

**Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика»**

**Частина 2.
Векторна алгебра. Аналітична геометрія**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика»**

**Частина 2.
Векторна алгебра. Аналітична геометрія**

Вінниця
ВНТУ
2026

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 28.05.2026 р.)

Рецензенти:

М. Б. Ковальчук, доктор педагогічних наук, професор

М. В. Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Ч. 2 : Векторна алгебра. Аналітична геометрія / уклад. А. А. Коломієць, І. А. Клеопа. Електрон. текст. дані. Вінниця : ВНТУ, 2026. 47 с.

У методичних вказівках наведено основні теоретичні відомості з векторної алгебри та аналітичної геометрії, систематизовано правила виконання операцій над векторами, побудови рівнянь прямої та площини. Теоретичний матеріал підкріплений достатньою кількістю прикладів розв'язування завдань. Мета методичних вказівок – надати студентам можливість більш детально розібратися в базових поняттях векторної алгебри та аналітичної геометрії, сформулювати навички розв'язування завдань із даних розділів вищої математики. Призначено для студентів усіх спеціальностей.

ЗМІСТ

1.ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.....	4
1.1.Основні поняття.....	4
1.2. Лінійні операції над векторами.....	4
1.3. Лінійна незалежність векторів.....	7
1.4. Напрямні косинуси вектора.....	9
1.5. Поділ відрізка в заданому відношенні.....	10
1.6. Проекція вектора на вісь і проекція вектора на вектор.....	11
1.7 Векторний і мішаний добуток векторів.....	13
2.АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ	17
2.1 Пряма на площині (різні форми представлення прямої).....	17
2.2 Взаємне розміщення прямих на площині.....	19
2.3. Площина в просторі.....	21
2.4.Пряма в просторі.....	24
2.5. Розміщення прямих та площин у просторі.....	26
ОСНОВНІ ФОРМУЛИ.....	31
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ.....	34
ЛІТЕРАТУРА.....	46

1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – напрямлений відрізок з початком у точці А, та кінцем у точці В.

Для позначення вектора використовують або пару великих літер (перша – початок, друга – кінець), або одну малу літеру, наприклад, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ (рис. 1.1).

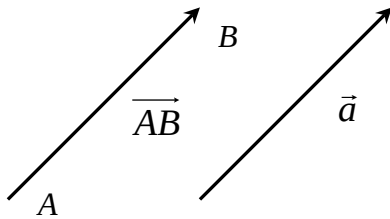


Рис. 1.1. Позначення векторів

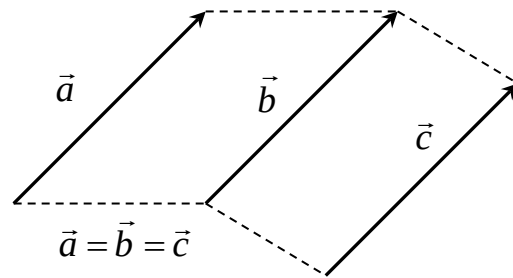


Рис. 1.2. Рівні вектори

Якщо вектори мають однакову довжину і однаковий напрям, то вони називаються *рівними*. Приклад рівних векторів на рисунку 1.2. Якщо вектори мають однакову довжину, але протилежно напрямлені, то вони називаються *протилежними*.

1.2. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Множення вектора на число

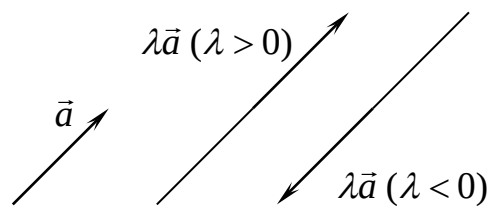


Рисунок 1.3.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ з довжиною $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$ і напрямом, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$, і протилежним напрямом $\vec{a}$ при $\lambda < 0$ (рис. 1.3).

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, позначимо $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, (рис. 1.4), початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем

вектора $\vec{a}$ (правило трикутника. Вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (правило паралелограма). Додавання кількох векторів здійснюється за правилом багатокутника – кожен наступний вектор має початок у кінці попереднього вектора – того, до якого ми додаємо (рис. 1.5)).

Правило паралелограма і трикутника

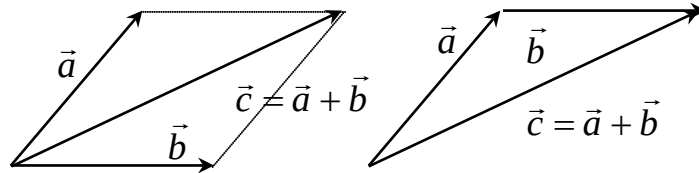


Рис. 1.4. Додавання двох векторів

Правило багатокутника

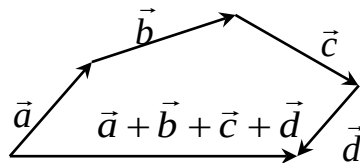


Рис. 1.5. Додавання кількох векторів

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ й вектора $(-\vec{b})$, що протилежний до вектора $\vec{b}$ (рис. 1.6):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

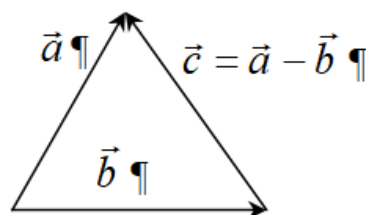


Рис. 1.6. Геометричне зображення різниці двох векторів

Дії над векторами, що задані своїми координатами

Опис дії з векторами формулою	Дії з векторами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$
$\alpha\vec{b} = (\alpha b_x, \alpha b_y, \alpha b_z)$	Множення вектора на число
$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$	Додавання (віднімання) векторів
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)$	Координати вектора, що заданий двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$:
$ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.1)$	Довжина вектора, що заданий двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$:
$ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.2)$	Довжина вектора, що заданий координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \phi \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \quad (1.3.1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.3.2)$	Скалярний добуток векторів
$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1.4)$	• косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

Для скалярного добутку виконуються такі властивості

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;	3) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;	4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \vec{a} ^2 \geq 0$.

Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ – умова перпендикулярності векторів;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \phi$ – гострий кут;
- 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \phi$ – тупий кут.

Необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad (1.5)$$

У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ скалярні вектори мають такий розклад:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

Колінеарними називають вектори, що розміщені на одній прямій або на паралельних прямих.

Нехай задано два вектори $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ і $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, якщо

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} \quad (1.6)$$

де x_a, y_a, z_a , – координати вектора $\vec{a}$;

x_b, y_b, z_b , – координати вектора $\vec{b}$

1.3. ЛІНІЙНА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Вектори $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ *лінійно залежні*, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, що дорівнює нульовому вектору, тобто знайдуться такі числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, що не всі одночасно дорівнюють нулеві такі, що $\alpha \vec{a}_1 + \dots + \alpha \vec{a}_n = 0$. Якщо такої нетривіальної комбінації не існує, вектори *лінійно незалежні*, тобто із рівності $\alpha \vec{a}_1 + \dots + \alpha \vec{a}_n = 0$ завжди слідує $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ є нульовим, то вся система векторів є лінійно залежною.

Якщо хоча б одне із чисел $c_k \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, оскільки принаймні один із векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації інших, наприклад, при $c_1 \neq 0$:

$$\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n, \quad \lambda_i = -c_i / c_1 \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (1.7)$$

Найбільша можлива кількість лінійно незалежних векторів у даному просторі визначає його *розмірність простору*.
Колінеарні вектори – лінійно залежні.

Істинні такі твердження:

1. Два колінеарні вектори завжди утворюють лінійно залежну систему (рис. 1.7).
2. Три компланарні вектори (розміщені в одній площині) завжди є лінійно залежними (рис. 1.8), тобто один вектор можна подати як лінійну комбінацію двох інших.
3. У тривимірному просторі будь-яка система з чотирьох векторів є лінійно залежною.

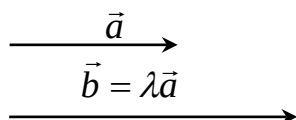


Рис. 1.7

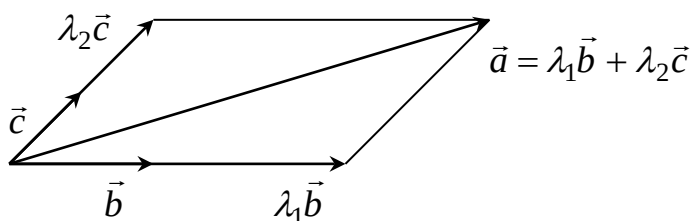


Рис. 1.8

Приклад. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, 1)$ базис, якщо так, то знайти координати вектора $\vec{d} = (3, 7, 5)$ у цьому базисі.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні. Це можна перевірити склавши визначник із координат цих векторів

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Визначник $\Delta \neq 0$ – тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні й утворюють базис у просторі. Нехай x_1, x_2, x_3 координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі. Розкладемо вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} \Rightarrow$ одержимо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Скористаємося формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2. \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2. \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Одержимо розклад вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

1.4. НАПРЯМНІ КОСИНУСИ ВЕКТОРА

Система координат, побудована на ортонормованому базисі, називається *декартовою прямокутною системою координат*. Її базисні вектори, що пов'язані з осями Ox , Oy , Oz , позначають $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Якщо a_x , a_y , a_z – координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z). \quad (1.8)$$

Якщо в базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ задані координати початку й кінця вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 1.9), то

