Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика»
Частина 11. Комплексні числа та дії над ними

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика»
Частина 11. Комплексні числа та дії над ними

Вінниця
ВНТУ
2025

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 25.09.2025 р.)

Рецензенти:
Л. Ф. Михайленко, доктор педагогічних наук, професор
В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Частина 11. Комплексні числа та дії над ними. [Електронний ресурс] / уклад. М. Б. Ковальчук. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 29 с.)

Методичні вказівки розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика». У методичних вказівках наведено короткі теоретичні відомості та приклади розв’язання типових задач розділу «Комплексні числа».

Для здобувачів вищої освіти галузі знань «Інформаційні технології».

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Комплексні числа є одним із фундаментальних понять сучасної математики, що має широке застосування не лише в теоретичних дослідженнях, але й у практичних завданнях природничих та технічних наук. Вивчення комплексних чисел відкриває перед студентами можливість розширити уявлення про структуру числової системи, перейти від звичних дійсних чисел до більш загального числового поля, у якому можливе розв'язання рівнянь, що не мають коренів у множині дійсних чисел.

Методичні вказівки, що пропонуються, спрямовані на формування глибокого розуміння сутності комплексних чисел, навичок виконання арифметичних та алгебраїчних операцій з ними, ознайомлення з геометричною інтерпретацією комплексної площини, а також з основами аналізу комплексних функцій.

Змістове наповнення методичних вказівок структуроване за темами і поєднує короткі теоретичні відомості про комплексні числа та приклади розв'язування типових завдань. Приклади розв'язування супроводжуються детальним розбором та представлені значною кількістю розв'язаних завдань.

Методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів вищої технічної освіти укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» та призначені для самостійної роботи здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей і орієнтовані на теоретичне та методичне підтримання їх навчального процесу.

Зміст методичних вказівок структуровано тематично та охоплює стислі теоретичні відомості про комплексні числа у поєднанні з прикладами розв'язання типових задач. Кожен приклад супроводжується детальним поясненням етапів розв'язання, що дозволяє краще засвоїти матеріал. Окрему увагу приділено демонстрації різноманітних підходів через велику кількість розв'язаних завдань.

Методичні рекомендації для самостійного опрацювання розроблено відповідно до навчальної програми курсу *«Вища математика»* і призначено для здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей. Посібник має на меті забезпечити як теоретичну базу, так і практичну методичну підтримку під час самостійного вивчення теми.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1
ІСТОРІЯ ПОНЯТТЯ «КОМПЛЕКСНЕ ЧИСЛО»

Мета: знайомство з історією розвитку поняття «комплексне число».

У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитися розглядом лише дійсних чисел. Процес розширення множини чисел не новий і наше уявлення про число змінюється. Давньогрецькі математики вважали «справжніми» тільки натуральні числа, але в практичних розрахунках за два тисячоліття до н. е. у Древньому Єгипті та Древньому Вавилоні вже використовувалися дроби.

Поняття <u>*комплексних чисел*</u> виникло з потреби розв’язувати квадратні рівняння, які не мали дійсних розв’язків. Наприклад, рівняння $x^2+1=0$ не має дійсного кореня, бо жодне дійсне число при піднесенні до квадрату не дає від’ємного значення. Проте ще з античності математики цікавились такими «неможливими» ситуаціями.

<u>**XVI століття – перші згадки**</u>. Джироламо Кардано (1501-1576) – італійський математик, який працював над кубічними рівняннями у своїй книзі «*Ars Magna*» (1545) вперше стикається з квадратним коренем із від’ємного числа при розв’язуванні певних кубічних рівнянь. Він назвав такі числа *«sophistic»* (хитромудрі), бо не розумів їх повного сенсу, але визнавав, що вони іноді допомагають знайти правильний результат.

<u>**Рафаель Бомбеллі (1526–1572) – перше формальне трактування.**</u> Рафаель Бомбеллі (1526-1572) став першим, хто чітко описав правила дій з квадратними коренями від’ємних чисел, хоча іще не використовував позначення i. Він розумів, що ці «уявні» числа можуть мати логіку, і працював з ними як з окремою математичною сутністю.

<u>**XVII–XVIII століття – спроби визнання.**</u> Рене Декарт (1637) увів термін *«уявні числа»* (*nombres imaginaires)* у негативному сенсі, вважаючи їх математично підозрілими. Математики довго не визнавали комплексні числа повноцінними, бо не було геометричного чи фізичного тлумачення.

<u>**XVIII–XIX століття – визнання і розвиток.**</u> Леонард Ейлер (1707–1783) активно використовував позначення i для $\sqrt{-1}$ і розвинув формулу $e^{ix} = cosx + isinx$. Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855) – повністю обґрунтував поняття комплексного числа як пари дійсних чисел z=a+bi і показав геометричне тлумачення на комплексній площині (координатній системі «дійсна частина – уявна частина»).

<u>***Сучасне розуміння.***</u> Сьогодні *комплексні числа* – це фундаментальна частина математики та фізики. Вони використовуються в електротехніці, квантовій механіці, теорії сигналів, мають власну алгебру та геометрію (комплексна площина, аналітичні функції тощо), стали *повноцінним і необхідним математичним інструментом*.

Комплексні числа виникли з «неможливості» розв’язати деякі рівняння в реальних числах. Від перших обережних спроб до повного визнання пройшло кілька століть і тепер вони є одним з найбільших досягнень математики.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2
ОЗНАЧЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Мета: знайомство з структурними елементами і ознаками комплексного числа.

Означення 1. Комплексним числом називається вираз виду $z = x + iy$ де x, y – дійсні числа, а i – уявна одиниця, яка визначена рівностями $i = \sqrt{-1}$ або $i^2 = -1$.

Означення 2. Множина комплексних чисел позначається С. Множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел. Запис комплексного числа у вигляді $z = x + iy$ називається алгебраїчною формою комплексного числа.

Означення 3. Числа $x = \mathrm{Re}\ z$, $y = \mathrm{Im}\, z$, відповідно є дійсною та уявною частинами комплексного числа z.

Означення 4. Два комплексних числа вважаються рівними, якщо рівні окремо їх дійсні і уявні частини.

Означення 5. Дійсні числа є окремим випадком комплексних чисел, а саме, це комплексні числа, у яких уявна часина дорівнює нулю ($z = x + i0 = x$).

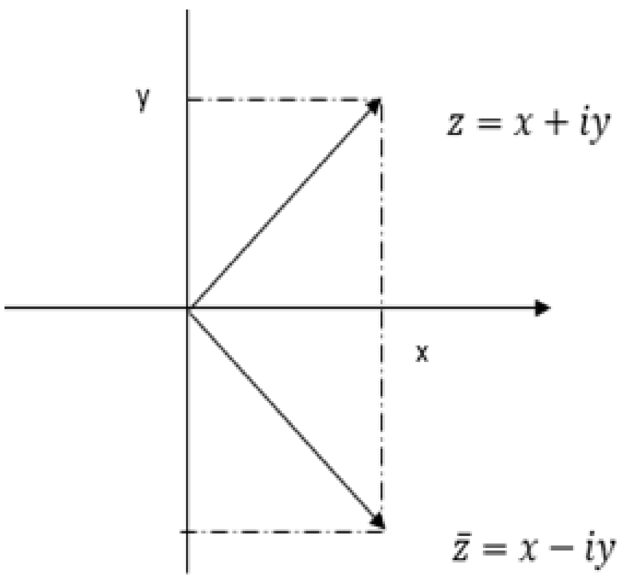

Рисунок 1

Означення 6. Комплексне число, у якого дійсна частина дорівнює нулю, називається уявним числом.

$$z = 0 + iy = iy.$$

Означення 7. Спряженим до комплексного числа $z = x + iy$ називається комплексне число $\bar{z} = x - iy$.

