

**Методичні вказівки
до виконання практичних завдань
з дисципліни «Теорія автоматичного керування»
зі спеціальності «Електроенергетика, електротехніка
та електромеханіка»**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**Методичні вказівки
до виконання практичних завдань
з дисципліни «Теорія автоматичного керування»
зі спеціальності «Електроенергетика, електротехніка
та електромеханіка»**

Вінниця
ВНТУ
2026

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 23.04.2026 р.)

Рецензенти:

О. В. Бабенко, кандидат технічних наук, доцент

В. М. Кутін, доктор технічних наук, професор

Методичні вказівки до виконання практичних завдань з дисципліни «Теорія автоматичного керування» зі спеціальності «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / уклад.: О. А. Паянок., О. М. Нанака. Електрон. текст. дані. Вінниця : ВНТУ, 2025. 59 с.

Методичні вказівки містять теоретичні пояснення, правила та приклади вирішення практичних завдань з дисципліни «Теорія автоматичного керування» для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка». У методичних вказівках визначено мету, завдання та послідовність виконання практичних завдань, наведено рекомендації та приклади виконання кожного із запропонованих завдань.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 МЕТА І ЗАВДАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ	5
2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ	7
2.1 Диференційні рівняння елементів систем автоматичного керування.....	7
2.2 Передатна функція чотириполюсника	9
3 СТРУКТУРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АЛГОРИТМІЧНИХ СХЕМ САК.....	13
4 ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК САК.....	22
5 ДОСЛІДЖЕННЯ САК НА СТІЙКІСТЬ	32
5.1 Перевірка стійкості системи за критерієм Найквіста.....	33
5.2 Перевірка стійкості системи за теоремою Ляпунова	35
5.3 Перевірка стійкості системи за критерієм Гурвіца.....	37
5.4 Перевірка стійкості системи за критерієм Михайлова.....	39
6 ВИЗНАЧЕННЯ ЗАПАСІВ СТІЙКОСТІ САК.....	42
7 ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ САК	45
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	48
Додаток А – Варіанти завдань для складання математичного опису динамічної системи	49
Додаток Б – Варіанти завдань для виконання структурних перетворень лінійних динамічних систем	50
Додаток В – Варіанти завдань для виконання дослідження лінійних динамічних систем на стійкість	57
Додаток Г – Варіанти завдань для визначення показників якості лінійних динамічних систем	58

ВСТУП

У повсякденному житті ми досить часто зіштовхуємося з поняттям «керування», під яким розуміється процес приведення певного фізичного об'єкта в стан, що відповідає деякій меті. Керувати можна транспортним засобом, верстатом, школою, телевізором і т. п.

У наш час одним з найбільш прогресивних напрямків у загальному розвитку науки й техніки є заміна операцій людини в процесах керування функціонуванням певних технічних пристроїв, тобто автоматизація таких процесів. Це обумовлюється в першу чергу тим, що через фізіологічні й психологічні особливості людини-оператора ефективність процесів керування звичайно не може досягати можливих оптимальних значень.

Теорія автоматичного керування (ТАК) – наукова дисципліна, предметом вивчення якої є процеси, що відбуваються в системах автоматичного керування.

При вивченні процесів керування в ТАК абстрагуються від фізичних і конструктивних особливостей систем і замість реальних систем розглядають їх адекватні математичні моделі, тому основним методом дослідження в ТАК є математичне моделювання. Крім того, методологічну основу ТАК створюють теорія звичайних диференціальних рівнянь, операційне вираховування (перетворення Лапласа), гармонійний аналіз (перетворення Фур'є).

Сучасними тенденціями в автоматизації виробництва є широке застосування ЕОМ для керування, створення машин і устаткування з вбудованими мікропроцесорними засобами вимірювання, контролю та регулювання, перехід на децентралізовані (розподілені) структури керування з мікроЕОМ, впровадження людино-машинних систем, використання високонадійних технічних засобів, автоматизоване проєктування систем керування.

В даних методичних вказівках розглядаються завдання розрахунку та побудови динамічних характеристик лінійних динамічних систем автоматичного керування, зокрема: виконання структурних перетворень лінійних динамічних систем, застосування перетворення Лапласа для вирішення завдань методом операційного числення, визначення частотних характеристик, вагової та перехідної характеристик лінійних динамічних систем, перевірка стійкості систем та визначення запасів їх стійкості. Все це дає можливість узагальнити та закріпити отримані знання з дисципліни «Теорія автоматичного керування» шляхом вирішення конкретних практичних завдань.

1 МЕТА І ЗАВДАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Практичні заняття – це різновид навчальної роботи з дисципліни, який містить елементи (завдання) навчального, аналітично-розрахункового та науково-дослідницького характеру.

Відповідно до робочої навчальної програми дисципліни «Теорія автоматичного керування» під час практичних занять передбачається дослідження динамічних характеристик, стійкості та якості лінійних систем автоматичного керування. Зокрема, назви практичних занять та кількість відведених на них в навчальному навантаженні годин приведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кіл-ть год.
1	Диференціальні рівняння і оператори САК. Схеми математичної моделі САК	2
2	Складання функціональних і алгоритмічних схем САК. Структурні перетворення схем.	1
3	Отримання динамічних характеристик САК	1
4	Застосування алгебраїчних критеріїв для дослідження САК на стійкість	1
5	Застосування частотних критеріїв для дослідження САК на стійкість	1
6	Визначення запасів стійкості САК за критерієм Найквіста	1
7	Визначення запасів стійкості САК за логарифмічним критерієм стійкості	1
8	Визначення прямих показників якості САК	1
Загальна кількість годин згідно навчального плану		9

Практичні заняття є одним із вагомих етапів вивчення студентами дисципліни «Теорія автоматичного керування» і має за мету:

- систематизувати, закріпити, узагальнити, поглибити та розширити знання, отримані студентом при вивченні курсу «Теорія автоматичного керування» в питаннях аналізу та синтезу систем автоматичного керування (САК);
- навчити студентів самостійно користуватися технічною літературою, різного роду довідниками, ДЕСТами, нормативними матеріалами та іншими посібниками;
- розвинути навички застосування теоретичних положень студентів для самостійного вирішення інженерних задач за фахом, пов'язаних із розробкою та розрахунками систем автоматичного керування.

В процесі розгляду та розв'язку практичних завдань ставляться конкретні інженерні задачі аналізу та синтезу систем автоматичного

керування. Студент повинен вміти самостійно виконувати запропоновані завдання, використовуючи сучасні досягнення теорії автоматичного керування.

Успішне виконання запропонованих в методичних вказівках завдань є ефективним методом закріплення навичок розрахунку динамічних характеристик лінійних динамічних систем та хорошою підготовкою студента до виконання в майбутньому бакалаврської дипломної роботи та в подальшому магістерської кваліфікаційної роботи.

2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

2.1 Диференціальні рівняння елементів систем автоматичного керування

Під час дослідження систем автоматичного керування в ТАК, як правило, мають справу не з фізичними об'єктами, а із їхніми математичними моделями. Характеристики елементів САК можуть бути задані аналітично, графічно або у вигляді таблиць, які дозволяють визначити поведінку елемента або системи в будь-який момент часу.

Однією із найпоширеніших форм запису математичної моделі поведінки САК є диференціальні рівняння (звичайні та у частинних похідних).

Для складання диференціальних рівнянь окремих елементів систем автоматичного керування на прикладі чотириполосника та, з рештою, диференціальних рівнянь, які зв'язують вхідну та вихідну напруги досліджуваного об'єкту необхідно застосувати закони для розрахунку розгалужених електричних кіл [1].

Основними законами теорії розрахунку розгалужених електричних кіл разом із законом Ома є закон балансу струмів у розгалужених (1-й закон Кірхгофа) та балансу напруг на замкнутих ділянках кола (2-й закон Кірхгофа). Цим законам відповідають всі електричні кола (лінійні та нелінійні) при будь-якому характері зміни в часі струмів та напруг.

1-й закон Кірхгофа: Алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (1)$$

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0. \quad (2)$$

Перший закон Кірхгофа свідчить про те, що у вузлі електричного кола електричний заряд не накопичується і не витрачається. Сума електричних зарядів (струмів), що заходять до вузла, дорівнює сумі зарядів (струмів), що витікають з нього за один і той самий проміжок часу [1].

2-й закон Кірхгофа: алгебраїчна сума ЕРС у замкнутому контурі дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг на елементах цього контуру (рисунок 1):

$$\sum_k I_k R_k = \sum_m E_m. \quad (3)$$

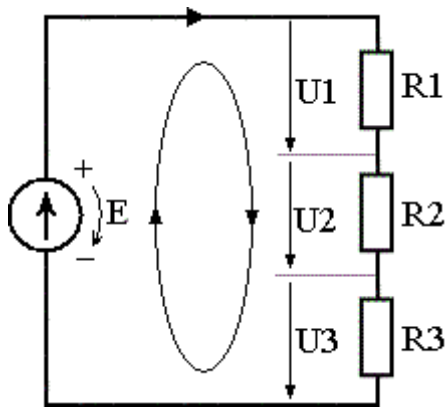


Рисунок 1 – Схема електричного контуру

Вказівки до виконання практичного завдання. Для складання диференціальних рівнянь окремих елементів та диференціальних рівнянь, які зв'язують вхідну та вихідну напруги досліджуваного об'єкта необхідно:

- вибрати позитивні напрямки струмів у вітках та позначити їх на схемі;
- вибрати позитивні напрямки обходу контурів та позначити їх на схемі.

Для складання математичної моделі чотириполюсника згідно з індивідуального завдання на роботу необхідно виконати три етапи:

- 1 – виділити фізичні величини (струми та напруги), які найбільш повно й точно відображають поведінку елемента чотириполюсника;
- 2 – виходячи з фізичної природи роботи елемента скласти функціональні зв'язки між виділеними фізичними величинами;
- 3 – сформовану математичну модель привести до стандартного виду, придатну з позиції процесів керування [1].

В якості прикладу розв'язку даного практичного завдання приведемо зразок складання математичного опису для електричної схеми на прикладі чотириполюсника (рисунок 2).

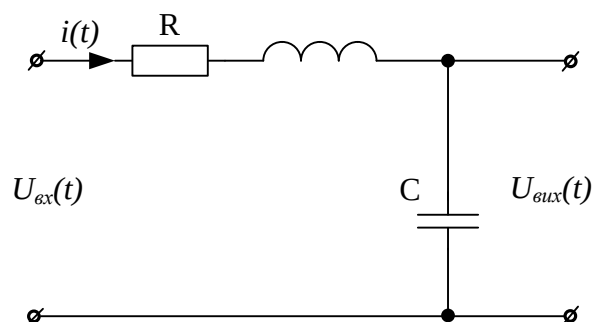


Рисунок 2 – Електрична схема чотириполюсника

Враховуючи вище наведені теоретичні положення, пов'язані із застосуванням першого і другого законів розрахунку розгалужених електричних кіл, у загальному випадку динамічна поведінка окремих елементів та досліджуваного об'єкта в цілому може бути представлена у вигляді систем рівнянь:

$$\begin{cases} U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \\ U_R(t) = R \cdot i(t), \\ U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} U_{\text{вх}}(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt, \\ U_{\text{вих}}(t) = U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt. \end{cases} \quad (5)$$

В рівняннях системи (4) вказані математичні залежності спадів напруг на кожному із елементів чотириполюсника, а в рівняннях системи (6) приведені алгебраїчні суми спадів напруг та їх приналежність до вхідної та вихідної напруг чотириполюсника

Отримані в системі (5) диференціальні рівняння на прикладі чотириполюсника відображають динамічні властивості досліджуваної системи автоматичного керування.

Варіанти завдань для самостійного виконання практичних розрахунків приведені в додатку А даних методичних вказівок.

2.2 Передатна функція чотириполюсника

Однією із найбільш поширених форм подання динамічних властивостей тієї чи іншої системи автоматичного керування є диференціальні рівняння, які зв'язують між собою вхідну і вихідну величини системи та їх похідні.

В даному розділі курсової роботи ставиться задача переходу від диференціальної форми подання динамічних властивостей досліджуваного чотириполюсника до форми передаточної функції на комплексній площині.

В ТАК при дослідженні динаміки систем широко застосовується метод операційного числення, який дозволяє спростити рішення диференціальних рівнянь [2].

Перехід від ДР в звичайній формі до операторної форми є переходом від функцій часу $x(t)$, $y(t)$ (або у випадку розрахунку згідно з індивідуальним завданням $U_{\text{вх}}(t)$, $U_{\text{вих}}(t)$) до функцій комплексної змінної p – $X(p)$, $Y(p)$ ($U_{\text{вх}}(p)$, $U_{\text{вих}}(p)$). При цьому $x(t)$, $y(t)$ називаються

оригіналом, а $X(p)$, $Y(p)$ – зображенням, $p = \sigma + j\omega$ – називається оператором або комплексною змінною.

Оригінал $x(t)$ із зображенням $X(p)$ пов'язує пряме перетворення Лапласа – це інтегральне перетворення, що зв'язує функцію комплексної змінної (зображення) із функцією речової змінної (оригіналу). За допомогою даного перетворення досліджуються властивості динамічних систем і вирішуються диференціальні та інтегральні рівняння. Математично пряме перетворення Лапласа записується таким чином:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (6)$$

Зворотний перехід від зображення до оригіналу називається зворотним перетворенням Лапласа. Пряме і зворотне перетворення здійснюються за допомогою таблиць перетворень Лапласа. Для спеціальних функцій, наприклад:

$$1 = 1/p; \quad t = 1/p^2 \quad (7)$$

Для диференціального рівняння (ДР) з постійними коефіцієнтами символ:

$$d/dt = p; \quad \int = 1/p. \quad (8)$$

Однією з особливостей перетворення Лапласа, які зумовили його широке поширення в наукових та інженерних розрахунках, є те, що багатьом співвідношенням і операціям над оригіналами відповідають більш прості співвідношення над їх зображеннями. Так, згортка двох функцій зводиться в просторі зображень до операції множення, а лінійні диференціальні рівняння стають алгебраїчними [2, 4, 10].

Передатна функція $W(p)$ – це відношення зображення вихідної величини ланки або системи до зображення вхідної при нульових початкових умовах. Нульові початкові умови: якщо розглядається канал управління, то вважається, що по каналу збурення сигнал дорівнює нулю та навпаки, коли розглядається канал збурення, вважається, що сигнал по каналу управління відсутній.

Передатна функція (ПФ) системи n -го порядку має вигляд:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (9)$$

$$Y(p) = W(p) \cdot X(p), \quad (10)$$

де W – оператор перетворення, означає математичну операцію, яку слід провести над $X(p)$, щоб одержати $Y(p)$ (рисунок 3).

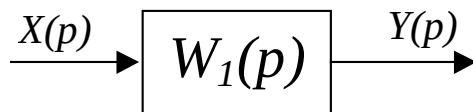


Рисунок 3 – Оператор перетворення

Вказівки до виконання практичного завдання. Результатом виконання даного практичного завдання є отримання передатної функції досліджуваної системи автоматичного керування, яка має відповідати співвідношенню виду:

$$W_{ch}(p) = \frac{U_{вих}(p)}{U_{вх}(p)}. \quad (11)$$

В якості прикладу приведемо зразок складання математичного опису, який відображає перехід від диференціальних рівнянь, на прикладі чотириполюсника, до його передатної функції. Припустимо, диференціальні рівняння вхідної та вихідної напруг чотириполюсника за другим законом Кірхгофа мають вигляд:

$$U_{вх}(t) = R_1 \cdot i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + R_2 \cdot i(t), \quad (12)$$

$$U_{вих}(t) = R_2 \cdot i(t). \quad (13)$$

Після застосування прямого перетворення Лапласа рівняння (12) та (13) на ділянці зображень перетворюються до вигляду:

$$U_{вх}(p) = R_1 \cdot I(p) + L_1 p I(p) + R_2 \cdot I(p), \quad (14)$$

$$U_{вих}(p) = R_2 \cdot I(p). \quad (15)$$

Відповідно передатна функція чотириполюсника, яка визначатиметься як відношення зображення вихідної напруги чотириполюсника до вхідної напруги, матиме вигляд:

$$W_{ch}(p) = \frac{U_{вих}(p)}{U_{вх}(p)}, \quad (16)$$

$$W_{ch}(p) = \frac{R_2 \cdot I(p)}{R_1 \cdot I(p) + L_1 p I(p) + R_2 \cdot I(p)} = \frac{R_2}{R_1 + L_1 p + R_2}. \quad (17)$$

Після підстановки значень елементів чотириполюсника в рівняння (17) та виконання необхідних дій по його спрощенню, отримаємо передаточну функцію виду:

$$W_{ch}(p) = \frac{25}{50 + 0.007p + 60} = \frac{50}{0.002p + 110}. \quad (18)$$

Для варіантів завдань, приведених в Додатку А даних методичних вказівок пропонується отримати передатні функції лінійних динамічних об'єктів.

3 СТРУКТУРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АЛГОРИТМІЧНИХ СХЕМ САК

Зображення САК у вигляді сукупності динамічних ланок із вказівкою зв'язків між ними називають *структурною (алгоритмічною) схемою САК*. Структурна схема САК дає наочне уявлення про зв'язки між ланками, про проходження та перетворення сигналів. Структурна схема може бути складена на основі відомих рівнянь системи, і, навпаки, рівняння системи можуть бути отримані за структурною схемою. Перша задача може мати різні варіанти розв'язання (різні структурні схеми), а друга вирішується однозначно. Передбачається, що динамічні ланки мають односпрямовану дію (від входу до виходу) і не впливають на інші, з'єднані з ними, ланки (не змінюють їхні передатні функції) [11].

САК, як правило, є замкненими системами. Але при їхньому проектуванні часто попередньо розглядається розімкнуте коло ланок, яке потім охоплюється зворотним зв'язком. Приклад структурної схеми САК, який містить різні типи з'єднання елементів між собою, приведений на рисунку 4.

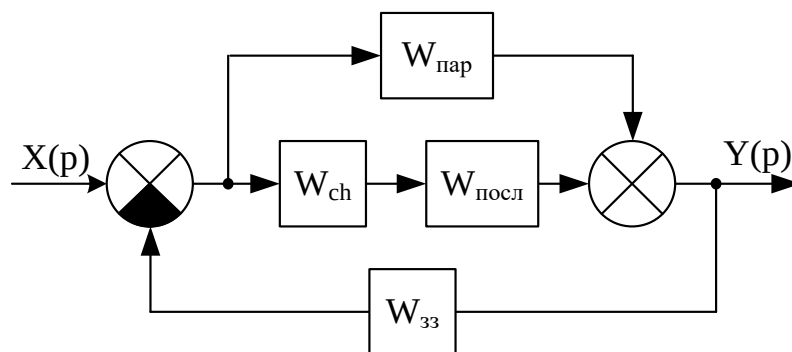


Рисунок 4 – Структурна схема досліджуваної замкнутої системи

Розглянемо правила структурних перетворень, які дозволяють в результаті їх застосування отримувати рівняння типових схем з'єднання ланок.

