

**Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
з дисципліни «Моделювання і прогнозування
стану довкілля» зі спеціальності «Екологія»**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
з дисципліни «Моделювання і прогнозування
стану довкілля» зі спеціальності «Екологія»**

Вінниця
ВНТУ
2026

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 28.05.2026 р.)

Рецензенти:

В. Г. Петрук, доктор технічних наук, професор

О. О. Ткачук, кандидат біологічних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» зі спеціальності «Екологія» / уклад. С. М. Кватернюк. Електрон. текст. дані. Вінниця : ВНТУ, 2026. 24 с.

Методичні вказівки призначені для студентів екологічних спеціальностей та містять рекомендації щодо виконання практичних робіт з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля». Методичні вказівки розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля».

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ПРАКТИЧНА РОБОТА 1	5
ПРАКТИЧНА РОБОТА 2	10
ПРАКТИЧНА РОБОТА 3	12
ПРАКТИЧНА РОБОТА 4	15
ПРАКТИЧНА РОБОТА 5	17
ПРАКТИЧНА РОБОТА 6	19
ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ.....	23

ВСТУП

Необхідність вивчення дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» зумовлена тим, що професійна діяльність вимагає від фахівців виконувати необхідні розрахунки параметрів моделей, за результатами моделювання визначати фактори антропогенного впливу на стан навколишнього природного середовища та окремих екосистем, розробляти і використовувати моделі популяційної екології, використовувати методи математичного та імітаційного моделювання для прогнозування забруднень повітря, поверхневих вод, ґрунтів та рослинного покриву, оцінювати адекватність і ефективність прогностичних схем, інтерпретувати дані глобального моніторингу. Предметом вивчення дисципліни є теорія і методика математичного моделювання та прогнозування фізичних і біотичних процесів у довкіллі. Курс базується на знаннях з вищої математики, фізики, хімії з основами біогеохімії, загальної екології (та неоекології), біології, інформатики в охороні довкілля, техноекології, екологічної токсикології.

Мета викладання дисципліни є формування теоретичних знань і практичних навичок у галузі математичного моделювання фізичних і біотичних процесів під впливом природних і антропогенних чинників у довкіллі та прогнозування змін його стану на різних рівнях.

Основними завданнями є: навчити студентів основам використання методів математичного моделювання при дослідженні процесів антропогенного впливу на довкілля та здійсненні різних функцій екологічного управління, зокрема у циклі процесу екологічного моніторингу довкілля – на етапі розробки стратегії та програми моніторингу та на етапі обробки даних; при оцінці впливу різних факторів антропогенного навантаження на довкілля (фактичного або прогнозного), прогнозуванні стану компонентів навколишнього середовища під впливом природних та антропогенних факторів; у тому числі при виконанні процедури оцінки впливу на навколишнє середовище; при розробці та оцінці ефективності природоохоронних заходів.

Після вивчення дисципліни студент повинен бути здатним моделювати і прогнозувати стан довкілля; уміти застосовувати програмні засоби, ПС-технології та ресурси інтернету для інформаційного забезпечення екологічних досліджень; уміти прогнозувати вплив технологічних процесів та виробництв на навколишнє середовище; здійснювати моніторинг стану навколишнього середовища, моделювати і прогнозувати процеси, які відбуваються у довкіллі.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 1

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ У ЕКОСИСТЕМАХ

Завдання практичної роботи полягає у здійсненні комп'ютерного моделювання динаміки ізольованих і багатокомпонентних екосистем на основі математичних моделей Мальтуса та Лотки-Вольтерри з порівнянням аналітичних і чисельних методів розрахунку. Крім того, необхідно дослідити вплив абіотичних факторів на біоценози, урахувавши температурні залежності швидкості розмноження та змодельовавши ферментативну кінетику за рівнянням Міхаеліса-Ментен.

Методика виконання

Дослідження динаміки чисельності біологічних популяцій є фундаментальним завданням інженерної екології, оскільки стабільність популяцій виступає інтегральним індикатором стійкості екосистеми до антропогенних збурень. Математичний апарат популяційної динаміки еволюціонував від простих детермінованих моделей до складних систем нелінійних диференціальних рівнянь, що враховують просторову гетерогенність та стохастичні флуктуації зовнішнього середовища.

Найбільш базовою, ідеалізованою моделлю нелімітованого зростання ізольованої популяції (за умов абсолютного надлишку трофічних ресурсів, відсутності пресу хижаків та конкурентів) є диференціальне рівняння Мальтуса. Воно постулює, що швидкість зміни чисельності популяції прямо пропорційна її поточній чисельності:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (1.1)$$

де N – чисельність популяції у поточний момент часу t ;

r – специфічна (питома) швидкість розмноження, що є різницею між питомими коефіцієнтами народжуваності (b) та смертності (d).

Аналітичний розв'язок цього лінійного диференціального рівняння першого порядку демонструє експоненціальний закон зростання (або спадання):

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (1.2)$$

Якщо екологічні умови стають екстремальними (наприклад, критичне теплове забруднення або гострий дефіцит кисню), рівень смертності d починає домінувати над народжуваністю b . У такому випадку параметр r набуває від'ємного значення, і рівняння перетворюється на модель експоненціального відмирання (деградації) живих організмів.

Проте експоненціальна модель швидко втрачає фізичний зміст у реальних екосистемах через обмеженість ресурсів (явище скупченості).

Зростання щільності популяції інтенсифікує внутрішньовидову конкуренцію, що призводить до падіння r . Цей ефект гальмування феноменологічно описується логістичним диференціальним рівнянням П. Ферхюльста:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (1.3)$$

де K – екологічна ємність середовища (максимально можлива чисельність популяції, яку здатний підтримувати даний біотоп).

