Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика»

Частина 4
Диференціальне числення функції однієї змінної

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика»

Частина 4
Диференціальне числення функції однієї змінної

Вінниця
ВНТУ
2025

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 25.09.2025 р.)

Рецензенти:
В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор
М. В. Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Ч. 4. Диференціальне числення функції однієї змінної [Електронний ресурс] / уклад. : А. А. Коломієць, Н. Б. Дубова, Г. Г. Кашканова. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 76 с.)

В методичних вказівках викладено зміст основних тем з розділу «Диференціальне числення функції однієї змінної»: «Границі функції». «Правила обчислення границь функцій», «Похідна та її застосування». Наведено приклади розв’язання типових завдань з детальним поясненням. Методичні вказівки рекомендовані для студентів усіх технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

1. Теорія границь

1.1 Границя функції в точці та в нескінченності

Означення 1.1

Число b називається ***границею функції*** $f(x)$ в точці $x = a$ (або при $x \to a$), якщо для будь якого як завгодно малого числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність, $0 < |x - a| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Скорочено означення границі при $x \to a$ можна записати так:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b} \tag{1.1}$$

Означення 1.2

Число b називається ***границею функції*** $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число N що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Скорочено означення границі при $x \to \infty$ можна записати так:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = b} \tag{1.2}$$

Означення 1.3.

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають ***еквівалентними***, якщо $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Їх позначають так: $\alpha(x) \approx \beta(x)$.

Означення 1.4.

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються ***нескінченно малими*** одного порядку малості, якщо границя їх відношення $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$.

Теореми про границі суми, добутку і частки функцій.

З метою розв'язання деяких нижче наведених прикладів подамо властивості границь функцій.

Границі функцій мають такі властивості:

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, де С – константа,

2. $\lim\limits_{x \to a} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$, де С – константа.

3. Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

4.Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

5. Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, причому $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

6. Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$, то

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim\limits_{x \to a} (\varphi)}.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{K}{g(x)} = \frac{K}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \infty, \text{ якщо } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Границя частки двох функцій дорівнює ∞, якщо границя знаменника дорівнює нулю.

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{K}{g(x)} = \dfrac{K}{\lim\limits_{x \to \infty} g(x)} = 0,$ якщо $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty.$

Границя частки двох функцій дорівнює 0, якщо границя знаменника дорівнює ∞

1.2. Основні чудові границі

Перша чудова границя.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $f(x)\neq 0$. Значення цієї функції при $x=0$ не існує, але $f(x)\to 1$при $x\to 0$. Тому справедлива рівність:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,} \tag{1.3}$$

Таблиця еквівалентних н. м. функцій $\alpha(x)\to 0$.

Таблиця 1.

$\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)$	$a^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)\ln a$,
$tg\alpha(x)\approx\alpha(x)$,	$\ln(1+\alpha(x))\approx\alpha(x)$,
$\arcsin\alpha(x)\approx\alpha(x)$,	$\sqrt{1+\alpha(x)}\approx 1+\frac{\alpha(x)}{2}$
$\mathrm{arc}\,tg\alpha(x)\approx\alpha(x)$,	$(1+\alpha(x))^{p}\approx 1+p\alpha(x)$,
$e^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)$,	$1-\cos\alpha(x)\approx\frac{\alpha^2(x)}{2}$.

Друга чудова границя

Функція $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, при $x\to\infty$ має границею число e, тобто

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.} \tag{1.4}$$

Якщо запишемо $t = \frac{1}{x}$, $x \to \infty$, $t \to 0$, будемо мати іншу форму запису цієї формули другої важливої границі:

$$\boxed{\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.}$$

(1.5)

1.3 Правила обчислення границь

Безпосереднє обчислення границь шляхом підстановки граничного значення та використання основних теорем про границю.

Приклад 1.1. Обчислити границю: $\lim_{x \to 3} \frac{7x-2}{x+5}$

Розв'язування.

$$\lim_{x \to 3} \frac{7x-2}{x+5} = \lim_{x \to 3} \frac{7 \cdot 3 - 2}{3+5} = \frac{19}{8} = 2\frac{3}{8}.$$

Якщо при підстановці граничного значення одержуємо різницю або частку нескінченно великих, то кажуть, що ми маємо ***невизначеності*** типу

$$[\infty - \infty], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Відношення нескінченно малих величин називають ***невизначеністю*** типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, а добуток нескінченно малої на нескінченно великої називається ***невизначеністю*** типу $[0 \cdot \infty]$.

Запам`ятати: при обчисленні границь

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} = 0}$$

(1.6)

Для обчислення ***невизначеностей*** існують правила, які можна звести у таблицю2.

1.3.1. Розкриття невизначеностей типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Правило 1.

Із таблиці 2. під знаком границі міститься дробово-раціональна функція в чисельнику і знаменнику якої – многочлени. ***Необхідно кожен доданок чисельника і знаменника поділити на змінну x в найбільшому***

Таблиця 2.

Вид виразу	Вид функції	Правило
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	якщо в чисельнику і знаменнику містяться многочлени.	ділити чисельник і знаменник на x в найбільшій степені
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	якщо в чисельнику і знаменнику містяться многочлени.	Чисельник і знаменник розкласти на множники один із них (x-a)
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	якщо в чисельнику і знаменнику містяться вирази, які можна замінити еквіва-лентними	Таблиця 2 еквівалентностей.
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	якщо в чисельнику і знаменнику містяться ірраціональні вирази	позбавитись від ірраціональності. $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$ $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$ $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[P_n-Q_m\right]=\left[\infty-\infty\right]$		звести до виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{P(x)}\right)^{Q(x)}=\left[1^{\infty}\right]$	якщо вираз має вигляд другої чудової границі	за формулою $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{P(x)}\right)^{P(x)}=e$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+P(x)\right)^{\frac{1}{P(x)}}=e$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3-7x^2+2x-3}{x^4}}{\dfrac{5x^4-x+7}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{5-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{7}{x^4}}=$$

$$=\left[\textit{якщо}\quad \frac{1}{x}\to 0,\frac{1}{x^2}\to 0,\frac{1}{x^3}\to 0,\quad \frac{1}{x^4}\to 0\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3-7x^2+2x-3}{x^4}}{\dfrac{5x^4-x+7}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{5-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{7}{x^4}}=$$

$$=\left[\textit{якщо}\quad \frac{1}{x}\to 0,\frac{1}{x^2}\to 0,\frac{1}{x^3}\to 0,\quad \frac{1}{x^4}\to 0\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3-7x^2+2x-3}{x^4}}{\dfrac{5x^4-x+7}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{5-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{7}{x^4}}=$$

$$=\left[\textit{якщо}\quad \frac{1}{x}\to 0,\frac{1}{x^2}\to 0,\frac{1}{x^3}\to 0,\quad \frac{1}{x^4}\to 0\right]=0$$

Приклад 1.5. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^3-8x^2+6x-7}}{3x^2-4x+2}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^3-8x^2+6x-7}}{3x^2-4x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left\{\textit{правило } 1:\textit{ділимо на } x^2\right\}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^3-8x^2+6x-7}}{3x^2-4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{9x^3-8x^2+6x-7}}{x^2}}{\dfrac{3x^2-4x+2}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{9x^3-8x^2+6x-7}{x^4}}}{\dfrac{3x^2-4x+2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{9}{x}-\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}}}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=$$

$$= \left[\text{якщо} \quad \frac{1}{x} \to 0, \frac{1}{x^2} \to 0, \frac{1}{x^3} \to 0, \quad \frac{1}{x^4} \to 0 \right] = 0$$

Із таблиці 3. кожен студент вибирає свої коефіцієнти по номеру варіанта в журналі викладача.

Таблиця 3.

№ по списку ППП	***a***	***b***	***c***	***d***	
1	***5***	***4***	***1***	***3***	
2	7	2	8	3	
3	6	3	4	5	
4	3	4	9	1	
5	4	1	2	6	
6	3	5	3	2	
7	3	6	5	4	
8	7	2	4	5	
9	6	3	4	2	
10	1	8	2	7	
11	3	2	4	9	
12	6	5	3	1	
13	5	3	2	7	
14	4	9	1	2	
15	***4***	1	3	5	
16	1	2	6	4	
17	6	5	4	3	
18	2	4	9	1	
19	3	1	6	5	
20	5	8	1	9	
21	7	5	3	2	
22	5	4	3	7	
23	2	6	3	4	
24	8	2	7	1	
25	7	1	2	6	
26	9	1	2	5	
27	4	9	1	9	
28	3	2	7	6	
29	2	7	6	3	
30	5	7	8	4	

Завдання для самостійної роботи № 1.

Обчислити границі виду: $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{cx^4-bx^2+d}{dx^4+b}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-dx^2+a}{cx^4+b}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\sqrt[3]{x^6-dx}+cx}{dx^2-ax}$ 4. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{5}{x-b}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2-cx+d}{dx^3+bx-c}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{ax^3+bx^2}+cx+d}{\sqrt{dx^2+bx}+ax}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-dx^2+a}{cx^2+b}$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-dx+a}{cx^4-bx^2+cx}$

1.3.2. Розкриття невизначеностей типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$,

Правило 2.

Дивитись правило 2 із таблиці 2. За теоремою Безу, при підстановці у многочлен константи *a*, многочлен перетворюється в нуль, то цей многочлен розкладається на множники, серед яких обов'язково буде присутній множник $(x-a)$.

Приклад 1.6. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\text{чисельник і знаменник розкласти}\right\}=$$

$$\textit{За формулою розкладу маємо}: ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$$

$$\textit{розкладемо чисельник}: x^2-5x+6=\left(x-3\right)\left(x-2\right)$$

$$\textit{розкладемо знаменник}: x^2-9=\left(x+3\right)\left(x-3\right)$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{\left(x-3\right)\left(x-2\right)}{\left(x+3\right)\left(x-3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\left(x-2\right)}{\left(x+3\right)}=\frac{1}{6}$$

Приклад 1.7. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-9x+8}{x^3-1}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-9x+8}{x^3-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\text{чисельник і знаменник розкласти}\right\}$$

За формулою розкладу маємо: $x^3-c^3=\left(x-c\right)\left(x^2+cx+c^2\right)$

розкладемо чисельник: $x^2-9x+8=\left(x-1\right)\left(x-8\right)$

розкладемо знаменник: $x^3-1=\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-9x+8}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x-1\right)\left(x-8\right)}{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x-8\right)}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{-7}{3}$$

Завдання для самостійної роботи №2.

Обчислення границь типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ у випадку ділення многочленів.

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$

2. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{x^3-c^3}{\left(x-c\right)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^3-3\cdot x^2\cdot b+3x\cdot b^2-b^3}{\left(x-b\right)^2}$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^2-x(a+c)+c\cdot a}$

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-xa}{x^2-x(a+c)+c\cdot a}$

6. $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{x^3+x^2\left(a-c\right)-x\cdot a\cdot c}{x^2+ax}$

7. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{x^4-c^4}{\left(x^2-c^2\right)^2}$

8. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\left(x-c\right)\left(x^2-2\cdot c\cdot x+c^2\right)}{\left(x^3-c^3\right)^2}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{c}{2}}\dfrac{4\cdot x^2-c^2}{\ln\left(\dfrac{2x+2-c}{2}\right)}$

10. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sqrt{x^2+b^2}-b}{e^{(x-b)}-1}$

Правило 3.

Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, якщо під знаком границі в чисельнику і знаменник містяться вирази, які можна замінити на еквівалентні вирази із таблиці 2.

Приклад 1.8.Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\text{\textit{за еквівалентністю}}\to \sin 2x\approx 2x\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Приклад 1.9. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin 5x}{x^2-3x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin 5x}{x^2-3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix}\text{\textit{чисельник}} & arc\sin 5x\approx 5x\\ \text{\textit{знаменник}} & x(x-3)\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin 5x}{x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(x-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{(x-3)}=\frac{5}{-3}$$

Приклад 1.10. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 7x}{x^2+5x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg 7x}{x^2+5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix}\text{\textit{чисельник}} & arctg 7x\approx 7x\\ \text{\textit{знаменник}} & x(x+5)\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg 7x}{x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{(x+5)}=\frac{7}{5}$$

Приклад 1.11. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x^3+5x^2-2x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x^3+5x^2-2x}\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix} \textit{чисельник} & \ln(1+2x)\approx 2x \\ \textit{знаменник} & x\left(x^2+5x-2\right)\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x^3+5x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(x^2+5x-2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(x^2+5x-2\right)}=-1$$

Приклад 1.12 .Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 2x-\sin x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 2x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\left\{\begin{matrix} \textit{чисельник} & \left(e^{3x}-1\right)-\left(e^{2x}-1\right)\approx(3x-2x) \\ \textit{знаменник} & 2\sin x\cdot\cos x-\sin x=\sin x\left(2\cos x-1\right)\to\sin x\approx x\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 2x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x\left(2\cos x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(2\cos x-1\right)}=1$$

Приклад 1.13. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{1-\cos 5x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-1}{1-\cos 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix} \textit{чисельник} & e^{3x^2}-1\approx 3x^2 \\ \textit{знаменник} & 1-\cos 5x\approx\dfrac{(5x)^2}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-1}{1-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{(5x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{25x^2}=\frac{6}{25}$$

Приклад 1.14. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x+tg4x}{\sin 6x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x+tg4x}{\sin 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix} tg5x+tg4x=\dfrac{\sin 9x}{\cos 4x\cdot\cos 5x}\approx 9x \\ \text{знаменник} \quad \sin 6x\approx 6x\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x+tg4x}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{6x}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Приклад 1.15. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\ln(1-6x)}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{\ln(1-6x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix} \text{чисельник} \;\; 5^x-1\approx \ln 5x \\ \text{знаменник} \; \ln(1-6x)\approx 6x\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{\ln(1-6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 5}{-6x}=\frac{\ln 5}{-6}$$

Приклад 1.15. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{tgx}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{tgx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\text{заміна} \;\; x-\pi=y\to x=\pi+y, y\to 0\right\}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{tgx}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{tg(y+\pi)}=\left\{\begin{matrix} \sin(3y+3\pi)=-\sin 3y \\ tg(y+\pi)=tgy, y\to 0\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{tgx}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 3y}{tgy}=\left\{\begin{matrix} \text{чисельник} \quad \sin 3y\approx 3y \\ \text{знаменник} \quad tgy\approx y\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 3y}{tgy}=\lim_{y\to 0}\frac{-3y}{y}=-3$$

Приклад 1.16.Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-tg\frac{x}{2}}{\cos x}$

Розв'язування.

Маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб застосувати еквівалентні вирази із таблиці 2, потрібно, щоб $x\to 0$.Зробимо заміну:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-tg\frac{x}{2}}{\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\text{заміна }\ x-\frac{\pi}{2}=y\to x=\frac{\pi}{2}+y,y\to 0\right\}$$

А потім застосуємо формули зведення:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

та тригонометричні перетворення:

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin\left(\alpha\pm\beta\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-tg\frac{\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2}}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}=\left\{\begin{array}{c} tg\frac{\pi}{4}-tg\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{-y}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)} \\ \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin y \end{array}\right\}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{-y}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\sin y\right)}=\left\{\begin{array}{c} \sin\left(\frac{-y}{2}\right)\approx\left(\frac{-y}{2}\right) \\ \sin y\approx y \end{array}\right\}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\left(\frac{-y}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-y\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cdot}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

Приклад 1.16. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{\sin 3(x-1)}$.

Розв'язування.

Маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Оскільки при $x=1$ многочлен в чисельнику перетворюється в нуль ($x=1$ - корінь чисельника), то за теоремою Безу він розкладається на множники, один з яких $(x-1)$. За теоремою Вієта другий корінь $x=-5$. Тому $x^2+4x-5=(x-1)(x-(-5))$. Маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{\sin 3(x-1)}=\{\sin 3(x-1)\approx 3(x-1)\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{3(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{3}=2$$

Завдання для самостійної роботи № 3. Обчислення границь виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ у випадку застосування еквівалентих виразів.

Обчислити границі виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$за формулами таблиці 2:

$1.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{dx^2+cx}$ $2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgbx}{x^3-cx}$ $3.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2bx}{dx^2+cx}$

$4.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 bx}{\ln^2(1+ax)}$ $5.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin dx}{bx^2+cx}$ $6.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 dx}{bx^2-cx^3}$

$7.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos dx}{bx^2+cx^3}$ $8.\lim\limits_{x\to \frac{a}{b}}\dfrac{\sin(\mathrm{b}x-a)}{bx^2-ax}$ $9.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{cx}}{bx^3-ax^2+dx}$ $10.\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{tgcx}$

$11.\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2-\sqrt{x^2-2ax+a^2}}{e^x-e^a}$ $12.\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos cx)^{\frac{1}{\ln(1+\mathrm{bx}^2)}}$

Правило 4.

Розкриття невизначеностей типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, якщо під знаком границів чисельнику і знаменник містяться ***ірраціональні*** вирази. Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику чи знаменнику. З цією метою домножимо чисельник і знаменник одночасно на спряжений вираз

$$\left[\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}\right] \quad \textit{спряжений до} \quad \left[\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}\right]$$

Приклад 1.17.Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{3+x}-3}{x^2-7x+6}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{3+x}-3}{x^2-7x+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix}\textit{чисельник правило } 4\\ \textit{знаменник правило } 2\end{matrix}\right\}$$

$$\textit{домножимо чисельник і знаменник на } \left(\sqrt{x+3}+3\right)$$

$$\textit{розкладемо знаменник}:\ x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{3+x}-3\right)\left(\sqrt{3+x}+3\right)}{\left(\sqrt{3+x}+3\right)(x-1)(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{3+x-9}{\left(\sqrt{3+x}+3\right)(x-1)(x-6)}=\frac{1}{30}$$

Приклад1.8.Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}}{x^2-7x}$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}}{x^2-7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\{\begin{matrix}\textit{чисельник правило } 3\\ \textit{знаменник правило } 2\end{matrix}\right\}$$

$$\textit{домножимо чисельник і знаменник на } \left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)$$

$$\textit{розкладемо знаменник}:\ x^2-7x=x(x-7)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}\right)}{(x-7)x}\cdot\frac{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2-x-x-2)}{(x-7)x\cdot\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}\right)}=\frac{-2}{-7\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{7\sqrt{2}}$$

Приклад 1.19.Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{3x^3+6x^2-5x-10}$

Розв'язування.

Маємо невизначеність виду. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{3x^3+6x^2-5x-10}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{5-2x}+3$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{5-2x}-3\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{\left(\sqrt{5-2x}+3\right)\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{5-2x}\right)^2-9}{\left(\sqrt{5-2x}+3\right)\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{\left(\sqrt{5-2x}+3\right)\left(3x^3+6x^2-5x-10\right)}=$$

Оскільки при $x=-2$ многочлен $3x^3+6x^2-5x-10$ в знаменнику перетворюється в нуль, то за теоремою Безу знаменник ділиться на різницю $(x-(-2))$ без остачі. Виконаємо ділення $3x^3+6x^2-5x-10$ на $(x+2)$ в стовпчик:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+6x^2-5x-10 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+6x^2} & 3x^2-5 \\ -5x-10 & \\ \underline{-5x-10} & \\ 0 & \end{array},$$

Тоді можна записати знаменник так: $3x^3+6x^2-5x-10=(x+2)\cdot(3x^2-5)$.

$$\lim_{x\to-2}\frac{-2(x+2)}{(x+2)(3x^2-5)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{-2}{(3x^2-5)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=-\frac{1}{21}.$$

Завдання для самостійної роботи №4. Обчислити границі виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ у випадку ірраціональних виразів.

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}-(x-a)^2}{x^2-a^2}$

2. $\lim\limits_{x\to -c}\dfrac{\sqrt{c^2-x^2}-(x+c)}{x^2-a^2}$

3. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sqrt{-b^2+x^2}-(x-b)}{x^3-b^3}$

4. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}-c}{x^2-b^2}$

5. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sqrt{(x-b)^2+a^2}-a}{e^x-e^b}$

6. $\lim\limits_{x\to -b}\dfrac{\sqrt{(x+b)^2+c^2}-c}{\arcsin(b+x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -b}\dfrac{\sqrt{(x+b)^2+1}-1}{\sin^2(x+b)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{cx^2+b^2}-b}{arc\sin^2(x\cdot b)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{c^2-x^2}-c}{tg^2(x\cdot b)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{c^2-x^2}-c}{arctg(x\cdot a)}$

1.3.3. Розкриття невизначеностей типу $[\infty-\infty]$

Правило 5.

Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику чи знаменнику. З цією метою домножимо чисельник і знаменник одночасно на спряжений вираз. $\left[\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}\right]$ *спряжений до* $\left[\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}\right]$

Приклад 1.20. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{2x-3}-\sqrt{4x-7}\right]$

Розв'язування.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{2x-3}-\sqrt{4x-7}\right]=\left\{\begin{matrix}\text{домножимо чисельник і}\\ \text{знаменник на } \sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-7}\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{4x-7}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-7}\right)}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-7}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3-4x+7)}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-7}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-7}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$\{$*ділимо чисельник і знаменник на x*$\}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-7}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)}=\infty$$

Приклад 1.21. Обчислити границю: $:\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-3x+5}-2x\right]$

Розв'язування.

Домножимо чисельник і знаменник одночасно на спряжений вираз, як у попередньому прикладі.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-3x+5}-2x\right]=[\infty-\infty]=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{домножимо чисельник і знаменник}\\ \text{на вираз } \sqrt{4x^2-3x+5}+2x\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+2x\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+5-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+2x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+5}{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+2x\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+5}{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+2x\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\{\text{ділимо чисельник і знаменник на } x\}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{5}{x}}{\left(\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\frac{2x}{x}\right)}=\frac{-3}{4}$$

Приклад 1.22. Обчислити границю: $:\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-3x+5}-\sqrt{x^2+7}\right]$

Розв'язування.

Домножимо чисельник і знаменник одночасно на спряжений вираз, як у попередньому прикладі, але відповідь отримаємо іншу.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-3x+5}-\sqrt{x^2+7}\right]=[\infty-\infty]=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{домножимо чисельник і знаменник}\\ \text{на вираз } \sqrt{4x^2-3x+5}+2x\end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}-\sqrt{x^2+7}\right)\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+\sqrt{x^2+7}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+\sqrt{x^2+7}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x-2}{\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+\sqrt{x^2+7}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\{\text{ділимо чисельник і знаменник на } x^2\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\left(\sqrt{\frac{4x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{5}{x^4}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^4}+\frac{7}{x^4}}\right)}=\infty$$

Приклад 1.23.Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 6}\left(\frac{x^2-5x}{x}-x\right)$

Розв'язування.

Тут ми маємо невизначеність типу $\left[\infty-\infty\right]$. Для того, щоб перейти до невизначенності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, зведемо до спільного знаменника вирази, що знаходяться під знаком границі. Отримаємо:

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2-5x}{x}-x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\left\{\textit{звести до спільного знаменника}\right\}$$

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2-5x}{x}-x\right)=\lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2-5x-x^2}{x}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

За правилом 1

$$\left\{\textit{ділимо чисельник і знаменник на } x \textit{ за правилом } 1\right\}$$

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{5x}{x}\right)=5$$

Завдання для самостійної роботи №5.

Обчислення границь типу: $\left[\infty-\infty\right]$

1. $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{xb}{x^2-c^2}-\frac{a}{x-c}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{x^2b}{x^3-a^3}-\frac{a}{x^2-a^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-bx+c}-\sqrt{x^2+ax-d}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-bx+c}-(ax-d)\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{bx+c}-(ax-d)\right)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\ln\sqrt{x^2-bx+c}-\ln\sqrt{x^2-bx-d}\right)$

$$7.\lim_{x\to\infty}(ax-b)\left(\ln(bx+c)-\ln(bx-d)\right)$$

$$8.\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx-c}{ax+d}-\frac{x^2-cx+b}{x+d}\right)$$

$$9.\lim_{x\to\infty}2x\left(\ln(ax+c)-\ln(ax-d)\right)$$

$$10.\lim_{x\to\infty}(ax-b)\left(\ln(bx+c)-\ln(ax-d)\right)$$

1.3.4. Розкриття невизначеності типу $[1]^{\infty}$.

Правило 6.

Зводимо вирази до виду другої чудової границі за формулами:

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\kappa x}\right]^{\kappa x}=e. \qquad \lim_{x\to 0}\left[1+\kappa x\right]^{\frac{1}{\kappa x}}=e$$

Приклад 1.24. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x}$

Розв'язування.

Для того, щоб застосувати формулу невизначеністі $\left[1^{\infty}\right]$ виконаємо тотожні перетворення.

1 спосіб – додати і відняти 1 одночасно і звести до виду (6.1) :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x}{x+2}-1\right)\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+2}\cdot x}$$

Вираз, що знаходиться в квадратних дужках, приведено до виду (6.1), де $\dfrac{-2}{x+2}\to 0$ при $x\to\infty$, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}}=e$.

Отже, матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2}{x+2}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-2x}{x}}=e^{\frac{-2}{1}}=e^{-2}.$$

2 спосіб – виділити в чисельнику вираз, який дорівнює знаменнику:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-2}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+2}-\frac{2}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^x$$

Далі перетворення, як і в 1 способі.

Приклад 1.25. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{2x}{x-2}}$

Розв'язування.

Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (6.2) :

$$\lim_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{2x}{x-2}}=\left\{\text{якщо}\, x\to 2,\ \text{то}\,(x-2)=y,\ y\to 0\right\}.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(5-2\cdot(2+y)\right)^{\frac{2(2+y)}{(2+y)-2}}=\lim_{y\to 0}(1-2y)^{\frac{(4+2y)}{y}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[(1-2y)^{\frac{1}{-2y}}\right]^{-2(4+2y)}=e^{-8}$$

Розкриття невизначеностей типу $[\infty-\infty]$ при $x\to a$, якщо під знаком границі міститься логарифмічна функція. Для розкриття такого роду невизначеностей їх зводять спочатку до невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ шляхом елементарних перетворень та властивостей логарифмічних функцій,

1. $\log_a 1=0$
2. $\log_a a=1$
3. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
5. $\log_a x^p=p\log_a x\ \ (p\in R)$
6. $\log_{a^p} x=\frac{1}{p}\log_a x\ \ (p\in R)$
7. $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}(b>0, b\neq 1)$
8. $a^{\log_a^b}=b$

а потім переходять до невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад1.26. Обчислити.границю:

$$\lim_{x\to\infty}(5-2x)\left[\ln(x+4)-\ln(x-2)\right]=(\infty)[\infty-\infty]$$

Розв'язування.

Використаємо властивості логарифмів 4,5:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left[\frac{(x+4)}{(x-2)}\right]^{(5-2x)}=\left[1^{-\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\frac{x-2+6}{x-2}\right]^{(5-2x)}=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{6}{x-2}\right)^{(5-2x)}\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left[\left(1+\frac{6}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{6}}\right]^{\frac{6}{x-2}\cdot\frac{5-2x}{1}}\right\}=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{[e]^{\frac{6}{x-2}\cdot\frac{5-2x}{1}}\right\}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x+30}{x-2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left[e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x+30}{x-2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left[e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12\left(x-\frac{30}{12}\right)}{x-2}}\right]=\ln e^{-12}=-12$$

В тих випадках, коли потрібно розкрити невизначеність типу $[0\cdot\infty]$, її зводять шляхом елементарних перетворень до невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Завдання для самостійної роботи № 6. Обчислення границь виду: $\left[1^{\infty}\right]$

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+dx)^{\frac{1}{cx}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{bx-a}\right)^{cx}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{cx+d}{cx-a}\right)^{\frac{dx^2+ax}{cx}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{cx+d}{cx-a}\right)^{\frac{d}{cx}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-ax^3)^{\frac{1}{cx^3}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos cx)^{\frac{1}{\ln(1+\mathrm{bx}^2)}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax-d}\right)^{cx}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+bx)^{\arcsin dx}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2-b}{ax^2-d}\right)^{cx^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-cx)^{\mathrm{arc}tg(-dx)}$

Завдання для типових розрахунків.