Комплексні числа z і $\bar{z}$ розташовані на комплексній площині (рисунок 1).

Означення 8. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ вважаються рівними тоді й тільки тоді, коли рівні їх дійсні частини та коефіцієнти при уявних частинах:

$$x_1 = x_2 \text{ та } y_1 = y_2$$

Зауваження: Поняття «більше» і «менше» не застосовуються до комплексних чисел!

❖ **Приклад 1.** Знайти дійсні *x* і *y* з рівняння:

$$(2x - 5i) + (7y + 2xi) = -23 + 3yi.$$

Розв'язання

Додаючи члени лівої частини рівняння, дістанемо:

$$(2x + 7y) + (-5 + 2x)i = -23 + 3yi.$$

З умови рівності комплексних чисел маємо систему:

$$\begin{cases} 2x + 7y = -23 \\ -5 + 2x = 3y \end{cases},$$

з якої знаходимо, що $x = -1{,}7$; $y = -2{,}8$.

❖ **Приклад 2.** Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Розв'язання

Введемо нові змінні $u = x + y, v = xy$. Тоді дана система набуде вигляду:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 8 \\ u^2 - 2v = 4 \end{cases},$$

звідки

$$u^3 - 12u + 16 = 0,$$

або

$$(u - 2)(u^2 + 2u - 8) = 0,$$

звідки $u_1 = 2;\ u_2 = -4.$

Отже,

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 6 \end{cases}.$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 2 \end{cases};\quad \begin{cases} x_3 = -2 + i\sqrt{2} \\ y_3 = -2 - i\sqrt{2} \end{cases};\quad \begin{cases} x_4 = -2 - i\sqrt{2} \\ y_4 = -2 + i\sqrt{2} \end{cases}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3
ГЕОМЕТРИЧНЕ ТЛУМАЧЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Мета: Знайомство з геометричним зображенням комплексного числа.

Відомо, що дійсні числа відображаються точками числової осі. При цьому кожне дійсне число зображується однією точкою числової осі, і навпаки, кожна точка числової осі зображує одне дійсне число: між множиною дійсних чисел і множиною точок прямої встановлена взаємно однозначна відповідність.

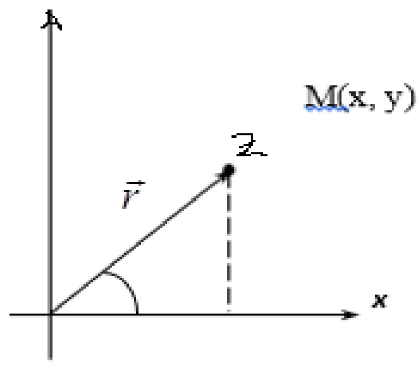

Рисунок 2

Встановимо тепер взаємно однозначну відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини. Кожне комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою площини *xOy*, яка має координати *(x, y)* (рис. 2), при цьому точки на осі *Ox* є дійсними числами. Вісь *Oy* називають уявною, а вісь *Ox* – дійсною осями. На координатній площині комплексному числу *z* можна поставити у відповідність вектор $\vec{r}$ (радіус-вектор точки z), який направлений з початку координат *O* в точку *z*.

❖ **<u>Приклад 3.</u>** Дати геометричне зображення чисел $z_1=-5+4i$, $z_2=2i$, $z_3=4$.

Розв'язання

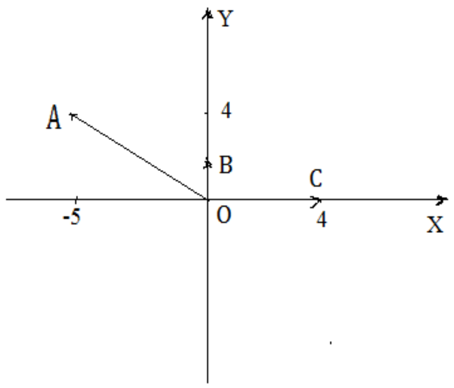

Рисунок 3

Кожне комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою площини *xOy*, яка має координати *(x, y)*. Числу $z_1=-5+4i$ відповідає точка з координатами (-5; 4), числу $z_2=2i$ відповідає точка з координатами (0; 2), числу $z_3=4$ відповідає точка з координатами (4; 0).

На рисунку 3 зображені радіус-вектори, що відповідають числам z_1, z_2, z_3: $z_1 \leftrightarrow \overrightarrow{OA}$, $z_2 \leftrightarrow \overrightarrow{OB}$, $z_3 \leftrightarrow \overrightarrow{OC}$.

3.1 Модуль комплексного числа

Означення 9. Довжину $r = |\vec{r}|$ вектору $\vec{r}$, тобто відстань від точки *z* до початку координат, називають ***модулем комплексного числа z*** і позначають:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Зауваження для розв'язування задач!!!

1. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, якщо $z_2 \neq 0$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
3. $|z^n| = |z|^n$ для довільного цілого числа *n*.
4. Модуль різниці двох комплексних чисел є відстанню між точками комплексної площини, які відповідають цим числам. Дійсно, згідно з означенням модуля, величина $|z_1 – z_2|$ є довжиною вектору $z_1 – z_2$.
5. Для дійсного числа $z=x+0\cdot i$ модуль є його абсолютною величиною:

$$|z| = |x + 0\cdot i| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

6. Спряжені числа $z=x+yi$ та $\bar{z}=x–yi$ мають, зрозуміло, однакові модулі.

❖ **<u>Приклад 4</u>.** Для комплексного числа $z=1+2i$ його модуль дорівнює:

$$|Z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

3.2 Аргумент комплексного числа

Означення 10. Кут φ, який утворює вектор $\vec{r}$ з додатним напрямком осі Ох, називається ***аргументом числа z*** і позначається $Argz$.

Значення $Argz$ визначаються не однозначно, а з точністю до $2\pi k$, k=(0; $\pm 1; \pm 2$ ...).

Якщо φ змінюється в межах $-\pi < \varphi \le \pi$ або $0 \le \varphi < 2\pi$, то виділяють головну частину аргументу, яка позначається $arg\, z$, так що $Arg \quad z = arg\, z + 2\pi k$, (k=0; $\pm 1; \pm 2$ …), де $arg\, z$ є головним значенням $Arg\, z$, яке визначається умовами $-\pi < arg\, z < \pi$, причому

$$arg \quad z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x>0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x<0, \quad y \ge 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x<0, \quad y<0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, \quad y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, \quad y<0 \end{cases}.$$

Зауваження!!! Аргумент числа $z=0$ не визначений, а його модуль дорівнює нулю.

❖ **<u>Приклад 5.</u>** Знайти аргумент числа *z=-1–i*.

Розв'язання

Оскільки x=-1, y=-1, то маємо точку (-1; -1), яка лежить у III чверті. У третій чверті аргумент даного числа визначається за формулою:

$$\arg z = -\pi + arctg\,\frac{y}{x},$$

$$\arg z = -\pi + arctg\,\frac{(-1)}{(-1)},$$

$$\arg z = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Отже,

$$\arg(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4
ФОРМИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА: ТРИГОНОМЕТРИЧНА ТА ПОКАЗНИКОВА

Мета: знайомство з формами комплексного числа. Навчитися переходити від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної та показникової.

