

**Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика».**
Частина 3. Теорія границь

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика».
Частина 3. Теорія границь**

Вінниця
ВНТУ
2026

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 28.05.2026 р.)

Рецензенти:

О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор

М. В. Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Ч. 3. Теорія границь / уклад. А. А. Коломієць. Електрон. текст. дані. Вінниця : ВНТУ, 2026. 32 с.

У методичних вказівках наведено основні теоретичні відомості теорії границь, класифіковано правила розкриття невизначеностей при обчисленні границь. Теоретичний матеріал та приклади розв'язування завдань підкріплено відеоматеріалом, посилання на який запропоновано після блоків навчального матеріалу. Мета методичних вказівок – надати студентам можливість більш детально розібратися у методах обчислення границь функцій. Призначено для студентів усіх спеціальностей.

ЗМІСТ

1 Деякі теоретичні відомості з теорії границь	4
Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності та функції.....	8
2. Теорема про границі суми, добутку і частки функцій	9
3 Перша та друга чудові границі.....	11
4 Обчислення границь функцій	13
4.1 Обчислення границь, що не містять невизначеностей	13
4.2 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$	14
4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$	16
4.4 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$, під знаком границі знаходиться дробово-раціональний вираз $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$	18
4.5 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$, якщо під знаком границі містяться нескінченно малі функції.....	19
4.6 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$, якщо під знаком границі містяться ірраціональні вирази.....	20
4.7 Розкриття невизначеностей типу $\{0 \cdot \infty\}$ при $x \rightarrow a$	21
4.8 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$ при $x \rightarrow a$, якщо під знаком границі міститься логарифмічна функція.....	21
4.9 Розкриття невизначеності типу $\{1^\infty\}$ з використанням другої важливої границі	23
5 Класифікація основних невизначеностей при розкритті границь та шляхи їх розв'язання.	26
6 Завдання для самостійної роботи.....	29
Література.....	31

1 ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

Кожному числу $n \in N$ поставимо у відповідність деяке дійсне число $x_n = f(n)$. У цьому випадку кажуть, що задано *числову послідовність* і позначають $\{x_n\}$.

Означення. Число a називається *границею* послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться натуральне число N таке, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ з номерами, що більші за N виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Те, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$, записують так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ або } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Якщо послідовність має границю, то її називають *збіжною* і, якщо не має границі, *розбіжною*.

Будь-який інтервал виду $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε -*околою* точки a на числовій осі.

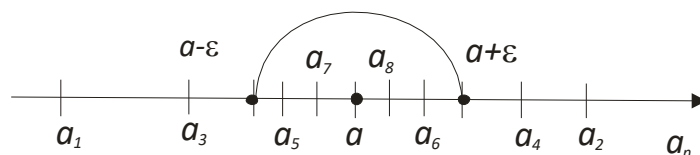


Рисунок 1 – Ілюстрація групування точок в околі точки a

З геометричної точки зору, якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то в довільний ε окіл точки a потраплять всі члени послідовності $\{x_n\}$, окрім скінченної їх кількості (ε може бути як завгодно малим). Можна сказати, що члени послідовності $\{x_n\}$ групуються навколо точки a (рис. 1).

Нехай на деякій множині X задано функцію $f(x)$ і деяку. Виберемо з X послідовність точок $\{x_n\}$, що відрізняються від точки a : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. Нехай число a є *границею* послідовності точок $\{x_n\}$: $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Знайдемо значення функції $f(x)$ у точках послідовності $\{x_n\}$: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$. Ці значення утворюють послідовність $\{f(x_n)\}$

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$ (або при $x \rightarrow a$), якщо для будь-якої збіжної до a послідовності значень аргументу x , відмінних від a , відповідна послідовність значень функції збігається до числа b .

$$\forall \{x_n\}, x_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Це означення називають означенням за Гейне або означенням границі «мовою послідовностей».

Означення. Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. У цьому випадку записують

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Означення. Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|x| > M(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. У цьому випадку записують

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Демо означення лівої і правої границі функції «мовою послідовностей».

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ зліва, якщо для послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, значень аргументу x , що збігається до числа x_0 і таких, що $x_n < x_0$, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, збігається до числа A_1 .