Варіант 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+5x^2}}{6x+8};\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x^3-4x};\lim_{x\to0}\frac{\cos 7x-1}{3\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2};\lim_{x\to1}(3-2x)^{\frac{3x}{x-1}};\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{tg4x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+8x)}{2^x-1};\lim_{x\to\infty}x[\ln(6x+5)-\ln x];\lim_{x\to\infty}(\frac{6x+1}{6x})^{2x};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-5}).$$

Варіант 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^6+5x^4+4}{x^6};\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6});\lim_{x\to0}\frac{\cos 9x-1}{5\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3};\lim_{x\to2}(5-4x)^{\frac{2x}{x-2}};\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-5x)}{3^x-1};\lim_{x\to\infty}[\ln(7x+6)-\ln x];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{arctg3x}{e^{2x}-1};\lim_{x\to\infty}(\frac{8x+1}{8x})^{3x}.$$

Варіант 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3};\lim_{x\to1}\frac{x^3+8x^2+7x}{x^3-x};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-3});\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+8x^2}-1}{2x^2+x^3};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 2x};\lim_{x\to2}(5-2x)^{\frac{3x}{x-2}};\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 4x}-1}{tg3x};\lim_{x\to\infty}[\ln(5x+7)-\ln x];\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-7x)}{5^x-1};$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{5x-3}{5x})^{4x}.$$

Варіант 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+6x^2-5}}{5x^2-x-1};\lim_{x\to2}\frac{x^2+6x+8}{x^3-8};\lim_{x\to\infty}x[\ln x-\ln(2x+9)];\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{\arcsin 2x};\lim_{x\to1}(6x-5)^{\frac{2x}{x-1}};\lim_{x\to0}\frac{arctg3x}{e^{5x}-1};\lim_{x\to0}\frac{6^3-1}{\ln(1+3x)};\lim_{x\to\infty}(\frac{2x-5}{2x+1})^{-x};$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-7}).$$

Варіант 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2};\ \lim_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x-4};\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2-3});\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2};\ \lim_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{6x}{x-2}};\ \lim_{x\to 0}\frac{arctg^2 x}{e^{2x^2}-1};\ \lim_{x\to\infty}x[\ln(x+8)-\ln(x-1)];$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\ln(1+6x)};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-6}{3x+1}\right)^{1-x};$$

Варіант 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^3+1}{2x^5-3x^2+2};\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15};\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\ln(1-2x)};\ \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{5x}-x}{x-5};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{tg3x};\ \lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{5x}{x-5}};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{4x};\ \lim_{x\to\infty}(2x+3)[\ln(x+2)-\ln x];$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\sin 2x};\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+2}-x).$$

Варіант 7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4};\ \lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6};\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-9});\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 5x}{arctg 2x};\ \lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3};\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-1}{tgx};\ \lim_{x\to-\infty}(x-4)[\ln(2-x)-\ln(5-x)];$$

$$\lim_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{x}{2x-2}};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right);$$

Варіант 8.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right);\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1};\ \lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x-3});\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{3x}-x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{3tg 2x};\ \lim_{x\to 0}(1+4x^2)^{\frac{2x-1}{x^2}};\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{\sin 2x};\ \lim_{x\to\infty}(3x-2)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)];$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{\sin x};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{1-x};$$

Варіант 9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^6-2x^4+3}}{2x^2+3x-4};\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{2x^2-x+21};\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+4});\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{tg^2x};$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9};\lim_{x\to0}(1+9x^2)^{\frac{2x+1}{3x^2}};\lim_{x\to0}\frac{e^{2\sqrt{x}}-1}{tg\sqrt{x}};\lim_{x\to\infty}(x+2)[\ln(2x+3)-\ln(2x-4)];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+8x)}{\sin 3x};\lim_{x\to\infty}(\frac{x-5}{x+1})^{x2};$$

Варіант 10.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x^2-3}{5x^3-3x+4};\lim_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-8});\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{x^2-9x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{\arcsin^2 x};\lim_{x\to3}(4-x)^{\frac{3x}{x-3}};\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{tg4x};\lim_{x\to-\infty}(3-x)[\ln(1-x)-\ln(2-x)];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{\sin 2x}-1}{x};\lim_{x\to\infty}(\frac{3x-8}{3x-5})^{-x};$$

Варіант 11.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^6+3x^2-1}}{5x^3-2x+3};\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2};\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+8}-\sqrt{x});\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x8}{2arctgx};\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2};\lim_{x\to4}(5-x)^{\frac{4x}{x-4}};\lim_{x\to-\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{e^{tgx}-1};\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-3}{x^2-4})^{x^2}.$$

Варіант 12

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-8}\right)\qquad \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{x^2-4x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}\qquad \lim_{x\to1}\left(4-3x\right)^{\frac{2x}{x-1}}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{7^x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-2\right)\left[\ln\left(3-2x\right)-\ln\left(1-x\right)\right]\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^{tg2x}-1}{\ln\left(1-3x\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{3x}\qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$$

Варіант 13

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{2x+1}$ $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9x+5}-x\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\cos 2x-\cos 3x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x+x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{tg\sqrt[3]{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{4x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x-3)-\ln(2x+5)\right]$

$\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-5}\right)^{3x}$

Варіант 14

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+10}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin^2 x}$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-3x}$ $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{3x}{x+1}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2^x-1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\left[\ln(1-2x)-\ln(5-x)\right]$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+9x)}{arctg 3x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{-2x}$

Варіант 15

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt[3]{x^2}}{2x+5}$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11}-x\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{tg^2 2x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{6^x-1}$ $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

$\lim\limits_{x\to -2}(3+x)^{\frac{2x}{x+2}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\ln(1-7x)}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+1)-\ln(3x-1)\right]$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+5}\right)^{-2x}$

Варіант 16

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8x-2}{x^3-2x^2+1} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\arcsin^2 x} \qquad \lim_{x\to -3}(x+4)^{\frac{x}{x+3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{5x} \qquad \lim_{x\to -\infty}(x+2)\left[\ln(2-3x)-\ln(4-x)\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{tg3x}-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-9}\right)^{3x}$$

Варіант 17

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+11}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin 2x} \qquad \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{6x}-x}{x-6} \qquad \lim_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{6x}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}-1}{5x} \qquad \lim_{x\to +\infty}(x+3)\left[\ln x-\ln(2x-4)\right]$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{tg(x-2)}{e^{x-2}-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+3}\right)^{2x}$$

Варіант 18

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-7x^2+4}{3x^4+5x-2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-x} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-7}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{tg^2 3x} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-1}{\ln(1+2x)} \qquad \lim_{x\to -\infty}(2-x)\left[\ln(1-x)-\ln(6-x)\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-9}\right)^{3x}$$

Варіант 19

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{8x^3+7}} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+12}-x\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 8x}{tg^2 3x} \qquad \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}{x^2-16} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{1-\cos 3x}$$

$$\lim_{x\to2}(2x-3)^{\frac{6x}{x-2}} \qquad \lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+5)-\ln x\right]$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{tg 2x} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+7}\right)^{2x}$$

Варіант 20

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+x-2} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+15}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{5x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\arcsin 2x} \qquad \lim_{x\to-2}(2-x)^{\frac{5x}{1-x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-9x)}{tg 3x} \qquad \lim_{x\to-\infty}(3-x)\left[\ln(1-x)-\ln(5-x)\right]$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{e^{x-1}-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-6}\right)^{-2x}$$

Варіант 21

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{\sqrt{x^4+1}} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+14}-\sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-1}{x\tan 2x} \qquad \lim_{x\to7}\frac{\sqrt{7x}-x}{x^2-7x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin 4x}{\ln(1+9x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{7^x-1}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+6)-\ln(x-1)\right]$$

$$\lim_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x}$$

Варіант 22

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x}}{5x^2+3x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+x-6}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7})$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{xtgx}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$;

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2x+1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(4x+3)-\ln x]$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{\sin x}-1}{\ln(1-x)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-6}\right)^{-2x}$

Варіант 23

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-6x+7x^4}{\sqrt{4x^8+3x^2-2}}$ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+x^2-9x+9}{x^2+2x-3}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+11}-\sqrt{x^2-2})$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{3x^2}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7-6x}-1}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to -1}\left(-3-4x\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{10^{-x}-1}$ $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(5+2x)-\ln x]$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{tgx}-1}{\ln(1-3x)}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+6}\right)^{-3x}$

Варіант 24

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x^2+3}{2x^3+3x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x-\dfrac{2+5x^2}{x-4}\right)$ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+4x+4}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7-6x}-1}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+13}-\sqrt{x})$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\sin 3x}{\sin 2x}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-3x}$ $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{x-2}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{10^x-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-7}\right)^{1-x}$

Варіант 25

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3x^2+4x^3}{1+3x^2+5x^3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+16})$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{tg^2 4x}$; $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{3x}{x+1}}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-1}{\ln(1+3x)}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}x[\ln(x-5)-\ln(2x+1)]$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{6^{tgx}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-3}{2x+4})^{-x}$;

Варіант 26

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{6x^2-1}{2+3x}-2x)$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^2+x-12}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x^2-5x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2-13})$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{e^{3x^2}-1}$ $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 5x}{e^{2x}-1}$ $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)[\ln(1-x)-\ln(2-3x)]$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}-1}{\ln(1+2x)}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-3}{x+5})^{2x}$

Варіант 27

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^{10}+3x^6+1}}{2x^2+5x-4}$ $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tg^2 3x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+4})$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{x+1}{x}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\cos 3x-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{10-x}-3}{2x-2}$ $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{x-2}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{x^6+3x^8}}{e^{4x}-1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x-3)[\ln x-\ln(5x+8)]$

Варіант 28

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+3x^2-4}{5x^4-3x^2+6};\quad \lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^2+4x+4};\quad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+14}-\sqrt{x-1});\quad \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4};$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\cos 6x-1}{x\sin x};\quad \lim_{x\to-2}(9+4x)^{\frac{x}{x+2}};\quad \lim_{x\to0}\frac{arctg\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1};\quad \lim_{x\to-\infty}(1-x)[\ln(2-5x)-\ln(2-x)];$$

$$\lim_{x\to0}\frac{7^{\sin x}-1}{\ln(1-4x)};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{x+2}$$

Варіант 29

$$\lim_{x\to-\infty}x[\ln(1-5x)-\ln(2-x)]\qquad \lim_{x\to0}\frac{arctg\,4x}{e^{8x}-1}$$

Варіант 30

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-6x+7x^4}{\sqrt{4x^8+3x^2-2}};\qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^2+x};\qquad \lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+15});$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 7x-1}{xtgx};\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{\arcsin 2x};\qquad \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{5-2x}-1}{x^2-4};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{8^{\sin x}-1}{\ln(1+3x)};\qquad \lim_{x\to-\infty}(x-1)[\ln(2-x)-\ln(3-4x)];$$

$$\lim_{x\to1}(4-3x)^{\frac{x+1}{x-1}};\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-5}\right)^{1-x}.$$

1.4. Неперервність функції. Класифікація точок розриву

Односторонні границі

Означення 1.5

Число b називається ***границею функції*** $f(x)$ *справа* [*зліва*] в точці $x=a$, якщо для будь якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує таке додатне число $\delta=\delta(\varepsilon)$, що для всіх *x*, які задовольняють нерівність $a<x<a+\delta$ [$a-\delta<x<a$], виконується нерівність: $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$.

Скорочено означення границі справа (зліва) в точці $x=a$, можна записати так:.

Позначають границю справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ або $f(a+0)$;границю зліва - $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $f(a-0)$.

Для існування границі функції $f(x)$ в точці $x=a$ необхідно і достатньо, щоб мала місце рівність

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=b.$$

Означення 1.6.

Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною*** *точці* x_0, якщо вона має в цій точці границю, яка дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. ***границя зліва*** в точці x_0 має дорівнювати ***границі справа*** і дорівнювати ***значенню функції*** в цій точці:
$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Якщо ці умови не виконуються, функція має розрив.

Класифікація точок розриву.

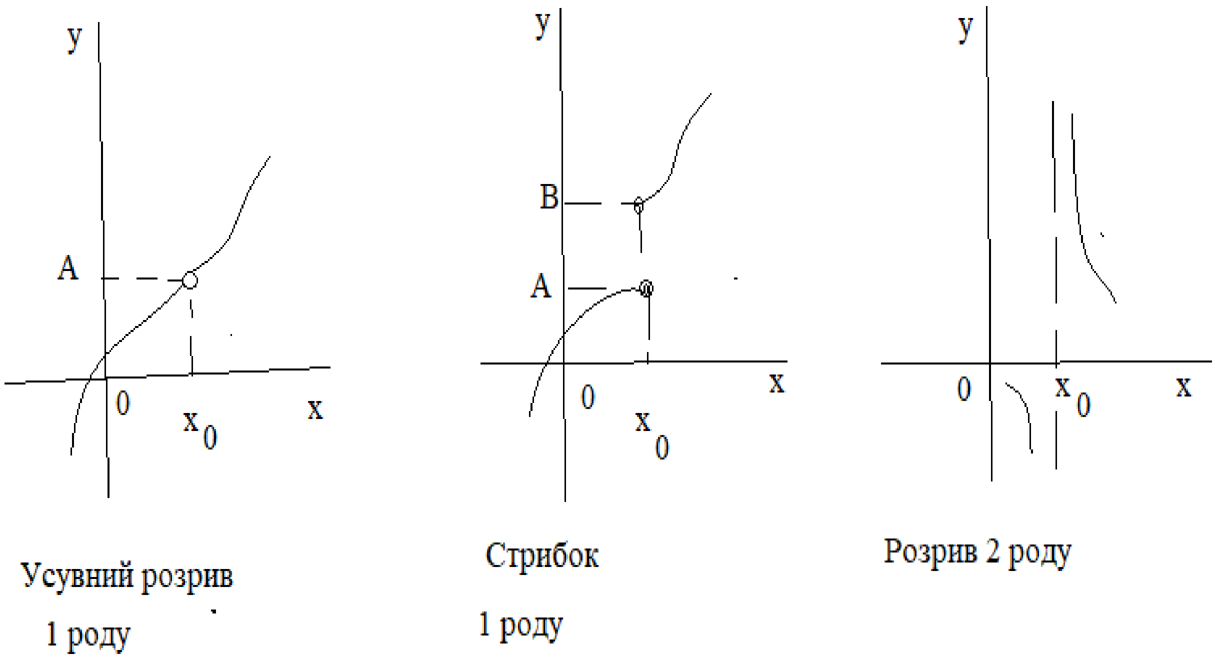


Рис.1. Класифікація точок розриву.