Член $-\frac{rN^2}{K}$ відображає опір середовища. Інтегрування цього рівняння дає класичну S-подібну (сигмоїдну) криву зростання:

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) - r(t-t_0)}}. \quad (1.4)$$

Ця модель демонструє, що при $N \rightarrow K$ швидкість зростання асимптотично наближається до нуля, і популяція стабілізується на рівні ємності середовища.

В умовах реального біоценозу види існують не ізольовано, а формують складні трофічні мережі. Міжвидові взаємодії математично описуються за допомогою систем нелінійних диференціальних рівнянь типу Лотки-Вольтерри. Для двокомпонентної екосистеми базова система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \gamma_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 + \gamma_2 N_2 N_1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Знаки перед коефіцієнтами γ_1 та γ_2 визначають сутність біологічної взаємодії між видами. Якщо $\gamma_1 > 0$ і $\gamma_2 < 0$, ми маємо класичну систему «хижак-жертва», де присутність жертви стимулює зростання хижака, а присутність хижака пригнічує жертву. Мутуалізм (симбіоз) описується знаками $(+,+)$, конкуренція $(-,-)$, коменсалізм $(+,0)$, аменсалізм $(-,0)$, нейтралізм $(0,0)$. Більш глибокий аналіз трофічних ланцюгів вимагає введення функціональних відгуків хижака (наприклад, насичення хижака), що значно ускладнює систему.

Для комп'ютерного моделювання систем диференціальних рівнянь (наприклад, у середовищі Mathcad) часто використовують методи чисельного інтегрування, найпростішим з яких є метод Ейлера. Перехід від неперервного часу dt до дискретного кроку Δt перетворює диференціальні рівняння на систему алгебраїчних рекурентних рівнянь:

$$\begin{cases} N_{i+1} = N_i + (r_n N_i - \frac{r_n}{K_n} N_i^2 + \gamma_n N_i M_i), \\ M_{i+1} = M_i + (r_m M_i - \frac{r_m}{K_m} M_i^2 + \gamma_m M_i N_i). \end{cases} \quad (1.6)$$

Дискретизація дозволяє зробити розрахунки прозорими, де крок i відповідає середньому періоду розмноження. Незважаючи на появу обчислювальної похибки, такий підхід є математично виправданим та широко застосовується для імітаційного моделювання.

Динаміка біологічних процесів не обмежується чисельністю особин. Наприклад, кінетика ферментативних реакцій та швидкість поглинання забруднюючого субстрату (S) мікроорганізмами-деструкторами в аеротенках описується рівнянням Міхаеліса-Ментен:

$$V(S) = \frac{V_{max} \cdot S}{K_s + S}. \quad (1.7)$$

де V_{max} – гранична максимальна швидкість ферментативної реакції;
 K_s – константа напівнасичення (концентрація субстрату, за якої швидкість досягає $V_{max}/2$).

Це рівняння є фундаментальним для проєктування систем біологічного очищення стічних вод. Водночас, зростання гідробіонтів (зокрема, обчислення біомаси риб через їх фізичні розміри) моделюється степеневою функцією Ф.І. Баранова:

$$W(L) = b \cdot L^3. \quad (1.8)$$

де W – вага, L – довжина, b – коефіцієнт.

Вплив абіотичних факторів (температури, інсоляції) на швидкість біологічних процесів носить циклічний характер. Добові або сезонні коливання температури можна апроксимувати тригонометричними моделями, наприклад:

$$T(t) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{12} - \frac{\pi}{2}\right) + T_{avg}. \quad (1.9)$$

де A – амплітуда коливань,
 T_{avg} – середньодобова температура.

Більше того, питома швидкість розмноження r_i може експоненціально залежати від температури довкілля згідно із законом Вант-Гоффа або рівнянням Арреніуса, що у спрощеному вигляді подається як $r_i = R \cdot e^{t-t_0}$.

Порядок виконання роботи

Виконати моделювання динаміки чисельності ізолюваної популяції за рівнянням Мальтуса у пакеті Mathcad, використовуючи початкові умови: $N_0=10$, $r=0,1 \text{ рік}^{-1}$. Побудувати графік функції та проаналізувати її поведінку.

Провести аналогічне моделювання, замінивши точний аналітичний розв'язок на чисельне наближення за допомогою рекурентного рівняння $N_{i+1} = N_i + rN_i$. Порівняти отримані результати та оцінити величину методичної похибки дискретизації.

Використовуючи систему рекурентних рівнянь Лотки-Вольтерри, змодельовати динаміку двокомпонентної системи «вовки-зайці». Застосувати такі параметри: початкова кількість жертв – 1000, максимальна ємність середовища для жертв – 10000, швидкість їх розмноження – 0.3; початкова кількість хижаків – 10, швидкість їх розмноження – 0.1. Коефіцієнти зустрічності $\gamma_1 = -0,01$, $\gamma_2 = 0,001$. Змінюючи початкові параметри, домогтися режимів згасаючих коливань, стабілізації та повного вимирання однієї з популяцій.

Згідно з індивідуальним варіантом, наведеним у табл. 1.1, побудувати модель трикомпонентної екосистеми. Питомі швидкості розмноження прийняти: $r_1 = 0,1$, $r_2 = 0,2$, $r_3 = 0,3$. Коефіцієнти взаємодії γ приймаються рівними 0,01 за модулем, а їх знаки встановлюються відповідно до типу взаємодії (наприклад, для конкуренції обидва знаки від'ємні).

