

**В. Г. Мадьяров**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ  
«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»  
Частина 2**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ  
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**В. Г. Мадьяров**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ «ТЕОРЕТИЧНІ  
ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»  
Частина 2**

*Електронний конспект лекцій*

Вінниця  
ВНТУ  
2025

УДК 621.3(075)

М30

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (Протокол № 14 від 26.06.2025р.)

Рецензенти:

**М. Й. Бурбело**, доктор технічних наук, професор

**В. П. Квасніков**, доктор технічних наук, професор

**В. О. Комар**, доктор технічних наук, професор

**Мадьяров, В. Г.**

М30 Теоретичні основи електротехніки. Частина 2 : конспект лекцій [Електронний ресурс] / Мадьяров В. Г. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 135 с.)

В посібнику розглянуто питання перехідних процесів в лінійних колах та методи їх розрахунку, синтезу лінійних кіл, усталених та перехідних процесів в нелінійних колах, а також питання усталених та перехідних процесів в колах з розподіленими параметрами. В кінці кожного розділу наведено задачі та питання для кращого засвоєння матеріалу та самоперевірки.

Розрахований для здобувачів електротехнічних спеціальностей закладів вищої освіти.

УДК 621.3(075)

©ВНТУ, 2025

## ЗМІСТ

|   |           |
|---|-----------|
| Вступ .....   | 5         |
| <b>1 Перехідні процеси в лінійних електричних колах .....</b>                                   | <b>6</b>  |
| 1.1 Перехідні процеси в електричних колах, причини виникання. Закони комутації .....            | 6         |
| 1.2 Класичний метод розрахунку перехідних процесів. Вільна та примусова складові розв'язку..... | 7         |
| 1.3 Початкові умови та їх знаходження.....  | 8         |
| 1.4 Вмикання кола $R, L$ на постійну напругу.....   | 9         |
| 1.5 Вмикання кола $R, C$ на постійну напругу.....   | 12        |
| 1.6 Відключення котушки $R, L$ від джерела постійної напруги.....                               | 14        |
| 1.7 Вмикання кола $R, L$ на синусоїдну напругу .....  | 15        |
| 1.8 Перехідні процеси в розгалужених колах першого порядку .....                                | 17        |
| 1.9 Вмикання послідовно з'єднаних елементів $r, L, C$ до джерела постійної напруги .....        | 22        |
| 1.10 Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом в розгалужених колах .....        | 27        |
| 1.11 Складання характеристичних рівнянь .....   | 32        |
| <b>2 Операторний метод розрахунку перехідних процесів .....</b>                                 | <b>39</b> |
| 2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа і зображення найпростіших функцій .....              | 39        |
| 2.2 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі .....   | 42        |
| 2.3 Операторні схеми.....   | 47        |
| 2.4 Перехід від зображення до оригіналу.....  | 48        |
| <b>3 Частотний метод розрахунку перехідних процесів .....</b>                                   | <b>51</b> |
| 3.1 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів.....                     | 51        |
| <b>4 Перехідні процеси в електричних колах за вхідних дій будь-якої форми.....</b>              | <b>53</b> |
| 4.1 Одинична функція і перехідна характеристика кола .....                                      | 53        |
| 4.2 Використання перехідних характеристик для розрахунку перехідних процесів.....               | 57        |
| 4.3 Розрахунок перехідних процесів у випадку довільних дій .....                                | 58        |
| 4.4 Імпульсна функція і імпульсна характеристика кола .....                                     | 61        |
| 4.5 Розрахунок перехідних процесів за довільних дій з використанням імпульсної функції .....    | 63        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>5 Нелінійні електричні кола</b> .....   | 65  |
| 5.1 Загальна характеристика нелінійних елементів і нелінійних електричних кіл .....  | 65  |
| 5.2 Розрахунок електричних кіл постійного струму з нелінійними резисторами .....     | 70  |
| 5.3 Деякі використання нелінійних кіл постійного струму .....                        | 78  |
| 5.4 Загальна характеристика магнітних кіл .....                                      | 80  |
| 5.5 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму .....               | 82  |
| 5.6 Розгалужене магнітне коло постійного струму .....                                | 86  |
| 5.7 Електричні кола змінного струму з нелінійними резисторами .....                  | 88  |
| 5.8 Метод еквівалентних синусоїд .....   | 89  |
| 5.9 Котушка з феромагнітним осердям .....  | 90  |
| 5.10 Ферорезонанси .....   | 95  |
| 5.11 Трансформатор з феромагнітним осердям .....                                     | 97  |
| <br>   |     |
| <b>6 Перехідні процеси в нелінійних електричних колах</b> .....                      | 102 |
| 6.1 Метод умовної лінеаризації .....   | 102 |
| 6.2 Метод кусково–лінійної апроксимації .....  | 103 |
| <br>   |     |
| <b>7 Електричні кола з розподіленими параметрами</b> .....                           | 106 |
| 7.1 Диференціальні рівняння однорідної лінії .....                                   | 106 |
| 7.2 Розв’язання телеграфних рівнянь в усталеному режимі за синусоїдної напруги ..... | 107 |
| 7.3 Падаючі і відбиті хвилі .....  | 109 |
| 7.4 Відбивання в довгих лініях .....   | 113 |
| 7.5 Рівняння довгої лінії через гіперболічні функції .....                           | 114 |
| 7.6 Лінія без спотворень .....   | 115 |
| 7.7 Лінія без втрат на холостому ходу .....  | 116 |
| 7.8 Лінія без втрат за короткого замикання .....                                     | 120 |
| 7.9 Перехідні процеси в довгих лініях .....  | 122 |
| 7.10 Вмикання довгої лінії на постійну напругу .....                                 | 124 |
| 7.11 Вмикання лінії на постійну напругу за холостого ходу .....                      | 126 |
| 7.12 Вмикання лінії на постійну напругу за індуктивного навантаження .....           | 128 |
| 7.13 Заломлення хвиль в місці спряження двох ліній .....                             | 130 |
| <br>   |     |
| <b>Література</b> .....  | 134 |

## ВСТУП

У зв'язку із збільшенням обсягу самостійної роботи і скороченням лекційних занять в процесі вивчення різних дисциплін виникла необхідність у виданні методичних рекомендацій і посібників, які допомагають здобувачам самостійно вивчати матеріал.

Орієнтування на самостійне вивчення значно змінює методику читання лекцій. Лекції набувають переважно настановчого характеру, наголос робиться на поясненні складних для розуміння місць, надаються рекомендації для методичного вивчення тих або інших розділів тощо. Такий характер читання передбачав обов'язкове попереднє знайомство з матеріалом наступних лекцій.

Під час вивчення курсу головна увага має приділятися розумінню матеріалу, а не запам'ятовуванню, хоча ряд формулювань та формул потрібно знати напам'ять.

В процесі вивчення курсу бажано користуватися кількома підручниками або навчальними посібниками різних авторів, щоб зіставляти різні докази, роздуми і давати їм свою оцінку.

Вивчення курсу «Теоретичні основи електротехніки» потребує знання курсів фізики і особливо математики, передусім розділів:

- ✓ системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- ✓ похідна і інтеграл;
- ✓ диференціальні рівняння;
- ✓ функціональні ряди;
- ✓ інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є;
- ✓ рівняння математичної фізики.

Теоретичні положення курсу засвоюються ґрунтовно тільки тоді, коли вони використані для вирішення конкретних задач. З цією метою в конспекті лекцій наведено ряд розв'язаних прикладів, а також контрольні питання і задачі.

Конспект лекцій написано відповідно до матеріалу другого семестру вивчення курсу теоретичних основ електротехніки здобувачами електротехнічного профілю і є продовженням посібника «Теоретичні основи електротехніки. Ч.1. Конспект лекцій» цього самого автора, що вийшов в світ в 2015 р.

Конспект лекцій складається з восьми розділів, в яких розглянуто перехідні процеси в лінійних та нелінійних колах, методи розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму, електричні кола з розподіленими параметрами.

Під час викладення окремих питань особлива увага зверталася на застосування їх до аналізу прикладних задач. В кінці розділів наводяться приклади та контрольні питання, які допомагають закріпленню матеріалу, що вивчається.

# 1 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

## 1.1 Перехідні процеси в електричних колах, причини виникання. Закони комутації

Електричне коло, до складу якого входять реактивні елементи (ємності та індуктивності), має енергію, накопичену в електричному і магнітному полях. Величина цієї енергії визначається виразами:

$$\text{в електричному полі ємності} \quad W_e = \frac{Cu^2}{2}, \quad (1.1)$$

$$\text{в магнітному полі індуктивності} \quad W_m = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.2)$$

Під час зміни одного усталеного режиму на інший, під впливом яких-небудь перемикачів, змінюється кількість цієї енергії. Оскільки енергія не може змінитися миттєво, то і зміна одного усталеного режиму іншим проходить також протягом деякого часу. Процес переходу від одного усталеного стану кола до іншого називається *перехідним процесом*. Таким чином, основною причиною виникнення перехідного процесу є зміна енергетичного стану кола.

Будь-яку зміну параметрів кола або зовнішніх дій звичайно називають *комутацією*, в розрахунках приймають, що усяка комутація відбувається миттєво. Комутацію будемо зображати за допомогою ключів (замикального – рис. 1.1, а або розмикального – рис. 1.1, б).



Рисунок 1.1

Оскільки енергія електричного та магнітного полів не може змінитися миттєво, то за постійного значення  $L$  та  $C$  не можуть змінитися миттєво струм в індуктивності та напруга на ємності. Звідси отримуємо два закони комутації.

*Перший закон комутації*: струм через індуктивність в перший момент після комутації залишається таким самим, яким він був безпосередньо перед комутацією.

Якщо перший момент часу після комутації будемо позначати  $t=0+$ , а час безпосередньо перед комутацією через  $t=0-$ , то перший закон комутації записується

$$i_{L(0+)} = i_{L(0-)} \quad (1.3)$$

Аналогічно виводиться *другий закон комутації*.

Напруга на ємності в перший момент після комутації дорівнює напрузі на ємності безпосередньо перед комутацією.

$$u_{C(0+)} = u_{C(0-)} \quad (1.4)$$

Практична тривалість перехідних процесів залежить від параметрів кола і в багатьох випадках становить частки секунди. Проте під час перехідних процесів на окремих елементах кола можуть виникати великі напруги або протікати великі струми.

## 1.2 Класичний метод розрахунку перехідних процесів. Вільна та примусова складові розв'язку

Класичний метод розрахунку перехідних процесів являє собою розв'язок системи диференціальних рівнянь, складених за законами Кірхгофа для післякомутаційної схеми. Розглянемо це на прикладі вмикання  $R, L, C$  кола на деяку напругу  $u(t)$  (рис. 1.2).

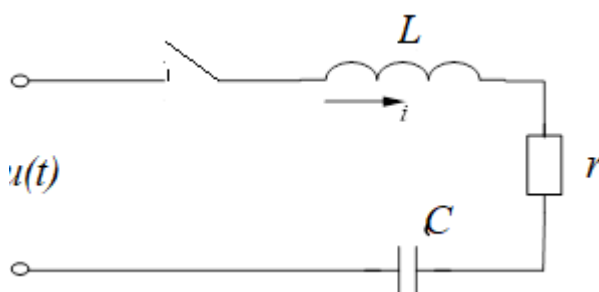


Рисунок 1.2

За другим законом Кірхгофа маємо:

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = u(t) \quad (1.5)$$

Взявши похідну від цього виразу по часу  $t$ , отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно струму  $i$ .

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d}{dt} u(t) \quad (1.6)$$

Лінійне – тому, що коефіцієнти в рівнянні сталі; порядок рівняння визначається порядком старшої похідної (друга); неоднорідне – тому, що права частина рівняння не дорівнює нулю.

З математики відомо, що розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння складається з суми двох розв'язків: загального

та частинного. Загальний розв'язок – це розв'язок однорідного рівняння (в правій частині рівняння нуль). В електротехніці його називають вільною складовою (струму або напруги), оскільки вона не залежить від дії на вході кола. Її звичайно записують у вигляді:

$$i_g = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (1.7)$$

де  $n$  – порядок диференціального рівняння;

$A_k$  – сталі інтегрування, що знаходяться з початкових умов;

$p_k$  – корні характеристичного рівняння.

Характеристичне рівняння складається з однорідного шляхом заміни відповідної похідної  $\frac{d^k i}{dt^k}$  на  $p^k$  (сама величина  $i$  міняється на  $p^0 = 1$ ). Так, для рівняння (1.6) маємо:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0 .$$

Оскільки рівняння квадратне і має два корені –  $p_1$  та  $p_2$ , то вільну складову запишемо у вигляді:

$$i_g = A_1 e^{p_1 t} + A_{12} e^{p_{k2} t} . \quad (1.8)$$

Як частинний розв'язок, в математиці беруть будь-який розв'язок, що задовольняє рівняння та початкові умови. В електротехніці цей розв'язок називають примусовою складовою та приймають за нього новий усталений режим роботи кола. Він виникає в колі під дією вхідної  $u(t)$  та знаходиться шляхом розрахунку нового усталеного режиму роботи кола.

### 1.3 Початкові умови та їх знаходження

Початковими умовами (ПУ) називаються значення струмів, напруг, похідних та інтегралів від них в першу мить після комутації. Початкові умови розділяють на два види : незалежні (НПУ) та залежні (ЗПУ).

До НПУ відносять значення струму в індуктивності та напруги на ємності в першу мить після комутації, які за законами комутації знаходяться з розрахунку докомутаційної схеми.

До ЗПУ відносять всі інші ПУ, крім незалежних. ЗПУ знаходять з системи диференціальних рівнянь, що складені за законами Кірхгофа для після комутаційної схеми, шляхом підстановки в неї НПУ, тобто для моменту часу  $t=0-$ .