Приклад 1.27.: Дослідити на неперервність**:** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Розв'язання.

Границя в точці $x = 1$ не існує.

Границя в точці $x = 1$ справа:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (x+1) = 2$$

Границя в точці $x = 1$ зліва:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} (x+1) = 2$$

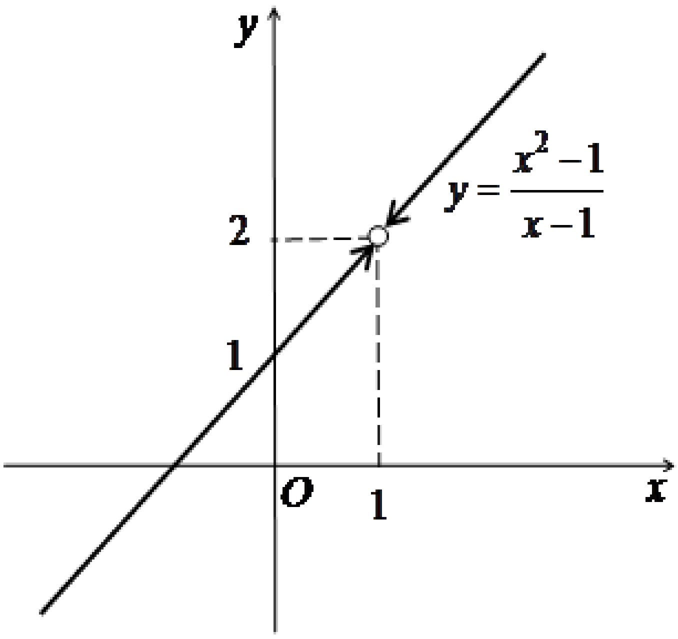


Рис.2. Точка розриву 1 роду –усувна $x=1$.

Приклад 1.28. Дослідити на неперервність**:** $y=\frac{3}{1+4^{\frac{1}{x-3}}}$

Розв'язування.

$x=3$ - точка розриву.Знайдемо границі в точці $x=3$, справа, зліва.

Границя зліва від $x=3$.

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{3}{1+4^{\frac{1}{(3-0)-3}}}\to \lim_{x\to 3-0}\frac{3}{1+4^{\frac{1}{-0}}}=\lim_{x\to 3-0}\frac{3}{1+4^{-\infty}}=$$

$$=\lim_{x\to 3-0}\frac{3}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{\infty}}=\frac{3}{1+0}=3$$

Границя справа від $x=3$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{3}{1+4^{\frac{1}{(3+0)-3}}}\to \lim_{x\to 3+0}\frac{3}{1+4^{\frac{1}{0}}}=\lim_{x\to 3+0}\frac{3}{1+4^{\infty}}=\frac{3}{\infty}=0$$

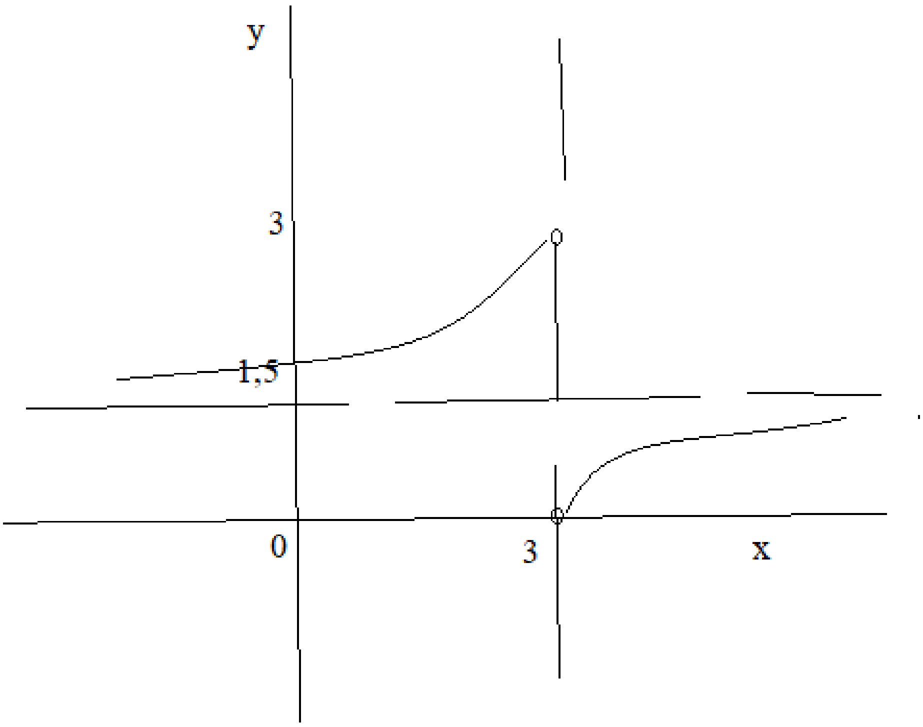


Рис. 3. Точка $x=3$ точка розриву 1 роду - стрибок.

Приклад 1.29. Дослідити на неперервність: $y=e^{\frac{1}{x-2}}$

$x=2$ - точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі функції в точці $x=2$:

Границя зліва

$$\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{(2-0)-2}} = \lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{-0}} = \lim_{x\to 2-0} e^{-\infty}$$

$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$x=2$ точка розриву функції

Завдання для самостійної роботи № 7.

Дослідження неперервності функції та точок розриву.

1. $y=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 2. $y=\frac{ax^2}{x^2-c^2}$

3. $y=(ax+b)e^{-cx}$ 4. $y=\dfrac{b}{(x-a)^2}$

5. $y=arctg\dfrac{c}{(x-b)}+b$ 6. $y=\begin{cases} x+b, & x<-b \\ x^2-b^2, & -b\le x<0 \\ \log_b x, & x\ge 0 \end{cases}$

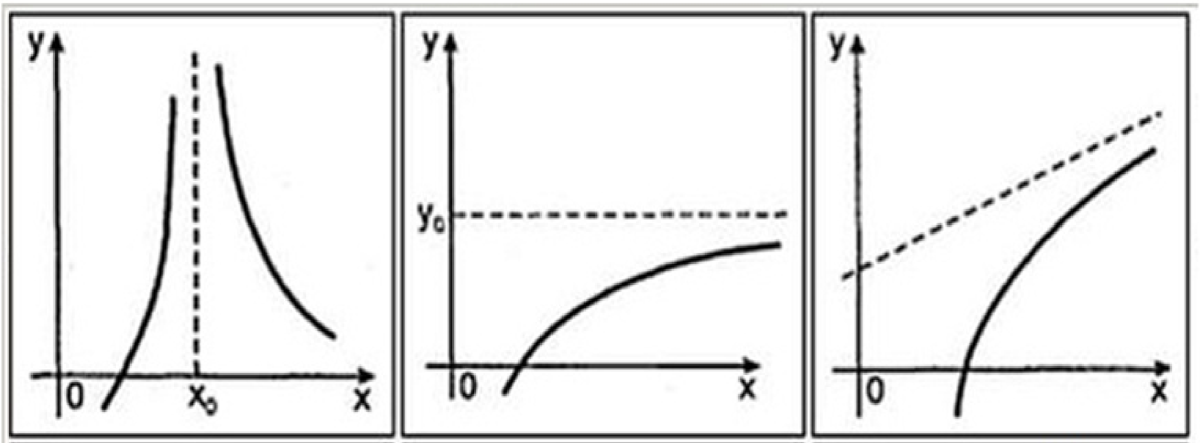
7. $y=\dfrac{x^3-c^3}{x-c}$ 8. $y=e^{-\frac{c}{x-a}}$

9. $y=(c+d+1)^{-\frac{cx}{x+a}}$ 10. $y=\dfrac{bx+c}{-ax+d}$

1.5 Асимптоти функції

Розглядають такі види асимптот, які знаходяться за певних умов на Рис. 4.

Вертикальна $x=x_0$ ***Горизонтальна*** $y=y_0$ ***Похила*** $y=kx+b$



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y_0$	$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[y-kx]$.

Рис. 4. Види асимптот

Приклад 1.30. Знайти асимптоти і побудувати графік: $y=\dfrac{x}{4x^2-1}$

Розв'язування.

Знайдемо вертикальну асимптоту, тому односторонні границі в точках $x=\dfrac{1}{2},\ \ x=-\dfrac{1}{2}$ будуть дорівнювати:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)}{\left(2\left(\frac{1}{2}+0\right)-1\right)\left(2\left(\frac{1}{2}+0\right)+1\right)}=\left\{\left(2\left(\frac{1}{2}+0\right)-1\right)\to 0\right\}=\infty$$

Границя зліва від точки $x=\dfrac{1}{2}-0$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)}{\left(2\left(\frac{1}{2}-0\right)-1\right)\left(2\left(\frac{1}{2}-0\right)+1\right)}=\left\{\left(2\left(\frac{1}{2}-0\right)-1\right)\to -0\right\}=-\infty$$

Границя справа від точки $x=-\dfrac{1}{2}+0$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{\left(-\frac{1}{2}+0\right)}{\left(2\left(-\frac{1}{2}+0\right)-1\right)\left(2\left(-\frac{1}{2}+0\right)+1\right)}=\left\{\begin{array}{l}\left(2\left(-\frac{1}{2}+0\right)+1\right)\to 0\\ \left(2\left(-\frac{1}{2}+0\right)-1\right)\to -2\end{array}\right\}=-\infty$$

Границя зліва від точки $x=-\dfrac{1}{2}-0$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{\left(-\frac{1}{2}-0\right)}{\left(2\left(-\frac{1}{2}-0\right)-1\right)\left(2\left(-\frac{1}{2}-0\right)+1\right)}=\left\{\begin{matrix}\left(2\left(-\frac{1}{2}-0\right)-1\right)\to-2\\\left(2\left(-\frac{1}{2}-0\right)+1\right)\to-0\end{matrix}\right\}=\infty$$

Знайдемо горизонтальну асимптоту:

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\{\text{правило } 1\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}\left\{\frac{1}{x}\to0,\frac{1}{x^2}\to0\right\}=0$$

горизонтальна асимптота $y=0$.

Знайдемо похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{4x^2-1}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{4x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(4x^2-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(4x^2-1\right)}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{4x^2-1}-0x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x^2-1}=0$$

Похилої асимптоти немає.

Похила асимптота переходить в горизонтальну асимптоту.

Користуючись графічним калькулятором GeoGebra побудуємо схематично графік та асимптоти.

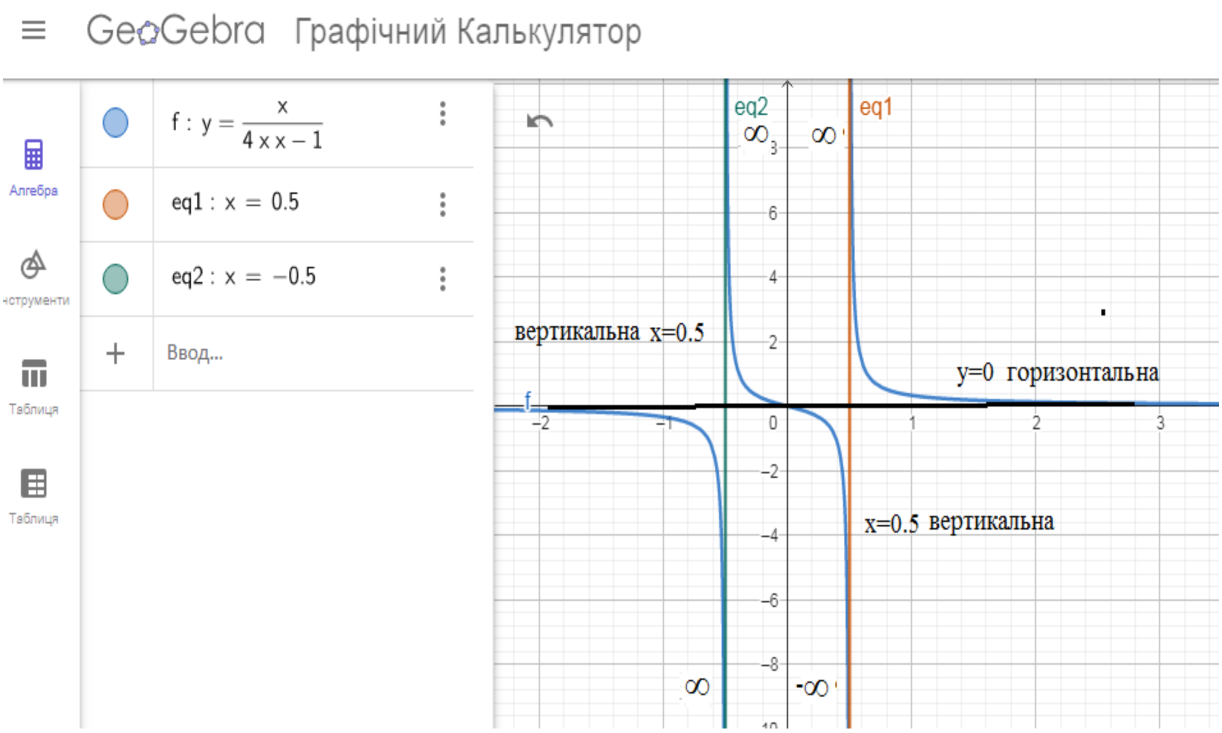


Рис. 5. Асимптоти $y=0,\ x=0,5;\ x=-0,5$

Приклад 1.31. Знайти асимптоти і побудувати графік схематично:

$$y=\frac{x^2+2x-5}{x}.$$

Розв'язування.

Знайдемо вертикальну асимптоту, тому односторонні границі в точці $x=0$ будуть дорівнювати:

границя справа від точки x=0:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+2x-5}{x}=\left[\frac{-5}{0}\right]=-\infty$$

границя зліва від точки x=0:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+2x-5}{x}=\left[\frac{-5}{-0}\right]=\infty$$

Вертикальна асимптота $x=0$.

Знайдемо горизонтальну асимптоту:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-5}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\{правило\ 1\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2x-5}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(x+2-\frac{5}{x}\right)=\infty$$

горизонтальної асимптоти немає.

Знайдемо похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-5}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\{правило\ 1\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2x-5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-5}{x}-x\right)=[\infty-\infty]=\{правило\ 1\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-5-x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{x}=2$$

похилу асимптота y = x+2.

