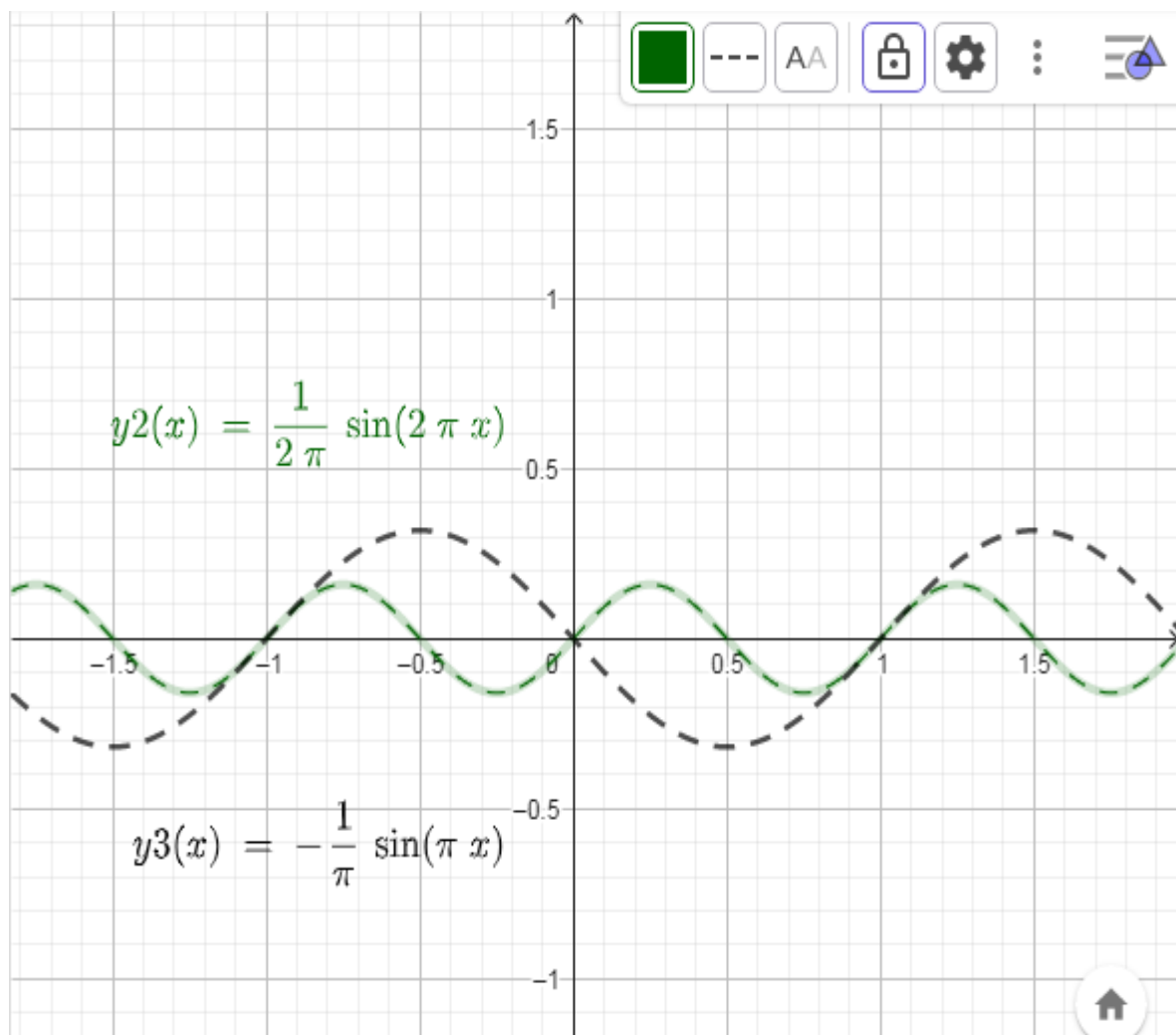
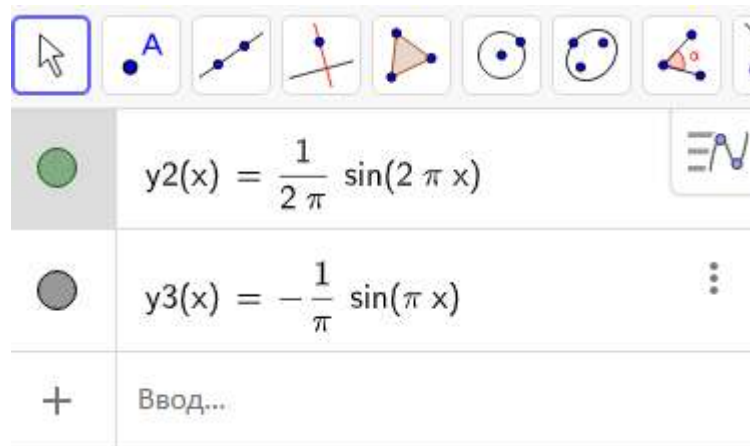


Рисунок 3.8

Знайдемо суму гармонік.

Можна скласти таблицю у вибраних точках і знайти суму:

$f(x) = y_2(x) + y_3(x)$ $= \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)$	⋮
$F = \text{Перетин}(y_3, f, (-1, 0))$ $= (-1, 0)$	⋮
$G = \text{Точка}(y_2)$ $= (-0.3, -0.15)$	⋮
$B = \text{Точка}(y_3)$ $= (-0.3, 0.26)$	⋮
$C = (0.34, 1.14)$	⋮
$A = \text{Точка}(f)$ $= (-0.3, 0.11)$	⋮

	Координати точок y_2	Координати точок y_3	Координати точки суми $y_2 + y_3$
1.	G(-0.3,-0.15)	B(-0.3,0.26)	A(-0.3,0.11)
2	E(0.25,0.15)	C(0.25,-0.23)	D(0.25,-0.06)

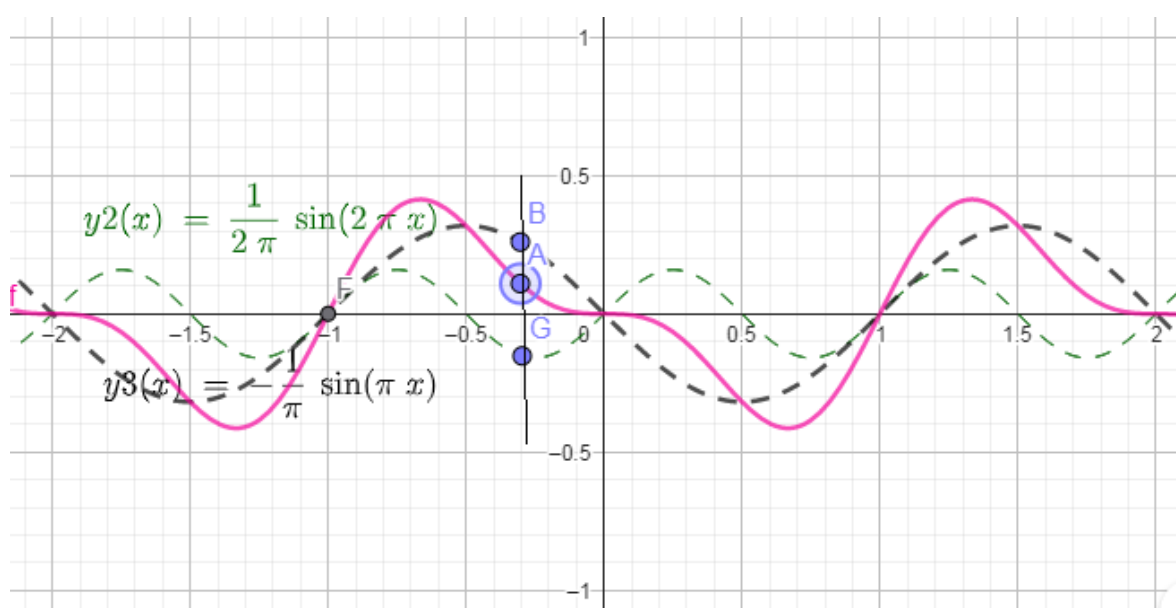
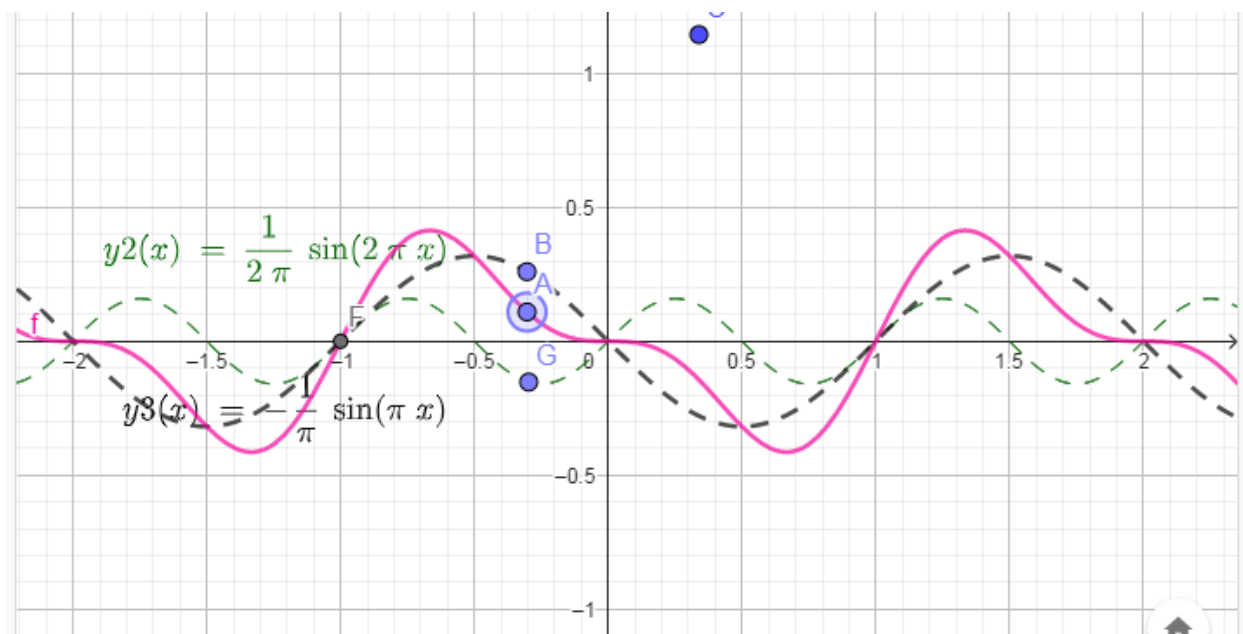


Рисунок 3.9

	$E = \text{Точка}(y_2)$ $= (0.25, 0.16)$
	$C = \text{Точка}(y_3)$ $= (0.25, -0.23)$
	$D = \text{Точка}(f)$ $= (0.25, -0.06)$

Рисунок 3.10

Крім складеної таблиці точки можна побачити на екрані за допомогою миші, яка показує координати.

