Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика»
за темою «Визначений інтеграл та його застосування»

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» за темою «Визначений інтеграл та його застосування»

Вінниця
ВНТУ
2026

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 23.04.2026 р.)

Рецензенти:

В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор
В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» за темою «Визначений інтеграл та його застосування» / уклад. В. В. Хом'юк. Електрон. текст. дані. Вінниця : ВНТУ, 2026. 37 с.

Методичні вказівки призначені для самостійного вивчення теми «Визначений інтеграл та його застосування». Наведено теоретичний матеріал та типові приклади, пропонуються завдання для самостійної роботи. Методичні вказівки розроблені для студентів першого курсу всіх спеціальностей.

ЗМІСТ

1. Поняття визначеного інтеграла

Нехай функцію $y = f\left(x\right)$ визначена на відрізку $\left[a, b\right]$, $a < b.$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b -$ довільне розбиття цього відрізка на n частин.

Позначимо цей поділ як $\tau -$ розбиття. У кожному з отриманих часткових сегментів $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ ми виберемо довільну точку ξ_i $\left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$. Через Δx_i позначимо різницю $x_i - x_{i-1}$, , яку домовимося назвати довжиною часткового відрізка $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. . Сформуємо суму:

$$\sigma = f\left(\xi_1\right)\Delta x_1 + f\left(\xi_2\right)\Delta x_2 + \cdots + f\left(\xi_n\right)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i, \tag{1.1}$$

яку ми називаємо *інтегральною* сумою функції *f(x)* на $\left[a, b\right]$, що відповідає заданому поділу $\left[a, b\right]$ на часткові відрізки та заданому вибору проміжних точок ξ_i. . Геометричне значення суми σ очевидне: це сума площ прямокутників із основами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ та висотами $f\left(\xi_1\right), f\left(\xi_2\right), \ldots, f\left(\xi_n\right)$, , якщо $f\left(x\right) \ge 0$ (рис. 1). Позначимо через λ довжину найбільшого часткового сегмента розбиття τ: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\left\{\Delta x_i\right\}$.

Означення. *Якщо існує скінченна границя інтегральної суми* (1.1*) у точці при* $\lambda \to 0$ *, то ця границя називається визначеним інтегралом функції* $f(x)$ *відрізка* $\left[a, b\right]$ *і позначається так:*

$$I = \int_a^b f\left(x\right)\,dx \quad \textit{або} \quad \int_a^b f\left(x\right)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i. \tag{1.2}$$

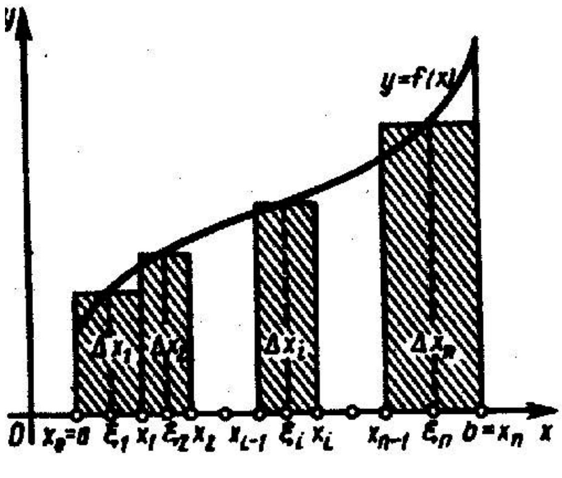


Рис. 1

У цьому випадку функція $f(x)$ називається *інтегрованою* на сегменті $[a,b]$. Числа a і b називають відповідно *нижньою та верхньою межами інтегрування,* $f(x)$ *– підінтегральною функцією, а* x *– змінною інтегрування.*

З означення визначеного інтеграла випливає, що значення інтеграла (1.2) залежить лише від типу функцій $f(x)$ і чисел a і b. Отже, якщо $f(x)$ також задано межі інтегрування, то інтеграл (1.2) визначений однозначно і є певним числом. З цього, зокрема, випливає, що визначений інтеграл не залежить від вибору нотації для аргументу інтегративної функції, тобто від позначення змінної інтегрування: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$ І так далі.

Теорема (необхідна умова для інтегрування функції). *Якщо* $f(x)$ *інтегрована на сегменті* $[a,b]$, *Тоді він обмежений у цьому сегменті.*

2. Інтегрованість неперервних функцій

Теорема 1. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на сегменті, то вона інтегровна на ньому.*

Як випливає з теореми, умова неперервності функції є достатньою умовою для інтегрованості функції. Але це не означає, що визначений інтеграл існує лише для неперервних функцій. Клас інтегровних функцій ширший. Наприклад, існує певний інтеграл функцій, які мають скінченну кількість точок розриву.

Теорема 2. *Якщо функція* $f(x)$ *обмежена на відрізку* $f(x)$ *і є неперервною на ньому всюди, крім скінченної кількості точок, то вона інтегровна на цьому відрізку*.

Наслідок. *У цей сегмент інтегрована шматочно-неперервна функція на сегменті.*

3. Основні властивості визначеного інтеграла

1^0. Інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ було введено для випадку $a<b$. Узагальнимо поняття визначеного інтегралу на випадок, коли межі інтегрування збігаються або нижня межа більша за верхню межу. *За визначенням, ми вважаємо*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{3.1}$$

розглядаючи цю формулу як природне розширення поняття визначеного інтеграла до сегмента нульової довжини.

Також *, за визначенням, ми вважаємо*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Розглядаючи формулу (3.2) *як природне розширення поняття визначеного інтеграла у випадку, коли відрізок* $[a,b]$ *у точці a<b йде у напрямку від* b *до a.* У цьому випадку точки розбиття x_i сегмента $[a,b]$ нумеруються у порядку послідовності від b до a, а в цілісній сумі всі $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ різниці мають від'ємний знак.

2^0. *Якими б не були числа a, b, c, існує рівність*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

3^0. *Константний множник можна вивести зі знака певного інтеграла, тобто*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.4}$$

4^0. *Визначений інтеграл алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їхніх інтегралів, тобто*

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3.5}$$

4. Оцінки інтегралів. Формула середнього значення

1. Оцінки інтегралів. Протягом усього цього абзацу ми вважаємо, що $a < b$.

1^0. *Якщо всюди в сегменті* $[a,b]$ *Функція* $f(x) \ge 0$, *тоді* $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

2^0. *Якщо всюди в сегменті* $[a,b]$ $f(x) \le g(x)$, *тоді* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

3^0. *Для* $f(x)$ *визначено на прямій* $[a,b]$, *існує нерівність* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

Наслідок. *Якщо скрізь у сегменті* $[a,b]$ $|f(x)| \le k,$ *, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le k(b-a).$$

4^0. *Якщо m і m — відповідно найменші та найбільші значення* $f(x)$ *функції на відрізку* $[a,b]$, *то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

2. Формула середнього значення.

Теорема (Теорема про середнє). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на сегменті* $[a,b]$, *то на цьому відрізку існує така точка c, що*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{2.1}$$

Останнє рівняння *називається середньою формулою*, а значення $f(c)$ — середнім значенням функції $f(x)$ на сегменті $[a,b]$.

Зауваження. Теорема про середнє має геометричне значення: значення певного інтегралу а $f(x) \ge 0$ дорівнює площі прямокутника з $f(c)$ висотою та основою b–a.

5. Інтеграл із змінною верхньою межею

Поки що ми розглядали визначений інтеграл із сталими межами інтегрування a і b. Якщо змінити, наприклад, верхню межу так, щоб не виходити за межі сегмента $[a,b]$, то значення інтегралу зміниться. Іншими словами, інтеграл із змінною верхньою межею є функцією його верхньої межі.

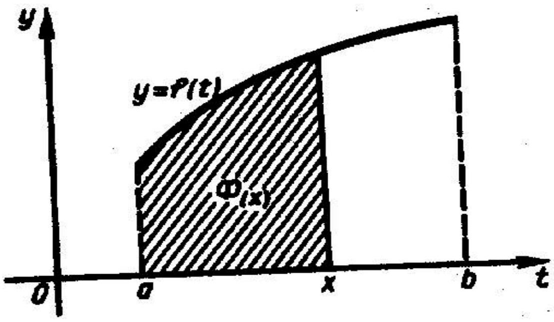


Рис. 2

Розглянемо інтеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \le x \le b)$$

з сталою нижньою *межею a* і змінною верхньою межею x. Величина цього інтегралу є функцією верхньої межі *x*. Позначимо цю функцію *як F(x),* тобто припустимо

$$Q(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{5.1}$$

і назвемо це *інтегралом із змінною верхньою межею. Геометрично* функція F(x) – *це площа криволінійної трапеції, затіненої на рис. 2, якщо* значення інтегралу з змінною верхньою межею розкривається наступною теоремою. $f(x) > 0$.