Побудуємо графік.

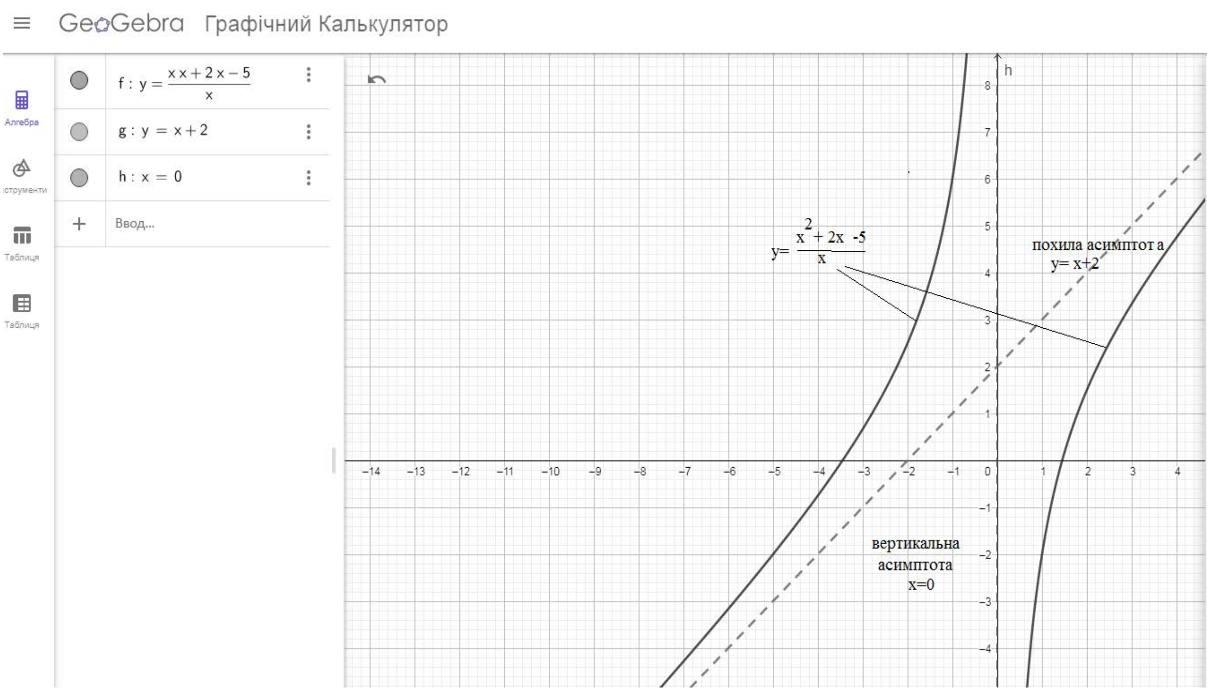


Рис. 6. Графік функції $y=\frac{x^2+2x-5}{x}$. та асимптоти y=x+2, x=0.

Завдання для самостійної роботи №8.

Знаходження та побудова асимптот функції.

1. $y=\dfrac{ax+b}{\left(x+d\right)^2}$

2. $y=\dfrac{x^2-cx}{x+c}$

3. $y=\left(ax-b\right)e^{cx}$

4. $y=\dfrac{x^2+c^2}{cx}$

5. $y=\dfrac{x^2}{b^2x^2-c^2}$

6. $y=\left(a-b\right)e^{-cx^2}$

7. $y=\dfrac{x}{c}+\dfrac{c}{x}$

8. $y=\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}$

9. $y=e^{\frac{c}{x+a}}$

10. $y=ln\left(ax^2-b^2\right)$

2. Диференціальне числення однієї змінної

2.1.Похідна функції

Похідна використовується при розв’язуванні задач з математики, фізики та інших наук, особливо коли мова йде про вивчення швидкості процесів.

Означення 2.1.

Похідною $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx в цій точці, якщо $\Delta x\to 0$:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

Означення 2.2.

Функція $y=f(x)$, яка має похідну в кожній точці інтервалу $\left(a,b\right)$ називається ***диференційованою*** на цьому інтервалі, а операція знаходження похідної функції – ***диференціюванням.***

2.2. Правила диференціювання функцій.

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$, диференційовані в даній точці x_0, то:

Правила диференціювання

1.*константи* C *на функцію* $\rightarrow \left(C \cdot u(x)\right)' = C \cdot u'(x)$

2.*похідна суми* $u(x),\ v(x) \rightarrow \left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x)$

3.*похідна різниці* $u(x),\ v(x) \rightarrow \left(u(x)-v(x)\right)' = u'(x)-v'(x)$

4.*похідна добутку* $u(x),\ v(x) \rightarrow \left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

5.*похідна частки* $u(x),\ v(x) \rightarrow \left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Похідна складеної функції

Означення 2.3.

Нехай $u=u(x)$, має похідну в точці x_0, а $y=y(u)$, має похідну в точці y_0 . Тоді $y(x)=y(u(x))$, має похідну в точці x_0 до тогож $y'(x_0)=y'(u_0)\cdot u'(x_0)$.

$$y(x_0) = \underbrace{y'(u_0)}_{\text{похідна зовнішньої функції}} \qquad \underbrace{u'(x_0)}_{\text{похідна внутрішньої функції}}$$

Таблиця 4.

Похідна складеної функції.

1. $\left(u^n\right)' = n\,u^{n-1}\cdot u'$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$
2. $\left(e^u\right)' = e^u\cdot u'$	$\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$\left(a^u\right)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$	$\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$	$\left(arc\sin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$	$\left(arc\cos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$	$\left(arctgu\right)' = \left(-arcctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Приклад 2.1. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = \left(3-5x\right)^{10}$$

$$\textit{Запишемо}\quad u(x) = 3-5x,\quad y = u^{10},$$

$$\textit{За}\quad \textit{формулою}: y' = \left(u^{10}\right)' = 10\cdot u^9\cdot u' \rightarrow$$

$$y' = \left(\left(3-5x\right)^{10}\right)' = 10\cdot\left(3-5x\right)^9\cdot\left(3-5x\right)' = 10\cdot\left(3-5x\right)^9\cdot\left(-5\right)$$

Приклад 2.2. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = \sqrt{\left(4-9x\right)^3}$$

$$\textit{Запишемо}\quad u(x) = \left(4-9x\right)^{\frac{3}{2}},\quad y = u^{\frac{3}{2}},$$

$$\textit{За}\quad \textit{формулою}: y' = \left(u^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot u^{\frac{3}{2}-1}\cdot u' \rightarrow$$

$$y' = \left(\left(4-9x\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot\left(4-9x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(4-9x\right)' = \frac{3}{2}\cdot\left(4-9x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-9\right)$$

Приклад 2.3. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = \frac{3}{\sqrt[3]{7x^2 - 2x + 1}}$$

Запишемо $u(x) = \left(7x^2 - 2x + 1\right)^{-\frac{1}{3}}, \quad y = u^{-\frac{1}{3}},$

За формулою $: y' = \left(u^{\frac{-1}{3}}\right)' = \dfrac{-1}{3} \cdot u^{\frac{-1}{3}-1} \cdot u' \rightarrow$

$$y' = \left(\left(7x^2 - 2x + 1\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot \left(7x^2 - 2x + 1\right)^{-\frac{1}{3}-1} \cdot \left(7x^2 - 2x + 1\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \left(7x^2 - 2x + 1\right)^{\frac{-4}{3}} \cdot \left(14x - 2\right)$$

Приклад 2.4. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = e^{3x+2}$$

Запишемо $u(x) = \left(3x + 2\right), \quad y = e^u,$

За формулою $: y' = \left(e^u\right)' = \left(e^u\right) \cdot u' \rightarrow$

$$y' = \left(e^{3x+2}\right)' = e^{3x+2} \cdot \left(3x + 2\right)' = 3e^{3x+2}$$

Приклад 2.5. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = e^{-2x^2+3}$$

Запишемо $u(x) = \left(-2x^2 + 3\right), \quad y = e^u,$

За формулою $: y' = \left(e^u\right)' = \left(e^u\right) \cdot u' \rightarrow$

$$y' = \left(e^{-2x^2+3}\right)' = e^{-2x^2+3} \cdot \left(-2x^2 + 3\right)' = \left(-4x\right)e^{-2x^2+3}$$

Приклад 2.6. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = 3^{-5x^3+3}$$

Запишемо $u(x) = \left(-5x^3 + 3\right), \quad y = 3^u,$

За формулою $: y' = \left(3^u\right)' = \left(3^u\right) \cdot \ln 3 \cdot u' \to$

$$y' = \left(3^{-3x^3+3}\right)' = 3^{-5x^3+3} \cdot \ln 3 \cdot \left(-5x^3 + 3\right)' = \left(-15x^2\right) \cdot \ln 3 \cdot 3^{-2x^2+3}$$

Приклад 2.7. Знайти похідну

Розв'язування.

$$y = \log_6\left(3x^2 - 7x\right)$$

Запишемо $u(x) = \left(3x^2 - 7x\right), \quad y = \log_a u,$

За формулою $: y' = \left(\log_a u\right)' = \left(\dfrac{1}{u \cdot \ln a}\right) u' \to$

$$y' = \left(\log_6\left(3x^2 - 7x\right)\right)' = \frac{1}{\left(3x^2 - 7x\right) \cdot \ln 6}\left(3x^2 - 7x\right)' = \frac{6x - 7}{\left(3x^2 - 7x\right) \cdot \ln 6}$$

Приклад 2.8. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = \sin\left(5x + 2\right)$$

Запишемо $u(x) = \left(5x + 2\right), \quad y = \sin u,$

За формулою $: y' = \left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u' \to$

$$y' = \left(\sin\left(5x + 2\right)\right)' = cos\left(5x + 2\right)\left(5x + 2\right)' = 5cos\left(5x + 2\right)$$

Приклад 2.9. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = cos\left(-9x^3 + 2x^2\right)$$

Запишемо $u(x) = \left(-9x^3 + 2x^2\right), \quad y = cos u,$

За формулою $: y' = (\cos u)' = -\sin u \cdot u' \rightarrow$

$$y' = \left(cos\left(-9x^3 + 2x^2\right)\right)' = -\sin\left(-9x^3 + 2x^2\right)\left(-9x^3 + 2x^2\right)' =$$

$$= -\sin\left(-9x^3 + 2x^2\right) \cdot \left(-18x^2 + 4x\right)$$

Приклад 2.10. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = tg\left(\frac{6x+5}{4x-1}\right)$$

Запишемо $u(x) = \left(\frac{6x+5}{4x-1}\right), \quad y = tgu,$

За формулою $: y' = (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \rightarrow$

$$y' = \left(tg\left(\frac{6x+5}{4x-1}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{6x+5}{4x-1}\right)}\left(\frac{6x+5}{4x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{6x+5}{4x-1}\right)}\left(\frac{(6x+5)'(4x-1) - (4x-1)'(6x+5)}{(4x-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{6x+5}{4x-1}\right)}\left(\frac{6(4x-1) - 4(6x+5)}{(4x-1)^2}\right) = \frac{-26}{\cos^2\left(\frac{6x+5}{4x-1}\right)(4x-1)^2}$$

Приклад 2.11. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = ctg\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}$$

$$За \quad формулою: y' = \left(ctgu\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u' \to$$

$$y' = \left(ctg\left(\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}\right)\right)' = -\frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}\right)}\left(\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}\right)}\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}}\left(\frac{1}{3x^2-2}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}\right)}\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}}\left(\frac{1}{3x^2-2}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}\right)}\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}}\left(\frac{1'\left(3x^2-2\right)-1\left(3x^2-2\right)'}{\left(3x^2-2\right)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}\right)}\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{3x^2-2}}}\left(\frac{-6x}{\left(3x^2-2\right)^2}\right)$$

Приклад 2.12. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = \arccos\left(6x^2 - 7\right)$$

$$\text{\textit{За формулою}}: y' = \left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \to$$

$$y' = \left(\arccos\left(6x^2 - 7\right)\right)' = -\frac{\left(6x^2 - 7\right)'}{\left(\sqrt{1-\left(6x^2-7\right)^2}\right)} = -\frac{\left(12x\right)}{\left(\sqrt{1-\left(6x^2-7\right)^2}\right)}$$

Приклад 2.13. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = \mathrm{arc}\,tg\left(\sqrt{x^2 - 7}\right)$$

$$\text{\textit{За формулою}}: y' = \left(\mathrm{arc}\,tg u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \to$$

$$y' = \left(\mathrm{arc}\,tg\left(\sqrt{x^2-7}\right)\right)' = \frac{\left(\sqrt{x^2-7}\right)'}{\left(1+\left(\sqrt{x^2-7}\right)^2\right)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2-7}} \cdot \left(2x\right)}{\left(x^2-6\right)}$$

Приклад 2.14. Знайти похідну:

Розв'язування.

$$y = \mathrm{arcc}\,tg\left(\sqrt{x^2 - 7}\right)$$

$$\text{\textit{За формулою}}: y' = \left(\mathrm{arcc}\,tg u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \to$$

$$y' = \left(\mathrm{arcc}\,tg\left(\sqrt{x^2-7}\right)\right)' = \frac{\left(\sqrt{x^2-7}\right)'}{\left(1+\left(\sqrt{x^2-7}\right)^2\right)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2-7}} \cdot \left(2x\right)}{\left(x^2-6\right)}$$

2.3 Правила диференціювання функцій, заданих параметрично, функцій, заданих неявно

Означення 2.5.

Нехай функція задана ***параметричними рівняннями*** $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ $x = x(t)$ і $y = y(t)$ диференційовні в околі точки t, причому $x'(t) \neq 0$.

Тоді $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Приклад 2.15. Знайти похідну функції: $\begin{cases} x = t^2 - 5t, \\ y = t + 2. \end{cases}$

Розв'язування.

За формулою $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ маємо: $y'_x = \dfrac{(t+2)'}{(t^2 - 5t)'} = \dfrac{1}{2t - 5}$

Приклад 2.16. Знайти похідну функції: $\begin{cases} x = 3\sin^3 t - 5, \\ y = 2\cos^3 t + 2. \end{cases}$

Розв'язування.