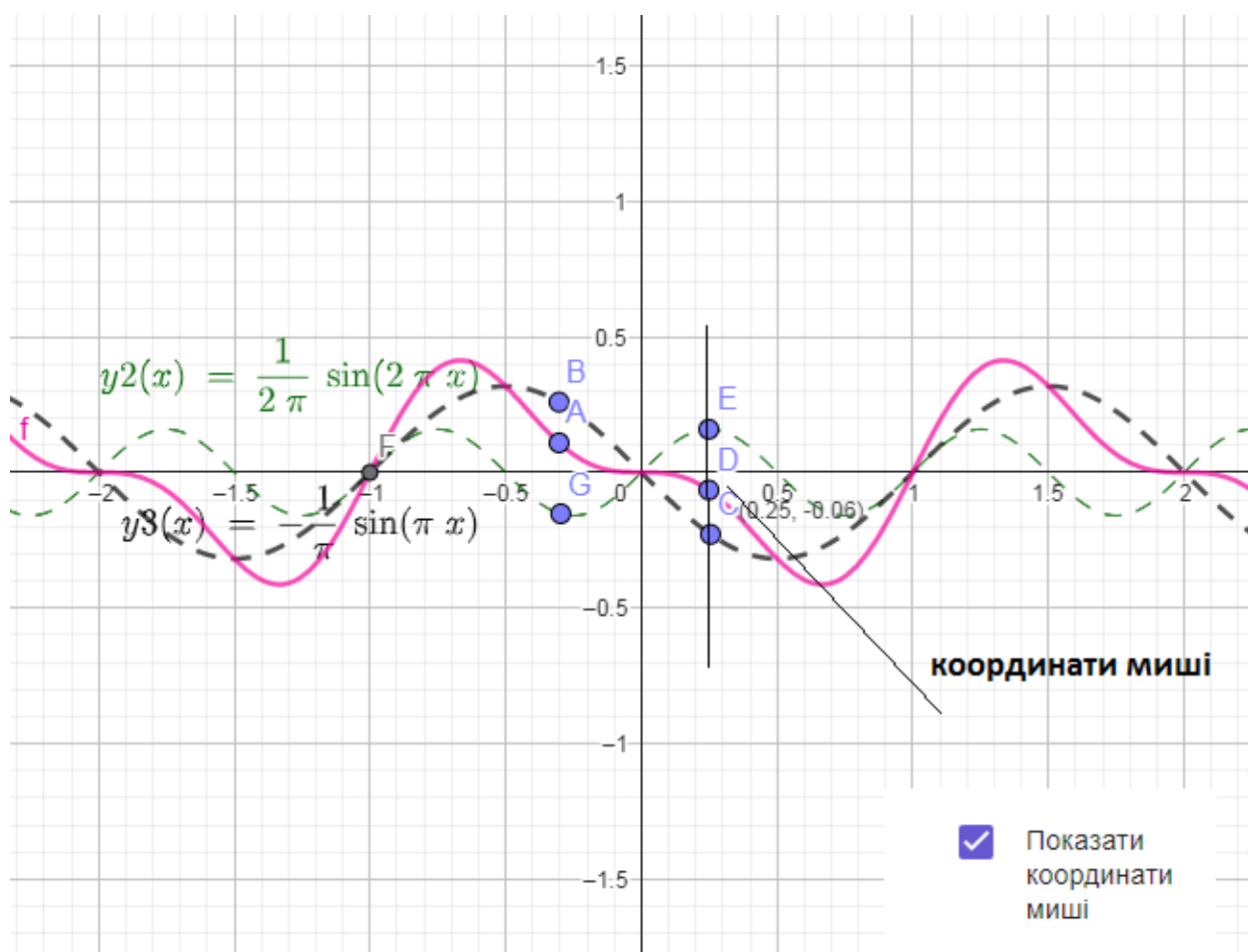


Рис.

	$y_4(x) = -\frac{1}{3\pi} \sin(3\pi x)$			
	$f(x) = -\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$			
	$g(x) = f(x) + y_4(x)$ $= -\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - \frac{1}{3\pi} \sin(3\pi x)$			
	$h: y = -x$			

Рисунок 3.11

Нанесемо на цей графік функцію $y = -x$.

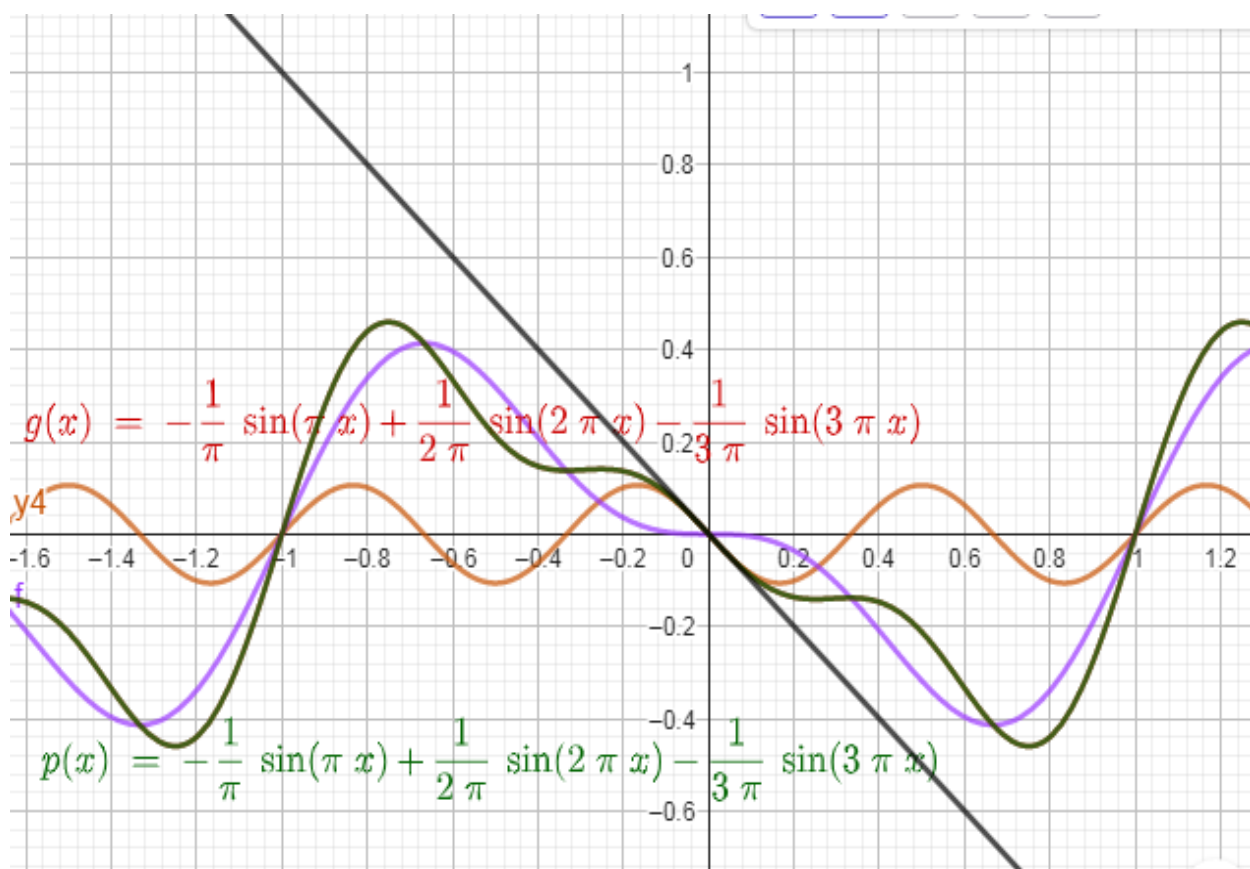


Рисунок 3.12

Якщо процедуру побудови продовжити, можна побачити, що сума гармонік наближається до заданої функції.

$$\begin{aligned}
 d(x) &= p(x) + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x) \\
 &= -\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - \frac{1}{3\pi} \sin(3\pi x) + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x)
 \end{aligned}$$

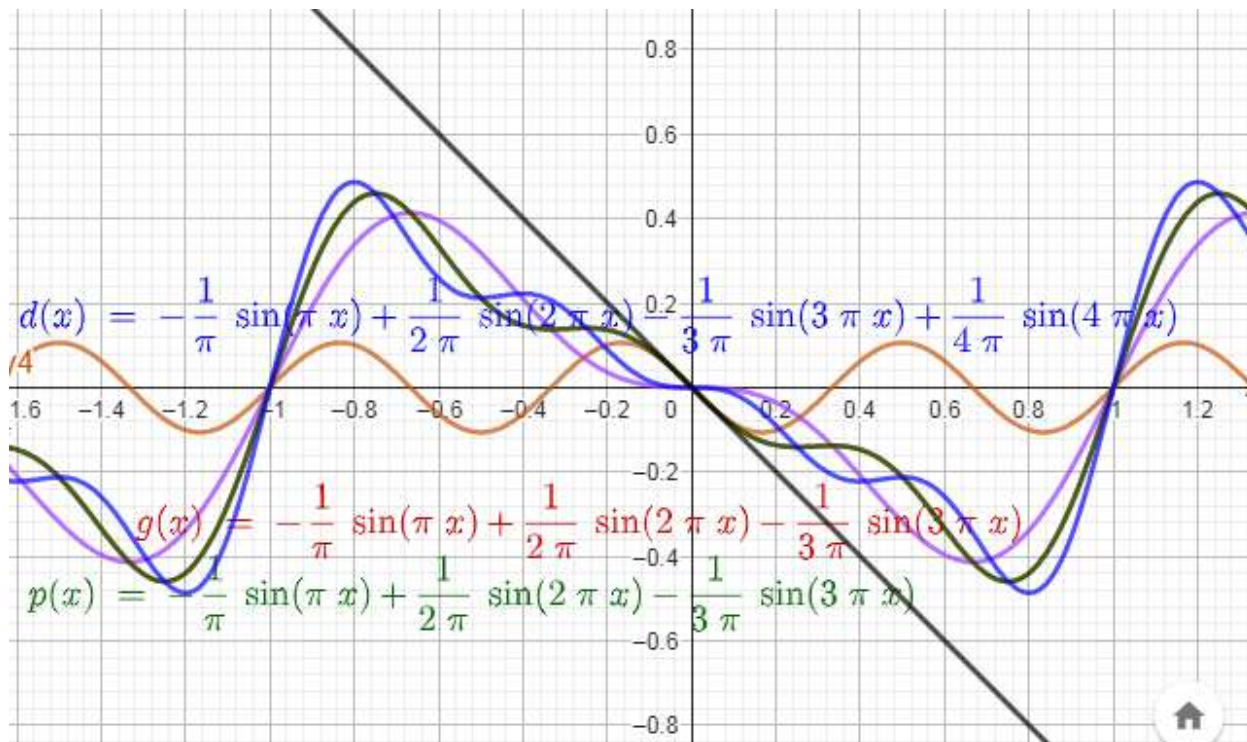


Рисунок 3.13

3.7 Ряд Фур'є в комплексній формі. Інтеграл Фур'є

Часто ряди Фур'є використовують в комплексній формі.

Функцію $Ce^{i\omega t}$, де $C = a + bi$, $i = \sqrt{-1}$ називають комплексною гармонікою. Ця періодична функція з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ геометрично зображається вектором, який рівномірно обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю обертання ω . Його модуль дорівнює $|C| = \sqrt{a^2 + b^2}$. В початковий момент часу $t = 0$ цей вектор збігається з вектором, який зображає комплексне число C .

Кожна комплексна гармоніка визначається трьома параметрами ω , A та φ , де ω – кутова частота, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $|C| = A$ – амплітуда, $\arg C = \varphi$ – початкова фаза.

Розглядають комплексні гармоніки з від'ємними частотами, тобто функції виду $Ce^{-i\omega t}$, які відрізняються від попередніх лише напрямком обертання вектора.

Функціональний ряд виду $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$ називають **тригонометричним рядом в комплексній формі**.

Якщо ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$ рівномірно збіжний на відрізку $[0; T]$, де $T = \frac{2\pi}{\omega}$ функції $f(t)$, тоді $C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$. Визначимо числа C_k та складемо тригонометричний ряд з цими коефіцієнтами.

Теорема Діріхле. Якщо $f(t)$ періодична функція з періодом T і кусково-диференційовна на відрізку $[0; T]$, то $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}$, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а $C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$ – коефіцієнти Фур'є.

Якщо $f(t)$ неперервна в точці t , то $f(t-0) = f(t+0) = f(t)$. Тоді за теоремою Діріхле маємо: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$ тобто сума ряду Фур'є збігається з функцією $f(t)$ у всіх точках її неперервності.

Якщо функція $f(t)$ неперіодична й визначена на відрізку нескінченної довжини, то розкласти її в ряд Фур'є неможливо, оскільки для неї неможливо побудувати періодичне продовження.

В той самий час у процесі розв'язання багатьох інженерних задач потрібно знайти амплітудний та фазовий спектри функції. Цю задачу можна розв'язати за допомогою інтеграла Фур'є (перетворення Фур'є).