Позначається ця границя символічно так: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$,

Або інакше: для $\forall x_n : x_n \rightarrow x_0$ і $x_n < x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A_1$;
 $A_1 = f(x_0 - 0)$.

Означення. Число A_2 називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ справа, якщо для довільної послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, значень аргументу x , що збігається до числа x_0 і таких, що $x_n > x_0$, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, збігається до числа A_2 .

Позначається ця границя символічно так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2,$$

Або інакше: для $\forall x_n : x_n \rightarrow x_0$ і $x_n > x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A_2$;
 $A_2 = f(x_0 + 0)$.

Означення. Число b називається *границею функції $f(x)$ справа* в точці $x = a$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $a < x < a + \delta$ [$a - \delta < x < a$], виконується нерівність: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Позначають границю справа $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$ або $f(a + 0)$.

Означення. Число b називається *границею функції $f(x)$ справа (зліва)* в точці $x = a$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує

таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $a - \delta < x < a$, виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Скорочено означення границі справа (зліва) в точці $x = a$, можна записати так:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ або } f(a-0).$$

Теорема. Для того, щоб у точці $x = a$ існувала границя функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб існували ліва і права границі і були рівні між собою:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

Приклад. Обчислити ліву і праву границі функції

$$y = \frac{1}{e^{x+1}}$$

Обчислимо ліву границю функції:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1-0-1}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Обчислимо праву границю функції :

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1+0-1}} = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty$$

Як бачимо, ліва і права границя функції в точці можуть не співпадати.

Приклад. Обчислити ліву і праву границі функції $y = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 - 3}{x + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 - 3}{x + 1} = -\infty$$

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число N , що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$. Записують: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Розглянемо нескінченно великі і нескінченно малі функції.

Означення. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \rightarrow a$, якщо виконується рівність:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Іншими словами, функція $f(x)$ називається нескінченно малою при x , що прямує до a , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ виконується нерівність: $|f(x)| < \varepsilon$.

Означення. Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно великою при x , що прямує до a , якщо для будь-якого $N > 0$ існує число $\delta(N)$ таке, що при $|x - a| < \delta(N)$ виконується нерівність $|\alpha(x)| > N$, це можна записати так: $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \infty$.

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку малості, якщо границя їх відношення $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$.

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Їх позначають так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таблиця 1

Нескінченно малі (н. м.) і нескінченно великі (н. в.) послідовності та функції, зв'язок між ними

Послідовність	Функція
Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$	Функція $f(x)$ називається нескінченно малою функцією (скорочено н. м. ф.) при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$
Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$	Функція $f(x)$ називається нескінченно великою функцією (скорочено н. в. ф.) у точці $x = a$ при $x \rightarrow a$, якщо: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$

Наведемо основні *еквівалентності* функцій.

$$1. \sin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$9. \sqrt[k]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{k};$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$10. \sqrt[k]{a^k + \alpha(x)} - a \sim \frac{\alpha(x)}{k \cdot a^{k-1}};$$

$$3. 1 - \cos \alpha(x) \sim \left(\frac{\alpha(x)}{2}\right)^2;$$

$$11. a^{\alpha(x)} - a^{\beta(x)} \sim (\alpha(x) - \beta(x)) \ln a;$$

$$4. \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$12. (1 + \alpha(x))^m - 1 \sim \alpha(x) \cdot m; \\ \alpha \rightarrow 0, m, k = \text{const}$$

$$5. \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$6. e^{\alpha(x)} \sim \alpha(x);$$

$$13. a^\alpha - 1 \sim \alpha(x) \ln a;$$

$$7. \ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x);$$

$$14. e^{\alpha(x)} - e^{\beta(x)} \sim \alpha(x) - \beta(x); \\ \alpha, \beta \rightarrow 0$$

$$8. \log_a[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x) \log_a e;$$

$$15. a^{\alpha(x)} - b^{\beta(x)} \sim \alpha(x) \ln a - \beta(x) \ln b.$$

$$16. \ln U(x) \sim U(x) - 1$$

2 ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ СУМИ, ДОБУТКУ І ЧАСТКИ ФУНКЦІЙ

З метою розв'язання деяких нижче наведених прикладів подамо властивості границь функцій.