Таблиця 1.1 – Початкові дані для моделювання динаміки трикомпонентних екосистем

Варіант	Тип взаємодій між популяціями			Початкові чисельності			Коефіцієнти взаємодії		
	1-2	1-3	2-3	1	2	3	1-2	1-3	2-3
1	хижак-жертва	нейтралізм	хижак-жертва	2	2	3	0.012	0.02	0.02
2	хижак-жертва	симбіоз	нейтралізм	4	5	6	0.021	0.03	0.03
3	хижак-жертва	нейтралізм	конкуренція	7	8	9	0.031	0.04	0.04
4	хижак-жертва	коменсалізм	нейтралізм	10	11	12	0.041	0.05	0.05
5	хижак-жертва	нейтралізм	аменсалізм	13	14	15	0.052	0.01	0.01
6	хижак-жертва	хижак-жертва	хижак-жертва	16	17	18	0.061	0.02	0.02
7	симбіоз	симбіоз	симбіоз	19	20	21	0.072	0.03	0.03
8	конкуренція	конкуренція	конкуренція	22	23	24	0.084	0.04	0.04
9	хижак-жертва	симбіоз	хижак-жертва	25	26	27	0.09	0.05	0.05
10	хижак-жертва	коменсалізм	хижак-жертва	28	29	30	0.001	0.01	0.01
11	хижак-жертва	конкуренція	хижак-жертва	31	32	33	0.02	0.02	0.02
12	хижак-жертва	аменсалізм	хижак-жертва	34	35	36	0.003	0.03	0.03
13	симбіоз	симбіоз	хижак-жертва	37	38	39	0.04	0.04	0.04

Ускладнити модель трикомпонентної екосистеми, ввівши експоненціальну залежність швидкості розмноження однієї з популяцій (r_i) від температури середовища. Середні температури на кожному кроці моделювання обрати згідно з табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Зміна температурного режиму в екосистемі (°C)

Крок часу	Варіанти 1-10	Варіанти 11-20	Варіанти 21-30
1	10	1	3
2	12	2	3
3	14	2	4
4	16	2	4
5	13	2	4
6	12	2	4
7	14	2	5
8	15	2	5
9	17	2	5
10	17	2	5

Здійснити моделювання ферментативної кінетики за допомогою дрібно-раціональної функції Міхаеліса-Ментен.

Побудувати функцію для залежності температури від часу (добовий хід) та проаналізувати отриманий профіль.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АНТРОПОГЕННОГО ВПЛИВУ НА ЯКІСТЬ ПОВЕРХНЕВИХ ВОД. СТАЦІОНАРНА ПЛОЩИННА ЗАДАЧА

Завдання. Створіть у розрахункову матрицю для моделювання процесу розсіювання стічних вод у руслі річки за кінцево-різницевою моделлю А. В. Караушева. На основі згенерованих даних виконайте статистичне групування за допомогою інструменту «Гістограма» та побудуйте контурну поверхневу діаграму для візуального аналізу зони забруднення.

Методика виконання

Забезпечення екологічної безпеки водних екосистем вимагає прецизійного прогнозування процесів розсіювання та асиміляції стічних вод у руслах річок. Перенесення забруднюючих речовин (ЗР) у відкритих водотоках є складним гідродинамічним процесом, що визначається адвективним транспортом (перенесенням маси води за рахунок середньої швидкості течії) та турбулентною дифузією (хаотичним перемішуванням водних мас). У випадках, коли джерело забруднення діє безперервно протягом тривалого часу, а гідрологічний режим річки є квазіусталеним, задачу можна звести до стаціонарної площинної (двовимірної) моделі дисперсії.

Одним із класичних підходів до розв'язання цієї проблеми є кінцево-різницева модель А. В. Караушева [14]. Вона дозволяє розрахувати концентраційне поле забруднюючої речовини нижче за течією від місця скиду. З математичної точки зору, диференціальне рівняння турбулентної дифузії апроксимується системою алгебраїчних рівнянь на дискретній сітці. Розрахункова область русла ділиться на поперечні смуги (профілі) та поздовжні струмені. Концентрація ЗР у кожній комірці розрахункової сітки на наступному (нижньому за течією) створі визначається як функція від концентрацій у сусідніх комірках на попередньому створі з урахуванням інтенсивності турбулентного обміну.

Для практичної реалізації моделі Караушева в середовищі табличного процесора MS Excel формується розрахункова матриця базовим розміром 5×5 , який може бути розширений до $5 \times (5+n)$ залежно від ширини річки та вимог до просторової роздільної здатності. Нульовий стовпець цієї матриці слугує для задання граничних умов – концентрації ЗР у місці випуску стічних вод. Клітинки матриці програмуються рекурентними формулами, які зв'язують просторові координати. Таким чином, зміна початкових умов (величини залпового скиду) призводить до автоматичного перерахунку всього концентраційного поля.

Враховуючи масивність згенерованих даних, критично важливим є етап візуалізації. Групування та зведення статистичної інформації може

бути виконано за допомогою надбудови «Аналіз даних» (зокрема, інструменту «Гістограма»), що дозволяє обчислювати частоти потрапляння концентрацій у задані інтервали. Проте найбільш репрезентативним методом аналізу двовимірного дифузійного шлейфу є побудова поверхневих діаграм у MS Excel. Трансформація тривимірного графіка у контурну діаграму (вид зверху), де колірний градієнт відображає ізолінії рівних концентрацій, дозволяє візуально ідентифікувати ядро забруднення, оцінити площу зони токсичного впливу та визначити створ повного перемішування, де концентрація домішки наближається до фонові.