Коло із послідовно з'єднаних ланок. Типове послідовне з'єднання декількох динамічних ланок показано на рисунку 5.

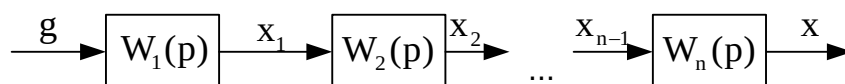


Рисунок 5 – Послідовне з'єднання ланок

Передатна функція такого кола дорівнює добутку передатних функцій усіх ланок, тобто

$$W_{\text{посл.}}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (19)$$

Коло із паралельно з'єднаних ланок. Типове паралельне з'єднання декількох динамічних ланок показано на рисунку 6.

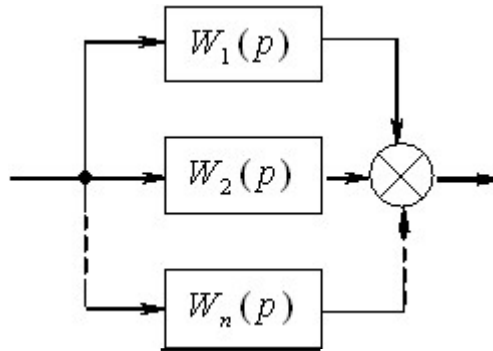


Рисунок 6 – Паралельне з'єднання ланок

Передатна функція розімкнутого кола із паралельно з'єднаних ланок буде дорівнювати сумі передаточних функцій цих ланок:

$$W_{\text{пар.}}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (20)$$

Коло з місцевим зворотним зв'язком. Типове з'єднання декількох динамічних ланок із застосуванням місцевого зворотного зв'язку показано на рисунку 7 [5, 11].

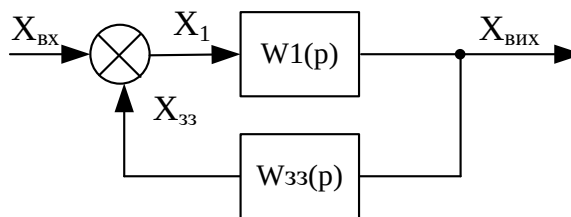


Рисунок 7 – Типове з'єднання ланок із місцевим зворотним зв'язком

Залежно від специфіки роботи системи автоматичного керування зворотний зв'язок (33) може бути позитивним (+) або негативним (-). Результуюча передатна функція для кожного із випадків запишеться таким чином:

- для від'ємного зворотного зв'язку

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{W1(p)}{1 + W1(p) \cdot W_{\text{зз}}(p)}; \quad (21)$$

- для додатного зворотного зв'язку

$$W(p) = \frac{x_{вих}}{x_{вх}} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_{зз}(p)}; \quad (22)$$

У формулах (21)-(22) знак «-» відноситься до позитивного, а знак «+» – до негативного зворотного зв'язку. Найбільш поширене застосування в САК мають саме негативні зворотні зв'язки.

Якщо в якості зворотного зв'язку застосовується підсилювач, то такий зв'язок називається жорстким. Якщо з виходу на вхід системи подається не сама вхідна величина, а похідна від неї, то зв'язок називається гнучким. Гнучкий зв'язок діє тільки у перехідному режимі, а в сталому режимі він сам по собі відключається тому, що похідна від константи = 0. Якщо $W_{зз}(p) = 1$, то зв'язок називається одиничним жорстким зв'язком.

Крім того, часто зустрічаються випадки побудови структурних схем, коли через перетин між собою контурів регулювання застосування типових правил структурних перетворень є неможливим. Тому доречно спершу виконувати проміжні перетворення із застосуванням правил перенесення вузла відгалуження або суматора.

Перенесення суматора:

а) якщо перенесення суматора відбувається по ходу передачі сигналу, то додатково вводиться фіктивна ланка з передатною функцією, яка дорівнює передатній функції ланки, через яку здійснюється перенесення;

б) якщо перенесення суматора відбувається проти ходу передачі сигналу, то додатково вводиться фіктивна ланка з передатною функцією зворотною (оберненою) до тієї, через яку здійснюється перенесення (рисунок 8).

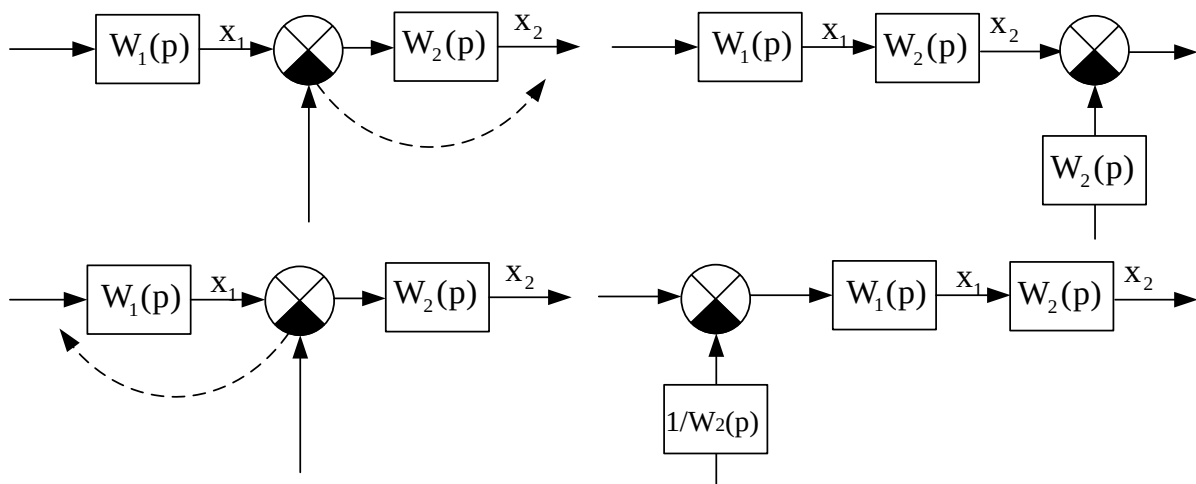


Рисунок 8 – Перенесення суматора

Перенесення вузла:

а) якщо перенесення вузла відгалуження відбувається по ходу передачі сигналу, то додатково вводиться фіктивна ланка з передатною функцією зворотною (оберненою) до тієї, через яку здійснюється перенесення;

б) якщо перенесення вузла відгалуження відбувається проти ходу передачі сигналу, то додатково вводиться фіктивна ланка з передатною функцією, яка дорівнює передатній функції ланки, через яку здійснюється перенесення (рисунк 9).

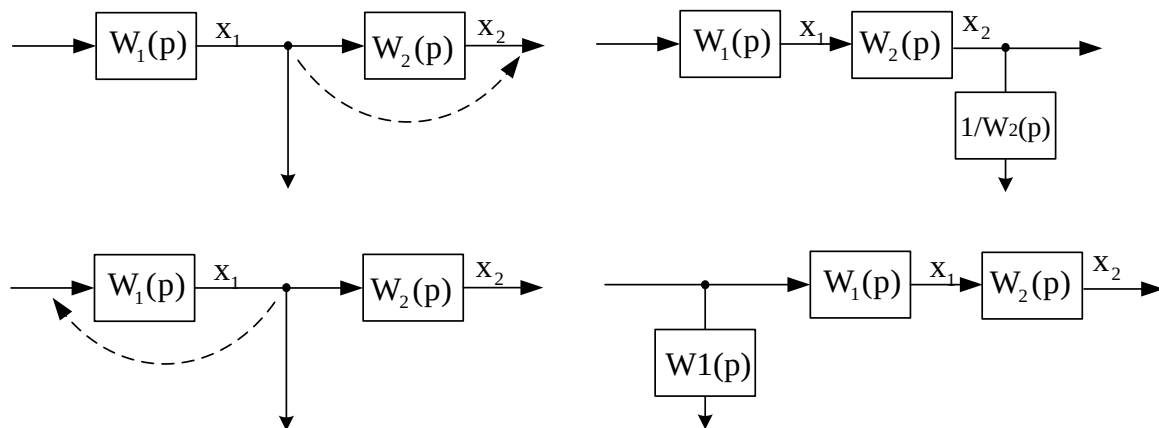


Рисунок 9 – Перенесення вузла відгалуження

Вказівки до виконання підрозділу роботи. В загальному випадку складне розімкнуте коло САК може містити у собі комбінації всіх трьох розглянутих випадків з'єднань. Наведена на рисунку 5 структурна схема містить кожен із розглянутих різновидів типового з'єднання ланок. Використовуючи вище наведені правила для структурних з'єднань, можна знайти загальну передатну функцію досліджуваної в курсовій роботі структурної схеми.

В якості прикладу приведемо зразок складання математичного опису, який відображає послідовність згортання наведеної на рисунку 5 структурної схеми із підстановкою числових значень.

Припустимо, передаточні функції ланок структурної схеми згідно завдання мають вигляд:

$$W_{ch}(p) = \frac{50}{0,002p + 110}. \quad (23)$$

$$W_{посл}(p) = \frac{0,004p + 220}{0,002p^2 + 0,02p + 2}. \quad (24)$$

$$W_{нар}(p) = \frac{10p - 80}{0,002p^2 + 0,02p + 2}. \quad (25)$$

$$W_{33}(p) = \frac{-0,02p}{10p + 20}. \quad (26)$$

Згортаємо структурну схему згідно правил структурних перетворень.

Знаходимо передаточну функцію послідовно з'єднаних ланок W_{ch} і $W_{посл}$:

$$W_1(p) = W_{ch}(p) \cdot W_{посл}(p), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} W_1(p) = W_{ch}(p) &= \frac{50}{0,002p + 110} \cdot \frac{0,004p + 220}{0,002p^2 + 0,02p + 2} = \\ &= \frac{100}{0,002p^2 + 0,02p + 2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Передаточна функція паралельно з'єднаних елементів:

$$W_2(p) = W_1(p) + W_{пар}(p), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} W_2(p) &= \frac{100}{0,002p^2 + 0,02p + 2} + \frac{10p - 80}{0,002p^2 + 0,02p + 2} = \\ &= \frac{10p + 20}{0,002p^2 + 0,02p + 2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для отримання результуючої передатної функції замкнутої системи скористаємось формулою (21) згортання від'ємного зворотного зв'язку. Отримаємо:

$$W(p) = \frac{\frac{10p + 20}{0,002p^2 + 0,02p + 2}}{1 + \frac{10p + 20}{0,002p^2 + 0,02p + 2} \cdot \frac{-0,02p}{10p + 20}} = \frac{10p + 20}{0,002p^2 + 2}. \quad (31)$$

Рівняння (31) є результуючою передатною функцією структурної схеми замкнутої системи.

Приведемо приклад структурної схеми та її згортання, коли необхідно застосовувати одне із правил перенесення вузла відгалуження або суматора. Приклад структурної схеми та вхідні дані для виконання завдання приведені на рисунку 10 та в таблиці 2.

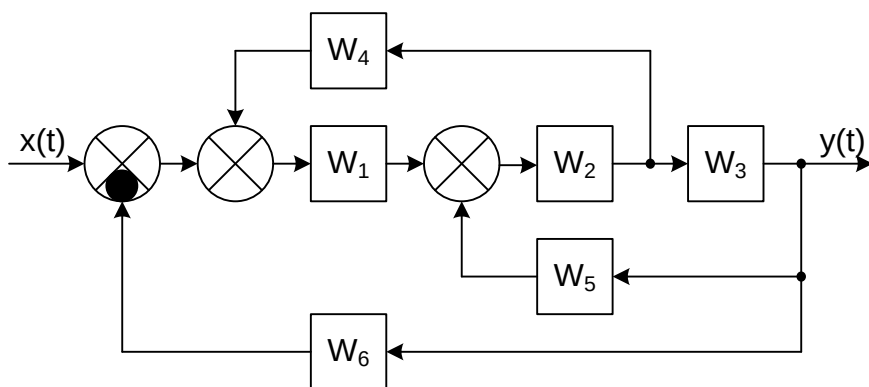


Рисунок 10 – Структурна схема САК

Таблиця 2 – Вхідні дані варіанту виконання завдання

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
12.	4	$0,5p$	$0,8/(1+p)$	10	5	8

Оскільки перетворити дану схему (згорнути) через неможливість застосування звичайних правил перетворення, тому спершу здійснимо перенос вузла схеми праворуч від блоку W_3 . Після застосування правила перенесення точки відгалуження схема матиме вигляд, приведений на рисунку 11.

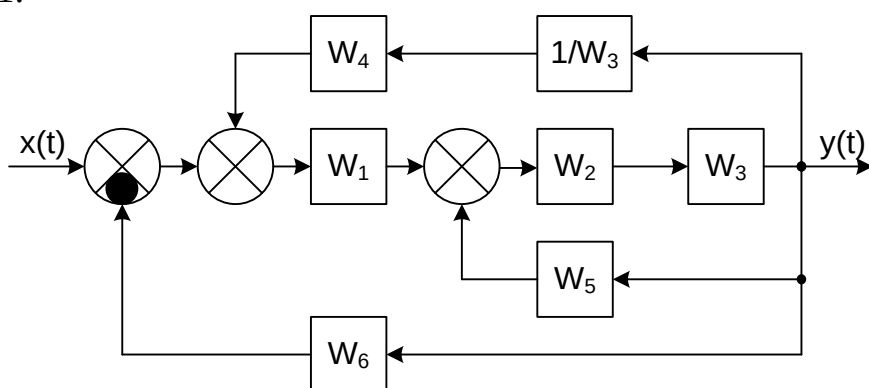


Рисунок 11 – Схема перетвореної САК

Після застосування правила перетворення згортаємо схему.

$$\begin{aligned}
 W_{2-3-5}(p) &= \frac{W_{2-3}(p)}{1 - W_{2-3}(p) \cdot W_5(p)} = \frac{W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 - W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_5(p)} = \frac{0,5p \cdot \frac{0,8}{1+p}}{1 - 0,5p \cdot \frac{0,8}{1+p} \cdot 5} = \\
 &= \frac{0,4p}{1+p} \cdot \frac{1+p}{1+p-2p} = \frac{0,4p}{1-p}
 \end{aligned} \quad (32)$$

$$W_{1-2-3-5}(p) = W_{2-3-5}(p) \cdot W_1(p) = \frac{0,4p}{1-p} \cdot 4 = \frac{1,6p}{1-p}. \quad (33)$$

$$W_{1-2-3-4-5}(p) = \frac{W_{1-2-3-5}(p)}{1 - W_{1-2-3-5}(p) \cdot W_4(p) \cdot \frac{1}{W_3(p)}} = \frac{\frac{1,6p}{1-p}}{1 - \frac{1,6p}{1-p} \cdot 10 \cdot \frac{0,8}{1+p}} =$$

$$= \frac{\frac{1,6p}{1-p}}{1 - \frac{12,8p}{(1-p) \cdot (1+p)}} = \frac{1,6p}{1-p} \cdot \frac{(1-p) \cdot (1+p)}{1-p^2 - 12,8p} = \frac{1,6p^2 + 1,6p}{1 - 12,8p - p^2} \quad (34)$$

$$W_{zag.}(p) = \frac{W_{1-2-3-4-5}(p)}{1 + W_{1-2-3-4-5}(p) \cdot W_6(p)} = \frac{\frac{1,6p^2 + 1,6p}{1 - 12,8p - p^2}}{1 + \frac{1,6p^2 + 1,6p}{1 - 12,8p - p^2} \cdot 8} =$$

$$= \frac{1,6p^2 + 1,6p}{1 - 12,8p - p^2} \cdot \frac{1 - 12,8p - p^2}{1 - 12,8p - p^2 + 12,8p^2 + 12,8p} = \frac{1,6p^2 + 1,6p}{11,8p^2 + 1}. \quad (35)$$

Особливості побудови структурних схем автоматичного керування можуть передбачати дію на систему певних збурюючих впливів. Приклад такої алгоритмічної схеми та послідовність її згортання приведена на рисунку 12.

В схемі присутні сигнал керування та сигнали збурення, тому згортання схеми виконуватиметься згідно нульових початкових умов, тобто, якщо розглядатиметься канал керування, то сигнали по каналах збурення прирівнюються нулю і навпаки.

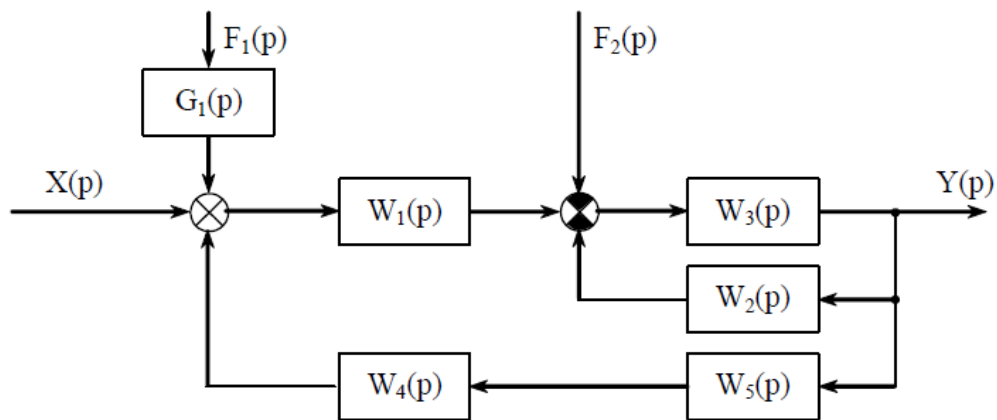


Рисунок 12 – Структурна схема САК

Розв'язок завдання.

1.1 $X(p) \neq 0, F1(p) = F2(p) = 0.$

$$W_{1.1}(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p) \cdot W_2(p)};$$

$$W_{1.2}(p) = W_4(p) \cdot W_5(p);$$

$$W_{1.3}(p) = W_1(p) \cdot W_{1.1}(p);$$

$$W_{1.4}(p) = \frac{W_{1.3}(p)}{1 - W_{1.3}(p) \cdot W_{1.2}(p)}.$$

1.2 $F1(p) \neq 0, X(p) = F2(p) = 0.$

Структурна схема видозміниться наступним чином. Перетворена структурна схема подана на рисунку 13.