Границі функцій мають такі *властивості*:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} C = C, \text{ де } C - \text{константа},$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ де } C - \text{константа}.$$

$$3. \text{Якщо існують границі } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ та } \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

4. Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

5. Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, причому $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

6. Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}.$$

Ви часто будете зустрічатися з такими формулами. Звертаємо на них особливу увагу!

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{K}{g(x)} = \frac{K}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \infty, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0. \quad K - \text{константа}$$

Границя частки двох функцій не існує (дорівнює ∞), якщо границя чисельника існує і відмінна від 0, а границя знаменника дорівнює нулю.

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K}{g(x)} = \frac{K}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = 0, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Границя частки двох функцій дорівнює 0, якщо границя чисельника існує, а границя знаменника дорівнює ∞ .

Розглянемо деякі важливі границі, які у подальшому допоможуть при обчисленні границь.

3 ПЕРША ТА ДРУГА ЧУДОВІ ГРАНИЦІ

Границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (*)

називають *першою чудовою границею*. Це правило часто застосовують для розкриття невизначеностей типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

Зазначимо, що границя функції $\frac{\sin x}{x}$ у точці $x = 0$ має невизначеність $\frac{0}{0}$. Першу чудову границю широко використовують для обчислення границь виразів, що містять тригонометричні функції. За допомогою формули (*) можна довести границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin kx}{x} = k;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} kx}{x} = k; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Розглянемо приклади на застосування першої чудової границі.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$

Розв'язання. Маємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$. Нехай $x - 2 = t$; при $x \rightarrow 2$, $t \rightarrow 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} &= \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi(2+t)}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{4} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4} \right) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Другою чудовою границею називають границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Зазначимо, що ця формула справедлива як при $x \rightarrow +\infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$. Графік функції $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ зображено на рис. 3.

Рисунок 3

Виконавши у формулі (**) заміну $\frac{1}{x} = t$, дістанемо формулу

$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$, яку також називають другою чудовою границею.

Число e – трансцендентне число, його найближче значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Друга важлива границя пов'язана з невизначеністю 1^∞ (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу $u(x)^{v(x)}$, де $u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$, якщо $x \rightarrow x_0$).

Наслідки з другої чудової границі:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = \log_a e; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+k}{x}\right)^k = k; \text{ При } a = e \text{ формули 2) і 3) набувають вигляду:}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1 + x^2)$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1 + x^2) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln \cos 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln(1 - 2\sin^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \cdot x^2}{\frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x} \cdot (-2\sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Перейдімо до безпосереднього обчислення границь, розглянувши основні типові невизначеності, що зустрічаються при їх розв'язанні.

4 ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ

Перейдемо до безпосереднього обчислення границь функцій. При обчисленні границь можна зустрітися з різними випадками, які ми детально розглянемо у цьому розділі.

4.1 Обчислення границь, що не містять невизначеності.

Для обчислення границі функції, за умови, коли змінна прямує до константи, необхідно у вираз, що міститься під знаком границі, підставити значення константи:

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + x - 4)$.

Розв'язання

Використаємо властивості границь функцій (1), (2), (3), отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2; \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4; \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + x - 4) = 40 + 2 - 4 = 38.$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3}$

Використаємо властивість (5).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3} = \frac{1+1+1}{1+3} = \frac{3}{4}.$$

4.2 Розкриття невизначеностей типу $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, (якщо під знаком границі стоїть дробово-раціональна функція $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени)

$$P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_1 x + p_0,$$

$$Q_n(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0, \text{ (якщо } x \rightarrow \infty \text{)}.$$

Необхідно кожен доданок чисельника і знаменника поділити на змінну в найбільшому показнику степеня.