Запис у вигляді *z=x+yi* є ***алгебраїчною формою*** запису комплексного числа. Розглянемо тепер тригонометричну форму запису комплексних чисел.

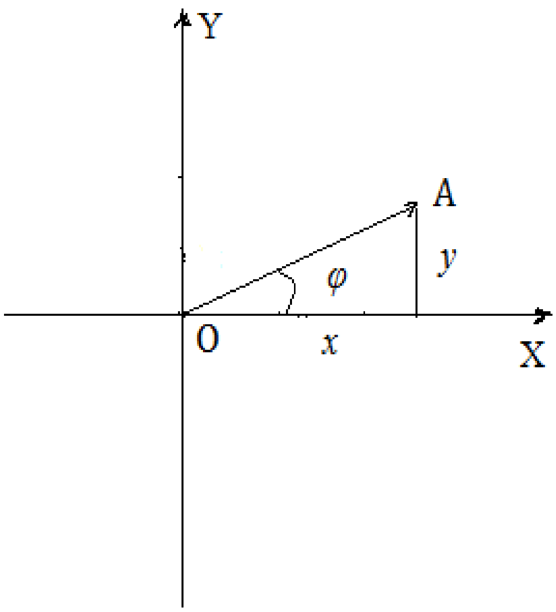

Рисунок 4

Нехай дано комплексне число *z=x+yi* (див. рис. 4). Маємо: $|\overrightarrow{OA}| = r$, *x=rcosφ; y=rsinφ*, де *r*=|z|, *φ=argz*.

Отже, *x+yi=r(cosφ+isinφ)*.

Запис комплексного числа *z=r(cosφ+isinφ)* називається ***тригонометричною формою*** комплексного числа *z*, де *r*=$\sqrt{x^2+y^2}$. Отже, для довільного комплексного числа справедлива рівність:

$$x+yi=r(\cos(\varphi+2\pi n)+i\sin(\varphi+2\pi n)).$$

Позначимо $e^{i\varphi} = cos\varphi\, +\, i\, sin\varphi$ (формула Ейлера). Тоді комплексне число z можна записати у показниковій формі $z = re^{i\varphi}$.

❖ **<u>Приклад 6.</u>** Записати в тригонометричній формі число z=$1+i$.

Розв'язання

Тригонометрична форма комплексного числа має вигляд *z=r(cosφ+isinφ),* де *r*=$\sqrt{x^2+y^2}$. За умовою *x=1, y=1*, тобто комплексному числу відповідає точка з координатами (1; 1). Відповідно, $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$, оскільки число лежить в першій чверті.

Звідси $1+i = \sqrt{2}\cdot(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

❖ **<u>Приклад 7.</u>** Записати в показниковій формі $z = -5$.

Розв'язання

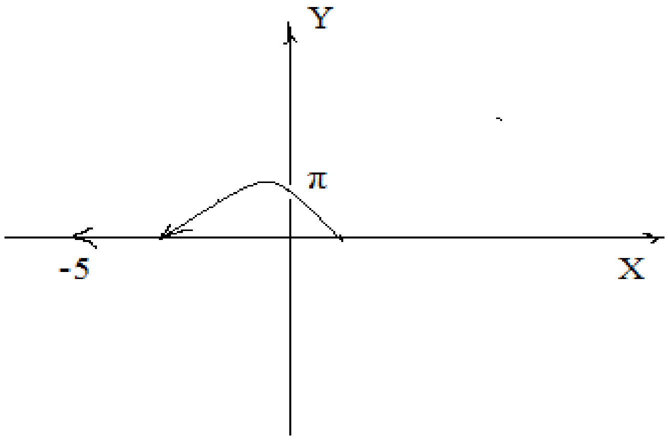

Рисунок 5

Зобразимо комплексне число $z = -5$ на площині (рис. 5). Даному числу на площині відповідає точка (-5; 0).

Точка лежить на осі Ох, тому $\arg z = \pi$, а $r = |z| = \sqrt{(-5)^2+0} = 5$. Отже, $-5 = 5e^{i\pi}$ – показникова форма.

❖ **<u>Приклад 8.</u>** Записати комплексне число $z = -2+2i$ у тригонометричній та показниковій формі.

Розв'язання

1) *x=-2, y=2,* тоді $r = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

2) точка (-2; 2), яка відповідає даному комплексному числу, належить другій чверті, тому:

$$\arg z = \pi + arctg\frac{y}{x} = \pi + arctg\frac{2}{(-2)} = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4};$$

3) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ – тригонометрична форма комплексного числа;

4) $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ – показникова форма комплексного числа.

❖ **Приклад 9.** Знайти модуль та аргумент комплексного числа $z = 6 - 8i$. Записати його в тригонометричній та показниковій формі і знайти комплексне спряжене до нього число.

Розв'язання

Комплексному числу $z = 6 - 8i$ на площині відповідає точка з координатами (6; -8) – це четверта чверть. В четвертій чверті аргумент знаходиться за формулою: $\arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{(-8)}{6} = -arctg\left(\frac{4}{3}\right)$.

Модуль обчислимо за формулою $|z| = \sqrt{(6^2 + (-8)^2)} = 10$.

Тригонометрична форма комплексного числа за формулою $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ має вигляд:

$$6 - 8i = 10 \cdot (\cos(-arctg\frac{4}{3}) + i\,sin(-arctg\frac{4}{3})),$$

а показникова за формулою $z = re^{i\varphi}$ має вигляд $6 - 8i = 10 \cdot e^{i\left(-arctg\frac{4}{3}\right)}$.

За означенням 7 комплексно спряжене число має ту саму дійсну частину, а уявну – таку саму за величиною, але протилежною за знаком:

$$\bar{z} = \overline{(6 - 8\imath)} = 6 + 8i.$$

Зауваження !!!

Умова рівності двох комплексних чисел:

Таблиця 1

Форма комплексного числа		
Алгебраїчна форма $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$	Тригономерична форма $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.	Показникова форма $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$; $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.
$x_1 = x_2$ $y_1 = y_2$ Рівність дійсних і уявних частин	$r_1 = r_2$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \epsilon Z$ Рівність модулів і аргументів	$r_1 = r_2$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \epsilon Z$ Рівність модулів і аргументів

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5
ДІЇ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ЯКІ ЗАДАНІ В АЛГЕБРАЇЧНІЙ, ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ ТА ПОКАЗНИКОВІЙ ФОРМАХ

Мета: навчитися виконувати дії над комплексними числами.

5.1 Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Алгебраїчна сума комплексних чисел, що представлені в алгебраїчній формі, дорівнює алгебраїчній сумі дійсної та уявної частини:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

❖**<u>Приклад 10.</u>** Знайти $z = z_1 + z_2$, якщо $z_1 = -3 + 5i, z_2 = 4 - 3i$.

Розв'язання

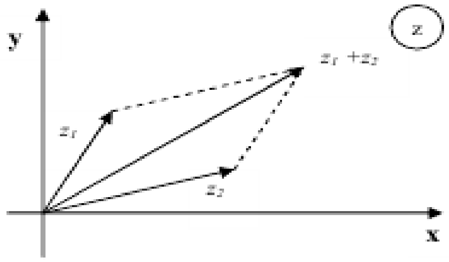

Рисунок 6

$$z_1 + z_2 = (-3 + 5i) + (4 - 3i) =$$
$$= (-3 + 4) + i(5 - 3) = 1 + 2i.$$

Зауважимо, що при додаванні комплексних чисел відповідні вектори додаються (рис. 6).