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

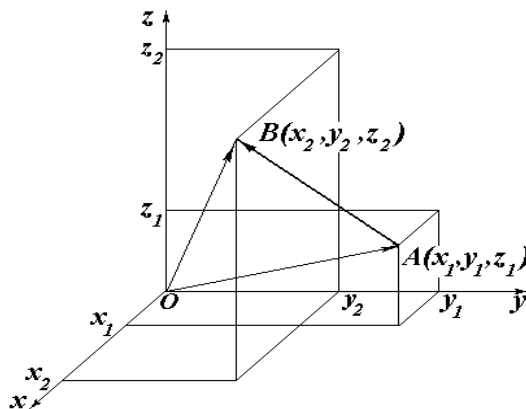


Рис. 1.9. Розкладання вектора $\overrightarrow{AB}$ у базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Приклад Дано вектори $\vec{a} = (1, -2, 4)$, $\vec{b} = (3, 5, 6)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, -2, 4) + (3, 5, 6) = (1+3, -2+5, 4+6) = (4, 3, 10),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, -2, 4) - (3, 5, 6) = (1-3, -2-5, 4-6) = (-2, -7, -2),$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(1, -2, 4) - 3(3, 5, 6) = (2, -4, 8) - (9, 15, 18) = (-7, -19, -10).$$

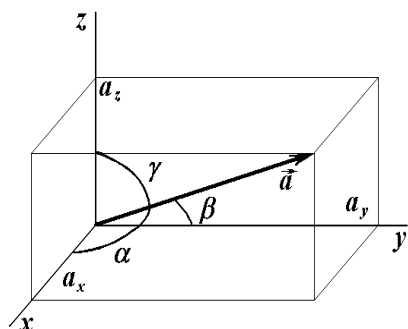


Рис. 1.10

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ називаються косинуси кутів нахилу вектора до координатних осей α, β, γ , (тобто кутів, які утворює вектор з координатними осями) (рис. 1.10):

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (1.10)$$

Напрямні косинуси задовольняють умову:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.11)$$

Координати орта вектора є його напрямними косинусами:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (1.12)$$

1.5. ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Координати точки $M(x, y, z)$, яка поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = M_1M / MM_2$ (рис. 1.11), визначаються через координати точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ за формулами:

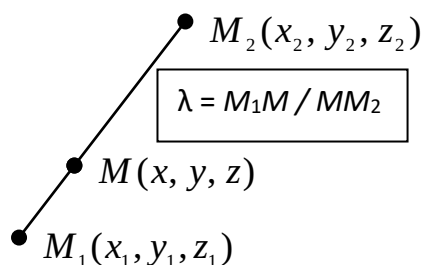


Рис. 1.11

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При $\lambda = 1$ отримаємо координати середини відрізка M_1M_2 :

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \\ z &= \frac{z_1 + z_2}{2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Приклад Знайти координати кінців відрізка AB , який поділений на 3 рівні частини точками $P(1, 0, 3)$ і $Q(-1, 2, 6)$.

Точка P є серединою відрізка AQ , тому її координати:

$$x_P = \frac{x_A + x_Q}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_Q}{2}, \quad z_P = \frac{z_A + z_Q}{2}.$$

Звідси знаходимо координати точки A :

$$\begin{aligned} x_A &= 2x_P - x_Q = 2 \cdot 1 - (-1) = 3, & y_A &= 2y_P - y_Q = 2 \cdot 0 - 2 = -2, \\ z_A &= 2z_P - z_Q = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \Rightarrow A(3, -2, 0). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо координати точки B :

$$\begin{aligned} x_B &= 2x_Q - x_P = 2 \cdot (-1) - 1 = -3, & y_B &= 2y_Q - y_P = 2 \cdot 2 - 0 = 4, \\ z_B &= 2z_Q - z_P = 2 \cdot 6 - 3 = 9 \Rightarrow B(-3, 4, 9). \end{aligned}$$

1.6. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ І ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВЕКТОР

Проекцією точки A на вісь L називається основа нормалі (точка A_1), проведеної з точки A на дану вісь.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь L (рис. 1.12):

$$Pr_L \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \phi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (1.15)$$

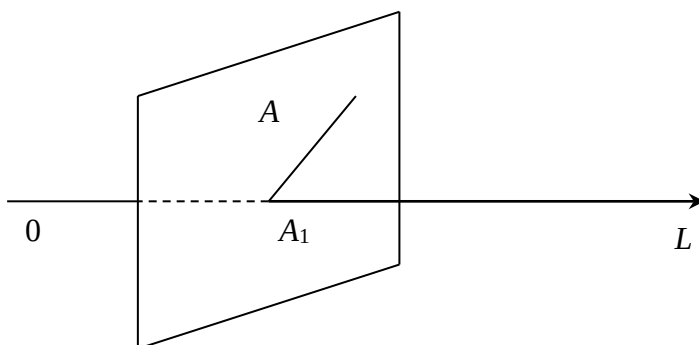
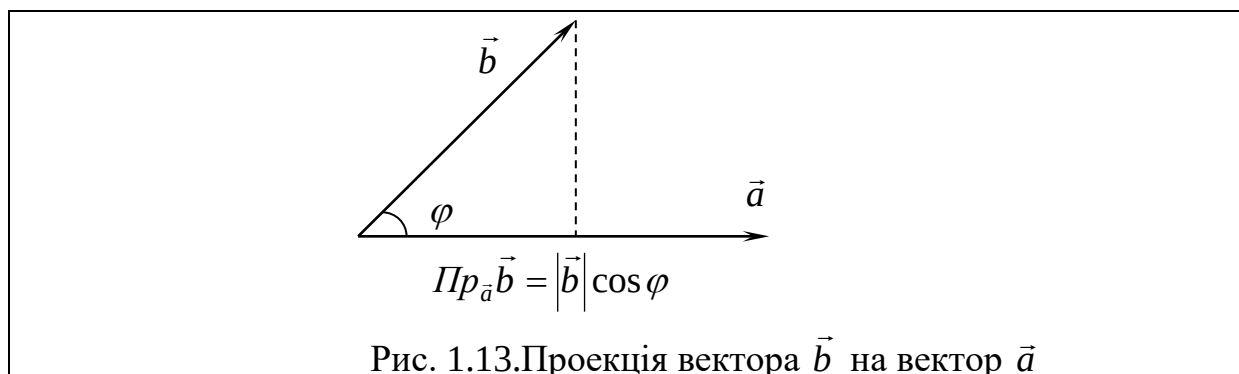


Рис. 1.12. Точка A_1 – проекція точки A на вісь L

$$\begin{aligned} Pr_{\vec{a}} \vec{b} &= |\vec{b}| \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \vec{a}_0 = \\ &= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ (рис. 1.13):



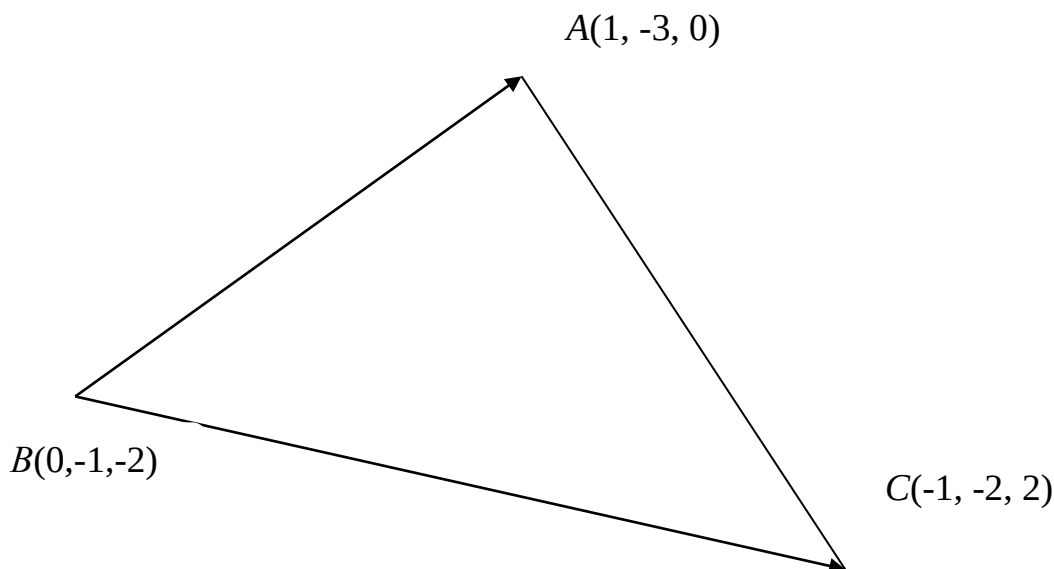
Приклад. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \pi/3$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Знайти:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 4) $Pr_{\vec{a}} \vec{b}$.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$; 2) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2^2 = 4$;

3) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi + |\vec{b}|^2 =$
 $= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 = 19$; 4) $Pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$.

Приклад. Дано вершини трикутника $A(1, -3, 0)$; $B(0, -1, -2)$; $C(-1, -2, 2)$. Визначити кут ABC .



Знайдемо вектори $\overrightarrow{BA} = (1, -2, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 4)$ та їх довжини:
 $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}$.

За формулою (3.21) обчислимо косинус кута φ між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Приклад. При якому m вектори $\vec{a} = (m, 3, -4)$, $\vec{b} = (-2, m, 1)$ взаємно перпендикулярні?

Необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = -2m + 3m - 4 = m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4.$$

1.7 ВЕКТОРНИЙ І МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Означення. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє такі умови (рис. 1.14):

- 1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними ($|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$);
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку.

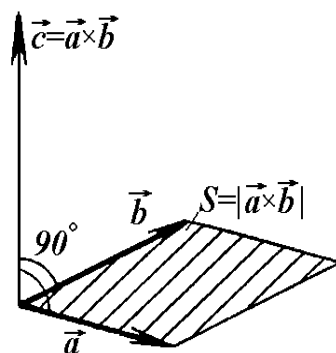


Рис. 1.14. Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Алгебраїчні властивості векторного добутку

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- 2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;
- 3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- 4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Властивості векторного добутку

1. Два ненульові вектори є колінеарними тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нульовому вектору:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (1.14)$$

1. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (1.15)$$

2. Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (1.16)$$

У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторний добуток векторів

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = (b_x, b_y, b_z),$$

обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \quad (3.27)$$

Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *правою* (*лівою*), якщо при перенесенні до спільної початкової точки мінімальний кутовий поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, відбувається проти годинникової стрілки.

