

**Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика».**

Частина 12. Функція комплексної змінної

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика».**

Частина 12. Функція комплексної змінної

Вінниця
ВНТУ
2025

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 25.09.2025 р.)

Рецензенти:

Л. Ф. Михайленко, доктор педагогічних наук, професор

В. А. Петрук, доктор педагогічних наук, професор

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Частина 12. Функція комплексної змінної [Електронний ресурс] / уклад. М. Б. Ковальчук. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 30 с.)

Методичні вказівки розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика». У методичних вказівках наведено короткі теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач розділу «Функція комплексної змінної».

Для здобувачів вищої освіти галузі знань «Інформаційні технології».

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
Тема 1. Історія виникнення поняття функції комплексної змінної.	5
Тема 2. Основні елементарні функції комплексної змінної	6
Тема 3. Множини точок на комплексній площині.....	8
Тема 4. Диференційованість функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана. Аналітичність функції комплексної змінної.	12
Тема 5. Інтеграл від функції комплексної змінної.....	17
Тема 6. Лишки функції комплексної змінної. Ізольовані особливі точки, їх класифікація. Обчислення інтегралів за допомогою лишків.	22
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	29

ПЕРЕДМОВА

Поняття функції комплексної змінної відіграє важливу роль у сучасній вищій математиці та має широке застосування в різних галузях техніки, фізики, електроніки та інших науках. Вивчення цієї теми дозволяє сформуванню у здобувачів вищої освіти уявлення про аналітичні функції, особливості їх диференціювання та інтегрування, властивості рядів, залишків і особливих точок.

Методичні вказівки розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей. Вони містять короткі теоретичні відомості, що супроводжуються докладним аналізом прикладів розв'язання типових задач. Особлива увага приділена формуванню практичних навичок розв'язання задач на основі теоретичних положень, що сприяє кращому розумінню абстрактних понять і підготовці до контрольних, модульних іспитів та самостійної роботи.

Зміст вказівок структуровано за темами, що логічно поєднують теоретичний і практичний компоненти, що робить посібник зручним у користуванні як під час аудиторних занять, так і в умовах дистанційного чи індивідуального навчання.

Даний методичний матеріал стане корисним інструментом для здобувачів вищої освіти у вивченні складної, але надзвичайно цікавої теми «Функція комплексної змінної».

Методичні рекомендації для самостійного опрацювання розроблено відповідно до навчальної програми курсу «Вища математика» і призначено для здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей. Посібник має на меті забезпечити як теоретичну базу, так і практичну методичну підтримку під час самостійного вивчення теми.

Тема 1.

Історія виникнення поняття функції комплексної змінної.

Історія виникнення поняття функції комплексної змінної є важливим етапом розвитку математики і тісно пов'язана з розвитком комплексного аналізу як окремої галузі.

Поняття комплексного числа з'явилося ще в XVI столітті під час розв'язування квадратних рівнянь, які не мали дійсних коренів. Наприклад, у роботах італійського математика Джироламо Кардано (1501–1576) фігурували вирази на зразок $\sqrt{-1}$, хоча тоді вони не мали строгої математичної інтерпретації.

У XVIII столітті швейцарський математик Леонард Ейлер (1707–1783) ввів позначення $i = \sqrt{-1}$ і зробив важливі кроки в осмисленні комплексних чисел.

Перші ідеї про функції від комплексного аргументу з'явилися в роботах Жана Лерона д'Аламбера і Ойлера, але справжній розвиток поняття функції комплексної змінної відбувся в XIX столітті.

Огюстен Луї Коші (1789–1857) вважається одним із засновників теорії функцій комплексної змінної. Саме він:

- дав точне означення аналітичної функції;
- сформулював і довів інтегральну теорему Коші;
- розробив поняття голоморфності (диференційованості в області комплексної площини).

Бернхард Ріман (1826–1866) зробив революційні відкриття, зокрема в галузі багатозначних функцій і побудови поверхонь Рімана, що дозволяють розглядати ці функції як однозначні.

Карл Вейерштрас (1815–1897) розвинув теорію аналітичних функцій із суворою побудовою через степеневі ряди та межі.

Сьогодні функція комплексної змінної – це функція виду $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, яка може бути:

- аналітичною (має похідну на області);
- голоморфною (синонім аналітичної в контексті комплексного аналізу);
- мероморфною (має полюси);
- мати інші властивості, що визначають її поведінку на комплексній площині.

Комплексний аналіз, що ґрунтується на цих функціях, має надзвичайно потужний апарат і застосування – від математичної фізики до електротехніки, теорії потенціалу, динамічних систем і навіть криптографії.

Тема 2.
Основні елементарні функції комплексної змінної

Таблиця 1

1	Показникова функція	$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$
2	Тригонометричні функції	
	$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $\operatorname{Ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$
3	Гіперболічні функції	
	$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$	$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ $\operatorname{Cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$
4	Логарифмічна функція	$\operatorname{Ln} z = \ln z + i \operatorname{Arg} z$
		$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k i$ $\arg z \in (-\pi; \pi), k \in \mathbb{Z}$
5	Головне значення логарифма	$\ln z = \ln z + i \operatorname{arg} z$
6	Узагальнені показникова і степенева функції	$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, a \neq 0, z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$
7	Арксинус	$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2})$
8	Арккосинус	$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1})$
9	Арктангенс	$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}$
10	Арккотангенс	$\operatorname{ArcCtg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}$
11	Ареасинус	$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{1 + z^2})$
12	Ареакосинус	$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1})$
13	Ареатангенс	$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$
14	Ареакотангенс	$\operatorname{Artch} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}$