За формулою $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ маємо:

$$y'_x = \frac{(2\cos^3 t + 2)'}{(3\sin^3 t - 5)'} = \frac{2 \cdot 3\cos^2 t(-\sin t)}{3 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t} = \frac{-2\cos t}{3\sin t} = -\frac{2}{3} ctgt$$

Означення 2.6.

Нехай функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$, ***неявно***. Для того, щоб знайти похідну потрібно про диференціювати обидві частини цього рівняння по x, вважаючи x незалежною змінною і по y, вважаючи y залежною змінною, і з отриманого рівняння знайти $y'(x)$.

Приклад 2.17. Знайти похідну: $4y^2x+2xy=e^{xy}$

Розв'язування.

Складена функція $F(x,y)=0$ відносно змінної х, знайдемо похідну:

$$4\left(y^2x\right)'+2(xy)'=\left(e^{xy}\right)'\to 4\left(2yy'x+y^2\right)+2(y+xy')=e^{xy}(y+xy')$$

Виділимо y': $y'\left(8xy+2x-e^{xy}x\right)=\left(-4y^2-2y+ye^{xy}\right)\to$

$$y'=\frac{\left(-4y^2-2y+ye^{xy}\right)}{\left(8xy+2x-e^{xy}x\right)}.$$

Похідна степенево- показникової функції.

Степенево- показникова функція має вигляд: $y=u^v$, де $u=u(x), v=v(x)$ вирази, що містять незалежну змінну х.

Алгоритм диференціювання $y=u^v$.

Логарифмуємо обидві частини за однією основою (натуральний логарифм)

$\ln y=\ln u^v=v\cdot\ln u$

Диференціюємо праву та ліву частини, вважаючи, що функція неявна

$(\ln y)'=(v)'(\ln u)+(v)(\ln u)'$

$\frac{y'}{y}=(v)'(\ln u)+(v)\left(\frac{1}{u}\right)u'$

З останньої рівності шукаємо y'

$y'=\left[(v)'(\ln u)+(v)\left(\frac{1}{u}\right)u'\right]y=u^v\left[(v)'(\ln u)+(v)\left(\frac{1}{u}\right)u'\right]$

Приклад 2.18. Знайти похіднуфункції: $y=(2x+1)^{\sin 3x}$

Розв'язування.

Логарифмуємо обидві частини:

$$\ln y=\ln(2x+1)^{\sin 3x}=(\sin 3x)\cdot\ln(2x+1)$$

диференціюємо праву та ліву частини:

$$\ln' y = (\sin 3x)' \left(\ln(2x+1)\right)\left(\ln(2x+1)\right)' (\sin 3x)$$

$$\frac{1}{y} y' = (3\cos 3x)\ln(2x+1) + \left(\frac{1}{x}\right)(\sin 3x)$$

З останньої рівності шукаємо y':

$$y' = y\left[(3\cos 3x)\ln(2x+1) + \left(\frac{1}{x}\right)(\sin 3x)\right]$$

підставимо значення $y = (2x+1)^{\sin 3x}$:

$$y' = \ln(2x+1)^{(\sin 3x)}\left[(3\cos 3x)\ln(2x+1) + \left(\frac{1}{x}\right)(\sin 3x)\right]$$

Завдання для самостійної роботи № 9. Похідна функції.

1. $y = ax^{d+1}(\mathrm{c}+1)^{-bx^5}$

2. $y = \ln(ax^{d+1} - \mathrm{e}^{-bx^5})$

3. $y = \dfrac{\sqrt{ax^2 + bx - c}}{(dx^3 - ax^2 + d)^4}$

4. $y = \dfrac{arctg(x^2 + bx - c)}{dx^3 - ax^2 + d}$

5. $y = \sqrt[8]{\dfrac{ax^2 + bx - c}{dx^3 + cx^2 - d}}$

6. $y = arctg(\ln(a \cdot e^{\sqrt{(d+1)x}})$

7. $y = \arcsin^{c+1}(\mathrm{b} - \dfrac{(a+2)}{x^c + d\sqrt[5]{x}})$

8. $y = \cos^b(ax^6 - e^{-cx^5})$

9. $y = arccos^c(a \cdot e^{-\sqrt{(d+1)x}})$

10. $y = \dfrac{\sin\sqrt{ax^2 + b}}{\mathrm{tg}(ax^c + d)^d}$

11. $y = \log_{a+1}(\sqrt{ax^{d+1}} - \mathrm{e}^{-bx^5})$

12. $y = (ax^{d+1}) \cdot \mathrm{e}^{arc\sin(\mathrm{cx}+\mathrm{b})}$

13. $y = arcctg^2((a+2)^{x-b})$

14. $y = \ln^b\left(\dfrac{ax^{d+1}}{\sqrt[3]{e^{-bx^5} + ax}}\right)$

15. $y = \log_5(\sqrt[3]{ax^2 - a} - cx)$

16. $y = \left(arc\sin\dfrac{cx+d}{-bx+1}\right)^a$

17. $y = (ax+d)^{\sin(dx^3+1)}$

18. $\sqrt[5]{cy^2 + ay} + \cos(ax^6 - e^{-cy^5}) = xy$

19. $y = tg(ax+d)^{\cos\sqrt{dx^3+1}}$

20. $\cos(cy - b\sqrt{xy}) = (y \cdot e^{-\sqrt{(d+1)x}})$

3.Застосування похідної до дослідження та побудови графіків функцій

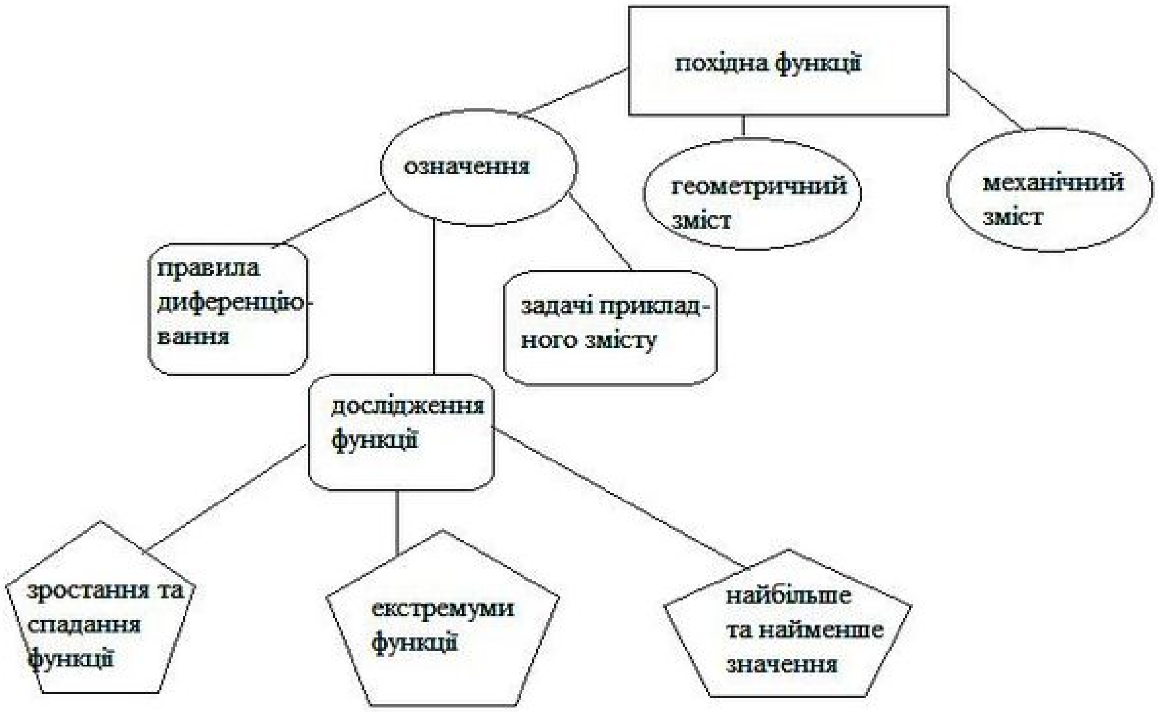


Рис. 7. Застосування похідної.

3.1. Геометричний зміст похідної

Означення 3.1.

Дотичною є пряма l_1, яка займає граничне положення січної l_2.

Рівняння дотичної є пряма лінія- $y = kx + b$, де кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 дорівнює значенню похідної цієї функції в точці x_0: $k = f'(x_0)$ і $k = tg\alpha$

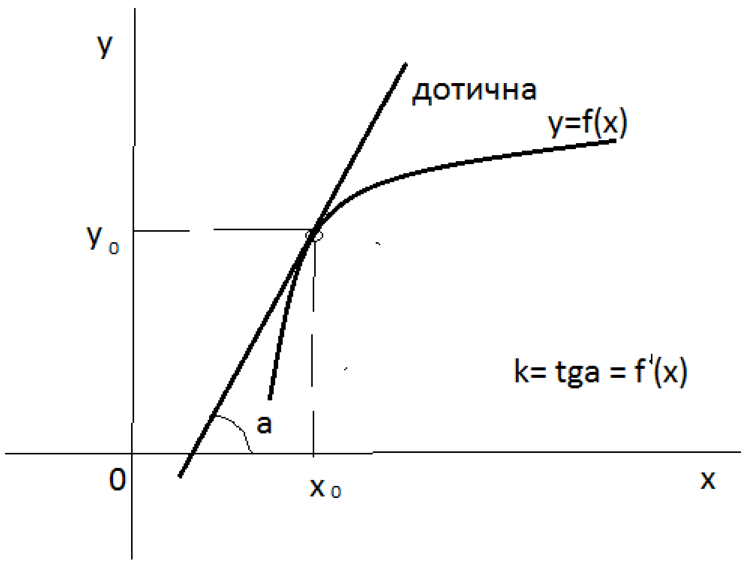


Рис. 8. Геометричний зміст дотичної.

Кутовий коефіцієнт дотичної $y = kx + b$, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0), дорівнює значенню похідної $f'(x_0) = k$ в точці x_0 і також тангенсу кута нахилу $tg\alpha = k$ дотичної до осі x.

Алгоритм знаходження рівняння дотичної в точці до графіка функції.

Нехай $f(x)$ задана функція, x_0 - точка, що належить графіку цієї функції, тоді для того, щоб написати рівняння дотичної потрібно знайти :Значення функції $f(x)$ в точці x_0 - $f(x_0)$;

Знайти похідну функції $f'(x)$;

Значення похідної функції $f'(x)$ в точці x_0 - $f'(x_0)$;

Записати рівняння дотичної: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Приклад 3.1. Скласти рівняння дотичної в точці $x_0 = -1$ до графіка функції

$f\left(x\right) = \frac{3x - 2x^3}{3}$.

Розв'язування.

1.Знайти значення функції $f\left(x\right) = \frac{3x - 2x^3}{3}$ в точці $x_0 = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{-3+2}{3} = -\frac{1}{3}$;

2.Знайтипохідну функції $f'\left(x\right) = \frac{3 - 6x^2}{3}$;

3.Знайтизначення похідної функції $f'\left(-1\right) = \frac{3-6}{3} = \frac{-3}{3} = -1$;

4.Записати рівняння дотичної: $y = -\frac{1}{3} - \left(x - \left(-1\right)\right) = -x - \frac{4}{3}$

Користуючись графічним калькулятором GeoGebra побудуємо графік

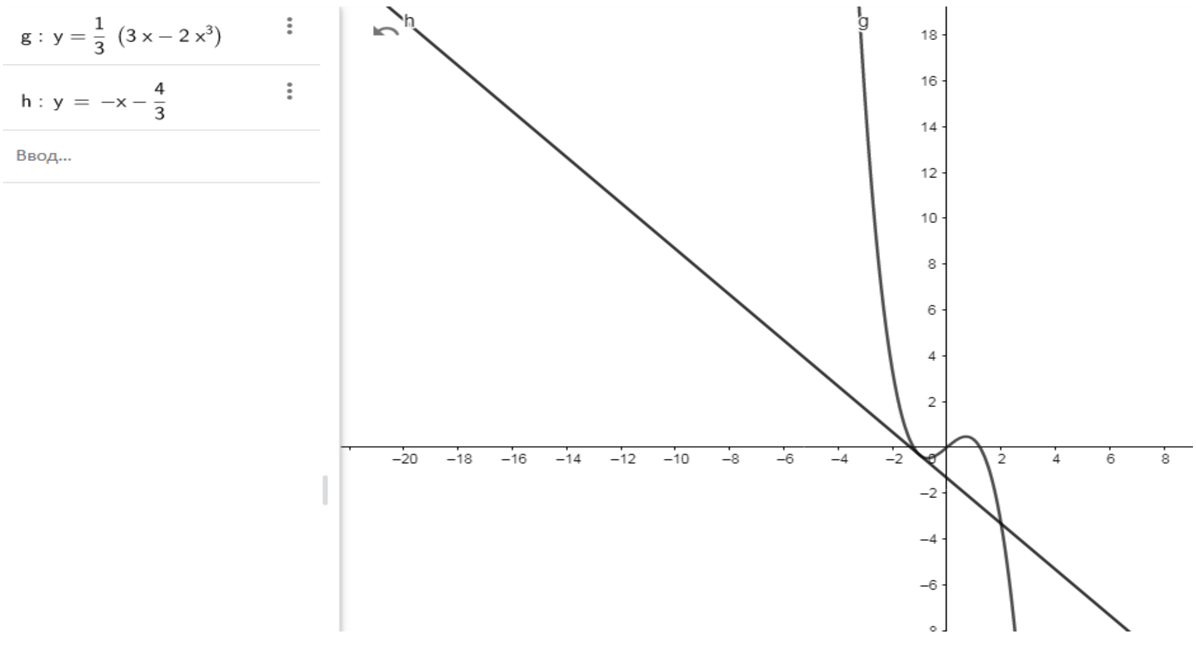


Рис. 9. Графік функції та дотична

Тема 3.1.2 Фізичний зміст похідної

Означення 3.2.

Якщо $y = S(t)$ ***рівняння руху*** матеріальної точки(t-час, у- координата точки), то ***миттєва швидкість*** $v(t)$ у момент часу tдорівнює значенню похідної $v(t) = S'(t)$ у цей момент часу, а ***прискорення***- $a(t)$ значенню другої похідної $a(t) = S''(t) = v'(t)$

Приклад 3.1. Точка рухається за законом: $S(t) = t^2 + 3t + 5$.

Розв'язування.