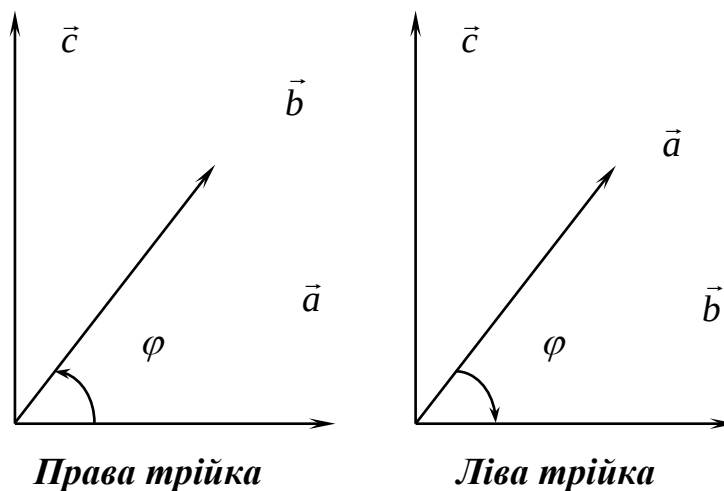


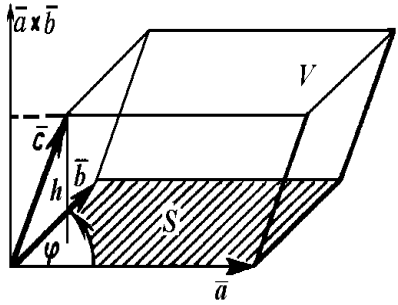
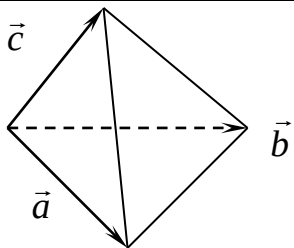
Рис. 1.15

Мішаним добутком трьох векторів називається число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Справедлива рівність:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}. \quad (3.29)$$

Геометричні властивості мішаного добутку

1. Об'єм паралелепіпеда:  Рис. 1.16	Мішаний добуток некопланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (векторів, що не лежать в одній площині) дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права, і зі знаком мінус, якщо трійка ліва (рис. 1.16): $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} . \quad (1.17)$
 Рис. 1.17 Трикутна піраміда	2. Об'єм трикутної піраміди (побудованої на некопланарних векторах): $V = \frac{1}{6} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} . \quad (1.18)$

Обчислення мішаного добутку. У базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ мішаний добуток векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ дорівнює визначнику, складеному із координат цих векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.19)$$

Необхідна й достатня умова **компланарності** трьох векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (1.20)$$

Критерій компланарності трьох векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \text{вектори } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарні.} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \text{Якщо } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 & - \text{трійка векторів } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ права;} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0 & - \text{трійка векторів } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ліва.} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Приклад. Дано вершини піраміди $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, 5, 24)$, $D(3, 0, -2)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини D .

Введемо вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, -2), \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -1), \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD} = (2, -2, -5).$$

За формулою (1.19) обчислимо мішаний добуток векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 24.$$

За формулою (1.18) обчислимо об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} |24| = 4 \text{ (од.}^3\text{)}.$$

Знайдемо площу основи піраміди – трикутника ABC , яка дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k}, \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ (од.}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{3\sqrt{10}/2} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1 ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ (РІЗНІ ФОРМИ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПРЯМОЇ)

Геометричне місце точок площини, що задовольняє певну геометричну умову, утворює пряму лінію.

Рівнянням прямої лінії на площині називається рівняння, яке задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки поза нею. Поточну точку прямої лінії називають *біжучою* або *змінною* точкою. Серед усіх ліній найпростішою є пряма. Залежно від способу задання прямої на площині отримують різні форми її рівняння в декартовій (прямокутній) системі координат.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Здамо на площині прямокутну систему координат і пряму l непаралельну Ox і Oy

$$y = kx + b, \quad (2.1)$$

де $k = \operatorname{tg} \varphi$ – кутовий коефіцієнт, а b – відрізок, який відтинає l на осі Oy .

Якщо пряма вертикальна ($\varphi = 90^\circ$, $\operatorname{tg} 90^\circ$ – неіснує), то її рівняння матиме вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину прямої з віссю Ox . Якщо пряма паралельна осі Ox ($\varphi = 0^\circ$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$), то $y = b$ – горизонтальна пряма. Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння (2.1) має вигляд $y = kx$.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі

Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і має кутовий коефіцієнт k . Рівняння цієї прямої матиме вигляд (2.1), де b – поки що невідома величина. Так як пряма проходить через точку M_1 , то її координати задовольняють рівняння прямої: $y_1 = kx_1 + b$. Звідси $b = y_1 - kx_1$. Підставимо значення b в рівняння (2.1): $y = kx + y_1 - kx_1$. Згрупувавши невідомі, одержимо шукане рівняння:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2.2)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Відомо, що через дві точки, що не співпадають, можна провести пряму і до того ж тільки одну. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Рівняння прямої, що проходить через точку M_1 має вигляд (2.2), де k поки що невідомий коефіцієнт. Так як пряма проходить через точку $M_2(x_2, y_2)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння (2.2): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

Виразимо k з останньої рівності: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Підставимо знайдене значення k в рівняння (2.2): $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2.3)$$

Вважається, що в рівнянні (2.3) $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$. Можливий випадок, коли $x_2 - x_1 = 0$ ($y_2 - y_1 = 0$), тоді рівняння (2.3) матиме вигляд:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0} \right).$$

Попри зовнішню формальність такого запису, він є математично коректним. Якщо звільнитись від знаменників, одержимо: $x - x_1 = 0$ – пряма паралельна осі Oy ($y - y_1 = 0$ – пряма паралельна осі Ox).

Загальне рівняння прямої на площині

Рівняння прямої – це рівняння першого степеня відносно змінних x і y . В загальному вигляді рівняння прямої на площині записується так:

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.4)$$

де A , B , C – довільні числа, причому A і B одночасно не рівні нулю.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

При $B \neq 0$ рівняння (2.4) рівносильне рівнянню $y = kx + b$, де $k = -\frac{A}{B}$,

$$b = -\frac{C}{B}.$$

Вектор $\vec{n}$ називається *нормальним вектором прямої*, а вектор $\vec{s}$ – *напрямним вектором прямої*.

Зауваження. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (2.4) можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.5)$$

де $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Рівняння (2.5) називається *рівнянням прямої у відрізках*. Така назва рівняння пов'язана з тим, що пряма перетинає осі Ox і Oy відповідно в точках $(a, 0)$, $(0, b)$ і відсікає на осях відрізки довжиною $|a|$ і $|b|$.

2.2 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Кут між двома прямими

Нехай дано дві прямі l_1 та l_2 (див. рис. 2.1), що визначаються відповідно рівняннями $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$. Знайдемо кут φ між даними прямими:

$$\varphi = \pi - \varphi_1 - (\pi - \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{tg} \varphi = \text{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\text{tg} \varphi_2 - \text{tg} \varphi_1}{1 + \text{tg} \varphi_2 \text{tg} \varphi_1}.$$

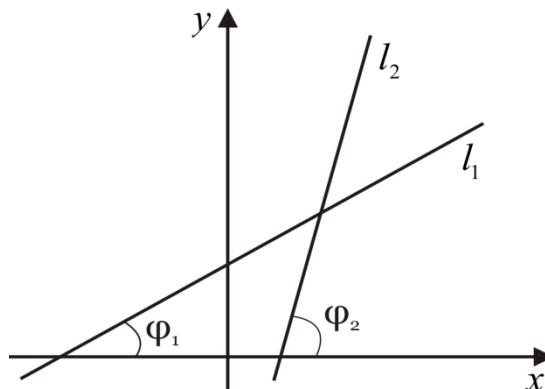


Рисунок 2.1

Перейдемо до кутових коефіцієнтів:

$$\text{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right| \quad (2.6)$$

Якщо прямі паралельні $l_2 \parallel l_1$, то $\text{tg} \varphi = 0$ і з (2.6) випливає: $k_2 = k_1$.

Якщо прямі перпендикулярні $l_2 \perp l_1$, то $\varphi = 90^\circ$ і $\text{tg} \varphi \rightarrow \infty$. Тому $1 + k_2 k_1 = 0$, тобто $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Якщо дано дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, де $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ відповідно нормальні вектори цих прямих, то кут між ними знаходять із формули

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (2.7)$$

2. Якщо дві прямі задані загальними рівняннями, то умовою їх перпендикулярності є рівність: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

3. Умовою паралельності двох прямих є рівність: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань від деякої точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, заданої рівнянням (2.4), тобто відстань $d = |M_0 K|$ (див. рис. 2.2).

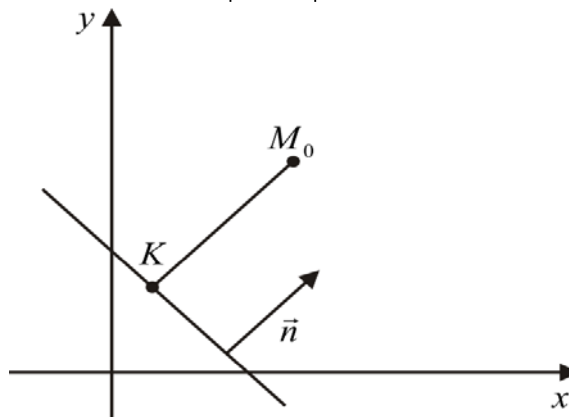


Рисунок 2.2

Нехай точка $K(x, y)$ – проекція точки M_0 на дану пряму.

Тоді $\overrightarrow{M_0 K} = (x - x_0, y - y_0)$. Але вектори $\overrightarrow{M_0 K}$ і $\vec{n}$ колінеарні. Тому:

$$|\overrightarrow{M_0 K} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{M_0 K}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\angle \overrightarrow{M_0 K}, \vec{n}) \quad \text{або}$$

$$|(x - x_0)A + (y - y_0)B| = |Ax + By - Ax_0 - By_0| = |\overrightarrow{M_0 K}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0^\circ = d |\vec{n}|.$$

Враховуючи що $Ax + By + C = 0$, маємо: $|-Ax_0 - By_0 - C| = d \sqrt{A^2 + B^2}$
або $|Ax_0 + By_0 + C| = d \sqrt{A^2 + B^2}$.