Добуток комплексних чисел, що представлені в алгебраїчній формі, обчислюється за звичайними правилами алгебри з урахуванням того, що $(i^2 = -1)$.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

❖ <u>Приклад.</u> Знайти $z = z_1 \cdot z_2$, якщо $z_1 = -4 + 3i,\ z_2 = 2 + i$.

Розв'язання

$$z_1 \cdot z_2 = (-4 + 3i) \cdot (2 + i) = -8 - 4i + 6i + 3i^2 = -8 + 2i - 3$$
$$= -11 + 2i.$$

Частка комплексних чисел, що представлені в алгебраїчній формі. Для знаходження частки комплексних чисел потрібно чисельник та знаменник помножити на число, спряжене до знаменника.

❖ **<u>Приклад 11</u>.** Записати в алгебраїчній формі $z = \frac{5-3i}{2+i}$.

Розв'язання

$$\frac{5+3i}{2+i}=\frac{(5+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{10+6i-5i-3i^2}{4+1}=\frac{10+1i+3}{5}=\frac{13}{5}+\frac{1}{5}i.$$

5.2 Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі

Тригонометрична форма запису комплексних чисел зручна для множення та ділення.

Нехай задано два комплексних числа в тригонометричній формі

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1);\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

1). Модуль добутку двох або декількох комплексних чисел, які задані в тригонометричній формі, дорівнює добутку модулів множників, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

2). Частка двох комплексних чисел, які задані в тригонометричній формі, дорівнює частці модулів множників і різниці їх аргументів:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],\ z_2\neq 0$$

❖ **<u>Приклад 12.</u>** Знайти добуток комплексних чисел:

$$z_1=2(\cos 22°+i\sin 22°) \text{ та } z_2=3(\cos 30°+i\sin 30°).$$

Розв'язання

$$z_1\cdot z_2=2(\cos 22°+i\sin 22°)\cdot 3(\cos 30°+i\sin 30°)=2\cdot 3(\cos(22°+30°)+i\sin(22°+30°))=6(\cos 52°+i\sin 52°).$$

❖ **<u>Приклад 13.</u>** Знайти частку комплексних чисел:

$$z_1=6(\cos 50°+i\sin 50°) \text{ та } z_2=3(\cos 5°+i\sin 5°).$$

Розв'язання

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{3}(\cos(50°-5°)+i\sin(50°-5°))=\frac{6}{3}(\cos 45°+i\sin 45°)=$$
$$=2\cdot\left(2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}$$

❖ **<u>Приклад 14</u>.** Знайти частку та добуток комплексних чисел

$$z_1=1+i\sqrt{3};\ z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

Розв'язання

Звичайно, можна провести підрахунки безпосередньо, але краще спочатку записати дані числа у тригонометричній формі. Комплексному числу $z_1=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ відповідає точка $(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$ – це перша чверть, тому

$$\arg z_1 = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ – тригонометрична форма комплексного числа.

Комплексному числу $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ відповідає точка $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – це перша чверть, тому $\arg z_2 = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}$. Одержимо тригонометричну форму комплексного числа $z_2 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$.

Тоді маємо:

$$z_1z_2 = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}.$$

❖ **<u>Приклад 15.</u>** Нехай $z = cos\varphi + isin\varphi$. Знайти значення аргументів комплексних чисел: а) $q_1 = z^2 + z$; б) $q_2 = z^2 - z$; в) $q_3 = z^2 + \overline{z}$.

Розв'язання

а) знайдемо тригонометричну форму комплексного числа $z^2 + z$. Маємо:

$$z^2 + z = (cos\varphi + isin\varphi)^2 + (cos\varphi + isin\varphi) =$$

$$(cos2\varphi + cos\varphi) + i(sin2\varphi + sin\varphi) = 2cos\frac{3}{2}\varphi cos\frac{1}{2}\varphi +$$

$$+i\ 2sin\frac{3}{2}\varphi cos\frac{1}{2}\varphi = 2cos\frac{1}{2}\varphi\left(cos\frac{3}{2}\varphi + isin\frac{3}{2}\varphi\right).$$

<u>Перший випадок</u>:

$$cos\frac{1}{2}\varphi > 0, \text{ тобто } 0 \ll \varphi < \pi.$$

У цьому випадку:

$$|z^2 + z| = 2cos\frac{1}{2}\varphi;\ arg(z^2 + z) = \frac{3\varphi}{2}.$$

<u>Другий випадок</u>:

$$cos\frac{1}{2}\varphi < 0, \text{ тобто } \pi \ll \varphi < 2\pi,$$

тоді $-cos\frac{1}{2}\varphi > 0$ і тригонометрична форма має такий вигляд:

$$z^2 + z = -2cos\frac{1}{2}\varphi \cdot \left(cos\left(\frac{3}{2}\varphi - \pi\right) + isin\left(\frac{3}{2}\varphi - \pi\right)\right),$$

тобто $|z^2 + z| = -2cos\frac{1}{2}\varphi;\ arg(z^2 + z) = \frac{3\varphi}{2} - \pi$.

Третій випадок:

$$cos\frac{1}{2}\varphi = 0, \text{тоді } \varphi = \pi \text{ і } \arg\ q_1 \text{ – невизначений.}$$

б) $$\arg\ q_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi + 3\varphi), & \text{якщо } 0 < \varphi < \pi \\ \frac{1}{2}(3\varphi - 3\pi), & \text{якщо } \pi \ll \varphi < 2\pi \end{cases}.$$

При $\varphi = 0$ значення $\arg\ q_2$ – невизначено.

в) $$\arg q_3 = \begin{cases} \frac{\varphi}{2}, & \text{якщо } 0 \ll \varphi < \frac{\pi}{3} \text{ або } \pi < \varphi < \frac{5\pi}{3} \\ \frac{\varphi}{2} + \pi, & \text{якщо } \frac{\pi}{3} \ll \varphi < \pi \text{ або } \frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi \end{cases}.$$

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{5\pi}{3}$ або $\varphi = \pi$, значення $\arg q_3$ – невизначено.

5.3 Дії над комплексними числами в показниковій формі

Нехай задано два комплексних числа в показниковій формі:

$$z_1 = \mathrm{r}_1 e^{i\varphi_1} \text{ і } z_2 = \mathrm{r}_2 e^{i\varphi_2}.$$

1). Модуль добутку двох або декількох комплексних чисел, які задані в показниковій формі, дорівнює добутку модулів множників, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

2). Частка двох комплексних чисел, які задані в показниковій формі, дорівнює частці модулів множників і різниці їх аргументів:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

❖**<u>Приклад 16.</u>** Записати в алгебраїчній формі $z = z_1 \cdot z_2$, якщо

$$z_1 = 3e^{i\pi},\ z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Розв'язання

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2e^{i\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)} = 6e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

❖ **<u>Приклад 17.</u>** Записати в алгебраїчній формі $z = \frac{z_1}{z_2}$, якщо

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}, z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Розв'язання

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + i\frac{2}{3}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6
ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ МНОЖЕННЯ ТА ДІЛЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Мета: Знайомство з геометричним представленням дій над комплексними числами.

