Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи з дисципліни
«Вища математика».
Частина 5. Інтегральне числення: невизначений інтеграл

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика».
Частина 5. Інтегральне числення: невизначений інтеграл

Вінниця
ВНТУ
2026

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 17.04.2025 р.)

Рецензенти:
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор
М. В. Лисий, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Ч. 5. Інтегральне числення: невизначений інтеграл [Електронний ресурс] / уклад.: А. А. Коломієць, О. І. Тютюнник, І. А. Клєопа. – Вінниця : ВНТУ, 2026. – (PDF, 69 с.)

У методичних рекомендаціях представлено зразки розв’язання основних типів інтегралів, з якими студенти найчастіше стикаються під час виконання типових розрахунків, а також у подальшому при розв’язуванні диференціальних рівнянь та визначених інтегралів. Навички обчислення інтегралів є фундаментальними та обов’язковими для студентів.

Методичні вказівки призначені для студентів усіх спеціальностей.

ЗМІСТ

1. НАЙПРОСТІШІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Самостійна робота № 1.1 Таблиця первісних. Табличне інтегрування

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо $F(x)$ неперервна і диференційована на цьому проміжку і виконується рівність $F'(x)=f(x)$.

Для функції $f(x)$ множиною усіх первісних буде $F(x)+C$.

Означення. ***Невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ називається сукупність усіх первісних даної функції.

Невизначений інтеграл позначається символом $\int f(x)dx$, тобто можна записати: $\int f(x)dx = F(x)+C$, де $C \in R$.

В останньому записі функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, добуток $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом*.

Таблиця 1. Властивості невизначених інтегралів

1.1	$(\int f(x)dx)' = f(x)$	Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції
1.2	$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$	Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу
1.3	$\int f'(x)dx = f(x)+C$	Невизначений інтеграл від похідної деякої функції дорівнює сумі цієї функції та константи
1.4	$\int df(x) = f(x)+C$	Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції та константи
1.5	$\int \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right)dx = = c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx$	Лінійність інтеграла
1.6	$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$	Інтегрування складеної функції

Розглянемо таблицю інтегралів основних функцій (таблиця 2)

Таблиця 2. Таблиця інтегралів основних елементарних функцій

1. $\int 0dx = C$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
2'. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	11'. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
2''. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	12'. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int chxdx = shx + C$
4'. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int shxdx = chx + C$
5. $\int \cos xdx = \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$	17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg \frac{x}{2}\right\| + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$	18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	
9'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	

Розглянемо приклади.

Приклад. Знайти інтеграл : $\int (3x^2 - 2x - 1)dx.$

Розв'язання. Використовуючи формулу 2 знаходимо:

$$\int (3x^2 - 2x - 1)dx = \int 3x^2 dx - \int 2xdx - \int 1dx = 3\int x^2 dx - 2\int xdx - \int dx = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - x + C =$$
$$= x^3 - x^2 - x + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{sin2x}{sinx} dx.$

Розв'язання. Скориставшись формулою $sin2x = 2sinx \cdot \cos x$, зводимо під інтегральний вираз до табличного:

$$\int \frac{sin2x}{sinx}dx = \int \frac{2\sin x cosx}{sinx}dx = \int 2cosxdx = 2\int cosxdx = 2sinx + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int (3x-4)^5 dx$.

Розв’язання. Застосуємо властивість 1.6

Маємо $\int (3x-4)^5 dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-4)^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{3}\frac{(3x-4)^6}{6} + C = \frac{(3x-4)^6}{18} + C$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}\ dx.$

Розв’язання.

$$\int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{x + 2x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}dx =$$

$$= \int \left(x^{1-\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}} + x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} \right)dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{7}{12}} + x^{\frac{5}{12}} \right)dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx + \int 2x^{\frac{7}{12}} + \int x^{\frac{5}{12}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + 2\frac{x^{\frac{7}{12}+1}}{\frac{7}{12}+1} + \frac{x^{\frac{5}{12}}}{\frac{5}{12}+1} + C = \frac{x\sqrt[4]{x^3}}{\frac{7}{4}} + 2\frac{x\sqrt[12]{x^7}}{\frac{19}{12}} + \frac{x\sqrt[12]{x^5}}{\frac{17}{12}} + C =$$

$$= x\left(\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^3} + \frac{24}{19}\sqrt[12]{x^7} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^5} \right) + C = 4x\left(\frac{1}{7}\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{19}\sqrt[12]{x^7} + \frac{3}{17}\sqrt[12]{x^5} \right) + C.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \left(2x^8 - 3x^4 + 5x - 1\right)dx$ *Відповідь:* $\frac{2}{9}x^9 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^3 - x + C$

2. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ *Відповідь:* $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + C$

3. $\int \frac{2+3x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$ *Відповідь:* $-\frac{2}{x} + arctgx + C$

4. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$ *Відповідь:* $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$

5. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx$ *Відповідь:* $x^2\left(\frac{2}{5}\sqrt{x}+\frac{9}{7}\sqrt[3]{x}+\frac{18}{13}\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}\right)+C$

6. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ *Відповідь:* $\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$

7. $\int 2^x e^x dx$ *Відповідь:* $\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C$

8. $\int \frac{2+\sqrt{3x^2-x^4}}{\sqrt{3-x^2}}dx$ *Відповідь:* $2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^2}{2}+C$

9. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$ *Відповідь:* $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$

10. $\int ctg^2 x dx$ *Відповідь:* $-ctgx-x+C$

Самостійна робота № 1.2. Інтегрування методом заміни змінної (внесення функції під знак диференціалу)

Ідея методу заміни змінної полягає в тому, щоб шляхом введення нової змінної звести інтеграл до табличного

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{2x-3}dx$.

Розв'язання. Інтеграл не зводиться до табличного раціональними алгебраїчними перетвореннями, але він подібний до табличного інтеграла: $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx.$ Тому доцільно зробити заміну: $2x-3=t.$

Диференціюючи отримаємо:

$$d\left(2x-3\right)=dt,\, 2dx=dt,\, dx=\frac{dt}{2}.$$

Підінтегральний вираз зводиться до табличного:

$$\int\sqrt{2x-3}dx=\int\sqrt{t}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C.$$

Повертаючись до змінної x, будемо мати: $\int\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C$.

Метод ***внесення функції під знак диференціалу*** (також і заміни змінної) застосовуємо, коли під знаком інтеграла є добуток двох функцій, одна із яких є похідною іншої (або можна утворити добуток такого типу). Тобто, якщо підінтегральний вираз можна представити так

$$\int\varphi(f(x))\cdot f'(x)dx$$

Як було вже показано вище, можна робити заміну. Таким чином, щоб представити $f'(x)dx=d(f(x))$.

Тоді, якщо зробити заміну

$$f(x)=t\text{, а}\quad d\left(f(x)\right)=dt$$

То шуканий інтеграл запишеться у вигляді

$$\int\varphi(f(x))\cdot f'(x)dx=\int\varphi(t)dt$$

В переважній більшості, переходимо до нової змінної, тобто використовуємо метод заміни змінної у тих випадках, коли підінтегральний вираз містить функцію та похідну функції. Бувають випадки, коли похідну функції можна «утворити» із одного із співмножників підінтегрального виразу, інший – залишатимемо без змін.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{2xdx}{x^2+1}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз є добутком двох функцій-співмножників $\frac{1}{x^2+1}$ і $2xdx.$

Співмножник $2xdx$ є диференціалом функції $x^2+1.$

Тому заміна $x^2+1=t$ зводить підінтегральний вираз до табличного. Диференціюючи заміну, отримаємо:

$$d\left(x^2+1\right)=dt,$$

$$2xdx=dt.$$

$$\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c=\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\sin^2 x\cos xdx$.

Розв’язання. Підінтегральний вираз є добутком співмножників: $sin^2 x$ і $cosxdx = d(sinx)$. Заміна $Sinx = t$ перетворює $sin^2 x$ у функцію t^2, яку ми вміємо інтегрувати:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Вибір заміни змінної в кожному конкретному випадку залежить від підінтегрального виразу. Загального правила її вибору не існує. Зазвичай за нову змінну позначають функцію від якої знайдено похідну.

Також, якщо підінтегральна функція має вигляд $f(ax+b)$, то може бути корисною заміна $ax + b = t$.

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \left(x^2+1\right)^3 xdx$ *Відповідь:* $\frac{\left(x^2+1\right)^4}{8} + C$

2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+\sin x}}$ *Відповідь:* $2\sqrt{3+\sin x} + C$

3. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$ *Відповідь:* $\frac{1}{\cos x} + C$

4. $\int x^3 \sqrt{2x^4-3} dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{12}\left(2x^4-3\right)\sqrt{2x^4-3} + C$

5. $\int \frac{x^5}{\sqrt{7-x^6}} dx$ *Відповідь:* $-\frac{1}{3}\sqrt{7-x^6+C}$

6. $\int \sqrt{4-3x} dx$ *Відповідь:* $-\frac{2}{9}(4-3x)\sqrt{4-3x} + C$

7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(3x^3-2\right)^2}}$ *Відповідь:* $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3x^3-2} + C$

8. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ *Відповідь:* $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C$

2. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Самостійна робота № 2. Інтегрування частинами

Інтегруванням частинами називається зведення заданого інтеграла $\int udv$ до інтеграла $\int vdu$ за допомогою формули

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{2.1}$$

Ця формула отримується в результаті інтегрування диференціалу добутку функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$.

Теорема. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні. Тоді

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \tag{2.2}$$

<u>Даний метод доцільний</u> *(!) коли під знаком інтеграла є добуток двох функцій, кожна з яких не є похідною іншої і/або коли* $\int vdu$ *знаходиться простіше, аніж* $\int udv$. В якості u вибирається функція, що спрощується диференціюванням, а в якості dv – решта підінтегрального виразу, що містить dx, і з якого можна визначити v шляхом інтегрування.

Зауважимо, що можна застосовувати формулу інтегрування частинами послідовно кілька разів.

Розглянемо деякі типи інтегралів, при знаходженні яких слід застосовувати метод інтегрування частинами. Можливі випадки інтегрування частинами узагальнимо в таблиці 3.

Інтегрування частинами

Таблиця 3. Рекомендації щодо вибору частин U і dV

Вид інтеграла	*u*	*dv*
$\int P_n(x)\left\{\begin{matrix} e^{ax} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^{kx} \end{matrix}\right\}dx$	$P_n(x)$	$dv = \left\{\begin{matrix} e^{ax} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^{kx} \end{matrix}\right\}dx$

$\int P_n(x)\begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ arctg\ x \\ arcctg\ x \\ \ln x \\ \log_a x \end{cases}$	$\arcsin x$ $\arccos x$ $arctg\ x$ $arcctg\ x$ $\ln x$ $\log_a x$	$dv = P_n(x)dx$
$\int e^{\propto x}\begin{Bmatrix} \cos\beta x \\ \sin\beta x \end{Bmatrix}dx$	*Після двократного застосування формули інтегрування частинами у правій частині отримаємо вираз, що містить початковий інтеграл, його знаходимо як розв'язок лінійного алгебраїчного рівняння*	
$\int\begin{Bmatrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{Bmatrix}dx$	$u = \begin{Bmatrix} \sin(lnx) \\ \cos(\ln x) \end{Bmatrix}$	$dv = dx$

Розглянемо кожен випадок окремо.

І) Інтеграл виду $\int x^n \sin\alpha x dx;\quad \int x^n \cos\alpha x dx;\quad \int x^n e^{\alpha x} dx$.

Застосовуємо до даних інтегралів формулу (2.1). Щоб обчислити будь-який інтеграл, треба звести його до табличних інтегралів. Оскільки права частина формули (1) містить у собі інтеграл, то формулу(2.1)є сенс використовувати за умови, що інтеграл у правій частині, а саме $\int vdu.$, буде табличним, або принаймні простішим, аніж інтеграл у лівій частині: $\int udv.$

Застосування формули (2.1) починається з того, що даний інтеграл треба подати у вигляді $\int udv.$ Тобто в умові треба зробити відповідні позначення. Покладемо в інтегралах, що розглядаються за $u = x^n$; через dv позначимо добуток, який залишиться під знаком інтеграла. Тоді, переходячи до $\int vdu$, треба знайти $du = d(x^n) = (x^n)'dx = nx^{n-1}dx$.

Бачимо, що степінь x знизилася на одиницю.