Властивості основних елементарних функцій

Таблиця 2

1	Властивості показникової функції	
	$ e^z = x, \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k$	$e^{z+2\pi ki} = e^z, k \in Z$ $e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1, e^{\pm \frac{\pi i}{2}} = \pm i$
2	Властивості логарифмічної функції	
	$\operatorname{Re} \operatorname{Ln} z = \ln z ,$ $\operatorname{Im} \operatorname{Ln} z = \operatorname{Arg} z$	$\operatorname{Ln} 1 = 2\pi ki, k \in Z$
3	Властивості тригонометричних функцій	
	$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y$ $\operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y$ $\operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y$ $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$	$\cos(z + 2\pi k) = \cos z$ $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$ $\operatorname{tg}(z + \pi k) = \operatorname{tg} z$ $\operatorname{ctg}(z + \pi k) = \operatorname{ctg} z$
4	Властивості гіперболічних функцій	
	$\operatorname{Re} \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y$ $\operatorname{Im} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y$ $\operatorname{Re} \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y$ $\operatorname{Im} \operatorname{ch} z = -\operatorname{sh} x \sin y$	$\operatorname{ch}(z + 2\pi ki) = \operatorname{ch} z$ $\operatorname{sh}(z + 2\pi ki) = \operatorname{sh} z$ $\operatorname{th}(z + \pi ki) = \operatorname{th} z$ $\operatorname{cth}(z + \pi ki) = \operatorname{cth} z$ $k \in Z$
5	Співвідношення між тригонометричними і гіперболічними функціями	
	$\cos iz = \operatorname{ch} z,$ $\operatorname{ch} iz = \cos z$ $\sin iz = i \operatorname{sh} z,$ $\operatorname{sh} iz = i \sin z$	$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z,$ $\operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$ $\operatorname{Ctg} iz = -i \operatorname{Cth} z,$ $\operatorname{Cth} iz = -i \operatorname{Ctg} z$

Тема 3.

Множини точок на комплексній площині

❖ **Приклад 1.** Визначити криву, яка визначається рівнянням

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}?$$

Розв'язання

Нехай $z = x + iy$. Маємо $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

За умовою $\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}$ або $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Виділимо повний квадрат і одержимо $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Це круг з центром в точці $(2; 0)$ і $R = 2$.

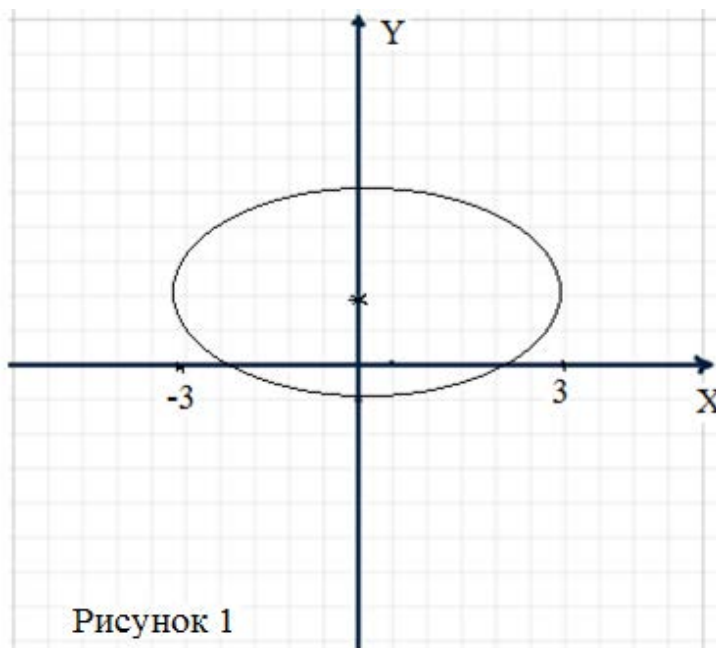
❖ **Приклад 2.** Вказати, які лінії визначаються наступними рівняннями.

$$|z - i| + |z + i| = 4$$

Розв'язання

Відстань між точками $z = x + iy$ і $z_0 = x_0 + iy_0$ дорівнює

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$



Тому

$$|z - i| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}$$

$$|z + i| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

Тоді одержимо:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} = 4 \quad (*)$$

Після піднесення до квадрату лівої і правої частини рівняння (*)

одержимо: $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{18} = 1$ – еліпс з центром в точці $(0; 2)$ (рисунок 1).

❖ **Приклад 3.** Знайти на комплексній площині множину точок, які задовольняють умову

$$|z| - 3\text{Im } z = 6$$

Розв'язання

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Im } z = \text{Im } (x + iy) = y$$

Тоді одержимо:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 3y = 6$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 3y$$

Після піднесення до квадрату і спрощення одержимо:

$$x^2 - 8\left(y^2 + \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$x^2 - 8\left(y^2 + \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$x^2 - 8\left[\left(y + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] = 0$$

$$x^2 - 8\left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = -\frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - \frac{\left(y + \frac{9}{4}\right)^2}{\frac{9}{16}} = -1$$

Це є гіпербола.

❖ **Приклад 4.** Знайти на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові

$$1 < |z + i| < 2$$

Розв'язання

Зауважимо, що $|z - z_0|$ дорівнює відстані між точками $z = x + iy$ і

$$z_0 = x_0 + iy_0:$$

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Тому умова $1 < |z + i| < 2$ задає кільце з центром в точці $z = -i$ (на площині це точка з координатами $(0; -1)$) і радіусами $r_1 = 1$ та $r_2 = 2$ (рисунок 2).

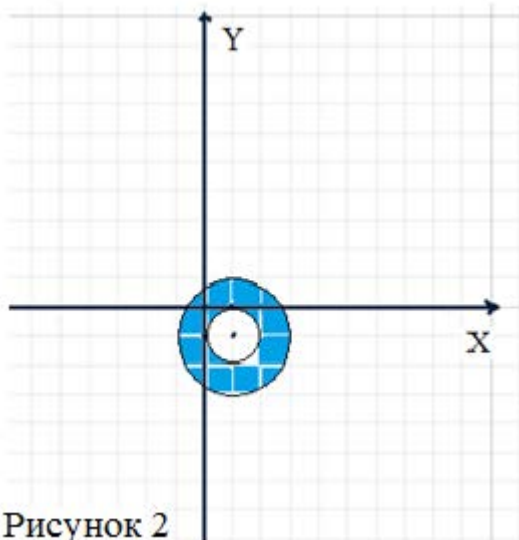


Рисунок 2

❖ **Приклад 5.** Знайти на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові

$$\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 - i) < \frac{\pi}{2}$$

Розв'язання

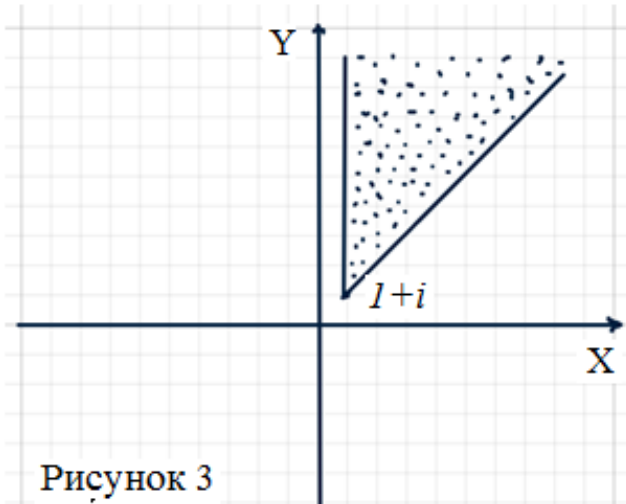


Рисунок 3

Комплексне число $z - 1 - i = z - (1 + i)$ можна зобразити вектором, початком якого є точка $(1+i)$, а кінцем – точка z . Дійсне число $\arg(z - 1 - i)$ є кут між цим вектором та віссю Ox . Оскільки за умовою він змінюється від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, то точка z повинна знаходитись всередині кута, що утворюють промені, які виходять з точки $(1+i)$ і утворюють з віссю Ox кути $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{\pi}{2}$ (рисунок 3).

❖ **Приклад 6.** Зобразити на комплексній площині множину точок, яка задовольняє нерівність $|z| > 1 - \operatorname{Re}z$

Розв'язання

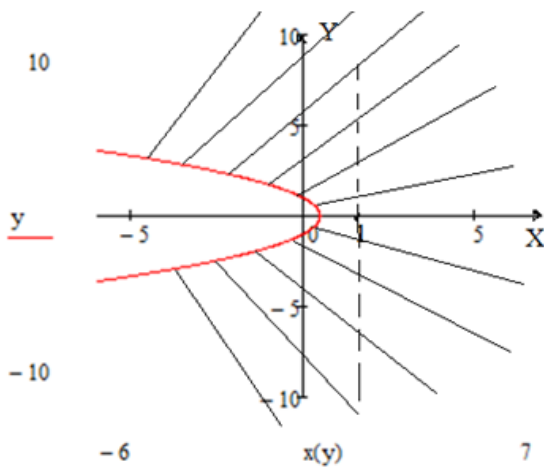


Рисунок 4

$$1 - \operatorname{Re}z = 1 - \operatorname{Re}(x + iy) = 1 - x$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

За умовою

$$\sqrt{x^2 + y^2} > 1 - x$$

При $x < 1$ маємо:

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 > (1 - x)^2$$

$$x^2 + y^2 > 1 - 2x + x^2$$

$$y^2 > 1 - 2x$$

Отже, множина E – частина площини, яка лежить з тієї ж сторони параболи $y^2 = 1 - 2x$, що й точка $z = 1$ (рисунок 4).

❖ **Приклад 7.** Зобразити на комплексній площині множину точок, яка задовольняє нерівність

$$\left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| \leq 1$$

Розв'язання

Помноживши ліву і праву частини даної нерівності на $|z + 1|$ одержимо рівносильну нерівність $|z - 1| \leq |z + 1|$

Вираз $|z - 1|$ виражає відстань від точки z до точки з координатами $(1; 0)$. Оскільки $z = x + iy$, то маємо, що

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

Аналогічно вираз $|z - (-1)|$ виражає відстань від точки z до точки з координатами $(-1; 0)$

Отже,

$$\begin{aligned} |z + 1| &= \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 0)^2} = \\ &= \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Отримаємо нерівність

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq (x + 1)^2 + y^2$$

Після спрощення одержимо:
 $x \geq 0$.

Шуканою множиною є права півплощина (рисунок 5).

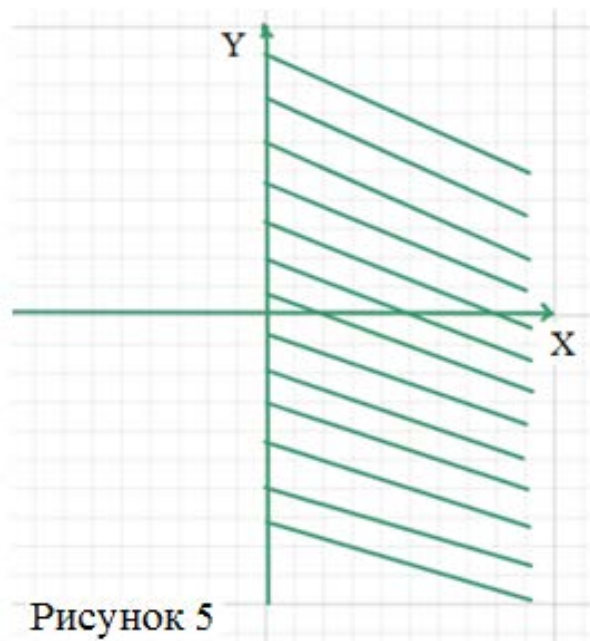


Рисунок 5

Тема 4.

Диференційованість функції комплексної змінної.

Умови Коші – Рімана. Аналітичність функції комплексної змінної.

Таблиця 3 Диференціювання функцій комплексної змінної

1. Похідна функції $f(z)$ в точці z_0	$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$
2. Диференційовність функції. Якщо існує $f'(z_0)$, то функцію $f(z)$ називають диференційовною в точці z_0	
3. Критерій диференційовності. Функція $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ диференційовна в точці $z = x + iy$, тоді й лише тоді, коли функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовні і справджуються	умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ Якщо $z = re^{i\varphi}$, то умови Коші-Рімана мають вигляд: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$
4. Формули для похідної функції	$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$ для показникової форми $f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right)$
5. Аналітичність функції. Функцію $w = f(z)$ називають аналітичною в точці z_0 , якщо вона диференційовна як у точці z_0 , так і в деякому околі цієї точки.	Однозначну функцію, диференційовну в кожній точці області D , називають аналітичною в цій області
6. Правильна і особлива точка функції. Точку, в якій функція аналітична, називають правильною точкою функції. Якщо функція аналітична у проколеному околі точки, а в самій точці не аналітична або не визначена, то таку точку називають особливою точкою функції. Однозначні елементарні функції комплексної змінної аналітичні скрізь, де вони означені.	7. Властивості аналітичних функцій. Якщо функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ аналітичні в області D , то їхні алгебраїчна сума $f_1(z) \pm f_2(z)$ і добуток $f_1(z) \cdot f_2(z)$ також аналітичні в цій області, а частка $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналітична в області D , за винятком тих точок, у яких знаменник дорівнює нулеві.
8. Гармонічність функції $f(x, y)$	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
9. Необхідна умова аналітичності функції. Дійсна та уявна частина аналітичної функції $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ є гармонічними функціями.	$\Delta u = 0$ $\Delta v = 0$

Зауваження!!! Для функції комплексної змінної зберігаються правила диференціювання і таблиця похідних, як у випадку функції дійсної змінної.