Порядок виконання роботи

1. На основі лекційного матеріалу розробити алгоритм кінцево-різницевого розв'язку моделі А. В. Караушева для двовимірного розсіювання.
2. Створити в MS Excel розрахункову матрицю. Прописати у комірках математичні формули таким чином, щоб розрахунок концентрацій уздовж русла виконувався ітеративно, спираючись на значення з попередніх стовпців.
3. Ввести в нульовий стовпець матриці параметри початкового забруднення згідно з варіантом. Переконалися у коректності автоматичного розрахунку масиву.
4. Використовуючи надбудову «Аналіз даних» (модуль «Гістограма»), провести групування отриманих значень концентрацій за інтервалами (кишенями) для статистичної оцінки масиву.
5. Побудувати графічну модель поширення забруднення. Для цього виділити масив даних матриці та застосувати тип діаграми «Поверхня».
6. Через параметри діаграми змінити її вигляд на контурний («вид зверху»), налаштувати шкалу кольорів так, щоб вона чітко відображала градієнт концентрацій від епіцентру скиду до периферії.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 3

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У РІЧКАХ ЗА РІЗНИМИ МОДЕЛЯМИ

Завдання. У програмному середовищі реалізуйте кінетичну модель першого порядку та одновимірну модель Фролова-Родзиллера для розрахунку й графічного відображення процесів самоочищення та розбавлення стічних вод уздовж русла річки. Додатково запрограмуйте ітеративний матричний алгоритм кінцево-різницевої моделі Караушева та побудуйте тривимірну поверхневу діаграму поля концентрацій для порівняльного аналізу просторового поширення забруднення з результатами одновимірного моделювання.

Методика виконання

Окрім площинних кінцево-різницевих моделей, в інженерній екології широко застосовуються аналітичні одновимірні та напівемпіричні моделі. Вони дозволяють оперативно розраховувати процеси розбавлення та самоочищення без залучення великих обчислювальних потужностей.

Найпростішим прикладом є кінетична модель першого порядку, що описує зміну концентрації неконсервативної речовини (наприклад, органіки, що розкладається мікроорганізмами, або радіонукліда, що розпадається). Диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = -kx$ має розв'язок:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad (3.1)$$

де x_0 – початкова концентрація у створі скиду;

k – константа швидкості реакції самоочищення;

t – час проходження водних мас.

За цією експоненціальною моделлю зазвичай оцінюють процеси зниження біохімічної потреби в кисні (БСК).

Для оцінки власне гідродинамічного розбавлення консервативних домішок застосовується інженерний метод В. А. Фролова та І. Д. Родзиллера [14]. Метод ґрунтується на розв'язанні диференціального рівняння турбулентної дифузії з суттєвими допущеннями: річковий потік вважається безмежним, початкове гідравлічне розбавлення у місці скиду ігнорується, а сам випуск стічних вод розглядається як точковий зосереджений. Цей підхід дозволяє розрахувати концентрацію ЗР ($C_{\max}$) виключно на осі максимально забрудненого струменя (де концентрація найвища) на відстані L від місця скиду [14]:

$$C_{\max} = C + (C_0 - C)\exp(-\alpha\sqrt{L}), \quad (3.2)$$

де C – фонові концентрація речовини у річці;

C_0 – концентрація у випуску стічних вод;

α – емпіричний коефіцієнт, що акумулює гідравлічні особливості змішування.

Коефіцієнт умов змішування α є ключовим параметром моделі і розраховується за формулою:

$$\alpha = \xi \cdot \varphi \cdot \sqrt{\frac{D}{q}}, \quad (3.3)$$

де ξ – коефіцієнт, що враховує тип розташування випуску (для берегового скиду струмів притискається до берега, дифузія одnobічна, тому $\xi = 1$; для руслового випуску струмів розвивається з усіх боків, дифузія інтенсивніша, $\xi = 1,5$);

φ – коефіцієнт звивистості русла (відношення довжини русла вздовж фарватеру до відстані по прямій);

D – коефіцієнт турбулентної дифузії ($\text{м}^2/\text{с}$);

q – витрата стічних вод ($\text{м}^3/\text{с}$). Чим вище значення α , тим інтенсивніше відбувається розбавлення струменя.

На основі цього методу також визначається кратність розбавлення n (у скільки разів концентрація стічних вод зменшилася завдяки змішуванню з річковою водою). Для обчислення n використовується проміжний коефіцієнт змішування β , який вказує на частку витрати річки Q , що фактично бере участь у розбавленні на заданій відстані L :

$$\beta = \frac{1 - \exp(-\alpha\sqrt{L})}{1 + \left(\frac{Q}{q}\right)\exp(-\alpha\sqrt{L})}. \quad (3.4)$$

Тоді кратність розбавлення становить:

$$n = \frac{\beta \cdot Q + q}{q}. \quad (3.5)$$

Обмеження методу Фролова-Родзиллера полягають у тому, що він не дає інформації про просторову конфігурацію струменя (його ширину та глибину проникнення) і дає адекватні результати лише для річок середнього розміру. Тому його часто комбінують із просторовими моделями, такими як модель Караушева. Програмні комплекси Mathcad дозволяють легко інтегрувати ці різноманітні математичні апарати в єдиний аналітичний простір.