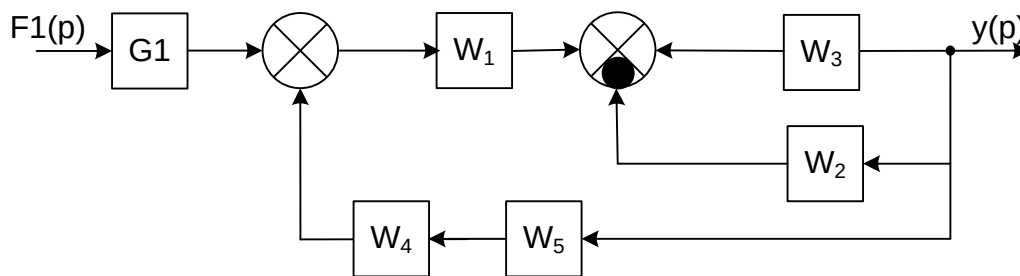


Рисунок 13 – Структурна схема видозміненої САК

$$W_{2.1}(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p) \cdot W_2(p)};$$

$$W_{2.2}(p) = W_4(p) \cdot W_5(p);$$

$$W_{2.3}(p) = W_1(p) \cdot W_{2.1}(p);$$

$$W_{2.4}(p) = \frac{W_{2.3}(p)}{1 - W_{2.3}(p) \cdot W_{2.2}(p)};$$

$$W_{2.5}(p) = W_{2.4}(p) \cdot G1(p).$$

1.3 $F2(p) \neq 0, X(p) = F1(p) = 0.$

Структурна схема видозміниться до вигляду, поданого на рисунку 14.

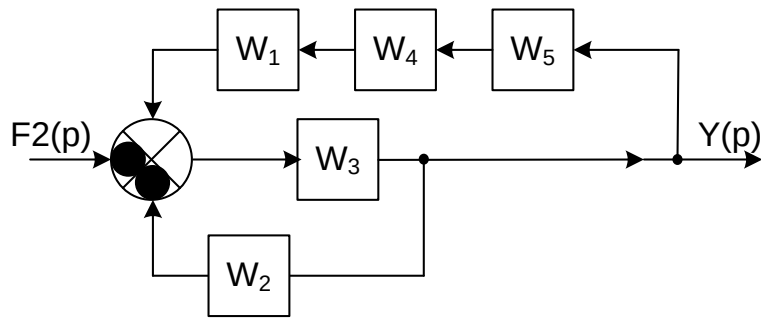


Рисунок 14 – Структурна схема видозміненої САК по сигналу F2(p)

$$W_{3.1}(p) = W_1(p) \cdot W_4(p) \cdot W_5(p);$$

$$W_{3.2}(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p) \cdot W_2(p)};$$

$$W_{3.3}(p) = (-1) \cdot \frac{W_{3.2}(p)}{1 - W_{3.2}(p) \cdot W_{3.1}(p)}.$$

1.4 Знаходимо загальну передаточну функцію із врахуванням всіх сигналів даної структурної схеми.

$$\underline{W_{zag.}(p) = W_{1.4}(p) + W_{2.5}(p) + W_{3.3}(p)}.$$

В додатку Б методичних вказівок приведені варіанти практичних завдань для виконання згортання алгоритмічних схем лінійних динамічних об'єктів для різних випадків їх побудови.

4 ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Аналіз та синтез САК базується на використанні динамічних характеристик. Динамічні характеристики описують як поведінку системи в цілому, так і поведінку окремих її елементів під час роботи системи, тобто, під час перехідних процесів [3, 8].

Динамічні характеристики можуть бути задані у вигляді:

1. Диференціального рівняння в часі;
2. Передаточної функції на комплексній площині;
3. Перехідних процесів як реакцій на певні збурення, що мають аперіодичну форму;
4. Функцій частоти ω , які називають частотними характеристиками.

Динамічні характеристики можуть бути визначені аналітичним шляхом на основі аналізу процесів, що протікають в елементі або системі, або експериментальним шляхом [4].

Як правило, поелементне дослідження динамічних властивостей застосовують до регульовальної частини САК, а об'єкти керування досліджуються в цілому.

Частотні характеристики (ЧХ) показують залежність вихідної величини від вхідної, коли вхідна змінюється за синусоїдальним законом [6, 7].

Основними частотними характеристиками САК є:

1. Амплітудна частотна характеристика (АЧХ), фазова частотна характеристика (ФЧХ);
2. Амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ);
3. Логарифмічна амплітудна частотна характеристика (ЛАЧХ), логарифмічна фазова частотна характеристика (ЛФЧХ)
4. Дійсна частотна характеристика (ДЧХ), уявна частотна характеристика (УЧХ).

Частотні характеристики – це залежності певних характеристик системи від частоти ω . Всі ці характеристики виводяться з передатної функції системи.

Побудова годографа АФЧХ. Функцію комплексної змінної $W(j\omega)$, як і будь-яку іншу функцію, можна записати в алгебраїчній

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (36)$$

та показниковій формах:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (37)$$

де $P(\omega)$ – дійсна частотна характеристика (ДЧХ);

$Q(\omega)$ – уявна частотна характеристика (УЧХ);

$A(\omega)$ – амплітудна частотна характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega)$ – фазова частотна характеристика (ФЧХ).

Як видно з (37) та (38), пари характеристик АЧХ та ФЧХ, ДЧХ та УЧХ містять ту саму інформацію, що і АФЧХ системи, тобто повністю характеризують динамічні властивості системи [9, 10].

Між наведеними частотними характеристиками існує такий взаємозв'язок:

$$\begin{cases} P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega), \\ Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega), \\ A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \\ \varphi(\omega) = \arg(W(j\omega)) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \end{cases} \quad (38)$$

ЧХ є достатніми характеристиками системи. Знаючи ЧХ системи можна відновити її передатну функцію й визначити параметри.

Крім того, широко застосовуються логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ). На рисунку 15 приведені логарифмічна амплітудно-частотна (ЛАЧХ) $L(\omega)$ та логарифмічна фазочастотна характеристики (ЛФЧХ) $\varphi_L(\omega)$.

Вони отримуються шляхом логарифмування передатної функції:

$$\lg(W(j\omega)) = \lg(A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega). \quad (39)$$

При дослідженні САК, амплітудну й фазову частотні характеристики зручно будувати в логарифмічних координатах. Це пов'язано із двома обставинами [4, 12]:

1. У логарифмічних масштабах кривизна характеристик різко зменшується, що дозволяє в більшості практичних випадків приблизно зображувати АЧХ ламаними лініями.

2. У логарифмічних масштабах АЧХ кола ланок дорівнює сумі АЧХ окремих ланок:

$$\lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i. \quad (40)$$

ЛАЧХ одержують із першого доданка, що з міркувань масштабування множиться на 20, і використовують не натуральний логарифм, а десятковий, тобто $L(\omega) = 20\lg(\omega)$.

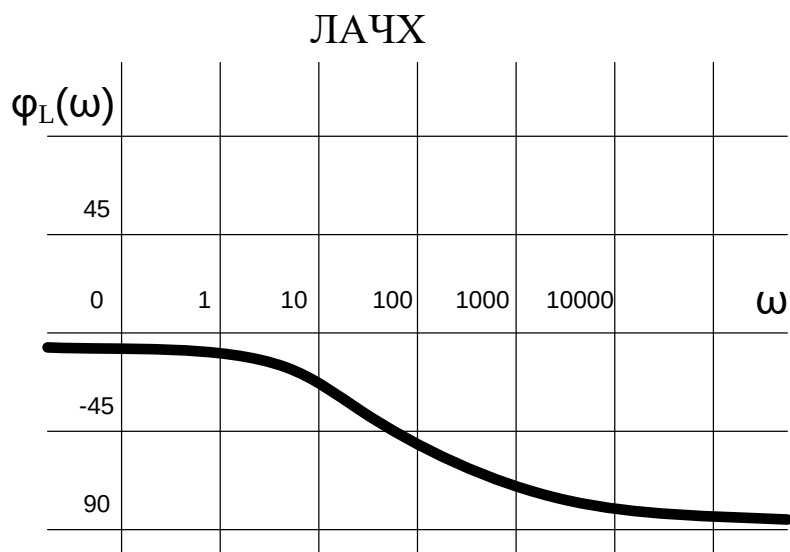
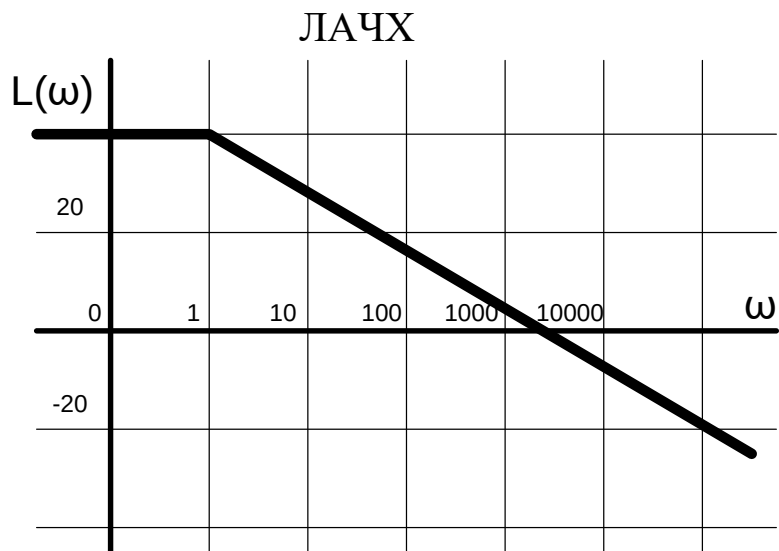


Рисунок 15 – Логарифмічні характеристики

Величина $L(\omega)$ відкладається по осі ординат у *децибелах*. Зміна рівня сигналу на 10 дб відповідає зміні його потужності в 10 разів. Так як потужність гармонійного сигналу P пропорційна квадрату його амплітуди A , то зміні сигналу в 10 разів відповідає зміна його рівня на 20 дб, оскільки:

$$\lg(P_2 / P_1) = \lg(A_2^2 / A_1^2) = 20\lg(A_2 / A_1). \quad (41)$$

По осі абсцис відкладається частота ω у логарифмічному масштабі. Тобто одиничним проміжкам по осі абсцис відповідає зміна ω в 10 разів. Такий інтервал називається *декадою*. Оскільки $\lg(0) = -\infty$, то вісь ординат проводять довільно.

ЛФЧХ, одержана із другого доданка, відрізняється від ФЧХ тільки масштабом по осі ω . Величина $\varphi(\omega)$ відкладається по осі ординат у градусах або радіанах. Для елементарних ланок вона не виходить за межі: $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$.

Вказівки до виконання підрозділу роботи. Для виконання практичного завдання необхідно знайти та записати математичні вирази частотних характеристик замкнутої системи і побудувати їх графіки. В якості прикладу приведемо зразки отримання математичних виразів та побудови графіків частотних характеристик для передатної функції замкнутої системи виду:

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{0,09p + 120}{0,004p^2 + 0,08p + 2,8}. \quad (42)$$

Для отримання частотних характеристик спершу в передатну функцію замкнутої системи $W_{\text{зам}}(p)$ введемо заміну $p \rightarrow j\omega$, застосувавши стандартну функцію ППП Mathcad «substitute». В результаті заміни одержимо рівняння АФЧХ $W_{\text{зам}}(j\omega)$ виду:

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{0,09j\omega + 120}{0,004(j\omega)^2 + 0,08j\omega + 2,8}. \quad (43)$$

Виділимо дійсну та уявну частини, застосувавши в ППП Mathcad функцію «complex». Запишемо отримані рівняння ДЧХ $P(\omega)$ і УЧХ $Q(\omega)$.

Дійсна частина:

$$P(\omega) = -0,15 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,20 \cdot \omega^2 - 0,14 \cdot 10^6}{\omega^4 - 0,10 \cdot 10^4 \cdot \omega^2 + 0,49 \cdot 10^6}. \quad (44)$$

Уявна частина:

$$Q(\omega) = -7,5 \cdot \omega \cdot \frac{3 \cdot \omega^2 + 0,78 \cdot 10^5}{\omega^4 - 0,10 \cdot 10^4 \cdot \omega^2 + 0,49 \cdot 10^6}. \quad (45)$$

Побудуємо графіки дійсної та уявної частотних характеристик замкнутої системи (рисунки 16 і 17).

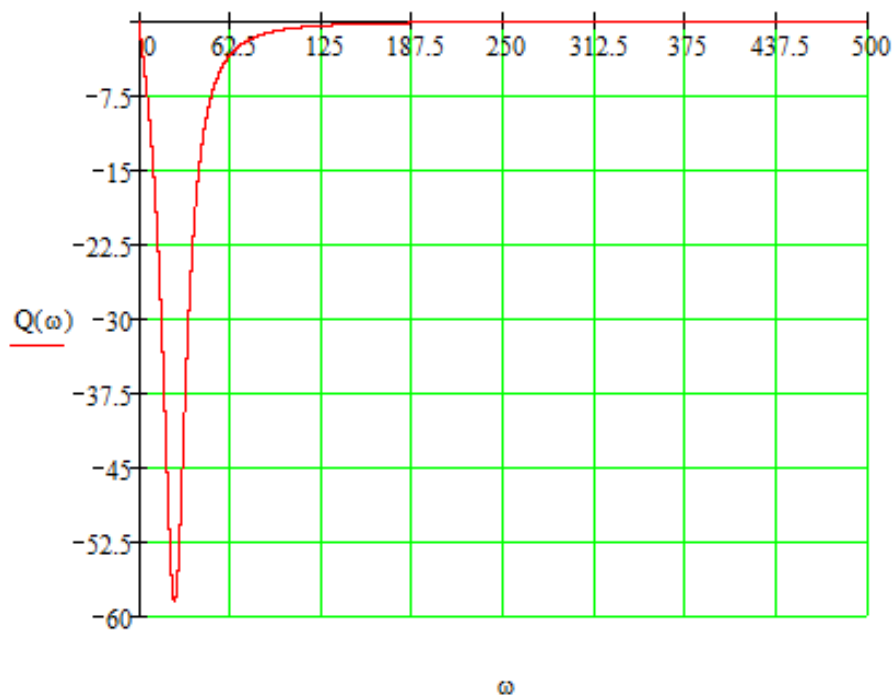


Рисунок 16 – Дійсна частотна характеристика

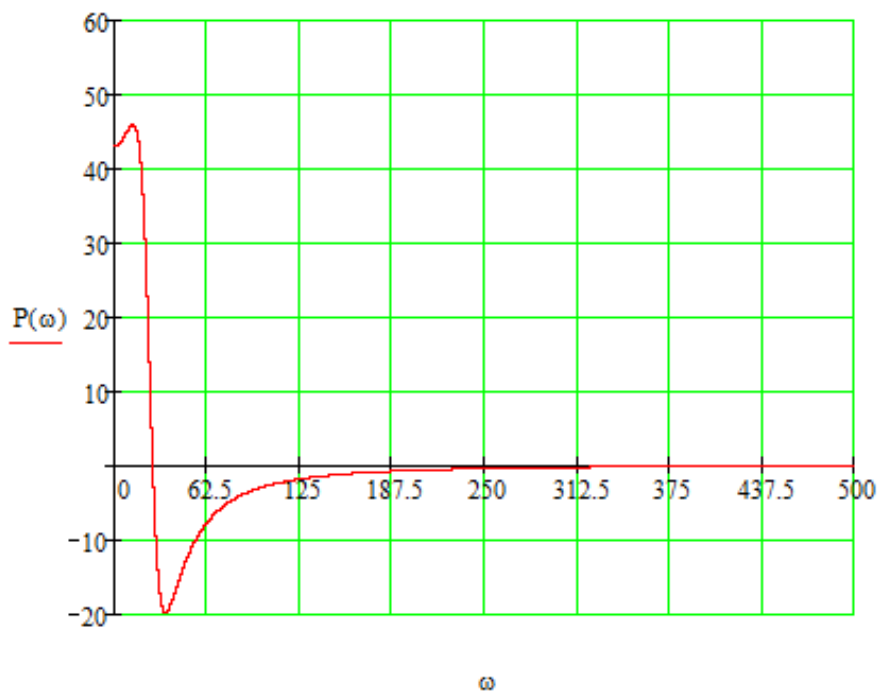


Рисунок 17 – Уявна частотна характеристика

Наступним кроком є розрахунок та побудова амплітудно-частотної (АЧХ) та фазочастотної характеристик (ФЧХ) замкнутої системи. Вираз амплітудно-частотної характеристики знаходимо за формулою

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (46)$$

$$A(\omega) = 7,5 \cdot \left(\frac{9 \cdot \omega^2 + 0,16 \cdot 10^8}{\omega^4 - 0,10 \cdot 10^4 \cdot \omega^2 + 0,49 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (47)$$

Графік АХЧ наведений на рисунку 18.

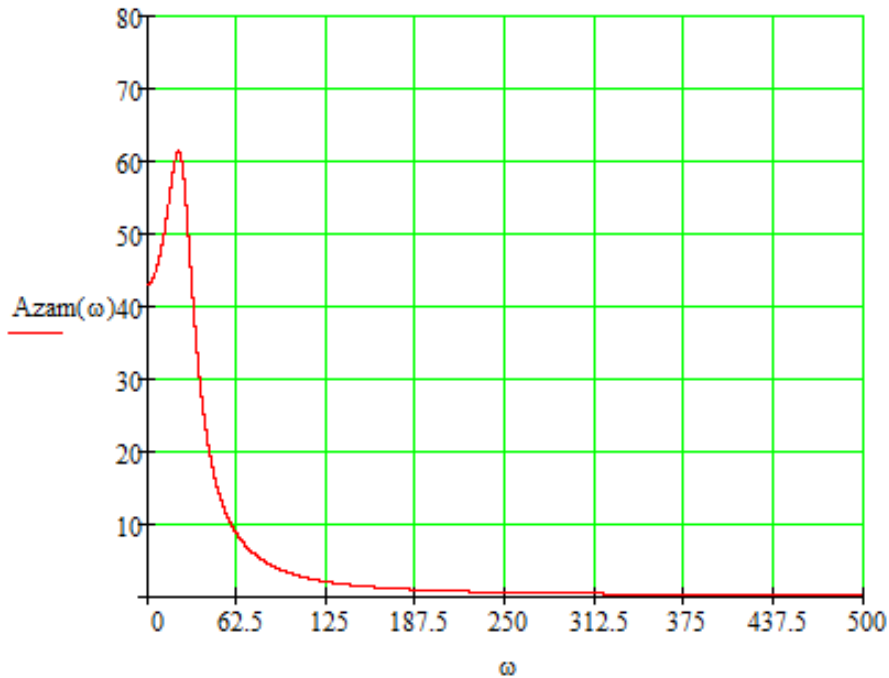


Рисунок 18 – Графік АЧХ замкнутої системи

Вираз ФЧХ знаходимо за формулою

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \quad (48)$$

$$\phi(\omega) = a \tan \cdot \left(0,050 \cdot \omega \cdot \frac{3 \cdot \omega^2 + 0,78 \cdot 10^5}{0,20 \cdot 10^3 \cdot \omega^2 - 0,14 \cdot 10^6} \right). \quad (49)$$

Графік ФЧХ наведений на рисунку 19.