Приклад 8. З'ясувати, при яких z функція $f(z) = z^2$ диференційовна, і знайти її похідні в цих точках.

Знайдемо функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$.

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Перевіримо умови Коші-Рімана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

І знайдемо точки, в яких ці умови виконуються

У нашому випадку функція

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

Частинні похідні цих функцій дорівнюють

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

Умови Коші – Рімана виконуються у всіх точках.

Похідна функції дорівнює: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z$.

❖ **Приклад 9.** Довести, що функція $f(z) = 3z^3 + 4$ аналітична та знайти похідну.

Розв'язання

Функція аналітична в точці z , якщо в цій точці та її околі виконуються умови Коші-Рімана. Для перевірки умов Коші-Рімана виділимо дійсну і уявну частини даної функції.

Нехай $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, тоді $f(z) = 3z^3 + 4 = 3(x + iy)^3 + 4$.

В останній рівності розкриємо дужки і виділимо дійсну і уявну частини. Одержимо

$$\begin{aligned} f(z) &= 3x^3 - 9xy^2 + 9iyx^2 - 3iy^3 + 4 \\ u(x, y) &= 3x^3 - 9xy^2 + 4 \\ v(x, y) &= 9yx^2 - 3y^3 \end{aligned}$$

Для того, щоб функція $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ була аналітичною в області D , необхідно й достатньо, щоб існували в цій області неперервні частинні похідні від функцій $u(x; y)$ і $v(x; y)$, які задовольняють умови

Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 - 9y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 9x^2 - 9y^2, \quad \text{отже} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -18xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 18yx, \quad \text{отже} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y , тому функція $f(z) = 3z^3 + 4$ аналітична на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну за формулою $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f'(z) = (3z^3 + 4)' = 9x^2 - 9y^2 + i(18yx) = 9(x^2 + i2xy - y^2) = 9(x + iy)^2 = 9z^2$$

Обчислимо похідну функції $f(z) = 3z^3 + 4$ за таблицею похідних.

$$f'(z) = (3z^3 + 4)' = 9z^2$$

Значення похідних збігаються.

❖ **Приклад 10.** Довести, що функція $f(z) = e^{2z+4i}$ аналітична та знайти похідну.

Розв'язання

Оскільки $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, то
 $e^{2z+4i} = e^{2(x+iy)+4i} = e^{2x+i(2y+4)} = e^{2x} (\cos(2y+4) + i \sin(2y+4))$

Виділимо дійсну і уявну частину функції

$$u(x, y) = e^{2x} \cos(2y + 4)$$

$$v(x, y) = e^{2x} \sin(2y + 4)$$

Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos(2y + 4), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos(2y + 4), \quad \text{отже} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin(2y + 4), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin(2y + 4), \quad \text{отже} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, то умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y , тому функція $f(z) = e^{2z+4i}$ є аналітичною на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну за формулою $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f'(z) = (e^{2z+4i})' = 2e^{2x} \cos(2y + 4) + i2e^{2x} \sin(2y + 4) = 2e^{2x} (\cos(2y + 4) + i \sin(2y + 4)) = 2e^{2x+i(2y+4)} = 2e^{2(x+iy)+4i} = 2e^{2z+4i}$$

Отже, $f'(z) = (e^{2z+4i})' = 2e^{2z+4i}$.

❖ **Приклад 11.** Довести, що функція $f(z) = z^3$ аналітична та знайти похідну.

Розв'язання

Інколи, для знаходження похідної доцільно функцію подати в показниковій формі.

Нехай $z = re^{i\varphi}$, тоді маємо:

$$f(z) = z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi).$$

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Обчислимо $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial r}$ та $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos 3\varphi; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2 \sin 3\varphi; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -3r^3 \sin 3\varphi; \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 3r^3 \cos 3\varphi$$

Очевидно, що умови Коші-Рімана виконуються для довільних r і φ . Це означає, що функція $f(z) = z^3$ аналітична на всій комплексній площині.

Обчислимо похідну функції двома способами: за формулою

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \text{ та за таблицею похідних.}$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{r}{z} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^3 \cos 3\varphi) + i \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sin 3\varphi) \right) = \\ &= \frac{r}{z} (3r^2 \cos 3\varphi + i 3r^2 \sin 3\varphi) = \frac{3r^3}{z} (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = \frac{3r^3}{z} e^{i3\varphi} = \frac{3z^3}{z} = 3z^2. \end{aligned}$$

$$\text{За таблицею похідних } f'(z) = (z^3)' = 3z^2.$$

Значення похідних збігаються.

❖ **Приклад 12.** Знайти область в якій функція $f(z) = x^2 + y + ixy^3$ є аналітичною.

Розв'язання

Перевіримо чи виконуються умови Коші-Рімана

$$u(x, y) = x^2 + y, \quad v(x, y) = xy^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2.$$

Бачимо, що $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ тільки вздовж ліній $x = 0$ або $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. Отже,

немає точок, в яких функція $f(z)$ була б аналітичною.

Відповідь: \emptyset .

❖ **Приклад 13.** Знайти аналітичну функцію $\omega = f(z)$ за відомою її дійсною частиною $u(x, y) = 2e^x \cos y$ за умови що $f(0) = 2$

Розв'язання

Відновити функцію за відомою дійсною частиною можна використовуючи умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$. За першою умовою Коші-Рімана має бути $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, так що $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$. Звідси

$$v(x, y) = \int 2e^x \cos y \, dy = 2e^x \sin y + \varphi(x),$$

де функція $\varphi(x)$ поки невідома. Диференціюючи $v(x, y)$ по x і використовуючи другу із умов Коші-Рімана, одержимо $2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y$, звідки $\varphi'(x) = 0$, а значить, $\varphi(x) = C$, де $C = \text{const}$.

Отже, $v(x, y) = 2e^x \sin y + C$, і, відповідно,

$$f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^z + iC.$$

Константу C знайдемо з умови $f(0) = 2$, тобто $2e^0 + iC = 2$, звідси $C = 0$.

Шукана функція буде мати вигляд - $f(z) = 2e^z$.