Рекомендоване відео

https://youtu.be/W-8DgAQsdRY?si=N_CF2qa7CABaM5gO

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 - 7}{9x^3 - 4}$

Розв'язання

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 - 7}{9x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - 4 \frac{x^2}{x^3} - \frac{7}{x^3}}{9 \frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 4 \frac{1}{x} - \frac{7}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (9 - \frac{4}{x^3})} \left\{ \begin{array}{l} \text{враховуючи, що} \\ \frac{k}{x^n} \rightarrow 0 \\ \text{при } x \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \frac{1 - 4 \cdot 0 - 0}{9 - 0} = \frac{1}{9}$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+9}{7x^2-14}.$

Розв'язання

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+9}{7x^2-14} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{9}{x^2}}{7\frac{x^2}{x^2} - \frac{14}{x^2}} = \frac{0}{7} = 0.$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x+10}{x^2+9}.$

Розв'язання

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x+10}{x^2+9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{10}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{9}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

При обчисленні границь дробово-раціональних виразів $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ може бути

декілька випадків:

а) якщо $m > n$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \infty$;

б) якщо $m < n$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0$;

в) якщо $m = n$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \frac{p_m}{q_m}$, беремо коефіцієнти при

невідомих з однаковими показниками степеня.

Розкриття невизначеностей вказаного типу можна проводити застосувавши заміну многочлена на еквівалентний, тобто

$$p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim p_m x^m, \quad (1)$$

$$q_m x^m + \dots + q_1 x + q_0 \sim q_m x^m \quad (2)$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4}.$

Розв'язання.

Застосуємо формули (1) і (2) до чисельника і знаменника дробу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4} = \left| \frac{x^3 - 5x^2 - 7 \sim x^3,}{3x^3 - 4 \sim 3x^3, \quad x \rightarrow \infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2 + 4x + 1}{16x^2 + 7x + 3}}.$

Застосуємо формули (1) і (2) до чисельника і знаменника дробу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2 + 4x + 1}{16x^2 + 7x + 3}} = \left| \frac{9x^2 - x + 1 \approx 9x^2}{16x^2 + 7x + 3 \approx 16x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2}{16x^2}} = \frac{3}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m x^m}{q_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_m}{q_m}.$$

4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$

а) Якщо вираз, що знаходиться під знаком границі, має вигляд

$$P_m(x) - Q_n(x)$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 15}{x - 4} - 2x \right).$

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 15}{x - 4} - 2x \right).$$

Тут ми маємо невизначеність типу $\{\infty - \infty\}$. Для того, щоб перейти до невизначеності $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, зведемо до спільного знаменника вирази, що знаходяться під знаком границі. Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 15 - 2x^2 + 8x}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x - 15}{2x - 3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left| \frac{11x - 15 \sim 11x, x \rightarrow \infty}{2x - 3 \sim 2x, x \rightarrow \infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x}{2x} = \frac{11}{2}.$$

4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$

б) З ірраціональними виразами під знаком границі ($x \rightarrow \infty$)

Для розкриття таких невизначеностей потрібно помножити чисельник і знаменник виразу, що знаходиться під знаком границі, на спряжений вираз.

Приклад $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 7}).$

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник виразу, що знаходиться під знаком границі, на спряжений вираз. Будемо вважати, що знаменник одиниця.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 7}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 7})(\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7})}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x + 8) - (x^2 - 5x + 7)}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \left| \begin{array}{l} \text{застосуємо формули (1) і (2)} \\ \text{до чисельника і знаменника} \\ \text{підграничного виразу} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{8}{2} = 4. \end{aligned}$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - 1})$.

Розв'язання. У цьому випадку отримаємо суму двох нескінченностей $\{\infty + \infty\}$, а тому невизначеності не буде.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - 1}) = \infty + \infty = \infty.$$

4.4 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$, під знаком границі знаходиться дробово-раціональний вираз $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Щоб розкрити невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ потрібно у чисельнику та знаменнику дробу, що знаходиться під знаком границі, виділити множник $(x - a)$.

Найчастіше для виділення множника $(x - a)$ чисельник і знаменник дробу ділять кутом на множник $(x - a)$.

За теоремою Безу, якщо при підстановці у многочлен константи a , многочлен перетворюється в нуль, то цей многочлен розкладається на множники, серед яких обов'язково буде присутній множник $(x - a)$.