Знаходимо вираз ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ та ЛФЧХ замкнутої системи (ЛФЧХ відрізняється від ФЧХ тільки масштабом осі абсцис):

$$L(\omega) = 18 + 4,3 \ln \cdot \left(\frac{9 \cdot \omega^2 + 0,16 \cdot 10^8}{\omega^4 - 0,10 \cdot 10^4 \cdot \omega^2 + 0,49 \cdot 10^6} \right). \quad (50)$$

$$\phi_L(\omega) = a \tan \cdot \left(\frac{0,12 \cdot 10^3 \cdot \ln(\omega) \cdot}{(0,30 \cdot 10^{15} \cdot \ln(\omega)^2 + 0,41 \cdot 10^{20} \cdot \dots)} \right). \quad (51)$$

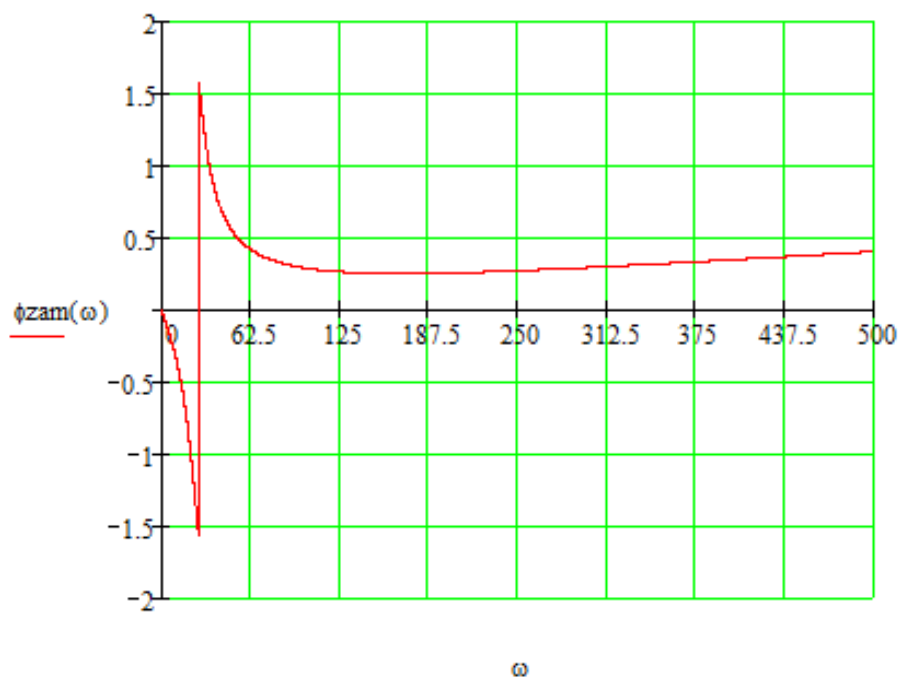


Рисунок 19 – Графік ФЧХ замкнутої системи

Графіки побудови ЛАЧХ і ЛФЧХ наведені на рисунках 20 і 21 відповідно.

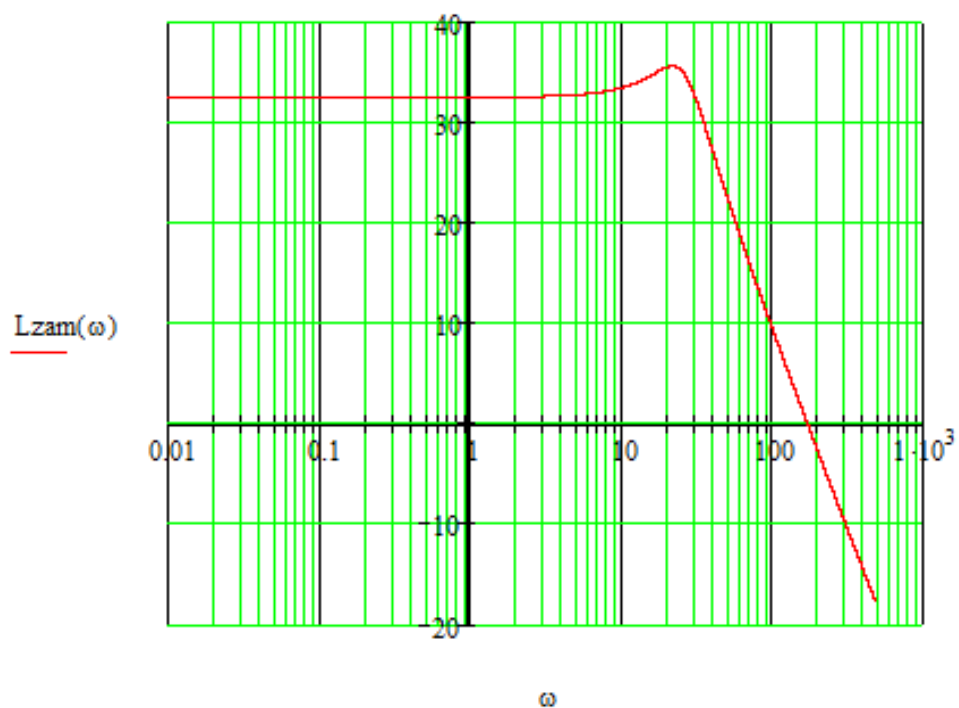


Рисунок 20 – Графік ЛАЧХ

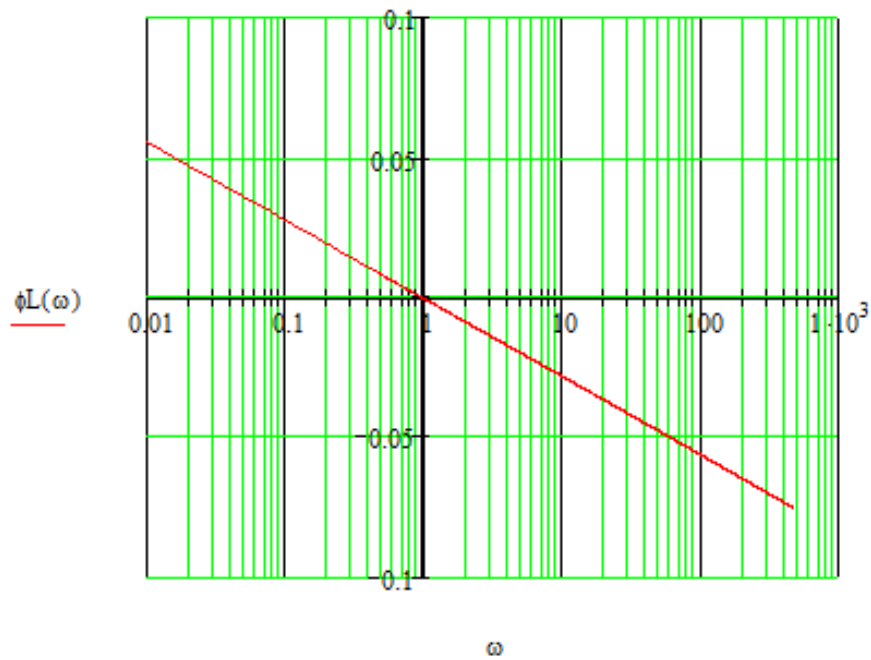


Рисунок 21 – Графік ЛФЧХ

Побудова годографа АФЧХ замкнутої системи виконується за рахунок застосування алгебраїчної форми представлення рівняння:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (52)$$

Рівняння АФЧХ після виконання підстановки $p \rightarrow j\omega$ має вигляд, приведений у виразі (43).

Годограф АФЧХ наведений на рисунку 22.

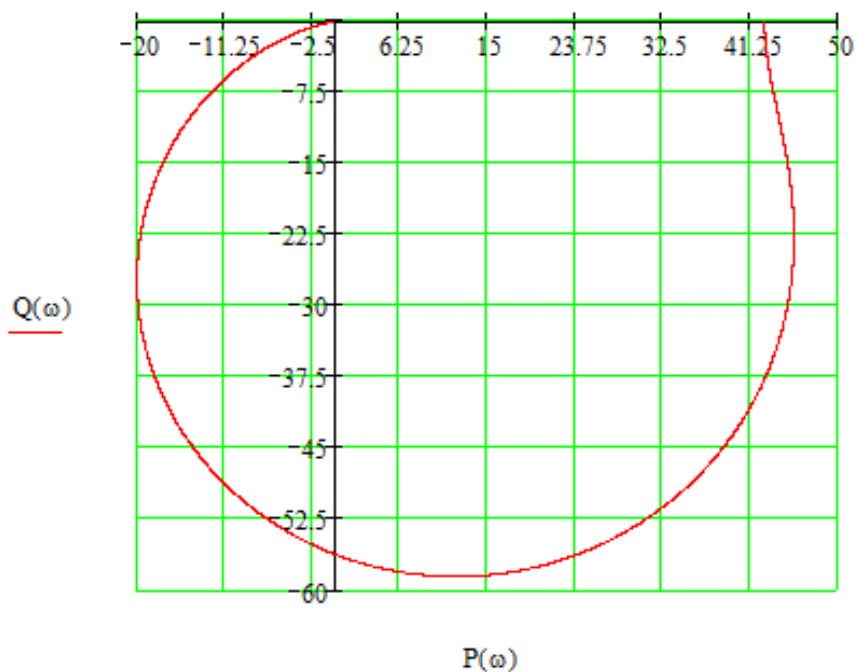


Рисунок 22 – Годограф АФЧХ замкнутої системи

Отримуємо вираз перехідної характеристики замкнутої системи відносно комплексної змінної p :

$$H(p) = \frac{0,09p + 120}{0,004p^2 + 0,08p + 2,8} \cdot \frac{1}{p} \quad (53)$$

Знайдемо перехідну характеристику в ППП Mathcad за допомогою оператора «invlaplace».

Перехідна часова характеристика системи матиме вигляд:

$$h(t) = 43 - 43 \cdot 10^{(-10)t} \cdot \cos(24 \cdot t) - 17 \cdot 10^{(-10)t} \cdot \sin(24 \cdot t). \quad (54)$$

де $h(t)$ – перехідна часова характеристика системи.

Графік перехідної характеристики зображений на рисунку 23.

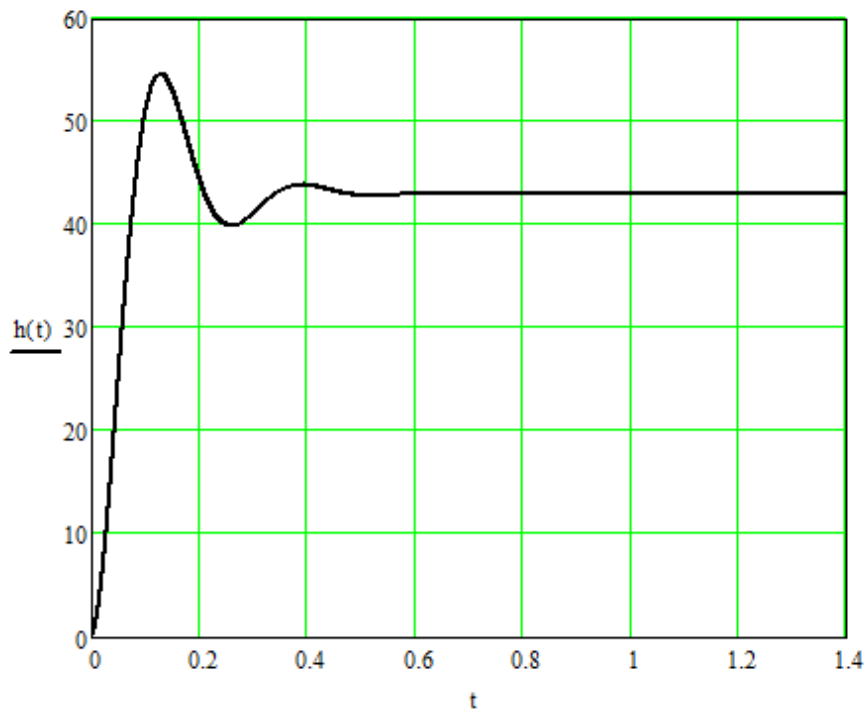


Рисунок 23 – Графік перехідної характеристики

Щоб отримати вагову характеристику знайдемо похідну від перехідної характеристики.

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (55)$$

де $g(t)$ – вагова характеристика системи.

$$g(t) = 23 \cdot 10^{(-10)t} \cdot \cos(24 \cdot t) + 0,12 \cdot 10^4 \cdot 10^{(-10)t} \cdot \sin(24 \cdot t). \quad (56)$$

Вагова характеристика представлена на рисунку 24.

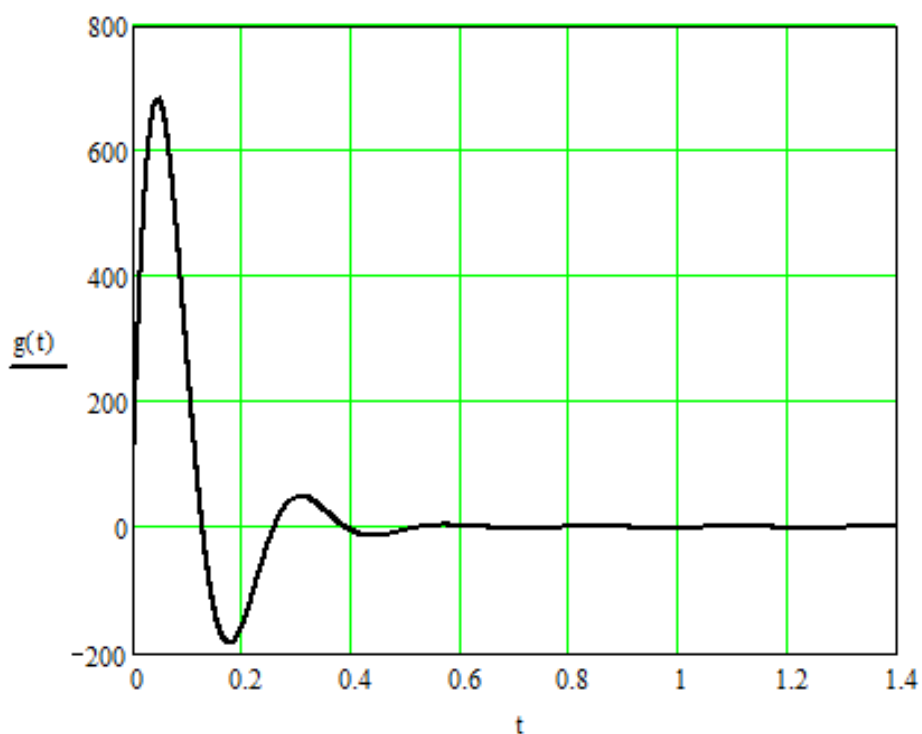


Рисунок 24 – Вагова характеристика системи

Для закріплення алгоритму розрахунку та побудови графіків динамічних характеристик для отриманих передатних функцій варіантів завдань Додатку Б пропонується вивести та побудувати перехідну, вагову та частотні характеристики системи (АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ та ЛФЧХ).

5 ДОСЛІДЖЕННЯ САК НА СТІЙКІСТЬ

Основною динамічною характеристикою автоматичної системи керування є її стійкість. Під стійкістю мається на увазі властивість системи повертатися до свого попереднього стану рівноваги після зняття дій збурення, котре вивело систему із стану початкової рівноваги [1, 4, 14].

Процеси, що відбуваються в більшості реальних систем, описуються нелінійними диференціальними рівняннями, які для спрощення дослідження можуть бути лінеаризованими. Тоді дослідження реальної системи заміниться дослідженням лінеаризованої системи [8].

Для оцінки стійкості систем автоматичного керування, які описуються рівняннями 3-го, 4-го та вищого порядків, використовуються непрямі методи дослідження. Такі методи називаються критеріями стійкості САК.

Існують 2 види критеріїв стійкості:

- 1) алгебраїчні;
- 2) частотні.

Алгебраїчні критерії стійкості дозволяють оцінювати стійкість за коефіцієнтами характеристичних рівнянь. До них відносяться:

- критерій Гурвіца або Рауса-Гурвіца
- критерій Вишнеградського
- критерій Ляпунова-Шіпара.

Частотні критерії засновані на використанні частотних характеристик.

До них відносяться:

- критерій Михайлова
- критерій Найквіста (амплітудно-фазовий, Найквіста-Михайлова)
- логарифмічний критерій

Основна перевага частотних критеріїв перед алгебраїчними в тому, що іноді складно скласти рівняння динаміки і отримати характеристичне рівняння (наприклад для системи із розподіленим параметром), а частотні характеристики можна отримати експериментально.

Основні переваги алгебраїчних критеріїв перед частотними:

- 1) відносна простота,
- 2) легко алгоритмізувати.

Додатковою перевагою частотних критеріїв перед алгебраїчними є те, що за їх допомогою можна легко судити про те, як кожен з параметрів системи впливає на її стійкість. Крім того легше синтезувати коригувальні пристрої.

Згідно з індивідуальним завданням в роботі необхідно виконати дослідження розімкнутої САК за критерієм Найквіста, замкнутої системи за теоремою Ляпунова та критеріями Гурвіца і Михайлова.

5.1 Перевірка стійкості системи за критерієм Найквіста

Амплітудно-фазовий критерій стійкості Найквіста дозволяє судити про стійкість замкнутої системи за видом амплітудно-фазової частотної характеристики системи в розімкнутому стані. Розрізняють формулювання критерію для випадків, коли система в розімкнутому стані може бути стійка, нестійка або знаходитись на межі стійкості [1, 15].