Теорема. Нехай функція $f(t)$ кусково-диференційовна та абсолютно інтегровна на всій числовій осі. Тоді

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

де $C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ – спектральна функція $f(t)$.

Вираз $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ називають *інтегралом Фур'є в комплексній формі*.

Таким чином у всіх точках неперервності $f(t)$ значення інтеграла Фур'є збігається із значенням цієї функції. Спектральна функція $C(\omega)$ дає можливість побудувати амплітудний та фазовий спектри функції $f(t)$, $|C(\omega)|$ є амплітудою комплексної гармоніки частоти ω , а аргумент $C(\omega)$ – початкова фаза цієї гармоніки. Сам інтеграл Фур'є визначає суму гармонік усіх частот від $-\infty$ до $+\infty$. На відміну від ряду Фур'є амплітудний і фазовий спектри інтеграла Фур'є мають вигляд неперервних ліній. Для дійсної форми інтеграл Фур'є має вигляд:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) dt,$$

де $a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$,

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Покажемо зв'язок між дійсною та комплексною формами ряду Фур'є. Якщо використати формули Ейлера

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}. \quad (3.17)$$

то, використавши (3.17), замінімо $\cos nt$ і $\sin nt$ в ряді (3.13):

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right). \end{aligned}$$

Згрупуємо відносно e^{int} і e^{-int} ,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + b_n i}{2} e^{int} + \frac{a_n - b_n i}{2} e^{-int} \right). \quad (3.18)$$

Введемо нові коефіцієнти

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2}, \quad C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

Тоді (3.18) перетворюється до вигляду

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{int} + C_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}. \quad (3.19)$$

Ряд (3.19) функції $f(t)$ називається *рядом Фур'є у комплексній формі*.

Отримаємо формулу для безпосереднього обчислення коефіцієнтів C_n .

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} (a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt - i \sin nt) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(-nt) + i \sin(-nt)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Аналогічно знаходимо вираз для коефіцієнта C_{-n} .

$$\begin{aligned} C_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt + i \sin nt) dt, \\ C_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{+int} dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Використавши формули (3.20) та (3.21), дістанемо загальний вигляд для коефіцієнта C_n :

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (3.22)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ряду Фур'є в комплексній формі

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi}. \quad (3.23)$$

Зауваження. Комплексна форма (3.23) ряду Фур'є містить компоненти на від'ємній півосі. Від'ємна частина має тільки математичний зміст, обумовлений способом поданням комплексних чисел.

Комплексна форма ряду Фур'є $2T$ -періодичної функції має вигляд:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{n\pi}{T} t}, \quad (3.24)$$

$$C_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i \frac{n\pi}{T} t} dt. \quad (3.25)$$

Ряди (3.24) чи (3.25) надають можливість подати періодичну функцію у вигляді суми простих гармонічних коливань.

Приклад. Розкласти функцію $f(t) = t$, $t \in [0; 1]$ в ряд Фур'є в комплексній формі. Побудувати її амплітудний та фазовий спектри.

Розв'язання.

$T = 1$ — період функції, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ — основна частота. Знайдемо коефіцієнт ряд Фур'є:

$$C_k = \int_0^1 t e^{-ik\omega t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t, \quad dv = e^{ik\omega t} dt \\ du = dt, \quad v = \frac{-1}{ik\omega} e^{ik\omega t} \end{array} \right\} = \frac{-t}{ik\omega} e^{-ik\omega t} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{ik\omega} e^{-ik\omega t} dt =$$

$$= \frac{-1}{ik\omega} e^{-ik\omega} - \frac{1}{i^2 k^2 \omega^2} e^{-ik\omega t} \Big|_0^1 = \frac{-1}{ik\omega} e^{-ik\omega} + \frac{1}{k^2 \omega^2} e^{-ik\omega} - \frac{1}{k^2 \omega^2}.$$

Підставивши $\omega = 2\pi$ та враховуючи, що $e^{-ik\alpha x} = 1$, одержимо

$$C_k = -\frac{1}{i2k\pi} = \frac{i}{2k\pi}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\text{Знайдемо } C_0: C_0 = \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, розклад $f(t)$ в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{i}{2k\pi} e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi} e^{ik\omega t}.$$

Для побудови амплітудного та фазового спектрів врахуємо, що

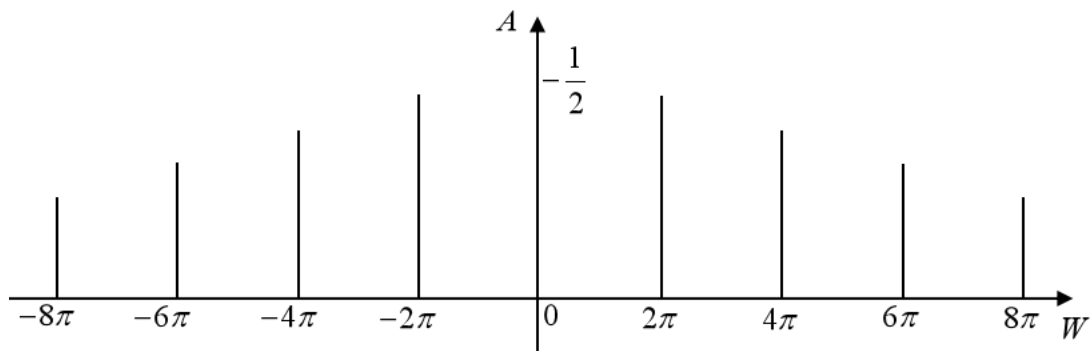
$$A_k = |C_k|, \quad \varphi_k = \arg C_k,$$

$$A_k = |C_k| = \frac{1}{2k\pi}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

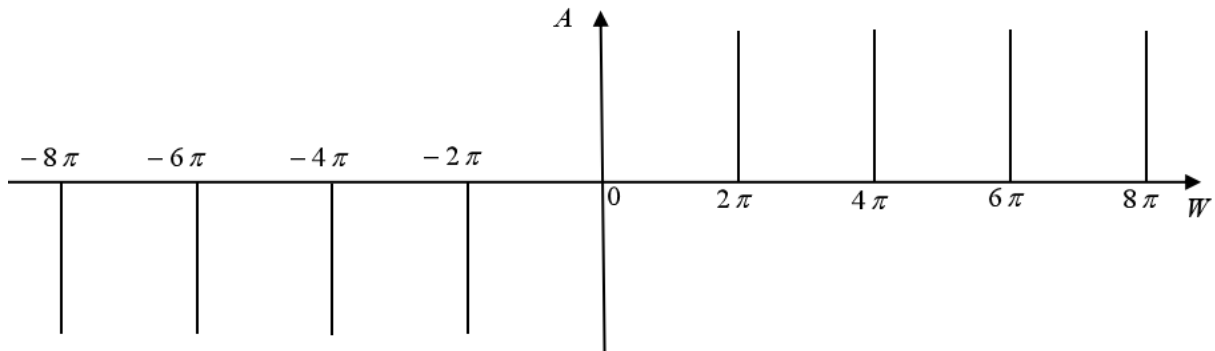
$$A_0 = |C_0| = \frac{1}{2}; \quad \varphi_k = \arg \frac{i}{2k\pi} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & k < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_0 = \arg C_0 = 0.$$

Побудуємо амплітудний та фазовий спектри. Амплітудний спектр має вигляд:



Фазовий спектр має вигляд:



Приклад. Розгорнути в ряд Фур'є в комплексній формі функцію $f(t) = e^{\alpha t}, t \in [-\pi; \pi], \alpha \in R, \alpha \neq 0$.

Розв'язання.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулою (3.22).

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha t} \cdot e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha - in} e^{t(\alpha - in)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi(\alpha - in)} [e^{\pi(\alpha - in)} - e^{-\pi(\alpha - in)}]. \end{aligned}$$

Перетворимо вираз в дужках, скориставшись формулами Ейлера.

$$\begin{aligned} e^{\pi(\alpha - in)} - e^{-\pi(\alpha - in)} &= e^{\pi\alpha} (\cos n\pi - i \sin n\pi) - \\ &- e^{-\pi\alpha} (\cos n\pi + i \sin n\pi) = e^{\pi\alpha} (-1)^n - e^{-\pi\alpha} (-1)^n = \\ &= (-1)^n (e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}) = \frac{1}{2} (-1)^n \operatorname{sh} \pi\alpha \end{aligned}$$

Тоді

$$C_n = \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \pi\alpha}{\pi(\alpha - in)}, \text{ а ряд Фур'є набуде вигляду } e^{\alpha t} = \frac{\operatorname{sh} \pi\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{int}}{\alpha - in}.$$

4 ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ

Узагальнюючи теорію рядів, наведемо деякі задачі прикладного застосування рядів.

Приклад 1. Обчислити наближене значення $e^{0,2}$ з точністю до 0,0001, використовуючи розклад функції e^x у ряд Маклорена.

Розв'язання

Ряд Маклорена для показникової функції має вигляд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Ряд знакододатний (для $x > 0$), тому похибка у разі заміни суми ряду частковою сумою не перевищує першого відкинутого члена. Підставимо $x = 0,2$ і обчислимо члени ряду:

$$a_0 = 1;$$

$$a_1 = 0,2;$$

$$a_2 = 0,2^2/2! = 0,04/2 = 0,02;$$

$$a_3 = 0,2^3/3! = 0,008/6 \approx 0,001333;$$

$$a_4 = 0,2^4/4! = 0,0016/24 \approx 0,0000667.$$

Оскільки $a_4 \approx 0,0000667 < 0,0001$, для забезпечення заданої точності достатньо взяти суму перших чотирьох членів ряду ($n = 0 \dots 3$), а член a_4 вважати оцінкою похибки. Отже:

$$e^{0,2} \approx 1 + 0,2 + 0,02 + 0,001333 = 1,221333.$$

Порівняння з табличним значенням $e^{0,2} \approx 1,221403$ показує, що похибка обчислення становить приблизно 0,00007, що не перевищує заданої точності 0,0001.

Отже, ряди Маклорена дають простий та ефективний спосіб наближеного обчислення значень трансцендентних функцій із наперед заданою точністю без використання таблиць чи калькулятора.

Приклад 2. Обчислити $\sin 1^\circ$ за допомогою ряду Маклорена та оцінити похибку наближення за ознакою Лейбніца. (Обчислення значення тригонометричної функції для малого аргументу)

Розв'язання

Переведемо аргумент у радіани:

$$x = 1^\circ = \pi/180 \approx 0,0174533 \text{ рад.}$$

Ряд Маклорена для синуса:

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$$

Це знакопочережний (знакозмінний) ряд, для якого виконуються умови ознаки Лейбніца (члени монотонно спадають за модулем і прямують до нуля), тому похибка у випадку заміни суми ряду частковою сумою не перевищує за модулем першого відкинутого члена.

$$x^3/3! = (0,0174533)^3/6 \approx 0,00000532/6 \approx 8,87 \cdot 10^{-7}.$$

Оскільки цей член має порядок 10^{-7} , вже перший член ряду дає точність, значно кращу за 0,00001:

$$\sin 1^\circ \approx x \approx 0,0174533.$$

Врахувавши другий член, отримаємо уточнене значення:

$$\sin 1^\circ \approx 0,0174533 - 0,0000009 \approx 0,0174524.$$

Це значення повністю збігається з табличним $\sin 1^\circ \approx 0,0174524$.

Таким чином, для малих аргументів ряд Тейлора збігається настільки швидко, що вже 1–2 члени забезпечують точність, достатню для більшості інженерних розрахунків. Саме за цим принципом обчислюють значення тригонометричних функцій у мікроконтролерах і калькуляторах.

Приклад 3. Обчислення визначеного інтеграла, що не виражається через елементарні функції

Обчислити наближено визначений інтеграл

$$I = \int_0^1 \sin(x^2) dx$$

з точністю до 0,001.