Формулу (2.1) можна застосувати декілька разів, кожного разу знижуючи степінь x на одиницю. Поступово прийдемо до $x^0 = 1$, тобто степенева функція зникне під знаком інтеграла. Залишається один з інтегралів $\int \sin\alpha x dx$, $\int \cos\alpha x dx$, $\int e^{\alpha x} dx$ кожний з яких перетворюється до табличного вигляду за допомогою внесення під знак диференціала.

Правило 1. Для інтегралів $\int x^n \sin\alpha x dx;\quad \int x^n \cos\alpha x dx;\quad \int x^n e^{\alpha x} dx$.

Позначаємо	$u = x^n$; $dv =$усе, що залишилося під знаком інтеграла
Знаходимо	$du = d(x^n) = (x^n)'dx = nx^{n-1}dx$; $v = \int dv = ...$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int xe^x dx$.

Розв'язання.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int x^5 \ln 2x dx$.

Розв'язання.

$$\int x^5 \ln 2x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln 2x, & dv = x^5 dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \int x^5 dx = \dfrac{1}{6}x^6 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{6}x^6 \ln 2x - \int \frac{x^6 dx}{6x} = \frac{x^6}{6}\ln 2x - \frac{1}{36}x^6 + C$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int x \sin x dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз можна подати у вигляді $x \cdot \sin x dx = xd(-\cos x)$. Тут $u = x$, $v = -\cos x$.

Маємо: $\int x \cdot \sin x dx = \int xd(-\cos x) = -x \cdot \cos x - \int (-\cos x)dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx.$

Розв'язання. В цьому прикладі потрібно інтегрувати частинами двічі.

$$\int x^2\cos\frac{x}{3}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=x^2, & dv=\cos\frac{x}{3}dx \\ du=2xdx, & v=\int\cos\frac{x}{3}dx=3\int\cos\frac{x}{3}d\left(\frac{x}{3}\right)=3\sin\frac{x}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=3x^2\sin\frac{x}{3}-\int 6x\sin\frac{x}{3}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=6x, & dv=\sin\frac{x}{3}dx \\ du=6dx, & v=\int\sin\frac{x}{3}dx=3\int\sin\frac{x}{3}d\left(\frac{x}{3}\right)=-3\cos\frac{x}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=3x^2\sin\frac{x}{3}-(-18x\cos\frac{x}{3}+18\int\cos\frac{x}{3}dx)=3x^2\sin\frac{x}{3}+18x\cos\frac{x}{3}-18\cdot 3\int\cos\frac{x}{3}d\left(\frac{x}{3}\right)=$$

$$=3x^2\sin\frac{x}{3}+18x\cos\frac{x}{3}-54\sin\frac{x}{3}+C$$

II) Інтеграли виду

$$\int x^n\arcsin axdx;\ \int x^n\arccos\ xdx;\ \int x^n arctg\ axdx;\ \int x^n arcctg\ axdx;\ \int x^n\ln axdx.$$

До даних інтегралів застосовуємо формулу (2.1).
Оберемо функцію $u(x)$ і диференціал $dv(x)$ так, щоб внаслідок застосування формули (1) інтеграл у правій частині формули був простіший, ніж вихідний інтеграл. У даному випадку треба позначити $dv=x^n dx$, а за $u(x)$ взяти функцію, яка залишилася під знаком інтеграла. Тоді , переходячи до $\int vdu,$ ми знаходимо

$$du=(\ln ax)'dx=\frac{1}{ax}adx=\frac{1}{x}dx$$

або $du=d(\arcsin\ ax)=(\arcsin\ ax)'dx=\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$ і так далі. Бачимо, що трансцендентні функції $\ln\alpha x,\ \arcsin\alpha x,\ \arccos\alpha x,\ \mathrm{arc}\,tg\alpha x,\ \mathrm{arc}\,ctg\alpha x$ під час знаходження $du(x)$. зникають. Дійсно, похідна $u'(x)$. в усіх розглянутих випадках є алгебраїчною функцією. Тому інтеграл у правій частині формули (2.1) буде простішим, ніж вихідний інтеграл. Сформулюємо правило 2.

Правило 2. Для інтегралів

$$\int x^n\arcsin\alpha xdx;\ \int x^n\arccos\alpha xdx;\ \int x^n\,\mathrm{arc}\,tg\alpha xdx;\ \int x^n\,\mathrm{arc}\,ctg\alpha xdx;\ \int x^n\ln\alpha xdx.$$

Позначимо	$dx = x^n dx$; $u =$ функція, яка залишилася під знаком інтеграла
Знаходимо	$v = \int dv = \dots\,; du = u'(x)dx = \dots$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int x arctg 2x dx$

Розв'язання.

$$\int\ x\,arctg 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} dv = xdx;\ u = arctg\,2x; \\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2};\ du = d(arctg\,2x) = \\ = (arctg\,2x)'dx = \dfrac{1}{1+4x^2}\cdot 2dx = \dfrac{2dx}{1+4x^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg 2x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2dx}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2} arctg 2x - \int \frac{x^2 dx}{1+4x^2} =$$

$$\frac{x^2}{2} arctg 2x - \frac{1}{4}\int \frac{4x^2}{1+4x^2}dx = \frac{x^2}{2} arctg 2x - \frac{1}{4}\int \frac{(4x^2+1)-1}{1+4x^2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2} arctg 2x - \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2} arctg 2x - \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot\frac{d(2x)}{(2x)'} = \frac{x^2}{2} arctg 2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \mathrm{ar}\,ctg 2x - 2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} arctg 2x + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int (3x^2+2x)\ln x dx$.

Розв'язання.

$$\int (3x^2+2x)\ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} dv = (3x^2+2x)dx;\ u = \ln x; \\ v = \int dv = \int (3x^2+2x)dx = 3\cdot\dfrac{x^3}{3} + 2\cdot\dfrac{x^2}{2} = \\ = x^3 + x^2;\ du = d(\ln x) = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}dx \end{array} \right\} =$$

$$(x^3+2x)\ln x - \int (x^3+x^2)\frac{1}{x}dx = (x^3+x^2)\ln x - \int (x^2+x)dx =$$

$$(x^3+2x)\ln x - \int x^2 dx - \int xdx = (x^3+x^2)\ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

Зауваження. Правило 2 застосовується не лише до вказаних стандартних інтегралів. Якщо перехід від $\int udv$ до $\int vdu$ дає змогу позбутися таких трансцендентних функцій, як $\ln\alpha x,\ \arcsin\alpha x,\ \arccos\alpha x,\ \mathrm{arc}\,tg\alpha x,\ \mathrm{arc}\,ctg\alpha x$ і приводить до табличного інтеграла, то доцільно використовувати правило 2 .

Приклад. Знайти інтеграл: $\int xe^{2x}dx$

Розв'язання.

$$\int xe^{2x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x, & dv = e^{2x}dx \\ du = dx, & v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

III) Інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx;\ \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx;\ \int\cos(\ln x)dx;\ \int\sin(\ln x)dx$.

Для такого типу інтегралів формулу інтегрування частинами потрібно застосувати два рази. Обидва рази за $u(x)$ треба брати тригонометричну функцію або для перших двох інтегралів показникові функції. За $dv(x)$ береться усе, що залишилося під знаком інтеграла. Внаслідок двократного застосування формули (2.1) отримаємо рівність, яку треба розглядати як рівняння відносного вихідного інтеграла. Знаходимо шуканий інтеграл із цього рівняння.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int e^{x}\cos xdx$.

Розв'язання.

$$\int e^{x}\cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{x};\ du = \cos x\,dx; \\ du = d(e^{x}) = (e^{x})'dx = e^{x}dx; \\ v = \int dv = \int\cos x\,dx = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{x}\sin x - \int\sin x\cdot e^{x}dx. \qquad (*)$$

До інтеграла $\int e^{x}\sin xdx$ знову застосуємо формулу (2.1), причому обов'язково через $u(x)$ позначимо ту саму функцію e^{x}.

$$\int e^x \sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x;\ du = d(e^x) = e^x dx; \\ dv = \sin x dx;\ v = \int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)\cdot e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Підставимо вираз для $\int e^x \sin x\,dx$ в (*), отримаємо

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \sin x - (-e^x\ \cos x + \int e^x \cos x\ dx) = e^x \sin x + e^x \cos x -$$

$$-\int e^x \cos x dx.$$

У правій частині рівності ми отримали вихідний інтеграл, але з протилежним знаком. Ця рівність є рівнянням відносного інтеграла $\int e^x \cos x dx = I$.

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I + 2C. \qquad 2I = e^x(\sin x + \cos x) + 2C.$$

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C. \qquad \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Зауваження. У інтегралах виду $\int e^{\alpha x} \cos bx dx$, $\int e^{\alpha x} \sin bx dx$, $\int \cos(\ln x) dx$, $\int \sin(\ln x) dx$ суттєвим є те, що обидва рази у формулі (2.1) за $u(x)$ береться однотипна функція, чи тригонометрична, чи показникова. Якщо порушити цю умову, то після двох застосувань формули (2.1) перейдемо до тотожності $0 = 0$, із якої нічого не можна знайти.

Розглянемо деякі розв'язання прикладів, які не ввійшли до попередніх типів, але теж розв'язуються із використанням методу інтегрування частинами.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} & v = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx \end{array} \right\} = -xctgx + \int ctgx dx =$$

$$= -xctgx + \int \frac{cosxdx}{sinx} = -xctgx + \int \frac{d(sinx)}{sinx} = -xctgx + \ln|\sin x| + \mathrm{C}$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{\ln(arctgx)}{1+x^2}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\ln(arctgx)}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{c} u = \ln\left(arctgx\right), du = \frac{1}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = \frac{dx}{1+x^2}, v = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \end{array} \right\} =$$

$$= arctgx \cdot \ln\left(arctgx\right) - \int arctgx \cdot \frac{1}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx \cdot \ln\left(arctgx\right) -$$

$$-\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx \cdot \ln\left(arctgx\right) - arctgx + C = arctgx\left(\ln\left(arctgx\right) - 1\right) + C$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int x\sin 2x$ *Відповідь:* $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + C$

2. $\int x3^x dx$ *Відповідь:* $3^x \log_2^3 e\left(x\ln 3 - 1\right) + C$

3. $\int \arccos x dx$ *Відповідь:* $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

4. $\int arctg\sqrt{x}dx$ *Відповідь:* $xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C$

5. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$ *Відповідь:* $x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + arctgx + C$

6. $\int \frac{\lg x}{x^3} dx$ *Відповідь:* $C - \frac{1}{2x^2}\lg\left(x\sqrt{e}\right)$

7. $\int x^3 e^x dx$ *Відповідь:* $e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C$

8. $\int \ln^2 x dx$ *Відповідь:* $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$

9. $\int x^2\cos^2 x dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C$

10. $\int e^{2x}\cos 3x dx$ *Відповідь:* $\frac{e^{2x}}{13}\left(3\sin 3x + 2\cos 3x\right) + C$

3. ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Самостійна робота № 3.1 Інтегрування елементарних дробів 1-го, 2-го та 3-го типу

Інтегрування елементарних дробів 1-го типу

Елементарний дріб 1-го типу $\frac{A}{x-a}$ інтегрується за табличною формулою

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \; \text{\textit{де}}\ \mathrm{u} = x - a.$$

А саме,

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{7dx}{x-5}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{7dx}{x-5} = 7\ln|x-5| + C.$$

Інтегрування елементарних дробів 2-го типу

Елементарний дріб 2-го типу $\frac{A}{(x-a)^k}$, де $k \geq 2$, інтегрується за табличною формулою $\int \frac{dz}{z^k} = \frac{z^{-k+1}}{-k+1} + C, \; \text{\textit{де}}\ z = x - a.$

А саме,

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{-2}{(x+3)^5} dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{-2}{(x+3)^5} dx = -2\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^5} = -2\int (x+3)^{-5} d(x+3) = -2\frac{(x+3)^{-5+1}}{-5+1} + C =$$

$$= -2\frac{(x+3)^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{2(x+3)^4} + C.$$

Якщо під знаком інтеграла міститься дробово-раціональна функція, у чисельнику якої константа, а знаменник – многочлен, дискримінант якого $D < 0,$ тобто такого виду інтеграли $\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx$.То такі інтеграли заводять до табличних, виділяючи у знаменнику повний квадрат.