Теорема. *Похідна інтегралу неперервної функції над змінною верхньою межею існує і дорівнює значенню інтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто* $\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$

Таким чином, встановлено, що будь-яка функція, яка є неперервною на сегменті $[a, b]$ $f(x)$, має примітивну функцію на цьому сегменті, а *функція F(x)* – інтеграл із верхньою змінною верхньою межею – є початковою функцією для $f(x)$. І оскільки будь-яка інша первинна функція $f(x)$ може відрізнятися від *P(x*) лише на константу, встановлено зв'язок між невизначеними та визначеними інтегралами у $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$ формі, де C – довільна константа.

6. Формула Ньютона-Лейбніца.

Обчислення визначених інтегралів методом, заснованим на визначенні інтегралу як межі інтегральної суми, зазвичай супроводжується великими труднощами. Існує більш зручний метод обчислення визначених інтегралів, який, як буде показано, базується на раніше встановленому зв'язку між невизначеними та визначеними інтегралами. $f(x)$ $[a, b]$, має примітиви на цьому сегменті, і одним із них є функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$

Нехай *F(x)* – будь-який інший примітив для функції *f(x)* на тому ж інтервалі$[a, b]$.. Оскільки *примітиви* F(x) і *F(x)* відрізняються на константу, існує рівність $\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad a \le x \le b,$, де C – певне число. Підставляючи значення $x = a$, маємо у цьому $\int\limits_a^a f(t)\,dt = F(a) + C,$ $0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$ рівнянні , тобто для будь-якого $x \in [a, b]$ $\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$

Припускаючи $x = b$, отримуємо базову формулу інтегрального числення

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{6.1}$$

яка називається *формулою Ньютона-Лейбніца.* Різницю $F(b) - F(a)$ зазвичай записують: $F(x)\,\Big|_a^b$, і тому формула (6.1) має вигляд $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b.$

Слід підкреслити, що у формулі (6.1) $F(x)$ будь-яка первісна для $f(x)$ сегмента $[a, b]$.

Формула (6.1) надає простий метод обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл неперервної функції дорівнює різниці між значеннями будь-якої з її примітивних функцій, обчислених для верхньої та нижньої меж інтегрування. Ця формула відкриває широкі можливості для обчислення визначених інтегралів, оскільки задача обчислення визначеного інтегралу зводиться до обчислення невизначеного інтеграла, яка була досить ретельно вивчена. Розглянемо приклади.

1. $\int\limits_a^b \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_a^b = \cos a - \cos b.$

2. $\int\limits_0^2 (3x^2 - 1)\,dx = (x^3 - x)\,\Big|_0^2 = (2^3 - 2) - (0^3 - 0) = 6.$

3. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x\,\Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

4. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\,\Big|_0^3 = \ln\left(3 + \sqrt{10}\right).$

Формула Ньютона–Лейбніца була виведена з припущення, що субінтегративна функція $f(x)$ є неперервною. За певних умов формула Ньютона–Лейбніца також справедлива для розривних функцій.

7. Підстановка змінної у визначеному інтегралі.

Теорема. *Нехай* $f(x)$ *– неперервна функція на сегменті* $[a,b]$. *Тоді, якщо:* 1) *Функція* $x=\phi(t)$ *диференційовується у* $[\alpha,\beta]$ *та* $\phi'(t)$ *є неперервним на* $[\alpha,\beta]$*;* 2) *множина значень функцій* $x=\phi(t)$ *є сегментом* $[a,b]$*;* 3) $\phi(\alpha)=a$ *та* $\phi(\beta)=b$ *, тоді формула*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt. \qquad (7.1)$$

Формула (7.1) називається формулою для заміни змінної або підстановки на певний інтеграл.

Приклад 1. Обчислити $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$

Розв'язування. Розглянемо $x=\sin t$ підстановку , $0\le t\le \pi/2$. перевіримо легітимність такої заміни. По-перше, функція $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ є неперервною на $[0,1]$; , по-друге, функція $x=\sin t$ диференційована за $[0,\pi/2]$ і $x_t'=\cos t$ неперервною на $[0,\pi/2]$, а по-третє, коли t змінюється з 0 на $\pi/2$ функцію $x=\sin t$, вона змінюється з 0 на 1, де $x(0)=0$ і $x(\pi/2)=1$. Отже, ця заміна задовольняє всі умови теореми. Застосовуючи формулу (7.1), отримуємо

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\ dt=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\ dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\ dt=\frac{\pi}{4}.$$

Зауваження. При використанні формули (7.1) необхідно перевіряти виконання умов, наведених у теоремі. Якщо ці умови порушені, можна отримати неправильний результат.

Приклад 2. Обчислити $\int_0^\pi dx.$

Розв'язування. У $\int_0^\pi dx=x\,\Big|_0^\pi=\pi.$ нас, навпаки,

$$\int_0^\pi dx=\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\mathrm{tg}^2\, x)}.$$

Підстановка $\mathrm{tg}\, x=t$ формально призводить до наступного результату:

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Результат неправильний, оскільки $\pi \neq 0$. Це сталося тому, що функція є $t = \operatorname{tg} x$ розривною, коли $x = \pi / 2$ і не задовольняє умови теореми.

8. Формула інтегрування частинами визначеного інтеграла.

Теорема. *Якщо функції u(x) і v(x) мають неперервні похідні на сегменті* $[a, b]$, *то формула*

$$\int_a^b u\ dv = uv\ \Big|_a^b - \int_a^b v\ du. \tag{8.1}$$

Формула (8.1) *називається формулою інтегрування частинами в певному інтегралі.*

Приклад 1. Обчислити $\int_1^{e} \ln x\ dx.$

Розв'язування. Нехай $u = \ln x$, $dv = dx$; отже, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ знаходимо за формулою (8.1) $\int_1^{e} \ln x\ dx = x\ \ln x\ \Big|_1^{e} - \int_1^{e} x\frac{dx}{x} = (x\ \ln x - x)\Big|_1^{e} = 1.$

Приклад 2. Обчислити $\int_1^2 x\mathrm{e}^x\ dx.$

Розв'язування. Нехай $u = x,$ $dv = \mathrm{e}^x\, dx;$ з $du = dx,$ $v = e^x$ цього і відповідно до формули (8.1) маємо $\int_1^2 x\ \mathrm{e}^x\ dx = x\ \mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x\left(x-1\right)\Big|_1^2 = \mathrm{e}^2.$

Приклад 3. Розрахуйте $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\ dx.$

Розв'язування. Нехай $u = \operatorname{arctg} x$, ; $dv = dx$ Отже, $du = \frac{dx}{1+x^2},$ $v = x$ ми знаходимо відповідно до формули (8.1)

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\ dx = (x\ \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \left(x\ \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

9. Фізичне та геометричне застосування визначеного інтеграла.

1. Площа криволінійної трапеції. Припустимо, що на площині *Oxy* існує фігура, обмежена відрізком $[a,b]$ *осі Oh*, прямими $x=a$ $x=b$, і графіком неперервної та невід'ємної функції $y=f(x)$ на $[a,b]$. Це криволінійний трапецій, площу *якого* s можна обчислити за формулою.

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{9.1}$$

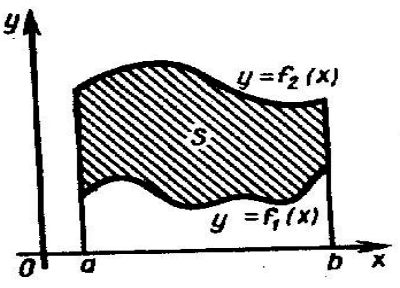
Отже, визначений інтеграл невід'ємної неперервної функції $f(x)$ $[a,b]$ чисельно дорівнює площі криволінійного трапеції з $[a,b]$основою, обмеженою зверху графом функції $y=f(x)$. Це геометричне значення визначеного інтеграла.

Приклад 1. Знайдіть площу фігури, обмежену графіком функції прямої $y=x^{\alpha}, \alpha>0,\ x=1$ та осі Oh.