Розв'язання

Первісна підінтегральної функції $\sin(x^2)$ не виражається через елементарні функції (цей інтеграл пов'язаний із інтегралом Френеля), тому пряме

інтегрування неможливе. Розкладемо $\sin(x^2)$ у ряд Маклорена, підставивши x^2 замість x у ряд для $\sin$:

$$\sin(x^2) = x^2 - x^6/3! + x^{10}/5! - x^{14}/7! + \dots$$

Степеневий ряд можна почленно інтегрувати в межах його області збіжності (тут – вся числова вісь), тому:

$$I = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \frac{x^6}{6} dx + \int_0^1 \frac{x^{10}}{120} dx - \dots$$

$$I = 1/3 - 1/(6 \cdot 7) + 1/(120 \cdot 11) - \dots = 1/3 - 1/42 + 1/1320 - \dots$$

Обчислимо числові значення членів ряду:

$$b_1 = 1/3 \approx 0,333333;$$

$$b_2 = 1/42 \approx 0,023810;$$

$$b_3 = 1/1320 \approx 0,000758.$$

Ряд знакопозадовий, тому за ознакою Лейбніца похибка не перевищує першого відкинутого члена. Оскільки $b_3 \approx 0,000758 < 0,001$, обмежимося двома членами:

$$I \approx 0,333333 - 0,023810 = 0,309524.$$

Для контролю точності додамо третій член:

$$I \approx 0,309524 + 0,000758 = 0,310282,$$

що узгоджується з відомим наближеним значенням цього інтеграла $I \approx 0,310268$.

Розклад підінтегральної функції в степеневий ряд і почленне інтегрування – стандартний прийом обчислення «не беручих» інтегралів (інтегралів Френеля, інтегрального синуса, інтеграла ймовірностей тощо), які широко застосовуються в оптиці, теорії ймовірностей і статистиці.

Приклад 4. Розв'язання диференціального рівняння за допомогою степеневому ряду

Знайти розв'язок задачі Коші

$$y' = y + x, \quad y(0) = 1$$

у вигляді степеневому ряду.

Розв'язання

Шукатимемо розв'язок у вигляді степеневого ряду:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

З початкової умови $y(0) = 1$ маємо $a_0 = 1$. Продиференціювавши ряд почленно та підставивши у рівняння $y' - y = x$, порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x з обох частин рівності. Це дає рекурентне співвідношення:

$$(n + 1)a_{n+1} = a_n + \delta_{n,1}$$

($\delta_{n+1} = 1$ за $n = 1$ і $\delta_{n+1} = 0$ в усіх інших випадках – доданок від правої частини x у рівнянні)

Послідовно знаходимо коефіцієнти:

$$n = 0: \Rightarrow a_1 = 1;$$

$$n = 1: \Rightarrow a_2 = 1;$$

$$n = 2: \Rightarrow a_3 = 1/3;$$

$$n = 3: \Rightarrow a_4 = 1/12;$$

$$n = 4: \Rightarrow a_5 = 1/60.$$

Отже, наближений розв'язок:

$$y(x) \approx 1 + x + x^2 + x^3/3 + x^4/12 + x^5/60.$$

Перевірка. Задане рівняння є лінійним рівнянням першого порядку, його точний розв'язок: $y(x) = 2e^x - x - 1$. Розклавши $2e^x$ у ряд Маклорена і віднявши $(x + 1)$, отримаємо той самий ряд $1 + x + x^2 + x^3/3 + x^4/12 + \dots$, що підтверджує правильність розв'язку.

Використання степеневих рядів дає змогу розв'язувати диференціальні рівняння, для яких неможливо (або складно) знайти розв'язок в елементарних функціях, а також будувати наближені розв'язки рівнянь зі змінними коефіцієнтами, що часто трапляються в задачах механіки та фізики.

Приклад 5. Застосування ряду у фінансовій математиці (теперішня вартість довічної ренти)

Компанія щорічно (у кінці кожного року) виплачує безстрокову ренту (перпетуїтет) у розмірі $A = 1000$ грн. Річна ставка дисконтування становить $r = 8 \%$. Визначити теперішню (приведену) вартість усіх майбутніх виплат.

Розв'язання

Теперішня вартість кожної окремої виплати, здійсненої через n років, дорівнює $A/(1 + r)^n$. Загальна теперішня вартість усіх виплат – це сума нескінченного ряду:

$$PV = A/(1+r) + A/(1+r)^2 + A/(1+r)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^n}$$

Це нескінченна геометрична прогресія з першим членом $b_1 = A/(1 + r)$ і знаменником $q = 1/(1 + r)$. Оскільки $r > 0$, маємо $|q| < 1$, тому ряд збігається, і його сума обчислюється за формулою суми нескінченної геометричної прогресії:

$$S = b_1 / (1 - q).$$

Підставимо b_1 і q :

$$PV = [A/(1+r)] / [1 - 1/(1+r)] = A / r.$$

Обчислимо числове значення:

$$PV = 1000 / 0,08 = 12\,500 \text{ грн.}$$

Висновок: формула «вартість = виплата / ставка», широко відома в оцінці бізнесу та фінансовому аналізі (наприклад, під час оцінювання привілейованих акцій або нерухомості, що здається в оренду), є прямим наслідком формули суми нескінченної геометричної прогресії – окремого випадку функціонального ряду.

Приклад 6. Застосування ряду у фізиці: період коливань математичного маятника за великої амплітуди.

Період малих коливань математичного маятника довжиною l обчислюється за формулою $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Для великих амплітуд коливань θ_0 точний період виражається через еліптичний інтеграл і не має елементарного вигляду, проте його можна подати рядом:

$$T = T_0 \cdot [1 + (1/16)\theta_0^2 + (11/3072)\theta_0^4 + \dots].$$

Визначити, на скільки відсотків період коливань маятника з амплітудою $\theta_0 = 30^\circ$ відрізняється від періоду малих коливань T_0 .

Розв'язання

Переведемо амплітуду в радіани:

$$\theta_0 = 30^\circ = \pi/6 \approx 0,5236 \text{ рад.}$$

Обчислимо перші два поправочні члени ряду:

$$(1/16)\theta_0^2 = (1/16) \cdot 0,2742 \approx 0,01714;$$

$$(11/3072)\theta_0^4 = (11/3072) \cdot 0,07518 \approx 0,000269.$$

Тоді:

$$T \approx T_0 \cdot (1 + 0,01714 + 0,00027) \approx 1,0174 \cdot T_0.$$

Отже, період коливань за амплітуди 30° приблизно на 1,74 % більший, ніж період малих коливань, обчислений за наближеною формулою $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Висновок: розклад точного (еліптичного) виразу для періоду в степеневий ряд дозволяє в явному аналітичному вигляді оцінити похибку спрощеної формули T_0 , яку використовують у шкільному курсі фізики, і показати межі її застосовності: для малих кутів ($\theta_0 < 10^\circ$) похибка не перевищує десятих часток відсотка, тоді як для кутів понад 30° її вже потрібно враховувати в точних розрахунках.

5 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дайте означення числового ряду, частинної суми ряду, суми ряду. Який ряд називається збіжним і який розбіжним?
2. Сформулюйте необхідну умову збіжності ряду. Довести відповідну теорему.
3. Дослідіть питання збіжності ряду, складеного з членів геометричної прогресії.
4. Доведіть збіжність-розбіжність гармонічного ряду.
5. Що таке залишок ряду? Як пов'язані між собою сума ряду, частинна сума і залишок ряду?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про почленне множення ряду на число.
7. Сформулюйте і доведіть теорему про почленне додавання рядів.
8. Доведіть, що сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.
9. Доведіть сполучну властивість збіжних рядів.
10. В чому полягає необхідна і достатня умова збіжності числового ряду?
11. Який ряд називають додатним? Сформулюйте і доведіть необхідну і достатню умову збіжності додатного ряду.
12. Сформулюйте і доведіть ознаки збіжності і розбіжності додатних рядів за допомогою порівняння їх загальних членів.
13. Сформулюйте і доведіть ознаку Д'Аламбера.
14. Сформулюйте і доведіть ознаку Коші.
15. Сформулюйте і доведіть інтегральну ознаку збіжності.
16. Дослідіть на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

17. Який ряд називають абсолютно збіжним? Сформулюйте достатню умову абсолютної збіжності ряду.

18. Сформулюйте теорему про можливість подання абсолютно збіжного ряду у вигляді різниці збіжних додатних рядів.
19. Як досліджують ряди на абсолютну та умовну збіжність?
20. Який ряд називається знакозмінним? Сформулюйте ознаку Лейбніца.

6 ОСНОВНІ ПІДКАЗКИ ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ

Ознаки збіжності числових рядів

Таблиця 1

Ч.ч.	Загальний вигляд ряду	Ознака	Границя	Висновок
1.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n = \frac{P^k(n)}{G^m(n)}$ многочлени	Необхідна ознака	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^k(n)}{G^m(n)} = 0 \rightarrow$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^k(n)}{G^m(n)} \neq 0 \rightarrow$	Невідомо Ряд розбіжний
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ для порівняння вибираєм ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ із таких: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$	Гранична ознака порівняння.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{Q_n} \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{Q_n} \neq \infty$	Обидва ряди однакові
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Ознака Д'Аламбера	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$	$= \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{збіжний} \\ < 1 \rightarrow \text{розбіжний} \\ = 1 \rightarrow \text{невідомо} \end{cases}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Радикальна ознака Коші	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n}$	$= \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{збіжний} \\ < 1 \rightarrow \text{розбіжний} \\ = 1 \rightarrow \text{невідомо} \end{cases}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Інтегральна ознака Коші	$\int_1^{\infty} U_n dn$	$\int_1^{\infty} U_n dn \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ Однаково збіжні або розбіжні.

Знакозмінні (знакопочережні) ряди

Таблиця 2

Загальний вигляд ряду	Ознака	Висновок
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n$ Ряд по модулю $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$	Ознака Лейбніца $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \\ U_1 > U_2 > U_3 > \dots > U_n \end{cases} \rightarrow \text{да}$ ↓ ні	Якщо «да», то ряд абсолютно збіжний за умови збіжності ряду за модулем і умовно збіжний за умови розбіжності ряду за модулем. Якщо «ні», то ряд розбіжний.

Степеневі ряди

Таблиця 3

Загальний вигляд ряду	Ознака	Границя	Межі інтервала	Кінці інтервала
$\sum_{n=1}^{\infty} (x - x_0)^n \cdot a_n$	Д'Аламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{(x - x_0)^{n+1} \cdot a_{n+1}}{(x - x_0)^n \cdot a_n} \right = x - x_0 \cdot l$	$ x - x_0 \cdot l < 1$ збіжний	$-\frac{1}{l} + x_0 < x < \frac{1}{l} + x_0$ $x \in \left(-\frac{1}{l} + x_0; \frac{1}{l} + x_0 \right)$	$x = \frac{1}{l} + x_0$ $x = -\frac{1}{l} + x_0$
$\sum_{n=1}^{\infty} (x - x_0)^n \cdot a_n$	Радикальна ознака Коші. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(x - x_0)^n \cdot a_n} = x - x_0 \cdot l$	$ x - x_0 \cdot l > 1$ розбіжний	$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{l} + x_0 \right) \cup \left(\frac{1}{l} + x_0; +\infty \right)$ розбіжний	$x = \frac{1}{l} + x_0$ $x = -\frac{1}{l} + x_0$

Розклад в ряд Маклорена елементарних функцій

Таблиця 4

Елементарна функція.	Інтервал збіжності
$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$4. (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$x \in \begin{cases} [-1, 1], & m \geq 0, \\ (-1, 1], & -1 < m < 0, \\ (-1, 1), & m \leq -1 \end{cases}$
$5. \arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + \dots$	$x \in [-1, 1]$
$6. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \in (-1, 1]$
$7. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in [-1, 1]$

7 ТЕСТИ

1. Числовим рядом називають

Номер	Варіанти відповідей
1	Сума нескінченного числа доданків, які є членами довільної числової послідовності.
2	Сума скінченного числа довільних доданків, які є членами числової послідовності.
3	Границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^{\infty} a_n$
4	Сума нескінченного числа доданків, кожен із них слугує елементом скінченної числової послідовності.

1. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

2. Ряд називається збіжним, якщо

Номер	Варіанти відповідей
1	Границя загального члена ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ існує і скінченна.
2	Існує скінченна границя послідовності частинних сум $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.
3	Обмежена послідовність частинних сум.
4	Кожен наступний член ряду менший, ніж попередній $a_n \succ a_{n+1}$.

2. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

3. n -ою частинною сумою ряду називається

Номер	Варіанти відповідей
1	Сума n перших членів ряду.
2	Сума n останніх членів ряду.
3	Границя суми n перших членів ряду.
4	Сума всіх членів ряду.

3. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

4. Частинна сума S_n ряду $\sum_1^{\infty} a_n$ це

Номер	Варіанти відповідей
1	$S_n = \sum_1^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + \dots$
2	$S_n = \sum_1^n (-1)^n a_n = -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1$
3	$S_n = \sum_1^n a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$
4	$S_n = \sum_1^n (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} + (-1)^n a_n$

4. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

5. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ – збіжний

Номер Варіанти відповідей

1 Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0, S_n - \text{частинна сума.}$$

2 Існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \neq 0$

3 Не існує скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

4 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

5. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

6. Необхідна умова збіжності ряду $\sum_1^{\infty} a_n$

Номер Варіанти відповідей

1 Якщо ряд збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2 Якщо ряд збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

3 Якщо ряд збіжний, то $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$

4 Якщо ряд збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$

6. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

7. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ – збіжний за ознакою Д'Аламбера

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

1	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$
---	--

2	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
---	--

3	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
---	--

4	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$
---	--

7. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

8. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ – розбіжний за ознакою Д'Аламбера

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

1	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$
---	--

2	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
---	--

3	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
---	--

4	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$
---	--

8. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

9. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ – збіжний за радикальною ознакою Коші

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

1	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
---	--

2	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
---	--

3	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$
---	--

4	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$
---	--

9. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

10. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ – розбіжний за радикальною ознакою Коші, якщо

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

1	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
---	--

2	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
---	--

3	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$
---	--

4	Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$
---	--

10. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

11. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ – збіжний за інтегральною ознакою Коші

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

- | | |
|---|--|
| 1 | Якщо $\int_1^{\infty} a_n dn = const$ |
| 2 | Якщо $\int_1^{\infty} a_n dn = \infty$ |
| 3 | Якщо $\int_1^n a_n dn -$ не існує. |
| 4 | Якщо $\int_1^n a_n dn = const$ |

11. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

12. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ – розбіжний за інтегральною ознакою Коші

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

- | | |
|---|--|
| 1 | Якщо $\int_1^{\infty} a_n dn = const$ |
| 2 | Якщо $\int_1^{\infty} a_n dn = \infty$ |
| 3 | Якщо $\int_1^n a_n dn -$ не існує. |
| 4 | Якщо $\int_1^n a_n dn = const$ |

12. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

13. За ознакою Лейбніца знакозмінного ряду, ряд збіжний,

Номер	Варіанти відповідей		
1	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$	$a_{n+1} \leq a_n$
2	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$	$a_n \leq a_{n+1}$
3	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$	$a_n \leq a_{n+1}$
4	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$	$a_n + 1 \leq a_n$

13. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

14. За ознакою Лейбніца знакозмінного ряду, ряд розбіжний,

Номер	Варіанти відповідей		
1	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$	$a_{n+1} \leq a_n$
2	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$	$a_n \leq a_{n+1}$
3	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$	
4	Якщо	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$	$a_n + 1 \leq a_n$

14. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

15. Гармонічний ряд $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ є розбіжним,

Номер	Варіанти відповідей	
-------	---------------------	--

- | | | |
|---|------|-----------------|
| 1 | Якщо | $\alpha \geq 0$ |
| 2 | Якщо | $\alpha \geq 1$ |
| 3 | Якщо | $\alpha \leq 1$ |
| 4 | Якщо | $\alpha > 1$ |

15. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

16. Гармонічний ряд $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ є збіжним,

Номер	Варіанти відповідей	
-------	---------------------	--

- | | | |
|---|------|-----------------|
| 1 | Якщо | $\alpha \geq 0$ |
| 2 | Якщо | $\alpha \geq 1$ |
| 3 | Якщо | $\alpha < 1$ |
| 4 | Якщо | $\alpha > 1$ |

16. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

17. Ряд геометричної прогресії $\sum_1^{\infty} q^n$ є розбіжним,

Номер	Варіанти відповідей	
-------	---------------------	--

- | | | |
|---|------|--------------|
| 1 | Якщо | $q \geq 0$ |
| 2 | Якщо | $ q \geq 1$ |
| 3 | Якщо | $ q \leq 1$ |
| 4 | Якщо | $ q > 1$ |

17. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

18. Ряд геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ є збіжним,

Номер	Варіанти відповідей	
1	Якщо	$q \geq 0$
2	Якщо	$ q \geq 1$
3	Якщо	$ q \leq 1$
4	Якщо	$ q < 1$

18. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

19. Степеневим рядом є такий

Номер	Варіанти відповідей
1	$\sum_1^{\infty} a_n (x - x_0)^n$
2	$\sum_1^n a_n (x - x_0)^n$
3	$\sum_1^{\infty} a^n (x - x_0)$
4	$\sum_1^{\infty} a_n (n)^{x - x_0}$

19. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

20. Степеневий ряд має радіус збіжності за ознакою Д'Аламбера

Номер Варіанти відповідей

1 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

2 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

3 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$

4 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right|$

20. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

21. Степеневий ряд має радіус збіжності за ознакою Коші

Номер Варіанти відповідей

1 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n+1}}$

2 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$

3 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$

4 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{a_n} \right|}$

21. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

22. Степеневий ряд має інтервал збіжності

Номер	Варіанти відповідей
1	$ x - x_0 < R$ або $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$
2	$ x + x_0 < R$ або $x \in (x_0 + R; x_0 - R)$
3	$ x - x_0 \leq R$ або $x \in [x_0 - R; x_0 + R]$
4	$ x - x_0 \leq 1$ або $x \in [x_0 - 1; x_0 + 1]$

22. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

23. Якщо степеневий ряд $\sum_1^n a_n (x - x_0)^n$ має $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0$, то ряд

Номер	Варіанти відповідей
1	Збіжний в точці x_0
2	Збіжний на $x \in (x_0 + R; x_0 - R)$
3	Збіжний на $x \in [-R; +R]$
4	Збіжний на $x \in (-\infty; \infty)$

23. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

24. Якщо степеневий ряд $\sum_1^n a_n (x - x_0)^n$ має $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0$, то ряд

Номер	Варіанти відповідей
1	Розбіжний крім точки x_0
2	Розбіжний на $x \in (x_0 + R; x_0 - R)$
3	Розбіжний на $x \in [-R; +R]$
4	Розбіжний на $x \in (-\infty; \infty)$

24. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

25. Якщо степеневий ряд $\sum_1^n a_n (x - x_0)^n$ має $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$, то ряд

Номер	Варіанти відповідей
1	Збіжний в точці x_0
2	Умовно збіжний на $x \in (x_0 + R; x_0 - R)$
3	Збіжний на $x \in [-R; +R]$
4	Абсолютно збіжний на $x \in (-\infty; \infty)$

25. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

26. Якщо степеневий ряд $\sum_1^n a_n (x - x_0)^n$ має $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$, то ряд

Номер	Варіанти відповідей
1	Не є розбіжним.
2	Розбігається на $x \in (x_0 + R; x_0 - R)$
3	Розбігається на $x \in [-R; +R]$
4	Розбігається на $x \in (-\infty; \infty)$

26. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

27. Сумою якого ряду є функція $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

1	$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$
---	--

2	$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \dots$
---	--

3	$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^4 - \dots$
---	--

4	$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
---	---

27. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

28. Сумою якого ряду є функція $f(x) = e^x$

Номер	Варіанти відповідей
-------	---------------------

1	$f(x) = e^x = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$
---	--

2	$f(x) = e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \dots$
---	--

3	$f(x) = e^x = 1 + x^2 + x^4 - \dots$
---	--------------------------------------

4	$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
---	---

28. Варіанти відповідей:

1	2	3	4
---	---	---	---

29. Сумою якого ряду є функція $f(x) = \sin x$

Номер	Варіанти відповідей
1	$f(x) = \sin x = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$
2	$f(x) = \sin x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \dots$
3	$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
4	$f(x) = \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

29. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

30. Сумою якого ряду є функція $f(x) = \cos x$

Номер	Варіанти відповідей
1	$f(x) = \cos x = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$
2	$f(x) = \cos x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \dots$
3	$f(x) = \cos x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
4	$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

30. Варіанти відповідей:

1 2 3 4

ВІДПОВІДІ ДО ТЕСТІВ

Номер варіанта	1	2	3	4
1				
2		так		
3	так			
4	так			
5				
6	так			
7		так		
8			так	
9		так		
10			так	
11	так			
12	так			
13		так		
14				так
15		так		
16				так
17	так			
18	так			
19				так
20	так			
21	так			
22	так			
23				так
24	так			
25		так		
26				так
27			так	
28				так
29		так		
30			так	

8 ПРИКЛАД ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Якщо $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ – послідовність чисел, то вирази

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{i=1}^n a_i$, називаються відповідно:

- а) ряд, частинна сума, сума ряду;
- б) сума ряду, ряд, частинна сума ;
- в) частинна сума, сума ряду, ряд;
- г) границя ряду, сума ряду, ряд.

(1 бал)

2. Необхідна ознака збіжності ряду є:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = 0$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 \neq 0$.

(0,5 бала)

3. Якщо необхідна ознака збіжності числових рядів не виконується, то кажуть, що ряд...

- а) збіжний;
- б) може збігатись;
- в) розбіжний;
- г) не може бути розбіжним.

(0,5 бала)

4. Нехай задано числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Вкажіть як називається вираз $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$.

- а) частинна сума ряду;
- б) границя суми ряду;
- в) ряд Діріхле.

(0,5 бала)

5. Якщо для двох числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) з додатними членами виконується нерівність $a_n \leq b_n$, то :

- а) із збіжності ряду (1) впливає збіжність ряду (2);
- б) із збіжності ряду (2) впливає розбіжність ряду (1);
- в) із розбіжності ряду (1) впливає розбіжність ряду (2);
- г) із розбіжності ряду (2) впливає збіжність ряду (1).

(0,5 бал)

6. Який із заданих числових рядів є збіжним рядом?

(1 бал)

а	б	в	г	д
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^4 - 3}{n^4 + 2n^2 + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3}{2n^3 + 3}$

7. Встановіть ознаку збіжності числових рядів та обґрунтуйте її вибір. Один ряд (на вибір) потрібно розв'язати. (3 бали)

Ряд	Ознака	Обґрунтування вибору ознаки
а	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$	
б	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$	
в	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$	
г	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$	
д	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$	

8. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається умовно збіжним, якщо:

- а) розбігається $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|$; б) розбігається $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$;
 в) збігається $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|$; г) збігається $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. (0,5 бала)

9. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ буде:

- а) збіжним;
 б) розбіжним;
 в) абсолютно збіжним;
 г) умовно збіжним;
 д) умовно розбіжним. (0,5 бала)

10. Який з виразів є загальним членом ряду: $\ln 2 - \frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 4}{3} - \frac{\ln 5}{4} + \dots$? (1,5 бала)

а	б	в	г	д
$(-1)^n \frac{\ln n + 1}{n}$	$(-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n}$	$(-1)^{n+1} \frac{\ln n + 1}{n}$	$\frac{\ln(n+1)}{n}$	$(-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n}$

11. Якщо степеневий ряд збігається в одній точці, то радіус збіжності цього ряду буде:

- а) $R = \infty$;
- б) $R = 0$;
- в) $R = \text{const} \neq 0$.

(0,5 бала)

12. Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ буде:

- а) $R = \infty$;
- б) $R = 0$;
- в) $R = 1$;
- г) $R = 2$.
- д) визначити неможливо.

(1 бал)

13. Сумою функціонального ряду $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ буде функція:

- а) e^x ;
- б) $\ln(1+x)$;
- в) $\arctg x$;
- г) $\sin x$.

(0,5 бала)

14. Розклад функція e^{-2x} в ряд Маклорена має вигляд:

- а) $\frac{x}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} - \dots$;
- б) $1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \dots$;
- в) $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$;
- г) $1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} - \dots$.