Формулювання частотного критерію Найквіста: система автоматичного керування, стійка в розімкнутому стані, буде стійка в замкнутому стані, якщо АФЧХ розімкнутої системи не охоплює точку на комплексній площині з координатами $(-1, j0)$ (рисунок 25).

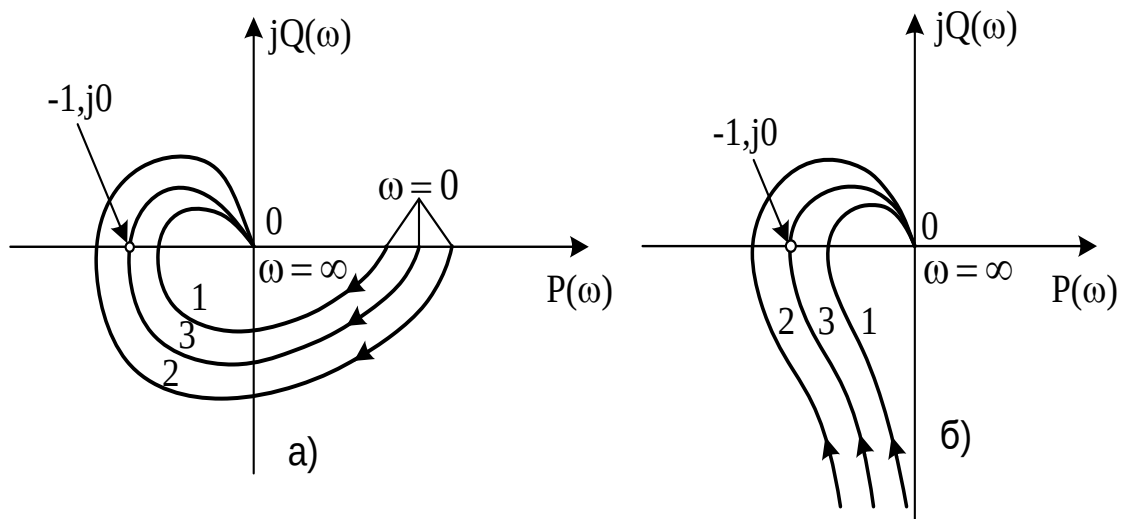


Рисунок 25 – АФЧХ розімкнутої системи

На рисунку 25 показані амплітудно-фазові частотні характеристики статичних (а) і астатичних (б) систем. Амплітудно-фазові характеристики 1 не охоплюють критичну точку, тому системи, що мають ці характеристики, стійкі. Амплітудно-фазові частотні характеристики 2 охоплюють точку з координатами $(-1, j0)$, тому системи 2 нестійкі. Амплітудно-фазові частотні характеристики 3 проходять через критичну точку, тому відповідні системи знаходяться на межі стійкості.

На рисунку 26 а) зображений випадок так званої абсолютно стійкої системи. Цей термін означає, що система залишається стійкою при будь-якому зменшенні коефіцієнта посилення розімкнутого кола.

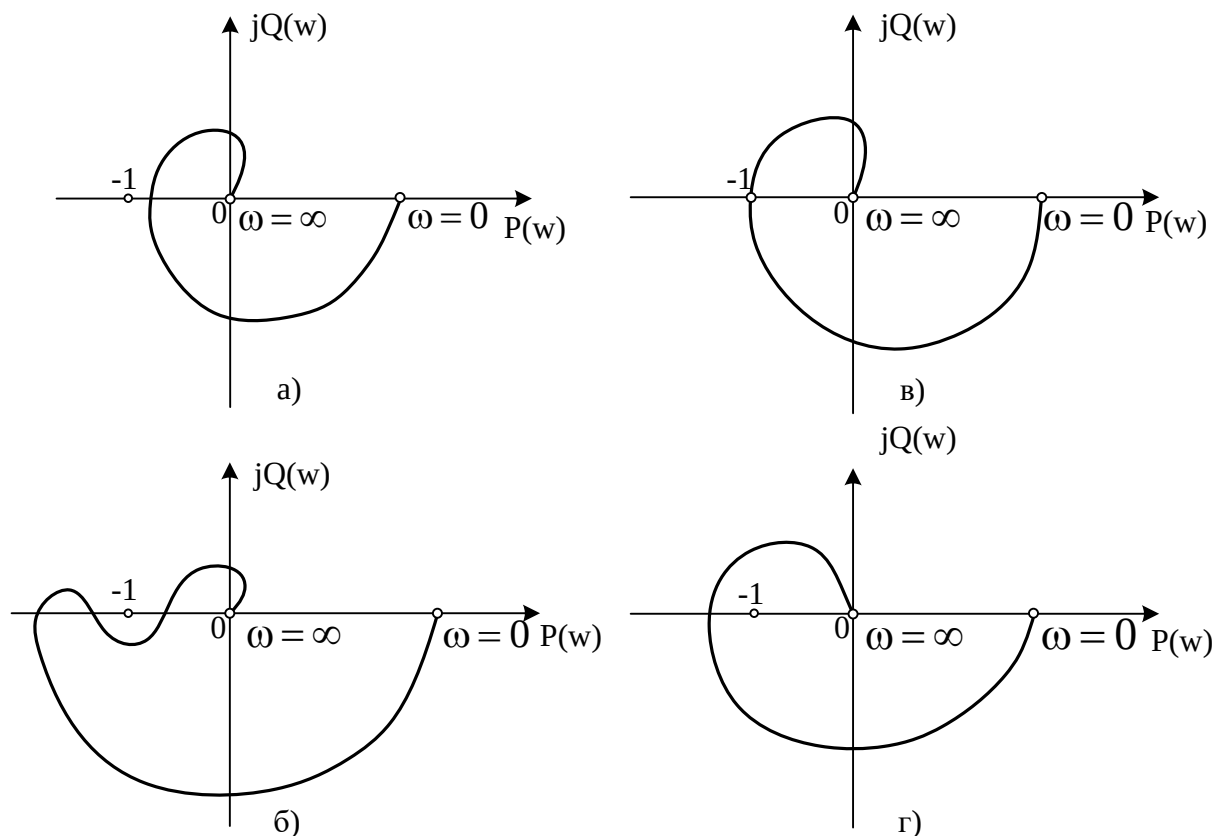


Рисунок 26 – Годографи АФЧХ для різних варіантів систем

На рисунку 26 б) зображено випадок умовно стійкої системи. Тут система буде стійкою при значеннях загального коефіцієнта підсилення, що лежить в деяких межах. Як збільшення, так і зменшення загального коефіцієнта посилення k може призвести до охоплення годографом точки $(-1, j0)$, що буде відповідати нестійкості системи в замкнутому стані.

На рисунку 26 в) зображено випадок, коли система знаходиться на межі стійкості. Межа стійкості буде коливального типу. Це впливає з того, що при деякій частоті, при якій годограф перетинає точку $(-1, j0)$, має місце рівність $W(j\omega) = -1 + j0$, що може бути записано у вигляді

$$1 + W(j\omega) = 0. \quad (57)$$

Останній вираз є характеристичним рівнянням, яке згортається в нуль при підстановці $p = j\omega$. Таким чином, чисто уявний корінь є рішенням характеристичного рівняння.

На рисунку 26 г) зображений випадок нестійкої системи.

Вказівки до виконання практичного завдання. Для виконання практичного завдання для визначення стійкості за критерієм Найквіста необхідно використати механізм отримання годографу АФЧХ, описаний в розділі 4 методичних вказівок. Розрахунок та побудова АФЧХ

здійснюється для системи в розімкнутому стані. Після побудови виконується аналіз отриманої графічної залежності та визначення приналежності системи до одного з трьох станів системи за ознакою стійкості.

5.2 Перевірка стійкості системи за теоремою Ляпунова

Дослідження стійкості замкнутої системи можна здійснювати за коренями характеристичного рівняння – за теоремою А. М. Ляпунова [4, 9, 17].

Умови стійкості системи за теоремою А. М. Ляпунова:

1. Якщо усі корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи мають від’ємну дійсну частину, то досліджувана система є стійкою.

2. Якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має хоча б один корінь із додатною дійсною частиною, то дана система є нестійкою.

3. Якщо характеристичне рівняння системи має хоча б один нульовий корінь або пару чисто уявних коренів, то поведінка дійсної системи не може визначатися її лінеаризованим рівнянням. Система знаходиться на межі стійкості.

Перехідні процеси при різних коренях характеристичного рівняння показані на рисунку 27.

Аналітичні вирази для складових вільного руху:

$$x_i(t) = A_i e^{p_i t} = A_i e^{p_i t}; \quad (58)$$

$$x_j(t) = A_j e^{p_j t} = A_j e^{p_j t} \sin(\beta_j t + \varphi_j), \quad (59)$$

де A_i , A_j – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов;

$p_{i,j}$ – корінь характеристичного рівняння;

$\alpha_{i,j}$ – дійсна частина кореня (інтенсивність згасання коливань);

$\beta_{i,j}$ – уявна частина кореня (частота власних коливань);

φ_i – початкова фаза.

При негативних дійсних коренях складова вільного руху при $t \rightarrow \infty$ монотонно зменшується до нуля, як показано на рисунку 27, а. Для пари комплексних коренів з негативною дійсною частиною складова вільного руху при $t \rightarrow \infty$ також зменшується до нуля за законом згасаючих коливань (рисунок 27 б). Система буде стійкою при негативних коренях і негативних дійсних частинах коренів. В разі позитивного дійсного кореня складова вільного руху при $t \rightarrow \infty$ буде необмежено зростати (рисунок 27, в). Для пари комплексних коренів з позитивною дійсною часткою складова вільного руху при $t \rightarrow \infty$ також буде зростати по закону розбіжних коливань (рисунок 27, г).

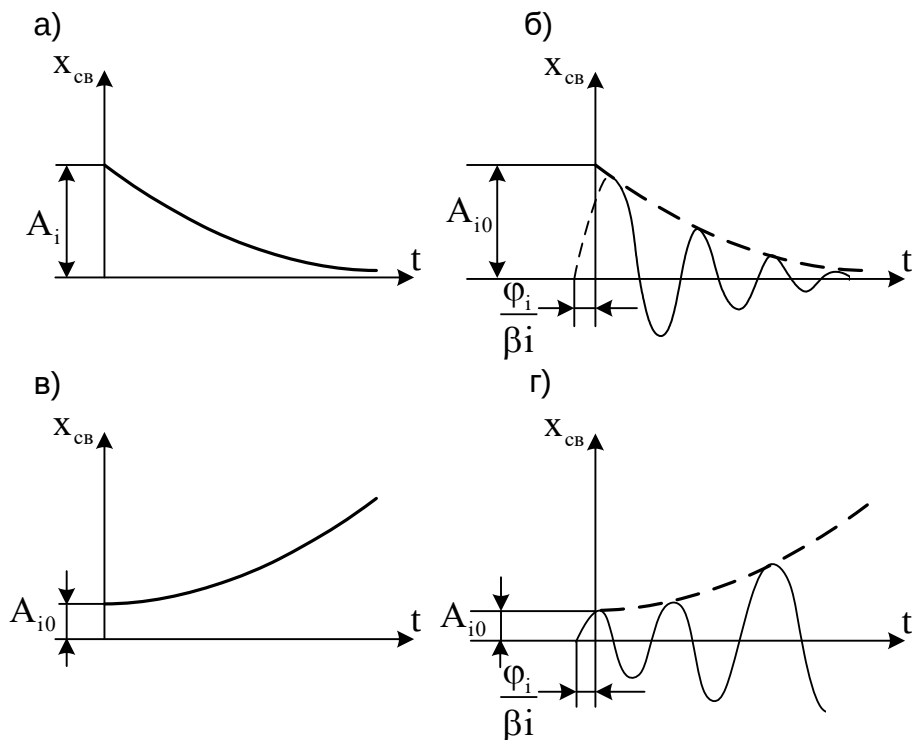


Рисунок 27 – Перехідні процеси системи при різних коренях характеристичного рівняння

Якщо серед коренів характеристичного рівняння буде хоча б одна пара чисто уявних, то з'явиться складова вільного руху у вигляді незгасаючого коливального процесу і система буде перебувати на межі стійкості і нестійкості.

Таким чином, для стійкості лінійної системи необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння замкнутої системи лежали ліворуч від уявної осі комплексної площини коренів (рисунок 28) [4, 17].

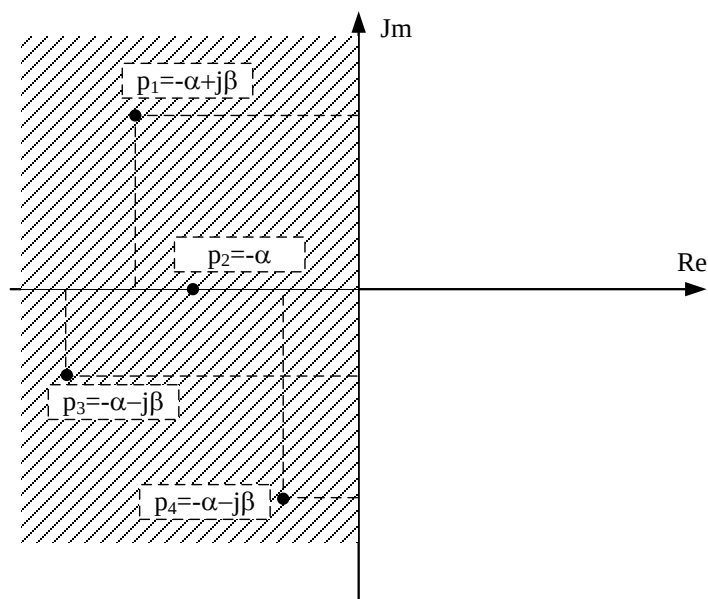


Рисунок 28 – Умови стійкості системи за теоремою Ляпунова

Вказівки до виконання підрозділу роботи. Для виконання даного підрозділу курсової роботи необхідно:

- записати характеристичне рівняння замкнутої системи (отримується з передатної функції замкнутої системи);
- визначити корені характеристичного рівняння замкнутої системи (з використанням оператора «solve» ППП Mathcad);
- виконати оцінку отриманих значень коренів та визначити приналежність системи до одного з трьох станів системи за ознакою стійкості із використанням вище описаних умов.

Приклад вище описаного практичного розрахунку із застосуванням алгоритмів та інструментів ППП Mathcad приведений на рисунку 29.

Перевірка стійкості системи за критерієм Ляпунова

$$0.01 \cdot p^2 + 0.03 \cdot p + 2 = 0$$

$$0.01 \cdot p^2 + 0.03 \cdot p + 2 \left| \begin{array}{l} \text{solve, } p \\ \text{float, } 2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1.5 - 14.0i \\ -1.5 + 14.0i \end{pmatrix}$$

Рисунок 29 – Визначення стійкості САК за теоремою Ляпунова

5.3 Перевірка стійкості системи за критерієм Гурвіца

Критерій Гурвіца дозволяє визначити стійкість замкнутої системи за коефіцієнтами характеристичного рівняння [4, 8].

Критерій формулюється таким чином: для стійкості системи за критерієм Гурвіца необхідно, щоб при $d_n > 0$ всі n -визначники Гурвіца квадратної матриці, побудованої за характеристичним рівнянням виду

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (60)$$

були більшими нуля.

Порядок складання визначників Гурвіца:

1. По головній діагоналі записують коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_n ;
2. Місця вище діагоналі заповнюють коефіцієнтами з більшим індексом, а нижче діагоналі – з меншим індексом;
3. Решту місць заповнюють нулями;
4. 1-й визначник Гурвіца отримують з i -го визначника Гурвіца шляхом викреслювання одного стовпця справа та однієї строчки зліва:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (61)$$

При складанні визначників Гурвіца для рівняння n -го порядку треба скласти n визначників: останній (головний) визначник буде n -го порядку, передостанній – $(n-1)$ -го порядку і т. д.

Критерій стійкості зводиться до того, що при $d_n > 0$ повинні бути більшими нуля всі n визначників Гурвіца, отримані з квадратної матриці коефіцієнтів.

Вказівки до виконання практичного завдання. Для виконання завдання необхідно:

- записати характеристичне рівняння замкнутої системи (отримується з передатної функції замкнутої системи);
- скласти квадратну матрицю коефіцієнтів характеристичного рівняння відповідно до порядку складання визначників Гурвіца;
- розрахувати визначники Гурвіца та виконати їх оцінку, визначивши приналежність системи до одного з трьох станів системи за ознакою стійкості із дотриманням вище описаних умов.

В якості прикладу приведемо порядок складання визначників Гурвіца для системи 4-го порядку:

$$0,00022p^4 + 0,0264p^3 + 0,573p^2 + 3,87p + 6 = 0. \quad (62)$$

$$a_0 = 0,00022, a_1 = 0,0264, a_2 = 0,573, a_3 = 3,87, a_4 = 6.$$

Відокремимо визначники з квадратної матриці:

$$|0,0264| = 0,0264 > 0, \quad (63)$$

$$\begin{vmatrix} 0,0264 & 3,87 \\ 0,00022 & 0,573 \end{vmatrix} = 0,014 > 0, \quad (64)$$

$$\begin{vmatrix} 0,0264 & 3,87 & 0 \\ 0,00022 & 0,573 & 6 \\ 0 & 0,0264 & 3,87 \end{vmatrix} = 0,055 > 0, \quad (65)$$

$$\begin{vmatrix} 0,0264 & 3,87 & 0 & 0 \\ 0,00022 & 0,573 & 6 & 0 \\ 0 & 0,0264 & 3,87 & 0 \\ 0 & 0,00022 & 0,573 & 6 \end{vmatrix} = 0,306 > 0., \quad (66)$$

Отриманий результат розрахунку свідчить про те, що система є стійкою, оскільки всі визначники матриці, включно з коефіцієнтом a_0 , є більшими 0.

5.4 Перевірка стійкості системи за критерієм Михайлова

Даний критерій дозволяє робити висновок про стійкість системи по кривій, побудованій на основі характеристичного рівняння замкнутої системи.

Формулювання критерія Михайлова [4]: для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова при зміні ω від 0 до $+\infty$ починався на дійсній додатній напівосі комплексної площини, послідовно пройшов всі n -квадрантів комплексної площини проти годинникової стрілки, ніде не перетворювався у нуль. В рівнянні змінна « n » – це ступінь характеристичного рівняння замкнутої системи. Система, яка не задовольняє даних умов, є нестійкою.

Можливі варіанти побудови годографа Михайлова наведені на рисунку 33.

Порушення послідовності проходження квадрантів за критерієм Михайлова завжди є ознакою нестійкості системи.