Знайти в момент часу t=5сек:

1) миттєву швидкість $v(t) = S'(t) = 2t + 3 \rightarrow v(5) = 13м / с.$;
2) прискорення $a(t) = v'(t) = 2$;
3) який шлях подолає точка через t=5сек, $S(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 + 5 = 45м.$
4)

3.1.3.Економічний зміст похідної

Продуктивність праці P в даний момент часу є похідною від обсягу виробленої продукції U по часу t: $P = \frac{du}{dt}$

Еластичність функції, $y = f(x)$, де y може бути функцією попиту або пропозиції при ціні x, витрат виробництва при об'ємі продукції x ,показує приблизний процентний приріст y при зміні x і дорівнює

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

3.1.4.Хімічний зміст похідної.

Якщо $P(t)$ - закон зміни кількості речовини,що вступила в хімічну реакцію, то швидкість $v(t)$ хімічної реакції в момент часу t дорівнює похідній

$$P'(t) = v(t)$$

3.1.5.Електричний зміст похідної.

Якщо $-Q(t)$ кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за час t ,то сила струму $I(t)$ в момент часу t є похідною від Кількості електрики $I(t)=Q'(t)$

Завдання для самостійної роботи № 10.

Прикладні задачі

1. Записати рівняння дотичної в точках перетину з координатними осями $y=(x-b)(x+a)$

2.Знайти точку кривої $y=(x-b)(x+a)$, в якій дотична паралельна до лінії $y=-x+c$

3.Знайти рівняння дотичної до кривої: $\begin{cases} x=a\cos t-b \\ y=b\sin t+c \end{cases}$ в точці $t=\dfrac{\pi}{2}$

4.Знайти рівняння дотичної до кривої $x^2+2bx+c^2\left(y^2-4y\right)=0$ в точках перетину з осями координат.

5. Прямокутну ділянку землі, яка прилягає до стіни будинку потрібно обговорити парканом завдовжки $100\cdot a$ метрів. Знайти:

1) довжину прямокутника в метрах, за якої площа ділянки буде мати найбільшу площу;
2) b% від найбільшої площі.

6. У відкритому басейні з квадратним дном і об\`ємом $c\cdot a$ $м^2$ визначити: висоту, площу стін і дна, щоб витрати матеріалів на облицювання басейну були найменшими.

7. За якого найменшого значення a функція $y=x^3+3x^2+a\cdot x-6$ не має критичних точок.

8. За якого від\`ємного значення b функції $y=2x^3-3x^2+b$ один із екстремумів дорівнює 1.

9. За яких значень a функція $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+a\cdot x$ має критичні точки, але не має екстремумів.

10. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t)=cx^2+2x-4$. Знайти миттєву швидкість та прискорення в момент часу $t=c$. Коли тіло зупинить свій рух?

3.2. Монотонність функції

Означення 3.3.

Точки області визначення функції, в яких ***похідна*** функції дорівнює нулеві або ***не існує*** називаються ***критичними.***

Означення 3 .4.

Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f'(x)>0$, то функція $f(x)$ ***зростає*** на цьому інтервалі. (рис.10).

Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f'(x)<0$, то функція $f(x)$ ***спадає*** на цьому інтервалі .(рис.11).

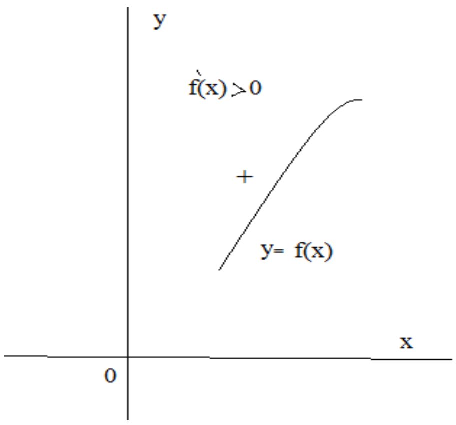


Рис. 10. $f'(x)>0$ **зростає**

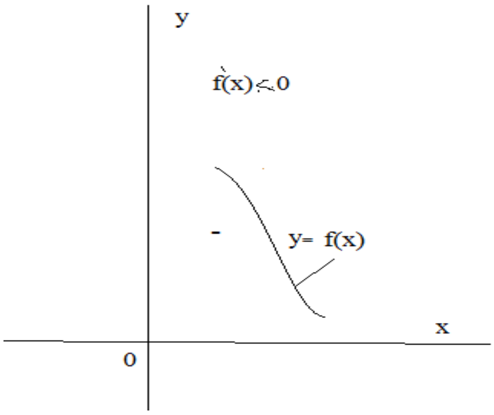


Рис. 11. $f'(x)<0$ **спадає**

Приклад 3.2. Знайти проміжки монотонності функції: $y=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3}$

Розв'язування.

Знайдемо критичні точки, знайдемо похідну функції та прирівняємо до нуля. А також знайдемо точки у яких похідна не існує.

$$y'=\left(-\frac{3}{x^2}\right)+\frac{1}{3}=\frac{x^2-9}{3x^2}=0\rightarrow x_1=3,\ x_2=-3, x_3\neq 0.$$

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$y'\succ 0$	0	$y'\prec 0$	∞	$y'\prec 0$	0	$y'\succ 0$
y	зростає	max	спадає	∞	спадає	min	зростає

Із таблиці робимо висновок:

Функція зростає, якщо $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$,спадає- $x \in (-3;0) \cup (0;3)$

3.3. Точки екстремуму функцій

Означення 3.5.

Точки максимуму і мінімуму називаються **точками екстремуму.**

Означення 3.6.

Значення функції в точках максимуму і мінімуму називаються ***екстремумами функції*** (максимумом і мінімумом функції).

Означення 3.7.

У ***точках екстремуму похідна функції дорівнює нулю або не існує*** (але не в кожній точці x_0, де $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує, буде екстремум).

Означення 3.8.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x_0)$ змінює знак в точці x_0, то x_0 – ***точка екстремуму функції.***   У точці x_0 знак $f'(x_0)$ змінюється з «+» на «-», то x_0 – ***точка максимуму***. (рис.12)   У точці x_0 знак $f'(x_0)$ змінюється з «-» на «+», то x_0– ***точка мінімуму.*** . (рис.13)

$f'(x)>0 \quad f'(x)<0$

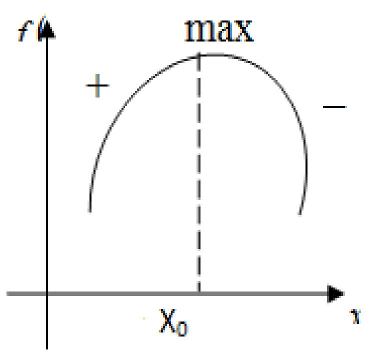


Рис.12.

$f'(x)<0 \quad f'(x)>0$

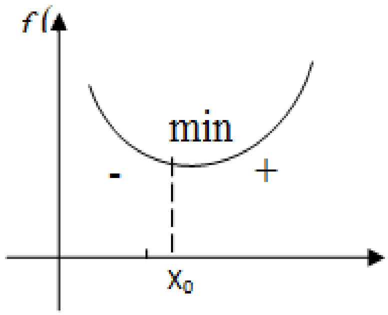


Рис.13.

Приклад 3.3. Знайти екстремуми функції: $y=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$

Маємо таблицю із попереднього прикладу, можемо зробити висновок:

$$y_{\max}(-3)=\frac{3}{-3}+\frac{-3}{3}=-2\ ,\qquad y_{\min}(3)=\frac{3}{3}+\frac{3}{3}=2\ .$$

Графік функції на Рис.16.

Завдання для самостійної роботи № 11.

Знаходження монотонності функції та точок екстремума.

1. $y=(x-b)^2(ax+b)$
2. $y=bx^3-ax^2$
3. $y=\frac{b}{(x-c)^2}$
4. $y=(ax-b)e^{cx}$
5. $y=\frac{ax+b}{(x-c)^2}$
6. $y=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$
7. $y=\frac{x}{c}-\frac{c}{x}$
8. $y=\frac{x^2-bx}{x+c}$
9. $y=(a+b)^{-cx^2+dx}$
10. $x^2+2bx+c^2(y^2-4y)=0$

3.4. Опуклість функції. Точки перегину.

Знайти **другу похідну** $f''(x)=0$,знаходимо знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному інтервалі, на які розбивається область визначення.

Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f''(x)>0$, то на інтервалі (a,b) графік функції ***опуклий вниз.*** (Рис.14) Якщо в кожній точці інтервалу (a,b) $f''(x)<0$, то на інтервалі (a,b) графік функції ***опуклий вгору.*** (Рис.15)

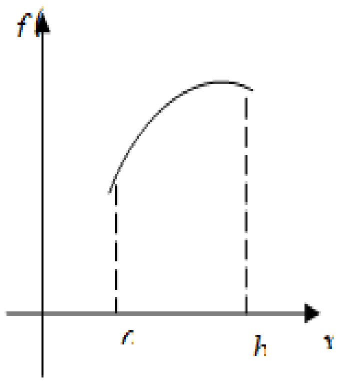


Рис.14. $f''(x)<0$ опуклий вгору

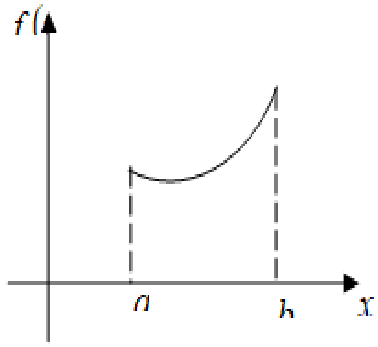


Рис.15. $f''(x)>0$ опуклий вниз

Точки перегину

Означення 3.10.

У точках x_0 ***перегину*** функції її друга похідна ***дорівнює нулю або не існує***.
Якщо функція має першу і другу похідну на інтервалі (a,b) і її ***друга похід***
Змінює знак при переході аргументу через точку $x_0 \in (a,b)$, то
є точкою перегину функції.

Приклад 3.4. Дослідити на опуклість функцію: $y=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$

Розв'язування.

Знайдемо другу похідну: $y''=\left(-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{x^3}$

Можемо скористатись попередньою таблицею

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$y'\succ 0$	0	$y'\prec 0$	∞	$y'\prec 0$	0	$y'\succ 0$
y	зростає	max	спадає	∞	спадає	min	зростає
y''	опукла вниз $y''\prec 0$			∞	опукла вгору $y''\succ 0$		

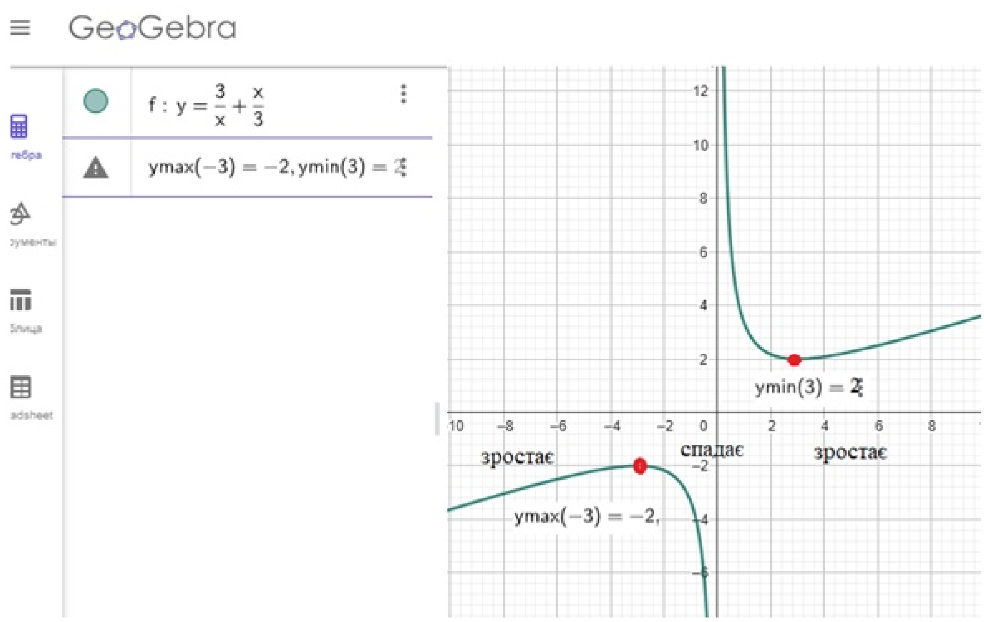


Рис.16. Графік функції $y=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3}$

3.5 Приклади побудови графіків функцій.

Загальний план дослідження функції та побудова її графіка.

1. Знайти область визначення.
2. Дослідити на парність/непарність.
3. Дослідити на періодичність.
4. Дослідити на асимптоти:

а) вертикальні; б) горизонтальні; с) похилі.

5. Дослідити на екстремуми, проміжки монотонності функції.
6. Дослідити на точки перегину. Проміжки опуклості функції.
7. Знайти точки перетину з осями координат.
8. Побудувати графік функції.

Приклад 3.5. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^2-4}{x+3}$ та побудувати її графік

1) Функція визначена для всіх $x \subset (-\infty;-3)\cup(-3;\infty)$.

2) Досліджуємо поведінку функції в точці $x \neq -3$ справа і зліва.

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x^2-4}{x+3}=\lim_{x\to -3-0}\frac{(-3-0)^2-4}{(-3-0)+3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{x^2-4}{x+3}=\lim_{x\to -3+0}\frac{(-3+0)^2-4}{(-3+0)+3}=\infty$$

Точка $x \neq -3$ є точкою розриву другого роду.

3) Дослідимо на парність.

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-4}{(-x+3)}=\frac{(x)^2-4}{(-x+3)}\neq y(x)$$

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-4}{(-x+3)}=-\frac{x^2-4}{x-3}\neq -y(x)$$

Функція загального виду, оскільки $f(-x)\neq f(x)$ *і* $f(-x)\neq -f(x)$.   .

4) Функція не є періодичною.

5) Асимптоти.

Враховуючи дослідження пункту 1), робимо висновок, що пряма $x\neq -3$ є вертикальною асимптотою.

Похилі асимптоти у вигляді $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x(x+3)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x(x+3)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-bx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x^2}{(x+3)}=\left[\frac{-4}{\infty}\right]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-bx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4}{x+3}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4-x^2}{(x+3)}=\left[\frac{-4}{\infty}\right]=0$$

Отже, $y=x$ одна і та ж сама похила асимптота як при $x\to\infty$, так і при $x\to-\infty$.