Розв’язування. За формулою (9.1) маємо $s=\int_0^1 x^{\alpha}dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.$

Якщо $\alpha=1$, то $s=1/2$; Якщо $\alpha=2$, це $S=1/3$ тощо.

Нехай фігура обмежена внизу і вище графіками функцій $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, $f_1(x)\le f_2(x)$, $a\le x\le b$ (рис. 3), де $f_1(x)$, $f_2(x)$–є дві неперервні функції. Якщо обидві функції невід'ємні, то *площа s* цієї фігури дорівнює різниці площ криволінійних трапецій, обмежених зверху графіками функцій відповідно $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$.



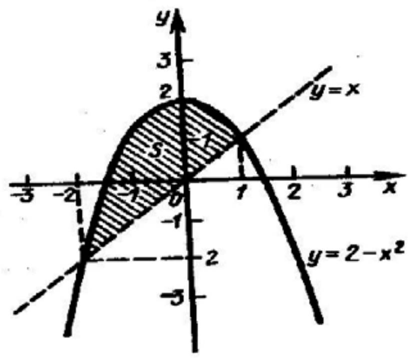


Рис. 3

Відповідно,

$$s=\int\limits_a^b f_2(x)\,dx-\int\limits_a^b f_1(x)\,dx=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx. \qquad (9.2)$$

Зверніть увагу, що формула (9.2) є дійсною навіть тоді, коли $f_1(x)$ вона $f_2(x)$ не є невід'ємною.

Приклад 2. Обчисліть площу фігури, обмежену графіками функцій $y=f_1(x)=x$ і $y=f_2(x)=2-x^2$ (рис. 3).

Розв'язування. Знайдемо абсцису точок перетину прямої $y=x$ з параболою $y=2-x^2$. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2, \end{cases}$, отримуємо $x_1=-2,\ x_2=1.$ Це межі інтегрування. Шукана площа за формулою (9.2) така:

$$s=\int\limits_{-2}^{1}\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx=\int\limits_{-2}^{1}\left[\left(2-x^2\right)-x\right]dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

Щоб обчислити площу криволінійної трапеції у випадку, коли верхня межа задається параметричними $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$ рівняннями, і $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b,$ у формулі (9.1) необхідно замінити змінну на . $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt.$ Тоді $s=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$ отримуємо .

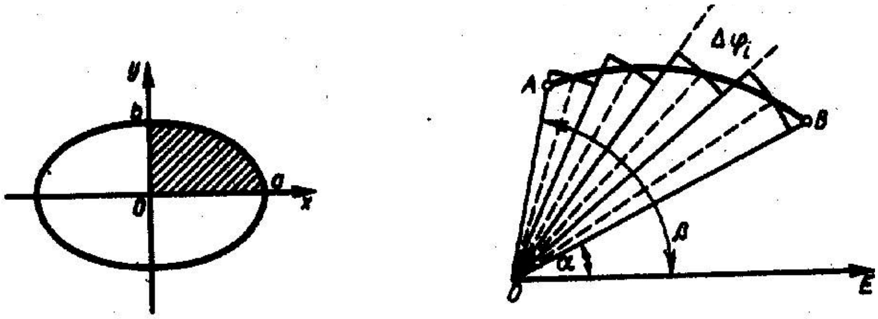


Рис. 4

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Розв'язування. Еліпс симетричний відносно координатних осей, тому достатньо обчислити площу частини фігури, розташованої в першій чверті (рис. 4). Отже, потрібна площа дорівнює

$$s = 4\int\limits_{\pi/2}^{0} b\sin t\ \left(a\cos t\right)' dt = 4ab\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\ dt =$$

$$= 2ab\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(1-\cos 2t\right) dt = 2ab\ \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \pi ab.$$

Зокрема, якщо $a = b = R$, то отримуємо добре відому формулу для площі кола πR^2.

2. Площа криволінійного сектора. Нехай крива *AB* задається у полярних координатах $\rho = \rho(\phi), \quad \alpha \le \phi \le \beta,$ рівнянням, і $\rho(\phi)$ функція є неперервною і невід'ємною на сегменті $[\alpha, \beta]$. Площинна фігура, обмежена кривою *AB* і двома променями, що утворюють кути з полярною віссю $\alpha \quad \beta,$, називатиметься *криволінійним сектором* (рис. 4). Площа *s* криволінійного сектора відповідає формулі

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)\ d\phi. \tag{9.3}$$

Приклад 4. Обчисліть площу фігури, обмежену полярною віссю, і першим поворотом спіралі Архімеда: $\rho = a\phi,$ де а – додатне число (рис. 5).

Розв’язування. При переході ϕ від 0 до 2π полярного радіуса він описує криву, яка обмежує криволінійний сектор *OAB*. Отже, згідно з формулою (9.3), маємо

$$s_{OABC} = \frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \phi^2\ d\phi = \frac{a^2}{2}\frac{\phi^3}{3}\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Відстань від точки *C* до полюса дорівнює $\rho = 2\pi a$. Отже, коло радіуса OS має площу $\pi \cdot OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3\cdot\frac{4}{3}\pi^3 a^2 = 3\cdot\ s_{OABC},$, тобто площа фігури, обмежена полярною віссю, а перший поворот спіралі Архімеда дорівнює 1/3 площі кола з радіусом максимального полярного радіусу повороту.

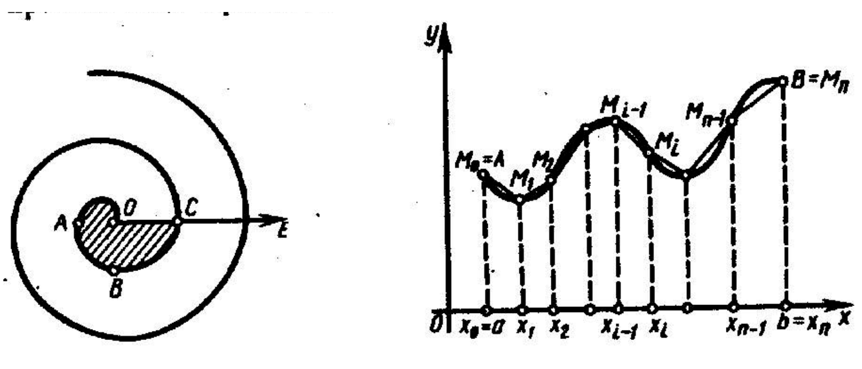


Рис. 5

3. Довжина дуги кривої. Нехай плоска крива *AB* задається рівнянням $y = f(x),\ a \le x \le b,$ де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$. Розділимо криву *AB* на *n* довільних частин на точки $A = M_0,\ M_1,\ M_2, \dots, M_{i-1},\ M_i, \dots, M_n = B$ у напрямку від *A* до *B*. З'єднуючи сусідні точки хордами, отримуємо певну ламану, вписану в криву *AB*, довжину якої позначаємо як *P* (рис.5). Позначимо довжину однієї ланки $M_{i-1}M_i$ як l_i, а через μ – довжину найбільшої ланки: $\mu = \max\limits_{1 \le i \le n} \{l_i\}$.

Означення. *Число L називається межею довжин ламаної P, коли* $\mu \to 0$ $\left(L = \lim\limits_{\mu \to 0} P \right)$, *для будь-якої* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *так, що для будь-якої ламаної, для якої виконується* $\mu < \delta$ *нерівність* $|L - P| < \varepsilon$.

Якщо існує межа L довжин *P*, вписана в криву ламаної, то $\mu \to 0$, ця межа називається *довжиною дуги AB.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна з $f'(x)$ на сегменті $[a, b]$, то довжина дуги *AB* виражається формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (9.4)$$

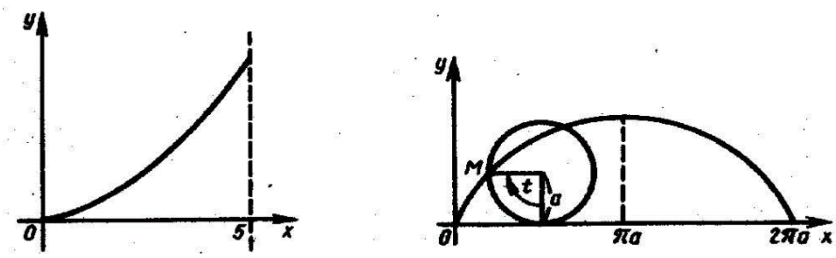


Рис. 6

Приклад 5. Обчислимо довжину дуги верхньої гілки напівкубічної $y = x^{3/2}$, параболи, якщо $0 \le x \le 5$ (рис. 6).