Тут пригадаємо формули

$$a^2 + 2ab + b^2 = (\mathrm{a} + \mathrm{b})^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (\mathrm{a} - \mathrm{b})^2$$

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = (x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p^2}{4} - q)$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{7}{x^2 + 5x - 1} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{7}{x^2 + 5x - 1} dx = \int \frac{7dx}{x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + (\frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 - 1} = \int \frac{7dx}{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} - 1} = \int \frac{7dx}{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{29}{4}} =$$

$$= \int \frac{7dx}{(x - \frac{5}{2})^2 - \sqrt{\frac{29}{4}}^2} = 7\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{29}{4}}} \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{29}{4}} - (x-5)}{\sqrt{\frac{29}{4}} + (x-5)}\right| + C$$

Інтегрування елементарних дробів 3-го типу

Елементарний дріб 3-го типу $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ (де $D = p^2 - 4q < 0$) інтегрується за спеціальним алгоритмом.

Алгоритм інтегрування дробів

1-й крок. У чисельнику запишемо похідну від знаменника, $(x^2+px+q)'=2x+p$. Дужку $(2x+p)$ помножимо на таку сталу, щоб коефіцієнти при x у першому та у другому інтегралах збіглися. Потім за дужкою віднімемо таку сталу, щоб вільний член у чисельнику став нулем, а саме, віднімемо сталу $\frac{A\cdot p}{2}$. Нарешті додамо у чисельнику сталу B. Тепер чисельники першого та другого інтегралів відрізняються лише формою запису. Але саме така форма запису чисельника дозволяє даний інтеграл звести до табличних інтегралів. А саме,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int \frac{\left(\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{A\cdot p}{2}\right)}{x^2+px+q}dx.$$

2-й крок. Останній інтеграл запишемо у вигляді суми двох інтегралів, а саме

- до чисельника першого інтеграла відносимо перший доданок: $\frac{A}{2}(2x+p)$,

- до чисельника другого інтеграла відносимо другий доданок: $B-\frac{A\cdot p}{2}$

$$\int \frac{\left(\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{A\cdot p}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx+\int \frac{B-\frac{A\cdot p}{2}}{x^2+px+q}dx.$$

3-й крок. Перший з двох останніх інтегралів перетворюємо до табличного вигляду внесенням під знак диференціалу квадратного тричлену x^2+px+q.

$$\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int \frac{(x^2+px+q)'\cdot dx}{x^2+px+q}=\left\{\begin{matrix} dz(x)= \\ =z'(x)dx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}=\left\{\text{за формулою } \int \frac{dz}{z}=\ln|z|+C\right\}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+C.$$

4-й крок. Другий з інтегралів 2-го кроку перетворюємо до табличного вигляду *<u>виділенням повного квадрату в знаменнику</u>* та подальшим внесенням під знак диференціалу

$$\int \frac{B-\frac{A\cdot p}{2}}{x^2+px+q}dx=\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}=$$

$$=\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2-(\frac{p^2}{4}-q)}=\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2-(\frac{p^2-4q}{4})}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{\textit{за означенням елементарні дроби }} 3-\text{\textit{го та }} 4-\text{\textit{го типів у знамен}}-\\ \text{\textit{нику мають квадратний тричлен з дискримінантом }} \mathrm{p}^2-4q<0;\\ \text{\textit{тоді }} 4q-p^2>0.\end{matrix}\right\}=$$

$$=\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+(\frac{4q-p^2}{4})}=\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}=$$

$$=\left\{\text{\textit{за формулою }}\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}\cdot arctg\frac{z}{a}+C, \text{\textit{де }} z=x+\frac{p}{2},\ a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right\}=$$

$$=\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}+C=\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}=\left\{\begin{matrix}\text{\textit{робимо перетворення з метою отримати у чисельнику}}\\ \text{\textit{похідну від знаменника, домножимо на }} 8 \text{\textit{ і на }} \frac{1}{8}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{8}\cdot 8(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{\frac{1}{8}\cdot 3(8x-\frac{8}{3})dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{3}{8}\cdot\frac{8x-4+4-\frac{8}{3}}{4x^2-4x+17}dx=$$

$$=\int\frac{\frac{3}{8}\cdot(8x-4)+\frac{3}{8}\cdot 4-1}{4x^2-4x+17}dx=\{\text{\textit{перейдемо до суми двох інтегралів; див. }} 2-\text{\textit{й крок}}\}=$$

$$=\frac{3}{8}\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x+17}+\left(\frac{3}{8}\cdot 4-1\right)\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}=\frac{3}{8}\cdot I_1+\frac{1}{2}\cdot I_2.\ \text{\textit{Знайдемо }} \mathrm{I}_1,\ \text{\textit{див. }} 3-\text{\textit{й крок.}}$$

$$I_1=\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{\left(4x^2-4x+17\right)'\cdot dx}{4x^2-4x+17}=\int\frac{d\left(4x^2-4x+17\right)}{4x^2-4x+17}=\ln\left|4x^2-4x+17\right|+C_1.$$

$$I_2=\int\frac{dx}{4x^2-4x+17}=\{\textit{див. 4-й крок}\}\int\frac{dx}{4(x^2-x+\frac{17}{4})}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C=\frac{1}{8}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+C_2.$$

Знайдені вирази інтегралів I_1 *та* I_2 підставимо у вихідний інтеграл.

$$\int\frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}=\frac{3}{8}\cdot I_1+\frac{1}{2}\cdot I_2=\frac{3}{8}\cdot\left(\ln\left|4x^2-4x+17\right|+C_1\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+C_2\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\ln\left|4x^2-4x+17\right|+\frac{1}{16}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+\left(\frac{3}{8}\cdot C_1+\frac{1}{2}\cdot C_2\right)=\left\{\textit{позначимо}:\ \frac{3}{8}\cdot C_1+\frac{1}{2}\cdot C_2=C\right\}=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\ln\left|4x^2-4x+17\right|+\frac{1}{16}\cdot arctg\frac{2x-1}{4}+C.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int\frac{4}{3x-1}dx$ *Відповідь:* $\frac{4}{3}\ln\left|3x-1\right|$

2. $\int\frac{5}{(x+1)^3}dx$ *Відповідь:* $-\frac{5}{2(x+1)^2}$

3. $\int\frac{dx}{2x^2+x+3}$ *Відповідь:* $\frac{2}{\sqrt{23}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{23}}$

(Вказівка: утворити повний квадрат у знаменнику дробу).

4. $\int\frac{(3x-1)}{x^2+3x+9}dx$ *Відповідь:* $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+3x+9\right)-\frac{11}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+3}{3\sqrt{3}}$

(Вказівка: утворити повний квадрат у знаменнику).

5. $\int\frac{(4x-1)}{2x^2+x+1}dx$ *Відповідь:* $\ln\left(2x^2+x+1\right)-\frac{4}{\sqrt{7}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{7}}$

(Вказівка: спочатку у чисельнику утворити похідну знаменника, розділити підінтегральну функцію на два дроби, у другому дробі утворити повний квадрат у знаменнику).

Самостійна робота № 3.2 Метод невизначених коефіцієнтів інтегрування раціональних функцій

Перш за все будемо розділяти інтегрування правильних дробів $\int \frac{P_m(\mathrm{x})}{Q_n(\mathrm{x})}$, де $m < n$ і неправильних дробів $\int \frac{P_m(\mathrm{x})}{Q_n(\mathrm{x})}$, де $m \geq n$.

$P_m(\mathrm{x})$ і $Q_n(\mathrm{x})$ – многочлени відповідно степенів m і n.

Розглянемо інтегрування правильних дробів

Тут розглянемо такі випадки:

Випадок 1. Корені знаменника – лише дійсні числа, серед яких немає рівних.

Випадок 2. Корені знаменника – дійсні числа, серед яких є рівні (знаменник має дійсні рівні корені).

Доцільно розглянути теорему про розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів, розбивши її на декілька частин.

I. Нехай маємо $\frac{P_m(\mathrm{x})}{Q_n(\mathrm{x})}$ – правильний раціональний дріб, знаменник якого має дійсні різні корені, так що знаменник можна представити у вигляді:

$$Q_n(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-\mathrm{a})(\mathrm{x}-\mathrm{b})...(\mathrm{x}-\mathrm{d})$$

Тоді згідно загальної теореми можна записати суму елементарних дробів першого типу.

$$\frac{P_m(\mathrm{x})}{Q_n(\mathrm{x})} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + ... + \frac{E}{x-e}$$

Як бачимо, задача звелася до знаходження невизначених коефіцієнтів. Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}dx$.

Розв'язання.

Потрібно підінтегральний вираз розкласти на суму елементарних дробів. Для цього розкладемо квадратичний тричлен на множники.

$$4x^2 - 16x + 15 = 0,\ D = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4\cdot 4\cdot 15 = 256 - 240 = 16.$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{16+4}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2,5;\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{16-4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Тоді знаменник дробу приймає вигляд:

$$(2x-1)(4x^2-16x+15)=(2x-1)\cdot 4(x-1,5)(x-2,5)=$$
$$=2\cdot 4(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)=8(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5).$$

Перепишемо окремо підінтегральну функцію і розкладемо її на суму елементарних дробів.

$$f(x)=\frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}=\frac{32x}{8(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}=\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}.$$

Знаменник дробу має корені лише дійсні різні числа. За правилом розкладання кожному множнику знаменника відповідає один елементарний дріб 1-го типу.

$$\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}=\frac{A}{x-0,5}+\frac{B}{x-1,5}+\frac{C}{x-2,5}.$$

Тобто вихідний інтеграл дорівнюватиме сумі трьох інтегралів:

$$\int\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}dx=\int(\frac{A}{x-0,5}+\frac{B}{x-1,5}+\frac{C}{x-2,5})dx.$$

Потрібно знайти невизначені коефіцієнти A, B, C.

Зведемо до спільного знаменника доданки, що містять невизначені коефіцієнти

$$f(x)=\frac{A}{x-0,5}+\frac{B}{x-1,5}+\frac{C}{x-2,5}=\frac{A(x-1,5)(x-2,5)+B(x-0,5)(x-2,5)+C(x-0,5)(x-1,5)}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}.$$

Тепер ми маємо рівність двох раціональних функцій:

$$f(x)=\frac{4x}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}=\frac{A(x-1,5)(x-2,5)+B(x-0,5)(x-2,5)+C(x-0,5)(x-1,5)}{(x-0,5)(x-1,5)(x-2,5)}.$$

Ці функції мають однакові знаменники, тобто для їх рівності повинні бути рівними чисельники дробів. Прирівняємо чисельники дробів:

$$4x=A(x-1,5)(x-2,5)+B(x-0,5)(x-2,5)+C(x-0,5)(x-1,5).(*)$$

Застосуємо спосіб *конкретних числових значень* для знаходження A, B, C. Відомо, що дві функції рівні, якщо збігаються їх значення при будь-яких значеннях x із області визначення. Саме цей факт лежить в основі способу конкретних числових значень. Спосіб полягає у тому, щоб надавати х будь-які числові значення із області визначення. Якщо х замінюється числом, рівність (1) перетворюється на рівняння відносно невідомих A, B,... . Треба взяти стільки різних числових значень x скільки невідомих невизначених коефіцієнтів A, B,… є в останній рівності. Якщо корені знаменника дійсні та однократні (кожна дужка знаменника лінійна та має перший степінь), то найкраще надавати x числові значення, які збігаються з коренями знаменника. Внаслідок цих дій отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження числових значень невизначених коефіцієнтів A, B,… .

Застосуємо цей спосіб до нашого прикладу. Рівність (*) має три невизначених коефіцієнта A, B, C. Тобто треба надати x три різних числових значення. Надамо x числові значення, які збігаються з коренями знаменника функції $f(x)$. А саме, $x_1 = 0,5;\ x_2 = 1,5;\ x_3 = 2,5.$ Як результат, отримаємо три рівняння для знаходження значень невизначених коефіцієнтів A,B,C.

А саме,

$$4x = A(x-1,5)(x-2,5) + B(x-0,5)(x-2,5) + C(x-0,5)(x-1,5).$$

$$x = 0,5;\ \textit{тоді}:\ 4\cdot 0,5 = A(0,5-1,5)(0,5-2,5) + B(0,5-0,5)(0,5-2,5) + C(0,5-0,5)(0,5-1,5).$$
$$2 = A(-1)(-2) + B\cdot 0 + C\cdot 0;\quad 2 = 2A;\ A = 1.$$

$$x = 1,5;\ \textit{тоді}:\ 4\cdot 1,5 = A(1,5-1,5)(1,5-2,5) + B(1,5-0,5)(1,5-2,5) + C(1,5-0,5)(1,5-1,5).$$
$$6 = A\cdot 0 + B\cdot 1\cdot(-1) + C\cdot 1\cdot 0;\quad 6 = -B;\ B = -6.$$

$$x = 2,5;\ \textit{тоді}:\ 4\cdot 2,5 = A(2,5-1,5)(2,5-2,5) + B(2,5-0,5)(2,5-2,5) + C(2,5-0,5)(2,5-1,5).$$
$$10 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 2\cdot 1;\quad 10 = 2C;\ C = 5.$$

$$\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}dx = \int \left(\frac{1}{x-0,5} - \frac{6}{x-1,5} + \frac{5}{x-2,5}\right)dx = .$$
$$= \ln|x-0,5| - 6\ln|x-1,5| + 5\ln|x-2,5| + C$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$.