Додавання та віднімання комплексних чисел геометрично ілюструється як додавання та віднімання відповідних векторів.

Множення та ділення комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі, незручно давати в геометричній інтерпретації. Проте, за допомогою тригонометричної форми запису комплексного числа це зручно й корисно робити.

Перший крок. Спочатку розглянемо частинний випадок – перемножимо два комплексних числа, одне з яких має модуль, рівний 1: $z_1=r(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$; $z_2=\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2$, ($|z_2|=1$). Тоді, як ми вже знаємо: $z=z_1\cdot z_2=r(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

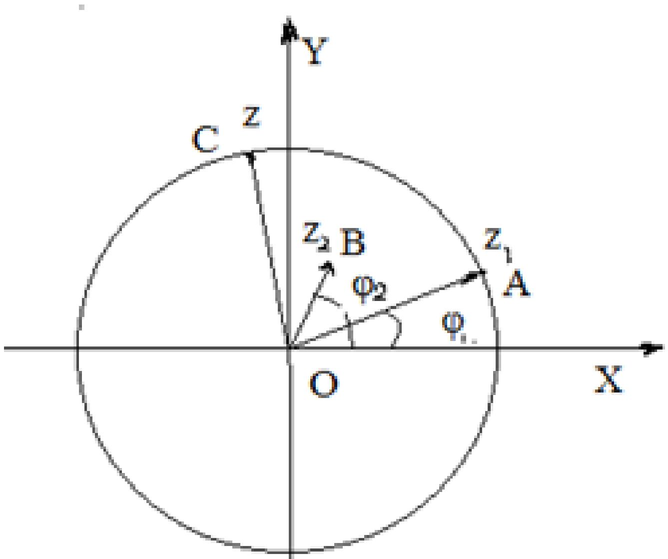

Рисунок 7

Проілюструємо тепер це геометрично (рис. 7).

Комплексне число z_1, зображене вектором $\overrightarrow{OA}$, належить колу радіуса OM=r, причому $\angle AOM=\varphi_1$. Число z_2 зобразимо вектором $\overrightarrow{OB}$, довжина якого дорівнює 1, а $\angle BOM=\varphi_2$. Сума дуг φ_1 і φ_2 є аргументом числа z, яке зображене вектором $\overrightarrow{OC}$ і є добутком z_1 і z_2, тобто $\angle COM=\varphi_1+\varphi_2$.

Таким чином, при множенні комплексного числа на інше комплексне число, модуль якого дорівнює 1, вектор першого числа потрібно повернути на кут, який дорівнює аргументу другого числа.

Другий крок. Перемножимо тепер два комплексних числа, одне з яких має нульовий аргумент, тобто є дійсним:

$$z_1=r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

$$z_2=r_2(\cos 0+i\sin 0)=r_2.$$

Тоді $z=z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Геометрична інтерпретація зображена на рисунку 8.

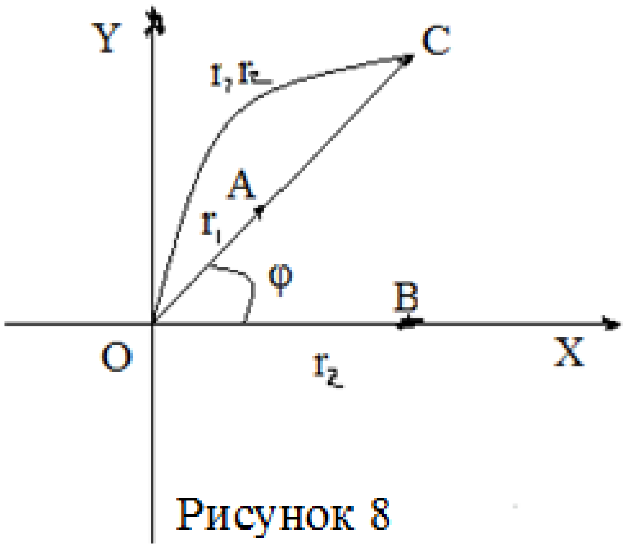

Рисунок 8

Як бачимо, вектор $\overline{OC}$ можна дістати з вектору $\overline{OA}$, «розтягнувши» той в r_2 разів. Звісно, якщо $r_2>1$, то це справді розтягнення в r_2 разів, але якщо $0<r_2<1$, то відбувається стискання в $\frac{1}{r_2}$ разів.

Третій крок. Якщо перемножити два довільних комплексних числа z_1 і z_2, то дістанемо вектор, який може бути одержаний поворотом вектору z_1 на кут, що дорівнює аргументу вектору z_2, і розтягненням (стисканням) вектору z_1 в $|z_2|$ разів (рис. 9).

Скажімо інакше: вважаємо один множник, наприклад z_1, фіксованим, тоді формула $\omega=z_1\cdot z_2$ визначає на комплексній площині композицію гомотетії відносно точки O з коефіцієнтом $r_1=|z_1|$ та повороту відносно точки O на кут $\arg z_1=\varphi_1$.

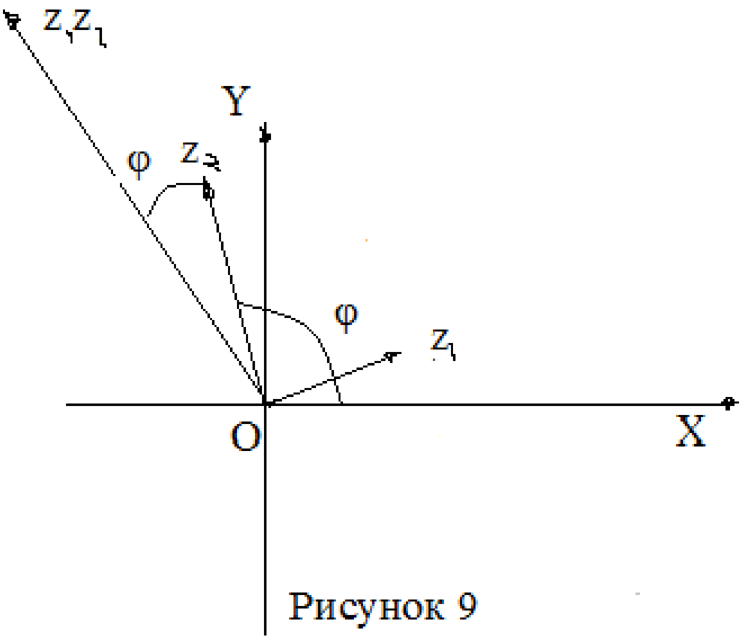

Рисунок 9

<u>Увага!!!</u> Множення комплексного числа z на *i* (уявну одиницю) геометрично означає, що вектор, який відповідає добутку, можна отримати з вектору, що відповідає числу z, поворотом на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки ($\arg i=\frac{\pi}{2}$), причому довжина вектору залишається незмінною (бо $|i|=1$).

Далі цим твердженням ми неодноразово скористаємося.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7
ПІДНЕСЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ДО СТЕПЕНЯ

Мета: навчитися користуватися формулою Муавра піднесення комплексного числа до степеня при розв'язуванні задач.

При піднесенні комплексного числа z до степеня з натуральним показником його модуль підноситься до степеня з цим показником, а аргумент множиться на цей показник:

$$z^n = r^n(cosn\varphi + i\ sin\ n\varphi) = r^n \cdot e^{in\varphi}.$$

Це твердження називається формулою Муавра.