Розв'язування. З рівняння $y = x^{3/2}$ отримуємо: $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Отже, згідно з формулою (9.4) отримуємо

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5 = \frac{335}{27}.$$

Зауваження. При обчислені довжину дуги у випадку, коли крива *AB* параметрично задається $x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad \alpha \le t \le \beta$ рівняннями, де α – та β – значення параметра *t*, що відповідають значенням *x=a, x=b*, тобто

$a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta),$ у формулі (9.4), потрібно замінити змінну на . $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt.$ Тоді отримуємо

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\ dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\phi'(t)\ dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\ dt. \qquad (9.5)$$

Приклад 6. Обчисліть довжину дуги однієї циклоїдної дуги: $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi$ (рис. 6).

Розв’язування. З рівнянь циклоїда ми отримуємо: $\varphi'(t)=a(1-\cos t)$, $\psi'(t)=a\sin t.$ Коли x виконує $[0, 2\pi a]$, параметр *сегмента,* t проходить сегмент $[0, 2\pi]$. Отже, потрібна довжина дуги дорівнює

$$L=\int_0^{2\pi a}\sqrt{1+y'^2(x)}\ dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\ dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}a\ \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\ dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\ dt=-4a\ \cos\frac{t}{2}\ \Big|_0^{2\pi}=8a.$$

Зауваження. Щоб обчислити довжину дуги у випадку, коли крива *AB* задається полярними координатами рівнянням $\rho=\rho(\phi),\ \ \alpha\le\varphi\le\beta,$, де $\rho(\varphi)$ на сегменті $[\alpha,\beta]$ vfє неперервну похідну $\rho'(\varphi)$, а точки A і *B* відповідають значенням ϕ, рівним α і β , потрібно перейти з полярних координат на прямокутні. Тоді отримуємо параметричне визначення кривої *AB* за рівняннями $x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \ y=\rho(\varphi)\sin\varphi,\ \ \alpha\le\varphi\le\beta$. Оскільки $x'(\phi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi,\quad y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi,$ формула (9.5) має вигляд

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\ d\varphi. \qquad (9.6)$$

Приклад 7. Обчисліть довжину першого повороту спіралі Архімеда: $\rho=a\phi$ (див. рис. 5).

Розв'язування. Перший поворот спіралі формується, коли полярний кут змінюється φ з 0 до 2π. Отже, згідно з формулою (9.6), потрібна довжина дуги дорівнює

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\ d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\ \ d\varphi=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

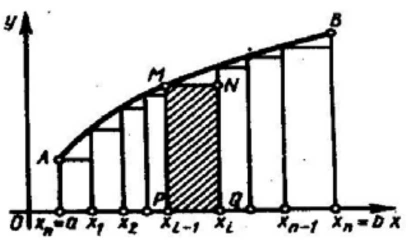
4. Об’єм тіла революції. Нехай функція $f(x)$ є неперервною і невід'ємною на сегменті $[a,b]$. Тоді тіло, утворене обертанням навколо *осі*

Oh криволінійного трапеції, обмеженого зверху графіком функції $y = f(x)$, має об'єм

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (9.7)$$

Приклад 8. Обчислимо об'єм тора. Тор – це тіло, отримане шляхом обертання кола *радіуса a* навколо осі, що лежить у площині на відстані b від центру кола $(b \geq a)$.

Розв'язування. Нехай коло обертається навколо *осі Oh* (рис. 7). Об'єм тора можна представити як різницю об'ємів тіл, отриману внаслідок обертання криволінійних трапецій *ABCDE* та *ABLDE* навколо *осі Oh*.



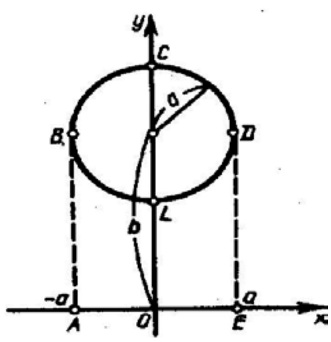


Рис. 7

Рівняння кола LBCD має вигляд $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, , де рівняння кривої – BCD $y = y_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, , а рівняння кривої – *BLD* $y = y_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$.

Використовуючи формулу (9.7), отримуємо вираз V

$$V = 2\pi \int_0^a y_1^2(x)\, dx - 2\pi \int_0^a y_2^2(x)\, dx = 2\pi \int_0^a \left(y_1^2(x) - y_2^2(x) \right) dx =$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right] dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

5. Площа обертання поверхні. Нехай функція $f(x)$ є невід'ємною і неперервною разом із першою похідною на сегменті $[a, b]$. Тоді поверхня, утворена обертанням графіка цієї функції навколо осі *Oh*, має площу *P*, яку можна обчислити за формулою

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (9.8)$$

Зауваження. Якщо поверхню отримати обертанням навколо *осі Oh* кривої *AB*, заданої параметричними $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$ рівняннями, і $\psi(t)\ge 0,\quad \phi(t)$ змінюється з a на b зі зміною t з α на β $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b,$, то, утворюючи заміну змінної в інтегралі (9.8), $x=\varphi(t),$ отримуємо

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\ \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\ dt. \tag{9.9}$$

Нарешті, якщо крива задається рівнянням у полярних координатах: $\rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta,$ де $\rho(\varphi)$ має неперервну похідну на $[\alpha,\beta]$, то цей випадок, як уже зазначалося на кроці 3, зводиться до параметричного визначення $x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\quad y=\rho(\varphi)\sin\varphi,\quad \alpha\le\varphi\le\beta,$ кривої, і формула (9.9) має вигляд

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\ \sin\varphi\ \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\kappa)}\ d\phi.$$

Приклад 9. Обчисліть площу *P* поверхні сферичної фігури, утвореної обертанням півкола $f(x)=\sqrt{R^2-x^2},\ -R<a\le x\le b<R,$ навколо осі *Ox*.

Розв'язування. За формулою (9.8) отримуємо

$$P=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\ \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\ dx=2\pi\int_a^b R\ dx=2\pi R(b-a)=2\pi Rh,$$

де h — висота фігури.

Приклад 10. Обчисліть площу поверхні, отриману обертанням однієї дуги циклоїда $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi,$ навколо осі *Ox*.

Розв'язування. За формулою (9.9) маємо

$$P=2\pi\int_0^{2\pi}a\ (1-\cos t)\ \sqrt{(a\sin t)^2+\left(a(1-\cos t)\right)^2}\ dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

6. Робота, виконана змінною силою. З розглянутих вище задач, пов'язаних із геометричним застосуванням визначеного інтеграла, випливає, що для їх розв'язання використовується той самий обчислювальний метод: наближене значення бажаної величини подається як ціла сума, а точне значення у вигляді інтегралу отримується граничним переходом. За допомогою того ж методу розв'язується низка інших задач механіки, фізики та техніки.

Нехай точка матеріалу рухається під дією сили *F*, спрямована вздовж осі *Ox* і має змінне значення, що залежить *від x*. Необхідно визначити роботу *A*, яку виконує сила F при переміщенні матеріальної точки вздовж *осі Ox* від $x=a$ точки до $x=b$ $(a<b)$ *точки* . $F(x)$ Функція вважається неперервною на сегменті $[a,b]$ (рис. 8).