Розв'язання.

Розкладемо знаменник на елементарні множники

$$x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$$

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-2} \Rightarrow x^2+x-1 = A(x-2)(x+3) + B(x+3)x + C(x-2)x$$

$$x=0:\quad -1=-6A \Rightarrow A=\frac{1}{6};$$

$$x=2:\quad 5=10B \Rightarrow B=\frac{1}{2};\; x=-3:\quad 5=15C \Rightarrow C=\frac{1}{3}.$$

$$I=\int\left(\frac{1}{6}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+3|+C$$

II. Нехай маємо $\dfrac{P_m(\mathrm{x})}{Q_n(\mathrm{x})}$ – правильний раціональний дріб, знаменник якого має дійсні різні корені, так що знаменник можна представити у вигляді:

$$Q_n(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}(\mathrm{x}-\mathrm{b})^{\beta}...(\mathrm{x}-\mathrm{d})^{\gamma},$$

де α, β, γ числа, що визначають кратність коренів. В цьому випадку підінтегральний вираз – дріб можна розкласти на суму елементарних дробів першого і другого типу. При чому співмножнику $(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}$ відповідатиме сума дробів $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+...+\dfrac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$. Аналогічним чином записується відповідність для решти співмножників.

Тобто знаменник має дійсні кратні корені

$$\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$$

Підінтегральна функція дорівнюватиме сумі інтегралів.

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+4}+\frac{D}{(x+4)^2}$$

Зведемо дроби правої частини рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельник одержаного виразу до чисельника заданої підінтегральної функції.

$$x^2=A(x+2)(x+4)^2+B(x+4)^2+C(x+4)(x+2)^2+D(x+2)^2$$

В цьому випадку застосуємо комбінований метод для визначення невизначених коефіцієнтів. Спочатку застосуємо <u>*метод підстановки конкретних значень*</u>, а потім прирівняємо коефіцієнти при невідомих з однаковими показниками степенів.

$x=-2, \quad 4=4B \Rightarrow B=1$

$x=-4, \quad 16=4D \Rightarrow D=4$

$x^2: \quad 1=10A+B+8C+D$ $\qquad \begin{cases} 1=10A+1+8C+16, \\ 0=32A+16+16C+16; \end{cases} \begin{cases} -16=10A+8C, \\ -32=32A+16C; \end{cases} \begin{cases} A=0, \\ C=-2. \end{cases}$

$x^0: \quad 0=32A+16B+16C+4D$

$$I=\int\left(\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{-2}{x+4}+\frac{4}{(x+4)^2}\right)dx=\int\frac{dx}{(x+2)^2}-2\int\frac{dx}{x+4}+4\int\frac{dx}{(x+4)^2}=-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x+4}-2\ln|x+4|+C$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

Розв'язання.

Знаменник підінтегрального виразу розкладається на множники 2-го і 1-го степеня. Застосуємо теорему про розклад. Множнику x^2+1 відповідає вираз $Mx+N$ у чисельнику дробу із знаменником x^2+1.

Зведемо до спільного знаменника дроби правої частини рівності. Прирівнюємо чисельники початкового підінтегрального дробу та одержаного виразу:

$$\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

$$x^3+3x^2-3x+1=M(x^3+2x^2+x)+N(x^2+2x+1)+A(x^3+x^2+x+1)+B(x^2+1). \qquad (**)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових показниках степенів:

$x^3: \quad 1=M+A$

$x^2: \quad 3=2M+N+A+B$

$x: \quad -3=M+2N+A$

$x^0: \quad 1=N+A+B$

$$x=-1, \ \text{то} \ 6=2B \Rightarrow B=3$$

$$\begin{cases} 2M+N+A=0, \\ M+2N+A=-3, \\ M+A=1 \end{cases} \begin{cases} N=-2, \\ 2M+A=2, \\ M+A=1 \end{cases} \begin{cases} N=-2, \\ M=1, \\ A=0 \end{cases}$$

Знайдені значення невизначених коефіцієнтів підставляємо в (**)

$$\int\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\int\frac{x-2}{x^2+1}dx+\int\frac{3}{(x+1)^2}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{-2}{x^2+1}dx+$$
$$+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-2\operatorname{arctg}x-\frac{3}{x+1}+C$$

Завдання для самостійного виконання

Розкласти правильну раціональну функцію на суму елементарних дробів.

1. $\dfrac{2x+1}{x^2+2x-8}$ *Відповідь:* $\dfrac{5}{6(x-2)}+\dfrac{7}{6(x+4)}$

2. $\dfrac{x^2+2x-5}{(x-1)^2(x+3)}$ *Відповідь:* $\dfrac{9}{8(x-1)}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}+\dfrac{1}{8(x+3)}$

3. $\dfrac{4x+5}{x^3-2x^2-x+2}$ *Відповідь:* $\dfrac{1}{6(x+1)}-\dfrac{9}{2(x-1)}+\dfrac{13}{3(x-2)}$

4. $\dfrac{3x^2+x+7}{(x-5)(x+3)(x+2)}$ *Відповідь:* $\dfrac{31}{8(x+3)}+\dfrac{87}{56(x-5)}-\dfrac{17}{7(x+2)}$

Обчислити інтеграл.

1. $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$ *Відповідь:* $\ln\left|\dfrac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$ *Відповідь:* $-\dfrac{1}{4(x-1)^2}-\dfrac{3}{8(x-1)}+\dfrac{5}{32}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|+C$

3. $\displaystyle\int\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$ *Відповідь:* $\ln\dfrac{\sqrt{|x+1|^3\cdot|x+3|}}{(x+2)^2}+C$

4. $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx.$ *Відповідь:*

$$\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\ln|x+2|+C.$$

Самостійна робота № 3.3. Інтегрування неправильних дробів

Розглянемо інтегрування неправильних дробів $\int \frac{P_m(\mathrm{x})}{Q_n(\mathrm{x})}$, *де* $m \geq n$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{x^4+2x^3+4x+4}{x^2+2x+2}dx$.

Розв'язання.

Перетворимо неправильний дріб у правильний. Для цього поділимо многочлен четвертого степеня x^4+2x^3+4x+4 на многочлен другого степеня x^2+2x+2:

$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3+4x+4 & x^2+2x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+2x^3+2x^2} & x^2-2 \\
\quad -2x^2+4x+4 & \\
\quad \underline{-2x^2-4x-4} & \\
\qquad\quad 8x+8 &
\end{array}$$

Отримали інтеграл

$$\int (x^2-2+\frac{8x+8}{x^2+2x+2})dx=\int x^2dx-2\int dx+\int \frac{8x+8}{x^2+2x+2}dx=\frac{x^3}{3}-2x+4\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$$

Бачимо, що останній інтеграл є інтегралом третього типу. При чому у чисельнику вже є похідна знаменника. $(x^2+2x+2)'=2\mathrm{x}+2$. Тому інтеграл запишеться наступним чином:

$$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}\left\{\begin{array}{l}\text{ввівши заміну } x^2+2x+2=t\\ d(x^2+2x+2)=dt,\ \text{отримаємо}\end{array}\right\}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=$$

$$=\{\text{Повернемося до заміни}\}=\ln\left|x^2+2x+2\right|+C$$

Завдання для самостійного виконання

Обчислити інтеграл.

1. $\int\frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx$ *Відповідь:* $\frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+5)^{10}}{(x-1)^2}+\frac{95}{3\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$

2. $\int\frac{x^4-3x^3-11x^2+4x+15}{x^3-5x^2-x+5}dx$ *Відповідь:*

$$\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{5}{12}\ln|x-5|+C$$

Самостійна робота № 3.4. Рекурентні формули

Рекурентною формулою називається співвідношення $a_{n+1}=F(n,a_n)$, яке дозволяє обчислити будь-який член послідовності $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n,\ a_{n+1},\dots$ за умови, що попередні члени цієї послідовності відомі. Наприклад, рекурентними є формула загального члена геометричної прогресії, $a_{n+1}=a_n g$ (знаменник прогресії $g\neq 0$), та формула загального члена арифметичної прогресії, $a_{n+1}=a_n+d;$ d *– різниця прогресії.*

Рекурентні формули існують також в інтегральному численні. Розглянемо інтеграли:

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+A)^n}\quad i\quad I_{n+1}=\int\frac{dx}{(x^2+A)^{n+1}},\ n=1,2,3,\dots$$

Виразимо інтеграл $\cos x a \sin x$ через інтеграл $\cos x m a \sin x$. Застосуємо для цього формулу інтегрування частинами.

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+A\right)^n} = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{dx}{\left(x^2+A\right)^n}; dv = dx; du = d\left(\frac{dx}{\left(x^2+A\right)^n}\right) = \\ = \left(\frac{dx}{\left(x^2+A\right)^n}\right)' dx = \left(\left(x^2+A\right)^{-n}\right)' dx = \\ = -n\left(x^2+A\right)^{-n-1} 2x dx = \frac{-2nx dx}{\left(x^2+A\right)^{n+1}}; \\ v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+A\right)^n} - \int x \frac{-2nx dx}{\left(x^2+A\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+A\right)^n} + 2n\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+A\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+A\right)^n} + 2n\int \frac{(x^2+A)-A}{\left(x^2+A\right)^{n+1}} dx = \frac{x}{\left(x^2+A\right)^n} +$$

$$+2n\int \frac{x^2+A}{\left(x^2+A\right)^{n+1}} dx - 2nA\int \frac{dx}{\left(x^2+A\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+A\right)^n} +$$

$$+2n\int \frac{dx}{\left(x^2+A\right)^n} - 2nA\int \frac{dx}{\left(x^2+A\right)^{n+1}};$$

Маємо рівність: $I_n = \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2nI_n - 2nAI_{n+1}$.

Із цієї рівності виразимо I_{n+1} через I_n.

$$2nAI_{n+1} = \frac{x}{(x^2+A)^n} + 2nI_n - I_n,$$

$$2nAI_{n+1} = \frac{x}{(x^2+A)^n} + (2n-1)I_n.$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{2nA}\frac{x}{(x^2+A)^n}+\frac{2n-1}{2nA}I_n \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) є рекурентною формулою. Дійсно, для послідовності, інтегралів I_1, I_2, ... I_n, I_{n+1}, ... будь-який елемент цієї послідовності I_{n+1}, виражається через елемент I_n. В свою чергу, інтеграл I_n виражається через I_{n-1} і так далі до I_1. Інтеграл I_1 є табличним, причому можливі два випадки:

$$A=a^2 \text{ тоді } I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\,,$$

$$A=-a^2 \text{ тоді } I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

Формулу (3.1) перепишемо, підставивши відповідні інтеграли.

$$\int\frac{dx}{(x^2+A)^{n+1}}=\frac{1}{2nA}\frac{x}{(x^2+A)^n}+\frac{2n-1}{2nA}\int\frac{dx}{(x^2+A)^n} \qquad (3.2)$$

Розглянемо приклад застосування останньої формули.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{dx}{(x^2-4)^3}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\left(x^2-4\right)^3}=\begin{Bmatrix} n+1=3; n=2 \\ A=-4 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2\cdot2\cdot(-4)}\cdot\frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}+$$
$$+\frac{2\cdot2-1}{2\cdot2\cdot(-4)}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2-4\right)^2}=-\frac{1}{16}\frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}-\frac{3}{16}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2-4\right)^2} \qquad (3.3)$$

До $\int\frac{dx}{(x^2-4)^2}$ знову застосуємо формулу (3.2). Тепер $n+1=2,\ n=1,\ A=-4.$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{1}{2\cdot1\cdot(-4)}\cdot\frac{x}{\left(x^2-4\right)}+\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1\cdot(-4)}\cdot\int\frac{dx}{x^2-4}=$$

$$=-\frac{1}{8}\frac{x}{\left(x^2-4\right)}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2\cdot2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C=-\frac{1}{8}\frac{x}{\left(x^2-4\right)}-\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

Знайдений вираз для $\int\frac{dx}{(x^2-4)^2}$ підставимо в (3.3):

$$\int\frac{dx}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{-x}{16\left(x^2-4\right)^2}-\frac{3}{16}\left(-\frac{1}{8}\frac{x}{\left(x^2-4\right)}-\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.\right)=$$

$$=\frac{-x}{16\left(x^2-4\right)^2}+\frac{3}{128}\frac{x}{\left(x^2-4\right)}+\frac{3}{512}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\frac{3}{16}C=\left\{-\frac{3}{16}C=C_1\right\}=$$

$$=\frac{-x}{16\left(x^2-4\right)^2}+\frac{3}{128}\frac{x}{\left(x^2-4\right)}+\frac{3}{512}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C_1.$$

Формулу (3.2) зокрема використовують для інтегрування елементарних дробів четвертого типу. Саме це питання розглянемо.