На рисунку 30 наведені стани системи за критерієм Михайлова:

а – стійкі системи від 1-го до 5-го порядків; б – системи, які знаходяться на межі стійкості; в - д – нестійкі системи.

На практиці для побудови годографа Михайлова використовується вихідний вираз характеристичного полінома передатної функції замкнутої системи, в якому комплексна змінна p замінюється на змінну $j\omega$.

При цьому виходить характеристичний поліном виду:

$$D(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) = D(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (67)$$

де дійсна частина буде містити парні степені ω :

$$\operatorname{Re}(\omega) = d_0 - d_2\omega^2 + d_4\omega^4 - \dots, \quad (68)$$

а уявна – непарні степені ω :

$$\operatorname{Re}(\omega) = d_1\omega - d_3\omega^3 + d_5\omega^5 - \dots \quad (69)$$

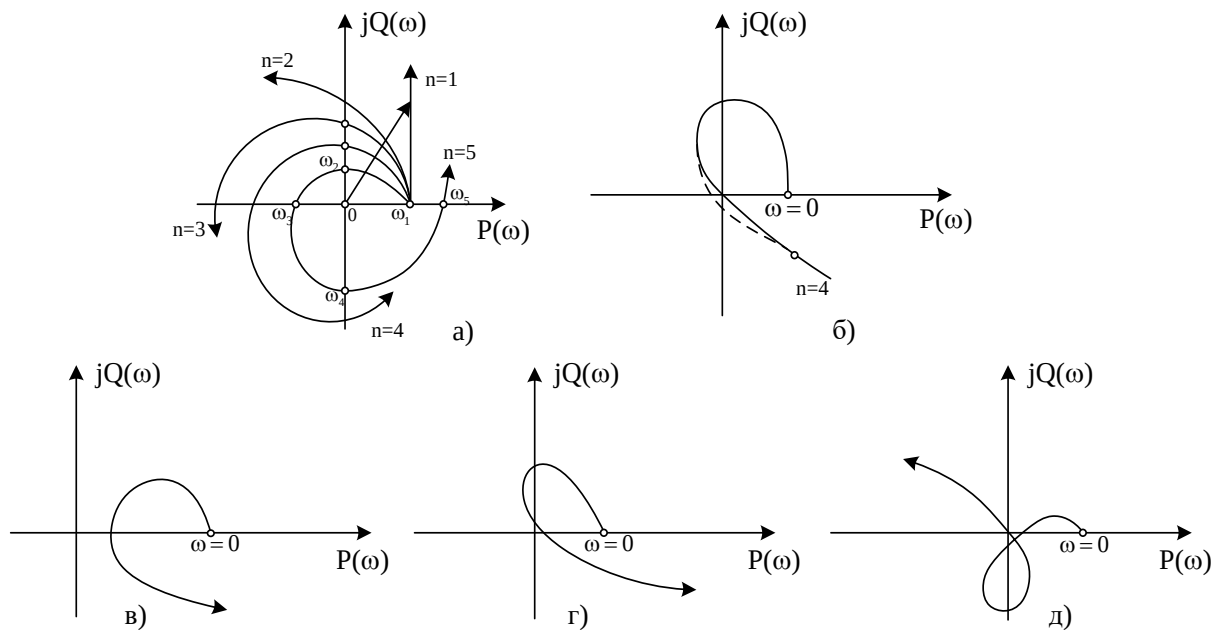


Рисунок 30 – Годографи Михайлова

Вказівки до виконання практичного завдання. Для виконання завдання необхідно:

- після виконаної заміни в рівнянні $D(j\omega)$ виділити дійсну та уявну частини;
- задаються різні значення частоти ω і за формулами дійсної та уявної складових характеристичного поліному обчислюються $\operatorname{Re}(\omega)$ і $\operatorname{Im}(\omega)$;
- результати розрахунків зводяться в таблицю;
- по отриманим точкам будується годограф Михайлова;
- виконується аналіз побудованого графіка та визначається приналежність системи до одного з трьох станів системи за ознакою стійкості із перевіркою вище описаних умов.

В якості прикладу на рисунку 31 наведений приклад розрахунку стійкості системи за критерієм Михайлова для системи, яка описується лінійним динамічним рівнянням 2-го порядку.

Перевірка стійкості системи за критерієм Михайлова

$$j := \sqrt{-1}$$

$$M(p) := 0.01 \cdot p^2 + 0.03 \cdot p + 2 = 0$$

$$M(p) \begin{cases} \text{substitute, } p = j \cdot \omega \\ \text{float, 2} \\ \text{simplify} \end{cases} \rightarrow (0.03i) \cdot \omega + -0.01 \cdot \omega^2 + 2.0 = 0$$

$$M(\omega) := (0.03i) \cdot \omega + -0.01 \cdot \omega^2 + 2.0$$

Виділимо дійсну та уявну частину

$$M(\omega) \text{ complex} \rightarrow -0.01 \cdot \omega^2 + 2.0 + 0.03 \cdot \omega \cdot i$$

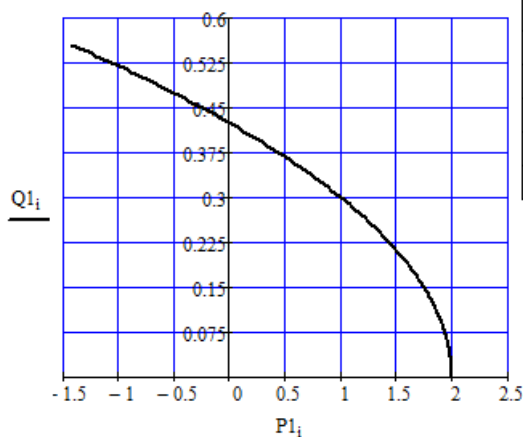
$$i := 0..185 \quad \omega_i := \frac{i}{10}$$

Дійсна частина:

$$P1_i := -0.01 \cdot (\omega_i)^2 + 2.0$$

Уявна частина:

$$Q1_i := 0.03 \cdot \omega_i$$



$\omega_i =$	$P1_i =$	$Q1_i =$
0	2	0
0.1	2	$3 \cdot 10^{-3}$
0.2	2	$6 \cdot 10^{-3}$
0.3	1.999	$9 \cdot 10^{-3}$
0.4	1.998	0.012
0.5	1.998	0.015
0.6	1.996	0.018
0.7	1.995	0.021
0.8	1.994	0.024
0.9	1.992	0.027
1	1.99	0.03
1.1	1.988	0.033
1.2	1.986	0.036
1.3	1.983	0.039
1.4	1.98	0.042
...	...	...

Рисунок 31 – Алгоритм визначення стійкості в ППП Mathcad

Для запропонованих в Додатку В варіантів студентам, згідно вказівки викладача, необхідно виконати дослідження на стійкість лінійної динамічної системи у відповідності із заданими диференціальними рівняннями і табличними значеннями відомих характеристичних коефіцієнтів рівняння.

6 ВИЗНАЧЕННЯ ЗАПАСІВ СТІЙКОСТІ САК

Визначення запасів стійкості досліджуваної системи виконується за допомогою використання Логарифмічного критерію стійкості.

Застосування методу ЛЧХ дає можливість бачити вплив того чи іншого параметра системи на її стійкість і перехідний процес, а також дозволяє порівняно просто визначити характеристику коригувального пристрою, що забезпечує необхідні показники якості системи.

Логарифмічний частотний критерій стійкості ґрунтується на критерії стійкості Найквіста і є іншим, більш зручним формулюванням даного критерію стійкості шляхом застосування ЛЧХ. Розглянемо лише випадок, коли САК в розімкнутому стані стійка.

На рисунку 32 а) зображені АФЧХ розімкнутих систем, що відрізняються лише коефіцієнтами підсилення k ($k_2 > k_1$). З них АФЧХ 1, згідно з критерієм Найквіста відповідає стійкому стану, АФЧХ 2 – нестійкому стану системи в замкнутому стані.

На рисунку 32 б) наведені ЛЧХ, які відповідають побудованим на рисунку 32 а) АФЧХ. Оскільки системи відрізняються лише коефіцієнтом підсилення k , то їх ЛФЧХ збігаються, а ЛАХ 2 системи, що має $k_2 > k_1$, розташовується вище, ніж ЛАХ 1 системи з k_1 .

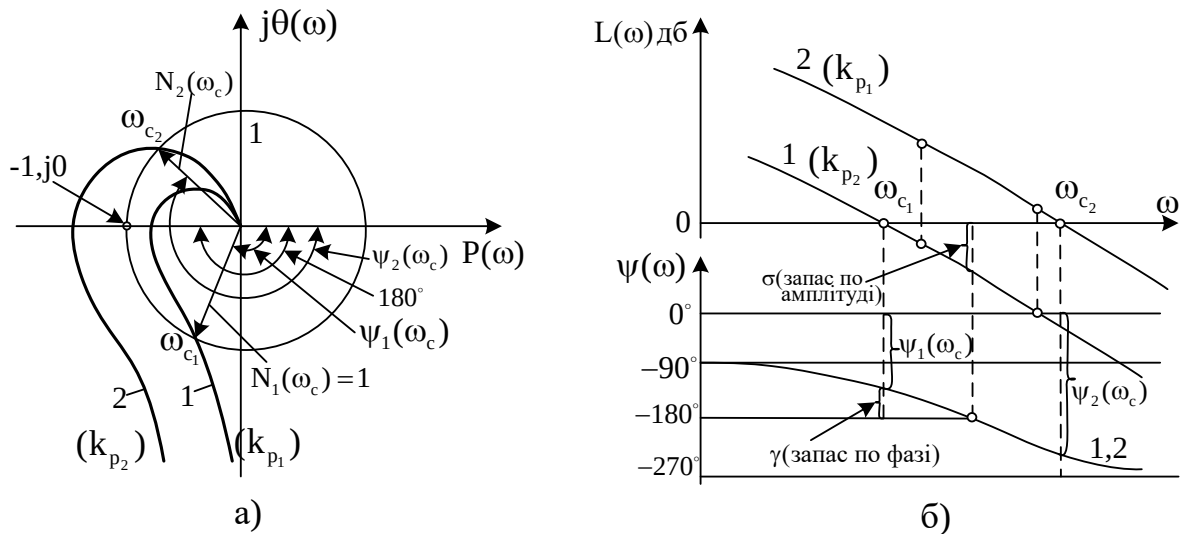


Рисунок 32 – Частотні характеристики системи

З рисунку 32 робимо висновок про те, що стійкість системи забезпечується, якщо аргумент $\psi(\omega_{cp})$ АФЧХ системи при частоті зрізу ω_{cp} за абсолютною величиною менше, ніж 180° .

Таким чином, за відношенням до ЛЧХ умову стійкості можна сформулювати таким чином: система автоматичного керування, стійка в розімкнутому стані, буде стійкою і в замкнутому стані, якщо ордината логарифмічної фазочастотної характеристики (аргумент АФЧХ) на частоті

зрізу $\omega_{\text{ср}}$ системи за абсолютною величиною менше, ніж 180° , тобто якщо $|\psi(\omega_{\text{ср}})| < 180^\circ$.

Система, яка характеризується ЛАХ 1 (рисунок 32, б), є стійкою, оскільки $|\psi_1(\omega_{\text{ср}})| < 180^\circ$, а система з ЛАХ 2 – нестійкою, оскільки $|\psi_2(\omega_{\text{ср}})| > 180^\circ$.

Система знаходиться на межі стійкості, якщо її АФЧХ в розімкненому стані проходить через точку з координатами $(-1, j0)$, тобто якщо на частоті $\omega_{\text{л}}$, на якій система вносить запізнювання $\psi_1(\omega_{\text{л}}) = -180^\circ$, модуль $A(\omega_{\text{л}})$ частотної передавальної функції дорівнює 1. Оскільки $20 \lg 1 = 0$, тому система буде перебувати на межі стійкості, якщо на частоті $\omega_{\text{л}}$ ЛАХ буде перетинати вісь 0 дБ, тобто якщо $\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{л}}$. ЛЧХ системи, що знаходиться на межі стійкості, зображені на рисунку 33, ЛАХ системи зображена характеристика ламаної $L_{\text{гр}}$. На цьому ж рисунку показана крива $L_{\text{уст}}$ ЛАХ стійкої системи.

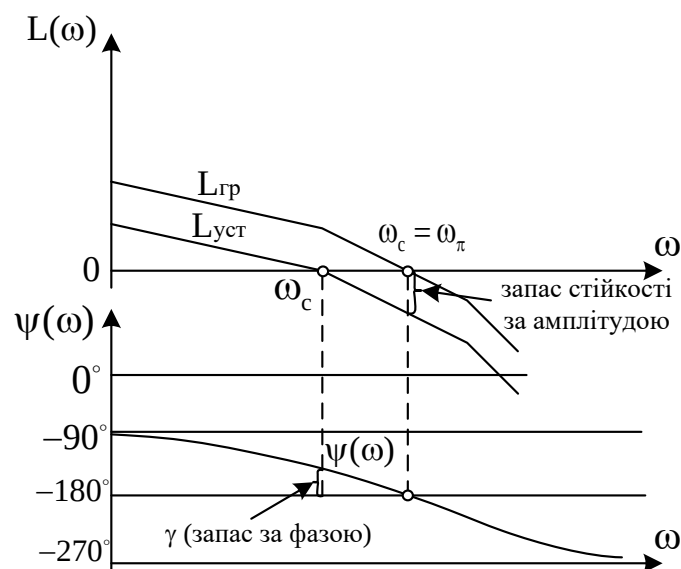


Рисунок 33 – Визначення запасу стійкості за амплітудою і за фазою

Запас стійкості за амплітудою визначається як число децибел, на яке потрібно збільшити підсилення системи, щоб система досягла межі стійкості. Запас стійкості за фазою визначається як різниця між 180° та абсолютним значенням аргументу АФЧХ на частоті зрізу $\omega_{\text{зр}}$.

Вказівки до виконання практичного завдання. Для виконання завдання необхідно:

- для передатної функції розімкнутої системи побудувати її ЛАЧХ та ЛФЧХ;
- сумістити отримані графіки характеристик по шкалі зміни значень частоти;
- в графічному редакторі виконати надбудови та позначення, необхідні для визначення стану стійкості та запасів стійкості досліджуваної системи;

– проаналізувати отримані значення запасів стійкості та зробити висновок щодо їх відповідності допустимим значенням системи.

В якості прикладу на рисунку 34 наведена побудова логарифмічних характеристик та визначення запасів стійкості системи.

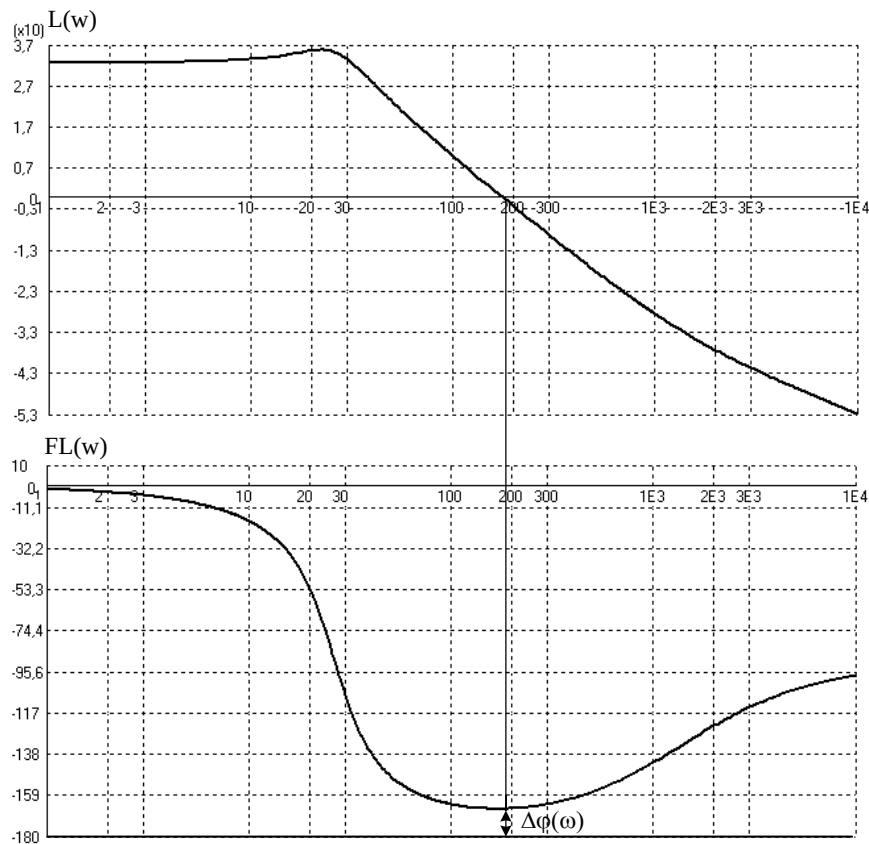


Рисунок 34 – Приклад побудови ЛАЧХ та ЛФЧХ системи

Для запропонованих в Додатку В варіантів завдань систем автоматичного керування студентам необхідно виконати розрахунок логарифмічних характеристик системи та визначити запаси її стійкості, вважаючи приведені в завданні диференційні рівняння математичними моделями розімкнутої системи.

7 ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ САК

Вимога стійкості для САК є недостатньою. Система може бути стійкою, але мати довгий час згасання чи велику помилку в усталеному режимі і тому цю систему не можна використати на практиці.

Система повинна не тільки бути стійкою, але й мати певний перехідний процес системи (ППС), а її помилки в усталених режимах не повинні перевищувати допустимі.

Бувають випадки, коли система може бути стійкою, але мати велике перерегулювання та довго виходити на усталений режим, що на практиці є недопустимим.

Якість системи визначається за її реакцією на типові входні збурення, зазвичай як основна для дослідження приймається одинична функція $1(t)$.

Основні показники якості ППС САК [4, 10]:

1. Час регулювання (час ППС) (t_p) – час, після якого відхилення керованої величини $y(t)$ відносно усталеного значення $y_{уст}$ стає і лишається за абсолютним значенням меншим, ніж задана величина ε (як правило, $\varepsilon=0,05y_{уст}$).

Час регулювання характеризує швидкість згасання ППС.

2. Час встановлення (t_ε) – проміжок часу, за який керована величина в перший раз досягає свого усталеного значення. t_ε характеризує швидкість процесу керування.