Розглянемо приклад розрахунку НПУ та ЗПУ для схеми рис. 1.3. Необхідно знайти НПУб ( $i_{L(0-)} = i_{L(0+)} = i_{L(0)}, u_{C(0-)} = u_{C(0+)} = u_{C(0)}$ ) та

та ЗПУ, а саме:  $i_2(0+)$ ,  $i_3(0+)$  та  $\frac{di_1}{dt}_{0+}$  за умови, що  $E=const$ .

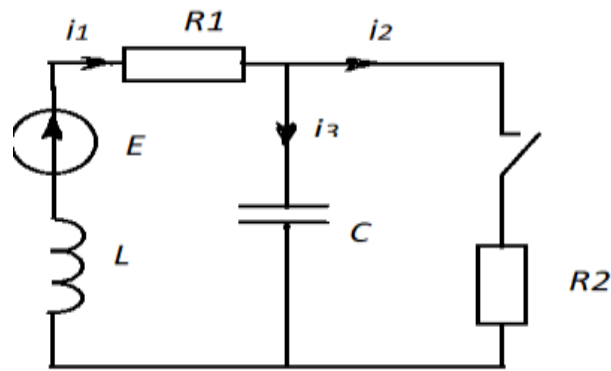


Рисунок 1.3

До комутації струму в колі не було (ємність являє собою розрив для постійного струму, а ключ у третій вітці був розімкнений) саме тому  $i_L(0+) = 0$ , а вся напруга джерела була прикладена до ємності.

Для знаходження ЗПУ складаємо систему рівнянь за законами Кірхгофа для післякомутаційної схеми:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ i_1 R_1 + L \frac{di_1}{dt} + u_C &= E; \\ u_C - i_2 R_2 &= 0. \end{aligned}$$

Розглянемо цю систему рівнянь для  $t=0+$  ( $i_L(0) = i_1(0) = 0$  та  $u_C(0) = E$ , звідки з першого рівняння  $i_2(0) = -i_3(0)$ ).

З третього рівняння маємо  $i_2(0) = u_C(0)/R_2 = E/R_2$ , а  $i_3(0) = -E/R_2$ .

Друге рівняння набуває вигляду:

$$0 + L \frac{di_1(0)}{dt} + E = E, \quad \text{а отже} \quad \frac{di_1(0)}{dt} = 0.$$

#### 1.4 Вмикання кола $R, L$ на постійну напругу

Розглянемо розрахунок перехідного процесу на прикладі (рис. 1.4).

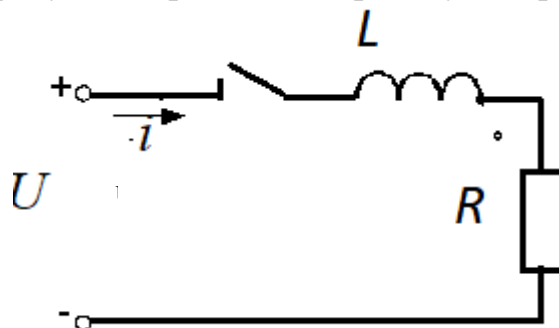


Рисунок 1.4

Під час замикання ключа в колі виникає перехідний процес, оскільки коло переходить із одного усталеного режиму в інший. Під час перехідного процесу струми і напруги в колі змінюються залежно від часу, тому складаючи рівняння, яке описує процес в колі, використаємо другий закон Кірхгофа з урахуванням компонентних співвідношень.

$$L \frac{di}{dt} + ri = U. \quad (1.9)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох складових – з вільної та примусової.

Таким чином

$$i = i_{np} + i_{\vartheta}. \quad (1.10)$$

Для визначення  $i_{\vartheta}$  однорідне рівняння (1.10) має вигляд:

$$L \frac{di_{\vartheta}}{dt} + ri_{\vartheta} = 0.$$

Його розв'язок

$$i_{\vartheta} = Ae^{pt}, \quad (1.11)$$

де  $p$  – корінь характеристичного рівняння

$$Lp + r = 0, \quad p = -\frac{r}{L}, \quad (1.12)$$

$A$  – стала інтегрування.

Оскільки права частина рівняння (1.9) є величина постійна, то примусова складова теж постійна.

$$i_{np} = I. \quad (1.13)$$

Підставляючи (1.13) в (1.9), одержуємо

$$L \frac{dI}{dt} + rI = U$$

або  $rI = U$ , тому що в новому усталеному режимі  $\frac{dI}{dt} = 0$ . Звідси

$$i_{np} = I = \frac{U}{r}. \quad (1.14)$$

Неважко бачити, що примусова складова є струм в новому усталеному режимі. Тому звичайно числові значення цієї складової і визначаються з розрахунку нового усталеного режиму.

Повний розв'язок рівняння (1.9) має вигляд

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (1.15)$$

Для визначення сталої інтегрування використаємо початкові умови. Знайдемо значення струму в момент часу  $t=0+$ , використавши перший закон комутації. До комутації струму в колі не було  $i_{L(0-)}=0$  (ключ розімкнутий), а згідно з першим законом комутації

$$i_{L(0-)}=i_{L(0+)}=0. \quad (1.16)$$

Підставляючи (1.16) в (1.15), одержуємо:

$$0 = A + \frac{U}{R} \Rightarrow A = -\frac{U}{R}. \quad (1.17)$$

Таким чином

$$i = -\frac{U}{r}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R} \quad \text{або} \quad i = \frac{U}{r}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (1.18)$$

Графіки зміни струму через індуктивність показано на рис. 1.5.

Примусова складова на графіку має вигляд прямої лінії, а вільна складова – експоненти. Повний розв'язок теж являє собою експоненту, яка починається з нуля і асимптотично наближається до усталеного значення.

Коефіцієнт при  $t$  в показнику експоненти має розмірність  $1/c$ , тому обернена величина має розмірність часу, позначається буквою  $\tau$  і називається *сталюю часу*.

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r}, \quad (1.19)$$

Стала часу залежить від параметрів кола і характеризує тривалість перехідного процесу

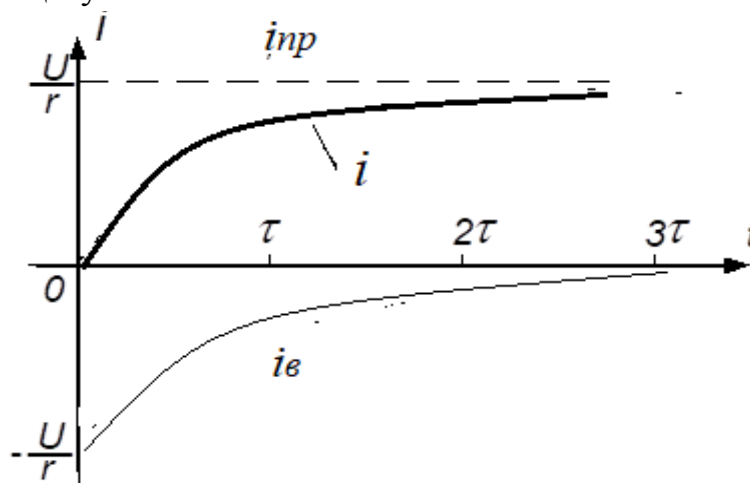


Рисунок 1.5

Не дивлячись на те, що теоретично перехідний процес триває нескінченно довго (тільки за  $t \rightarrow \infty$  вільна складова наближається до нуля),

можна вважати, що перехідний процес практично закінчується, коли вільна складова стає меншою 1% від усталеного значення. Тому практично тривалість перехідного процесу приймають

$$t_{n.np.} = (4 \div 5)\tau. \quad (1.20)$$

Якщо  $L = 0,5$  Гн,  $r = 10$  Ом, то  $\tau = \frac{0,5}{10} = 0,05$  с і  $t_{n.np.} = 0,2 \div 0,25$  с.

### 1.5 Вмикання кола $R, C$ на постійну напругу

Складемо рівняння для кола з послідовно з'єднаними  $r$  і  $C$  у випадку вмикання на постійну напругу (рис. 1.6).

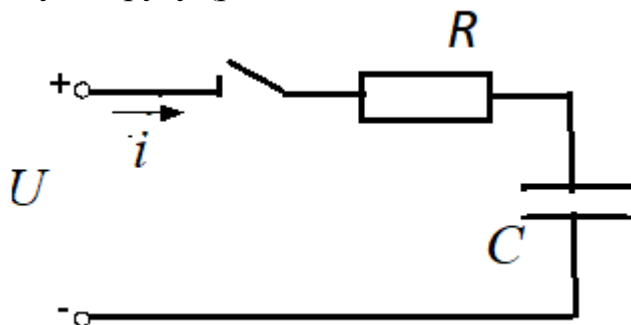


Рисунок 1.6

$$ri + u_c = U, \quad (1.21)$$

враховуючи що

$$i = C \frac{du_c}{dt}, \quad (1.22)$$

отримаємо (1.21) в вигляді

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c = U. \quad (1.23)$$

Повний розв'язок рівняння (1.23)

$$u_c = u_{c.np.} + u_{c\beta}.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо

$$u_{c.np.} = U.$$

Вільна складова розв'язку диференціального рівняння першого порядку

$$u_{c\beta} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$rCp + 1 = 0. \quad (1.24)$$

Звідси

$$p = -\frac{1}{rC}, \quad \tau = \frac{1}{|p|} = rC. \quad (1.25)$$

Повний розв'язок

$$u_c = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.26)$$

Сталу інтегрування  $A$  знаходимо, використовуючи початкові умови. Відповідно до закону комутації

$$u_{c(0-)} = u_{c(0+)},$$

тому

$$u_{c(0-)} = U + A \quad \text{і} \quad A = u_{c(0-)} - U. \quad (1.27)$$

Якщо до комутації конденсатор не був заряджений, то

$$u_{c(0-)} = 0 \quad \text{і} \quad A = -U. \quad (1.28)$$

Остаточний повний розв'язок

$$u_c = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1.29)$$

Для визначення закону зміни струму використаємо співвідношення (1.22):

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.30)$$

Графіки зміни струму і напруги на ємності мають вигляд, показаний на рис. 1.7.

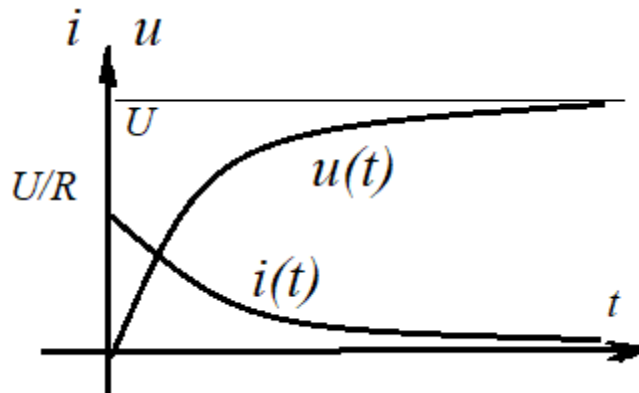


Рисунок 1.7

Із графіків видно, що  $u_c$  в момент комутації нерозривна лінія, а  $i$  змінюється стрибком від нуля до величини  $U/r$ .

В наведених прикладах початкові значення  $i_L$  і  $u_c$  дорівнювали нулю. Такі початкові значення називають нульовими. Розглянемо випадок, коли початкові умови не нульові.

### 1.6 Відключення котушки $R, L$ від джерела постійної напруги

В наведеному колі (рис. 1.8) до комутації струм через вольтметр протікав від точки  $a$  до точки  $b$  і дорівнював  $i_0 = \frac{U}{r_0}$ .

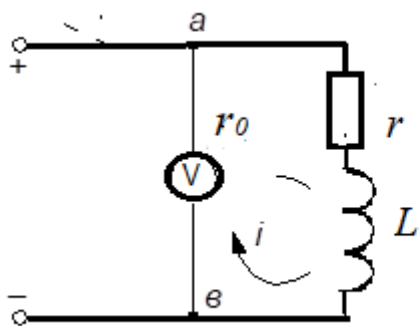


Рисунок 1.8

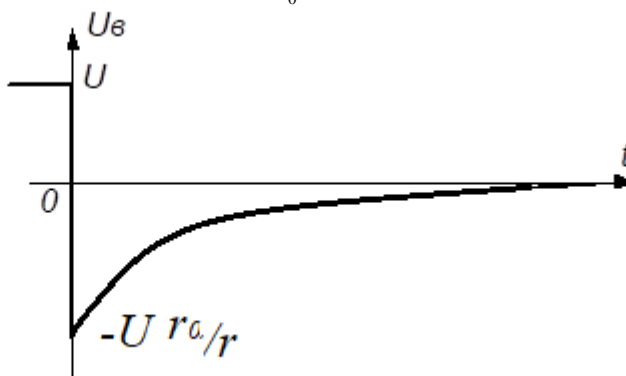


Рисунок 1.9

Напруга на вольтметрі дорівнювала прикладеній напрузі

$$u_{b(0-)} = U. \quad (1.31)$$

Струм в вітці з котушкою до комутації протікав також від точки  $a$  до точки  $b$  і визначався з виразу

$$i_{(0-)} = \frac{U}{r}. \quad (1.32)$$

Після комутації струм протікає через контур, який складається із послідовно з'єднаних  $r, L, r_0$ , а рівняння, яке описує процеси в цьому контурі, має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + (r + r_0) \cdot i = 0. \quad (1.33)$$

Повний розв'язок цього рівняння складається тільки із вільної складової, тому що диференціальне рівняння є однорідним (права частина дорівнює нулю) і струм в новому усталеному режимі відсутній. Тому

$$i_{np} = 0, \quad i = i_{\varrho} = Ae^{pt}. \quad (1.34)$$

Характеристичне рівняння  $Lp + r + r_0 = 0$

звідси 
$$p = -\frac{r + r_0}{L}; \quad \tau = \frac{L}{r + r_0}. \quad (1.35)$$

Стала інтегрування визначається за допомогою початкових умов

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)} = \frac{U}{r}. \quad \text{звідки} \quad A = \frac{U}{r}$$

і повний розв'язок

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.36)$$

Знайдемо як змінюється напруга на вольтметрі. Оскільки після комутації струм через вольтметр направлений від точки *b* до точки *a*, то

$$u_{\epsilon} = -ir_0 = -U \frac{r_0}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.37)$$

Якщо  $r_0$  більше  $r$ , то в перший момент після комутації напруга на вольтметрі може значно перевищувати прикладену напругу і до того ж направлена в протилежну сторону, що може призвести до пошкодження приладу. Графік зміни напруги на вольтметрі показано на рис. 1.9.