Тема 5.
Інтеграл від функції комплексної змінної

Таблиця 4. Інтегрування функції комплексної змінної

<p>1. Інтеграл від неперервної однозначної функції комплексної змінної $f(z)$ уздовж кусково-гладкої дуги L.</p>	$\int_L f(z)dz = \lim_{\substack{\max \Delta z_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$
<p>2. Зв'язок інтеграла від функції комплексної змінної з криволінійним інтегралом 2-го роду</p>	$\int_L f(z)dz = \int_L [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy)$
<p>3. Зв'язок інтеграла від функції комплексної змінної з визначеним інтегралом</p>	<p>$L: s = s(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_1; t_2]:$</p> $\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(s(t))s'(t)dt$
<p>4. Теорема Коші для однозв'язної області. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то $\oint_L f(z)dz = 0$, де L – довільний кусково-гладкий замкнений контур, що лежить в області D.</p>	<p>5. Теорема Коші для багатозв'язної області. Якщо функція $f(z)$ аналітична у скінченній замкненій області D, обмеженій кусково-гладкими конутрами L_0, L_1, \dots, L_n, то</p> $\oint_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} f(z)dz,$ <p>де всі контури обходять проти годинникової стрілки.</p>
<p>6. Формула Коші для аналітичної функції $f(z)$ (точка z_0 лежить усередині контуру L).</p>	$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$
<p>7. Формула Коші для похідної $f^{(n)}(z)$ (точка z_0 лежить усередині контуру L), $n \in \mathbb{N}$</p>	$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n-1}} dz$
<p>8. Якщо контур L є кусково-гладка замкнена крива, а функція $f(z)$ є аналітична всередині та на самій кривій L, то</p>	$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$
<p>9. Теорема Ньютона-Лейбніца. Якщо дуга L, з початком у точці z_1 і кінцем у точці z_2, лежить в області аналітичності D функції $f(z)$, то правдива формула Ньютона-Лейбніца:</p> $\int_L f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$ <p>де $F(z)$ – первісна для функції $f(z)$, тобто</p> $F'(z) = f(z), z \in D$	
<p>10. Параметричні рівняння кола з радіусом R з центром у точці z_0</p>	$z = z_0 + Re^{it}, t \in [0; 2\pi]$

❖ **Приклад 14.** Обчислити інтеграл $\int_C (5 + 2i + z\bar{z})dz$ по кривій C ,
де $C: |z| = 3, 0 \ll \arg z \ll \frac{\pi}{3}$

Розв'язання

Запишемо рівняння контуру C в показниковій формі. Нехай $z = 3e^{i\varphi}$,
тоді $dz = 3ie^{i\varphi} d\varphi$.

Тоді

$$\begin{aligned} \int_C (5 + 2i + z\bar{z})dz &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3i(5 + 2i + 3e^{i\varphi} \cdot 3e^{-i\varphi})e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3i(14 + 2i)e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (52i - 6)e^{i\varphi} d\varphi = (52i - 9) \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= (52i - 9) \frac{1}{i} (e^{i \cdot 0} - e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}) = \left| \frac{1}{i} = -i \right| = \\ &= -i(52i - 9) \left(\cos 0 + i \sin 0 - \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= (52 + 9i) \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (52 + 9i) \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \frac{52(1 - \sqrt{3})}{2} - i \frac{9(1 - \sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

❖ **Приклад 15.** Обчислити інтеграл $\int_C (z+2)^2 dz$ по кривій C , де C –
відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = -2$ та $z_2 = -2 + i$.

Розв'язання

Нехай $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, тоді

$$f(z) = z^2 + 4z + 4 = (x^2 + 4x - y^2 + 4) + i(2xy + 4y),$$

звідки $u = x^2 + 4x - y^2 + 4$, $v = 2xy + 4y$.

Для обчислення інтеграла по контуру застосуємо формулу

$$\int_L f(z)dz = \int_L [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy)$$

і одержимо

$$\begin{aligned} \int_C (z+2)^2 dz &= \int_C (x^2 + 4x - y^2 + 4)dx - (2xy + 4y)dy + \\ &+ i \int_C (2xy + 4y)dx + (x^2 + 4x - y^2 + 4)dy. \end{aligned}$$

Контуром C , що з'єднує точки $z_1 = -2$ і $z_2 = -2 + i$, є відрізок прямої $x = -2$ ($0 \leq y \leq 1$). Це означає, що $dx = 0$. Тому

$$\begin{aligned} \int_C (z+2)^2 dz &= -\int_0^1 (2 \cdot (-2)y + 4y) dy + i \int_0^1 ((-2)^2 + 4 \cdot (-2) - y^2 + 4) dy = \\ &= -i \int_0^1 y^2 dy = -\frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

❖ **Приклад 16.** Обчислити інтеграл $\int_C (6 + 2z) dz$ по відрізку прямої AB , яка з'єднує точки $z_A = 1$ та $z_B = 4 + 2i$ виразивши його через криволінійний інтеграл і за формулою Ньютона-Лейбніца.

Розв'язання

Перший спосіб. Обчислення інтеграла функції $f(z) = u + iv$, де $u = u(x; y)$ і $v = v(x; y)$ – дійсні функції змінних x та y комплексної змінної z , зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів, а саме

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді $u + iv$, враховуючи, що $z = x + iy$. Одержимо

$$f(z) = 6 + 2z = 6 + x + iy = (6 + x) + i2y$$

де $u(x, y) = 6 + x$, а $v(x, y) = 2y$

Отже,

$$\int_C (6 + 2z) dz = \int_C (6 + x) dx - 2y dy + i \int_C 2y dx + (6 + x) dy$$

Рівняння прямої AB (рис. 6), яка проходить через точки $z_A = 1$ та $z_B = 4 + 2i$ де:

$$\frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y - 0}{0 - 2}$$

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y}{-2}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$dy = -\frac{2}{3}dx, \quad 1 \leq x \leq 4$$

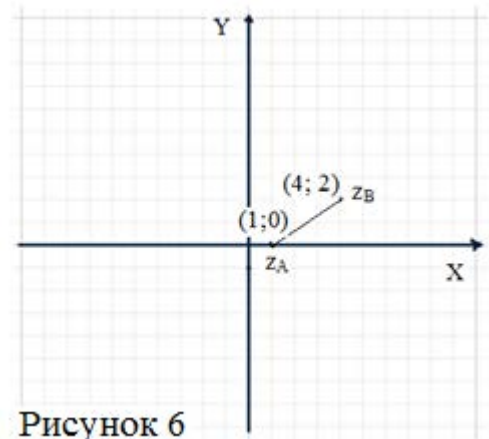


Рисунок 6

Тому

$$\int_C (6 + 2z) dz = \int_1^4 (6 + 2x) dx - 2 \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) dx + \\ + i \int_1^4 2 \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) dx + (6 + 2x) \left(-\frac{2}{3} \right) dx = \frac{261}{9} = 29$$

Другий спосіб. Для обчислення даного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца $\int_L f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$, необхідно перевірити чи є функція аналітичною, тобто, чи виконуються умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ та } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial v}{\partial x}$.