Абрам де Муавр, французький учений, мешканець Англії, вперше виклав своє відкриття в 1707 р. в журналі Лондонського королівського товариства у вигляді:

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt[n]{cosnB + isinnB} + \frac{1}{\sqrt[n]{cosnB+isinnB}}.$$

Як бачимо, Муавра цікавило, головним чином, зображення *cosB* через *cos(nB)* та *sin(nB)*. Лише Ейлер у «Вступі до аналізу» приводить формулу Муавра у сучасній формі.

❖ **Приклад 18.** Піднести до дванадцятого степеня комплексне число $z=\sqrt{3}-i$.

Розв'язання

Комплексному числу $z=\sqrt{3}-i$ на площині відповідає точка $(\sqrt{3};\ -1)$ – це четверта чверть. Знайдемо модуль і аргумент даного числа:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

За формулою Муавра $z^n = r^n(cosn\varphi + i\ sin\ n\varphi)$ одержимо:

$$(\sqrt{3} - i)^{12} = 2^{12}\left(cos\left(-12\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\ sin\ \left(-12\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{12}(cos(-2\pi) + i\ sin\ (-2\pi)) = 2^{12}(1 + i\cdot 0)) = 2^{12}.$$

❖ **Приклад 19.** Подати в алгебраїчній формі $(1 + i\sqrt{3})^2$.

Розв'язання

Позначимо $z = 1 + \sqrt{3}i$. Тоді $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

$$argz = arctg\frac{y}{x} = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

За формулою Муавра $z^n = r^n(cosn\varphi + i\ sin\ n\varphi)$ одержимо:

$$(1+i\sqrt{3})^{\,2} = 2^2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\,\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + i\,2\sqrt{3}.$$

❖ **<u>Приклад 20.</u>** Записати в алгебраїчній формі $(-1-i)^{10}$.

Розв'язання

Запишемо комплексне число $(z = -1 - i)$ у показниковій формі:

$$z = \mathrm{r}e^{i\varphi}.$$

Модуль дорівнює $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Комплексному числу $(-1 - i)$ відповідає точка з координатами (-1; -1) – це третя чверть. В третій чверті $argz = -\pi + arctg\frac{y}{x} = -\pi + arctg\frac{(-1)}{(-1)} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Комплексне число у показниковій формі має вигляд:

$$z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

За формулою Муавра

$$(-1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{i10\cdot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 2^5 e^{i\frac{(-15\pi)}{2}} =$$

$$= 32\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{15\pi}{2}\right)\right) = 32(0+i) = 32i.$$

❖ **<u>Приклад 21.</u>** Записати в алгебраїчній формі $\frac{(2+2i)^{10}\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}{\left(4+4\sqrt{3}i\right)^5}$.

Розв'язання

Позначимо $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = 4 + 4\sqrt{3}i$. Запишемо ці комплексні числа в показниковій формі.

Якщо $z_1 = 2 + 2i$, то $r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, а аргумент $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, тоді $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Якщо $z_2 = \sqrt{3} - i$, то $r_2 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$, тоді $\arg z_2 = -\frac{\pi}{6}$ і відповідно $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ – показникова форма комплексного числа.

$z_3 = 4 + 4\sqrt{3}i$, тоді $r_3 = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8$, а аргумент $argz_3 = \frac{\pi}{3}$, відповідно, $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ – показникова форма комплексного числа.

$$\frac{z_1^{10}z_2^{12}}{z_3^5} = \frac{\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{12}}{\left(8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5} = \frac{2^{10}2^5 2^{12} e^{i\frac{10\pi}{4}} e^{-i\frac{12\pi}{6}}}{2^{15}e^{i\frac{5\pi}{3}}} = 2^{12}e^{\left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi\frac{5\pi}{3}\right)}$$

$$= 2^{12}e^{-i\frac{7\pi}{3}} = 2^{12}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^{12}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 4096\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2048 - 2048\sqrt{3}i.$$

❖ **Приклад 22.** Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа $(2+i)^{\mathbf{3}}$.

Розв'язання

Маємо $(2+i)^{\mathbf{3}} = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3 = \begin{vmatrix} i^2=-1, \\ i^3=-i \end{vmatrix} =$

$$= 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i,$$

$$Re(2+i)^{\mathbf{3}} = 2,\ Im\,(2+i)^{\mathbf{3}} = 11.$$

❖ **Приклад 23.** Довести, що при піднесенні двох спряжених комплексних чисел до квадрату ми знов отримаємо спряжені комплексні числа.

Доведення

Нехай $x+iy$ і $x-iy$ – спряжені комплексні числа. Тоді

$$(x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2xyi \text{ (1)},$$

$$(x-iy)^2 = (x^2-y^2) - 2xyi \text{ (2)}.$$

Комплексні числа (1), (2) – спряжені.

❖ **Приклад 24.** Знайти комплексне число $z = x+iy$, якщо $|z+3i|^2 - z = 3+2i$.

Розв'язання

Маємо $z+3i = x+iy+3i = x+(y+3)i$.

Звідси, $|z+3i| = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$ і $|z+3i|^2 = x^2+(y+3)^2$. Таким чином, маємо рівняння: $x^2+(y+3)^2 - x - iy = 3+2i$.

За умовою рівності комплексних чисел:

$y=-2$ та $x^2+(y+3)^2 - x - 3 = 0$, звідки $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. Отже:

$z_1 = -1-2i$, $z_2 = 2-2i$.

❖ **Приклад 25.** Обчислити $(1+i)^6 + (1+i)^6$.

Розв'язання

Маємо: $(1+i)^6 + (1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 + ((1-i)^2)^3 =$

$= (1+2i+i^2)^3 + (1-2i+i^2)^3 = (1+2i-1)^3 + (1-2i-1)^3 =$

$= (2i)^3 + (-2i)^3 = 0.$

❖ **Приклад 26.** Обчислити $(1+i)^{100}$.

Розв'язання

$$(1+i)^{100} = ((1+i)^2)^{50} = (2i)^{50} = 2^{50}\cdot i^{48+2} = -2^{50}.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8
ДОБУВАННЯ КОРЕНЯ *N-ГО* СТЕПЕНЯ З КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Мета: навчитися користуватися формулою Муавра знаходження кореня *n-го* степеня з комплексного числа при розв'язуванні задач.

Означення 11. Число z називається коренем *n*-го степеня з числа ω (позначається $\sqrt[n]{\omega}$), якщо $z^n = \omega$.

Теорема. Корінь *n-го* степеня з довільного комплексного числа існує і має рівно *n* значень.

Розв'язки рівняння $z^n = \omega$ мають вигляд:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), 0 \ll$ k $\ll$ n – формула Муавра.

Всі корені *n*-го степеня з числа ω мають однаковий модуль $\sqrt[n]{r}$, але різні аргументи, що відрізняються доданком, кратним числу $\frac{2\pi}{n}$.

Звідси випливає, що точки, які зображують усі отримані значення z_n, належать одному колу радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у точці z=0. Ці точки ділять коло на рівні частини (дуга поміж довільними двома сусідніми точками складає $\frac{2\pi}{n}$ рад), тобто вони є вершинами правильного n-кутника.

❖ **<u>Приклад 27</u>.** Знайти $\sqrt[3]{-i}$.