Самостійна робота № 3.5. Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

Елементарний дріб 4-го типу $\frac{Mx+N}{\left(x^2+rx+s\right)^k}$, де дискримінант $r^2-4s<0;\quad k\geq2,$ зводиться до табличного вигляду внесенням під знак диференціалу, заміною змінної та подальшим використанням рекурентної формули (4.2). Розглянемо алгоритм інтегрування дробу 4-го типу.

1-й крок. Під знаком інтеграла зробимо перетворення з метою отримати у чисельнику похідну від квадратного тричлена x^2+rx+s.

$$\int\frac{\left(Mx+N\right)dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k}=\int\frac{\left(\frac{M}{2}\left(2x+r\right)+N-\frac{Mr}{2}\right)dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k}.$$

2-й крок. Останній інтеграл записати у вигляді суми двох інтегралів.

$$\int \frac{\left(\frac{M}{2}(2x+r)+N-\frac{Mr}{2}\right)dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k}=\frac{M}{2}\cdot\int\frac{(2x+r)}{\left(x^2+rx+s\right)^k}dx+\left(N-\frac{Mr}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k}=$$

$$=\frac{M}{2}\cdot I_1+\left(N-\frac{Mr}{2}\right)\cdot I_2.$$

3-й крок. Перший інтеграл $I_1=\int\frac{(2x+r)}{\left(x^2+rx+s\right)^k}dx$ зводимо до табличного вигляду внесенням під знак диференціалу квадратного тричлена x^2+rx+s.

$$\int\frac{(2x+r)}{\left(x^2+rx+s\right)^k}dx=\int\frac{(2x+r)}{\left(x^2+rx+s\right)^k}dx=\int\frac{\left(x^2+rx+s\right)'dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k}=$$

$$=\int\frac{d\left(x^2+rx+s\right)}{\left(x^2+rx+s\right)^k}=\int\left(x^2+rx+s\right)^{-k}\cdot d\left(x^2+rx+s\right)=\frac{\left(x^2+rx+s\right)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=-\frac{1}{(k-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+rx+s\right)^{k-1}}+C.$$

4-й крок. Другий інтеграл $I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k}$ зведемо до рекурентної формули (3.2) за допомогою заміни змінної. А саме,

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+rx+s\right)^k}=\int\frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{r}{2}\cdot x+\frac{r^2}{4}-\frac{r^2}{4}+s\right)^k}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{r}{2}\right)^2+s-\frac{r^2}{4}\right)^k}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\textit{Нехай } x+\frac{r}{2}=z,\ \textit{тоді } dz=dx.\ \textit{За умовою дискримінатн } r^2-4s<0,\\ \textit{тоді } 4s-r^2>0.\ \textit{Позначимо } \frac{4s-r^2}{4}=a^2.\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=I_k.$$

Ми прийшли до рекурентної формули (3.2).

У формулі (3.2) приймаємо: $x=z$; $n=k$; $A=a^2$. Застосуємо рекурентну формулу (3.2) $(k-1)$ разів. Внаслідок цього прийдемо до табличного інтеграла. Знайдені вирази інтегралів I_1 та I_2 підставимо у вихідний інтеграл. Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{зробимо перетворення у чисельнику,} \\ \textit{див.}1-\textit{й крок} \end{array}\right\} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-\frac{3}{2}\cdot 2-1}{(x^2+2x+2)^2}dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \textit{перейдемо до суми двох} \\ \textit{інтегралів, див. } 2-\textit{й крок} \end{array}\right\} \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx - 4\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{3}{2}I_1 - 4I_2.$$

$$I_1 = \int \frac{(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{внесемо під знак} \\ \textit{диференціалу функцію} \\ x^2+2x+2, \textit{див.}3-\textit{й крок} \end{array}\right\} = \int \frac{(x^2+2x+2)' dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+2} + C_1, \textit{ за формулою } \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C, \textit{де } \mathrm{z}{=}x^2+2x+2.$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \left\{\begin{array}{l} \textit{для того, щоб визначити заміну змінної, виділяємо повний квадрат} \\ x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1; \\ \textit{заміна змінної}: \ x+1=z, dx=dz; \ \textit{див. } 4-\textit{й крок.} \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \left\{\textit{застосуємо рекурентну формулу } (4.2); n+1=2, n=1, A=a^2=1\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1}\cdot\frac{z}{z^2+1} + \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1\cdot 1}\cdot\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\cdot arctgz + C_2 = \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}\cdot arctg(x+1) + C_2.$$

Знайдені вирази інтегралів I_1 та I_2 підставимо у вихідний інтеграл.

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx = \frac{3}{2}I_1 - 4I_2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2+2x+2} + C_1\right) - 4\left(\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}\cdot arctg(x+1) + C_2\right) =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} - \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)} - 2arctg(x+1) + \left(\frac{3}{2}C_1 - 4C_2\right) = \left\{\frac{3}{2}C_1 - 4C_2 = C\right\} =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} - \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)} - 2arctg(x+1) + C.$$

4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

Самостійна робота № 4.1. Інтегрування тригонометричних виразів із застосуванням тригонометричних формул

Для інтегрування тригонометричних виразів часто потрібно використати одну із формул

Таблиця 4. Основні тригонометричні формули

Основні тригонометричні тотожності	***Формули подвійного кута***
$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	$\sin 2x=2\sin x\cos x$
$tgx\cdot ctgx=1$	$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$
$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}\quad 1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}\quad ctg2x=\frac{ctg^2x-1}{2ctgx}$
$ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}\quad 1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}$	
Формули пониження степеня	***Формули перетворення суми в добуток***
$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin 2x$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$tg^2x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Формули додавання

$$\sin\left(\alpha\pm\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\left(\alpha\pm\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Якщо під знаком інтеграла міститься тригонометричний вираз, то інтегрування такої функції може відбуватися в залежності від підінтегрального виразу.

Зокрема розрізняють випадки.

Випадок 1

Нехай маємо інтеграли виду:

$$\int \sin kx \cos lx dx, \int \cos kx \cos lx dx, \int \sin kx \sin lx dx \text{ ,де } k,l\in R$$

В цьому випадку можна застосувати одну із наступних формул:

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}\left(\sin(k-l)x+\sin(k+l)x\right) \tag{4.1}$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x+\cos(k+l)x\right) \tag{4.2}$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-l)x+\cos(k+l)x\right) \tag{4.3}$$

Враховуючи ці формули і зробивши перетворення у підінтегральних виразах, можна отримати інтеграли від простіших(табличних) функцій

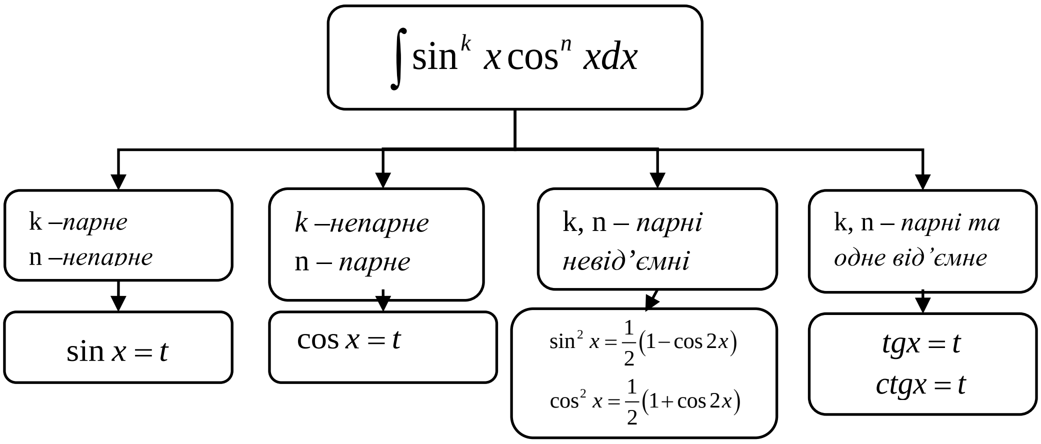
Приклад. Знайти інтеграл: $\int \sin 7x \cos 4x dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4.1). Отримаємо:

$$\int \sin 7x \cos 4x dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(3\text{x})+\sin(11\text{x})\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(\left(\sin 3x\right)+\sin(11\text{x})\right)\text{dx} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3\text{x}-\frac{1}{11}\cos 11x\right)$$

Інтегрування тригонометричних виразів можна здійснювати за схемою



__**Випадок 2**__

Нехай маємо інтеграли виду: $\int \cos^{2n} x \sin^{2m} x dx$.

Тобто маємо парні степені синуса і косинуса. Для зведення даного інтеграла до табличного вигляду застосуємо відомі з тригонометрії формули пониження степеня та формулу синусу подвійного кута:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x(\cos x \sin x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \cos^2 x(2\cos x \sin x)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos^2 x(2\sin 2x) dx = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) dx =$$
$$= \frac{1}{16}(\int dx + \int \cos 2x dx - \int \cos 4x dx - \int \cos 2x \cos 4x dx) =$$
$$= \frac{1}{16}(x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \int \frac{1}{2}(\cos(2x-4x) + \cos(2x+4x)) dx) =$$
$$= \frac{1}{16}(x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx) =$$
$$= \frac{1}{16}(x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x) + C =$$
$$= \frac{1}{16}(x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x) + C$$

<u>Випадок 3</u>

Нехай маємо інтеграли виду: $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n числа, показники степеня синуса і косинуса. Далі покладемо, що m – показник синуса, n – показник косинуса.

<u>Перший випадок.</u> Показник m – показник степеня синуса непарне додатне число $m = 2k+1$. У цьому випадку робимо такі перетворення: $\sin^m \mathrm{x} = \sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \cdot \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x$

Після перетворень підінтегральний вираз набуде вигляду:

$$\sin^m x \cos^n x dx = \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin dx$$

Застосуємо підстановку $\cos x = z.$ Тоді $d(\cos x) = -\sin x dx = dz.$ Ми внесли під знак диференціала функцію косинуса і зробили відповідну заміну.

Підінтегральний вираз враховуючи заміну матиме вигляд:

$$(1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx = -(1-\mathrm{z}^2)^k z^n dz$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \sin^5 x dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз можна записати у вигляді

$$\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x = (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x = (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x$$

Підінтегральний вираз набуде вигляду

$$\int \sin^5 x = \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot (-\sin x) dx$$

Після заміни $\cos x = z$ і $-\sin x dx = dz$, отримаємо інтеграл: $-\int (1-z^2)^2 dz$.

Підінтегральний вираз піднесемо до квадрату

$$(1-z^2)^2 = 1-2z^2+z^4$$

$$-\int (1-z^2)^2 dz = -\int (1-2z^2+z^4)\,\mathrm{dz} = -(\mathrm{z}-\mathrm{z}^2+\frac{z^5}{5})+C$$

Повертаючись до заміни отримаємо

$$I = -(\mathrm{z}-\mathrm{z}^2+\frac{z^5}{5})+C = -\left(\cos x - \cos^2 x + \frac{\cos^5 x}{5}\right)+C$$

<u>Другий випадок</u>

Якщо в $\int \sin^m x \cos^n x dx$ показник степеня косинуса n непарне додатне число $n = 2k+1$. Тоді з $\cos^n \mathrm{x} = \cos^{2k+1} x$ виділяємо перший степінь косинуса і отримуємо

$$\cos^n \mathrm{x} = \cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k \cos x = \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x$$

Підінтегральний вираз запишеться у вигляді:

$$sin^m x \cos^n \mathrm{xdx} = \sin^m \mathrm{x}(1-\sin^2 \mathrm{x})^2 \cos x dx .$$

Застосовуємо підстановку: $\sin x = z, \quad d(\sin x) = \cos x dx = dz.$ У цьому випадку ми внесли під знак диференціалу функцію синуса, і підінтегральний вираз набуде вигляду: $z^m (1-\mathrm{z}^2)^k dz$. Як і у першому випадку, розв'язок зводиться до інтегрування суми степеневих функцій.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \cos^9 x dx$.