Порядок виконання роботи

1. Реалізувати в програмному середовищі кінетичну модель першого порядку, що описує деградацію органічного забруднення. Задати початкову концентрацію $x_0=10$ мг/л, константу швидкості $k=0,6$ доба⁻¹. Побудувати графік експоненціального спадання концентрації $x(t)$.
2. Запрограмувати модель В. А. Фролова – І. Д. Родзиллера. Ввести вхідні дані: витрата річки $Q=20$ м³/с, витрата стічних вод $q=4$ м³/с, фонові концентрації $C=0$, концентрація у стоках $C_0=50$ мг/л, коефіцієнт турбулентної дифузії $D(E)=0,015$ м²/с. Прийняти русловий випуск ($\xi=1,5$) та звивистість русла $\varphi=0,55$.
3. Обчислити проміжний коефіцієнт α . Згенерувати вектор відстаней L (від 0 до 40000 м) та побудувати логарифмічний графік зміни максимальної концентрації на осі струменя $C_{\max}(L)$.
4. Перенести алгоритм кінцево-різницевої матриці Караушева у програмне середовище. Запрограмувати вкладені цикли для ітеративного розрахунку елементів матриці концентрацій $C_{i,j}$.
5. Використовуючи функціонал програмного середовища для 3D-візуалізації, побудувати тривимірний графік поля концентрацій (Surface Plot) на основі розрахованої матриці. Порівняти отримані просторові профілі з результатами одновимірної моделі Родзиллера.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 4

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗАБРУДНЕННЯ У ҐРУНТАХ

Завдання. Застосовуючи апарат емпіричного поліноміального моделювання, розрахуйте зміну концентрації визначеного важкого металу в ґрунті залежно від відстані до джерела емісії. На основі згенерованого масиву даних побудуйте двовимірний графік для візуального аналізу просторового нелінійного тренду міграції токсиканту в літосфері.

Методика виконання

Моделювання процесів міграції забруднюючих речовин у літосфері є надзвичайно складною інженерною задачею. На відміну від атмосферного повітря чи води, ґрунт є багатофазним, високогетерогенним середовищем із мінливими фізико-хімічними властивостями (пористістю, кислотністю, сорбційною здатністю, вологонасиченістю). Типові задачі моделювання включають: оцінку площинного забруднення важкими металами (ВМ) навколо промислових майданчиків, прогнозування проникнення фільтрату з полігонів твердих побутових відходів (ТПВ) у водоносні горизонти, міграцію пестицидів на сільськогосподарських угіддях та розсіювання радіонуклідів.

Класичний детермінований підхід до моделювання вологоперенесення та міграції токсикантів у ґрунтах спирається на диференціальні рівняння гідродинаміки. Базовим емпіричним законом, що описує ламінарну фільтрацію флюїду в пористому середовищі, є закон Дарсі. Він стверджує, що швидкість фільтрації води v прямо пропорційна гідравлічному градієнту I :

$$v = k_f \cdot I, \quad (4.1)$$

де k_f – коефіцієнт фільтрації ґрунту.

Однак, розв’язання рівнянь конвективно-дисперсійного перенесення (наприклад, рівняння Річардса) вимагає величезного масиву достовірних вхідних даних (коефіцієнтів гідродинамічної дисперсії, ізотерм сорбції), які в умовах реального екологічного моніторингу в Україні часто відсутні.

За умов жорсткого дефіциту апіорної інформації та наявності коротких, зашумлених вибірок експериментальних даних найбільш раціональним є використання індуктивного моделювання, зокрема Методу Групового Урахування Аргументів (МГУА), розробленого академіком О. Г. Івахненком. Сутність МГУА полягає в автоматичній еволюційній самоорганізації математичних моделей. На відміну від класичного регресійного аналізу, де структуру рівняння обирає людина, МГУА самостійно генерує тисячі комбінацій часткових поліномів (найчастіше

поліномів Колмогорова-Габора). Алгоритм розбиває вибірку даних на навчальну та перевірочну. Навчальна послідовність використовується для оцінки коефіцієнтів поліномів (методом найменших квадратів), а перевірочна – для вибору найкращих моделей за зовнішнім критерієм селекції (наприклад, критерієм регулярності). У результаті багаторядної селекції синтезується складна, але оптимальна за точністю модель.

Застосування МГУА до даних моніторингу техногенного забруднення ґрунтів навколо шламонакопичувачів дозволило синтезувати адекватні емпіричні поліноміальні моделі розподілу важких металів. Концентрація металів у поверхневому шарі (на глибині до 20 см) та на відстані r до 0,5 км від джерела емісії описується такими виразами [14]:

$$\text{Для міді (Cu): } y_1 = 0.004r^2 + 2\frac{x_0r}{100} + x_0 - 0.8.$$

$$\text{Для цинку (Zn): } y_2 = 0.01r^2 + 0.6r + 0.9x_0.$$

$$\text{Для хрому (Cr): } y_3 = 0.02r^2 + 1.2r + 0.9x_0.$$

$$\text{Для нікелю (Ni): } y_4 = 0.02r^2 + \frac{x_0r}{100} + 0.9x_0.$$

де x_0 – початкова концентрація металу безпосередньо у місці витоку або випадання (мг/кг);

r – відстань від джерела забруднення (км);

y_i – прогнозована концентрація металу в ґрунті (мг/кг).

Ці рівняння демонструють, що розсіювання металів у ґрунтовому масиві має чітко виражений нелінійний, параболічний характер з ефектом накопичення на певних відстанях, що пов'язано з геохімічними бар'єрами та мікрорельєфом місцевості.