Якщо чисельник чи знаменник дробово-раціонального виразу є квадратичним тричленом, то його можна розкласти на множники за формулою:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (3)$$

де x_1 та x_2 – корені квадратного тричлена.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{9x^2 - 8x - 1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Оскільки $x = 1$ є коренем многочленів, що стоять в чисельнику і знаменнику, то за теоремою Безу

вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник $(x-1)$.

У чисельнику виконаємо ділення $x^3 + x^2 + x - 3$ на $(x-1)$ у стовпчик:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + x^2 + x - 3 \quad | \quad x-1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 2x^2 + x - 3 \\
 \underline{2x^2 - 2x} \\
 3x - 3 \\
 \underline{3x - 3} \\
 0
 \end{array}
 \quad , \text{ тоді } x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1) \cdot (x^2 + 2x + 3).$$

$9x^2 - 8x - 1$ розкладається на множники за формулою (3):

$$9(x-1)\left(x + \frac{1}{9}\right) = (x-1)(9x+1).$$

$$\text{Маємо } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)(9x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{9x+1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

4.5 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$, якщо під знаком границі містяться нескінченно малі функції (застосування таблиці еквівалентних функцій).

Рекомендоване відео (Обчислення границь, що містять ірраціональність)

<https://youtu.be/4pciOLrIuv0?si=pD7zKyod2oOgoRSn>

Приклад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin 5x \cdot \arcsin x} = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x \sim 2(2x)^2 = 8x^2, \quad x \rightarrow 0 \\ \sin 5x \sim 5x, \quad x \rightarrow 0 \\ \arcsin x \sim x, \quad x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{5x \cdot x} = \frac{8}{2} = 4.$$

Приклад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{\ln(1 - 10x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} 7^x - 1 \sim x \cdot \ln 7, x \rightarrow 0 \\ \ln(1 - 10x) \sim -10x, x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln 7}{-10x} = -\frac{\ln 7}{10}.$$

Приклад. Довести, що при $x \rightarrow 0$ н. м. $e^{3x} - e^{2x}$ і $\sin 2x - \sin x$ будуть еквівалентними.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення цих функцій.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 2x - \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}(e^x - 1)}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \\ e^x - 1 \sim x, \\ \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}, \\ \cos \frac{3x}{2} \rightarrow 0, \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \cdot x}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 1} = 1.$$

Отже, за означенням ці величини еквівалентні.

4.6 Розкриття невизначеностей типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ при $x \rightarrow a$, якщо під знаком границі містяться ірраціональні вирази.

Такого типу границі розкривають шляхом домноження чисельника і знаменника дробу на спряжений вираз, до виразу, що містить ірраціональність.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - \sqrt{2x+12}}{\sqrt{4x+8} - \sqrt{x+14}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику та знаменнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - \sqrt{2x+12}}{\sqrt{4x+8} - \sqrt{x+14}} =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x+10} - \sqrt{2x+12})(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})}{(\sqrt{4x+8} - \sqrt{x+14})(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+10 - 2x - 12)(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})}{(4x+8 - x - 14)(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})}{(3x-6)(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})} = \\ = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14}}{\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12}} = \frac{1}{3} \frac{4+4}{4+4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4.7 Розкриття невизначеностей типу $\{0 \cdot \infty\}$ при $x \rightarrow a$

Щоб розкрити невизначеність типу $\{0 \cdot \infty\}$, її зводять шляхом елементарних перетворень до невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \{0 \cdot \infty\}.$

Розв'язання. Перетворимо невизначеність $\{0 \cdot \infty\}$ у невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1-x)} = \\ = \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1-x) \sim \frac{\pi}{2} (1-x), 1-x \rightarrow 0 \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\frac{\pi}{2} (1-x)} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

4.8 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$ при $x \rightarrow a$, якщо під знаком границі міститься логарифмічна функція

Рекомендоване відео

<https://youtu.be/R6q6qlpxUbK?si=06YYCzIDl37sFHbv>

Для розкриття такого роду невизначеностей їх зводять спочатку до невизначеностей типу $\{0 \cdot \infty\}$ шляхом елементарних перетворень та

властивостей логарифмічних функцій, а потім переходять до невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Часто при обчисленні границь необхідно буде застосовувати властивості логарифмів. Наведемо основні з них:

Властивості логарифмів

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5. $\log_a x^p = p \log_a x \quad (p \in \mathbb{R})$

6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x \quad (p \in \mathbb{R})$

7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (b > 0, b \neq 1)$

8. $a^{\log_a b} = b$

Рекомендоване відео

<https://youtu.be/8QqDBmfq1ac?si=RZ3G1KnJutPfp0wa>

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+11) \cdot [\ln(x+4) - \ln(x-2)] = \{\infty - \infty\}.$

Розв'язання. Використаємо властивості логарифмів

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+11) [\ln(x+4) - \ln(x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+11) \cdot \ln \frac{(x+4)}{(x-2)} \right] = \{\infty \cdot 0\} =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+11) \left[\ln \left(1 + \frac{6}{x-2} \right) \right] = \\
& = \left| \ln \left(1 + \frac{6}{x-2} \right) \sim \frac{6}{x-2}, x \rightarrow \infty \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+11) \cdot \frac{6}{x-2} = 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+11}{x-2} = \\
& = \left| \begin{array}{l} \text{Поділивши чисельник і знаменник підграничного виразу} \\ \text{на } x \text{ отримаємо} \end{array} \right| = 6 \cdot \frac{1}{1} = 6
\end{aligned}$$

4.9 Розкриття невизначеності типу $\{1^\infty\}$ з використанням другої важливої границі

Рекомендоване відео

<https://youtu.be/8QqDBmfq1ac?si=RZ3G1KnJutPfp0wa>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (*)$$

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \left(1 + \alpha(x) \right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \quad (**)$$

тут $\alpha(x)$ довільна н. м. функція

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^x.$

Розв'язання. Спосіб I. Маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (*). Додамо і віднімемо 1 в основі виразу, що міститься під знаком границі.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x}{x+2} - 1 \right) \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+2} \right)^x =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{показник} \\ \text{степеня домножимо} \\ \text{спочатку на} \\ -\frac{x+2}{2}, \text{ а потім на} \\ -\frac{2}{x+2} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{-2}} \right]^{\frac{-2}{x+2} \cdot x}.$$

Вираз, що знаходиться у квадратних дужках, приведено до виду (*),

де $\alpha(x) = \frac{-2}{x+2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, тому $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{-2}} = e$. Отже, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2}{x+2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2x}{x}} = e^{\frac{-2}{1}} = e^{-2}.$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{2x}{x-2}}.$

Розв'язання. Спосіб I. Маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (**).

Зробимо заміну:

$$\begin{array}{l} x-2=t, \text{ при } x \rightarrow 2, t \rightarrow 0, \\ x=t+2 \end{array}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{2x}{x-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} (5 - 2(t+2))^{\frac{2(t+2)}{t+2-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 2t)^{\frac{2t+4}{t}}. \quad \text{Показник} \quad \text{степеня}$$

$$\text{домножимо на } -2 \text{ і на } -\frac{1}{2} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 2t)^{\frac{2t+4}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 2t)^{\frac{-2(2t+4)}{-2t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} (-2(2t+4))} = -8$$

Choció II.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{2x}{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} e^{\ln(5-2x) \frac{2x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{2x}{x-2} \ln(5-2x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \ln(1+(4-2x))}{x-2}} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (4-2x) \rightarrow 0 \quad \text{npu} \quad x \rightarrow 2 \\ \ln(1+(4-2x)) \sim 4-2x \end{array} \right\} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{x-2}} = e^{-8}. \end{aligned}$$

5 КЛАСИФІКАЦІЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ
ПРИ РОЗКРИТТІ ГРАНИЦЬ ТА ШЛЯХИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Таблиця 2