Розв'язання

Комплексному числу *z=-i* на площині відповідає точка (0; -1). Точка лежить на осі Оу, тому $\varphi = argz = -\frac{\pi}{2}$, $r = \sqrt{(0^2 + (-1)^2)} = 1$. За формулою Муавра:

$$\sqrt[3]{-i} = cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\ \ k = 0,\ \ 1,\ \ 2.$$

Корінь *3-го* степеня з довільного комплексного числа існує і має рівно *3* значення:

$k = 0$:

$$z_0 = cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\cdot0\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\cdot0\cdot\pi}{3}\right) = cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2};$$

$k = 1$:

$$z_1 = cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\cdot1\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\cdot1\cdot\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2} = i\,;$$

$k = 2$:

$$z_2 = cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\cdot2\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\cdot2\cdot\pi}{3}\right) = cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6} =$$

$$= cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - isin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}.$$

Всі корені 3-го степеня з числа ω мають однаковий модуль $\sqrt[3]{r}$, але різні аргументи, що відрізняються доданком, кратним числу $\frac{2\pi}{3}$.

Звідси випливає, що точки, які зображують усі отримані значення z_0, z_1, z_2 належать одному колу радіуса $R = \sqrt[3]{1} = 1$ з центром у точці z=0. Ці точки ділять коло на три рівні частини (дуга поміж довільними двома сусідніми точками складає $\frac{2\pi}{3}$ рад), тобто вони є вершинами правильного трикутника. Для побудови правильного трикутника, вершинами якого є z_0, z_1, z_2, будуємо спочатку коло радіуса $R = 1$ з центром в точці z=0. Потім відкладаємо кути $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}$. Точки перетину дуги кола і сторони кута позначаємо z_0, z_1, z_2. Сполучаємо ці вершини і одержимо правильний трикутник, який вписаний в коло радіуса $R = 1$ (рис. 10).

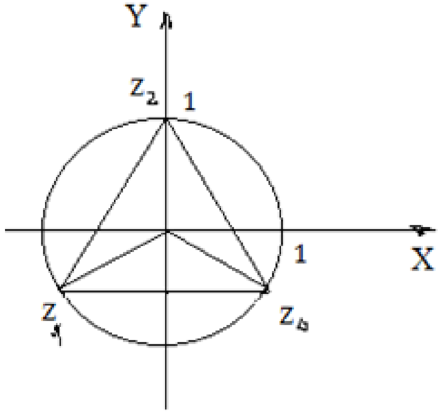

Рисунок 10

❖ **<u>Приклад 28.</u>** Знайти $\sqrt[4]{-16}$.

Розв'язання

Комплексному числу z=-16 на площині відповідає точка (-16; 0). Точка лежить на осі O*x*, тому $\varphi = argz = \pi$, $r = \sqrt{(0^2 + (-16)^2)} = 16$. За формулою Муавра:

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right), k = 0, 1, 2, 3.$$

Корінь 4-*го* степеня з довільного комплексного числа існує і має рівно 4 значення:

$k = 0$:

$$z_0 = 2cos\left(\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right) + i\,2\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right) = 2cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i2sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$k = 1$:

$$z_1 = 2cos\left(\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right) + i2\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right) = 2cos\frac{3\pi}{4} + is2in\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$k = 2$:

$$z_2 = 2cos\left(\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right) + i\,2\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right) = 2cos\frac{5\pi}{4} + i2sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2};$$

$k = 3$:

$$z_3 = 2cos\left(\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right) + i2\sin\left(\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right) = 2cos\frac{7\pi}{4} + i2sin\frac{7\pi}{4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

❖ **<u>Приклад 29.</u>** Знайти всі значення $\sqrt[3]{-8i}$.

Розв'язання

Щоб обчислити корінь з комплексного числа, треба записати це число у показниковій формі $z = -8i, r = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8, \arg z = -\frac{\pi}{2}$,

$$z = 8e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}}, k = 0, 1, 2.$$

Якщо $k = 0$, то $z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i.$

Якщо $k = 1,$ то $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$

Якщо $k = 2,$ то $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} - i.$

❖**<u>Приклад 30.</u>** Знайти всі значення $\sqrt[5]{-1+i}$.

Розв'язання

Запишемо комплексне число $z = -1 + i$ у показниковій формі. Даному числу на площині відповідає точка з координатами (-1; 1) – це друга чверть, тому $\varphi = \arg z = \pi + arctg\frac{y}{x} = \pi + arctg\frac{1}{(-1)} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Модуль числа дорівнює $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Тоді корені з комплексного числа (z) мають вигляд:

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5}}}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Якщо $k = 0,$ то $z_0 = \sqrt[10]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)\right).$

Якщо $k = 1,$ то $z_1 = \sqrt[10]{2}\, e^{i*\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{20}\right)\right).$

Якщо $k = 2,$ то $z_2 = \sqrt[10]{2}\, e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{20}\right)\right).$

Якщо $k = 3,$ то $z_3 = \sqrt[10]{2}\, e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+6\pi}{5}} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{27\pi}{20}\right)\right).$

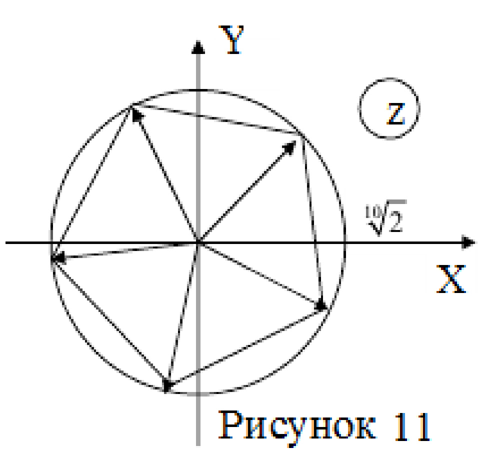

Рисунок 11

Якщо $k = 4,$ то $z_4 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+8\pi}{5}} =$

$$\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{35\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{35\pi}{20}\right)\right)$$

Зобразимо корені на колі радіуса $R = \sqrt[10]{2}$. Вони є вершинами правильного п'ятикутника, який вписаний в нього (рис. 11).

❖**Приклад 31.** Знайти корені рівняння $z^6 + 262144 = 0$.

Розв'язання

$$z^6 = -262144 \text{ або } z = \sqrt[6]{-262144}.$$

Представимо число -262144 в тригонометричній формі. Для цього обчислимо модуль та аргумент числа -262144:

$$r = |z| = \sqrt{(0^2 + (-262144)^2)} = 262144.$$

Числу -262144 на площині відповідає точка з координатами (-262144; 0). Ця точка лежить на осі Ox, тому $argz = \varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\left(\frac{0}{-262144}\right) = arctg\,0 = \pi$.

Отже, $-262144 = 262144 \cdot (\cos\pi + i\,sin\pi)$.

За формулою Муавра:

$$\sqrt[6]{-262144} = \sqrt[6]{262144} \cdot \left(cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right),$$

де $\mathrm{k} = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Підставляючи послідовно значення k в отриманий вираз, знайдемо всі шість коренів рівняння:

якщо $k = 0$, то $z_0 = 8\left(cos\left(\frac{\pi+0\cdot\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi+0\cdot\pi}{6}\right)\right) = 4\sqrt{3} + 4i$;

якщо $k = 1$, то $z_1 = 8\left(cos\left(\frac{\pi+2\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi+2\pi}{6}\right)\right) = 0 + 8i = 8i$;

якщо $k = 2$, то $z_2 = 8\left(cos\left(\frac{\pi+4\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi+4\pi}{6}\right)\right) = -4\sqrt{3} + 4i$;

якщо $k = 3$, то $z_3 = 8\left(cos\left(\frac{\pi+6\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi+6\pi}{6}\right)\right) = -4\sqrt{3} - 4i$;

якщо $k = 4$, то $z_4 = 8\left(cos\left(\frac{\pi+8\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi+8\pi}{6}\right)\right) = 0 - 8i = -8i$;

якщо $k = 5$, то $z_5 = 8\left(cos\left(\frac{\pi+10\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi+10\pi}{6}\right)\right) = 4\sqrt{3} - 4i$.