Розв'язання. Зробимо перетворення у підінтегральному виразі:

$$\cos^9 x = \cos^8 x \cos x = (\cos^2 \mathrm{x})^4 \cos x = (1-\sin^2 \mathrm{x})^4 \cos x$$

Тоді отримаємо

$$\int \cos^9 x dx = \int (1-\sin^2 x)^4 \cos x dx = \left| \begin{matrix} \textit{зробимо заміну} \\ \sin x = z, \cos x = dz \end{matrix} \right| = \int (1-z^2)^4 dz =$$

$$= \int (1-4z^2+6z^4-4z^6+z^8)dz = z - \frac{4}{3}z^3 + \frac{6}{5}z^5 - \frac{4}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 + C =$$

$$= \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{6}{5}\sin^5 x - \frac{4}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

Розв'язання . Підінтегральний вираз перетворимо наступним чином:

$$\cos^2 x \sin^5 = \cos^2 x \sin^4 x \sin x = \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x =$$

$$= \cos^2 x(1-\cos^2 x)^2 \sin x = \cos^2 x(1-\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x = = (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\sin x$$

Тоді отримаємо такий інтеграл:

$$I = \int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\sin x dx = \left| \begin{matrix} \textit{зробимо заміну} \\ \cos x = z, -\sin x = dz \end{matrix} \right| = -\int \left(z^2 - 2z^4 + z^6 \right) dz =$$

$$= -\left(\frac{z^3}{3} - \frac{2z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \right) + C$$

Наведемо приклад того, як не вводячи заміну можна розв'язувати такого типу інтеграли.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$

Розв'язання .

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x \cdot dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot (\sin x dx) = \int \cos^4 x \cdot (1-\cos^2 x) \cdot (-(\cos x)' \cdot dx) =$$

$$= -\int (\cos^4 x - \cos^6 x) \cdot d(\cos x) = -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^6 x \cdot d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

Такі самі методи часто застосовують для інтегрування деяких ірраціональних функцій, які залежать від синусу та косинусу.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

Розв'язання:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\sin x}} \cdot (\cos x)dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[3]{\sin x}}d(\sin x) =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} - \int \frac{\sin^2 x}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}}d(\sin x) = \int (\sin x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x) - \int (\sin x)^{2-\frac{1}{3}}d(\sin x) =$$

$$= \frac{(\sin x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \int (\sin x)^{\frac{5}{3}}d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - \frac{(\sin x)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\left((\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\sin^2 x \cdot (\sin x)^{\frac{2}{3}} \right) + C = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}(1 - \frac{1}{4}\sin^2 x) \right) + C$$

<u>Третій випадок</u>

Сума $m+n$ показників степенів синуса і косинуса в інтегралі $\int \sin^m x \cos^n x dx$ парне від'ємне число $m+n=2k,\ (\mathrm{k}<0)$.

У цьому випадку підінтегральний вираз може мати два види :

1) Підінтегральний вираз – дріб, у чисельнику якого знаходиться степінь синуса, а у знаменнику степінь косинуса (або навпаки). Показники степенів синуса і косинуса або парні, або непарні (однакової парності).
Оскільки $m+n$ від'ємне число, то звідси слідує, що степінь знаменника більший за степінь чисельника.

2) Підінтегральна функція – є дробом, чисельник якого постійна величина, а знаменник – добуток степенів синуса і косинуса однакових степенів.

У цьому випадку, коли $m+n=2k$, можна застосовувати підстановку

$$tgx = z \quad \text{або} \quad ctgx = z$$

Якщо в чисельнику підінтегрального виразу знаходиться синус, то зручніше застосовувати підстановку

$$tgx = z,\ dx = \frac{dz}{1+z^2}, \sin z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \qquad (4.4)$$

Якщо у чисельнику знаходиться синус, то краще застосовувати

підстановку $ctgx = z, dx = -\frac{dz}{1+z^2},\ \sin z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\ \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ (4.5)

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання. У даному прикладі $n=4, m=-6, m+n=-2$ парне від'ємне число.

В чисельнику дробу знаходиться степінь косинуса, тому застосуємо підстановку (4.5)

$$ctgx = z\,,\, dx = -\frac{dz}{1+z^2}\,,\ \sin z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,,\ \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

Отримаємо:

$$I = \int \frac{\dfrac{z^4}{\sqrt{(1+z^2)^4}}}{\dfrac{1}{\sqrt{(1+z^2)^6}}} \frac{dz}{1+z^2} = \left| \begin{matrix} \textit{після перетворень} \\ \textit{отримаємо} \end{matrix} \right| = -\int z^4 dz = -\frac{z^5}{5} + C = \left| \begin{matrix} \textit{повернемося} \\ \textit{до заміни } z = ctgz \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{ctg^5 x}{5} + C\,.$$

Розглянемо випадок, коли числа m і n не є цілими, але умова $m+n=2k \quad (\mathrm{k}<0)$ виконується.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \sqrt[3]{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^8 x}} dx$.

Розв'язання. В цьому прикладі показник степеня синуса $m=-\dfrac{8}{3}$, а показник степеня косинуса $n=\dfrac{2}{3}$, а тому $m+n=-\dfrac{8}{3}+\dfrac{2}{3}=-2$ – парне від'ємне число. Тут доцільна підстановка:

$$ctgx = z\,,\quad dx = -\frac{dz}{1+z^2}\,,\quad \sin z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,,\quad \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\int \frac{\cos^{\frac{2}{3}} x}{\sin^{\frac{8}{3}} x} dx = -\int \frac{\dfrac{z^{\frac{2}{3}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{2}{3}}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{8}{3}}}} \cdot \frac{dz}{1+z^2} = -\int z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{8}{3}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \int z^{\frac{2}{3}} dz = -\frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{5} ctgx \sqrt[3]{ctg^2 x} + C$$

Самостійна робота №4.2. Універсальна тригонометрична підстановка

Якщо підінтегральна функція є раціональною від тригонометричних функцій, то такий інтеграл завжди можна звести до інтегралу виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, бо, як відомо з тригонометрії, всі тригонометричні функції можна раціонально виразити через функції $\sin x$ та $\cos x$. Крім того, усі тригонометричні функції раціонально виражають через $tg\frac{x}{2}=t$.

Підстановку $tg\frac{x}{2}=t$ називають ***універсальною тригонометричною підстановкою.***

Універсальна тригонометрична підстановка

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx = \begin{vmatrix} t = tg\,\dfrac{x}{2} & dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{4t - \left(1-t^2\right) + 5\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{6t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C$$

Підстановка $tg\frac{x}{2}=t$ має назву універсальної саме тому, що будь-яка функція виду $R(\sin x,\cos x)$ внаслідок цієї підстановки перетворюється на раціональну функцію. А будь-яку раціональну функцію можна про інтегрувати методом невизначених коефіцієнтів. Але вказана підстановка в деяких випадках може призвести до громіздких обчислень. Тому розглянемо також деякі інші способи інтегрування тригонометричних функцій. Перш за все зупинимося на так званих частинних тригонометричних підстановках.

Самостійна робота №4.3. Частинні тригонометричні підстановки

Розглянемо інтеграл виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, $R(\sin x,\cos x)-$ функція, яка раціонально виражається через синус та косинус.

Існують три випадки, коли для зведення даного інтеграла до табличного вигляду можна застосувати також підстановки відмінні від універсальної тригонометричної підстановки.

Перший випадок. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно синуса, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$ то застосовують підстановку $\cos x=t$;

Другий випадок. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно косинуса, тобто $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$ то застосовують підстановку $\sin x=t$;

Третій випадок. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ парна відносно синуса і косинуса, тобто $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$ то застосовують підстановку $tgx=t$.

Розглянемо приклад на застосування підстановки $tgx=t$. Для цієї підстановки використовують відомі тригонометричні формули:

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \sin x=tgx\cdot\cos x=\frac{tgx}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Оскільки $x=arctgt, то\ dx=\left(arctgt\right)'\cdot dt=\frac{1}{1+t^2}dt.$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{підінтегральна функція є парною відносно} \\ \textit{функцій } \cos x \textit{ та } \sin x, \textit{ тому заміна змінної}: \\ tgx=t;\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\} =$$

.

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4-3\cdot\frac{1}{1+t^2}+5\cdot\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4\left(1+t^2\right)-3+5t^2} = \int \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{d(3t)}{(3t)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot arctg(3t)+C = \{t=tgx\} = \frac{1}{3}\cdot arctg(3tgx)+C.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ *Відповідь:* $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$

2. $\int \cos\frac{3}{4}x\cdot\cos\frac{2}{3}xdx$ *Відповідь:* $6\sin\frac{x}{12}+\frac{6}{17}\sin\frac{17}{12}x+C$

3. $\int \frac{(2-\sin x)dx}{2+\cos x}$ *Відповідь:*

$$\ln|2+\cos x|+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2}\right)+C$$

4. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$ *Відповідь:* $\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C$

5. $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 xdx$ *Відповідь:* $\frac{1}{15}\cos^3 x\cdot(3\cos^2 x-5)+C$

6. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$ *Відповідь:* $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$

7. $\int \cos^6 x dx$ *Відповідь:* $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 2x \cdot \cos^4 x +$

$$+\frac{5}{48}\sin 2x \cdot \cos^2 x + \frac{15}{96}\sin 2x + C$$

8. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$ *Відповідь:* $\frac{(tg^2 x - 1)\cdot(tg^4 x + 10 tg^2 x + 1)}{3tg^3 x} + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C$

10. $\int \sin 3x \cdot \cos x dx$ *Відповідь:* $C - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4}$

5. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Самостійна робота № 5.1 Інтегрування ірраціональних виразів

Інтеграли виду $\int \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

У знаменнику виділимо повний квадрат і таким чином зведемо даний інтеграл до табличного.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Розв'язання.

Спочатку виділимо повний квадрат відносно x:

$$5+2x-x^2=-(x^2-2x+1-6)=-\left[(x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2)-6\right]=$$
$$=-\left[(x-1)^2-6\right]=6-(x-1)^2$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(x-1\right)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$$

$\int \sqrt[m]{kx+b}dx$ $(k\neq 0)$. У цьому випадку слід покласти $\sqrt[m]{kx+b}=t$, звідки $x=\frac{1}{k}(t^m-b)$, $dx=\frac{m}{k}t^{m-1}dt$.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3}=\begin{vmatrix}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2-3}=2\int \frac{t^2dt}{t^2-3}=2\int \frac{\left(t^2-3\right)+3}{t^2-3}dt=$$

$$=2\int\left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)dt=2\left(\int dt+3\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)=2\left(t+3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right)+C=$$

$$= 2t + \sqrt{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C = 2\sqrt{x} + \sqrt{3}\ \ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right| + C$$

Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_2}}, ..., \sqrt[n_s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_s}}\right)dx$

Підінтегральна функція раціонально залежить від кількох коренів виду

$$\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_2}}, ..., \sqrt[n_s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_s}}.$$

Знайдемо найменше спільне кратне показників степенів коренів, а саме $НСК(n_1, n_2, ..., n_s) = m$. Зробимо заміну змінної: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$. Із останньої рівності знайдемо x та dx.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,\ ax+b = t^m\cdot(cx+d),\ ax - t^m\cdot cx = t^m\cdot d - b,\ x(a - c\cdot t^m) = d\cdot t^m - b,\ x = \frac{d\cdot t^m - b}{a - c\cdot t^m}.$$

Знаходимо $dx = d\left(\frac{d\cdot t^m - b}{a - c\cdot t^m}\right) = \left(\frac{d\cdot t^m - b}{a - c\cdot t^m}\right)'\cdot dt = ...$.

У вихідному інтегралі підінтегральну функцію та множник dx треба замінити їх виразами через новий аргумент *t*. Після закінчення процесу інтегрування треба від аргументу *t* повернутися до аргументу *x*, підставивши $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\left\{\begin{array}{l}\textit{знайдемо НСК показників степенів коренів}:\ НСК(3,2)=6=m.\\ \textit{заміна змінної}:\ 2x+1=t^6,\ x=\frac{1}{2}(t^6-1),\ dx=\frac{1}{2}\cdot 6t^5dt=3t^5dt.\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{3t^5dt}{\sqrt[3]{(t^6)^2}-\sqrt{t^6}}=3\int\frac{t^5dt}{\sqrt[3]{t^{12}}-t^3}=3\int\frac{t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^5dt}{t^3(t-1)}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt=$$

$$=3\left(\int\frac{t^2-1}{t-1}dt+\int\frac{1}{t-1}dt\right)=3\left(\int(t+1)dt+\int\frac{d(t-1)}{t-1}\right)=3\left(\int(t+1)d(t+1)+\ln|t-1|\right)=$$

$$=3\left(\frac{(t+1)^2}{2}+\ln|t-1|\right)+C=\left\{t=\sqrt[6]{2x+1}\right\}=3\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{2x+1}+1\right)^2+\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|\right)+C.$$

Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2},\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

Тригонометричні підстановки.