За умовою $u(x, y) = 6 + 2x$, а $v(x, y) = 2y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Умови Коші-Рімана виконуються для довільних x та y , тому функція $f(z) = 6 + 2z$ аналітична на всій комплексній площині.

Отже, для обчислення інтеграла $\int_C (6 + 2z) dz$ можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.

Одержимо:

$$\int_1^{4+2i} (6 + 2z) dz = \left(6z + 2 \cdot \frac{z^2}{2} \right) \Big|_1^{4+2i} = 6 \cdot (4 + 2i) + (4 + 2i)^2 - 6 - 1^2 = \\ = 29 + 28i$$

❖ **Приклад 17.** Обчислити інтеграл $\int_C (z + \operatorname{Re} z) dz$, де C – відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 3i$, $z_2 = 2 + 4i$.

Розв'язання

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(0;3)$ та $B(2; 4)$ має вигляд $y = \frac{1}{2}x + 3$. Отже множину точок, які належать відрізку AB , можна записати у вигляді $z = t + i \left(\frac{1}{2}t + 3 \right)$, $0 \ll t \ll 2$. Тоді $dz = \left(1 + \frac{1}{2}i \right) dt$ і

даний інтеграл дорівнює визначеному інтегралу від функції дійсної змінної, а саме:

$$\int_C (z + \operatorname{Re}z) dz = \int_0^2 \left(t + i \left(\frac{1}{2}t + 3 \right) + t \right) \left(1 + \frac{1}{2}i \right) dt =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2}i \right) \int_0^2 \left(t + i \left(\frac{1}{2}t + 3 \right) + t \right) dt = \left(t^2 + i \frac{1}{4}t^2 + i3t \right) \Big|_0^2 = 4 + 7i$$

Відповідь: $4+7i$

Тема 6.

Лишки функції комплексної змінної. Ізольовані особливі точки, їх класифікація. Обчислення інтегралів за допомогою лишків.

Таблиця 5. Класифікація ізольованих особливих точок функції

<p>1. Ізольована особлива точка. Точку z_0 називають ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо $f(z)$ аналітична в деякому околі цієї точки, за винятком самої точки z_0.</p> <p>2. Нуль функції. Точку z_0 називають нулем n-го порядку аналітичної функції $f(z)$, якщо</p> $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$	
Тип особливої точки	Границя функції в точці z_0
3. Усувна	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C \neq \infty$
4. Полюс порядку	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$
5. Істотно особлива точка	$\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
<p>6. Точка z_0 є полюсом порядку m для функції $f(z)$, якщо для функції $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ точка z_0 є нулем порядку m.</p>	
<p>7. Характер нескінченно віддаленої особливої точки $z = \infty$ функції $f(z)$ визначають, досліджуючи точку $\zeta = 0$ функції $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.</p>	

Таблиця 6. Обчислення лишку функції в ізольованих особливих точках функції

<p>1. Лишок. Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називають комплексне число</p> $\operatorname{res} f(z_0) = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L: z-z_0 =r} f(z) dz$ <p>де контур обходиться у додатному напрямі і лежить в області аналітичності функції $f(z)$ – кильці $0 < z - z_0 < R$</p>

Продовження таблиці 6

2. z_0 – скінченна точка	$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$
3. $z_0 = \infty$	$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = -c_{-1}$
4. z_0 – усувна точка	$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$
5. z_0 – полюс порядку m	$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z-z_0)^m)$
6. z_0 – простий полюс ($m=1$)	$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)$
7. z_0 – простий полюс функції $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ де $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0,$ $\psi'(z_0) \neq 0$	$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$
Теорема Коші про лишки. Якщо функція $f(z)$ аналітична на межі L області D і скрізь усередині області, за винятком скінченної кількості особливих точок z_1, z_2, \dots, z_n , то:	$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k)$

❖ **Приклади 18.** Обчислити $\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, де C – коло $|z-1-i| = \sqrt{2}$.

Розв'язання

Знайдемо особливі точки підінтегральної функції. Особливими точками є нулі знаменника: $(z-1)^2(z^2+1) = 0$
 $\Rightarrow (z-1)^2 = 0, (z+i) = 0, (z-i) = 0$.

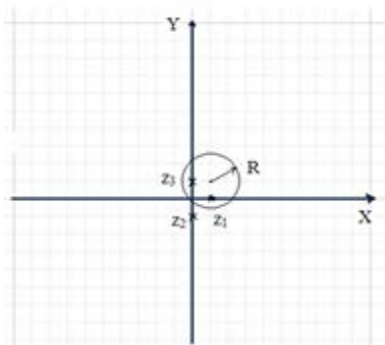


Рисунок 7

Одержимо три особливі точки: $z_1 = 1$ – полюс другого порядку; $z_2 = -i, z_3 = i$ – прості полюси. Контуром C є коло (рис. 7) з центром в точці $z = (1 + i) \leftrightarrow (1; 1)$ і радіуса – $R = \sqrt{2}$. В середині круга, який обмежений даним контуром, знаходяться точки z_1 та z_3 .

Тому,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=1} f(z) + \operatorname{res}_{z=i} f(z))$$

Знаходимо лишки за наведеними в таблиці 6 формулами

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} = \frac{1}{4}$$

Отже,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2+1)} = 2\pi i \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] = -\frac{\pi i}{2}$$

❖ **Приклад 19.** Обчислити інтеграл $\int_{|z-1|=5} \frac{dz}{z^2+9}$

- 1) за допомогою інтегральної формули Коші;
- 2) за допомогою теореми Коші про лишки.

Розв'язання

Перший спосіб. Обчислимо інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші.

Контуром C є коло з центром в точці $z = 1 \leftrightarrow (1; 0)$ і радіуса - $R = 5$.