### 1.7 Вмикання кола $R, L$ на синусоїдну напругу

Розглянемо послідовне з'єднання елементів  $r, L$  (рис. 1.4) за умови вмикання кола на синусоїдну напругу

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.38)$$

В рівнянні (1.9) ліва частина залишається без змін, а права частина буде синусоїдною функцією

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (1.39)$$

Повний розв'язок – сума примусової і вільної складових

$$i = i_{np} + i_{\theta}.$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. В усталеному режимі струм також синусоїдний

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \beta + \varphi), \quad (1.40)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}.$$

Вільна складова, як розв'язок однорідного рівняння, має такий самий вигляд, як і (1.11)

$$i_{\theta} = Ae^{pt}, \text{ де } p = -\frac{r}{L}.$$

Повний розв'язок

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) + Ae^{\frac{t}{\tau}}. \quad (1.41)$$

Оскільки початкові умови нульові (струму до комутації в колі не було)

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)} = 0,$$

то

$$i = I_m \sin(\beta - \varphi) + A \quad \text{і} \quad A = -I_m \sin(\beta - \varphi).$$

Остаточно

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) - I_m \sin(\beta - \varphi) Ae^{\frac{t}{\tau}}. \quad (1.42)$$

Розглянемо графік зміни струму в колі (рис. 1.4) з великою сталою часу  $\tau \gg T$ .

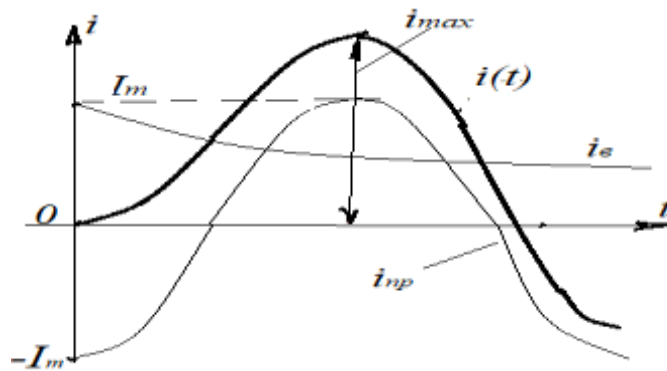


Рисунок 1.10

Якщо коло вмикається в момент, коли примусова складова  $i_{np} = -I_m$  (як показано на рис. 1.10), то максимальне значення струму в перехідному режимі  $i_{max}$  може бути більше амплітуди струму в усталеному режимі майже в 2 рази.

Таким чином, якщо за вмикання кола  $r, L$  на постійну напругу перехідний струм не перебільшує усталеного значення (рис. 1.4), то за вмикання того самого кола на синусоїдну напругу перехідний струм може бути більшим усталеного значення.

Розглянемо вплив моменту вмикання на характер перехідного процесу за синусоїдного впливу, якщо комутація відбувається в момент, коли  $i_{np}$  близький до нуля. В цьому випадку вільна складова в момент  $t=0$ :  $i_{e(0+)} = -i_{np(0+)}$ , також близька до нуля і перехідний струм мало відрізняється від усталеного.

Якщо ключ замикається в момент, коли примусова складова струму проходить через нуль, то вільна складова також дорівнює нулю, тому що  $i_{e(0+)} = -i_{np(0+)} = 0$  і в колі зразу ж настає новий усталений режим.

Отже, за вмикання кола на синусоїдну напругу характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання кола. Найбільш сприятливий момент вмикання, коли примусова складова проходить через нуль, найбільш несприятливий момент вмикання, коли примусовий струм набуває максимального значення.

### 1.8 Перехідні процеси в розгалужених колах першого порядку

Наведені вище приклади дозволяють сформулювати суть класичного методу розрахунку – складання диференціального рівняння відносно шуканої величини і його розв’язок з урахуванням початкових умов. Якщо коло розгалужене (рис. 1.11), то спочатку складається за законами Кірхгофа система диференціальних рівнянь

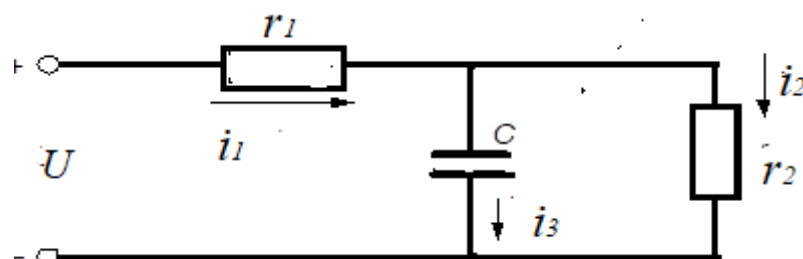


Рисунок 1.11

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + u_c &= U, \\ u_c - r_2 i_2 &= 0, \\ i_1 &= i_2 + i_3, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Із цієї системи будемо складати одне диференціальне рівняння відносно невідомої напруги  $u_c$ , оскільки для неї існує другий закон комутації. Для цього виразимо інші невідомі через  $u_c$  відповідно із першого, другого і четвертого рівнянь системи

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{U - u_c}{r_1}, \\ i_2 &= \frac{u_c}{r_2}, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Підставимо одержані значення  $i_1, i_2, i_3$ , в третє рівняння системи (1.43)

$$\frac{U - u_c}{r_1} = \frac{u_c}{r_2} + C \frac{du_c}{dt}.$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$Cr_1 r_2 \frac{du_c}{dt} + u_c (r_1 + r_2) = Ur_2. \quad (1.45)$$

Розв'язок рівняння (1.45) складається із сукупності примусової і вільної складових

$$u_c = u_{cnp} + u_{cv}.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо примусову складову

$$u_{cnp} = \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot r_2. \quad (1.46)$$

Оскільки одержане диференціальне рівняння є рівнянням першого

порядку, то

$$u_{c\epsilon} = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$p \cdot Cr_1r_2 + (r_1 + r_2) = 0.$$

і його корінь

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}.$$

Повний розв'язок рівняння

$$u_c = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + A \cdot e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}t}. \quad (1.47)$$

Сталу інтегрування визначають за допомогою початкових умов. До замикання ключа струму в колі не було ( $i_{(0-)}=0$ ), тому що до кола прикладена постійна напруга і коло складається із послідовно з'єднаних елементів  $r_1$  і  $C$ .

За другим законом Кірхгофа

$$r_1 i_{(0-)} + u_{c(0-)} = U \quad (1.48)$$

і

$$u_{c(0-)} = U.$$

Згідно з другим законом комутації

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = U.$$

Підставляючи (1.44) в (1.43), одержуємо

$$U = \frac{Ur_2}{r_1 + r_2} + A.$$

Звідси  $A = \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot r_1$

і остаточно

$$u_c = \frac{U}{r_1 + r_2} r_2 + \frac{U}{r_1 + r_2} r_1 \cdot e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}t}. \quad (1.49)$$

Співвідношення (1.44) дозволяють знайти будь-який струм.

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{U - u_c}{r_1} = \frac{U}{r_1 + r_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}, \\ i_2 &= \frac{u_c}{r_2} = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{U}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt} = -\frac{U}{r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

В цьому прикладі перед тим, як визначити струми, був знайдений закон зміни напруги на ємності. Проте часто необхідно знати тільки один який-небудь струм. В цьому випадку визначення напруги на ємності стає зайвим, тому потрібно спробувати визначити зразу шуканий струм.

Нехай потрібно знайти струм  $i_1$ , не визначаючи напругу  $u_c$ . Виразимо з системи (1.44) всі невідомі через  $i_1$ . Із першого рівняння системи

$$u_c = U - r_1 i_1.$$

Із другого рівняння

$$i_2 = \frac{U}{r_2} - i_1 \frac{r_1}{r_2};$$

Із четвертого рівняння

$$i_3 = -Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Підставимо одержані значення в третє рівняння

$$i_1 = \frac{U}{r_2} - i_1 \frac{r_1}{r_2} - Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Після перетворень отримуємо рівняння:

$$Cr_1 r_2 \frac{di_1}{dt} + (r_1 + r_2) i_1 = U. \quad (1.51)$$

Повний розв'язок якого

$$i_1 = i_{1np} + i_{1\beta}.$$

Із розрахунку нового усталеного режиму

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Вільна складова

$$i_g = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Cr_1r_2p + (r_1 + r_2) = 0,$$

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2C}$$

і

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} + Ae^{-\frac{r_1+r_2}{r_1r_2C}t} \quad (1.52)$$

Для визначення сталої інтегрування необхідно знайти залежні початкові умови.

Для їх визначення використовується початкова система рівнянь (1.43), яка записується для моменту  $t=0+$  і доповнена законами комутації.

Система рівнянь (1.43) для моменту часу  $t=0+$  має вигляд:

$$r_1 i_{1(0+)} + u_{c(0+)} = U,$$

$$u_{c(0+)} - r_2 i_{2(0+)} = 0,$$

$$i_{1(0+)} = i_{2(0+)} + i_{3(0+)},$$

$$i_{3(0+)} = C \frac{du_c}{dt}(0+).$$

(1.43, a)

Другий закон комутації

$$u_{c(0+)} = u_{c(0-)} = U.$$

Із першого рівняння системи (1.43, a)

$$i_{1(0+)} = \frac{U - u_{c(0+)}}{r_1} = \frac{U - U}{r_1} = 0.$$

Підставляючи одержане початкове значення  $i_{1(0+)}$  в (1.52), одержуємо

$$0 = \frac{U}{r_1 + r_2} + A, \quad \text{звідки} \quad A = -\frac{U}{r_1 + r_2}$$

i

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t}.$$

### 1.9 Вмикання послідовно з'єднаних елементів $r$ , $L$ , $C$ до джерела постійної напруги

Складемо за другим законом Кірхгофа рівняння для кола, зображеного на рисунку 1.12.

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_c = U. \quad (1.53)$$

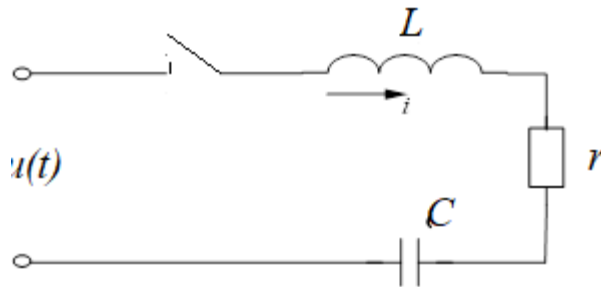


Рисунок 1.12

Оскільки  $i = C \frac{du_c}{dt}$ , то рівняння (1.53) набуде вигляду

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + rC \frac{du_c}{dt} + u_c = U. \quad (1.54)$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Повний розв'язок  $i$  в цьому випадку складається із примусової і вільної складових.

$$u_c = u_{cnp} + u_{cv}.$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму, тому  $u_{cnp} = U$ .

Вільна складова записується залежно від коренів характеристичного рівняння, яке має вигляд:

$$LCp^2 + rCp + 1 = 0. \quad (1.55)$$

Звідси одержуємо два корені цього рівняння

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (1.56)$$

Залежно від параметрів можуть бути три види коренів характеристичного рівняння.

1. Якщо  $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ , то корені будуть комплексні спряжені, які звичайно записують у вигляді

$$p_{1,2} = \alpha + j\omega. \quad (1.57)$$

Вільна складова в цьому випадку має вигляд

$$u_B = A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t. \quad (1.58)$$

2. Якщо  $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$ , то корені дійсні різні і вільна складова має вигляд

$$u_B = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.59)$$

3. Якщо  $\frac{r^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ , то корені рівні ( $p_1 = p_2 = p$ ) і вільна складова має вигляд

$$u_B = (A_1 t + A_2) e^{pt}. \quad (1.60)$$

Потрібно відзначити, що корні характеристичного рівняння (або дійсна частина комплексних коренів) мають бути від'ємними.

Припустимо, що має місце перший випадок (випадок комплексних спряжених коренів), тоді повний розв'язок

$$u_C = U + A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t \quad (1.61)$$

має дві сталі інтегрування і для їх визначення необхідно мати дві початкові умови. Першу початкову умову визначимо з другого закону комутації. Вважаючи, що до замикання ключа конденсатор не був зарядженим, одержуємо

$$u_{C(0+)} = u_{C(0-)} = 0. \quad (1.62)$$

Підставляючи (1.62) в (1.61) для  $t=0$  маємо

$$A_1 = -U. \quad (1.63)$$

Друга початкова умова визначається із першого закону комутації

$$i_{(0+)} = i_{(0-)} = 0, \quad (1.64)$$

тому що до комутації струму в колі не було. Щоб скористатися другою початковою умовою, потрібно визначити струм  $i$  через постійні інтегрування  $A_1$  і  $A_2$ . Оскільки  $i = C \frac{du_c}{dt}$  то

$$i = C(\alpha A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t - \omega A_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + \alpha A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t + \omega A_2 e^{\alpha t} \cos \omega t) \quad (1.65)$$

Підставляючи значення  $i_{(0)}$  за  $t=0$ , одержуємо

$$0 = C(\alpha A_1 + \omega A_2)$$

звідси 
$$A_2 = -\frac{\alpha}{\omega} A_1 = \frac{\alpha}{\omega} U \quad (1.66)$$

Таким чином, повний розв'язок

$$u_c = U - e^{\alpha t} \left( U \cos \omega t - \frac{\alpha}{\omega} U \sin \omega t \right)$$

або

$$u_c = U - A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \gamma) \quad (1.67)$$

де

$$A = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\omega^2} U^2 + U^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\frac{\omega}{\alpha}.$$

Розглянемо докладно характер зміни вільної складової

$$u_B = -A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \gamma) \quad (1.68)$$

З виразу (1.68) видно, що вільна складова є синусоїдою, що згасає, з частотою коливань  $\omega_0$  і змінною амплітудою  $A e^{\alpha t}$ .