Тут доцільні такі заміни, в залежності від підінтегрального виразу

1) $\sqrt{a^2-x^2}$, то доцільно зробити підстановку $x=a\sin t$;

2) $\sqrt{a^2+x^2}$,то доцільно зробити підстановку $x=a\ tg\,t$;

3) $\sqrt{x^2-a^2}$,то доцільно зробити підстановку $x=\frac{a}{\cos t}$.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2}}=\left\{\begin{array}{l}\textit{Маємо другий випадок}; a=1; x=tgt;\\ dx=d(tgt)=(tgt)'\,dt=\frac{1}{\cos^2 t}dt\end{array}\right\}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{\left(1+tg^2t\right)^3}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\frac{1}{\cos^6 t}}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}}=\int\frac{dt}{\frac{1}{\cos t}}=$$

$$=\int\cos t dt=\sin t+C=\left\{tgt=x;\sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\right\}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Даний інтеграл зводиться до одного з інтегралів попереднього типу, якщо під знаком кореня виділити повний квадрат із квадратного тричлена. А саме,

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Зробимо заміну змінної: $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$. Позначимо: $\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$=A. Тоді

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+A}.$

Можливі три випадки:

1. **Нехай** $a>0$ і $A>0$.

Позначимо $a=m^2$ і $\mathrm{A}=n^2$. Тоді $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}=m\cdot\sqrt{t^2+\left(\frac{n}{m}\right)^2}$.

У першому випадку можна позбутися кореня за допомогою другої тригонометричної підстановки $t=\frac{n}{m}tgz$.

2. **Нехай** $a>0$, $A<0$.

Позначимо $a=m^2$ і $\mathrm{A}=-n^2$. *Тоді* $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}=m\cdot\sqrt{t^2-\left(\frac{n}{m}\right)^2}$.

У другому випадку можна позбутися кореня за допомогою третьої тригонометричної підстановки $t=\frac{n}{m\cos z}$.

3. **Нехай** $a<0$ і $A>0$.

Позначимо: $a=-m^2$ і $A=n^2$.

Отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}=m\cdot\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2-t^2}$.

У третьому випадку можна позбутися кореня за допомогою першої тригонометричної підстановки $t=\frac{n}{m}\sin z$.

4. **Якщо** $a<0$ і $A<0$, то під знаком кореня стоїть від'ємна функція при будь-якому значенні t, що неможливо в дійсній області.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\sqrt{1-4x-x^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int\sqrt{1-4x-x^2}dx=\left\{\begin{array}{l}\textit{виділяємо повний квадрат}: 1-4x-x^2=-(x^2+4x-1)=\\ -\left[\left(x^2+2\cdot2\cdot x+4\right)-4-1\right]=-\left[\left(x+2\right)^2-5\right]=5-\left(x+2\right)^2.\\ \textit{Заміна змінної}:\ x+2=t;\ dx=dt.\end{array}\right\}=$$

$$=\int\sqrt{5-(x+2)^2}dx=\int\sqrt{5-t^2}dt=\left\{\begin{array}{l}A=5>0; a=-1<0;\ \textit{підходить перша тригонометрична}\\ \textit{підстановка}:\ \mathrm{t}=\sqrt{5}\cdot\sin z;\quad dt=\sqrt{5}\cdot\cos zdz.\end{array}\right\}=$$

$$=\int\sqrt{5-5\sin^2 z}\cdot(\sqrt{5}\cdot\cos z)dz=5\int\sqrt{1-\sin^2 z}\cdot\cos zdz=5\int\sqrt{\cos^2 z}\cdot\cos zdz=5\int\cos^2 zdz=$$

$$=\left\{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right\}=5\int\frac{1+\cos2z}{2}dz=\frac{5}{2}\left(\int dz+\int\cos2zdz\right)=\frac{5}{2}\left(z+\frac{1}{2}\sin2z\right)+C=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\sin z=\dfrac{t}{\sqrt{5}},\ t=x+2,\ \ z=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{5}}=\arcsin\dfrac{x+2}{\sqrt{5}};\quad \cos z=\sqrt{1-\sin^2 z}=\sqrt{1-\dfrac{t^2}{5}}=\sqrt{\dfrac{5-t^2}{5}}.\\ \sin2z=2\sin z\cos z=2\cdot\dfrac{t}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{5-t^2}{5}}=\dfrac{2}{5}\cdot t\cdot\sqrt{5-t^2}=\dfrac{2}{5}(x+2)\sqrt{5-(x+2)^2}.\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{5}{2}\left(\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}\right)+C=\frac{1}{2}\left(5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}\right)+C.$$

Розглянемо ірраціональні інтеграли, які можна розв'язати також методом інтегрування частинами.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Розв'язання.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u=\sqrt{a^2-x^2} & du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right\} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{\left(a^2-x^2\right)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx +$$

$$+a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a},$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a},$$

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a},$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \right) + C$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$.

Розв'язання.

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u=\sqrt{x^2+a} & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right\} = x\sqrt{x^2+a} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{\left(x^2+a\right)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\ ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$

$$\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| \right) + C\ .$$

Інтеграли виду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

У чисельнику дробу записуємо похідну від підкореневого виразу, тобто $2ax+b$, яка тотожними перетвореннями перетворюється у чисельник $Ax+B$.

$$Ax+B=(2ax+b)\frac{A}{2a}+B-\frac{bA}{2a}$$

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{(ax+b)\frac{A}{2a}+B-\frac{bA}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+(B-\frac{bA}{2a})\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\,/$$

Розглянемо кожен із доданків

$$\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\cdot 2\sqrt{ax^2+bx+c}\left(\begin{matrix}\textit{у чисельнику маємо похідну}\\ \textit{підкореневого виразу}\end{matrix}\right)$$

$$(B-\frac{bA}{2a})\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\left(\begin{matrix}\textit{необхідно у знаменнику дробу виділити}\\ \textit{повний квадрат та перейти до табличного інтеграла}\end{matrix}\right)$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{3x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

Розв'язання.

$$\int\frac{3x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\int\frac{-\frac{3}{2}(-2x-1)-\frac{3}{2}-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=\frac{-3}{2}\int\frac{(-2x-1)}{\sqrt{1-x-x^2}}dx-\frac{19}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}=$$

$$=\frac{-3}{2}\int\frac{(1-x-x^2)'dx}{\sqrt{1-x-x^2}}-\frac{19}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2+x-1)}}=\frac{-3}{2}\int\frac{d(1-x-x^2)}{\sqrt{1-x-x^2}}-\frac{19}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1\right)}}=$$

$$=\frac{-3}{2}\cdot 2\sqrt{1-x-x^2}-\frac{19}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}}=-3\sqrt{1-x-x^2}-\frac{19}{2}\arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=$$

$$=-3\sqrt{1-x-x^2}-\frac{19}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Інтеграл виду $\int\frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}},r=1;2.$

За допомогою заміни змінної $mx+n=\frac{1}{t}$ даний інтеграл зводиться до одного з інтегралів попередніх типів.

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$.

Розв'язання.

Для розв'язання цього інтеграла застосуємо підстановку

$$x=\frac{1}{t}\text{,}\quad x=-\frac{1}{t}dt$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}=-\int\frac{\frac{dx}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+5}}-\int\frac{\frac{dx}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+5t^2}{t^2}}}=-\int\frac{dx}{\sqrt{1+5t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+(\sqrt{5}t)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}t+\sqrt{1+5t^2}\right|+C=\left(\textit{повернемося до заміни } x=\frac{1}{t}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}\frac{1}{x}+\sqrt{1+5\frac{1}{x^2}}\right|+C$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$ *Відповідь:* $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C$

2. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ *Відповідь:*

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$ *Відповідь:*

$$2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}-8\cdot\sqrt[4]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}+48\cdot\sqrt[12]{x}+$$

$$+3\ln\left(1+\sqrt[12]{x}\right)+\frac{33}{2}\ln\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2\right)-\frac{171}{\sqrt{7}}arctg\frac{2\cdot\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$$

4. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ *Відповідь:* $\frac{4}{21}\left(3e^x-4\right)\cdot\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^3}+C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$ *Відповідь:* $\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-1}\right|+C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ *Відповідь:* $\arcsin\frac{x+1}{3}+C$

7. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$ *Відповідь:* $-5\sqrt{5+4x-x^2}+13\arcsin\frac{x-2}{3}+C$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$ *Відповідь:* $-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C$

9. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$ *Відповідь:* $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{2(x-1)}\right|+C$

10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{15+3x^2}}$ *Відповідь:* $-\frac{1}{15}\frac{\sqrt{15+3x^2}}{x}+C$

ДОДАТКОВІ ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ

1) $\int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)}{3} + C = \frac{(2x-3)^2}{6} + C$

Використали формулу: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{2} f(ax+b) + C$

2) $\int (x^2+2x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + C = \frac{x^3}{3} + x + C$

$\left\{ \textit{Застосувати таблицю інтегралів і формулу } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right\}$

3) $\int \sin(2x+1)dx = \frac{-\cos(2x+1)}{2} + C$

$\left\{ \textit{Використати формулу } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{2} f(ax+b) + C \right\}$

4) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Зробимо заміну } x^3+1=t \\ \textit{Диференціюємо обидві частини} \\ (x^3+1)'dx = t'dt \\ 3x^2dx = dt \\ dx = \frac{dt}{3x^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$$

5) $\int x\sin(x^2)dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{Зробимо заміну}: x^2 = t \\ \textit{Диференціюємо обидві частини, маємо}: \\ \left(x^2\right)' dx = t'dt \\ 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right\} =$

$$= \int \cancel{x}\sin(t)\frac{dt}{2\cancel{x}} = \int \sin(t)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin(t)dt = \frac{1}{2}(-\cos(t)) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(t) + C = \left\{\textit{Повернемось до заміни}\right\} = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

6) $\int (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{5}})dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{Застосуємо формулу}: \\ \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \end{array}\right\} =$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{7}x^{\frac{5}{7}} + C$$

7) $\int \dfrac{x}{\sin^2(x^2)}dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{Зробимо заміну}:\ x^2 = t \\ \textit{Диференціюємо обидві частини, маємо}: \\ \left(x^2\right)' dx = t'dt \\ 2xdx = dt \end{array}\right\} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sin^2(x^2)} = \left\{\textit{Після заміни одержимо}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin^2(t)} =$$

$$= \left\{\textit{Отримали табличний інтеграл}\right\} = -\frac{1}{2}ctg(t) + C =$$

$$\left\{\textit{Повернемося до заміни}\right\} = -\frac{1}{2}ctg(x^2) + C$$

8) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 25} = \left\{\begin{array}{l} \textit{Застосуємо табличну формулу}: \\ \int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \end{array}\right\} = \int \dfrac{dx}{x^2 - 5^2} =$

$$=\frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$$

$$9)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\left\{\begin{array}{l}\textit{Застосуємо формулу:}\\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\end{array}\right\}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$$

$$10)\ \int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}=\left\{\textit{Винесемо з}-\textit{під кореня } 4,\ \textit{отримаємо}\right\}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{4(\frac{5}{4}-x^2)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}}^2-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-x^2}}=$$

$$=\left\{\textit{Використаємо формулу}:\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)+C=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$11)\ \int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\left\{\begin{array}{l}\textit{Знайдемо похідну від підкореневого виразу та введемо заміну:}\\ (1-e^{2x})'dx=t'dt\\ -2e^{2x}dx=dt\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2)e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{t}+C=$$

$$=-\sqrt{t}+C=\left\{\textit{Повернемось до заміни}\right\}=-\sqrt{1-e^{2x}}+C$$

$$12)\ \int\frac{dx}{(x-2)(x+5)}$$

Потрібно знайти коефіцієнти A *та* B

$$\int\frac{dx}{(x-2)(x+5)}=\int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+5}\right)dx=\left\{\textit{Зведемо до спільного знаменника дроби}\right\}=$$

$$=\left(\frac{A}{x+2}\right)^{\backslash(x+5)}+\left(\frac{B}{x+5}\right)^{\backslash(x+2)}=\frac{A(x+5)+B(x+2)}{(x+2)(x+5)}=$$