Порядок виконання роботи

1. Ознайомитися з принципами побудови статистичних моделей екопроцесів та сутністю методу самоорганізації (МГУА).
2. Отримати від викладача індивідуальні вихідні дані: тип важкого металу (Cu, Zn, Cr або Ni), початкову концентрацію забруднювача у джерелі (x_0) та діапазон відстаней для моделювання.
3. У середовищі MS Excel або Mathcad реалізувати відповідну поліноміальну модель. Згенерувати масив дискретних значень відстані r з кроком 10-50 м.
4. Розрахувати вектор значень концентрації важкого металу y_i у товщі ґрунту для кожної координати r .
5. Побудувати двовимірний графік залежності концентрації забруднювача від відстані. Провести аналіз тренду функції.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 5

МОДЕЛЮВАННЯ ДАНИХ ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ ЗАСОБАМИ ГЕОІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Завдання. Застосовуючи інструментарій ГІС та методи геостатистики, виконайте просторову інтерполяцію точкових даних екологічного моніторингу для побудови неперервних поверхонь концентрації оксиду вуглецю до та після ремонту автомагістралі. За допомогою алгебри поверхонь обчисліть різницевий растр та побудуйте графіки профілів уздовж реконструйованої ділянки дороги, що дозволить кількісно оцінити екологічну ефективність відновлення дорожнього покриття.

Методика виконання

Ефективне управління станом міського довкілля неможливе без просторового аналізу розподілу забруднювачів. Геоінформаційні системи (ГІС) слугують потужним інструментом для інтерполяції дискретних даних точкових постів екологічного моніторингу у неперервні картографічні поверхні. Урбанізовані території характеризуються значним впливом лінійних джерел емісії, головним чином – автомобільних доріг. Оксид вуглецю (CO) є маркерним полутантом неповного згоряння вуглеводневого палива у двигунах. Його концентрація в приземному шарі сильно залежить від швидкісного режиму транспортних засобів: часті розгони та гальмування на пошкодженому дорожньому покритті експоненціально збільшують емісію. Відповідно, капітальний ремонт доріг є важливим природоохоронним заходом, але його ефективність необхідно кількісно оцінювати методами просторового аналізу.

Для моделювання безперервних поверхонь концентрації на основі обмеженої кількості точок замірів використовуються методи геостатистики, автоматизовані в модулях типу «ArcGIS Geostatistical Analyst» [14]. Серцевиною геостатистичного аналізу є сімейство методів кригінгу. На відміну від детермінованих методів (наприклад, зворотно-зважених відстаней – IDW), кригінг спирається на статистичні закономірності просторової автокореляції даних. Ця автокореляція кількісно описується за допомогою напівваріограми – функції, що відображає зростання дисперсії між точками зі збільшенням відстані між ними. Кригінг дозволяє не лише побудувати карту ізоліній концентрацій, але й згенерувати карту стандартних помилок інтерполяції, що робить прогноз статистично вірогідним.

Існує декілька видів кригінгу:

Ординарний (Ordinary Kriging): передбачає, що середнє значення процесу невідоме, але постійне в межах локального вікна пошуку.

Простий (Simple Kriging): використовується, коли глобальне середнє значення достеменно відоме.

Універсальний (Universal Kriging): застосовується за наявності домінуючого просторового тренду (наприклад, поступове зниження концентрації при віддаленні від магістралі або в напрямку панівної рози вітрів). Згідно з дослідженнями, саме цей метод є оптимальним для моделювання дисперсії СО в умовах міської забудови.

Індикаторний та Диз'юнктивний: використовуються для аналізу ймовірності перевищення заданого порогу (наприклад, ГДК).

Оцінка ефективності ремонту доріг здійснюється за допомогою «алгебри поверхонь» – математичних операцій над растровими шарами у ГІС. Алгоритм передбачає побудову растра концентрацій до ремонту (X_1), растра після ремонту (X_2) та знаходження їхньої різниці: $\Delta X = X_2 - X_1$. Ділянки карти з від'ємними значеннями ΔX маркують просторові зони, де відбулося поліпшення стану атмосферного повітря. Для більш глибокого аналізу будуються двовимірні графіки профілів ΔX безпосередньо вздовж ліній автодоріг, що дозволяє кількісно оцінити відсоток зниження токсичного навантаження (наприклад, фіксація зменшення СО на 60-75% на відремонтованих ділянках).

Порядок виконання роботи

1. Уточнити постановку задачі просторового моделювання на основі отриманого датасету точкових замірів екологічного моніторингу.
2. Завантажити координати постів вимірювання та значення концентрацій у середовище ArcGIS. Створити точковий векторний шар (shapefile).
3. Запустити майстер Geostatistical Wizard. Виконати моделювання варіограм та здійснити інтерполяцію даних двома-трьома різними методами (ординарний, універсальний, диз'юнктивний кригінг).
4. Проаналізувати результати діалогового вікна «Перехресна перевірка» (Cross-Validation). Порівняти значення нормованої середньої помилки та середньоквадратичної помилки для вибору оптимального методу кригінгу (як правило, універсального).
5. Побудувати інтерпольовані поверхні X_1 (концентрація до впливу фактора) та X_2 (після впливу). Застосовуючи інструмент Raster Calculator, обчислити різницеву поверхню ΔX .
6. Використовуючи інструмент побудови профілів, згенерувати графік зрізу поверхні ΔX уздовж реконструйованої ділянки автодороги.
7. Проаналізувати графіки профілів. Врахувати при оцінці вторинні фактори (наприклад, явище індукованого попиту – збільшення трафіку на новій дорозі через зміну маршрутів водіями), які можуть нівелювати ефект від зниження питомої емісії автомобілів.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗСІЮВАННЯ ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРНОГО ПОВІТРЯ ЗА МЕТОДИКОЮ ОНД-86

Завдання. Реалізуйте в програмному середовищі нормативну методику ОНД-86 для математичного моделювання розсіювання забруднюючих речовин в атмосферному повітрі від стаціонарних промислових джерел. Обчисліть значення максимальної приземної концентрації та небезпечної відстані для обраних полютантів, побудуйте графік розподілу домішок уздовж осі димового факела та оцініть рівень забруднення довкілля порівняно з гігієнічними нормативами ГДК.