(1 бал)

15. Обчислити $\int_0^1 \sin x^2 dx$ з точністю 0,001:

- а) $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0,217$;
- б) $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0,295$;
- в) $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0,327$;
- г) $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0,417$.

(2,5 бала)

9 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.

Коефіцієнти шукати згідно свого варіанту по списку.

1. Варіант	a	b	c	d
2. Варіант	1	9	2	6
3. Варіант	2	3	4	7
4. Варіант	3	1	5	8
5. Варіант	4	2	1	9
6. Варіант	5	3	2	6
7. Варіант	6	4	3	1
8. Варіант	7	5	4	3
9. Варіант	8	6	5	2
10. Варіант	9	7	6	1
11. Варіант	1	8	7	7
12. Варіант	2	9	8	1
13. Варіант	3	5	9	9
14. Варіант	5	1	2	8
15. Варіант	4	2	3	1
16. Варіант	6	3	5	2
17. Варіант	7	4	7	1
18. Варіант	8	5	8	2
19. Варіант	9	6	1	3
20. Варіант	1	7	2	4
21. Варіант	2	8	3	5
22. Варіант	3	9	4	6
23. Варіант	4	1	5	7
24. Варіант	5	2	6	4
25. Варіант	6	3	7	1
26. Варіант	7	4	8	2
27. Варіант	8	5	1	3
28. Варіант	9	6	2	2
29. Варіант	1	7	2	5
30. Варіант	5	4	1	2

Самостійна робота № 1

Дослідити ряд, за необхідною ознакою збіжності.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn^3 + d}{cn^3 - a}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{bn + d}{bn - a} \right)^n$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{bn + d}{bn - a} \right)$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{bn - a}{\sqrt{cn^2 + d}} \right)$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{bn^3 - a}{\sqrt{cn^2 + d}} \right)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n - a}{n + c} \right)^{2n}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{bn^3 + a}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn}{cn^2 - a}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{bn^2}{n^3 + a}}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \left(\frac{b}{an^2} \right)$$

Самостійна робота № 2

Дослідити ряд за ознакою порівняння.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{cn^3 - a}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn}{cn^2 - a}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn}{\sqrt{cn^5 - a}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn^2}{\sqrt{cn^5 + a}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{bn^2}{cn^7 + a}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \left(\frac{b}{cn^3} \right)$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos \frac{b}{n^2}}{cn^3} \right)$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \left(\frac{b}{\sqrt[5]{cn^3}} \right)$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} cn \cdot \sin \left(\frac{b}{a\sqrt{n^3}} \right)$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn^2 + c}{an^3 \sqrt{cn^5 + a}}$$

Самостійна робота № 3

Дослідити ряд за знакою Д'Аламбера.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{cn^3 - a}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn^2}{n!}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{cn^2 + d}}{(n+1)!}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n+2)n^n}{c(n+1)!}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n^n (b+1)^{n+1}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{(c+1)^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n+c)!(a+1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn^2}{(n+2)!}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn^2}{(n^3 + 2)}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn^2 \cdot (e)^{n+1}}{(n^3 + 2)}$$

Самостійна робота №. 4

Дослідити ряд за радикальною ознакою Коші.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \left(\frac{b}{cn^3 - a} \right)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{cn^3 - a} \right)^n$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{bn+d}{cn-a} \right)^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn+d}{cn-a} \right)^{\frac{n^2}{c}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n^2}{c}} \cdot \frac{1}{(a+2)^n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{2n} \left(\frac{\pi}{n+c} \right)$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (c+1)^{2n} \cdot \left(\frac{\pi}{n+c} \right)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b} \right)^{2n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \left(\frac{c}{an} \right)$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{cn}{an+b} \right)^{3n}}$$

Самостійна робота № 5

Дослідити ряд за інтегральною ознакою Коші.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{(cn-a)(bn+d)}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c \ln(cn-a)}{(cn-a)}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{cn+a}}}{\sqrt{cn+a}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt[3]{bn}}}{\sqrt[3]{cn^2}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+b}{n-a} \right)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln^3(cn+a)}{(cn+a)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{(cn)^2 (bn+d)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{(cn)(n^2+d)}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn}{(n^2+d) \ln(n^2+d)}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn \cdot \sqrt[5]{\ln^3(n^2+d)}}{(n^2+d)}$$

Самостійна робота № 6

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{cn^2}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(an+b)(cn-d)}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \ln \left[(n+1)^c \right]}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt[3]{cn^2}} \right)$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{cn+b}{cn} \right)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{cn^3} \right)$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(an^3+bn)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(b+1)^n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(b+1)^n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{b}{c} \right)^n$$

Самостійна робота № 7

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду і дослідити його поведінку на кінцях інтервалу.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^{n+1}}{(b+1)^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{(cn+b)(b+1)^n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^{n+1}}{(b+1)^n \cdot n!}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n n!}{(c+1)^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{\left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xc)^n}{(cn^2+bn)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(cn^2+bn+a)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+c)^n}{\sqrt{cn+b}(c+1)^n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (cx)^{n+1}}{(b+1)^n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-b)^n n!}{n^n}$$

Самостійна робота № 8

Розкласти функцію в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$1. f(x) = \frac{a}{(x+b)(x-c)}$$

$$2. f(x) = \frac{e^{cx} - 1}{x}$$

$$3. f(x) = \ln(1-cx)$$

$$4. f(x) = \frac{\cos cx - 1}{x}$$

$$5. f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{cx}{b}\right)$$

$$6. f(x) = \sqrt{a+bx^2}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{\sqrt{a-cx^2}}$$

$$8. f(x) = \frac{x}{\sqrt{a-cx^2}}$$

$$9. f(x) = xe^{-cx^2}$$

$$10. f(x) = x \cos^2 ax$$

Самостійна робота № 9

Розгорнути в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$ функцію.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$1. f(x) = \frac{a}{(x+b)(x-c)}, \quad x_0 = a$$

$$2. f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = b$$

$$3. f(x) = e^{bx} \quad x_0 = c$$

$$4. f(x) = \cos x \quad x_0 = c$$

$$5. f(x) = \sin x \quad x_0 = a$$

$$6. f(x) = \sin cx \quad x_0 = a$$

$$7. f(x) = e^{bx-c} \quad x_0 = b$$

$$8. f(x) = \sqrt[3]{x} \quad x_0 = b$$

$$9. f(x) = \ln x \quad x_0 = b$$

$$10. f(x) = \cos^2 bx \quad x_0 = c$$

Самостійна робота № 10

Використовуючи розвинення в ряд Маклорена, обчислити з точністю до 0,01 інтеграл.

$$1. \int_{0,1}^{0,2} \frac{1 - e^{cx}}{x} dx$$

$$2. \int_0^{0,5} \frac{dx}{cx^4 + b}$$

$$3. \int_0^{0,5} \cos \sqrt{cx} dx$$

$$4. \int_0^{0,5} \sqrt{cx^3 + b} dx$$

$$5. \int_0^{0,5} \cos \frac{cx}{a} dx$$

$$6. \int_0^1 \sin \frac{bx}{a} dx$$

$$7. \int_0^{0,1} \sqrt{b + cx} dx$$

$$8. \int_0^{0,1} \ln(\sqrt{b + cx}) dx$$

$$9. \int_0^{0,1} \frac{\sin(cx)}{x} dx$$

$$10. \int_0^{0,1} \frac{\sqrt[3]{cx} \cdot \sin(cx)}{x} dx$$

Самостійна робота № 11

Використовуючи розвинення в ряд Маклорена, обчислити з точністю до 0,01.

$$1. e^{0,c}$$

$$2. \sin b^0$$

$$3. \cos b^0$$

$$4. \ln 1, c$$

$$5. \ln 0,9b$$

$$6. e^{0,bb}$$

$$7. \frac{1}{e^{0,c}}$$

$$8. \cos \frac{\pi}{b}$$

$$9. \sin \frac{\pi}{a}$$

$$10. \sqrt{0,9a}$$

10 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

ІЗ № 1

Дослідити на збіжність задані ряди з додатними членами, користуючись ознаками збіжності:

- а) ознаками порівняння рядів;
- б) ознакою Д'Аламбера;
- в) інтегральною ознакою Коші;
- г) радикальною ознакою Коші.

1. а) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n \cdot \sqrt{n})}{n \cdot \sqrt{n}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+1) \cdot \ln^2(3n+1)};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \arctg^n \frac{\pi}{3n}.$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{(-1)^n + 2}{n^3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot \ln^3(2n+1)}$

г) $\sum_{n=1}^n \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}.$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(0,5\pi \cdot n)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n+1) \cdot \ln(2n+1)};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{e^n};$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!};$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(4n-7) \cdot \ln^2(4n-7)};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}.$

$$5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n - \ln n}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5m+2) \cdot \ln^5(5n+2)};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}.$$

$$6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \ln^{-1}(n+1)^{n+1};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{\sqrt{(2n^2+1)^n}}.$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (2 + \cos n\pi)}{2n^2 - 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1) \cdot (2n)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln^2 n^n};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot \sqrt{n}}{(3n-1)^{2n}}.$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{n^2 + 1};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n \cdot \sqrt[3]{2}} \right)^{n^2}.$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n};$$

$$\text{B) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{\ln^2(n-1)^{n-1}};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}.$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(2n-9) \cdot \ln^3(2n-9)};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} \cdot (n-2)^{3n}}{(2n+1)^{3n}}.$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\ln^3(n+1)^{n+1}};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{(3 \cdot n^n)^n}.$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^3 + 5};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (n+1)!}{(2n)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg 2n}{1 + 4n^2};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}.$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln n}{n^2 - 3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n \cdot (n+2)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n \cdot (4n^2 + 4n + 1)};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^{n^2};$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \cdot (2n)^n}{(3n+5)^n}.$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}.$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n!}{\sqrt{2^n + 3}};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{e^n}};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^3 \cdot \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(0,5\pi \cdot n)}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2};$$

$$\text{Б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3}.$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \arctg \frac{1}{n^3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \cdot \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!};$$

$$\text{Б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n \cdot (n^2-n-2)};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}.$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^{3+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot \sqrt[3]{n}}{3^n + 2};$$

$$\text{Б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt{n}};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arcsin^n \frac{\pi}{4n}.$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=3}^{\infty} n^3 \cdot \tg^5 \frac{\pi}{n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (2n+1)!}{(3n)!};$$

$$\text{Б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n^2+1}};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}.$$

$$21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!};$$

$$\text{Б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^n.$$

$$22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$\text{Б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+2};$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1}.$$

$$23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n^3 + 1)}{(n+1)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n.$$

$$24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2 \cdot n!}{(2n)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 5n}{1+25n^2};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^n.$$

$$25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n-1)!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n^2}};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{-n^2};$$

$$26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+2}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \cdot \sin \frac{2}{3^n};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{e^n};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{0.5n}.$$

$$27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-1)^n}{\sqrt{n^3 + 2n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \operatorname{arctg} \frac{5}{n};$$

$$\text{B) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2(n+2)}{n^2 + 4n + 5};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}.$$

$$28. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n^2 \cdot \sin^2 n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!};$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3(2n-3)}{4n^2 - 12n + 10};$$

$$\text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

$$29. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (\sqrt[n]{e} - 1)^2;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{5^n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n-2)}{n^2 - 4n + 5};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\ln^n n}.$$

$$30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{\sqrt{n^7 + n + 1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \cdot (n^2 - 1)}{n!};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2 + 2n + 2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}.$$

ІЗ № 2

Задано ряд, знаки членів якого чергуються. Потрібно:

а) дослідити ряд на збіжність і встановити характер збіжності (абсолютна чи умовна).