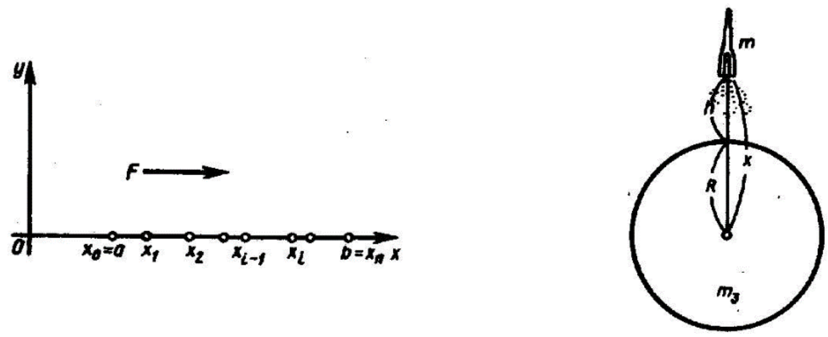


Рис. 8

Нехай довільно розділимо $[a,b]$ сегмент на n частин на точки $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b.$ Виберемо точку на кожному частковому відрізку $[x_{i-1},x_i]$ ξ_i. Сила, що діє на матеріальну точку на відрізку, $[x_{i-1},x_i]$змінюється від точки до точки. Але якщо довжина відрізка мала, то значення сили в точках відрізка $[x_{i-1},x_i]$ мало відрізняється від значення в будь-якій точці $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, оскільки $F(x)$ воно є неперервним. ОтжеA_i, роботу, виконану силою F на , $[x_{i-1},x_i]$, можна вважати приблизно рівною роботі на тому ж сегменті за сталою силою $F(\xi_i)$, тобто

$$A_i\approx F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Застосовуючи подібне міркування для кожного сегмента розбиття, ми отримуємо приблизне значення твору А сили *F* на всьому сегменті:

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i.$$

З іншого боку, сума праворуч рівняння є інтегральною сумою функції *F(x)*. Оскільки $F(x)$ функція неперервна $[a,b]$, то границя цієї суми в $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ точці існує і дорівнює певному інтегралу функції $F(x)$ вздовж сегмента $[a,b]$. Отже,

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n}F(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (9.10)$$

Приклад 11. Визначити роботу *A*, необхідну для вертикального запуску тіла *маси m* з поверхні Землі до висоти h (рис. 14).

Розв'язування. Позначимо F $m_з$ – силу притягання тіла Землею. Нехай $F = G\,\dfrac{m \cdot m_з}{x^2}$, – маса Землі. Згідно із законом Ньютона, *де* x – $G \cdot m \cdot m_з = K$, відстань від тіла до центру Землі. Припустимо $F(x) = K / x^2$, $R \le x \le h + R$, , що R – радіус Землі. При $x = R$ силі *F(R)* дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто $K / R^2 = P$, з і $K = PR^2$, $F(x) = PR^2 / x^2$. Отже, згідно з формулою (9.10), отримуємо

$$A = \int_R^{R+h} F(x)\,dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \left.\frac{1}{x}\right|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}.$$

10. Невласні інтеграли

Вводячи визначений інтеграл як межу цілих сум, ми припускали, що сегмент інтегрування є скінченним, а інтегративна функція обмежена цим сегментом. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то наведене вище визначення визначеного інтегралу втрачає своє значення частини скінченної довжини, і у випадку необмеженої функції інтегральна сума не має скінченної межі. Однак навіть у цих випадках поняття визначеного інтегралу можна узагальнити. Внаслідок цього узагальнення виникло поняття неправильного інтегралу.

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Означення. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена на інтервалі* $[a, +\infty)$ *і інтегрована відносно будь-якого сегмента* $[a, R]$, *тобто існує визначений інтеграл* $\int_a^R f(x)\,dx$ *у будь-який R>a. Тоді, якщо існує скінченна межа*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx, \tag{10.1}$$

тоді це називається неправильним інтегралом першого виду і позначається як

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{10.2}$$

Отже, за визначенням $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$

У цьому випадку інтеграл (10.2) вважається існуванням або збіжністю. Якщо межа (10.1) не існує або є нескінченною, то інтеграл (10.2) вважається неіснуючим або розбіжним.

Подібно до інтегралу (10.2), вводиться неправильний інтеграл уздовж інтервалу $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{b} f(x)\, dx. \qquad (10.3)$$

Нарешті, як сума інтегралів виду (10.2) і (10.3), можливо визначити неправильний інтеграл із двома нескінченними межами, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad (10.4)$$

де c – будь-яке число, за умови, що обидва інтеграли існують праворуч.

Давайте встановимо геометричне значення неправильного інтеграла першого виду. Нехай $f(x) \geq 0.$ тоді визначений інтеграл $\int_{a}^{R} f(x)dx$ виражає площу площі, обмежену зверху графом функції, $f(x)$ внизу віссю Oh, зліва прямою $x = a$ прямою, праворуч прямою $x = R$. Природно припустити, що неправильний інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ виражає скінченну площу нескінченної площі, обмеженої зверху графом функції, $f(x)$ внизу віссю Oh, зліва прямою $x = a$ прямою Подібна інтерпретація справедлива і для інтегралів (10.3) та (10.4).

Розглянемо кілька прикладів обчислення неправильних інтегралів першого типу.

Приклад 1.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} (\operatorname{arctg} x)\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2},$$

тобто цей інтеграл збігається.

Приклад 2.

$$\int_{0}^{+\infty} \cos x\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} \cos x\, dx = \lim_{R\to+\infty} \sin x\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \sin R,$$

але межа функції *sin R* в $R \to +\infty$ не існує, тому інтеграл розходиться.

Приклад 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{+\infty} e^x dx;$ Інтеграл розходиться, оскільки

$$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^x dx = \lim_{R\to+\infty} e^x\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \left(e^R - 1\right) = +\infty.$$

Приклад 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

1) Якщо $\alpha \neq 1$, для будь-якого $R > 0$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \frac{R^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha} & при \quad \alpha > 1, \\ +\infty & при \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Якщо $\alpha = 1$, для будь-якого $R > 0$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to+\infty} (\ln x)\Big|_1^R = \lim_{R\to+\infty} \ln R = +\infty.$$

Отже, цей інтеграл збігається в $\alpha > 1$ і розходиться в $\alpha \leq 1$. Зверніть увагу, що в розгляданих прикладах обчислення неправильного інтегралу базувалося на його визначенні.

2. Невласні інтеграли від необмежених функцій.

Означення. *Нехай функція f(x) визначена на* $[a, b)$. *інтервалі . Точка* $x = b$ *буде називатися особливою, якщо функція* $f(x)$ *необмежена в будь-якій околиці цієї точки, але обмежена будь-яким сегментом* $[a, b-\varepsilon]$, *охопленим у* $[a, b)$ *(рис. 9). Нехай* $[a, b-\varepsilon]$ *функція* $f(x)$ *інтегрована на будь-якому сегменті, тобто існує визначений* $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ *інтеграл для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *такого, що* $b - \varepsilon > a$. *. Тоді, якщо існує скінченна границя*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \tag{10.5}$$

тоді це називається неправильним інтегралом другого виду і позначається як

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{10.6}$$

У цьому випадку інтеграл (10.6) вважається існуванням або збіжністю. Якщо межа (10.5) не існує або є нескінченною, то інтеграл (10.6) вважається неіснуючим або розбіжним.

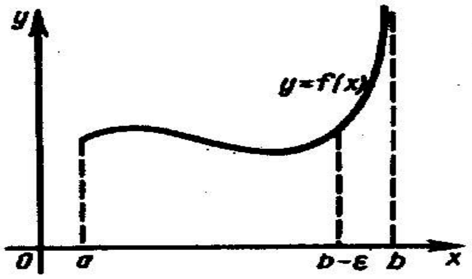


Рис.9

Аналогічно, якщо $x = a$ є сингулярною точкою, то неправильний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ не обмежена в околі якоїсь внутрішньої точки $c \in [a, b]$, то, за умови, що обидва інтеграли існують, праві інтеграли за визначенням вважаються

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Нарешті, якщо a і b є сингулярними точками, то якщо обидва інтеграли справа існують, некоректний інтеграл визначається як сума

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

де c – будь-яка точка . (a,b)

Приклад 5. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0$.

1) Якщо тоді $\alpha \neq 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & при \quad \alpha > 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & при \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Якщо $\alpha = 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln x)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(-\ln \varepsilon\right) = +\infty.$$

Отже, цей інтеграл збігається в $0 < \alpha < 1$ і розходиться в точці $\alpha \geq 1$.

Приклад використання невласного інтегралу. Обчислимо другу космічну швидкість тіла, тобто початкову швидкість, з якою воно може вийти з гравітаційного поля Землі в міжпланетний простір.