Стала часу кола  $\tau = \frac{1}{|\alpha|}$ , а період коливань  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Графік зміни вільної складової показано на рис. 1.13.

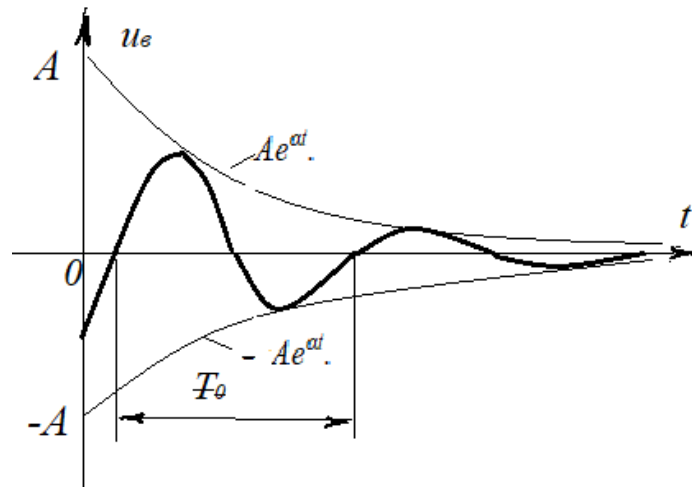


Рисунок 1.13

Оскільки вільна складова наближається до нуля, коливаючись біля нульового значення, то такий режим перехідного процесу називається *коливальним*.

В другому випадку, якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, повний розв'язок записується у вигляді

$$u_c = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.69)$$

Використовуючи першу початкову умову (1.62), одержуємо

$$0 = U + A_1 + A_2.$$

Виражаючи струм  $i$  через  $u_c$ , одержуємо

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C [A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}] \quad (1.70)$$

і, використовуючи другу початкову умову (1.60), маємо

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (1.71)$$

Розв'язуючи разом рівняння (1.70) і (1.71), одержимо

$$A_1 = \frac{U p_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{U p_1}{p_1 - p_2} \quad (1.72)$$

і повний розв'язок буде

$$u_c = U + \frac{Up_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{Up_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (1.73)$$

Графік зміни вільної складової для  $|p_1| > |p_2|$  зображений на рис. 1.14.

В цьому випадку вільна складова наближається до нуля асимптотично, не коливаючись, тому такий режим перехідного процесу називається *апериодичним*. Практична тривалість перехідного процесу в цьому випадку визначається за більшим значенням  $\tau$ .

Якщо  $|p_1| > |p_2|$ ,  $\frac{1}{|p_1|} < \frac{1}{|p_2|}$ , то  $\tau_2 > \tau_1$  і  $t_{н.пр} = (4 \div 5)\tau_2$ .

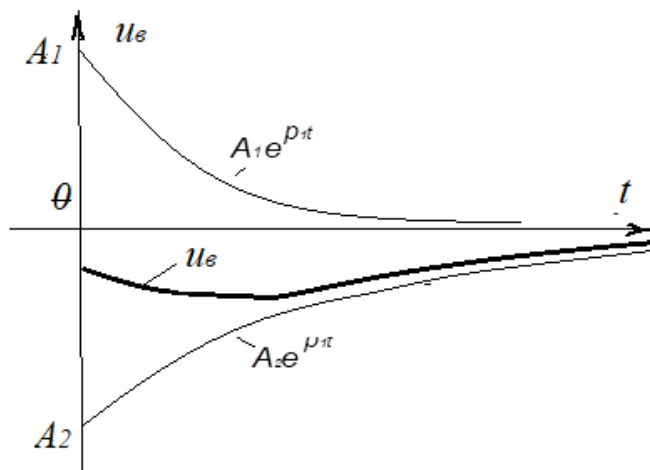


Рисунок 1.14

В третьому випадку, тобто коли корені характеристичного рівняння дійсні рівні (корені кратні), повний розв'язок рівняння (1.54) має вигляд

$$u_c = U + (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (1.74)$$

Підставляючи першу початкову умову, одержуємо

$$0 = U + A_1; \quad A_1 = -U. \quad (1.75)$$

Виразимо струм через сталі інтегрування

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C [p(A_1 + A_2 t)e^{pt} + A_2 e^{pt}]$$

і підставимо другу початкову умову (1.64)

$$0 = C(pA_1 + A_2); \quad A_2 = -pA_1 = pU. \quad (1.76)$$

Остаточно

$$u_c = U + (-U + pUt)e^{pt}. \quad (1.77)$$

Графік зміни вільної складової показано на рис. 1.15.

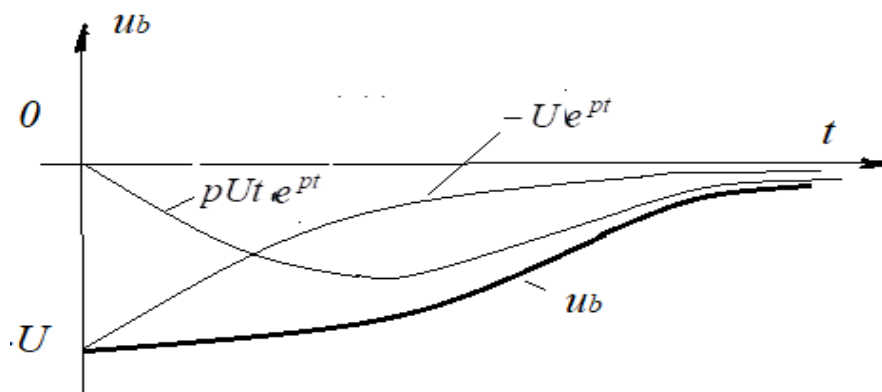


Рисунок 1.15

### 1.10 Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом в розгалужених колах

Для розрахунку перехідних процесів в складних розгалужених колах складається за законами Кірхгофа для миттєвих значень система диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану.

Після цього одержану систему зводять до одного диференціального рівняння відносно однієї невідомої. Повний розв'язок цього диференціального рівняння складається із двох частин: примусової і вільної складових. Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. Якщо дія (прикладена напруга) постійна, то і примусова складова постійна, якщо дія синусоїдна, то примусова складова також синусоїдна і визначається комплексним методом.

Вид вільної складової записується залежно від виду коренів характеристичного рівняння. Число коренів дорівнює порядку диференціального рівняння.

Нехай, наприклад, диференціальне рівняння має вигляд

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t), \quad (1.78)$$

де  $x$  – шукана величина,

$n$  – порядок диференціального рівняння,

$f(t)$  – зовнішня дія.

Характеристичне рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.79)$$

Якщо всі корені дійсні різні, то вільна складова записується як сума експонент.

$$x_{\text{в}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{K=1}^n A_K e^{p_K t}. \quad (1.80)$$

Повний розв'язок

$$x = x_{\text{нр}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}.$$

Сталі інтегрування визначаються за допомогою початкових умов. Часто як початкові умови використовують  $n$  залежних початкових умов:

$$u_{\text{в}} = A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t,$$

які визначаються, як відмічалось раніше, із системи рівнянь, записаної для  $t = 0+$  і доповненої законами комутації.

Якщо частина коренів комплексно-спряжена, наприклад,

$$p_{2,3} = \alpha_1 \pm j\omega_1, \quad p_{4,5} = \alpha_2 \pm j\omega_2,$$

то вільна складова має вигляд:

$$x_{\text{в}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t + A_3 e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t + A_4 e^{\alpha_2 t} \cos \omega_2 t + A_5 e^{\alpha_2 t} \sin \omega_2 t + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.81)$$

Якщо є корені кратні (наприклад,  $p_2 = p_3 = p'$ ,  $p_4 = p_5 = p''$ ), то

$$x_{\text{в}} = A_1 e^{p_1 t} + (A_2 + A_3 t) e^{p' t} + (A_4 + A_5 t) e^{p'' t} + A_6 e^{p_6 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.82)$$

Необхідно відмітити, що в лінійних електричних колах з постійними параметрами без зворотних зв'язків дійсні частини коренів характеристичного рівняння від'ємні, тому з часом вільна складова прямує

до нуля.

### Приклад 1.1

Визначити закони зміни вхідного струму ( $i_1$ ) за розмикання ключа (рис. 1.16).

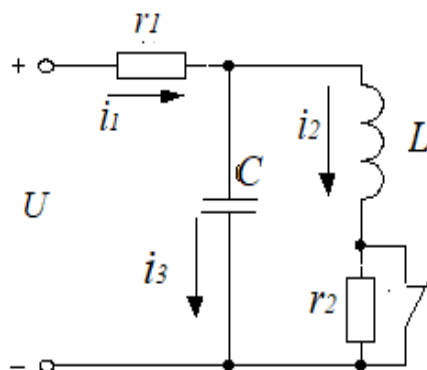


Рисунок 1.16

Складаємо за законами Кірхгофа систему диференціальних рівнянь для післякомутаційного стану кола (ключ розімкнутий)

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + u_c &= U, \\ L \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 - u_c &= 0, \\ i_1 &= i_2 + i_3, \\ i_3 &= C \frac{du_c}{dt}. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Зведемо систему (1.83) до одного диференціального рівняння відносно невідомого струму  $i_1$ , виражаючи всі інші невідомі через  $i_1$ .

Із першого рівняння системи

$$u_c = U - r_1 i_1,$$

із четвертого рівняння

$$i_3 = -Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Із третього рівняння

$$i_2 = i_1 - i_3 = i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Підставляючи одержані значення в друге рівняння одержимо

$$L \frac{d\left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right)}{dt} + r_2 \left(i_1 + Cr_1 \frac{di_1}{dt}\right) - U + i_1 r_1 = 0,$$

або

$$LCr_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (L + Cr_1 r_2) \frac{di_1}{dt} + (r_1 + r_2) i_1 = U. \quad (1.84)$$

Одержане диференціальне рівняння є неоднорідним рівнянням другого порядку. Повний розв'язок цього рівняння

$$i_1 = i_{1np} + i_{1в}. \quad (1.85)$$

Примусова складова визначається із розрахунку нового усталеного режиму. В новому усталеному режимі ключ розімкнутий, за прикладеної постійної напруги в усталеному режимі струм через конденсатор не протікає, тому

$$i_{1np} = \frac{U}{r_1 + r_2}. \quad (1.86)$$

Характеристичне рівняння

$$LCr_1 p^2 + (L + Cr_1 r_2) p + r_1 + r_2 = 0.$$

Нехай його корені будуть комплексні спряжені  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ , тоді

$$i_{1в} = A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t. \quad (1.87)$$

Повний розв'язок

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} + A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t. \quad (1.88)$$

Для визначення сталих інтегрування знайдемо початкові умови  $i_{1(0+)}$ ,  $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+}$ . Оскільки ці початкові умови залежні, то отримаємо систему рівнянь (1.79) для  $t=0+$  і доповнимо її законами комутації

$$\begin{aligned}
r_1 i_{1(0+)} + u_{(0+)} &= U, \\
L \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0+} + r_2 i_{2(0+)} - u_{c(0+)} &= 0, \\
i_{1(0+)} &= i_{2(0+)} + i_{3(0+)}, \\
i_{3(0+)} &= C \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0+}.
\end{aligned} \tag{1.83, a}$$

Закони комутації

$$\begin{aligned}
i_{2(0+)} &= i_{2(0-)}, \\
u_{c(0+)} &= u_{c(0-)}.
\end{aligned}$$

Значення  $i_{2(0-)}$  і  $u_{c(0-)}$  визначаються із розрахунку усталеного режиму до комутації, тому

$$\begin{aligned}
i_{2(0+)} = i_{2(0-)} &= \frac{U}{r_1}, \\
u_{c(0+)} = u_{c(0-)} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Із першого рівняння системи (1.83, а) визначаємо  $i_{1(0+)}$ .

$$i_{1(0+)} = \frac{U - u_{c(0+)}}{r_1} = \frac{U}{r_1}. \tag{1.90}$$

Із третього рівняння системи (1.83, а)

$$i_{3(0+)} = i_{1(0+)} - i_{2(0+)} = \frac{U}{r_1} - \frac{U}{r_1} = 0. \tag{1.91}$$

Із четвертого рівняння системи (1.83)

$$\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0+} = \frac{i_{3(0+)}}{C} = 0. \tag{1.92}$$

Проінтегруємо перше рівняння системи (1.83)

$$r_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0.$$

і розглянемо його для  $t=0+$

$$r_1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0+} + \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0+} = 0$$

або

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} = -\frac{1}{r_1} \cdot \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0+}.$$

Враховуючи (1.92), одержуємо

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0+} = 0. \quad (1.93)$$

Таким чином необхідні початкові умови визначаються виразами (1.90) і (1.93). Підставляючи (1.86) в (1.84), одержуємо

$$\frac{U}{r_1} = \frac{U}{r_1 + r_2} + A_1, \quad A_1 = \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)}. \quad (1.94)$$

Продиференціюємо (1.88) і підставимо туди (1.93)

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} = & (\alpha A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t - \omega A_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + \\ & + \alpha A_2 e^{\alpha t} \sin \omega t + \omega A_2 e^{\alpha t} \cos \omega t) \end{aligned}$$

$$0 = (\alpha A_1 + \omega A_2.$$

Звідси

$$A_2 = -\frac{\alpha}{\omega} A_1 = -\frac{\alpha}{\omega} \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)}. \quad (1.95)$$

Остаточний розв'язок

$$i_1 = \frac{U}{(r_1 + r_2)} - \frac{Ur_2}{r_1(r_1 + r_2)} e^{\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t \right). \quad (1.96)$$

## 1.11 Складання характеристичних рівнянь

Диференціальне рівняння відносно однієї невідомої необхідне для того, щоб одержати характеристичне рівняння. В багатьох випадках характеристичне рівняння можна одержати більш простим шляхом.