❖**Приклад 32 .** Розв'язати рівняння

$$z^2 + (4 - 6i) \cdot z + (10 - 20i) = 0.$$

Розв'язання

Перш за все, нагадаємо, що у множині комплексних чисел корінь *n-го* степеня з комплексного числа має *n* значень. Тому формула для коренів квадратного рівняння $az^2 + bz + c = 0$, де a, b, c – комплексні числа $a \neq 0$, має вигляд:

$$z_{1,2} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

тобто перед квадратним коренем з дискримінанта рівняння в чисельнику беремо тільки знак «+» (у множині дійсних чисел були знаки «$\pm$», оскільки квадратний корінь був арифметичним). Розв'язуючи дане рівняння, маємо:

$$z_{1,2} = 2 - 3i + \sqrt{(2-3i)^2 - 10 + 20i} = 2 - 3i + \sqrt{-15 + 8i};$$

$$z_{1,2} = 2 - 3i \pm (1 + 4i), z_1 = 1 - 7i, z_2 = 3 + i.$$

❖ **<u>Приклад 33</u>.** Знайти усі комплексні числа з додатною уявною часиною, які задовольняють рівняння $z^2 + 15 - 8i = 0$.

Розв'язання

Нехай $z = x + iy, x \in R$. Тоді $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Дане рівняння рівносильне рівнянню:

$$(x^2 - y^2 + 15) + (2xy - 8)i = 0.$$

З першого рівняння системи і умов $y \in R,\ y > 0$ дістанемо, що $y = 4$, а отже, $x = 1$.

Звідси $z = 1 + 4i$ – шукане число.

❖ **<u>Приклад 34.</u>** Знайти $\sqrt[n]{1}$.

Розв'язання

Представимо 1 у тригонометричній формі:

$$1 = \cos 0 + i\,sin\,0.$$

Тоді

$$x_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\,sin\,0} = cos\frac{0+2\pi k}{n} + isin\frac{0+2\pi k}{n},$$

або

$$x_k = \sqrt[n]{1} = cos\frac{2\pi k}{n} + isin\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

❖ **<u>Приклад 35.</u>** Знайти $\sqrt[n]{-1}$.

Розв'язання

Представимо -1 у тригонометричній формі:

$$-1 = \cos\pi + i\,sin\,\pi.$$

Тоді

$$x_k = \sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{\cos\pi + i\,sin\,\pi} = cos\frac{\pi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{n}$$

або

$$x_k = \sqrt[n]{-1} = cos\frac{\pi(2k+1)}{n} + isin\frac{\pi(2k+1)}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №9
ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ В ГЕОМЕТРІЇ

Мета: навчитися користуватися властивостями комплексних чисел при розв’язуванні геометричних задач.

❖ **Приклад 36.** Довести, що якщо у площині паралелограму ABCD існує така точка X, що $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$, то $ABCD$ – прямокутник.

Доведення

Візьмемо за початок координат точку O – центр паралелограму (рис. 12).

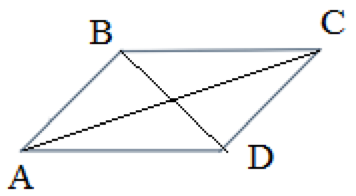

Рисунок 12

Нехай точки A, B, C, D, X відповідають комплексним числам Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z, відповідно. Тоді, очевидно, $Z_1 = -Z_3$, $Z_2 = -Z_4$ (*).

Далі, за умовою:

$|Z - Z_1|^2 + |Z - Z_3|^2 = |Z - Z_2|^2 + |Z - Z_4|^2$,

тобто, враховуючи (*) $|Z_1|^2 = |Z_2|^2$.

Отже, діагоналі паралелограму $ABCD$ рівні, тобто він є прямокутником, що й вимагалось довести.

❖ **Приклад 37.** Нехай *A, B, C* – кути гострокутного трикутника ABC, O – центр описаного кола. Довести, що $\overrightarrow{OA}sin2A + \overrightarrow{OB}sin2B + \overrightarrow{OC}sin2C = \vec{0}$.

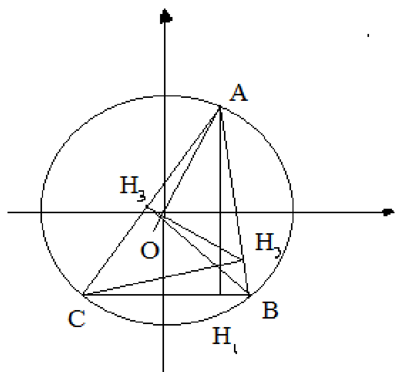

Рисунок 13

Доведення

Нехай H_1, H_2, H_3 – основи висот трикутника (рис. 13). Тоді $\overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2H_3} + \overrightarrow{H_3H_1} = \vec{0}$.

Скористаємося тим, що радіус OA перпендикулярний відрізку H_2H_3 (пропонуємо довести цей факт самостійно). Звідси

$$i\overrightarrow{H_2H_3} = \alpha\overrightarrow{OA}$$

а отже, $\alpha = \frac{H_2H_3}{OA} = \frac{AHsinA}{R} = \frac{Rsin2A}{R}$ (за відомими формулами), тобто

$$\alpha = sin2A; \, i\overrightarrow{H_2H_3} = sin2A \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Аналогічно,

$$i\overrightarrow{H_2H_3} = sin2A \cdot \overrightarrow{OB}, \, i\overrightarrow{H_2H_3} = sin2A \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Підставивши це в рівність (*) та використавши властивість

$$i \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = i\vec{a} + i\vec{b},$$

дістанемо

$$i \cdot (\overrightarrow{OA}sin2A + \overrightarrow{OB}sin2B + \overrightarrow{OC}sin2C) = \vec{0},$$

звідки випливає необхідна рівність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посіб. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. 193 с.

2. Кушнір І. А. Комплексні числа. Теорія і практика. Київ : Фак, 2002. 168 с.

3. Тичинська Л. М., Черноволик Г. О., Ковальчук М. Б. Теорія функцій комплексної змінної : навч. посіб. Вінниця : ВДТУ, 2007. 99 с.

4. Хом'юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Хом'юк В. В., Ковальчук М. Б. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою). Ч. 1 : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2017. 208 с.

5. Хом'юк І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Хом'юк В. В., Ковальчук М. Б. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою). Ч. 2 : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2017. 16 с.

6. Храбустовський В. І., Осмаєв О. А., Удодова О. І. Теорія функції комплексної змінної : методичні вказівки. Ч. 1. Харків : УкрДАЗТ, 2007. 38 с.

Електронне навчальне видання

Майя Борисівна Ковальчук

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Частина 11. Комплексні числа та дії над ними

Рукопис оформила: М. Ковальчук

Редактор: О. Малетіна

Оригінал-макет виготовлено РВВ ВНТУ

Підписано до видання 5.11.2025
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2025-159.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: rvv.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.