Тоді формула відстані від точки M_0 до прямої має вигляд:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.8)$$

2.3. ПЛОЩИНА В ПРОСТОРИ

Введемо в просторі декартову систему координат $Oxyz$. Запишемо загальне рівняння площини α в просторі. Нехай маємо точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ і деякий вектор $\vec{n}(A, B, C)$, перпендикулярний до площини α (див. рис. 2.3).

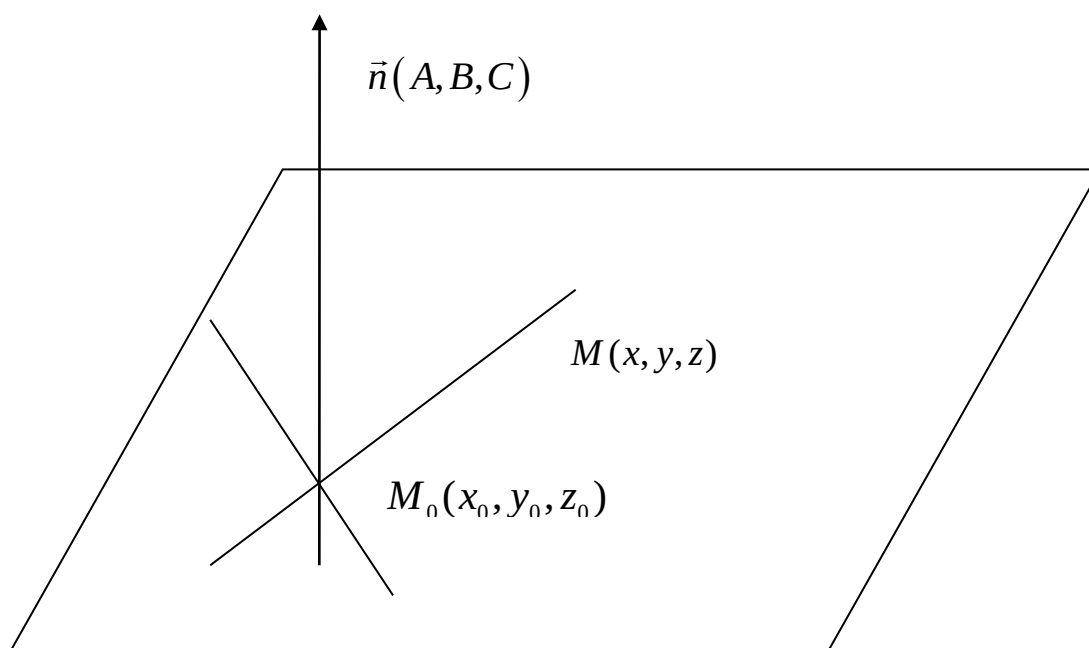


Рисунок 2.3

Нехай точка $M(x, y, z)$ – біжуча (довільна) точка площини. Тоді вектори $\vec{n}(A, B, C)$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.9)$$

Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний (перпендикулярний) вектор $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.10)$$

Розкриємо дужки в (2.9): $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$. Введемо позначення $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, одержимо **загальне рівняння площини**:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.11)$$

Окремі випадки загального рівняння площини :

- а) $Ax + By + Cz = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок координат;
- б) $Ax + By + D = 0$ – рівняння площини, паралельної осі Oz ;
- в) $Ax + By = 0$ – рівняння площини, що проходить через вісь Oz ;
- г) $Ax + D = 0$, або $x = -D/A = x_0$ – рівняння площини, паралельної площині yOz ($x = 0$ – рівняння площини yOz).

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій (рис. 2.4).

Нехай площина α проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій. Візьмемо довільну точку площини $M(x, y, z)$. Запишемо вектори:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1), & \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).\end{aligned}$$

Ці вектори компланарні (розміщені в одній площині), тому їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2} \right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

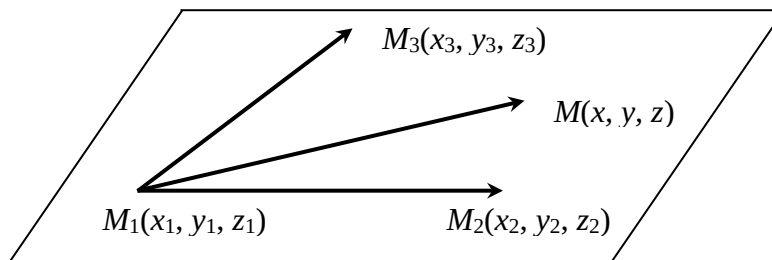


Рисунок 2.4

Рівняння площини, що відтинає на координатних осях Ox , Oy , Oz відрізки a , b , c (див. рис. 2.5) (рівняння площини у відрізках на осях):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.13)$$

Нормальне рівняння площини:

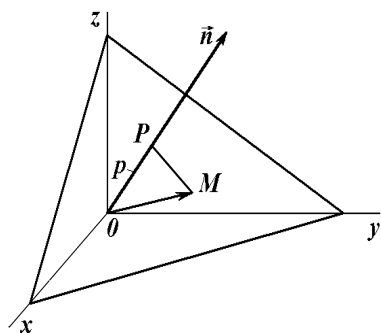


Рисунок 2.5

- 1) вільний член від'ємний або дорівнює нулю;
- 2) сума квадратів коефіцієнтів при x, y, z дорівнює 1.

Для того щоб звести загальне рівняння площини (2.11) до нормального вигляду (2.14), необхідно поділити всі його члени на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ (знак кореня обирається протилежним знаку вільного члена D):

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \quad (2.14)$$

Одержимо нормальне рівняння площини

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (2.15)$$

де p – відстань від початку координат до площини;

$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – одиничний вектор нормалі.

Відстань від точки до площини.

Відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ від площини (рис. 2.6), заданої нормальним рівнянням (2.15), обчислюється за конкретною формулою, залежно від того, в якому вигляді задано площину.

Відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини дорівнює $|d|$ і обчислюється за формулами:

- Якщо площина задана нормальним рівнянням:

$$|d| = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|; \quad (2.15)$$

Тобто:

$$d = \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM_1} - p = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p. \quad (2.16)$$

Якщо точка й початок координат лежать по один бік від площини, то $d < 0$, а якщо по різні боки, то $d > 0$.

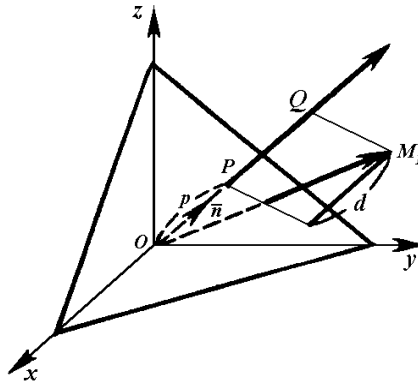


Рисунок 2.6

- Якщо площина задана загальним рівнянням (2.11):

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.17)$$

Зауваження. Розташування точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ відносно площини $Ax + By + Cz + D = 0$ можна з'ясувати за знаками їх відхилень від площини або за знаками виразів $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ і $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$. Якщо знаки однакові, то точки лежать по один бік від площини, а якщо знаки різні – по різні боки.

2.4.ПРЯМА У ПРОСТОРИ

Пряма у просторі визначається:

- 1) точкою і вектором, що паралельний шуканій прямій;
- 2) двома точками;
- 3) двома площинами, що перетинаються.

Розглянемо детальніше ці випадки.

- 1.) Пряма, що задана точкою і вектором, що паралельний шуканій прямій.

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{s}(m, n, p)$ (рис. 2.7). Вектор $\vec{s}$ називається *напрямним вектором* прямої l .

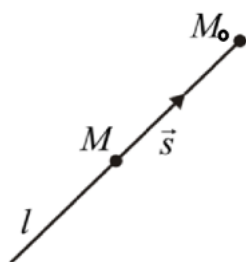


Рисунок 2.7

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ – колінеарні, тому їх координати пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \dots\dots\dots (2.18)$$

Одержане рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*.

З канонічного рівняння прямої вводячи параметр

$$t = \frac{x - x_0}{l},$$

$$t = \frac{y - y_0}{m},$$

$$t = \frac{z - z_0}{n},$$

одержимо *параметричне рівняння прямої*

$$\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \\ z - z_0 = nt, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty. \quad (2.19)$$

Запишемо векторне рівняння прямої. *Векторне рівняння* прямої у просторі має вигляд:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (2.20)$$

де t – скалярний множник (параметр);

$\vec{r}$, $\vec{r}_0$ – радіуси-вектори довільної точки $M(x, y, z)$ і точки M_0 .