Знаменник підінтегральної функції $f(z) = \frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z-3i)(z+3i)}$ перетворюється в нуль в точках $z_1 = 3i$ та $z_2 = -3i$, які належать області D , що обмежена контуром $C: |z-1| = 5$. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D , яка обмежена кусково-гладким замкненим контуром C , то на самому контурі C справедлива інтегральна формула Коші (таблиця 4):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}, \quad z_0 \in D.$$

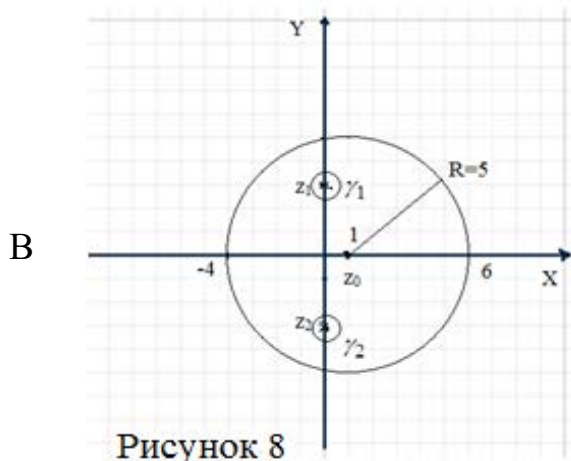


Рисунок 8

Побудуємо круги γ_1 і γ_2 з центрами в точках $z_1 = 3i$ та $z_2 = -3i$ (рис. 8) досить малих радіусів, таких, щоб вони не перетинались та повністю лежали в крузі $|z-1| < 5$. тризв'язній області, яка обмежена колами $|z-1| = 5$, γ_1 та γ_2 , підінтегральна функція всюди аналітична. За теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\int_{|z-1|=5} \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+9}.$$

До кожного інтеграла в правій частині можна застосувати інтегральну формулу Коші

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

В результаті одержимо:

$$\int_{|z-1|=5} \frac{dz}{(z-3i)(z+3i)} = \frac{2\pi i}{z+3i} \Big|_{z=3i} + \frac{2\pi i}{z-3i} \Big|_{z=-3i} = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} \right) = 0$$

Другий спосіб. Обчислимо інтеграл за допомогою теореми Коші про лишки.

В області $|z-1|=5$ функція $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ аналітична всюди, крім точок $z_1 = 3i$ та $z_2 = -3i$. За теоремою про лишки

$$\int_{|z-1|=5} \frac{dz}{z^2+9} = 2\pi i (\text{res}_{z=3i} f(z) + \text{res}_{z=-3i} f(z))$$

Визначимо тип особливих точок $z_1 = 3i$ та $z_2 = -3i$.

Оскільки

$$\lim_{z \rightarrow z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(3i)^2+9} = \frac{1}{-9+9} = \frac{1}{0} = \infty$$

та

$$\lim_{z \rightarrow z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(-3i)^2+9} = \frac{1}{-9+9} = \frac{1}{0} = \infty$$

то точки z_1 та z_2 є простими полюсами функції $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$.

У випадку простого полюса лишки обчислюються за формулою:

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0).$$

$$\text{res } f(3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} \cdot (z-3i) = \frac{1}{3i+3i} = \frac{1}{6i} = \left| \frac{1}{i} = -i \right| = -\frac{1}{6}i$$

$$\text{res } f(-3i) = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} \cdot (z+3i) = \frac{1}{-3i-3i} = \frac{1}{-6i} = \frac{1}{6}i$$

Отже,

$$\int_{|z-1|=5} \frac{dz}{z^2+9} = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}i + \frac{1}{6}i \right) = 0$$

❖ **Приклад 20.** Обчислити інтеграл $\int_{L_i} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)}$ за допомогою лишків та за інтегральною формулою Коші. Зробити зображення контурів L_i в комплексній площині z .

$$L_1: |z| = 4, L_2: |z - 1| = 2, L_3: |z + 2| = \frac{3}{2}, L_4: |z - 5| = 3.$$

Розв'язання

Знаменник підінтегральної функції $\frac{1}{z^3 \cdot (z+3)}$ перетворюється в нуль в точках $z_1 = 0$ і $z_2 = -3$.

Визначимо типи особливих точок та обчислимо лишки в цих точках.

Для точки $z_1 = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^3 \cdot (z+3)} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ отже } z_1 = 0 \text{ – полюс третього порядку.}$$

Обчислимо лишок функції в точці $z_1 = 0$.

Якщо точка z_0 є полюсом n -го порядку функції $f(z)$, то лишок в даній точці обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_0) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \cdot [f(z) \cdot (z - z_0)^n] \\ \operatorname{res} f(z_1) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} \left[\frac{1}{z^3 \cdot (z+3)} (z-0)^3 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{z+3} \right]'' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{(0+3)^3} \right) = -\frac{1}{27} \end{aligned}$$

Для точки $z_2 = -3$:

$$\lim_{z \rightarrow -3} \frac{1}{z^3 \cdot (z+3)} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ отже } z_2 = -3 \text{ – полюс першого порядку.}$$

Якщо z_0 є полюсом першого порядку, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$$

$$\operatorname{res} f(z_2) = \lim_{z \rightarrow -3} \frac{1}{z^3 \cdot (z+3)} \cdot (z+3) = \frac{1}{27}$$

Обчислимо інтеграл $\int_{L_i} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)}$ за допомогою лишків.

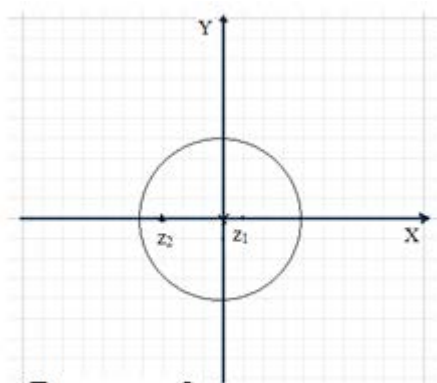


Рисунок 9

$$L_1: |z| = 4, L_2: |z - 1| = 2, L_3: |z + 2| = \frac{3}{2}, L_4: |z - 5| = 3.$$

Контуром $L_1: |z| = 4$ є коло (рис. 9) з центром в точці $z = 0$ і $R = 4$.