3. Перерегулювання (σ) – виражене у відсотках відношення максимального відхилення керованої величини Δy_{max} від свого усталеного значення $y_{уст}$ до $y_{уст}$:

$$\sigma = \frac{\Delta y_{max}}{y_{уст}} \cdot 100\% \quad (70)$$

Коливальність перехідного процесу звичайно визначається кількістю коливань, тобто кількістю перерегулювань за час перехідного процесу. Коливання можуть бути охарактеризовані ступінню згасання коливань – відношенням різниці двох сусідніх позитивних максимумів перехідного процесу до першого максимуму.

В більшості випадків вимагається, щоб перерегулювання не перевищувало 30%, подекуди вимагається монотонний аперіодичний перехідний процес. Перехідний процес повинен мати одне-два коливання, але допускається до трьох-чотирьох коливань.

4. Кількість (n) коливань керованої величини протягом часу ППС.

5. Частота коливань (f) керованої величини протягом часу ППС.

$$f = \frac{n}{t_p} \quad (71)$$

6. Статична похибка регулювання – відхилення регульованої величини від заданого значення після закінчення перехідного процесу – $E_{ст}(t)$. Динамічна похибка – величина найбільшого відхилення регульованої величини від заданого значення (окрім початкового відхилення) – ΔY_{max} .

7. Час досягнення регульованої величини максимального відхилення в перехідний період (t_2) – визначається як інтервал часу від початку перехідного процесу до моменту, коли регульовальна величина досягає максимального значення.

Проблема визначення прямих показників якості перехідних процесів САК з математичної точки зору зводиться до побудови перехідної характеристики за відомим рішенням диференціального рівняння.

Сукупність вище приведених показників називається показниками якості системи. Розглянуті показники є прямими показниками системи, оскільки для їх визначення слід в явному вигляді отримати перехідну функцію системи.

Приклад побудови та визначення основних показників якості системи приведений на рисунку 35.

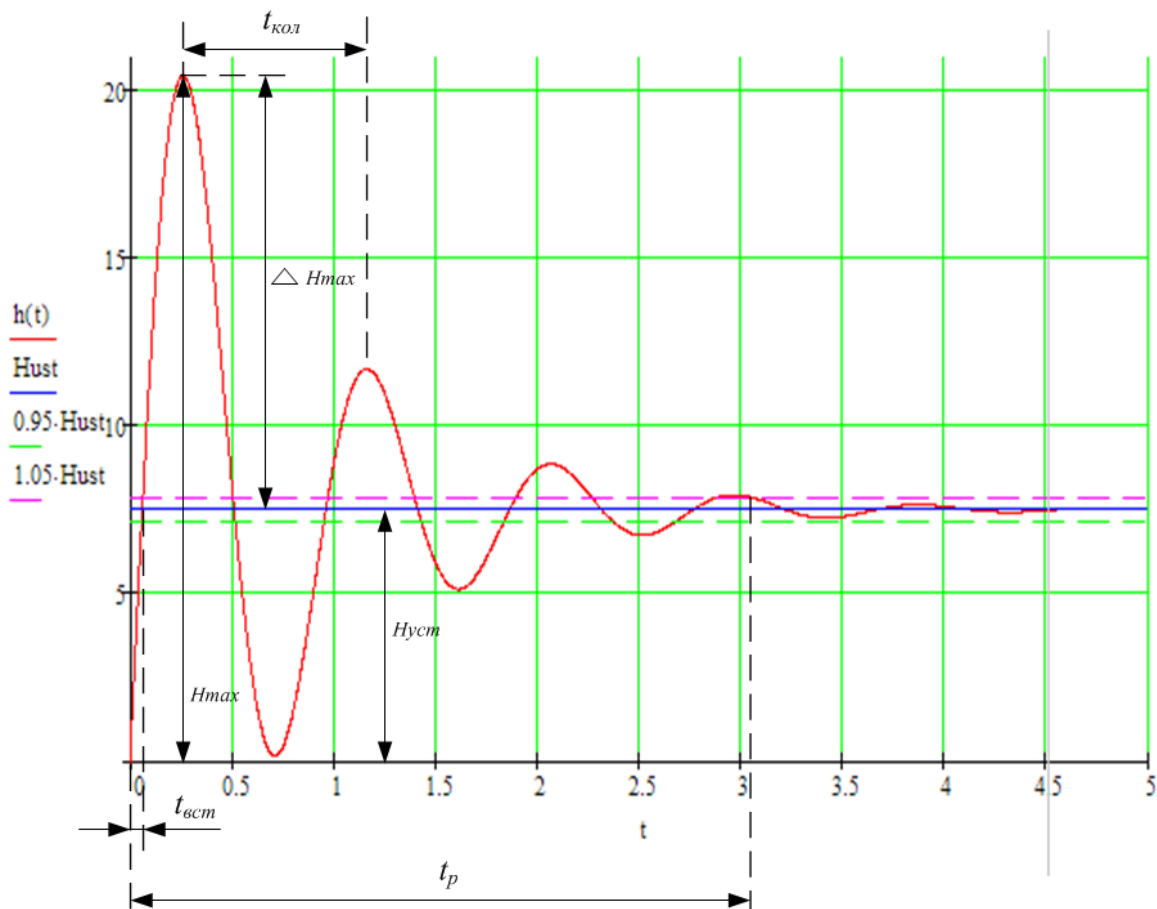


Рисунок 35 – Графік перехідної характеристики системи

Вказівки до виконання практичного завдання. Для виконання практичного завдання:

- побудувати графік перехідного процесу замкнутої системи в ППП Mathcad, ППП Matlab Simulink або в іншому математичному редакторі;
- виконати позначення прямих показників якості на координатній площині отриманого перехідного процесу;
- розрахувати прямі показники якості, дотримуюсь основного їх переліку;
- проаналізувати отримані показники якості та зробити висновок щодо їх відповідності якісному рівню регулювання системи.

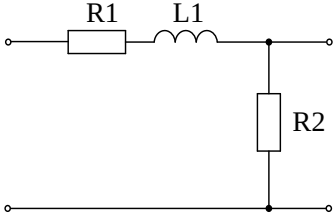
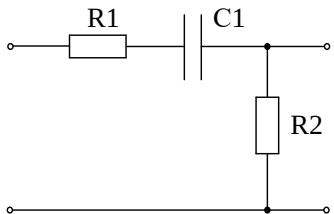
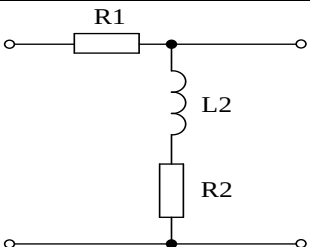
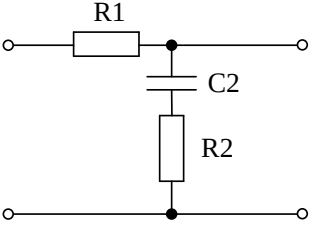
Перелік варіантів для розрахунку, побудови та аналізу отриманих показників якості приведений в Додатку Г даних методичних вказівок.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. Київ : Либідь, 2007. 656 с.
2. Євстіфєєв В. О. Теорія автоматичного керування. Частина перша. Спеціальні системи автоматичного керування : навч. посіб. Кременчук : ПП Щербатих О. В., 2006. 288 с.
3. Євстіфєєв В. О. Теорія автоматичного керування. Частина друга. Безперервні лінійні та нелінійні системи : навч. посіб. Кременчук : ПП Щербатих О. В., 2007. 224 с.
4. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Практикум для самостійної роботи студентів з навчальної дисципліни «Методологія та організація наукових досліджень». Частина 1: від постановки задачі до синтезу та ідентифікації математичної моделі. Вінниця : ВНТУ, 2018. 179 с.
5. Гоголюк П. Ф., Гречин Т. М. Теорія автоматичного керування : навч. посіб. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2009. 280 с.
6. Гуров А. П., Ольшевський С. І., Черно О. О., Бугрім Л. І. Навчальний посібник з дисципліни «Теорія автоматичного керування» : електрон. вид. комбін. використання на DVD-ROM. У 2 ч. Ч. 1 / МОН України, НУК ім. адмірала Макарова. Миколаїв : НУК, 2018.
7. Крих Г., Матіко Ф. Теорія автоматичного керування : навч. посіб. Львів : СПОЛОМ, 2017. 165 с.
8. Синтез лінійних оптимальних динамічних систем : навч. посіб. / О. Ю. Лозинський та ін. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 392 с.
9. Ладанюк А. П., Архангельська К. С., Власенко Л. О. Теорія автоматичного керування технологічними об'єктами : навч. посіб. Київ : НУХТ, 2014. 274 с.
10. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів : навч. посіб. Вінниця : Універсум-Вінниця, 2005. 300 с.
11. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
12. Методичні вказівки до виконання курсової роботи з дисципліни «Теорія автоматичного керування» для студентів спеціальності 141 – «Електроенергетика, електротехніка і електромеханіка» всіх форм навчання / уклад. О. А. Паянок. Вінниця : ВНТУ, 2023. 67 с.
13. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія автоматичного керування» для студентів спеціальності 141 – «Електроенергетика, електротехніка і електромеханіка» всіх форм навчання / уклад. О. А. Паянок. Вінниця : ВНТУ, 2018. 34 с.
14. Теорія автоматичного керування. Частина 1: комп'ютерний практикум : навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», освітньої програми «Управління, захист та автоматизація енергосистем». КПІ ім. Ігоря Сікорського / уклад.: А. А. Марченко, В. С. Гулий. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 54 с.

Додаток А

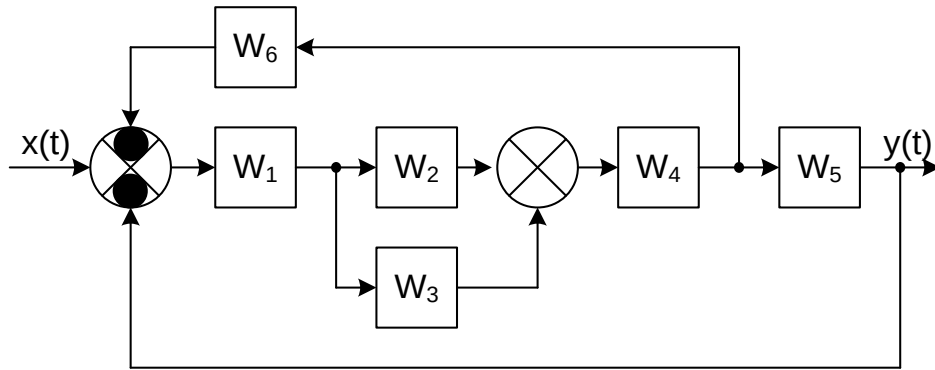
Варіанти завдань для складання математичного опису динамічної системи

№ вар.	Елемент 1	Елемент 2	Елемент 3	Схема математичного опису
1	R1, Ом	R2, Ом	L1, мГ	
	70	45	3	
	80	40	4	
	90	35	5	
	100	30	6	
2	R1, кОм	R2, кОм	C1, мкФ	
	50	25	5	
	40	20	4	
	30	15	3	
	20	10	2	
3	R1, Ом	R2, Ом	L2, мГ	
	40	40	9	
	30	45	10	
	20	50	20	
	10	55	30	
4	R1, кОм	R2, кОм	C2, мкФ	
	80	10	2	
	70	15	4	
	60	20	8	
	50	25	10	

Додаток Б

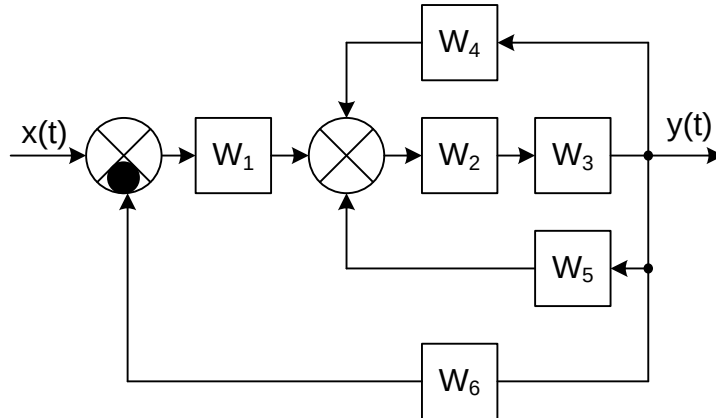
Варіанти завдань для виконання структурних перетворень лінійних динамічних систем

Завдання: Знайти передаточну функцію системи по алгоритмічній схемі, приведеній на рисунку у відповідності з варіантом.



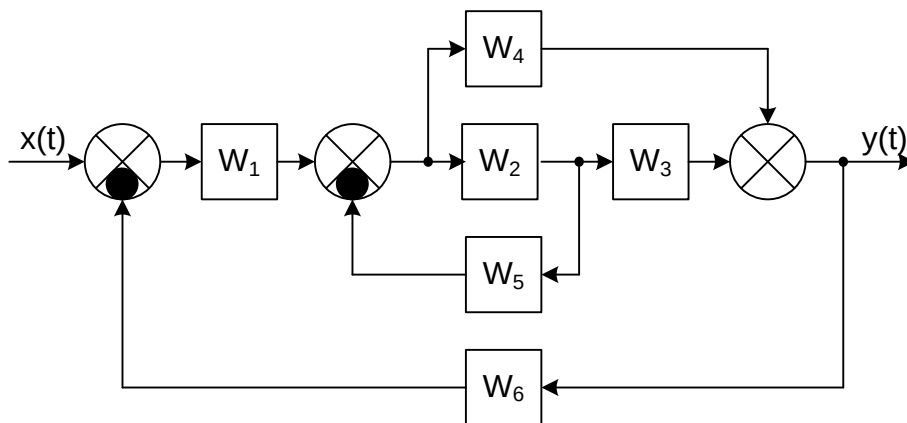
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
1.	5	$0,5/p$	$0,2/(1+p)$	3	8	10



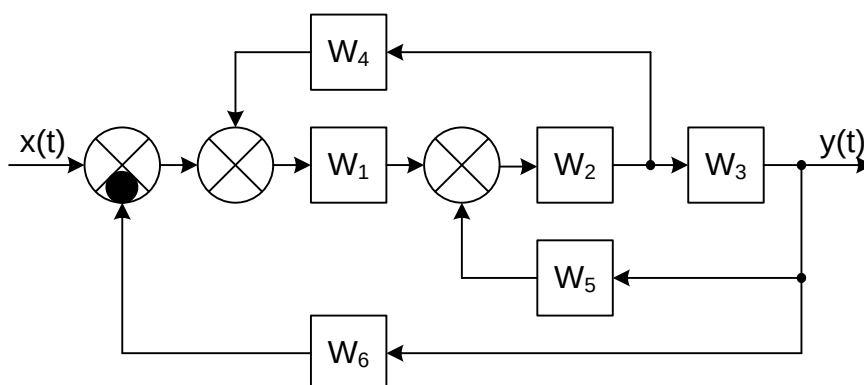
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
2.	8	12	$0,5/p$	$4/(1+p)$	10	50



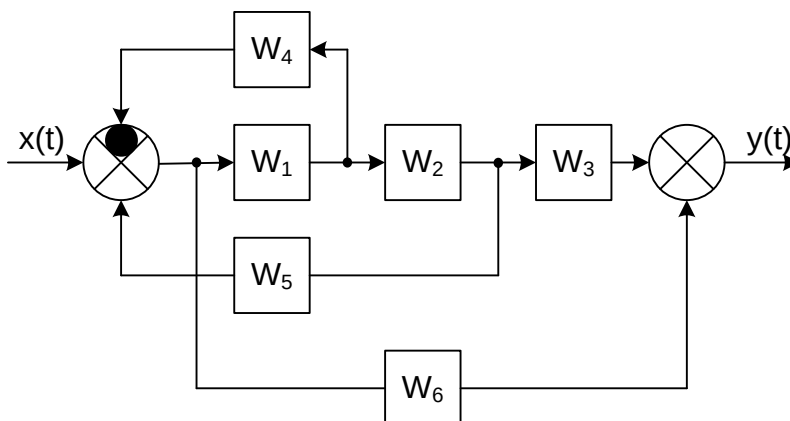
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
3.	$4/p$	$7p$	13	12	11	0,4



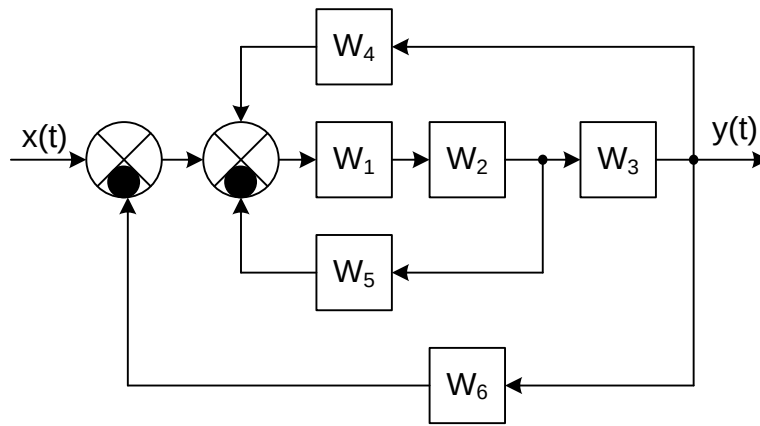
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
4.	4	$0,5p$	$0,8/(1+p)$	10	5	8



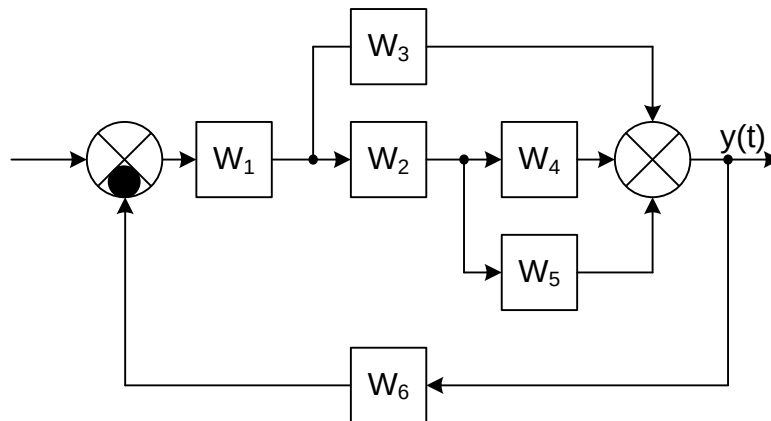
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
5.	$1/p$	10	$3/(1+p)$	5	7	12