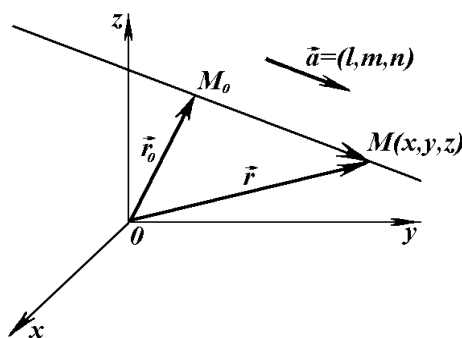


Рисунок 2.8

2) *Пряма, що задана двома точками.* Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, за напрямний вектор можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \vec{s}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.21)$$

3) *Пряма у просторі, що задана двома площинами, що перетинаються.*

Пряма в просторі є лінією перетину двох площин, тому аналітично її можна задати системою:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Щоб перейти від загальних рівнянь прямої до іншого вигляду, можна знайти точку, що належить цій прямій, та напрямний вектор $\vec{s}$. Так як пряма перпендикулярна до нормальних векторів площин $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ та $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, перетином яких вона є, то $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

2.5 РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

Кут між прямими

Знаючи напрямні вектори прямих $l_1 - \vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$, $l_2 - \vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$, можна знайти кут φ між ними (див. рис 2.9):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (2.23)$$

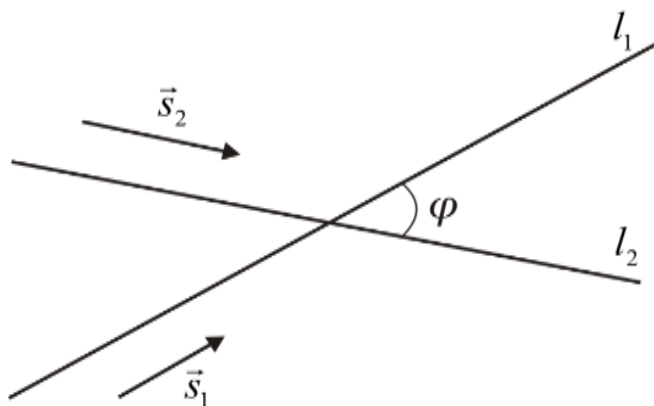


Рисунок 2.9

Умова *перпендикулярності* прямих l_1 – з напрямним вектором $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$, l_2 з $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$, у просторі: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

Умова паралельності прямих : $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

Відстань від точки до прямої у просторі

Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої l , напрямним вектором якої є вектор $\vec{s}(m, n, p)$. Візьмемо на прямій будь-яку точку $M(x, y, z)$. Розглянемо паралелограм MM_0BA , побудований на векторах $\overrightarrow{MM_0}$ і $\vec{s}$. Його площа дорівнює: $S = d \cdot |\vec{s}| = |\vec{s} \times \overrightarrow{MM_0}|$. Тому шукану відстань d можна знайти з рівності:

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{s}|} \quad (2.24)$$

Кут між площинами

Нехай задані дві площини:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \Rightarrow \vec{n}_1(A_1, B_1, C_1); \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \Rightarrow \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

де $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – нормальні вектори цих площин (рис. 2.10)

Косинус *гострого* кута φ між площинами дорівнює куту між *нормальними* векторами цих площин:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (2.26)$$

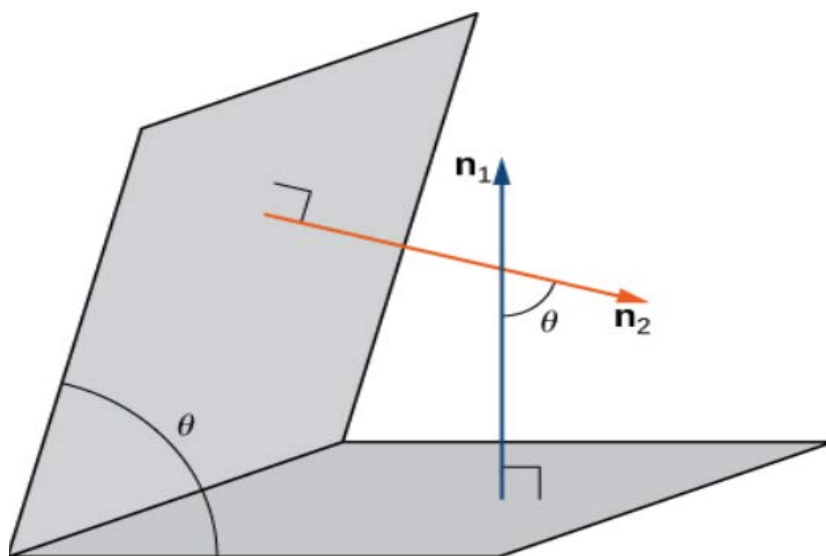


Рисунок 2.10

Умови паралельності площин, заданих рівняннями (2.25):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.27)$$

Умова перпендикулярності площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (2.28)$$

Відстань між паралельними прямими у просторі

Нехай задано паралельні прямі, що мають відповідні напрямні вектори. Відстань між паралельними прямими:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad \text{з напрямним вектором } \vec{a} = (l, m, n), \text{ і прямою}$$

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{з напрямним вектором}$$

$$\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1) = \lambda \vec{a} = \lambda (l, m, n)$$

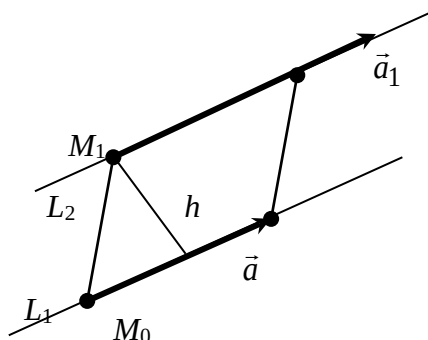


Рисунок 2.11

дорівнює висоті h паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (l, m, n)$ і

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

(рис. 2.11), та обчислюється за формулою:

$$h = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}. \quad (2.29)$$

Відстань між мимобіжними прямими у просторі

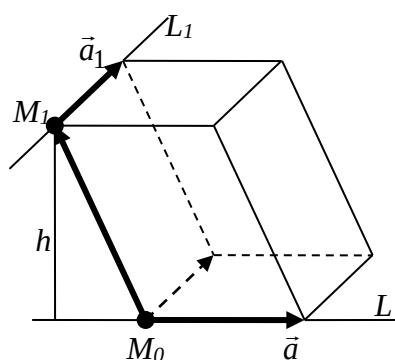


Рисунок 2.12

Відстань між мимобіжними прямими

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Rightarrow \vec{a} = (l, m, n),$$

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \Rightarrow \vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1) \neq \lambda \vec{a}$$

дорівнює висоті h паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$,

$$\vec{a} = (l, m, n), \quad \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

(рис. 2.12) та обчислюється за формулою:

$$h = \frac{|(\vec{a} \times \vec{a}_1) \cdot \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{a} \times \vec{a}_1|}. \quad (2.30)$$

Кут між прямою та площиною. Умови паралельності й перпендикулярності прямої та площини

Нехай дані пряма

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \Rightarrow \vec{a} = (l, m, n)$$

і площина

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n} = (A, B, C).$$

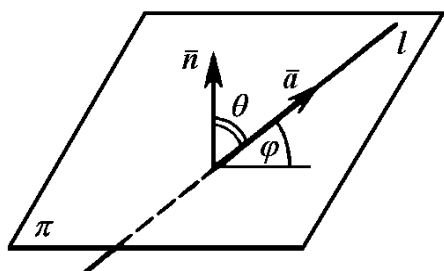


Рисунок 2.13

Синус гострого кута φ між прямою й площиною дорівнює косинусу кута θ між напрямним вектором $\vec{a}$ прямої і вектором нормалі $\vec{n}$ до площини (рис. 2.13):

$$\begin{aligned} \sin \varphi = \cos \theta &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \\ &= \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Умови паралельності й перпендикулярності прямої та площини

Умова паралельності прямої і площини (2.32):

$$Al + Bm + Cn = 0. \quad (2.32)$$

Умови перпендикулярності прямої і площини (2.33):

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \quad (2.33)$$

Розглянемо приклади

Приклад. Знайти кут між площинами $x + \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ і $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

За формулою (2.26) знайдемо косинус гострого кута між площинами:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Приклад. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1, 3, -2)$ паралельно площині $2x + 5y + 3z + 1 = 0$.

Оскільки площини паралельні, то їхні вектори нормалей колінеарні, тому як вектор нормалі до площини можна взяти довільний вектор, що пропорційний вектору нормалі до даної площини $\vec{n} = (2, 5, 3)$, зокрема і сам вектор $\vec{n}$. За формулою (2.10):

$$2(x-1) + 5(y-3) + 3(z+2) = 0 \Rightarrow 2x + 5y + 3z - 11 = 0.$$

Приклад. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1, 3, -2)$ перпендикулярно до двох непаралельних площин $x + 2y + z - 3 = 0$, $2x - y - 4z + 1 = 0$.

Шукана площина перпендикулярна до двох непаралельних площин, тому її вектор нормалі перпендикулярний одночасно до двох векторів нормалей даних площин і може бути взятий у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -7\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}. \end{aligned}$$

За формулою (2.9) знаходимо рівняння шуканої площини:

$$-7(x-1) + 6(y-3) - 5(z+2) = 0 \Rightarrow -7x + 6y - 5z - 21 = 0.$$

Приклад. Знайти рівняння площини, що проходить через дві точки $M_1(1, 2, 3)$ і $M_2(2, 3, -2)$ перпендикулярно до площини $x + 2y + z - 3 = 0$.

Вектор нормалі площини, який перпендикулярний одночасно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (1, 1, -5)$ і вектора нормалі даної площини $\vec{n}_1 = (1, 2, 1)$, може бути взятий у вигляді:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}.$$

За формулою (2.10) знаходимо рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1, 2, 3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (11, -6, 1)$:

$$11(x-1) - 6(y-2) + (z-3) = 0 \Rightarrow 11x - 6y + z - 2 = 0.$$

Приклад. Рівняння $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$ задають пряму, що проходить через точку $M_0(-1, 2; 0)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3; 0; 1)$.

Приклад Пряма задана рівняннями

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ -x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Потрібно записати її канонічні та параметричні рівняння.