6) Для визначення інтервалів монотонності та локальних екстремумів знайдемо спочатку похідну:

$$y' = \left(\frac{x^2-4}{x+3}\right)' = \frac{\left(x^2-4\right)'\left(x+3\right)-\left(x^2-4\right)\left(x+3\right)'}{\left(x+3\right)^2} = \frac{\left(2x\right)\left(x+3\right)-\left(x^2-4\right)}{\left(x+3\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2x\right)\left(x+3\right)-\left(x^2-4\right)}{\left(x+3\right)^2} = \frac{\left(x^2+6x+4\right)}{\left(x+3\right)^2}$$

Якщо $y'=0$, рівняння $x^2+6x+4=0$, має $D=6^2-4\cdot 4=20$ і корені

$$x_1 = \frac{-6+2\sqrt{5}}{2} = 3+2\sqrt{5}, \quad x_1 = \frac{-6-2\sqrt{5}}{2} = 3-2\sqrt{5}$$

Знайдемо проміжки знакосталості:

За методом інтервалів складаємо таблицю зміни знаків похідної:

x	$\left(-\infty;-3-\sqrt{5}\right)$	$-3-\sqrt{5}$	$\left(-3-\sqrt{5};-3\right)$	-3	$\left(-3;-3+\sqrt{5}\right)$	$-3+\sqrt{5}$	$\left(-3+\sqrt{5};\infty\right)$
y'	$+$	0	$-$	ні	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$y_{\max} =$ $=-8\sqrt{5}$	$\searrow$	ні	$\searrow$	$y_{\min} =$ $=-4\sqrt{5}$	$\nearrow$
y''	$-$ графік функції опуклий			ні	$+$ графік функції вгнутий		

Отже дана функція зростає при $x \subset \left(-\infty;-3-\sqrt{5}\right) \cup \left(-3+\sqrt{5};\infty\right)$ і при $x \subset \left(-3-\sqrt{5};-3\right) \cup \left(-3;-3+\sqrt{5}\right)$. Точки локального екстремуму –

$$y_{\max}\left(-3-\sqrt{5}\right) = \frac{\left(-3-\sqrt{5}\right)^2-4}{-3-\sqrt{5}+3} = -\frac{10+6\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -8\sqrt{5}$$

$$y_{\min}\left(-3+\sqrt{5}\right) = \frac{\left(-3+\sqrt{5}\right)^2-4}{-3+\sqrt{5}+3} = \frac{10-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -4\sqrt{5}$$

7) Знайдемо проміжки опуклості (вгнутості).

Для цього знайдемо спочатку y'' :

$$y''=\left(\frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}\right)'=\frac{\left(x^2+6x+4\right)'(x+3)^2-\left((x+3)^2\right)'\left(x^2+6x+4\right)}{(x+3)^4}=$$

$$=\frac{(2x+6)(x+3)^2-2(x+3)\left(x^2+6x+4\right)}{(x+3)^4}=\frac{(x+3)\cdot 10}{(x+3)^4}=\frac{10}{(x+3)^3}$$

Знайдемо проміжки знакосталості для y''. За методом інтервалів отримуємо $y''>0$ що при $x\in(-3;\infty)$ - тут графік функції вгнутий**,** та $y''<0$ при $x\in(-\infty;-3)$ графік функції опуклий**.** В самій точці $x=-3$ функція невизначена, тому точки перегину немає.

8) Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями.

Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо $y=0\rightarrow x^2-4=0\rightarrow(2,0);(-2,0)$ Графік перетинає вісь ординат, якщо $x=0\rightarrow y=\frac{-4}{3}=-0,75\rightarrow(0;-0,75)$.

Користуючись графічним калькулятором ***GeoGebra*** побудуємо графік:

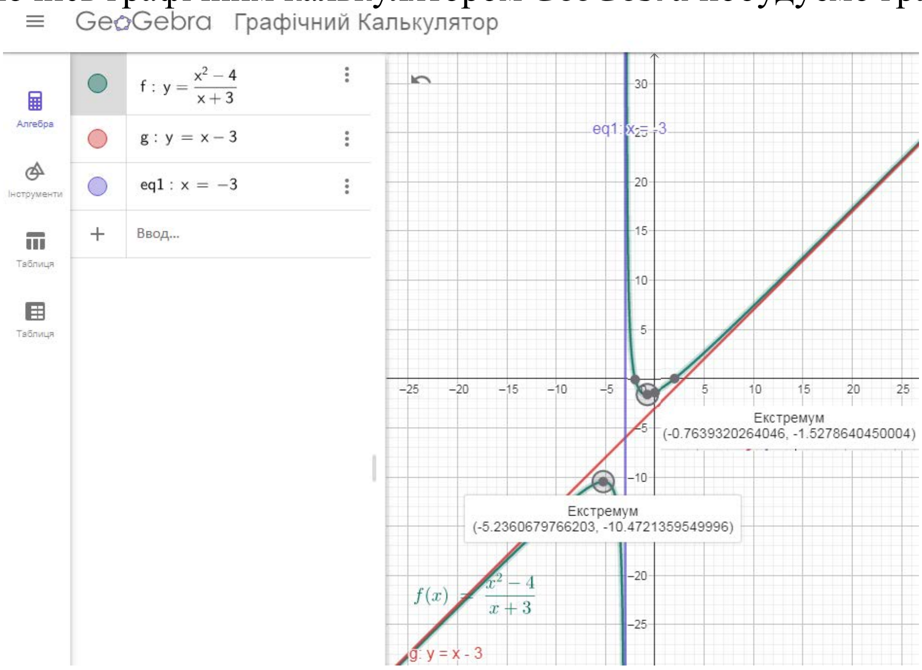


Рис. 17. Графік функції $y=\dfrac{x^2-4}{x+3}$

Завдання для самостійної роботи № 12.

Побудува графіків функцій з повним дослідженням.

Перевірку результатів аналітичного дослідження можна здійснити за допомогою онлайн пакету ***GeoGebra.*** На екрані можна вибрати функцію, побудувати графік та знайти асимптоти і екстремуми, точки перегину.

1. $y=\left(-ax-b\right)e^{cx}$

2. $y=\dfrac{x^2+dx}{x-c}$

3. $y=\dfrac{-cx^2}{x^2-b^2}$

4. $y=\dfrac{x^2-cx}{x}$

5. $y=\dfrac{-a}{\left(x-d\right)^2}$

6. $y=\dfrac{ax}{\left(x+b\right)^2}$

7. $y=\dfrac{\left(x+d\right)^2}{x-c}$

8. $y=(x+b)^2(ax-b)$

9. $y=e^{-cx^2+dx}$

10. $y=\dfrac{e^{-cx+d}}{x+c}$

11. $y_1=\dfrac{x+c}{x^2+d}$

12. $y=\dfrac{(x-c)(x-b)}{x^2+c}$

13. $y=(x^2-a^2)^2$

14. $y=cx^2\cdot e^{dx}$

15. $y_5=ax-b\sqrt[b]{x^a}$

16. $y=\sqrt{(x-c)(x+b)}$

17. $y=e^{-ax^2+dx}$

18. $y_8=\dfrac{x-c}{\sqrt{x}}$

19. $y=\dfrac{x^3}{(x+c)(x-a)}$

20. $y=ax^4-bx^5$

Приклад 3.6. Дослідити функцію $y = 3x \cdot e^{x}$ ***та побудувати її графік.***

1) Функція визначена для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.

2) Точок розриву не існує.

3) Дослідимо на парність $y(-x) = 3(-x)e^{-x} \neq y(x)$

$y(-x) = 3(-x)e^{-x} \neq -y(x)$.Функція загального виду.

4) Функція не є періодичною.

5) Асимптоти.

Вертикальної асимптоти немає, так як точок розриву не існує.

Горизонтальна асимптота справа $\lim\limits_{x\to\infty} 3xe^{x} = \infty$ не існує, зліва $y = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} 3xe^{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{(3x)'}{\left(e^{-x}\right)'} == \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{-e^{-x}} = 0.$$

Похилої асимптоти справа немає: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3xe^{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 3e^{x} = \infty \; b \to \infty$,

зліва $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3xe^{x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{x} = 0, \;\; b = 0$ існує $y = 0$.

6) Для визначення інтервалів монотонності та локальних екстремумів знайдемо спочатку похідну і прирівняємо до нуля:

$$y' = \left(3xe^{x}\right) = 3(x)'\left(e^{x}\right)3 + (x)\left(e^{x}\right)' = 3e^{x}(x+1) = 0 \to x = -1$$

Отже дана функція зростає при $x \in (-1; \infty)$ і спадає при $x \in (-\infty; -1)$.

Точки локального екстремуму $y_{\min}(-1) = \dfrac{-3}{e}$

За методом інтервалів складаємо таблицю 5. зміни знаків похідної:

7) Для визначення інтервалів опуклості, вгнутості знайдемо другу похідну:

$$y'' = \left(3xe^{x}\right)'' = 3\left[e^{x}(x+1)\right]' = 3\left[\left(e^{x}\right)'(x+1) + e^{x}(x+1)'\right] = 3e^{x}(x+2) = 0$$

$y'' = 0 \to x = -2$

Знайдемо проміжки знакосталості для y''. За методом інтервалів отримуємо $y''>0$ що при $x\in(-2;\infty)$ - тут графік функції вгнутий, та $y''<0$ при $x\in(-\infty;-2)$ графік функції опуклий. $y_{перегину}(-2)=\dfrac{-6}{e^2}$

8) Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями.

$x=0 \rightarrow y=0$

Таблиця 5.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;\infty)$	
y'		$-$		0	$+$	
y	↘	↘	↘	$y_{\min}(-1)=\dfrac{-3}{e}$	↗	
y''	$-$	0		$+$		
	графік опуклий $\bigcap$	$y_{перегину}(-2)=$ $=\dfrac{-6}{e^2}$		графік вгнутий $\bigcup$		

Користуючись графічним калькулятором GeoGebra побудуємо графік

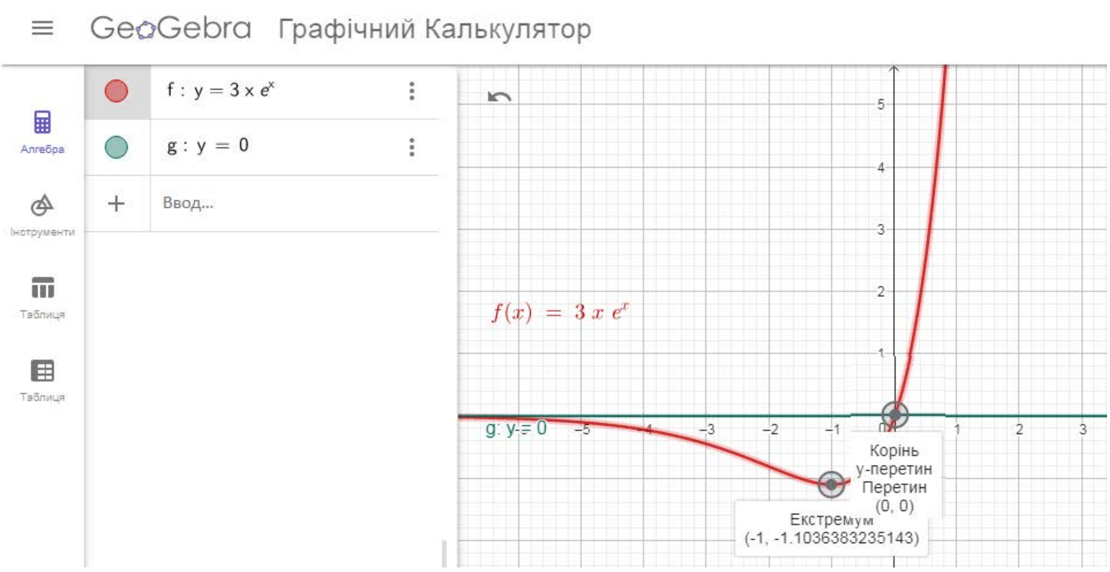


Рис. 17. Графік функції $y=3x\cdot e^x$.

Таблиця похідних

Похідні елементарних функцій	Похідні складених функцій
$C' = 0, \quad x' = 1$	
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(ctgx)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = \dfrac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\mathrm{arctg}\ x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$(\mathrm{arctg}\ u)' = \dfrac{1}{u^2+1} \cdot u'$
$(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$	$(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\dfrac{1}{u^2+1} \cdot u'$

Список літератури

1. Горбатюк В. Г. Вища математика : навч. посіб. / В. Г. Горбатюк, О. П. Сліпухіна, В. П. Таран. – Київ : Центр учбової літератури, 2011. – 368 с.

2. Єфімов А. В. Збірник задач з математики для втузів. Ч. 2. Математичний аналіз. Спеціальні розділи математики : навч. посіб. / А. В. Єфімов, В. С. Потапов. – Київ : Вища школа, 1982. – 344 с.

3. Заїка Ю. В. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної : навч. посіб. / Ю. В. Заїка. – Львів : Магнолія 2006, 2014. – 232 с.

4. Кушнір Л. І. Вища математика. Збірник задач та вправ : навч. посіб. / Л. І. Кушнір, О. В. Кушнір. – Київ : Центр учбової літератури, 2014. – 416 с.

5. Ляшко І. І. Математичний аналіз: Вступ до аналізу, диференціальне та інтегральне числення : підручник / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, С. К. Боярчук. – Київ : Вища школа, 1992. – 496 с.

6. Медведєв М. В. Вища математика : підручник / М. В. Медведєв, Л. Д. Медведєва. – Київ : Вища школа, 2202. – 448 с.

7. Мельник В. І. Вища математика. Практикум : навч. посіб. / В. І. Мельник, В. А. Мельник. – Київ : Центр учбової літератури, 2013. – 264 с.

Електронне навчальне видання

Альона Анатоліївна Коломієць
Надія Борисівна Дубова
Галина Григорівна Кашканова

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Частина 4 Диференціальне числення функції однієї змінної

Рукопис оформила А. А. Кроломієць

Редактор Т. Савчук

Оригінал-макет підготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до видання 19.12.2025 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2025-185

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: rvv.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.