Розглянемо два способи складання характеристичних рівнянь.

### 1. Метод алгебризації диференціальних рівнянь

Розглянемо цей метод на прикладі конкретного кола (рис. 1.17). Складемо за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану систему диференціальних рівнянь.

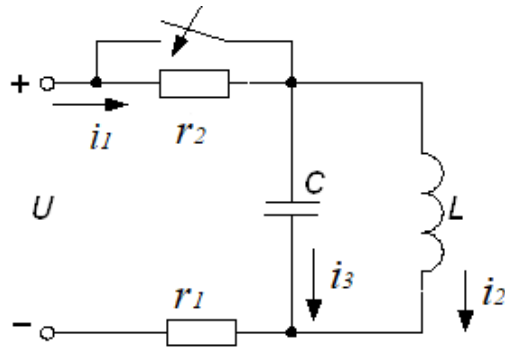


Рисунок 1.17

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt &= U, \\ L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Повний розв'язок для будь-якої змінної, як відомо, складається із примусової і вільної складових. Вільна складова залежить від параметрів кола і не залежить від зовнішньої дії. Тому, якщо вважати зовнішню дію відсутньою, то система (1.97) буде справедлива тільки для вільних складових, тобто

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1\epsilon} + \frac{1}{C} \int i_{3\epsilon} dt &= 0, \\ L \frac{di_{2\epsilon}}{dt} - \frac{1}{C} \int i_{3\epsilon} dt &= 0, \\ i_{1\epsilon} - i_{2\epsilon} - i_{3\epsilon} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.97, a)$$

Вільна складова складається із суми членів виду  $Ae^{pt}$ . Неважко бачити, що

$$\frac{di_{\epsilon}}{dt} = Ape^{pt} = p \cdot i_{\epsilon},$$

а

$$\int i_{\epsilon} dt = \frac{1}{p} Ae^{pt} = \frac{i_{\epsilon}}{p}.$$

Враховуючи одержані співвідношення, система (1.97, а) запишеться в вигляді

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{1\beta} + \frac{1}{Cp} i_{3\beta} &= 0, \\ Lp i_{2\beta} - \frac{1}{Cp} i_{3\beta} &= 0, \\ i_{1\beta} - i_{2\beta} - i_{3\beta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.97, \text{б})$$

Одержали однорідну лінійну алгебраїчну систему рівнянь, Відомо, що однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок, якщо визначник системи дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{Cp} \\ 0 & Lp & -\frac{1}{Cp} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{aligned} -r_1 Lp - \frac{L}{C} - \frac{r_1}{Cp} &= 0, \\ r_1 CLp^2 + Lp + r_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Одержаний вираз (1.98) і є характеристичним рівнянням.

2. *Метод вхідного опору*

3.

Припустимо, що до схеми (рис. 1.18) після комутації прикладена синусоїдна напруга і відповідно в вітках кола протікають синусоїдні струми.

Запишемо в комплексній формі рівняння за законами Кірхгофа.

$$\left. \begin{aligned} r_1 \underline{I}_1 + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_3 &= \underline{U}, \\ j\omega L \underline{I}_2 - \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_3 &= 0, \\ \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.99)$$

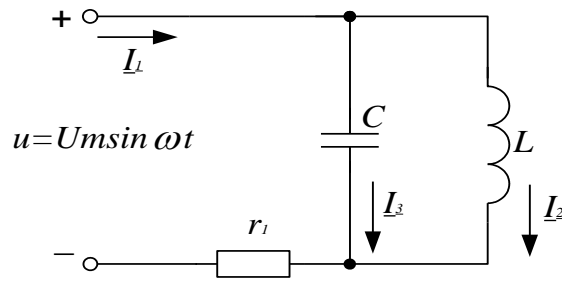


Рисунок 1.18

Знайдемо вхідний опір кола за синусоїдної дії

$$Z_{ex}(j\omega) = \frac{U}{I_1}. \quad (1.100)$$

Струм  $I_1$  знайдемо із системи (1.99) за правилом Крамера, тобто

$$I_1 = \frac{\Delta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)}, \quad (1.101)$$

де

$$\Delta(j\omega) = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ +1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (1.102)$$

$$\Delta_1(j\omega) = \begin{vmatrix} \underline{U} & 0 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{U} \Delta_{11}(j\omega), \quad (1.103)$$

де

$$\Delta_{11}(j\omega) = \begin{vmatrix} j\omega L & -\frac{1}{j\omega C} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Підставимо одержане значення  $\Delta(j\omega)$ ,  $\Delta_{11}(j\omega)$  в (1.97), а після в (1.100), тоді

$$Z_{\theta x}(j\omega) = \frac{\Delta(j\omega)}{\Delta_{11}(j\omega)}. \quad (1.104)$$

Позначимо  $j\omega = p$  і підставимо його в (1.100)

$$Z_{\theta x}(p) = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 0 & \frac{1}{pC} \\ 0 & pL & -\frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pL & -\frac{1}{pC} \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} \quad (1.105)$$

Із (1.105) видно, що визначник в чисельнику  $Z_{\theta x}(p)$  є визначником алгебрізованої системи (1.97, б), прирівнюючи який до нуля, одержують характеристичне рівняння. Таким чином, умова  $Z_{\theta x}(p) = 0$  дає можливість одержати характеристичне рівняння.

### Приклад 1.2

Визначити характеристичне рівняння за допомогою методу вхідного опору для кола, зображеного на рис. 1.14.

Запишемо вхідний опір цього кола за синусоїдної напруги для післякомутаційного стану.

$$Z_{\theta x}(j\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{r_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Замінімо  $j\omega$  на  $p$ , тоді

$$Z_{\theta x}(p) = r_1 + \frac{(r_2 + pL) \frac{1}{pC}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}}.$$

Після перетворень

$$Z_{\theta x}(p) = r_1 + \frac{r_2 + pL}{Lcp^2 + r_2Cp + 1} = \frac{Lcr_1p^2 + (r_1r_2C + L)p + (r_1 + r_2)}{Lcp^2 + r_2Cp + 1}.$$

Прирівнюючи  $Z_{\theta x}(p)$  до нуля, одержуємо характеристичне рівняння

$$LCr_1p^2 + (r_1r_2C + L)p + r_1 + r_2 = 0. \quad (1.106)$$

### Контрольні питання та вправи

1. Які причини виникнення перехідних процесів?
2. Наведіть закони комутації.
3. Як визначається примусова складова?
4. Який вигляд має вираз для вільної складової залежно від кількості і виду коренів характеристичного рівняння?
5. Чим відрізняється розрахунок перехідних процесів в колах з джерелом постійної напруги від розрахунку процесів в колах з джерелом гармонічної напруги?
6. Що розуміють під залежними початковими умовами і яка методика їх визначення?
7. Визначити значення напруги  $u_{L(0)}$  кола (рис. 1.19) в момент комутації, якщо  $U = 160 \text{ В}$ ,  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ .

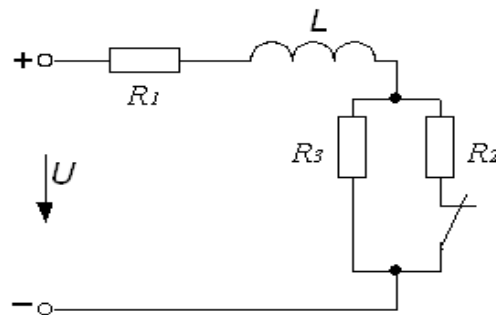


Рисунок 1.19

Відповідь:  $u_{L(0)} = -64 \text{ В}$ .

8. Визначити значення струму  $i_{2(0)}$  в колі (рис. 1.20) в момент комутації, якщо  $U = 80 \text{ В}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ .

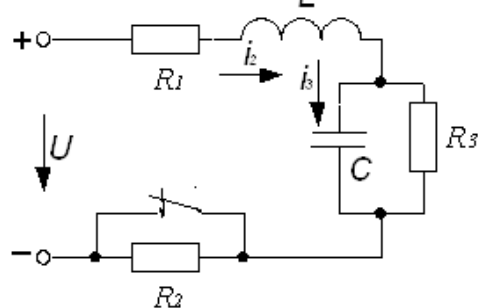


Рисунок 1.20

Відповідь:  $i_{2(0)} = -8 \text{ А}$ .

9. Визначити перехідну напругу  $u_c$  в колі (рис. 1.21).

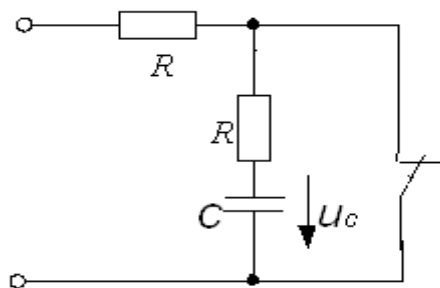


Рисунок 1.21

Відповідь: 
$$u_c = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right).$$

10. Опір  $R=100 \text{ Ом}$  і заряджена ємність  $C=100 \text{ мкФ}$ , які з'єднані послідовно, підключаються до джерела ЕРС  $e = 141 \sin\left(377t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ В}$  за  $t=0$ . Визначити  $i(t)$ , якщо початкова напруга на ємності дорівнює 50В.

Відповідь: 
$$i = 1,37 \sin(377t + 44,8^\circ) + 0,241e^{-100t} \text{ А.}$$

## 2 ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

### 2.1 Деякі властивості перетворення Лапласа і зображення характерних функцій

Інтегральне перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

переводить функцію  $f(t)$  дійсної змінної  $t$ , яку називають *оригіналом*, в функцію комплексної змінної  $p = \sigma + j\omega$ , яку називають *зображенням*  $F(p)$ .

Відповідність між функціями часу (оригіналами) і функціями комплексної змінної (зображеннями) звичайно записують у вигляді

$$f(t) \rightarrow F(p) \quad (2.2)$$

або

$$F(p) = L[f(t)]. \quad (2.3)$$

Для того, щоб функція часу мала зображення, необхідно, щоб вона задовольняла умови Діріхле і була функцією обмеженого зростання, тобто, щоб виконувалась умова

$$f(t) < Ae^{at}, \quad (2.4)$$

де  $A$  і  $a$  – константи.

Перетворення Лапласа є лінійними перетворенням. Дійсно, нехай

$$f_k(t) \rightarrow F_k(p), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Знайдемо зображення функції

$$\begin{aligned} f(t) &= C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + \\ &+ C_k f_k(t) + \dots + C_n f_n(t) = \sum_{K=1}^n C_K f_K(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Оскільки

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

то, підставляючи сюди значення (2.5), одержуємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} [C_1 f_1(t) + \dots + C_K f_K(t) + \dots + C_n f_n(t)] e^{-pt} dt,$$

або

$$F\left(\begin{matrix} s \\ p \end{matrix}\right) = C_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt + \dots + C_K \int_0^{\infty} f_K(t) e^{-pt} dt + \dots + C_n \int_0^{\infty} f_n(t) e^{-pt} dt$$

і

$$F(p) = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) + \dots + C_n F_n(p) = \sum_{K=1}^n C_K F_K(p). \quad (2.6)$$

Таким чином, зображення суми функцій дорівнює сумі зображень окремих функцій; зображення функції, яка помножена на константу, дорівнює константі, помноженій на зображення цієї функції.

Знайдемо зображення характерних функцій. Нехай  $f(t) = A$ , тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = A \left( -\frac{1}{p} \right) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}. \quad (2.7)$$

Якщо  $f(t) = e^{\alpha t}$ , то

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{-(p-\alpha)} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}. \quad (2.8)$$

Якщо  $f(t) = e^{-\alpha t}$ , то зображення цієї функції відрізняється від попередньої знаком біля  $\alpha$ , тобто

$$F(p) = \frac{1}{p+\alpha}. \quad (2.9)$$

Нехай  $f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ .

Тоді згідно з (2.8)

$$F(p) = \frac{1}{p-j\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

тобто

$$\begin{aligned}\cos \omega t &\rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \\ \sin \omega t &\rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Знайдемо зображення похідної функції  $f(t)$ . Нехай  $f(t)$  має своїм зображенням  $F(s)$ , тоді

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt.$$

Візьмемо інтеграл по частинах.

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Позначимо  $u = e^{-pt}$ ,  $v = f(t)$ ,  $du = (-p)e^{-pt} dt$ , тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Оскільки функція  $f(t)$  зростає не швидше показникової функції (2.4), то за підстановки верхньої границі перша складова дає нуль, а нижньої границі  $-f(0)$ , тобто значення функції в момент  $t=0$ . Друга складова (інтеграл) згідно з (2.1) є  $F(s)$ , тому

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0).\tag{2.11}$$

Визначимо зображення невизначеного інтеграла функції  $f(t)$ , зображення якої є  $F(p)$ . Відомо, що

$$\varphi(t) = \int f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \varphi(0),$$

де  $\varphi(0)$  – значення функції  $\varphi(t)$  для  $t=0$ ,

тому

$$L\left[\int f(t)dt\right] = L\left[\int_0^t f(t)dt + \varphi(0)\right].$$

Згідно з (2.7)

а 
$$L[\varphi(0)] = \frac{\varphi(0)}{p},$$

$$\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = f(t).$$

Зображення останньої рівності

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = L[f(t)] = F(p).$$

Згідно з (2.11)

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]' = pL\left[\int_0^t f(t)dt\right] - \int_0^0 f(t)dt.$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

і остаточно

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(p)}{p}. \quad (2.12)$$

Вирази (2.11) і (2.12) показують, що операціям диференціювання функцій дійсної змінної  $t$  відповідають алгебраїчні операції для зображень. Це значить, що диференціальним рівнянням оригіналів відповідають алгебраїчні рівняння зображень.