У системі рівнянь покладемо $z_0 = 0$ і знаходимо $x_0 = -1, y_0 = 0$. Знайдемо напрямний вектор прямої і запишемо її канонічні рівняння:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}.$$

Позначимо через t величину частки в канонічних рівняннях і виразимо через t координати x, y, z довільної точки прямої. У результаті отримаємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 5t - 1, \\ y = t, \\ z = 3t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

$ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.1)$	Довжина вектора, що заданий двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$:
$ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.2)$	Довжина вектора, що заданий координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \phi \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \quad (1.3.1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.3.2)$	Скалярний добуток векторів
$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1.4)$	Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

Поділ відрізка у заданому відношенні:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Векторний добуток	Мішаний добуток
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} +$ $+(a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$

Умова колінеарності двох векторів

Два вектори $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ і $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ колінеарні, якщо

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Пряма на площині	
$Ax + By + C = 0,$	Загальне рівняння прямої
$y = kx + b$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Рівняння прямої у відрізках
Пряма у просторі	
$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	Рівняння прямої, що проходить через 2 точки
$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$	Канонічне рівняння прямої (з напрямним вектором)
$\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \\ z - z_0 = nt, \end{cases}$	Параметричне рівняння прямої
$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$	Рівняння прямої як перетин двох площин

Площина	
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$	Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний (перпендикулярний) вектор $\vec{n} = (A, B, C)$:
$Ax + By + Cz + D = 0.$	Загальне рівняння площини.
$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$	Рівняння площини α , що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій.

Розміщення прямих і площин

Кут між прямими, що задані через кутовий коефіцієнт

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$$

$$\text{Кут між прямими (простір)} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Знаючи напрямні вектори прямих $l_1 - \vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$, $l_2 - \vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$

Відстань від точки до площини.

$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Кут між площинами з відповідними нормальними векторами

Нехай задані дві площини:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1(A_1, B_1, C_1);$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2).$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Rightarrow \vec{a} = (l, m, n)$
і площиною $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n} = (A, B, C)$.

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Завдання 1. Для заданих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знайти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$

1. $\vec{\alpha} = \vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} - 11\vec{j} = \vec{k}$; 2. $\vec{\alpha} = 10\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{j} + 13\vec{k}$;
3. $\vec{\alpha} = -10\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}$; 4. $\vec{\alpha} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{\beta} = 5\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}$;
5. $\vec{\alpha} = 4\vec{i} - 12\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{\beta} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$; 6. $\vec{\alpha} = 8\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$;
7. $\vec{\alpha} = -3\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$; 8. $\vec{\alpha} = -\vec{i} - 9\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{\beta} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$;
9. $\vec{\alpha} = -\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{\beta} = 10\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$; 10. $\vec{\alpha} = 5\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{j} - 10\vec{k}$;
11. $\vec{\alpha} = -4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$; 12. $\vec{\alpha} = \vec{i} - 10\vec{j} - 10\vec{k}$, $\vec{\beta} = 6\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$;
13. $\vec{\alpha} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$; 14. $\vec{\alpha} = 7\vec{i} - 9\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} + 11\vec{k}$;
15. $\vec{\alpha} = -7\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 14\vec{k}$; 16. $\vec{\alpha} = 6\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} - 8\vec{k}$;
17. $\vec{\alpha} = 7\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 9\vec{k}$; 18. $\vec{\alpha} = \vec{i} - \vec{j} - 10\vec{k}$, $\vec{\beta} = 6\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$;
19. $\vec{\alpha} = 11\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{\beta} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + \vec{k}$; 20. $\vec{\alpha} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k}$;
21. $\vec{\alpha} = -\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{\beta} = 8\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$; 22. $\vec{\alpha} = -3\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$;
23. $\vec{\alpha} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{\beta} = -3\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$; 24. $\vec{\alpha} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{\beta} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$;
25. $\vec{\alpha} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\beta} = 4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$; 26. $\vec{\alpha} = \vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$, $\vec{\beta} = -8\vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k}$;
27. $\vec{\alpha} = -\vec{i} + \vec{j} + 10\vec{k}$, $\vec{\beta} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$; 28. $\vec{\alpha} = 9\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$;
29. $\vec{\alpha} = 4\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 12\vec{k}$; 30. $\vec{\alpha} = -4\vec{i} + 10\vec{k}$, $\vec{\beta} = -12\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$;

Завдання 2. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис. Якщо так, то розкласти вектор $\vec{d}$ в цьому базисі.

1. $\vec{\alpha} = \{-3, 2, 5\}$, $\vec{\beta} = \{4, 2, 3\}$, $\vec{c} = \{2, 3, 2\}$, $\vec{d} = \{4, -4, 5\}$;
2. $\vec{\alpha} = \{5, -2, 1\}$, $\vec{\beta} = \{4, 2, 3\}$, $\vec{c} = \{2, -3, 2\}$, $\vec{d} = \{6, 8, -3\}$;
3. $\vec{\alpha} = \{2, 1, -2\}$, $\vec{\beta} = \{5, 2, 4\}$, $\vec{c} = \{6, 2, 2\}$, $\vec{d} = \{1, 8, 8\}$;
4. $\vec{\alpha} = \{2, 4, -2\}$, $\vec{\beta} = \{3, 1, 5\}$, $\vec{c} = \{4, 4, -6\}$, $\vec{d} = \{-4, 6, -4\}$;
5. $\vec{\alpha} = \{6, 6, 1\}$, $\vec{\beta} = \{-4, 2, 5\}$, $\vec{c} = \{3, 7, 2\}$, $\vec{d} = \{1, 1, -6\}$;
6. $\vec{\alpha} = \{-2, 2, 5\}$, $\vec{\beta} = \{6, 2, 8\}$, $\vec{c} = \{5, 3, 3\}$, $\vec{d} = \{4, -2, 1\}$;
7. $\vec{\alpha} = \{4, -2, 2\}$, $\vec{\beta} = \{1, 5, 3\}$, $\vec{c} = \{4, 4, 9\}$, $\vec{d} = \{5, 1, -5\}$;
8. $\vec{\alpha} = \{-3, -3, 6\}$, $\vec{\beta} = \{5, 2, 1\}$, $\vec{c} = \{3, -2, 8\}$, $\vec{d} = \{-2, 1, 1\}$;
9. $\vec{\alpha} = \{4, 3, -3\}$, $\vec{\beta} = \{3, 6, 2\}$, $\vec{c} = \{2, -4, 5\}$, $\vec{d} = \{-3, -2, 3\}$;
10. $\vec{\alpha} = \{6, 2, -2\}$, $\vec{\beta} = \{1, 4, 1\}$, $\vec{c} = \{6, 5, 8\}$, $\vec{d} = \{-6, 2, 4\}$;
11. $\vec{\alpha} = \{1, 5, 8\}$, $\vec{\beta} = \{-9, 2, 3\}$, $\vec{c} = \{8, 5, 2\}$, $\vec{d} = \{3, -3, 5\}$;
12. $\vec{\alpha} = \{-4, -4, 3\}$, $\vec{\beta} = \{2, 5, -2\}$, $\vec{c} = \{2, 5, -2\}$, $\vec{d} = \{2, 2, -2\}$;
13. $\vec{\alpha} = \{4, 5, 5\}$, $\vec{\beta} = \{-2, -2, 3\}$, $\vec{c} = \{3, 4, 4\}$, $\vec{d} = \{1, 5, -2\}$;
14. $\vec{\alpha} = \{5, -8, 2\}$, $\vec{\beta} = \{6, 3, 2\}$, $\vec{c} = \{10, -6, 4\}$, $\vec{d} = \{5, -2, -2\}$;
15. $\vec{\alpha} = \{4, -2, 3\}$, $\vec{\beta} = \{5, -5, -2\}$, $\vec{c} = \{2, -4, 5\}$, $\vec{d} = \{6, 1, 8\}$;
16. $\vec{\alpha} = \{-2, 4, 6\}$, $\vec{\beta} = \{2, 1, 5\}$, $\vec{c} = \{-3, 4, 6\}$, $\vec{d} = \{-3, 1, 4\}$;
17. $\vec{\alpha} = \{1, 4, 2\}$, $\vec{\beta} = \{5, 2, 6\}$, $\vec{c} = \{5, 5, 8\}$, $\vec{d} = \{7, 1, -4\}$;
18. $\vec{\alpha} = \{1, -2, 2\}$, $\vec{\beta} = \{5, 5, 4\}$, $\vec{c} = \{5, 4, 2\}$, $\vec{d} = \{4, -4, 1\}$;
19. $\vec{\alpha} = \{3, -3, 6\}$, $\vec{\beta} = \{-2, 2, -2\}$, $\vec{c} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{d} = \{9, 8, -6\}$;

20. $\vec{\alpha} = \{-2, -4, 3\}$, $\vec{\beta} = \{5, -2, -2\}$, $\vec{c} = \{4, -5, 5\}$, $\vec{d} = \{3, 4, -4\}$;
21. $\vec{\alpha} = \{-2, -4, 3\}$, $\vec{\beta} = \{5, 3, -5\}$, $\vec{c} = \{6, 6, 2\}$, $\vec{d} = \{1, 7, -7\}$;
22. $\vec{\alpha} = \{2, 5, 4\}$, $\vec{\beta} = \{3, -4, 2\}$, $\vec{c} = \{4, 3, 2\}$, $\vec{d} = \{5, 5, -6\}$;
23. $\vec{\alpha} = \{3, -2, 2\}$, $\vec{\beta} = \{-3, 5, 4\}$, $\vec{c} = \{5, 3, 2\}$, $\vec{d} = \{4, -5, -5\}$;
24. $\vec{\alpha} = \{3, 2, 5\}$, $\vec{\beta} = \{4, 3, 2\}$, $\vec{c} = \{-2, 5, 6\}$, $\vec{d} = \{-2, -2, 5\}$;
25. $\vec{\alpha} = \{2, 4, 5\}$, $\vec{\beta} = \{5, 3, -3\}$, $\vec{c} = \{6, 2, 4\}$, $\vec{d} = \{4, -9, -5\}$;
26. $\vec{\alpha} = \{-3, 5, 5\}$, $\vec{\beta} = \{-4, 3, 5\}$, $\vec{c} = \{-5, 5, -7\}$, $\vec{d} = \{1, 3, 1\}$;
27. $\vec{\alpha} = \{5, 5, 4\}$, $\vec{\beta} = \{3, 2, -4\}$, $\vec{c} = \{7, 6, 2\}$, $\vec{d} = \{4, -6, -6\}$;
28. $\vec{\alpha} = \{3, -6, 4\}$, $\vec{\beta} = \{2, 5, 3\}$, $\vec{c} = \{-4, 2, 2\}$, $\vec{d} = \{-2, -2, 5\}$;
29. $\vec{\alpha} = \{3, 5, -5\}$, $\vec{\beta} = \{2, 3, 4\}$, $\vec{c} = \{4, -3, 2\}$, $\vec{d} = \{1, 4, 2\}$;
30. $\vec{\alpha} = \{2, 4, -4\}$, $\vec{\beta} = \{3, 5, -3\}$, $\vec{c} = \{4, 2, 6\}$, $\vec{d} = \{5, 1, -2\}$;

Завдання 3.