Раніше, за допомогою певного інтеграла, розраховувалася робота, необхідна для запуску тіла масою m з поверхні Землі на *висоту* h

$$A=\int_{R}^{R+h}F\left(x\right)\,dx=\frac{PRh}{R+h}.$$

Вихід тіла в міжпланетний простір означає його запуск на нескінченну висоту $\left(h=+\infty\right)$. Розрахуємо необхідну роботу для цього:

$$\lim_{h\to\infty}A=\int_{R}^{\infty}F\left(x\right)\,dx=\lim_{h\to+\infty}\ \frac{PRh}{R+h}=\lim_{h\to+\infty}\ \frac{PR}{1+R/h}=PR=mgR,$$

де m — маса тіла; g — це прискорення гравітації на поверхні Землі (тертя та притягнення інших планет не враховуються). Ця робота виконується шляхом зміни кінетичної енергії тіла. Отже, кінетична енергія тіла в початковий момент не повинна бути меншою за цю роботу, тобто початкова швидкість *тіла* v має бути такою, що $\frac{mv^2}{2}\geq mgR$ або

$$v\ \geq\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot10\cdot6\ 400\ 000}\ \text{ м/с}=1,4\cdot8\ 000\ \text{ м/с}=11,2\ \text{ км/с..}$$

Якщо початкова швидкість тіла становить 11,2 км/с, то його траєкторія є параболою. При початковій швидкості понад 11,2 км/с траєкторія буде гіперболою, а при початковій швидкості менше 11,2 км/с тіло рухатиметься по еліптичній траєкторії. У такому випадку він або впаде на Землю, або стане штучним супутником Землі.

11. Завдання для пунктів 1 – 10

Обчислити

1. $\int_{a}^{b}x^n dx\quad\left(n\neq1\right).$ **2.** $\int_{0}^{2}\left(3x^2-1\right)dx.$ **3.** $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}.$ **4.** $\int_{1}^{2}e^x dx.$

5. $\int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx.$ **6.** $\int_{0}^{\pi}\sin x dx.$ **7.** $\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

8. $\int_{0}^{\pi/2}\cos x dx.$ **9.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}.$ **10.** $\int_{0}^{\pi/4}\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

11: $\int_{-\pi/4}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx.$ **12.** $\int_{1}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx.$ **13.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

14. $\int_{0}^{2}x\left(3-x\right)dx.$ **15.** $\int_{0}^{\pi}\sin 2dx.$ **16.** $\int_{2\pi}^{3\pi}x\sin x dx.$ **17.** $\int_{1}^{e}\ln x dx.$

18. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$ **19.** $\int\limits_{1}^{e}\ln^2 x dx.$ **20.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} x dx.$ **21.** $\int\limits_{-1}^{1}xe^{-x^2}dx.$

22. $\int\limits_{-1}^{1}x^2e^{-x}dx.$ **23.** $\int\limits_{0}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx.$ **24.** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}.$ **25.** $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

26. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx.$ **27.** $\int\limits_{0}^{1/2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$ **28.** $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$ **29.** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^2 x dx.$ **30.** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\sin^2 x dx.$ **31.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+1}.$ **32.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

33. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$ **34.** $\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin 4x dx.$ **35.** $\int\limits_{0}^{\pi/4}\operatorname{tg}^3 x dx.$ **36.** $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x+x^2}.$

Знайти площі фігур, які обмежені лініями:

37. $y=4-x^2,\ y=0.$ **38.** $y^2=2px,\ x=h.$

39. $y=\ln x,\ x=e,\ y=0.$ **40.** $y=x^2,\ y=2-x^2.$

41. $y=x^2,\ y=1.$

42. $y=\cos^2 x-\sin^2 x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi/4.$

43. $y=|x|+1,\ y=0,\ x=-2,\ x=1.$

44. $y=\sin x,\ y=x^2-\pi x.$ **45.** $y=\arcsin 2x,\ x=0,\ y=-\pi/2.$

46. $y=\sin 2x,\ y=1,\ x=\pi/2,$ *где* $\pi/4\le x\le\pi/2.$

47. $x^2-y^2=1,\ x=2.$

48. $xy=4,\ x=4,\ y=4,\ x=0,\ y=0.$

49. $y=x^2,\quad y=\sqrt{x}.$

50. $y=\left|x^2-1\right|,\ y=0,\ x=-2,\ x=2.$

51. Знайти площу фігури, яку обмежену параболою, $y=x^2-2x+2,$ дотичною до неї в точці (3, 5) та віссю Ou.

52. Знайти площу фігури, замкнуту між параболою $y=-x^2+4x-3$ та її дотичними в точках (0, –3) та (3, 0).

Знайти довжину дуги кривої:

53. $y=x^{3/2}$ *от* $x=0$ *до* $x=4.$

54. $y=x^2-1,$ відрізана вісь Ох.

55. $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ *от* $x=0$ *до* $x=a.$

56. $y=\ln\cos x$ Від $x=0$ до $x=\pi/6.$

57. $y=\ln\sin x$ Від $x=\pi/3$ *до* $x=2\pi/3.$

58. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ Від $x=1$ до . $x=e$

59. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ Від $x=-1$ до . $x=2$

60. $y=x^2$ від x = 0 до $x=2$.

61. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\quad 0\le t\le\pi/2.$

62. Астроїди $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$.

63. Кардіоїди $\rho=a(1-\cos\phi),\ a>0,\quad 0\le\phi\le 2\pi$.

Знайти об’єми тіл, утворених обертанням фігури, обмеженої лініями:

64. $y^2=2px, x=h$ навколо осі Ox.

65. $y=4-x^2$, y = 0, x = 0, де $x\ge 0$ приблизно: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

66. $y=x^2, y=\sqrt{x}$ навколо осі Ox.

67. $y=e^x,\ x=0,\ x=1,\ y=0$ навколо: 1) осі Ox; 2) вісь Oy.

68. $y=x^2+1,\ y=0,\ x=1,\ x=2$ навколо: 1) вісь Ox; 2) вісь Oy.

69. $y=x^3, y=1, x=0$ навколо: 1) осі Ox; 2) *осі* Oy.

70. $y=x-x^2,\ y=0$ Навколо кожної з наступних ліній: 1) y = 0; 2) x = 0; 3) x = 2; 4) x= –2; 5) y = –1; 6) y = 2.

71. y = $\ln x$, y = 0, x = e навколо кожної з наступних прямих: y = 0; 2) x = 0; 3) y = –1; 4) x = 1; 5) x = –1; 6) y = 1.

72. $y=\sin x$, y = 0, $0\le x\le\pi$ навколо кожної з наступних прямих: y = 0; 2) x = 0; 3) $x=2\pi$; 4) x = –1; 5) x = –2; 6) y = 1; 7) y = –2.

73 $x^2-y^2=4$, y = 2, y = 0 навколо осі Ox.

74. $y=x,\ y=x^2$ навколо: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

75. $y=\cos 2x$, y = 0, x = 0, де, $0\le x\le\pi/4$ навколо: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

76. y = sin x, y = 0, де $2\pi\le x\le 3\pi$ навколо кожної з наступних ліній: 1) y = 0; 2) x = 0; 3) $x=\pi$; 4) y = –2. **77.** $y=2x-x^2$, y = 0 навколо кожної з наступних прямих: 1) x = 0; 2) y = 0; 3) x = –1; 4) y = 1.

78. y = 4/x, x = 1, x = 4, y = 0 навколо: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

79. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=1,\ x=-1\ \ y=0$ навколо: 1) осі Ox; 2) вісь Oy.

80. $y=x^2+1,\ y=3x-1$ навколо осі Oy.

Знайдіть площу поверхні, утворену обертанням навколо осі Ox:

81. Синусоїдальні дуги y = sin x від x = 0 до $x=\pi$.

82. Дуги кривої $y=\frac{x^3}{3}$ від x = –2 до x = 2.

83. Дуги кривої $y^2=4+x$, обрізаної лінії x = 2.

84. Електричний заряд, e_1розміщений у початку, відштовхує заряд того ж e_2 знаку від точки $x = a$ до точки $x = b$ ($a < b$). Визначте дію сили F під час руху заряду e_2.

85. Визначити роботу, яку потрібно витратити, щоб розтягнути пружину на 0,05 *м*, якщо відомо, що сила, що розтягує пружину на x *m,* дорівнює $F(x) = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від еластичності пружини, і що для розтягування пружини на 0,01 м потрібна сила 1 кг.

86 . Визначити, скільки робіт потрібно витратити для відкачування води з котла форми півкулі *радіуса R*.

87. Куля лежить на дні басейну з глибиною h. Визначте, скільки роботи потрібно витратити, щоб витягти кулю з води, якщо її радіус дорівнює R і якщо питома вага кулі і води дорівнює 1.