Методика виконання

Атмосферне повітря є найбільш динамічним середовищем міграції забруднювачів. Для оцінки екологічної безпеки промислових підприємств та встановлення нормативів гранично допустимих викидів (ГДВ) використовується фундаментальна детермінована модель розсіювання. На території України та країн пострадянського простору базовим регламентуючим документом залишається ОНД-86 «Методика розрахунку концентрацій в атмосферному повітрі шкідливих речовин, що містяться у викидах підприємств» [14].

Фізичною основою методики є напівемпіричне розв'язання рівняння турбулентної дифузії в приземному шарі атмосфери (на висоті до 2 метрів) на відстанях до 100 км від джерела емісії. Ключовою особливістю алгоритму ОНД-86 є розрахунок максимальної разової концентрації забруднювача (C_m) виключно за умов несприятливих метеорологічних умов (НМУ). НМУ виникають при так званій «небезпечній швидкості вітру», коли шлейф диму притискається до поверхні землі (часто внаслідок температурних інверсій), мінімізуючи розсіювання.

Для одиночного точкового джерела з круглим устям (наприклад, димової труби) максимальне значення приземної концентрації C_m (мг/м³) обчислюється за базовою формулою:

$$C_m = \frac{A \cdot M \cdot F \cdot m \cdot n \cdot \eta}{H^2 \sqrt{V \cdot \Delta T}}. \quad (6.1)$$

Структура формули відображає складний баланс термодинамічних та аеродинамічних сил, що діють на димовий факел:

A – кліматичний коефіцієнт, що враховує температурну стратифікацію атмосфери регіону (здатність повітряних мас до вертикального перемішування). Для України цей коефіцієнт жорстко регламентований на рівні $A=200$.

M – масова потужність викиду забруднюючої речовини (г/с). Якщо речовина хімічно трансформується у більш токсичну форму (наприклад,

окиснення NO до NO₂), розрахунок ведеться з урахуванням фактора повної трансформації.

F – безрозмірний коефіцієнт швидкості осідання домішок. Для газоподібних сполук та дрібнодисперсних аерозолів, що не осідають під дією гравітації, $F = 1$. Для важкого пилу значення F зростає (до 2,5 - 3).

H – геометрична висота джерела викиду над землею (м). Знаходження H у знаменнику в квадраті свідчить про те, що збільшення висоти труби є найефективнішим інженерним методом зниження приземної концентрації (ефект розсіювання у більшому об'ємі повітря).

V – об'ємна витрата газоповітряної суміші (м³/с).

ΔT – різниця між температурою газів, що викидаються, та температурою навколишнього повітря (°C). Цей параметр генерує термічну підйомну силу факела.

η – коефіцієнт рельєфу місцевості. Якщо перепади висот не перевищують 50 м на 1 км (рівнинна територія), $\eta = 1$.

m , n – безрозмірні коефіцієнти, що враховують кінетичну та термічну енергію виходу струменя.

Для знаходження m і n спочатку розраховується середня швидкість виходу газів з устя труби ω_0 (м/с):

$$\omega_0 = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot D^2}, \quad (6.2)$$

де D – діаметр устя труби (м).

Далі обчислюються допоміжні параметри f , v , v' :

$$f = \frac{1000 \cdot \omega_0^2 \cdot D}{H^2 \cdot \Delta T}. \quad (6.3)$$

Параметр f характеризує співвідношення динамічного напору факела та його теплової плавучості. Якщо $f \leq 100$ (нагріті викиди, де домінує тепла підйомна сила), коефіцієнт m розраховується як:

$$m = \frac{1}{0.67 + 0.1 \sqrt{f} + 0.34 \sqrt[3]{f}}. \quad (6.4)$$

Параметр v характеризує швидкість висхідного потоку:

$$v = 0.65 \cdot \sqrt{\frac{V \cdot \Delta T}{H}}. \quad (6.5)$$

Для $f \leq 100$ та $v > 2$ коефіцієнт n становить:

$$n = 0.532 \cdot v^2 - 2.13 \cdot v + 3.13. \quad (6.6)$$

Відстань від джерела x_m (м), на якій фіксується розрахована максимальна приземна концентрація C_m , визначається формулою:

$$x_m = d \cdot H \cdot \frac{5-F}{4}. \quad (6.7)$$

де d – безрозмірний коефіцієнт зсуву факела під тиском вітру:

$$d = 4.95 \cdot v \cdot (1 + 0.28\sqrt{f}), \quad \text{при } f < 100, \text{ та } 0.5 < v < 2. \quad (6.8)$$

Моделювання за ОНД-86 для великих промислових вузлів із сотнями джерел вимагає обчислення принципу суперпозиції (сумуючої дії), що реалізується через побудову розрахункової сітки у програмних комплексах, візуалізуючи поля забруднення на картографічній основі (зони перевищення ГДК).

Порядок виконання роботи

1. Відповідно до завдання викладача обрати варіант з табл. 6.1, який визначає групу підприємств.