$=\left\{\textit{Прирівняємо чисельники дробів}: A(x+5)+B(x+2)=1\right\}=$

$=\left\{\textit{Підставимо корені знаменника в останню рівність}:\ x=-5\ i\ x=-2\right\}=$

$$=\left\{\begin{matrix} A(-2+5)+B(-2+2)=1 & A(-5+5)+B(-5+2)=1 \\ 3A=1 & -3B=1 \\ A=\frac{1}{3} & B=-\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+5}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\ln|x+5|+C$$

13) $\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx$

Під знаком кореня знаходиться функція, похідна від якої:

$$\left(x^2+9\right)'=2x$$

Тоді зробимо заміну:

$$x^2+9=t$$
$$dt=2xdx$$

Отримаємо: $\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$. *За формулою таблиці інтегралів* $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$*, маємо*

$$\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$

Повернемось до заміни:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} = 2\sqrt{x^2+9} + C$$

14) $\int (7x-4)\sin(2x+1)dx$

Це випадок інтегрування частинами

Застосуємо формулу $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int (7x-4)\sin(2x+1)dx = \left\{\begin{matrix} u = 7x-4, & dv = \sin(2x+1) \\ du = 7dx, & v = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1) + \int \frac{1}{2}\cos(2x+1)\cdot 7dx = -\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1) + \frac{7}{2}\int \cos(2x+1)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1) + \frac{7}{4}\int \cos(2x+1)d(2x+1) = -\frac{1}{2}(7x-4)\cos(2x+1) + \frac{7}{4}\sin(2x+1) + C$$

15) $\int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$

$$\int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx = \left[\begin{matrix} & tg\,\frac{x}{2} = t & \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{5+\frac{12t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(4+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt$$

Обчислити $\int \frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt$ *,будемо спершу розкладати на суму елементарних дробів правильний раціональний дріб, що знаходиться під інтегралом.*

$$\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{7+t^2}$$

Тепер знайдемо $A, \quad B, \quad C$.

$$\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{7+t^2}=\frac{A(7+t^2)+t(Bt+C)}{t(7+t^2)}=\frac{7A+At^2+t^2B+Ct}{t(7+t^2)}=$$

$$=\frac{t^2(A+B)+Ct+7A}{t(7+t^2)}$$

Отже, $$\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}=\frac{t^2(A+B)+Ct+7A}{t(7+t^2)}.$$

Останні дроби тотожно рівні, крім того, у них однакові знаменники, а отже, тотожно рівні чисельники. Таким чином: $5t^2+12t+5=t^2(A+B)+Ct+7A$.

Відомо, що два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях t *рівні між собою. Звідси одержуємо систему лінійних рівнянь:*

$$\begin{array}{c} t^2 \\ t \\ t^0 \end{array} \quad \begin{cases} A + B = 5, \\ C = 12, \\ 7A = 5. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо:

$$A=\frac{5}{7},\quad B=\frac{30}{7},\quad C=12.$$

Таким чином: $$\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}=\frac{\frac{5}{7}}{t}+\frac{\frac{30}{7}t+12}{7+t^2}.$$

$$\int\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt=\int\left(\frac{\frac{5}{7}}{t}+\frac{\frac{30}{7}t+12}{7+t^2}\right)dt=\int\frac{\frac{5}{7}}{t}dt+\int\frac{\frac{30}{7}t+12}{7+t^2}dt=$$

$$=\frac{5}{7}\ln|t|+\frac{15}{7}\ln\left(7+t^2\right)+\frac{12}{\sqrt{7}}arctg\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{5}{7}\left[\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{15}{7}\ln\left(7+tg^2\frac{x}{2}\right)\right]+\frac{12}{\sqrt{7}}arctg\frac{1}{\sqrt{7}}tg\frac{x}{2}+C$$

16) $\int\sqrt{x^2-16}dx$

Маємо інтеграл виду $\sqrt{x^2-a^2}$ *, до якого застосуємо підстановку* $x=\frac{a}{cost}$.

$$\int\sqrt{x^2-16}dx=\int\sqrt{x^2-4^2}dx=\left|\begin{array}{c} x=\frac{4}{cost};cost=\frac{4}{x},t=\arccos\frac{4}{x} \\ dx=\left(\frac{4}{cost}\right)dt=-4\left(cost\right)^{-2}sintdt=-\frac{sint}{\cos^2 t}\end{array}\right|=$$

$$=\int\sqrt{\left(\frac{4}{cost}\right)^2-4}\left(-\frac{4sint}{\cos^2 t}\right)dt=-4\int\sqrt{\frac{16}{\cos^2 t}-4}\frac{sint}{\cos^2 t}dt=$$

$$=-4\int\sqrt{\frac{16-16\cos^2 t}{\cos^2 t}}\frac{sint}{\cos^2 t}dt=-4\int\sqrt{\frac{16\left(1-\cos^2 t\right)}{\cos^2 t}}\frac{sint}{\cos^2 t}dt=$$

$$=-4\int\sqrt{\frac{16\sin^2 t}{\cos^2 t}}\frac{sint}{\cos^2 t}dt=-4\int\frac{4sint}{cost}\frac{sint}{\cos^2 t}dt=-16\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=-16\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt=$$

$$=-16\int\left(\frac{1}{\cos^3 t}-\frac{1}{cost}\right)dt$$

$I_1=\int\frac{1}{\cos^3 t}dt$. *Раціонально перейти до обчислення інтегралу* $\int\frac{1}{\sin^3 t}dt$ *через заміну* t *на* $t+\frac{\pi}{2}$ $\cos t=\sin(t+\frac{\pi}{2})$ *отримаємо* $\int\frac{1}{\cos^3 t}dt=\int\frac{d\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Знайдемо $\int\frac{d\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Знайдемо спочатку $\int\frac{dt}{sint}$.

Використаємо підстановку $tg\frac{t}{2}=z, sint=\frac{2z}{1+z^2}, dt=\frac{2dz}{1+z^2}$.

Отримаємо:

$$\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{\left(1+z^2\right)^3}}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+z^2\right)^3}{z^3}dz=\frac{1}{4}\int\frac{1+2z^2+z^3}{z^3}dz=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+z\right)dz=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}+2\ln|z|+\frac{z^2}{2}\right)+C=$$

Повернемося до заміни:

$$=-\frac{1}{8}\frac{1}{tg^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{t}{2}+C=-\frac{1}{8}ctg^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|=$$

$$=-\frac{1}{8}ctg^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{t}{2}+C$$

Тоді:

$$I_1=\int\frac{1}{\cos^3 t}dt=\int\frac{d\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=(-\frac{1}{8})ctg^2\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}+C=$$

$$=(-\frac{1}{8})ctg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{1}{8}tg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Загальний інтеграл $I=I_1+I_2$

$$I_2=\int\frac{1}{\cos t}dt=\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

$$I=I_1+I_2=-16\int\left(\frac{1}{\cos^3 t}-\frac{1}{cost}\right)dt=$$

$$=(-\frac{1}{8})ctg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{1}{8}tg^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

Повернемося до заміни $t=\arccos\frac{4}{x}$.

$$\int\sqrt{x^2-16}dx=$$

$$=(-\frac{1}{8})ctg^2\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{1}{8}tg^2\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\ln\left|tg\left(\frac{\arccos\frac{4}{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

17) $\int\cos^5 xdx$

В підінтегральній функції $\cos^5 x$ *виділимо першу степінь косинуса, отримаємо*

$$\cos^5 x=\cos^4 x\, cosx=\left(\cos^2 x\right)^2 cosx=\left(1-\sin^2 x\right)^2 cosx=\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)cosx$$

Тоді $\int \cos^5 xdx = \int\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)cosxdx$

Використаємо підстановку $sinx = z,\ cosxdx = dz$.

Отримаємо:

$$\int\left(1-2z^2+z^4x\right)dz = z-\frac{2z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+C$$

Повернемося до заміни:

$$z-\frac{2z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+C = sinx-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

Тут, звичайно, можна було обійтись без підстановки, а інтегрувати за допомогою методу внесення під знак інтегралу.

$$\int \cos^5 xdx = \int\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)cosxdx = \int cosxdx - \int 2\sin^2 xcosxdx + \int \sin^4 xcosxdx =$$

$$= \int cosxdx - \int 2\sin^2 xd(\sin x) + \int \sin^4 xd(\sin x) = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

18) $\int \frac{dx}{5x^2+7x+11}$

Оскільки коефіцієнт біля x^2 *в знаменнику не дорівнює одиниці, то для того, щоб виділити повний квадрат, потрібно винести цей коефіцієнт за дужки. Тоді*

$$5x^2+7x+11 = 5\left(x^2+\frac{7}{5}x+\frac{11}{5}\right) = 5\left(\left(x+\frac{7}{10}\right)^2-\frac{49}{100}+\frac{11}{5}\right) = 5\left(\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right)$$

$$\int\frac{dx}{5x^2+7x+11} = \int\frac{dx}{5\left(\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right)} = \frac{1}{5}\frac{1}{\frac{\sqrt{171}}{10}}arctg\frac{x+\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{171}}{100}}+C = \frac{2}{\sqrt{171}}arctg\frac{10x+7}{\sqrt{171}}+C$$

Таблиця похідних

Похідні елементарних функцій	Похідні складених функцій
$C' = 0, \quad x' = 1$	
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(ctgx\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\left(ctgu\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arctg}\ x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$\left(\mathrm{arctg}\ u\right)' = \dfrac{1}{u^2+1} \cdot u'$
$\left(\mathrm{arcctg}\ x\right)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$	$\left(\mathrm{arcctg}\ x\right)' = -\dfrac{1}{u^2+1} \cdot u'$

Таблиця інтегралів основних елементарних функцій

1. $\int 0dx = C$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
2'. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	11'. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
2''. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	12'. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int chxdx = shx + C$
4'. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int shxdx = chx + C$
5. $\int \cos xdx = \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$	17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg \frac{x}{2}\right\| + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$	18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	
9'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математичний аналіз : підручник. Київ : Вища школа, 2004. Ч. 1. 320 с.
2. Дереч В. Д., Фурдіяк Н. Ю. Інтегральне числення. Невизначений інтеграл. Вінниця : ВДТУ, 2002. 118 с. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Derech_2002_118.pdf (дата звернення: 12.01.2025).
3. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ : А.С.К., 2001. URL: https://matan.kpi.ua/public/files/bdmp-zadachnyk-1.pdf (дата звернення: 21.12.2024).
4. Капустін О. В. Математичний аналіз : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2015. Ч. 1. 280 с.
5. Коломієць А. А., Крупський Я. В., Тютюнник О. І., Коцюбівська К. І. Вища математика : невизначений інтеграл. Практикум для дистанційного навчання. Вінниця : ВНТУ, 2021. 71 с. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/645 (дата звернення: 18.02.2025).
6. Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П. Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Київ : НТУУ «КПІ», 2015. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/16444/1/ Posibnyk_VM_Int_DR.pdf (дата звернення: 08.11.2024).
7. Огієнко О. І. Основи математичного аналізу : навч. посіб. Тернопіль : ТНПУ, 2011. 265 с.
8. Павліщев В. І., Бойко Л. Й., Горбатов М. І. Вища математика. Невизначений інтеграл (у прикладах і задачах) : навч. посіб. Дніпропетровськ : НГУ, 2015. 71 с. URL: https://ir.nmu.org.ua/jspui/bitstream/123456789/146945/1/Невизначений%20інтеграл.pdf (дата звернення: 04.03.2025).
9. Прокіпчук В. А., Максимчук С. Ю. Математичний аналіз : підруч. для студ. ВНЗ. Чернівці : Рута, 2007. Ч. 1. 312 с.
10. Соколенко О. І. Вища математика. Київ : Вища школа, 1999. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/2449/1/VIicha_matematika_modul_6.pdf (дата звернення: 11.10.2024).
11. Сторчай В. Ф. Інтеграли. Дніпропетровськ : НГУ, 2019. URL: https://ir.nmu.org.ua/jspui/bitstream/123456789/157923/1/Сторчай_Інтеграли.pdf (дата звернення: 12.01.2025).
12. Теленик С. І., Кур'ян Г. А. Математичний аналіз : навч. посіб. Харків : ХНАМГ, 2012. 342 с.

Електронне навчальне видання

Альона Анатоліївна Коломієць
Оксана Іванівна Тютюнник
Ірина Анатоліївна Клєопа

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Частина 5. Інтегральне числення: невизначений інтеграл

Рукопис оформила: А. Коломієць

Редактор: Н. Кравчук

Оригінал-макет виготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до видання 8.01.2026
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2026-004.
Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: rvv.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.