88. Визначити обсяг робіт для відкачування води з резервуара у формі конуса з кінцем, спрямованим вниз. Висота *конуса h*, радіус *основи R*.

Дослідити невласні інтеграли:

89. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$ **90.** $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$ **91.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}.$

92. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx.$ **93.** $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}dx.$ **94.** $\int_0^{+\infty} \sin x dx.$

95. $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx.$ **96.** $\int_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$ **97.** $\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

98. $\int_0^{1} \ln x dx.$

99. Знайдіть площу, замкнуту між кривою $y = xe^{-x^2/2}$ та її асимптотою, коли $x \geq 0$.

100. Знайти площу поверхні, утворену обертанням навколо осі Oh дуги кривої $y = e^{-x}$ від $x = 0$ до $x = +\infty$.

101. Знайдіть об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy площі, охопленої між прямими $hu = 2$, $y = 1$, $x = 0$.

102. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням $y = xe^{-x/2}$ кривої навколо її асимптоти в $x \geq 0$.

12. Відповіді до завдань для пунктів 1 – 10

1. $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$ **2**. 6. **3.** LN2. **4.** $e(e-1)$.

5. 1/3. **6.** 2. **7.** $\ln(3+\sqrt{10})$. **8.** 1. **9.** $\pi/4$.

10. $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. **11.** $\frac{\pi^3}{64}+\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. **12.** 21/8. **13.** $\pi/6$.

14. 10/3. **15.** 0. **16.** 5π. **17.** 1. **18.** ARCTG 2. **19.** $e-2$.

20. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$. **21.** 0. **22.** $\frac{e^2-5}{e}$. **23.** $\frac{\pi a^4}{16}$.

24. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **25.** $4-2\ln 3$. **26.** 2ln2 – 1. **27.** $\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

28. 2 – Ln2. **29.** 1/3. **30.** 1/3. **31.** $\ln\frac{2e}{e+1}$. **32.** $\operatorname{arctg} e-\pi/4$.

33. $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **34.** 1/2. **35.** $\frac{1-\ln 2}{2}$. **36.** $\ln\frac{3}{2}$. **37.** 32/3. **38.** $\frac{4}{3}h\sqrt{2ph}$.

39. 1. **40.** 8/3. **41.** 4/3. **42.** 1/2. **43.** 11/2. **44.** $2+\pi^3/6$. **45.** 1/2.

46. $\frac{\pi-2}{4}$. **47.** $2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$..

48. $4\ln(4e)$. **49.** 1/3. **50.** 4. **51.** 9. **52.** 9/4.

53. $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$. **54.** $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. **55.** $\frac{a\left(e^2-1\right)}{2e}$. **56.** $\frac{1}{2}\ln 3$.

57. $\ln 3$. **58.** $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$. **59.** 14/3.

60. $\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$. **61.** $\sqrt{2}\left(e^{\pi/2}-1\right)$. **62.** 6a. **63.** 8:00.

64. πph^2. **65.** $\frac{256}{15}\pi$; 8π. **66.** $\frac{3\pi}{10}$. **67.** $\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$; 2π.

68. $178/15\pi$; $21/2\pi$. **69.** $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{5}$. **70.** $\frac{\pi}{30}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{66}$; $\frac{11\pi}{30}$; $\frac{19\pi}{30}$.

71. $\pi(e-2)$; $\frac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$; πe; $\frac{\pi\left(e^2-3\right)}{2}$; $\frac{\pi\left(e^2+5\right)}{2}$; $\pi(4-e)$.

72. $\frac{\pi^2}{2}$; $2\pi^2$; $6\pi^2$; $2\pi(\pi+2)$; $2\pi(\pi+4)$; $\frac{\pi(8-\pi)}{2}$; $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$.

73. $\frac{32\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$... **74.** $\frac{2\pi}{15}$; $\frac{\pi}{6}$. **75.** $\frac{\pi^2}{8}$; $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$.

76. $\frac{\pi^2}{2}$; $10\pi^2$; $6\pi^2$; $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **77.** $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{16\pi}{15}$; $\frac{16\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{5}$.

78. 12π; 24π. **79.** $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$; $\pi\ln 2$. **80.** $\frac{\pi}{2}$.

81. $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. **82.** $\dfrac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$. **83.** $\dfrac{62\pi}{3}$.

84. $A=ke_1e_2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$. **85.** $A = 0{,}125$ кг*м*. **86.** $\dfrac{\pi R^4}{4}$. **87.** $\dfrac{4}{3}\pi R^4$. **88.** $\dfrac{1}{12}\pi R^2 h$.

89. 1. **90.** 1/2. **91.** LN2. **92.** Відходить. **93.** Відходить. **94.** Відходить.

95. –1. **96.** $\dfrac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha<1$; розгалуженні на $\alpha\geq 1$. **97.** $\pi/2$. **98.** –1.

99. 1. **100.** $\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. **101.** 4π. **102.** 2π.

13. Індивідуальні завдання

Обчисліть інтеграли.

Завдання 1

1.1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

1.2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

1.3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

1.4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

1.5. $\displaystyle\int_1^2 x\log_2 x\,dx$.

1.6. $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln\left(x+1\right)dx$.

1.7. $\displaystyle\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

1.8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$.

1.9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1}$.

1.10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+1}$.

1.11. $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$.

1.12. $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$.

1.13. $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$.

1.14. $\displaystyle\int_0^1 3(x^2+x^2e^{x^3})\,dx$.

1.15. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

1.16. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{-2x}dx$.

1.17. $\int_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}dx$. 1.18. $\int_{1}^{e}x\ln^2 x\,dx$.

1.19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x+3)\sin x\,dx$ 1.20. $\int_{-3}^{0}(x-2)e^{-\frac{x}{3}}dx$.

.

1.21. $\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. 1.22. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.23. $\int_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln x\,dx$. 1.24. $\int_{\frac{3}{2}}^{2}arctg(2x-3)dx$.

1.25. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx$. 1.26. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

1.27. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx$. 1.28. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^3 x\,dx$.

1.29. $\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$. 1.30. $\int_{0}^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

У задачах **2, 3** обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

Завдання 2

2.1. $\int_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{16x^4+1}$. 2.2. $\int_{1}^{\infty}\frac{16x\,dx}{16x^4-1}$.

2.3. $\int_{0}^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$. 2.4. $\int_{1}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{16x^4-1}}$.

2.5. $\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$. 2.6. $\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$.

2.7. $\int_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$. 2.8. $\int_{4}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$.

2.9. $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$. 2.10. $\int_{-1}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$.

2.11. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx.$

2.12. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}.$

2.13. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{4x^2+4x+5}.$

2.14. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}.$

2.15. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx.$

2.16. $\int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx.$

2.17. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}.$

2.18. $\int\limits_{0}^{\infty} x \sin x\, dx.$

2.19. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}.$

2.20. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi\, dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}.$

2.21. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi \operatorname{arctg}}}$

2.22. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3}.$

2.23. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x} x\, dx.$

2.24. $\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx.$

2.25. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}.$

2.26. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$

2.27. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}.$

2.28. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}.$

2.29. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}.$

2.30. $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

Завдання 3

3.1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$

3.2. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}.$

3.3. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

3.4. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$

3.5. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$

3.6. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}.$

3.7. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2\, dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$

3.8. $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$

3.9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\, dx}{1-x^4}.$

3.10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx.$

3.11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

3.12. $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$

3.13. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$

3.14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{tgx}}{\cos 2x} dx.$

3.15. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx.$

3.16. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}.$

3.17. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$

3.18. $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$

3.19. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x\, dx}{\ln 2\sqrt{(x^2-1)^3}}.$

3.20. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}.$

3.21. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^3 x\, dx}{\sqrt{\cos x}}.$

3.22. $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt[3]{9}x\, dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$

3.23. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$

3.24. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$

3.25. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$

3.26. $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}.$

3.27. $\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$

3.28. $\int\limits_{0}^{4} \frac{10x\, dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}.$

3.29. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.   3.30. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

Завдання 4. Обчисліть (з точністю у два десяткові знаки) площу фігури, обмежену заданими лініями.