	Вигляд границі	Метод розв'язання	Приклад
Умова $x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow a} P_m(x)$ $P_m(x) =$	Замість змінної у вираз під знаком границі підставляємо значення, до якого прямує змінна x $\lim_{x \rightarrow a} P_m(x) = P(a)$	$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 3x + 1 =$ $= 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 =$ $= 8 - 6 + 1 = 3$
	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ Маємо невизначеність $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$	У чисельнику і знаменнику дробу виділяємо множник $x-a$. Для цього можна застосувати одну із формул: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ де x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Потім чисельник і знаменник дробу скорочуємо на $x-a$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{P_m(x)}{x-a}}{\frac{Q_k(x)}{x-a}} =$ $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_{m-1}(x)}{Q_{k-1}(x)}$ Якщо після ділення знову отримаємо невизначеність $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, то знову виділяємо у чисельнику і знаменнику $x-a$ і здійснюємо ділення на $x-a$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)} =$ $= 12$ Розклали на елементарні множники і скоротили на $x-2$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 5)}{(x - 2)(x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{x - 6} = \frac{3}{4}$

<i>Умова $x \rightarrow a$</i>	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ Відношення нескінченно малих функцій (н. м. ф)	Застосовуємо таблицю еквівалентностей для нескінченно малих функцій $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln b$ $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ $\log_b(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \log_b e$ $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ $(1 + \alpha(x))^b - 1 \sim b \cdot \alpha(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{5x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ $= \{8^x \approx x \ln 8\} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 8}{5x} = \frac{\ln 8}{5}$
<i>Умова $x \rightarrow a$</i>	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ Відношення нескінченно малих функцій (н. м. ф) Вираз під знаком границі містить різницю (суму) тригонометричних функцій	Застосовуємо одну із формул $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x - \sin 4x}{\sin 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos \frac{10x+4x}{2} \sin \frac{10x-4x}{2})}{\sin 2x} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 7x \sin 3x}{\sin 2x} =$ $= \left\{ \begin{array}{l} \text{застосуємо таблицю} \\ \text{еквівалентних функцій} \end{array} \right\} =$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 7x \cdot 3x}{2x} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 2$

Умова $x \rightarrow \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ Границя відношення многочленів $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$	Чисельник і знаменник дробу ділимо на змінну в найбільшому показнику степеня $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{P_k(x)}{x^k}}{\frac{Q_m(x)}{x^k}} \quad \text{якщо} \quad k > m$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{P_k(x)}{x^m}}{\frac{Q_m(x)}{x^m}} \quad \text{якщо} \quad m > k$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 4}{7x^3 + x - 2} =$ $= \left\{ \begin{array}{l} \text{чисельник } i \\ \text{знаменник} \\ \text{дробу ділимо} \\ \text{на } x^3 \end{array} \right\} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}}{7 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} =$ $= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (7 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \frac{2}{7}$
Умова $x \rightarrow \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (P_p(x) - Q_n(x))$ маємо невизначеність $\infty - \infty$ типу	Зводимо дробу до спільного знаменника. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ При чому може утворитися невизначеність типу $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right) =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{21x^2 - 2x}{3x} - 7x \right) =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21x^2 - 2x - 21x^2}{3x} =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{2x}{3x} \right) = -\frac{2}{3}$
Умова $x \rightarrow \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{P_k(x)} - \sqrt{Q_k(x)})$ Маємо невизначеність $\infty - \infty$ типу	Домножуємо і ділимо на спряжений вираз $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{P_k(x)} - \sqrt{Q_k(x)})(\sqrt{P_k(x)} + \sqrt{Q_k(x)})}{\sqrt{P_k(x)} + \sqrt{Q_k(x)}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+4}) =$ $= \{\infty - \infty\} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+4})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+4})}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+4})} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2-x-4}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+4})} = \left\{ \frac{-6}{\infty} \right\} = 0$

Умова $x \rightarrow \infty$ Невизначеність типу $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$	Застосовуємо правило другої чудової границі $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2-3}{3x+2} \right)^{x-3} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{3x+2} \right)^{x-3} =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{3} \cdot (x-2) \cdot \left(-\frac{3}{3x+2} \right)} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3x-6}{3x+2} \right)} = e^{-1}$
---	--	--