б) з точністю до a знайти суму ряду.

$$1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, a = 0.01$$

$$2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}, a = 0.01$$

$$3. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{n\sqrt{n}} \right);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^3}, a = 0.001$$

$$4. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot n!}, a = 0.001$$

$$5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin 3^n}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(n+1) \cdot n^3}, a = 0.01$$

$$6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, a = 0.0001$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{2^n}, a = 0.1$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(0.5\pi \cdot n)}{n \cdot \sqrt{n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^n}, a = 0.1$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(n \cdot \sqrt{n})}{n \cdot \sqrt{n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(4n^2 - 1)^2}, a = 0.001$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n^2}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, a = 0.0001$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10n^2 + 3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}, a = 0.001$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{\sqrt{n^3}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n, a = 0.01$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+3)}{\ln(n+4)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{7^n}, a = 0.0001$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)}{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, a = 0.1$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \cdot 1.5^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, a = 0.001$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \ln(n+1)}{\sqrt{n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \cdot (2n)!}, a = 0.00001$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \cdot 2^{2n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot n!}, a = 0.01$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi \cdot n)}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{n! \cdot (2n)!}, a = 0.001$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi \cdot n)}{(n+1) \cdot 3^n}, a = 0.001$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos \frac{\pi}{6n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n)!}, a = 0.00001$$

$$21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(2n)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}, a = 0.001$$

$$22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n - 0.5\pi)}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}, a = 0.001$$

$$23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot \sqrt[4]{2n+3}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 4^n}, a = 0.001$$

$$24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(0.5\pi + \pi \cdot n)}{n^3}, a = 0.01$$

$$25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot \ln n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^n}, a = 0.001$$

$$26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \cdot n^2}, a = 0.01$$

$$27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (\ln \ln n) \cdot \ln n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, a = 0.001$$

$$28. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(0.5\pi + \pi \cdot n)}{n^3 + 1}, a = 0.01$$

$$29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-n}{2n+1} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}, a = 0.01$$

$$30. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n+1)}{n \cdot (n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n^3 + 1)^2}, a = 0.001$$

ІЗ № 4

Потрібно:

а) з точністю до 0.001 обчислити заданий визначений інтеграл, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд і почленно інтегруючи цей ряд;

б) знайти перші три, відмінні від нуля, члени розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку заданого диференціального рівняння, який задовольняє вказані початкові умови.

1. а) $\int_0^{0.1} \cos 100x^2 dx;$ б) $y' = x^2 + y^2,$ $y(0)=1.$

2. а) $\int_0^{0.5} e^{\frac{-3x^2}{25}} dx;$ б) $y' = e^x + y^2,$ $y(0)=0.$

3. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+8}};$ б) $y' = y^2 + xy,$ $y(0)=1.$

4. а) $\int_0^1 \sin x^2 dx;$ б) $y' = e^y + xy,$ $y(0)=0.$

5. а) $\int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+625}};$ б) $y' \cdot (1-x) = 1+x-y,$ $y(0)=0.$

6. а) $\int_0^{0.4} \cos(2.5x)^2 dx;$ б) $y' = x + x^2 + y^2,$ $y(0)=5.$

7. а) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}};$ б) $y' \cdot (x^2+1) = 1,$ $y(0)=0.$

8. а) $\int_0^{0.5} \sin 4x^2 dx;$ б) $y' - y = 0,$ $y(0)=1.$

$$9. \text{ a) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + 256}}; \quad \text{б) } y' + y^2 = 1 + x, \quad y(0)=1.$$

$$10. \text{ a) } \int_0^{0.4} e^{\frac{3x^2}{-4}} dx; \quad \text{б) } y' = xy^2 + yx^2, \quad y(0)=1.$$

$$11. \text{ a) } \int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + 125}}; \quad \text{б) } y' = x^2 + y^2 - e^x \quad y(0)=0.$$

$$12. \text{ a) } \int_0^{0.1} \frac{\ln(2x+1)}{x} dx; \quad \text{б) } y' = 2x - 3 \cdot \ln y + y \quad y(0)=1.$$

$$13. \text{ a) } \int_0^{0.4} \frac{1 - e^{-0.5x}}{x} dx; \quad \text{б) } y' = x^3 + y^2 - e^x \quad y(0)=1.$$

$$14. \text{ a) } \int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + 81}}; \quad \text{б) } y' = yx^2 + e^y + x \quad y(0)=0.$$

$$15. \text{ a) } \int_0^{0.2} \cos 25x^2 dx; \quad \text{б) } y' = xy + \sin 2x \quad y(0)=1.$$

$$16. \text{ a) } \int_0^{0.3} e^{-2x^2} dx; \quad \text{б) } y' = e^{-2x} + y^2 \quad y(0)=0.$$

$$17. \text{ a) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + 64}}; \quad \text{б) } y' = \cos x + e^y + x \quad y(0)=0.$$

$$18. \text{ a) } \int_0^{0.4} \sin(2.5x)^2 dx; \quad \text{б) } y' = x \cdot e^x + y^2 + 1 \quad y(0)=0.$$

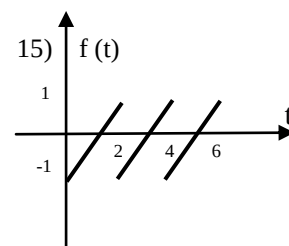
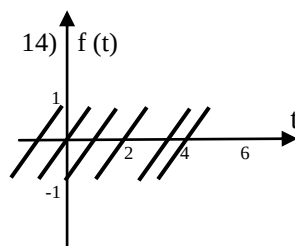
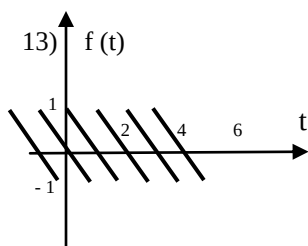
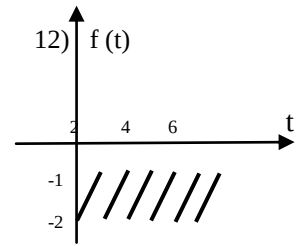
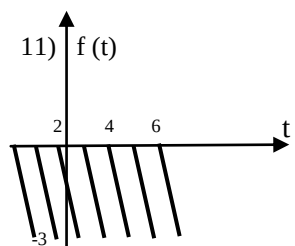
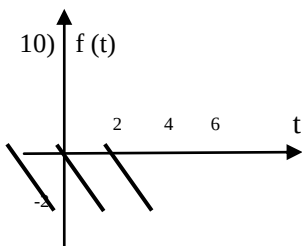
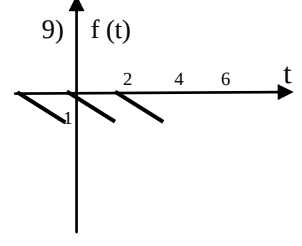
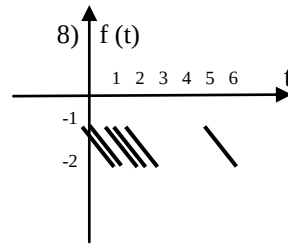
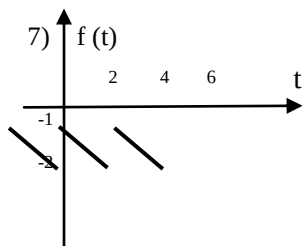
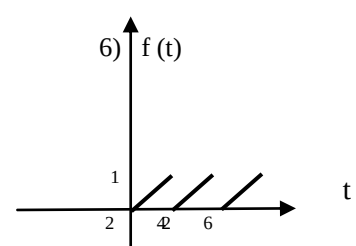
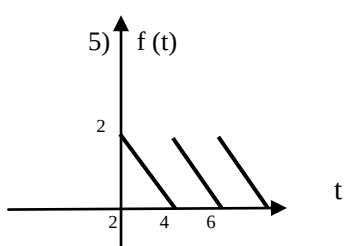
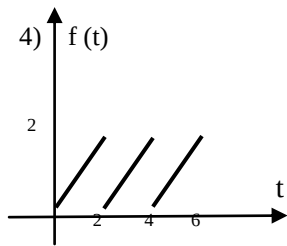
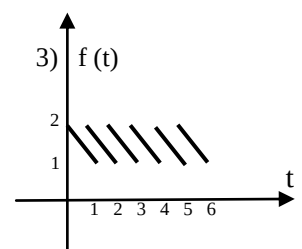
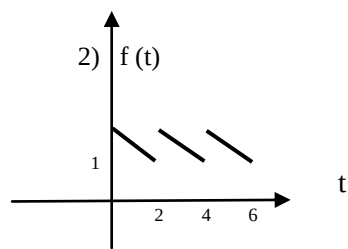
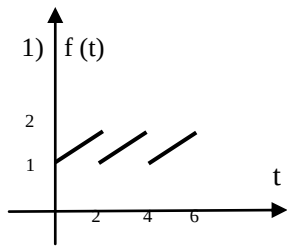
$$19. \text{ a) } \int_0^{0.4} \frac{\ln(0.5x+1)}{x} dx; \quad \text{б) } y' = \operatorname{tg} x + xy^2 - e^x \quad y(0)=1.$$

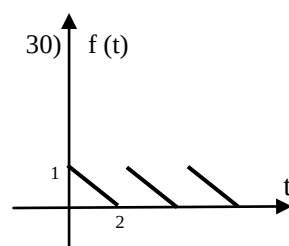
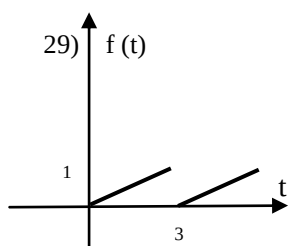
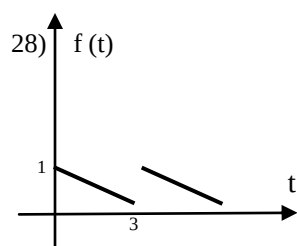
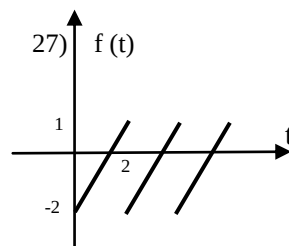
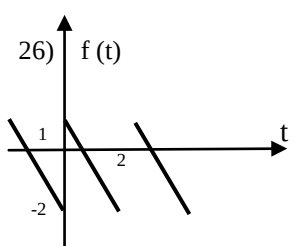
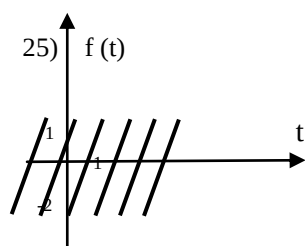
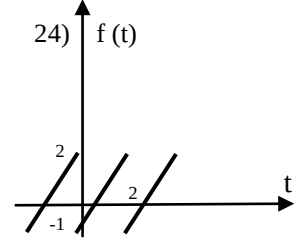
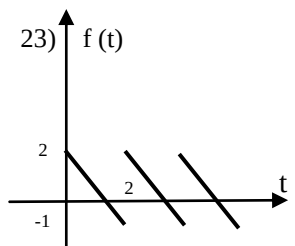
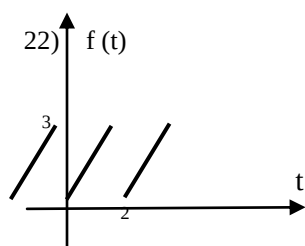
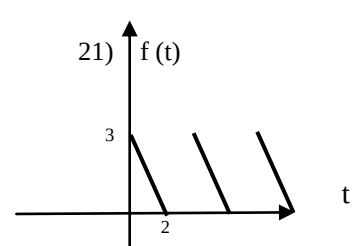
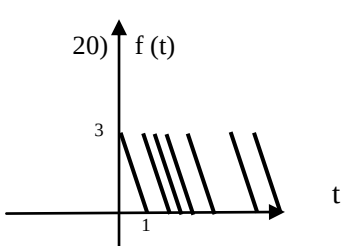
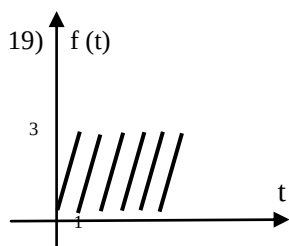
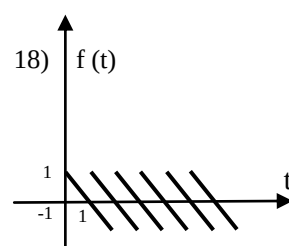
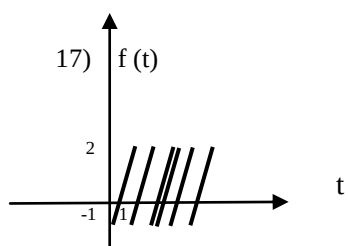
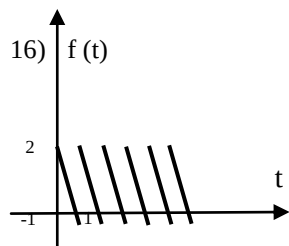
$$20. \text{ a) } \int_0^{0.2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx; \quad \text{б) } y' = 2x^3 - y^2 - 2x \quad y(0)=1.$$