4.1. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$

4.2. $y=x^2,\ y=3-x.$

4.3. $y=\sqrt{x},\ y=x^3.$

4.4. $x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$

4.5. $x=4-y^2,\ x=y^2-2y.$

4.6. $x=\sqrt{4-y^2},\ x=0.$

4.7. $x=4-(y-1)^2,$ $x=y^2-4y+3.$

4.8. $y=4-x^2,$ $y=x^2-2x.$

4.9. $y=\sqrt{e^x-1},\ \ y=0,$ $x=0,\ x=1.$

4.10. $y=x/(1+\sqrt{x}),$ $y=0,\ x=1.$

4.11. $y=x\sqrt{9-x^2},\ y=0,$ $(0\le x\le 3).$

4.12. $y=x/(x^2+1)^2,$ $y=0,\ x=1.$

4.13. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ y=\dfrac{x^2}{2}.$

4.14. $y^2=x+1,\ y^2=9-x.$

4.15. $y^2=x^3,\ x=0,\ y=4.$

4.16. $x=\arccos y,$ $x=0,\ y=0.$

4.17. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x,\ \ x=\sqrt{3},\ y=$

4.18. $y^2=9x,\ y=3x.$

4.19. $y=2x-x^2+3,$ $y=x^2-4x+3.$

4.20 $y^2=4x,\ x^2=4y.$

4.21. $y^2=x^3,\ x=2.$

4.22. $y=x^2, y=2-x^2.$

4.23. $y^2=(4-x^3),\ x=0.$

4.24. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1.$

4.25. $y=x^3,\ y=1,\ x=0.$

4.26. $xy=6,\ x+y-7=0.$

4.27. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, y=0.$ $\left(0\le x\le 3\right).$

4.28. $x^2=4y,\ y=\dfrac{8}{x^2+4}.$

4.29. $y=x+1,\ y=\cos x,$ $y=0.$

4.30. $y=2^x,\ y=2x-x^2,$ $x=0,\ x=2.$

Завдання 5. Обчисліть (у два десяткові знаки) довжину дуги заданої прямої.

5.1. $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t.$

5.2. $x=2(\cos t+t\sin t),\ y=2(\sin t-t\cos t)\ \ (0\le t\le\pi)$.

5.3. $y=\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4\ \ (0\le x\le 1/2)$.

5.4. $x=e^t(\cos t+\sin t),\ y=e^t(\cos t-\sin t)\ \ (0\le t\le 3\pi/2)$.

5.5. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9}$.

5.6. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$.

5.7. $y^2=(x+1)^3$, прямою $x=4$.

5.8. $y=1-\ln\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$.

5.9. $y=e^x+13\ \ \left(\ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}\right)$.

5.10. $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t$.

5.11. $x=6(\cos t+t\sin t),\ y=6(\sin t-t\cos t)\ \ (0\le t\le\pi)$.

5.12. $y^2=(x-1)^3$ від точки $A(1,0)$ до точки $B\left(6,\sqrt{125}\right)$

5.13. $y^2=x^5$, прямою $x=5$.

5.14. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$ $(0\le t\le\pi)$.

5.15. $x=e^t(\cos t+\sin t),\ y=e^t(\cos t-\sin t)\ \ (0\le t\le\pi)$.

5.16. $y=1-\ln(x^2-1),\ (3\le x\le 4)$.

5.17. $x=5\cos^2 t,\ y=5\sin^2 t\ \left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

5.18. $9y^2=4(3-x)^3$ між точками перетину з віссю OY.

5.19. $y=\ln(x^2-1),\ (2\le x\le 3)$.

5.20. $y=\ln\sin x\ \left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

5.21. $x=9(t-\sin t),\ y=9(1-\cos t)\ \ (0\le t\le 2\pi)$.

5.22. $y^2=(x-1)^3$ від точки $A(2,-1)$ до точки $B(5,-8)$.

5.23. $x=7(t-\sin t),\ y=7(1-\cos t)\ \ (2\pi\le t\le 4\pi)$.

5.24. $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\ \ (0\le x\le 2)$.

5.25. $x=4(\cos t+t\sin t),\ y=4(\sin t-t\cos t)\ \ (0\le t\le 2)$.

5.26. $x=\sqrt{3}t^2,\ y=t-t^3$ (петля).

5.27. $y = \ln\cos x + 2,\ (0 \le x \le \pi/6).$

5.28. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}\ \ (0 \le x \le 3/4).$

5.29. $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t.$

5.30. $y^2 = x^3$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(4,8).$

Завдання 6. Обчисліть (у два десяткові знаки) об'єм тіла, отриманий обертанням фігури навколо заданої осі координат.

6.1. $\Phi : y^2 = 4 - x,\ x = 0,\ OY.$

6.2. $\Phi : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2},\ x = 0,\ y = 0,\ OX.$

6.3. $\Phi : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1,\ OY.$

6.4. $\Phi : y^3 = x^2,\ y = 1,\ OX.$

6.5. $\Phi : x = \sqrt{1 - y^2},\ y = \sqrt{\dfrac{3}{2}x},\ y = 0,\ OX.$

6.6. $\Phi : y = \sin x,\ y = 0\ (0 \le x \le \pi),\ OX.$

6.7. $\Phi : y^2 = 4x,\ x^2 = 4y,\ OX.$

6.8. $\Phi : x = 2\cos t,\ y = 5\sin t,\ OY.$

6.9. $\Phi : y = x^2,\ 8x = y^2,\ OY.$

6.10. $\Phi : y = e^x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ OX.$

6.11. $\Phi : y^2 = \dfrac{4x}{3},\ x = 3,\ OX.$

6.12. $\Phi : y = 2x - x^2,\ y = 0,\ OX.$

6.13. $\Phi : y = x^2,\ y = 1, x = 2, OX.$

6.14. $\Phi : x = 7\cos^3 t,\ y = 7\sin^3 t,\ OY.$

6.15. $\Phi : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1,\ OX.$

6.16. $\Phi : x^3 = (y - 1)^2,\ x = 0,\ y = 0,\ OX.$

6.17. $\Phi : xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0,\ OX.$

6.18. $\Phi : x = \sqrt{3}\cos t,\ y = 2\sin t,\ OY.$

6.19. $\Phi : y = 2 - x^2,\ y = x^2,\ OX.$

6.20. $\Phi : y = -x^2 + 8,\ y = x^2,\ OX.$

6.21. $\Phi : y^2 = (x + 4)^3,\ x = 0,\ OX.$

6.22. $\Phi: y = x^3,\ x = 0,\ y = 8,\ OY.$

6.23. $\Phi: x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ OX.$

6.24. $\Phi: 2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0,\ OX.$

6.25. $\Phi: y = x - x^2,\ y = 0,\ OX.$

6.26. $\Phi: y = 2 - \dfrac{x^2}{2},\ x + y = 2,\ OY.$

6.27. $\Phi: x = 6(t - \sin t),\ y = 6(1 - \cos t),\ OX.$

6.28. $\Phi: x = 3\cos^2 t,\ y = 4\sin^2 t\ \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right),\ OY.$

6.29. $\Phi: y^2 = x,\ x^2 = y,\ OX.$

6.30. $\Phi: y^2 = (x-1)^3,\ x = 2,\ OX.$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хом’юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Хом’юк В. В., Ковальчук М. Б. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) : у 2 ч. Ч. 2 : навч. посіб. / І. В. Хом’юк , Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. В. Хом’юк,. Вінниця : ВНТУ, 2017. 148 с.

2. Хом’юк В. В., Хом’юк І. В. Вища математика. Ч. 2: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : практикум. Вінниця : ВНТУ, 2017. 152 с.

3. Хом’юк В. В., Хом’юк І. В. Вища математика. Ч. 1: Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум. Вінниця : ВНТУ, 2017. 118 с.

4. Бондаренко З. В. Курс вищої математики з комп’ютерною підтримкою. Диференціальні рівняння : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2004. 130 с.

5. Петрук В . А., Хом’юк І. В., Хом’юк В. В. Збірник завдань з вищої математики. Вінниця ВНТУ, 2001. Ч. 2. 122 с.

6. Демчишин О. І., Шелестовський Б. Г. Вища математика : навч. посіб. Тернопіль : Навчальна книга–Богдан, 2010. 592 с.

7. Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Львів : Магнолія-2006, 2007. 285 с.

Електронне навчальне видання

Віктор Вікторович Хом'юк

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» за темою «Визначений інтеграл та його застосування»

Рукопис оформив: В. Хом'юк

Редактор: Т. Савчук

Оригінал-макет виготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до видання 22.05.2026
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2026-066.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: rvv@vntu.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.