Таблиця 6.1 – Розподіл промислових підприємств за індивідуальними варіантами

Варіант	Номери джерел (підприємств)	Варіант	Номери джерел (підприємств)
1	2, 1, 4	11	7, 5, 9
2	3, 6, 7	12	4, 6, 8
3	5, 8, 7	13	3, 7, 9
4	3, 2, 9	14	2, 7, 8
5	3, 10, 2	15	2, 10, 3
6	5, 1, 2	16	5, 7, 10
7	1, 7, 3	17	2, 5, 8
8	5, 1, 7	18	1, 7, 9
9	6, 10, 3	19	2, 4, 7
10	8, 9, 4	20	4, 6, 7

2. З табл. 6.2 виписати аеродинамічні параметри джерел викидів (H, V, D, T_r) та масові витрати специфічних забруднюючих речовин (M , г/с) для діоксиду сірки, оксиду вуглецю, діоксиду азоту, неорганічного пилу та оксиду азоту.

Таблиця 6.2 – Вихідні фізико-хімічні та аеродинамічні параметри стаціонарних джерел викидів

№ п/п	Параметри джерела				Емісія забруднюючих речовин (г/с)				
	H (м)	V (м ³ /с)	D (м)	T_r (°C)	SO_2	CO	NO_2	Пил	NO
1	18,0	0,8	2,3	108,0	-	-	0,0162	-	-
2	14,0	0,7	3,7	113,0	-	-	0,0212	-	-
3	35,0	0,4	2,8	118,0	0,0112	-	0,0312	-	0,0213
4	25,0	0,11	1,5	112,0	-	-	0,0412	-	-
5	18,0	3,1	1,2	118,0	-	-	0,0512	-	-
6	19,1	0,5	2,1	112,1	0,0216	0,0108	0,0692	-	-
7	21,2	2,23	1,1	128,1	-	0,0202	0,0762	-	0,0313
8	12,6	1,8	0,23	112,1	-	0,0308	0,0862	0,0118	0,0313
9	13,4	0,9	0,72	121,1	0,0316	0,0402	0,0162	-	-
10	12,0	0,88	2,2	112,1	0,0416	0,0502	0,0262	0,0218	0,0413
11	12,1	0,23	2,1	112,2	0,0516	0,0602	0,0362	0,0318	0,0413

3. Здійснити формалізацію алгоритму ОНД-86 у програмному середовищі. Записати систему рівнянь для обчислення швидкості ω_0 , безрозмірних параметрів f, v , та коефіцієнтів m, n, d .

4. Провести розрахунок максимальної приземної концентрації C_m та небезпечної відстані x_m для кожної забруднюючої речовини окремо.

5. Для маркерної речовини з найбільшим масовим викидом (наприклад, пилу неорганічного) побудувати графік зміни концентрації $C(x)$ вздовж осі факела від $x=0$ до $x=3000$ м.

6. Порівняти отримане максимальне значення C_m із санітарно-гігієнічним нормативом – гранично допустимою концентрацією (ГДК) для досліджуваної речовини. Зробити висновок про стан якості атмосферного повітря.

7. Оформити звіт, додавши до нього скріншоти програмного коду та побудовані графіки розсіювання.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Моделювання та прогнозування стану довкілля : підруч. для студ. вищ. закл. освіти ОС «Бакалавр» за спец. 101 – Екологія / І. І. Ясковець та ін. – Київ : Компрінт, 2018. 555 с.
2. Біляєв М. М., Біляєва В. В., Кіріченко П. С. Моделювання і прогнозування стану довкілля : підруч. для студ. ВНЗ. Кривий Ріг : Роман Козлов, 2016. 205 с.
3. Стоян В. А. Основи лабораторного моделювання просторово розподілених динамічних систем. Київ : Київський університет, 2017. 137 с.
4. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : підручник. Київ : Академія, 2010. 400 с.
5. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : навч. посіб. для студ. екол. і біол. спец. вищ. навч. закл. Київ : Академія, 2002. 203 с.
6. Диханов С. М. Моделювання і прогнозування стану довкілля : посіб. та збірник завдань до самостійної та індивідуальної роботи. Одеса : Одеська державна академія холоду, 2010. 390 с.
7. Посудін Ю. І. Методи вимірювання параметрів навколишнього середовища : підручник. Київ : Світ, 2003. 288 с.
8. Загородній Ю. В. Войтенко В. В. Моделі та методи екологічного моделювання : навч.-метод. посіб. Житомир : ЖІТІ, 2000. 109 с.
9. Янчук В. М., Колодницький М. М. Методи та засоби математичного моделювання міграції радіонуклідів у природних екосистемах. Житомир : ЖІТІ, 2002. 224 с.
10. Гладкий А. В., Скопецький В. В. Методи числового моделювання екологічних процесів. Київ : Політехніка, 2005.
11. Богобоящий В. В., Чурбанов К. Р., Палій П. Б., Шмандій В. М. Принципи моделювання та прогнозування в екології : підруч. для вузів. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 216 с.
12. Ковальчук П. І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища : навч. посіб. Київ : Політехніка : Періодика, 2005. 152 с.
13. Ляшенко І. М., Мукоєд А. П. Моделювання біологічних та екологічних процесів : навч. посіб. 2001. 450 с.
14. Мокін В. Б., Ящолт А. Р., Варчук І. В., Скорина Л. М. Моделювання та прогнозування стану довкілля : лаборатор. практикум : електрон. навч. посіб. / під ред. В. Б. Мокіна. Вінниця : ВНТУ, 2017. 84 с.

Електронне навчальне видання

Сергій Михайлович Кватернюк

**Методичні вказівки до виконання практичних робіт з
дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля»
зі спеціальності «Екологія»**

Рукопис оформив С. Кватернюк

Редактор Н. Кравчук

Оригінал-макет виготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до видання 28.07.2026

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2026-097.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

press.vntu.edu.ua;

Email: rvv.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК No 3516 від 01.07.2009 р.