21. а) $\int_0^{0.5} \cos 4x^2 dx$, б) $y' = \ln(x+1) + e^y$ $y(0)=0$.
22. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+16}}$; б) $y' = x^2 + \sin y + 1$ $y(0)=0$.
23. а) $\int_0^{0.25} x \cdot \ln(\sqrt{x}+1) dx$, б) $y' = x \cdot e^{-x} + \ln y$ $y(0)=1$.
24. а) $\int_0^{0.2} e^{-3x^2} dx$, б) $y' = \sin 2x + \cos y$ $y(0)=0$.
25. а) $\int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+27}}$; б) $y' = x^2 + y \cdot \ln y - y$ $y(0)=1$.
26. а) $\int_0^1 \frac{\ln(1+0.5x)}{x} dx$, б) $y' = e^{-2x} + 3y^2$ $y(0)=0$.
27. а) $\int_0^{0.1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$, б) $y' = \cos 2x - x - y^2$ $y(0)=0$.
28. а) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$; б) $y' = x^3 - \operatorname{tg} y + 1$ $y(0)=0$.
29. а) $\int_0^{0.1} e^{-6x^2} dx$, б) $y' = 2x^2 + 3y \cdot \cos x + 2$ $y(0)=0$.
30. а) $\int_0^{0.1} \sin 100x^2 dx$, б) $y' = e^{xy} + y$ $y(0)=1$.

ІЗ № 5

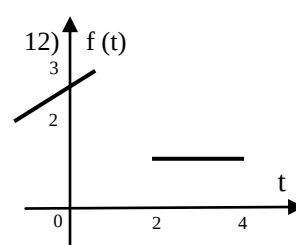
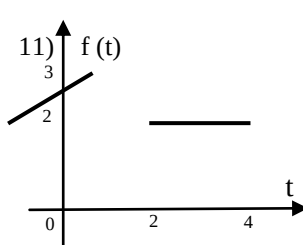
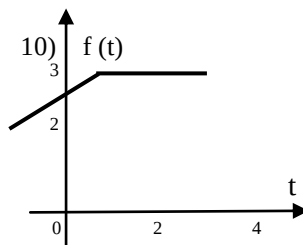
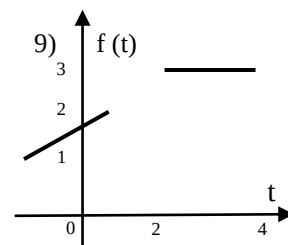
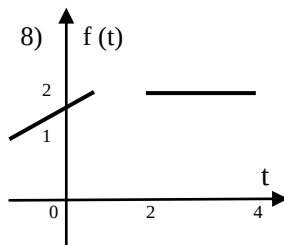
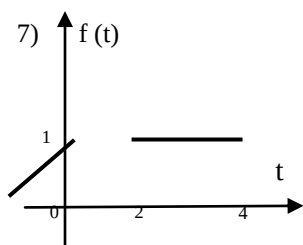
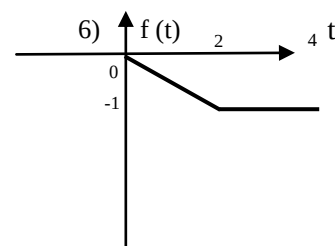
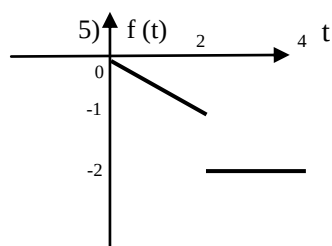
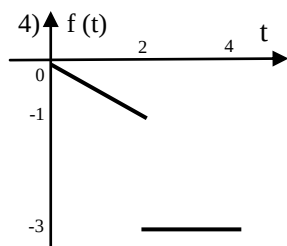
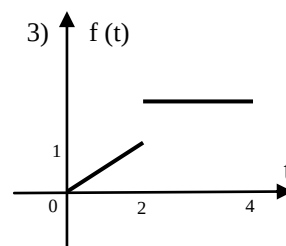
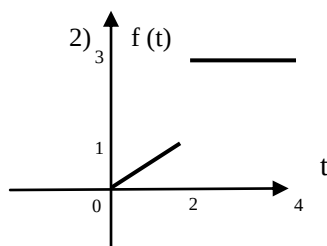
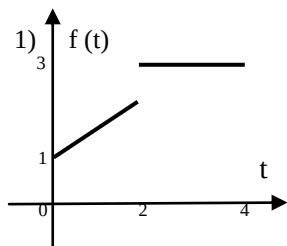
Розкласти функцію, що задана графічно, попередньо записавши для її в аналітичного вигляді

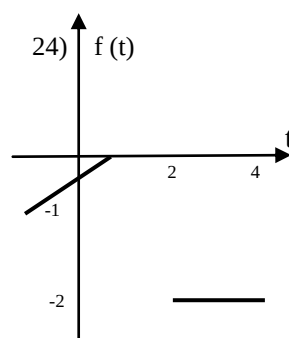
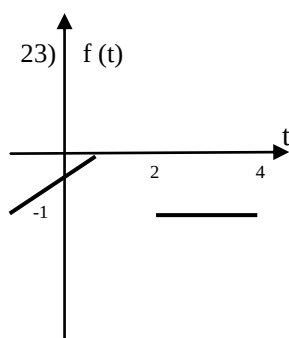
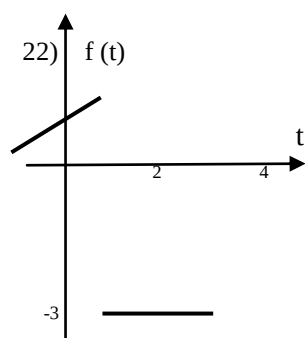
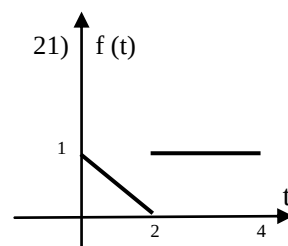
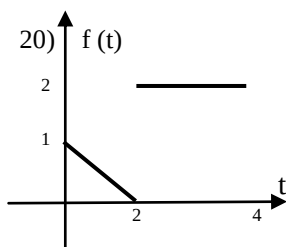
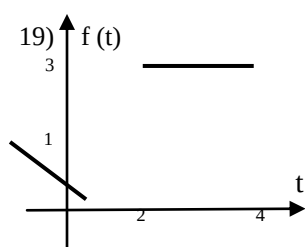
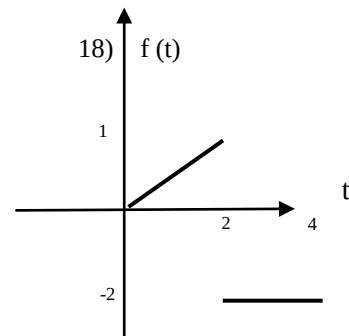
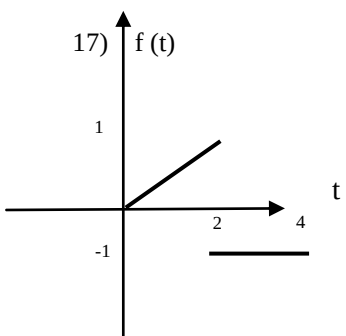
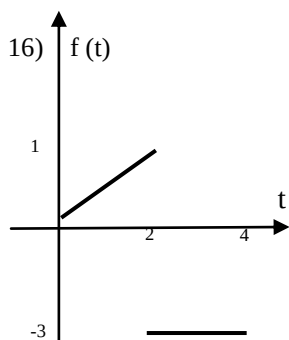
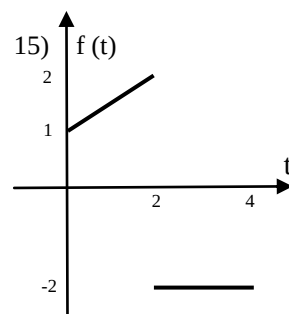
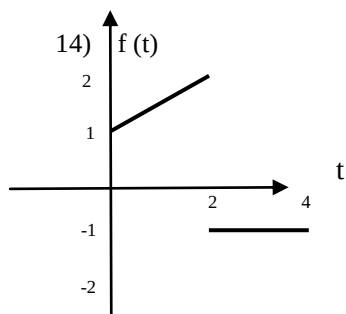
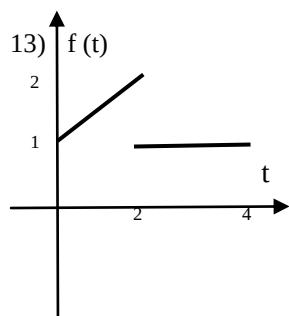


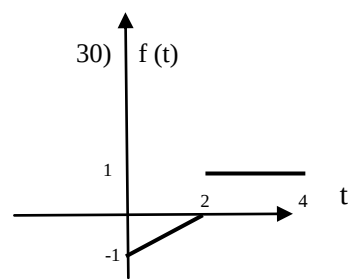
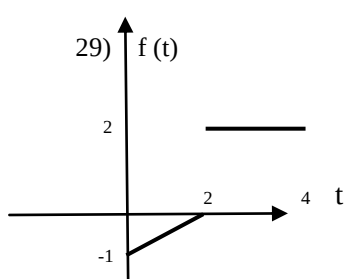
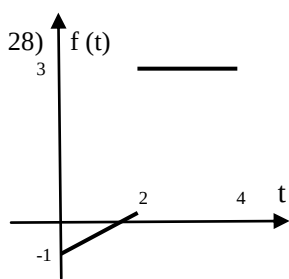
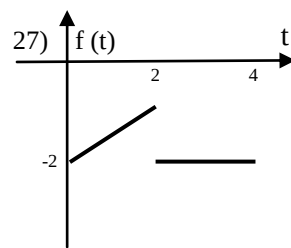
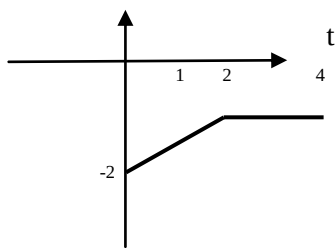
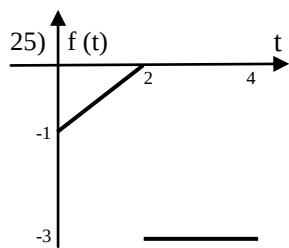


ІЗ № 6

Розкласти в ряд Фур'є функцію, що задана графічно







ЛІТЕРАТУРА

1. Габрієлян М. С., Яремко О. В. Теорія рядів. Львів : Вид-во Львів. Політехніки, 2018. 168 с.
2. Клепиков С. А., Слепцов В. В. Ряди. Київ : НТУУ «КПІ», 2010. 116 с.
3. Лютий О. О., Ткаченко С. С. Ряди : навчальний посібник. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2015. 140 с.
4. Михайленко В. М. Ряди : конспект лекцій. Чернігів : ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка, 2012. 68 с.
5. Самойленко А. М., Перестюк М. О. Ряди. Київ : Вища школа, 2008. 287 с.
6. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Том 2. Ряди. Інтеграли, залежні від параметра. Елементи теорії поля. Київ : Техніка, (2007). 464 с.

Електронне навчальне видання

**Віталій Іванович Ключко,
Альона Анатоліївна Коломієць,
Оксана Іванівна Тютюнник,
Надія Борисівна Дубова**

ТЕОРІЯ РЯДІВ

Навчальний посібник

Рукопис оформила *А. Коломіїєць*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 27.08.2026 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № P2026-120.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;

E-mail: rvv@vntu.edu.ua
Свідцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.