6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити границі функцій

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2}}{6x + 8}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + 5x^4 + 4}{x^6}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 6x^2} - 5}{5x^2 - x - 1}$$
- $$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 8x^2 + 7x}{x^3 - x}, \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2};$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 8x^2} - 1}{2x^2 + x^3}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{5}}{x - 3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{x}$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{3 \sin^2 x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 4x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{2^x - 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 5x)}{3^x - 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 9x - 1}{5 \sin^2 x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{2x} - 1};$$
- $$\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{3x}{x-1}}; \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 4x)^{\frac{2x}{x-2}}, \lim_{x \rightarrow 1} (6x - 5)^{\frac{2x}{x-1}}$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-5}), \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6}), \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-3});$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(6x+5) - \ln x]; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+1}{6x} \right)^{2x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+1}{8x} \right)^{3x}.$$

2. Знайти точки розриву функцій

$$1. \quad y = \frac{-4}{(x-9)^3}; \quad y = 5^{\frac{2}{x+5}}; \quad y = \frac{x^3 - 5x - 13}{x+3}; \quad y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ 0,5x, & 0 < x \leq 2, \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$$

$$2. \quad y = \frac{10}{(x+3)^3}; \quad y = 7^{\frac{2}{9-x}}; \quad y = \frac{\sin 3x}{-x}; \quad y = \begin{cases} \cos x, x \leq 0, \\ 2x+1, 0 < x \leq 3, \\ x-1, x > 3. \end{cases}$$

$$3. \quad y = \frac{-7}{(x+4)^3}; \quad y = e^{\frac{2}{9-x}}; \quad y = \frac{x^4 - 3x^3 + x}{x}; \quad y = \begin{cases} 5x, x \leq 0, \\ \sin x, 0 < x \leq \pi, \\ 3, x > \pi \end{cases}$$

$$4. \quad y = \frac{3}{(x+9)^3}; \quad y = 3^{\frac{2}{x+8}}; \quad y = \frac{x^4 - 5x^3}{x}; \quad y = \begin{cases} 1, x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ -\operatorname{tg} x, -\frac{\pi}{4} < x \leq \pi, \\ 2x+1, x > 0 \end{cases}$$

$$5. \quad y = \frac{-4}{(x-8)^3}; \quad y = 7^{\frac{2}{3-x}}; \quad y = \frac{x^3 + 7x + 6}{x+6}; \quad y = \begin{cases} -2x, x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$6. \quad y = \frac{10}{(x-6)^3}; \quad y = 8^{\frac{2}{x+2}}; \quad y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{2}{4-x}; \quad y = \begin{cases} -x-1, x \leq 2, \\ \sqrt{x-2}, 2 < x \leq 3, \\ \frac{1}{3}x, x > 3. \end{cases}$$

$$7. \quad y = \frac{5}{(x+10)^3}; \quad y = 3^{\frac{2}{x-5}}; \quad y = \frac{x^4 + x^3}{x}; \quad y = \begin{cases} 0, x < 1, \\ \sqrt{x-1}, 1 \leq x \leq 5, \\ 0, 2x-2, x > 5. \end{cases}$$

$$8. \quad y = \frac{-2}{(x-8)^3}; \quad y = 6^{\frac{2}{7-x}}; \quad y = \frac{x^3 + 4x^4}{x}; \quad y = \begin{cases} 1, x < -\pi, \\ -\cos x, -\pi \leq x \leq 0, \\ x+2, x > 0. \end{cases}$$

$$9. \quad y = \frac{8}{(x-4)^3}; \quad y = e^{\frac{2}{x+6}}; \quad y = \frac{\sin 6x}{3x}; \quad y = \begin{cases} \sin x, x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ -1, -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ x+1, x > 0. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ, 1992.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : збірник задач. Київ : А.С.К., 2003.
3. Дюженкова Л. І., Лященко М. Я. Математичний аналіз у задачах і прикладах : навч. посіб. У 2 ч. Київ : Вища школа, 2003. Ч. 1.
4. Коломієць А. А., Клочко В. І., Краєвський В. О. Практикум з вищої математики: обчислення границь. Вінниця : ВНТУ, 2020. 59 с.
5. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. Київ : Либідь, 1996.

Електронне навчальне видання

Альона Анатоліївна Коломієць

**Методичні вказівки до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика».**

Частина 3. Теорія границь

Рукопис оформила: *А. Коломієць*

Редактор: *Н. Кравчук*

Оригінал-макет виготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до видання 29.07.2026.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2026-101.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

press.vntu.edu.ua;

Email: rvv.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.