По заданим $\vec{a}, \vec{b}$, $|m|, |n|, (m \wedge n)$ знайти пр. $\vec{a} \mid \vec{a} \times \vec{b} \mid$

1. $\vec{a} = -7\vec{m} - 6\vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{5}$;
2. $\vec{a} = 7\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
3. $\vec{a} = -7\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = -4\vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$;
4. $\vec{a} = 7\vec{m} + 6\vec{n}$, $\vec{b} = 4\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
5. $\vec{a} = 4\vec{m} - 7\vec{n}$, $\vec{b} = 4\vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 6$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{7}$;
6. $\vec{a} = 5\vec{m} - 7\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - 5\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{7}$;

7. $\vec{a} = 5\vec{m} + 7\vec{n}$,	$\vec{b} = 6\vec{m} + 4\vec{n}$,	$ \vec{m} = 3$,	$ \vec{n} = 5$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$;
8. $\vec{a} = 4\vec{m} + 7\vec{n}$,	$\vec{b} = -2\vec{m} - 6\vec{n}$,	$ \vec{m} = 4$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
9. $\vec{a} = 6\vec{m} - 7\vec{n}$,	$\vec{b} = -6\vec{m} - 4\vec{n}$,	$ \vec{m} = 5$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{7}$;
10. $\vec{a} = 6\vec{m} + 7\vec{n}$,	$\vec{b} = -6\vec{m} + 4\vec{n}$,	$ \vec{m} = 2$,	$ \vec{n} = 6$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{7}$;
11. $\vec{a} = -8\vec{m} + 2\vec{n}$,	$\vec{b} = -5\vec{m} + 2\vec{n}$,	$ \vec{m} = 3$,	$ \vec{n} = 4$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{5}$;
12. $\vec{a} = 8\vec{m} + 3\vec{n}$,	$\vec{b} = -5\vec{m} - 2\vec{n}$,	$ \vec{m} = 4$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{5}$;
13. $\vec{a} = -6\vec{m} - 8\vec{n}$,	$\vec{b} = -5\vec{m} + 2\vec{n}$,	$ \vec{m} = 2$,	$ \vec{n} = 4$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$;
14. $\vec{a} = 6\vec{m} + 8\vec{n}$,	$\vec{b} = -9\vec{m} - 2\vec{n}$,	$ \vec{m} = 3$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
15. $\vec{a} = 8\vec{m} - 2\vec{n}$,	$\vec{b} = 9\vec{m} + 2\vec{n}$,	$ \vec{m} = 4$,	$ \vec{n} = 3$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{7}$;
16. $\vec{a} = -8\vec{m} + 4\vec{n}$,	$\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$,	$ \vec{m} = 5$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{7}$;
17. $\vec{a} = -5\vec{m} + 8\vec{n}$,	$\vec{b} = -5\vec{m} - 4\vec{n}$,	$ \vec{m} = 2$,	$ \vec{n} = 4$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{5}$;
18. $\vec{a} = 5\vec{m} - 8\vec{n}$,	$\vec{b} = 2\vec{m} + 9\vec{n}$,	$ \vec{m} = 3$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{5}$;
19. $\vec{a} = -8\vec{m} - 3\vec{n}$,	$\vec{b} = 2\vec{m} - 9\vec{n}$,	$ \vec{m} = 4$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{7}$;
20. $\vec{a} = 2\vec{m} - 4\vec{n}$,	$\vec{b} = 4\vec{m} + 7\vec{n}$,	$ \vec{m} = 2$,	$ \vec{n} = 3$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{5}$;
21. $\vec{a} = -2\vec{m} + 4\vec{n}$,	$\vec{b} = -4\vec{m} - 7\vec{n}$,	$ \vec{m} = 3$,	$ \vec{n} = 4$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{5}$;
22. $\vec{a} = -2\vec{m} - 4\vec{n}$,	$\vec{b} = 4\vec{m} - 7\vec{n}$,	$ \vec{m} = 4$,	$ \vec{n} = 2$,	$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{7}$;

23. $\vec{a} = 3\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m} - 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{7}$;
24. $\vec{a} = -3\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m} + 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$;
25. $\vec{a} = -3\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{b} = 6\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
26. $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, $\vec{b} = -7\vec{m} - 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{5}$;
27. $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = 6\vec{m} - 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{5}$;
28. $\vec{a} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = -6\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 4$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{7}$;
29. $\vec{a} = -4\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 8\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = -\frac{\pi}{7}$;
30. $\vec{a} = -4\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = -8\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 5$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$;

Завдання 4.

У тетраедрі з вершинами A, B, C і D знайти об'єм V , площу грані S_{ABC} , довжину висоти, що опущена з т. D на грань ABC , кут між ребрами AB і AC

1. $A(3, 2, 1)$, $B(1, 4, -4)$, $C(4, 5, -3)$, $D(4, 0, -4)$;
2. $A(1, 2, -5)$, $B(0, -3, 2)$, $C(2, -3, -6)$, $D(4, -2, -6)$;
3. $A(0, 6, 0)$, $B(3, 3, -2)$, $C(4, 10, 5)$, $D(0, 0, -6)$;
4. $A(4, 0, -1)$, $B(3, -8, 0)$, $C(0, 5, 4)$, $D(2, 0, 2)$;
5. $A(1, 0, 2)$, $B(3, 0, -4)$, $C(5, 1, 3)$, $D(3, 1, 0)$;
6. $A(3, 0, 2)$, $B(0, 1, -2)$, $C(2, -2, 3)$, $D(4, 2, 0)$;
7. $A(1, -2, 0)$, $B(3, 2, -2)$, $C(4, 1, -1)$, $D(1, 0, 3)$;
8. $A(-2, -2, 1)$, $B(-1, 3, 6)$, $C(4, 2, 8)$, $D(3, 0, 1)$;
9. $A(1, -2, 0)$, $B(2, 1, -2)$, $C(4, 0, 2)$, $D(2, 0, -4)$;
10. $A(0, -4, -4)$, $B(1, 0, 3)$, $C(2, -3, 0)$, $D(-2, 3, 1)$;

- | | | | |
|---------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 11. $A(0, 0, 3),$ | $B(2, 0, 1),$ | $C(3, 1, 0),$ | $D(1, 4, 4);$ |
| 12. $A(2, 2, 1),$ | $B(0, -2, 3),$ | $C(1, 3, 0),$ | $D(2, -2, 1);$ |
| 13. $A(1, 2, 1),$ | $B(0, 0, -2),$ | $C(2, 3, 0),$ | $D(6, -1, 0);$ |
| 14. $A(2, 2, 1),$ | $B(0, -3, 2),$ | $C(0, 0, 4),$ | $D(1, 0, 1);$ |
| 15. $A(1, 0, 2),$ | $B(-2, 3, 0),$ | $C(0, 4, 2),$ | $D(2, 2, -2);$ |
| 16. $A(1, -4, 3),$ | $B(2, 0, -3),$ | $C(3, 4, 0),$ | $D(-2, 4, 5);$ |
| 17. $A(2, -2, 0),$ | $B(-2, 1, -2),$ | $C(1, 0, -5),$ | $D(-4, 1, -1);$ |
| 18. $A(1, -4, 0),$ | $B(-2, 1, 2),$ | $C(2, 2, -3),$ | $D(-3, 4, 3);$ |
| 19. $A(-4, 1, -8),$ | $B(3, 1, -4),$ | $C(-4, 7, -3),$ | $D(-3, 7, 8);$ |
| 20. $A(2, 1, -2),$ | $B(0, 2, 0),$ | $C(1, -2, 3),$ | $D(-2, -1, 6);$ |
| 21. $A(3, -2, 1),$ | $B(1, 1, -2),$ | $C(2, -2, 3),$ | $D(4, 6, 12);$ |
| 22. $A(3, 0, -1),$ | $B(2, 0, -6),$ | $C(6, 1, 0),$ | $D(7, 2, 0);$ |
| 23. $A(-1, 3, 4),$ | $B(2, 0, 6),$ | $C(0, 6, 1),$ | $D(2, 2, 3);$ |
| 24. $A(0, -2, 6),$ | $B(1, 3, -1),$ | $C(2, 2, 3),$ | $D(3, -2, 0);$ |
| 25. $A(1, 3, 3),$ | $B(-2, -2, -1),$ | $C(0, 2, 4),$ | $D(-2, -1, -2);$ |
| 26. $A(2, -2, 1),$ | $B(-2, -1, 4),$ | $C(1, -2, 2),$ | $D(1, 0, 1);$ |
| 27. $A(-2, -2, 2),$ | $B(3, -3, 0),$ | $C(2, -4, 0),$ | $D(-1, 0, -1);$ |
| 28. $A(-3, 0, 3),$ | $B(2, -2, 1),$ | $C(0, -3, 0),$ | $D(4, 2, -1);$ |
| 29. $A(3, 0, 2),$ | $B(0, 2, -2),$ | $C(2, -3, 0),$ | $D(-3, -1, 0);$ |
| 30. $A(4, -6, 0),$ | $B(3, 0, -2),$ | $C(0, -7, 2),$ | $D(2, -1, -2);$ |

Завдання 5.

Знайти рівняння площини, що проходить через три точки A, B, C .