## 2.2 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

Для кола, яке містить один резистор (рисунок 2.1, а), напруга між точками  $a$  і  $b$  буде:

$$u = ri.$$

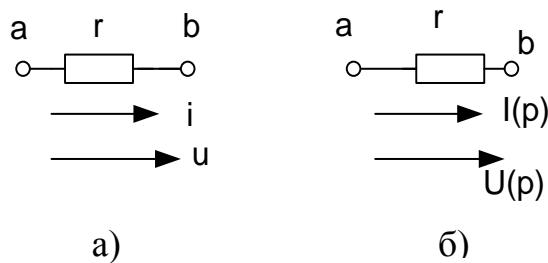


Рисунок 2.1

В операторній формі згідно з (2.6)  $U(p)=rI(p)$ , тому резистор замінюється в операторній схемі елементом, величина якого дорівнює  $r$  (рисунок 2.1, б).

Для індуктивності (рисунок 2.2, а)

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

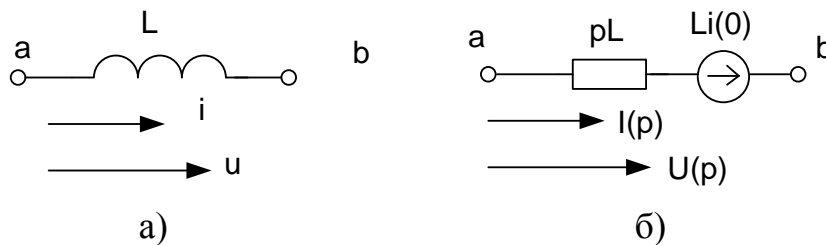


Рисунок 2.2

В операторному вигляді згідно з (2.11)

$$U(p) = LpI(p) - Li(0).$$

Напруга на ділянці  $ab$  складається із двох складових  $i$ , відповідно, операторна схема (рисунок 2.8, б) складається також із двох ділянок: опору  $pL$  і е.р.с.  $Li(0)$ , яка збігається за напрямом із струмом.

Для ділянки, яка містить ємність (рисунок 2.3, а)

$$u = \frac{1}{c} \int idt.$$

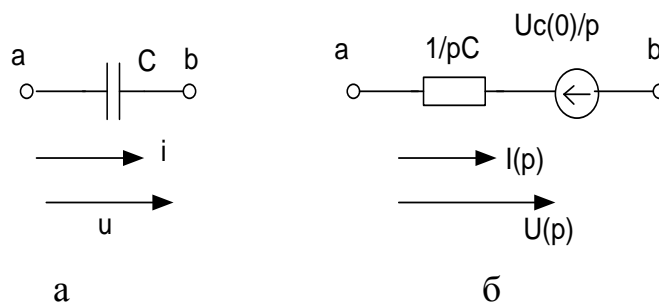


Рисунок 2.3

В операторному вигляді згідно з (2.12)

$$U(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_c(0)}{p}$$

напруга також складається із двох складових, що відповідає двом ділянкам операторної схеми (рисунок 2.3, б): опору  $\frac{1}{pC}$  і додаткової е.р.с.  $\frac{U_c(0)}{p}$ , яка направлена назустріч струмові.

Розглянемо окремих контур (рисунок 2.4), який містить всі три елементи, і складемо рівняння для миттєвих значень за законами Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_c = e(t). \quad (2.13)$$

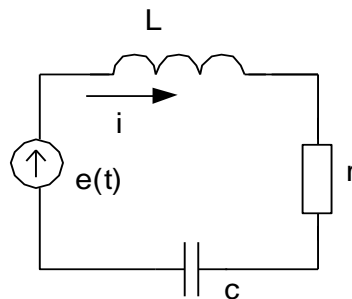


Рисунок 2.4

Тому рівняння (2.13) в операторній формі набуде вигляду

$$LpI(p) - Li(0) + rI(p) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_c(0)}{p} = E(p)$$

або

$$I(p) \left( Lp + r + \frac{1}{pC} \right) = E(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}. \quad (2.15)$$

Позначимо

$$Lp + r + \frac{1}{pC} = Z(p) \quad (2.16)$$

і назвемо цю величину операторним опором, тоді

$$I(p) \cdot Z(p) = E(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}. \quad (2.17)$$

Для нульових початкових умов

$$I(p) \cdot Z(p) = E(p). \quad (2.18)$$

Таким чином, в колі для нульових початкових умов закон Ома справедливий і для зображень. Якщо початкові умови не нульові, то до зовнішньої е.р.с. додаються ще дві е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в електричному полі конденсатора  $(-\frac{u_c(0)}{p})$  і магнітному полі котушки  $Li_l(0)$ . Отже, якщо врахувати додаткові е.р.с. в колі  $Li_l(0)$  і  $(-\frac{u_c(0)}{p})$ , то і в цьому випадку закон Ома справедливий для зображень.

Розглянемо деякий вузол *a* електричного кола (рис. 2.5), в якому з'єднуються 4 вітки з відповідними струмами.

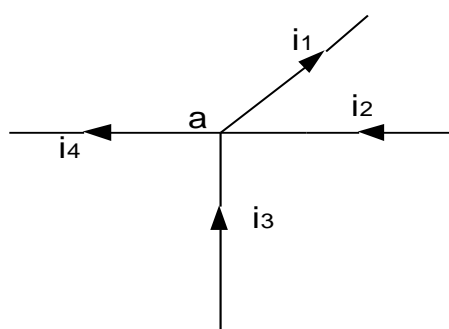


Рисунок 2.5

Для миттєвих значень за першим законом Кірхгофа:

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0. \quad (2.19)$$

В операторній формі:

$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) + I_4(p) = 0. \quad (2.20)$$

В загальному вигляді

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

Таким чином, перший закон Кірхгофа в операторній формі повністю справедливий.

Для того, щоб розглянути другий закон Кірхгофа, виділимо контур, який містить *n* віток (рисунок 2.6).

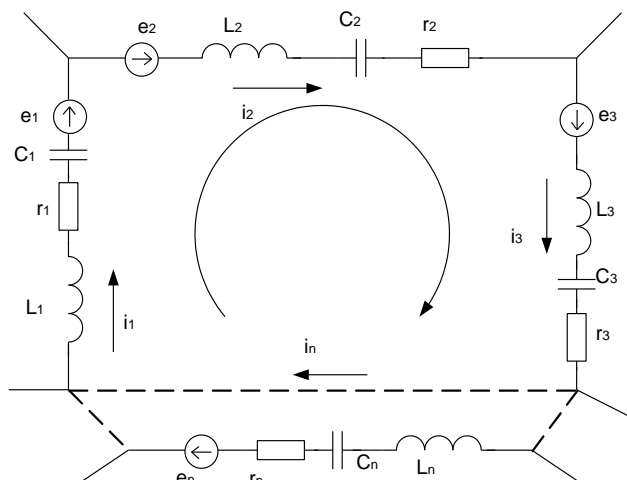


Рисунок 2.6

За вибраних напрямків обходу контуру і струмів у вітках для миттєвих значень запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа.

$$\sum_{k=1}^n \left( L \frac{di_k}{dt} + r_k i_k + u_{ck} \right) = \sum_{k=1}^n e_k . \quad (2.21)$$

Переходячи до зображень з урахуванням (2.14), одержуємо

$$\sum_{k=1}^n \left[ pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + r_k I_k(p) + \frac{1}{C_k p} I_k(p) + \frac{u_{ck}(0)}{p} \right] = \sum_{k=1}^n E_k(p)$$

або

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) \left( pL_k + r_k + \frac{1}{pC_k} \right) = \sum_{k=1}^n \left[ E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{p} \right].$$

З урахуванням (2.16)

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n \left[ E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{p} \right]. \quad (2.22)$$

Для нульових початкових умов другий закон Кірхгофа в операторному вигляді також є правильним, тобто алгебраїчна сума зображень напруг на ділянках кола дорівнює алгебраїчній сумі зображень е.р.с. в будь-якому замкненому контурі.

$$\sum_{k=1}^n I_k(p)Z_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p) \quad (2.23)$$

Якщо початкові умови не є нульовими, то потрібно враховувати не тільки зовнішні е.р.с., але і додаткові, які характеризують початкові запаси енергії. Також потрібно враховувати, що додаткові е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в магнітному полі  $Li_L(0)$  направлені за струмом, а додаткові е.р.с., які характеризують початкові запаси енергії в електричному полі  $\frac{u_c(0)}{p}$  направлені назустріч струму.

Маючи сформульовані закони Ома і Кірхгофа в операторному вигляді, можна зразу записати систему рівнянь в операторному вигляді для післякомутаційного стану кола.

### 2.3 Операторні схеми

Операторні схеми – це такі схеми, в вітках яких діють зображення джерел енергії, знаходяться операторні елементи і протікають зображення струмів. Розглянемо коло (рисунок 2.7):

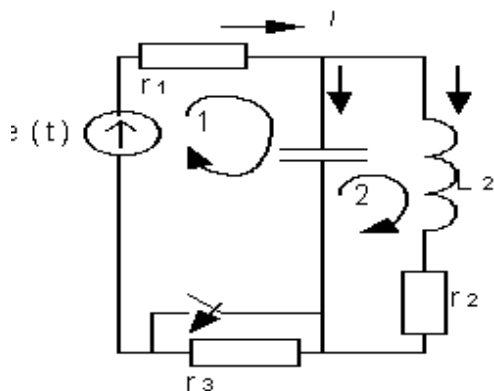


Рисунок 2.7

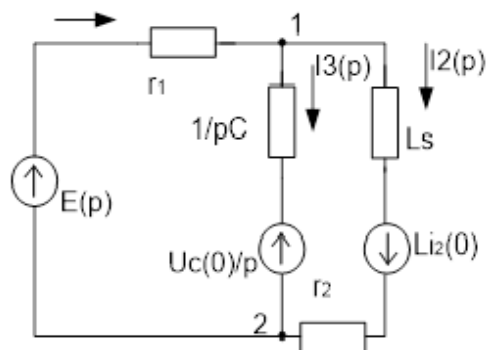


Рисунок 2.8

На рисунку 2.8 зображено операторну схему цього кола,

При складанні операторної схеми треба враховувати, що операторна схема складається для післякомутаційного стану, тому в операторній схемі не показується ключ і вилучається опір  $r_3$ .

Маючи операторну схему з операторними струмами, можна використовувати для її розрахунку будь-які відомі методи аналізу лінійних кіл.

Наприклад, для схеми (рисунок 2.8) запишемо рівняння для вузла 1 за методом вузлових потенціалів.

$$(\varphi_2 = 0) \quad \varphi_1(p) \left[ \frac{1}{r} + pC + \frac{1}{pL + r_2} \right] = E(p) \frac{1}{r_1} + \frac{u_c(0)}{p \frac{1}{pC}} - \frac{Li_2(0)}{r_2 + Lp}.$$

Знаючи зображення потенціалу вузла  $I$ , можна визначити зображення будь-якого струму.

Наприклад,

$$I_2(p) = \frac{\varphi_1(p) + Li_2(0)}{pL + r_2}.$$

## 2.4 Перехід від зображення до оригіналу

Існують різні шляхи знаходження оригіналів. В теорії кіл звичайно, використовують теорему розкладання.

Теорема розкладання використовується в тих випадках, коли зображення деякої функції  $F(p)$  записано у вигляді відношення двох поліномів

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (2.24)$$

причому  $m < n$ .

Як правило, зображення величин, які визначаються під час розрахунку перехідних процесів в лінійних колах, задовольняють цю умову.

Якщо всі корені знаменника прості, то вираз (2.24) можна записати в вигляді суми простих дробів:

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}, \quad (2.25)$$

де  $p_k$  – корінь знаменника,

$A_k$  – деякі невідомі константи.

Для визначення константи  $A_k$  помножимо ліву і праву частину (2.25) на  $(p - p_k)$  і спрямуємо  $p$  до  $p_k$ .

$$\frac{P(p)}{Q(p)} (p - p_k) = A_1 \frac{p - p_k}{p - p_1} + A_2 \frac{p - p_k}{p - p_2} + \dots + A_k + \dots + A_n \frac{p - p_k}{p - p_n}.$$

В правій частині рівняння всі складові, крім  $A_k$ , перетворюються на

нуль, а в лівій частині одержуємо невизначеність, тому що за  $p \rightarrow p_k$   $(p - p_k) \rightarrow 0$  і  $Q(p_k) \rightarrow 0$ , оскільки  $p_k$  – корінь знаменника. Таким чином,

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{Q(p)} \cdot P(p). \quad (2.26)$$

Розкриваючи невизначеність в (2.26) за правилом Лопіталю, тобто диференціюючи чисельник і знаменник (2.26) і підставляючи  $p = p_k$ , одержуємо

$$A_k = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}. \quad (2.27)$$

В цьому випадку

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}. \quad (2.28)$$

Згідно з (2.8)

$$\frac{1}{p - p_k} \rightarrow e^{p_k t},$$

тому оригіналом функції  $F(p)$  є функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (2.29)$$

де  $p_k$  – корінь знаменника;

$P(p_k)$  – значення чисельника функції  $F(p)$  за  $p=p_k$ ;

$Q'(p_k)$  – значення похідної знаменника функції  $F(p)$  за  $p=p_k$ ;

$n$  – число коренів знаменника.

### Приклад 2.2

Зображення деякої функції має вигляд

$$F(p) = \frac{p^2 + 4p + 8}{p(p^2 + 6p + 8)} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Знайти оригінал цієї функції.