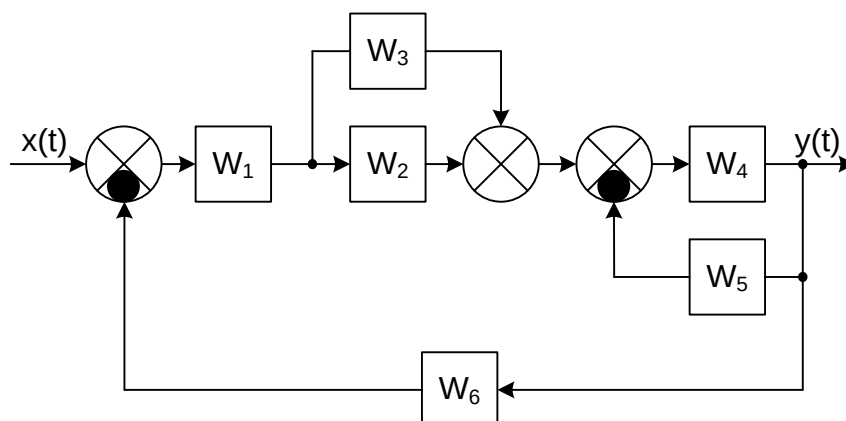
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
6.	5	8	$5p$	$1/(1+p)$	7	40



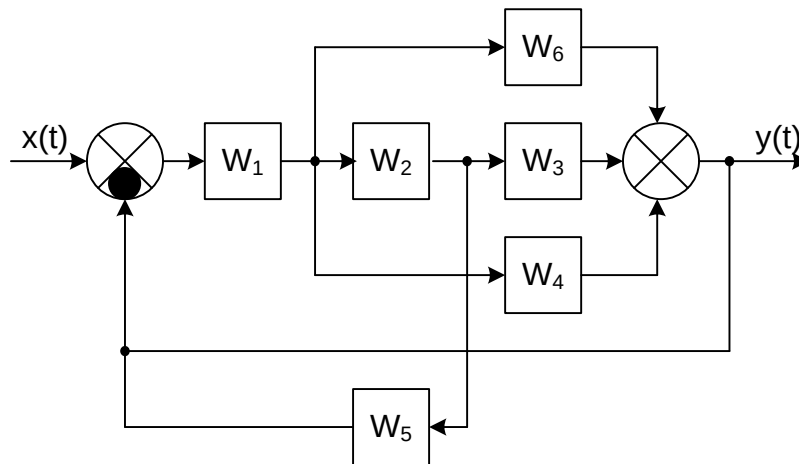
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
7.	10	$0,5p$	0,5	5	$20/(1+p)$	4



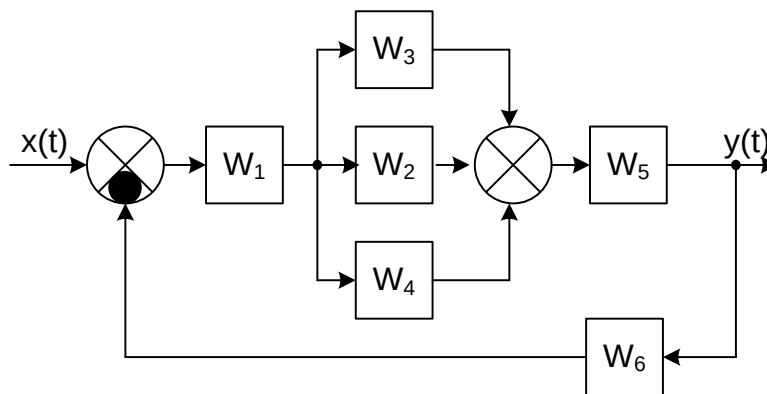
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
8.	0,1	$0,5p$	10	$0,5/(1+p)$	0,5	100



Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

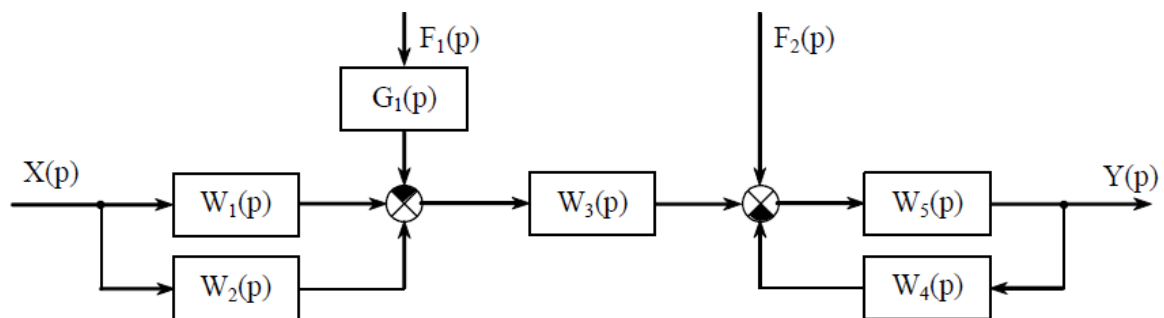
№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
9	6	4	$0,5p$	$0,4/(1+p)$	4	8



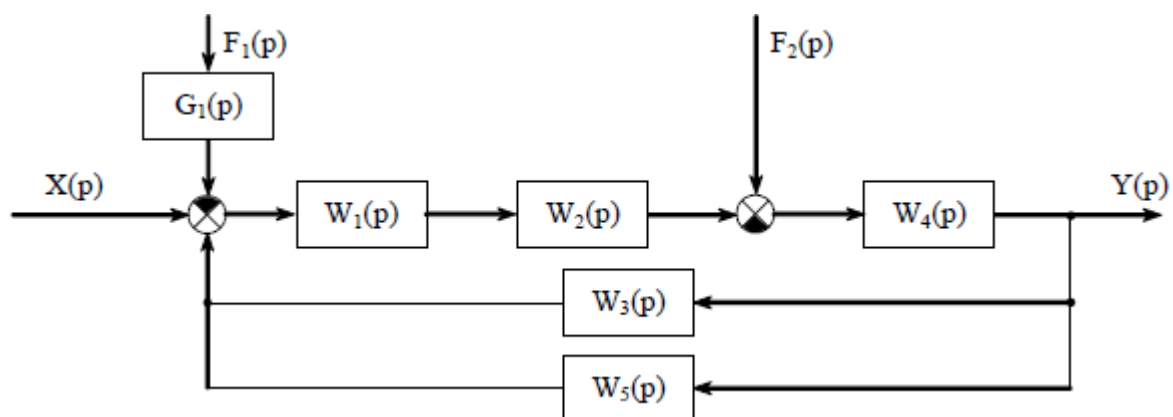
Дані варіанту виконання завдання зведені в таблицю

№ вар.	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
10.	7	$3p$	$0,6/(1+p)$	5	4	2

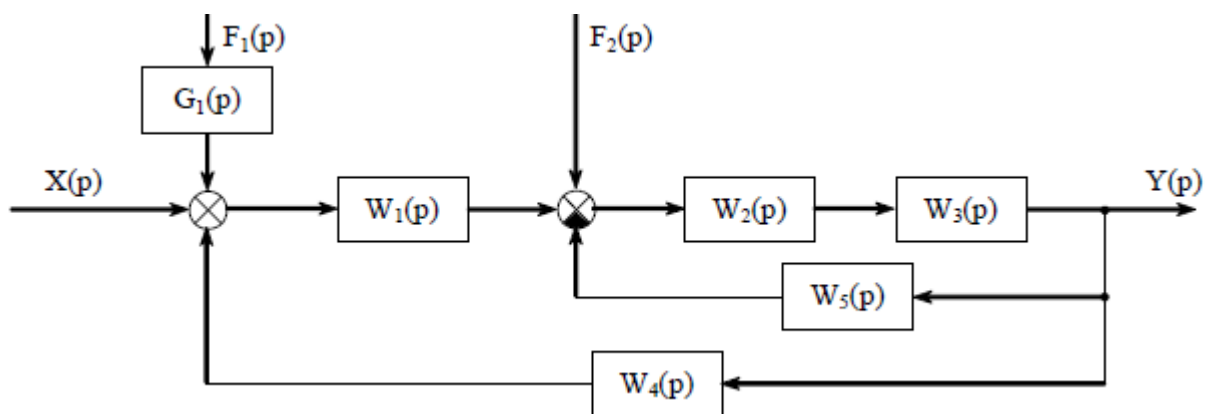
Варіант 11



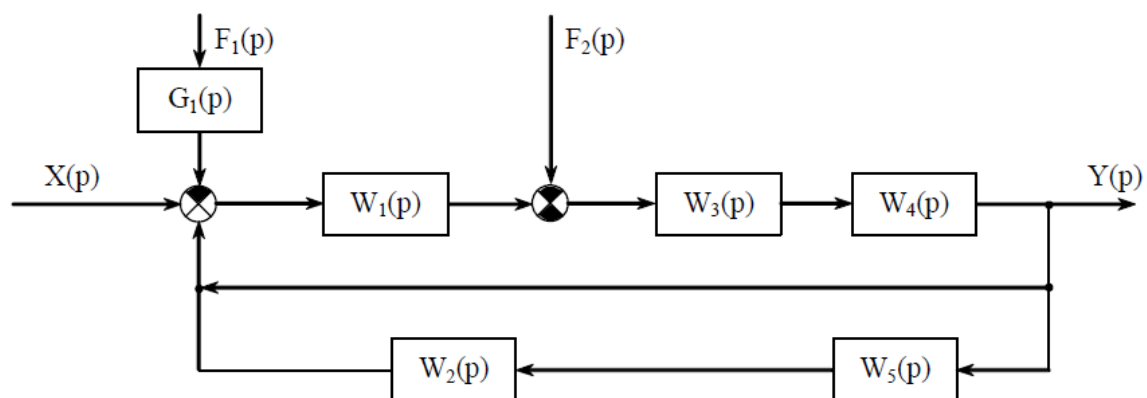
Варіант 12



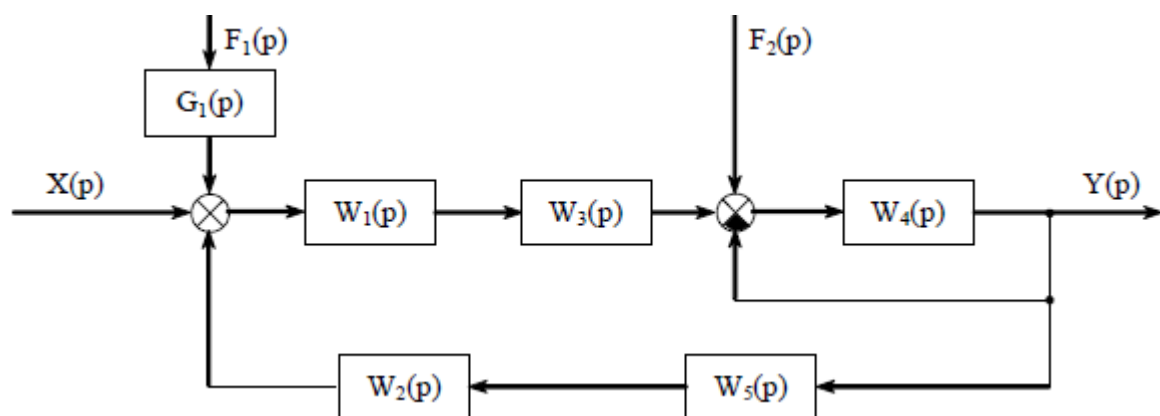
Варіант 13



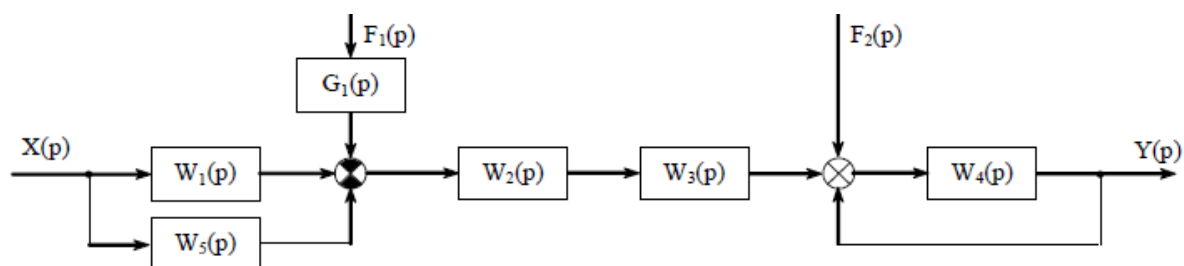
Варіант 14



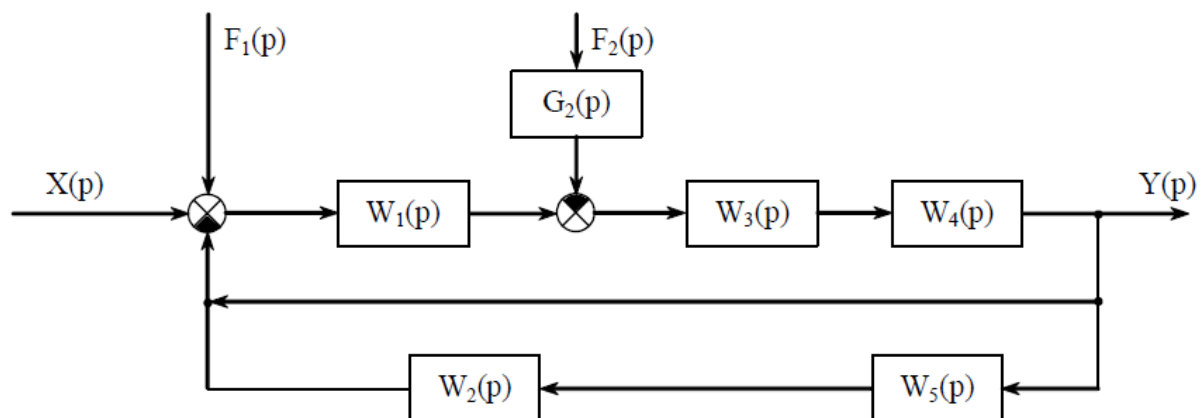
Варіант 15



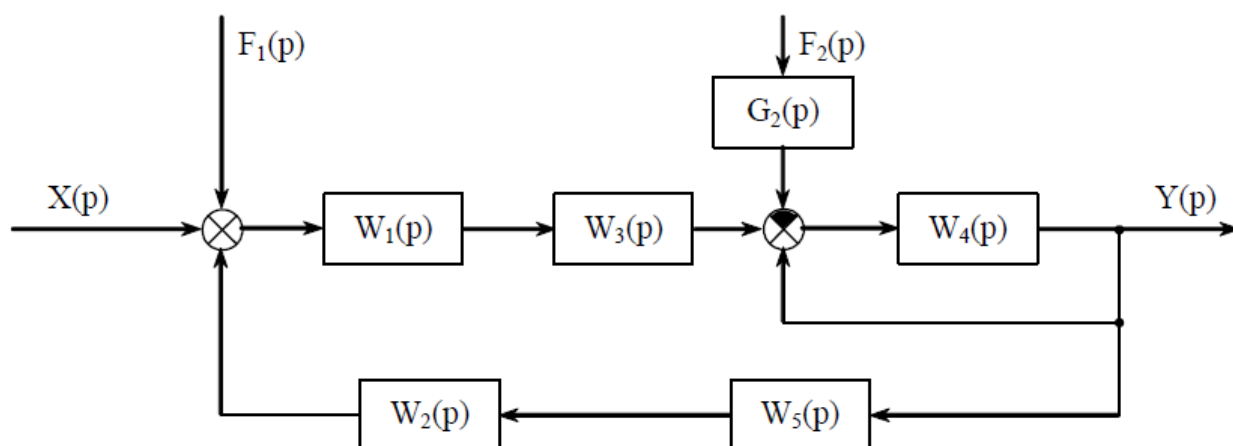
Варіант 16



Варіант 17



Варіант 18



Додаток В

Варіанти завдань для виконання дослідження лінійних динамічних систем на стійкість

Формулювання завдання:

Для диференціальних рівнянь динаміки САК (1)-(4) виду :

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (1)$$

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} - a_1 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (2)$$

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} - a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (3)$$

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (4)$$

дослідити систему на стійкість за теоремою Ляпунова, критеріями Рауса-Гурвіца та Михайлова. Порівняти отримані результати досліджень за допомогою різних критеріїв та підходів. Зробити висновки про адекватність отриманих результатів та вплив на характеристики системи знаків та значень характеристичних коефіцієнтів диференціального рівняння.

Таблиця 1 – Параметри диференціального рівняння

№ вар.	$a_0^2 = T^2$	a_1	a_2	b_0	b_1
1.	0,0081	0,018	1	0,1	1
2.	0,0064	0,032	2	0,2	2
3.	0,0049	0,042	1	0,3	1
4.	0,0064	0,016	4	0,1	2
5.	0,005625	0,03	1	0,2	1
6.	0,0025	0,02	2	0,2	2
7.	0,0074	0,02	1	0,3	1
8.	0,0032	0,012	2	0,4	2
9.	0,0018	0,084	1	0,8	1
10.	0,0074	0,048	4	0,2	2

Додаток Г

Варіанти завдань для визначення показників якості лінійних динамічних систем

Формулювання завдання:

Для диференціальних рівнянь динаміки САК (1)-(4) виду:

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (1)$$

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} - a_1 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (2)$$

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} - a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (3)$$

$$a_0^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + a_2 U_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 U_{\text{вх}}(t). \quad (4)$$

розрахувати та побудувати криву перехідного процесу і, проаналізувавши отриманий перехідний процес, визначити показники якості САК, якщо відомий спосіб визначення коефіцієнтів рівняння. При цьому номер варіанта визначається в таблиці 1.

Таблиця 1 – Параметри диференціального рівняння

№ вар.	$a_0^2 = T^2$	a_1	a_2	b_0	b_1
1.	0,0081	0,018	1	0,1	1
2.	0,0064	0,032	2	0,2	2
3.	0,0049	0,042	1	0,3	1
4.	0,0064	0,016	4	0,1	2
5.	0,005625	0,03	1	0,2	1
6.	0,0025	0,02	2	0,2	2
7.	0,0074	0,02	1	0,3	1
8.	0,0032	0,012	2	0,4	2
9.	0,0018	0,084	1	0,8	1
10.	0,0074	0,048	4	0,2	2

Електронне навчальне видання

**Олександр Анатолійович Паянок
Олена Миколаївна Нанака**

**Методичні вказівки до виконання практичних завдань з
дисципліни «Теорія автоматичного керування» зі
спеціальності «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка»**

Рукопис оформив О. Паянок

Редактор Г. Суровенко

Підписано до видання 01.07.2026 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № 2026-080

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: rvv.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.