Області, яка обмежена даним колом, належать всі особливі точки: $z_1 = 0$ і $z_2 = -3$. Тому за теоремою Коші про лишки

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} = 2\pi i (\text{res } f(z_1) + \text{res } f(z_2)) =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{27} + \frac{1}{27} \right) = 0$$

Контуром $L_2: |z - 1| = 2$ є коло (рис. 10) з центром в точці $(1, 0)$, радіус якого дорівнює 2. Даній області інтегрування належить лише точка $z_1 = 0$. Тому

$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} = 2\pi i (\text{res } f(z_1)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{27} \right)$$

$$= -\frac{2\pi i}{27}$$

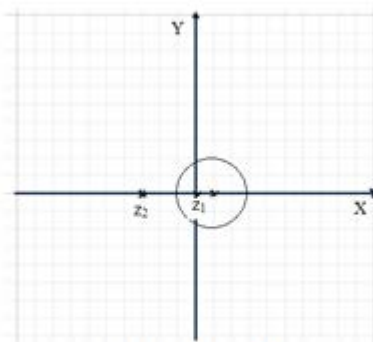


Рисунок 10

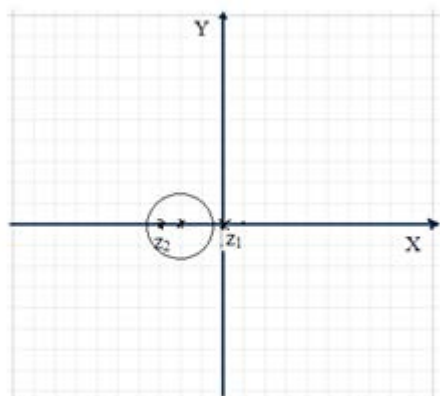


Рисунок 11

Контуром $L_3: |z + 2| = \frac{3}{2}$ є коло (рис. 11) з центром в точці $(-2, 0)$, радіус якого дорівнює $\frac{3}{2}$. Цій області інтегрування належить лише одна особлива точка $z_2 = -3$. Тому

$$\int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} = 2\pi i (\text{res } f(z_2)) = 2\pi i \cdot \frac{1}{27}$$

$$= \frac{2\pi i}{27}$$

Контуром $L_4: |z - 5| = 3$ є коло (рис. 12) з центром в точці $(5; 0)$, радіус якого дорівнює 3. Області, яка обмежена даним контуром, не належить жодна особлива точка.

Якщо контур L є кусково-гладка замкнена крива, а функція $f(z)$ є аналітична всередині та на самій кривій L , то $\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$.

Тому

$$\int_{|z-5|=3} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} = 0$$

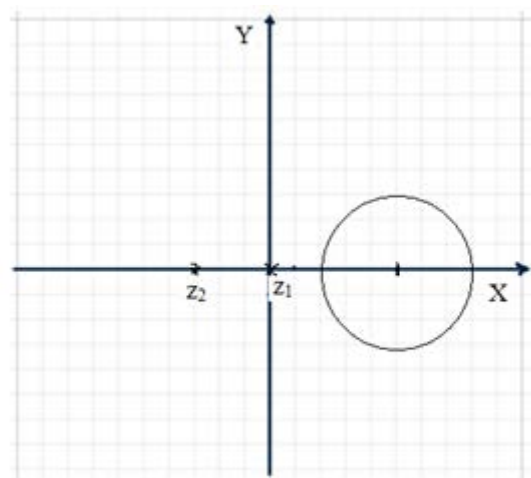


Рисунок 12

Обчислимо інтеграл $\int_L \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)}$ за інтегральною формулою Коші в кожній із областей.

Область D_1 обмежена контуром $L_1: |z| = 4$. Цій області належать всі особливі точки: $z_1 = 0$ і $z_2 = -3$. Тому за інтегральними формулами Коші ($\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ та $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}} dz$) одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=4} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} &= 2\pi i \left(\frac{f''(z_1)}{2!} + f(z_2) \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{z+3} \right)''_{z_1=0} + \left(\frac{1}{z^3} \right)_{z_2=-3} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{(z+3)^3} \right)_{z_1=0} + \frac{1}{(-3)^3} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{27} - \frac{1}{27} \right) = 0 \end{aligned}$$

Область D_2 обмежена контуром $L_2: |z-1| = 2$. Цій області належать лише одна особлива точка $z_1 = 0$. Тому за інтегральною формулою Коші $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}} dz$ одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} &= 2\pi i \left(\frac{f''(z_1)}{2!} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{z+3} \right)''_{z_1=0} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{(z+3)^3} \right)_{z_1=0} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{27} \right) = \frac{2\pi i}{27} \end{aligned}$$

Область D_3 обмежена контуром $L_3: |z+2| = \frac{3}{2}$. Цій області належать лише одна особлива точка $z_2 = -3$. Тому за інтегральною формулою Коші $\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} &= 2\pi i (f(z_2)) = 2\pi i \left(\left(\frac{1}{z^3} \right)_{z_2=-3} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{(-3)^3} \right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{27} \right) = -\frac{2\pi i}{27} \end{aligned}$$

Область D_4 обмежена контуром $L_4: |z-5| = 3$. Цій області не належать жодна особлива точка, тобто підінтегральна функція аналітична в кожній точці даної області. Тому за інтегральною формулою Коші

$$\int_{|z-5|=3} \frac{dz}{z^3 \cdot (z+3)} = 0$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Поляк І. Й., Погоріляк О. О. Методичні вказівки до практичних занять з теорії функцій комплексної змінної для студентів математичного факультету. Частина І. Ужгород, 2012. 32 с.

2. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення : практикум (ІІ курс ІІІ семестр) / уклад. : І. В. Алексеєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 160 с.

3. Тичинська Л. М., Ковальчук М. Б., Черноволик Г. О. Теорія функцій комплексної змінної : навчальний посібник. Вінниця : ВДТУ, 2007. 98 с.

4. Функції комплексної змінної : практикум з комплексного аналізу для студ. 3 курсу фіз.-мат. ф-ту / уклад. В. В. Дрозд. Київ : НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017. 88 с.

Електронне навчальне видання

Майя Борисівна Ковальчук

**Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з
дисципліни «Вища математика». Частина 12. Функція
комплексної змінної**

Рукопис оформила *М. Ковальчук*

Редактор *Н. Кравчук*

Оригінал-макет виготовлено в *РВВ ВНТУ*

Підписано до видання 03.11.2025 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № P2025-157

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: rvv.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.