Знаходимо корені знаменника

$$p(p^2 + 6p + 8) = 0; \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -4.$$

Визначаємо значення чисельника для  $p=p_k$

$$P(p_1) = 8; P(p_2) = 4 - 8 + 8 = 4; P(p_3) = 16 - 16 + 8 = 8.$$

Знаходимо похідну знаменника

$$Q'(p) = (p^2 + 6p + 8) + p(2p + 6)$$

і її значення для  $p=p_k$

$$Q'(p_1) = 8; Q'(p_2) = -4; Q'(p_3) = 8;$$

Підставляємо одержані значення в (2.32)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^3 \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{P(p_1)}{Q'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{P(p_2)}{Q'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{P(p_3)}{Q'(p_3)} e^{p_3 t} = \\ &= \frac{8}{8} e^{0t} + \frac{4}{4} e^{-2t} + \frac{8}{8} e^{-4t} = 1 - e^{-2t} + e^{-4t}. \end{aligned}$$

### Контрольні питання та вправи

1. Який вигляд має інтегральне перетворення Лапласа?
2. Які умови має задовольняти функція, щоб вона мала зображення за Лапласом?
3. Як знайти зображення гармонічної функції з початковою фазою?
4. Чому дорівнює зображення похідної та інтеграла?
5. Який вигляд мають операторні схеми елементів електричного кола?
6. Як записати теорему розкладання?
7. Знайти оригінали за зображеннями

$$\text{а) } \frac{3p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}; \quad \text{б) } \frac{p + 1}{p^2 + 2p} \quad \text{в) } \frac{1}{p(p^2 + 2p + 5)}.$$

Відповіді:

$$\text{а) } \cos t - \cos 2t; \quad \text{б) } \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}); \quad \text{в) } \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-t} (-2 \cos 2t - \sin 2t) \right].$$

8. Розв'язати задачі 9 і 10 попереднього розділу операторним методом.

## 3 ЧАСТОТНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

### 3.1 Використання перетворення Фур'є для розрахунку перехідних процесів

Частотний метод базується на перетворенні Фур'є

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.1)$$

і назвати цю величину *спектральною характеристикою* або просто спектральною функцією  $f(t)$ , то вихідна функція визначається через спектральну характеристику за виразом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

Інтегральні перетворення (3.1) і (3.2) називають *прямим* і *зворотним* перетворенням Фур'є.

Таким чином неперіодична функція подається нескінченно великим числом гармонічних складових нескінченно малої амплітуди  $dC(j\omega)$ , які відрізняються одна від одної на нескінченно малу частоту  $d\omega$ .

Спектр такої функції буде неперервним.

Якщо функція  $f(t)=0$  для  $t<0$ , що, звичайно, має місце під час розгляду перехідних процесів, то (3.1) можна записати в вигляді

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.3)$$

Неважко бачити, що перетворення Фур'є одержують безпосередньо із перетворення Лапласа (2.1) формальною заміною  $s$  на  $j\omega$ .

Треба мати на увазі, що функція  $f(t)$  може бути перетворена за Фур'є, якщо вона абсолютно інтегрована, тобто

$$\int_0^{\infty} |f(t)dt| = M, \quad (3.4)$$

де  $M$  – скінченне число.

Зображення неперіодичної функції в вигляді сукупності незгасаючих гармонічних коливань дає можливість досліджувати перехідний процес в лінійному електричному колі, використовуючи загальні методи розрахунку усталених синусоїдних процесів.

Допустимо, що деяке лінійне коло (рисунок 3.2), яке має комплексний опір  $Z(j\omega)$ , підключається в момент  $t=0$  за нульових початкових умов до джерела. е.р.с.  $e(t)$ .

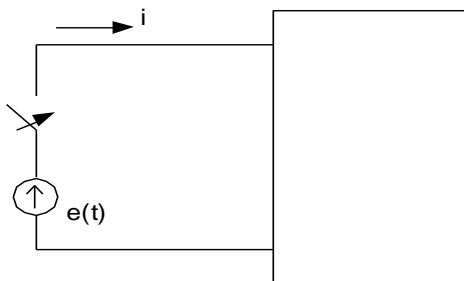


Рисунок 3.2

Визначивши спектральну характеристику дії згідно з (3.1) і позначивши її через  $E(j\omega)$ , можна визначити спектральну характеристику вхідного струму за формулою

$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z(j\omega)} = E(j\omega)Y(j\omega), \quad (3.5)$$

де  $Y(j\omega)$  – комплексна провідність двополюсника.

Оригінал струму  $i(t)$  можна знайти за допомогою виразу

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.6)$$

## 4 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ЗА ВХІДНИХ ДІЙ БУДЬ-ЯКОЇ ФОРМИ

### 4.1 Одинична функція і перехідна характеристика кола

Одинична східчаста функція (рисунок 4.1, а), яка називається функцією Хевісайда, визначається таким чином

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ 1, & t > 0 . \end{cases} \quad (4.1)$$

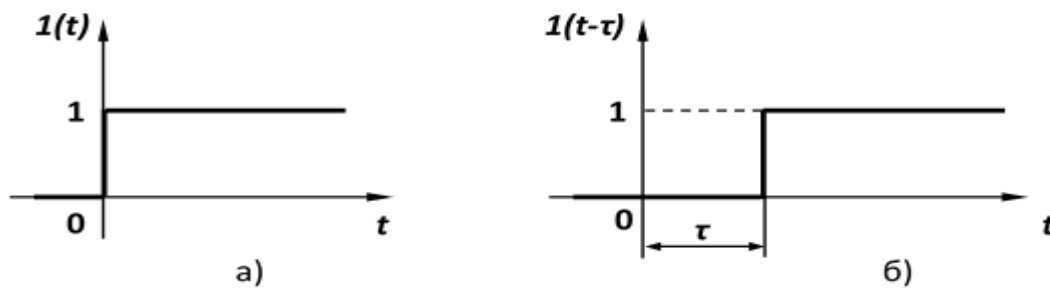


Рисунок 4.1

З допомогою одиничної функції дія будь-якої напруги на коло може бути описана як добуток

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ f(t), & t > 0 . \end{cases}$$

Якщо коло в момент  $t = 0$  вмикається на постійну напругу  $U_0$ , то це можна описати добутком

$$U_0 \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ U_0, & t > 0 . \end{cases}$$

Цей вираз вказує на те, що напруга зростає від нуля до  $U_0$  стрибком в момент вмикання ( $t = 0$ ), далі діє безперервно, залишаючись постійною, тобто відпадає необхідність у використанні ключа.

Якщо дія подається на коло з запізненням на час  $\tau$ , то її потрібно записувати за допомогою одиничної функції (рисунок 4.1, б) з аргументом з запізненням ( $t - \tau$ )

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ 1, & t > \tau . \end{cases} \quad (4.2)$$

Добуток

$$U_0 \cdot 1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ U_0, & t > \tau \end{cases}$$

вказує на те, що напруга величиною  $U_0$  вмикається в коло в момент часу  $t = \tau$ .

Реакція кола на одиничну східчасту функцію за нульових початкових умов називається перехідною характеристикою кола і позначається  $h(t)$ . Під нульовими початковими умовами розуміють нульові значення незалежних початкових умов.

З електротехнічного погляду дія одиничної східчастої напруги на коло рівноцінна вмиканню кола в момент  $t = 0$  під постійну напругу 1 В. Таким чином, для визначення перехідної характеристики кола  $h(t)$  потрібно знайти необхідну реакцію (відповідно до умови задачі), розрахувавши перехідний процес в колі (рисунок 4.2) (початкові умови нульові).

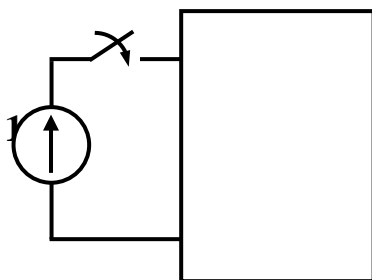


Рисунок 4. 2

Такий розрахунок можна проводити як класичним, так і операторним методом. Знайдена реакція і буде шуканою перехідною характеристикою  $h(t)$ .

Наприклад, за вмикання кола, яке складається із послідовно з'єднаних опору  $R$  та індуктивності  $L$ , на напругу складної форми, де як реакції потрібно знайти струм, перехідною характеристикою є струм від дії постійної напруги на вході 1 В. Оскільки струм в такому колі від дії постійної напруги  $U$ , як відомо,

$$i = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right),$$

то перехідна характеристика

$$h(t) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right). \quad (4.3)$$

В складних колах зручно спочатку знаходити зображення перехідної характеристики  $H(s)$ , а потім за теоремою розкладання визначати  $h(t)$ .

Подамо будь-яке коло в вигляді чотирьох полюсників (рисунок 4.3, а), до якого прикладена деяка дія  $f(t)$  і реакція на цю дію на виході  $x(t)$ .

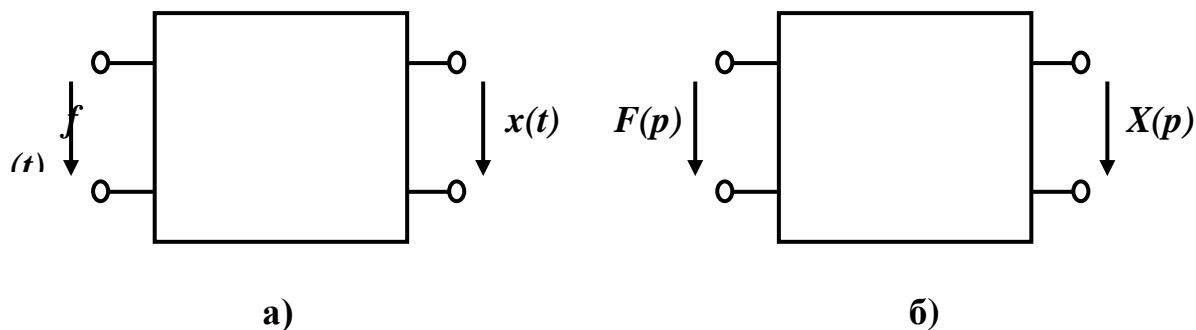


Рисунок 4. 3

Для знаходження зображення реакції  $X(p)$  перерисуємо схему в операторній формі (рисунок 4.3, б).

Оскільки початкові умови нульові, то ніяких додаткових е.р.с. в чотириполюснику не з'являється і зв'язок між зображеннями реакції  $X(p)$  і дії  $F(p)$  записується в вигляді:

$$X(p) = K(p)F(p), \quad (4.4)$$

де  $K(p)$  – передаточна функція кола, яка залежить тільки від параметрів кола і виду їх з'єднання між собою.

Якщо дія є одиничною східчастою функцією  $1(t)$ , то її зображення можна знайти, використовуючи інтеграл Лапласа

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{p}; \quad 1(t) \doteq \frac{1}{p}. \quad (4.5)$$

Тоді зображення перехідної характеристики визначається за виразом

$$H(p) = \frac{K(p)}{p}. \quad (4.6)$$

**Приклад 4.1.** Знайти перехідну характеристику для напруги на ємності в колі, зображеному на рисунку 4.4, а).

Подамо схему в операторній формі (початкові умови нульові, (рисунок 4.4, б) і виразимо напругу  $U_C(p) = U_2(p)$  через вхідну напругу  $U_1(p)$ .

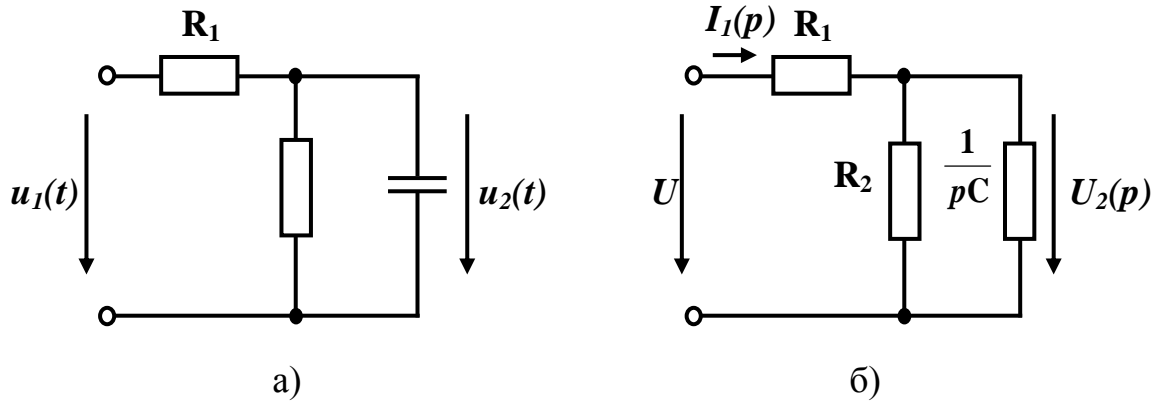


Рисунок 4.4

Вхідний струм

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}} = \frac{U_1(p)}{R_1 + \frac{R_2}{R_2 Cp + 1}} = \frac{U_1(p)(R_2 Cp + 1)}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

Шукана напруга

$$U_2(p) = I_1(p) \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = I_1(p) \frac{R_2}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_1(p) R_2}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

Враховуючи, що  $F(p) = U_1(p)$ ,  $X(p) = U_2(p)$ , передаточна функція кола

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

Зображення перехідної характеристики для напруги на ємності згідно з (4.6)

$$H(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{R_2}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}.$$

Використовуючи теорему розкладання, знаходимо оригінал перехідної характеристики

$$h(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}.$$

Знаючи перехідну характеристику, легко визначити значення  $u_C(t)$  за

будь-якої величини постійної вхідної напруги. Дійсно, якщо на вході включено постійну напругу  $U_1$ , то

$$u_2(t) = U_1 h(t).$$

## 4.2 Використання перехідних характеристик для розрахунку перехідних процесів

Нехай до деякого кола, для якого відома перехідна характеристика  $h(t)$ , прикладено східчасту дію  $u(t)$  (рисунки 4.5).

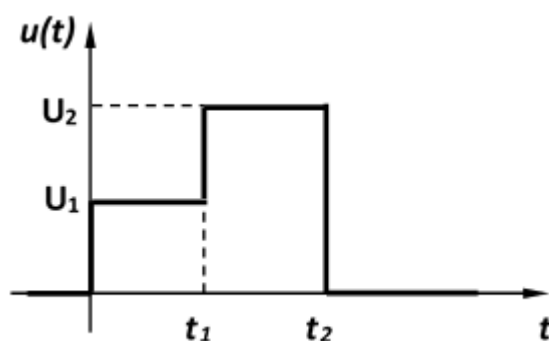


Рисунок 4.5

Визначимо реакцію кола через перехідну характеристику. Перехідний процес в цих випадках визначають окремо на різних інтервалах часу.