1. $A(3; 2; -2), \quad B(-1; 1; 0), \quad C(6; 0; -1)$
2. $A(-4; -1; -4), \quad B(6; 0; 3), \quad C(8; 4; 10)$

3. $A(0; 0; -8)$, $B(2; -1; 0)$, $C(0; -3; 0)$
4. $A(1; 0; -2)$, $B(-4; 2; -8)$, $C(4; -1; 7)$
5. $A(7; 0; 0)$, $B(3; -3; -1)$, $C(0; 2; -2)$
6. $A(-3; 0; -3)$, $B(2; -8; 2)$, $C(7; -1; 0)$
7. $A(1; 3; 2)$, $B(-2; -1; 0)$, $C(4; -1; -2)$
8. $A(0; -2; -4)$, $B(4; 6; 6)$, $C(5; -1; 5)$
9. $A(2; 1; -2)$, $B(3; 0; -3)$, $C(-1; 7; 0)$
10. $A(1; 0; 2)$, $B(6; -1; 7)$, $C(1; -2; -4)$
11. $A(0; 2; 1)$, $B(1; 0; -1)$, $C(3; -5; 0)$
12. $A(1; 0; -1)$, $B(6; 0; 2)$, $C(-1; 8; -10)$
13. $A(1; -1; 3)$, $B(0; 2; 0)$, $C(-1; 4; -2)$
14. $A(-8; -1; 3)$, $B(-1; -2; 1)$, $C(6; 7; 5)$
15. $A(1; -2; 2)$, $B(6; 0; 7)$, $C(-1; 3; -4)$
16. $A(0; 1; -2)$, $B(4; 6; -1)$, $C(-2; 3; 0)$
17. $A(0; 6; 6)$, $B(1; 3; -1)$, $C(0; -2; 1)$
18. $A(1; 2; -2)$, $B(0; -1; 2)$, $C(0; -2; 1)$
19. $A(-1; 3; 1)$, $B(1; -2; 4)$, $C(0; -1; 2)$
20. $A(1; 0; -1)$, $B(2; 3; -9)$, $C(6; 0; 8)$
21. $A(3; -4; 1)$, $B(-1; -4; -3)$, $C(6; 0; -1)$
22. $A(-2; 0; -8)$, $B(-1; 3; -5)$, $C(1; -2; 2)$
23. $A(-4; 0; 0)$, $B(1; 3; 8)$, $C(0; 0; 7)$

$$24. A(3; 3; -9), \quad B(0; 6; 0), \quad C(4; 0; 5)$$

$$25. A(1; -2; 3), \quad B(6; 0; 7), \quad C(3; 6; 0)$$

$$26. A(1; 1; -3), \quad B(3; 0; 6), \quad C(4; -1; 7)$$

$$27. A(2; -1; 5), \quad B(-6; -1; 0), \quad C(-1; -4; 0)$$

$$28. A(0; 1; -4), \quad B(-1; -3; 3), \quad C(0; 2; -6)$$

$$29. A(1; -1; 3), \quad B(4; 0; -1), \quad C(-2; 1; -4)$$

$$30. A(-5; 2; -5), \quad B(6; 7; 0), \quad C(-1; 8; 3)$$

Завдання 6.

Знайти рівняння площини, що проходить через точку A_0 і перпендикулярно заданій прямій.

$$1. A_0(3; 0; 4), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{3}$$

$$2. A_0(-1; 4; 2), \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-8}{2}$$

$$3. A_0(3; 0; -4), \quad \frac{x-4}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{2}$$

$$4. A_0(4; 3; -3), \quad \frac{x+4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

$$5. A_0(4; -1; 2), \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$$

$$6. A_0(0; 3; 1), \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{4}$$

$$7. A_0(4; 3; 2), \quad \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-2}{3}$$

$$8. A_0(4; -2; 5), \quad \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{3}$$

$$9. A_0(6; 1; -3), \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-4}{-2}$$

$$10. A_0(2; 1; -4), \quad \frac{x}{4} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-2}{-5}$$

$$11. A_0(2; -5; 1), \quad \frac{x-3}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+4}{-1}$$

$$12. A_0(3; -2; 2), \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{4}$$

$$13. A_0(4; 0; 2), \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{4}$$

$$14. A_0(-2; 3; -6), \quad \frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{4}$$

$$15. A_0(3; 2; -3), \quad \frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-2}$$

$$16. A_0(3; 1; -4), \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{8}$$

$$17. A_0(4; 3; -4), \quad \frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{6}$$

$$18. A_0(-2; 3; 7), \quad \frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{3}$$

$$19. A_0(5; 2; -1), \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+4}{3}$$

$$20. A_0(3; -2; 2), \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{6}$$

$$21. A_0(-2; 3; 6), \quad \frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+6}{-3}$$

$$22. A_0(-2; 4; 1), \quad \frac{x+3}{6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{4}$$

$$23. A_0(3; 0; 6), \quad \frac{x+2}{7} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{2}$$

$$24. A_0(3; -4; 4), \quad \frac{x-2}{8} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{-2}$$

$$25. A_0(0; 5; 9), \quad \frac{x+6}{-3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{7}$$

$$26. A_0(11; 3; -2), \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z}{4}$$

$$27. A_0(8; -2; 3), \quad \frac{x}{5} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+3}{3}$$

$$28. A_0(9; -4; 5), \quad \frac{x}{6} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-2}{-1}$$

$$29. A_0(-1; 9; 4), \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-4}{6}$$

$$30. A_0(4; -2; 3), \quad \frac{x+4}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{-1}$$

Завдання 7. У тетраедрі $SABC$ знайти

1) рівняння граней SAB , ABC і кут між ними,

2) рівняння AS і AB ребер і кут між ними.

$$1. S(-3; 2; 5), \quad A(2; 2; 3), \quad B(7; 6; 8), \quad C(1; 4; 5);$$

$$2. S(3; 2; 1), \quad A(8; 2; 9), \quad B(1; 10; -8), \quad C(6; 5; 4);$$

$$3. S(-6; 1; 5), \quad A(1; 4; 3), \quad B(8; 9; 7), \quad C(2; 4; 6);$$

$$4. S(2; 3; 0), \quad A(6; 8; 1), \quad B(0; 5; 2), \quad C(4; 3; -3);$$

$$5. S(3; 2; 1), \quad A(4; 5; -7), \quad B(8; 2; 10), \quad C(5; 6; 2);$$

$$6. S(10; 2; -6), \quad A(1; 5; -3), \quad B(3; 0; 4), \quad C(6; -2; 3);$$

7. $S(5;5;9)$, $A(2;8;2)$, $B(6;2;7)$, $C(-1;4;6)$;
8. $S(3;3;-1)$, $A(5;2;8)$, $B(6;1;9)$, $C(-2;2;4)$;
9. $S(-3;4;-3)$, $A(8;9;2)$, $B(1;10;5)$, $C(2;6;-2)$;
10. $S(4;3;0)$, $A(3;4;-3)$, $B(8;3;4)$, $C(2;7;-6)$;
11. $S(5;2;2)$, $A(4;2;0)$, $B(3;2;8)$, $C(0;-2;7)$;
12. $S(4;-2;2)$, $A(6;2;5)$, $B(7;7;-2)$, $C(2;3;8)$;
13. $S(6;6;-2)$, $A(2;2;-3)$, $B(1;3;2)$, $C(3;5;-6)$;
14. $S(2;3;-2)$, $A(0;-1;0)$, $B(8;4;1)$, $C(6;4;0)$;
15. $S(-5;1;7)$, $A(4;2;5)$, $B(0;1;3)$, $C(3;5;6)$;
16. $S(0;6;2)$, $A(4;2;4)$, $B(3;7;4)$, $C(6;5;4)$;
17. $S(-2;2;4)$, $A(5;3;5)$, $B(2;4;6)$, $C(6;-3;8)$;
18. $S(-1;3;5)$, $A(4;2;0)$, $B(2;0;6)$, $C(6;4;9)$;
19. $S(2;-3;-3)$, $A(3;2;4)$, $B(4;-2;2)$, $C(5;6;2)$;
20. $S(5;2;-4)$, $A(3;4;-3)$, $B(2;2;4)$, $C(6;5;8)$;
21. $S(4;-2;5)$, $A(2;3;0)$, $B(5;0;6)$, $C(0;2;4)$;
22. $S(2;4;2)$, $A(0;-2;3)$, $B(-1;0;6)$, $C(6;3;10)$;
23. $S(6;2;3)$, $A(4;2;2)$, $B(3;1;6)$, $C(0;-1;5)$;
24. $S(6;2;4)$, $A(3;-1;5)$, $B(4;3;5)$, $C(0;-3;6)$;
25. $S(2;4;6)$, $A(5;2;3)$, $B(6;5;2)$, $C(-2;3;8)$;
26. $S(2;4;-1)$, $A(5;3;-3)$, $B(6;6;2)$, $C(-2;5;3)$;
27. $S(0;-2;3)$, $A(5;0;0)$, $B(4;-3;5)$, $C(6;7;8)$;

28. $S(3; -1; 6)$, $A(0; -0; -0)$, $B(2; 5; 1)$, $C(4; 5; 7)$;

29. $S(1; 0; 2)$, $A(5; 5; 4)$, $B(5; 4; 2)$, $C(0; -4; 4)$;

30. $S(1; 4; 2)$, $A(5; 2; 6)$, $B(5; 5; 8)$, $C(3; 6; 0)$;

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : Видавництво Політехніка, 2009. 648 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Вища математика для економістів : навч. посіб. Київ : ЦУЛ, 2010. 448 с.
3. Шкіль М. І., Коновалова Н. Р., Федоренко В. В. Вища математика : підручник : у 3 кн. Київ : Либідь, 2005.
4. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : у 2 ч. / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ : Либідь, 2003.

Електронне навчальне видання

**Альона Анатоліївна Коломієць
Ірина Анатоліївна Клеопа**

**Методичні вказівки до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика».
Частина 2. Векторна алгебра. Аналітична геометрія**

Рукопис оформила: А. Коломієць

Редактор: Н. Кравчук

Оригінал-макет виготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до видання 3.08.2026

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № Р2026-105.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

press.vntu.edu.ua;

Email: rvv.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.