На інтервалі  $0 < t < t_1$  до кола прикладено постійну напругу  $U_1$ , тому

$$x(t) = U_1 h(t), \quad 0 < t < t_1. \quad (4.7.)$$

На інтервалі  $t_1 < t < t_2$  продовжує діяти постійна напруга  $U_1$  і відповідно існує реакція на цю напругу  $U_1 h(t)$ . В момент часу  $t_1$  додатково підключається постійна напруга  $(U_2 - U_1)$  і з'являється складова реакції від цього стрибка напруги, яка зміщена на час  $t_1$ , тобто  $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$ . Таким чином, загальна реакція на цьому інтервалі

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1), \quad t_1 < t < t_2. \quad (4.8)$$

На інтервалі  $t_2 < t < \infty$  реакція кола складається із трьох складових:

- продовжує діяти напруга  $U_1$  – реакція  $U_1 h(t)$ ;
- продовжує діяти постійна напруга  $(U_2 - U_1)$ , яка виникає в момент  $t_1$  – реакція  $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$ ;
- в момент  $t = t_2$  з'являється постійна напруга  $(-U_2)$ , реакція від якої  $(-U_2)h(t - t_2)$ .

Таким чином для  $t_2 < t < \infty$

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1) - U_2 h(t - t_2), \quad t > t_2. \quad (4.9)$$

### 4.3 Розрахунок перехідних процесів у випадку довільних дій

Такий підхід до визначення реакції кола на східчасту дію дозволяє розглядати перехідний процес за будь-яких складних дій.

Розглянемо знаходження реакції кола, перехідна характеристика  $h(t)$  якого відома, у випадку вмикання його до джерела напруги  $u(t)$  довільної форми (рисунок 4.6) за нульових початкових умов.

Виберемо деякий довільний фіксований момент спостереження  $t$  і розрахуємо реакцію (струм або напругу) до цього часу. Не дивлячись на те, що момент вибирається довільно, він фіксується і стає постійною величиною – параметром. В зв'язку з цим вводиться нове позначення змінного часу  $\tau$ , який змінюється в межах  $0 < \tau < t$ .

Подамо прикладену напругу в вигляді східчастої дії, коли через однакові проміжки часу  $\Delta\tau = \frac{t}{n}$  додаються сходинки напруги  $\Delta u_k$  ( $n$  – відповідає числу сходинок, за допомогою яких подається вихідна дія).

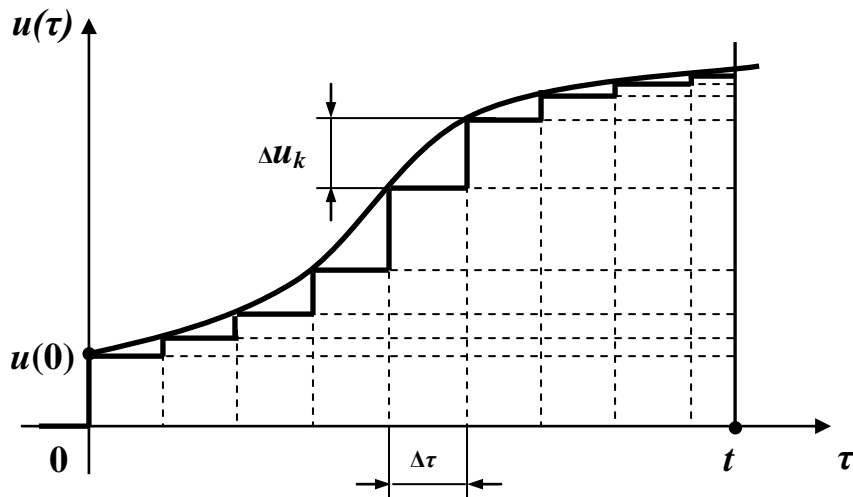


Рисунок 4. 6

Дію сходинок на коло описуємо з допомогою одиничних функцій. На проміжку часу  $0 < t < \Delta\tau$  реакція кола від дії напруги  $u(0)1(t)$ , тобто від нульової сходинки, яка наближено заміняє напругу на цьому проміжку,

$$x(t) \approx u(0)h(t);$$

на проміжку  $\Delta\tau < t < 2\Delta\tau$  додається реакція від напруги  $\Delta u_1 1(t - \Delta\tau)$ , тобто від першої сходинки

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau);$$

на проміжку  $2\Delta\tau < t < 3\Delta\tau$  додається реакція від напруги  $\Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau)$ , тобто від другої сходинки

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau);$$

на проміжку часу  $n\Delta\tau < t < (n+1)\Delta\tau$  додається реакція від напруги  $\Delta u_n h(t - n\Delta\tau)$ , тобто від дії  $n$ -ї сходинки

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta u_k h(t - k\Delta\tau) + \dots + \Delta u_n h(t - n\Delta\tau)$$

бо

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k h(t - k\Delta\tau). \quad (4.10)$$

Вираз (4.10) дає наближено значення реакції кола  $x(t)$ , оскільки справжня крива  $x(t)$  замінена східчастими діями.

Для одержання точного значення реакції кола спрямовуємо  $\Delta\tau$  до нескінченно малої величини  $d\tau$ . Тоді

$$\Delta u_k = \frac{\Delta u_k}{\Delta\tau} \Delta\tau \rightarrow u'(\tau) d\tau,$$

$$k\Delta\tau \rightarrow \tau.$$

Сума в (4.10) перетворюється на інтеграл з границями інтегрування від нуля до  $t$ , тобто

$$x(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (4.11)$$

Вираз (4.11) називають інтегралом накладання або інтегралом Дюамеля.

**Приклад 4.2.** Визначити закон зміни напруги на ємності в колі (рисунок 4.7) у випадку дії експоненційної напруги

$$u(t) = Ue^{-\beta t}.$$

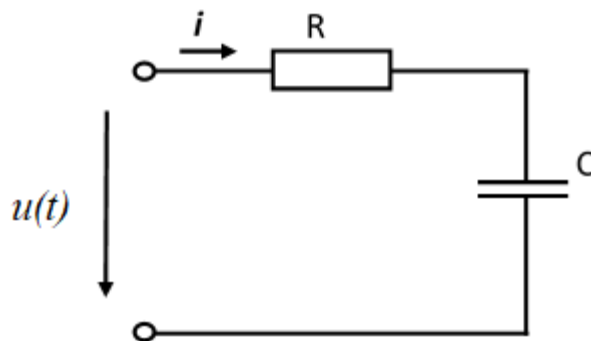


Рисунок 4.7.

Перехідна характеристика цього кола для напруги на ємності

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t}; \quad \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Визначимо всі величини, які входять до інтеграла Дюамеля (4.11).

$$u(0) = U; \quad u'(\tau) = (Ue^{-\beta\tau})' = -\beta Ue^{-\beta\tau};$$

$$h(1-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Відмітимо, що змінною інтегрування в (4.11) є змінна  $\tau$ , тому  $t$  під час знаходження інтеграла розглядається як стала величина. Підставимо одержані величини в (4.11)

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t (-\beta)Ue^{-\beta\tau}(1 - e^{-\alpha(t-\tau)})d\tau = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left( \int_0^t e^{-\beta\tau} d\tau - \int_0^t e^{-\beta\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left( \left( \frac{1}{-\beta} e^{-\beta\tau} \right)_0^t - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left( \frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + \frac{1}{\beta} \right) + \beta U e^{-\alpha t} \left( \frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)\tau} \right)_0^t = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \\ &= U - Ue^{-\alpha t} + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} - \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} = \\ &= Ue^{-\beta t} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) - Ue^{-\alpha t} \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha U}{\alpha - \beta} (Ue^{-\beta t} - Ue^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним виразом (рисунок 4.8),

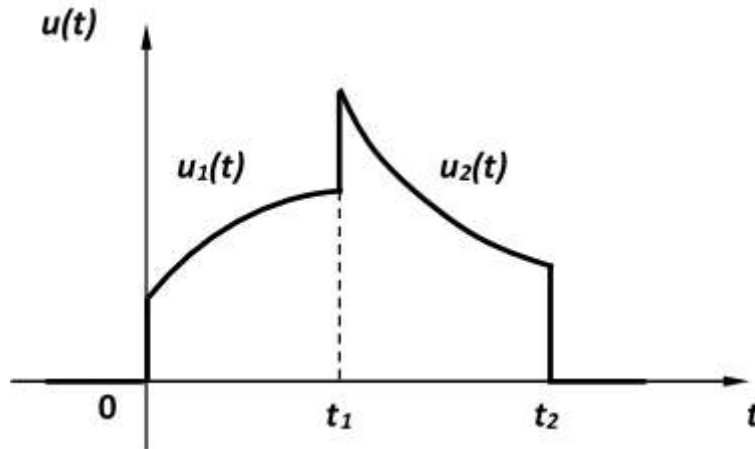


Рисунок 4.8

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t < t_1, \\ u_2(t), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2, \end{cases}$$

то реакцію кола потрібно визначити для кожного інтервалу часу, де діє відповідна напруга.

Для  $0 < t < t_1$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

В процесі визначення реакції кола на інтервалі  $t_1 < t < t_2$  враховуємо такі обставини:

– продовжує діяти реакція кола на напругу  $u_1(t)$ , яка існує до моменту часу  $t_1$ , тому верхня границя цього інтеграла буде  $t_1$ ;

– під час визначення реакції від напруги  $u_2(t)$  потрібно мати на увазі, що ця напруга діє на коло з моменту часу  $t_1$ , тому нижня границя цього інтервалу  $t_1$ ;

– в момент  $t_1$  вхідна напруга стрибком змінюється від  $u_1(t_1)$  до  $u_2(t_1)$ , тому цей стрибок враховується під час визначення реакції як дія постійної напруги  $(u_2(t_1) - u_1(t_1))$  в момент  $t_1$ .

Таким чином для  $t_1 < t < t_2$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Для часу  $t > t_2$  враховується стрибок напруги  $(0 - u_2(t_2))$  в момент  $t_2$  і перестає діяти в цей самий момент напруга  $u_2(t)$ .

Для  $t > t_2$

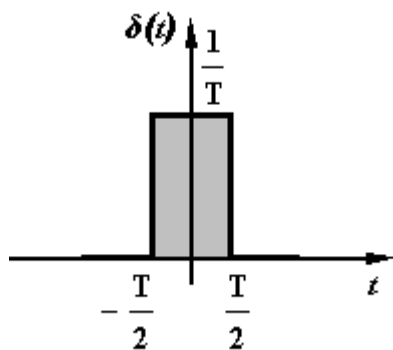
$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (0 - u_2(t_2))h(t-t_2).$$

#### 4.4 Імпульсна функція і імпульсна характеристика кола

Імпульсною характеристикою кола називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію за нульових початкових умов.

Одинична імпульсна функція, її називають функцією Дірака або  $\delta$ -функцією, визначається тим, що її площа дорівнює одиниці, величина імпульсна прямує до безмежності за  $t \rightarrow 0$ , а за всіх інших значень  $t$  вона дорівнює нулю.

На рисунку 4.9 показано імпульс шириною  $T$  і висотою  $1/T$ , площа якого дорівнює одиниці.



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Рисунок 4.9

Одиничну імпульсну функцію  $\delta(t)$  одержують із цього імпульсу за  $T \rightarrow 0$ .

Для  $\delta$ -функції справедливим є співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1, \quad (4.13)$$

якщо  $t_1 < 0$ ,  $t_2 > 0$ .

Добре видно, що

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

отже

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t)$$

або

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (4.14)$$

Якщо взяти добуток функцій  $f(t)$  на  $\delta(t)$ , то цей добуток для всіх  $t \neq 0$  перетворюється на нуль, а за  $t = 0$  має значення  $f(0)\delta(t)$ , тобто

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Згідно з цим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0). \quad (4.15)$$

## Операторне зображення $\delta$ -функції

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-p \cdot 0} \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.16)$$

Враховуючи одержане співвідношення і визначення імпульсної характеристики можна стверджувати, що операторне зображення імпульсної характеристики дорівнює зображенню передаточної функції.

Якщо позначити зображення імпульсної характеристики  $g(t)$  через  $G(p)$ , то

$$G(p) = K(p). \quad (4.17)$$

Для кола, яке розглядалося вище (див. рис. 4.4, а),

$$G(p) = K(p) = \frac{R_2}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2} \quad \text{і} \quad g(t) = \frac{1}{R_1 C} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}.$$

Якщо на вході кола (див. рисю 4.4, а) діє імпульс напруги, площа якого дорівнює  $A$ , тобто  $u_1(t) = A\delta(t)$ , то напруга на ємності  $u_2(t) = Ag(t)$ .

## 4.5 Розрахунок перехідних процесів за довільних дій з використанням імпульсної функції

Знайдемо вираз для знаходження реакції кола від дії напруги довільної форми з використанням імпульсної характеристики. В цьому випадку задану дію розбиваємо на  $n$  прямокутних імпульсів (рисунок 4.10) шириною  $\Delta\tau$  і висотою  $u_k$ . Площа будь-якого імпульсу  $u_k \Delta\tau$ .

Реакція кола від дії окремого  $k$ -го імпульсу визначається як добуток площі імпульсу на імпульсну характеристику, яка зміщена на  $k\Delta\tau$ , тобто

$$\Delta x_k = u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau). \quad (4.18)$$

Реакція кола від заданого діяння в момент часу  $t$  наближено подається як сума реакцій від дії  $n$  імпульсів.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau). \quad (4.19)$$

За  $\Delta\tau \rightarrow d\tau$  сума перетворюється на інтеграл,  $k\Delta\tau \rightarrow \tau$ , дискретні значення  $u_k$  стають безперервними миттєвими значеннями  $u(\tau)$ , тому

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (4.20)$$

**Приклад 4.3.** Визначимо напругу на ємності через імпульсну характеристику для кола (рисунок 4.7) за вхідної напруги  $u(t) = Ue^{-\beta \cdot t}$ .  
 Знайдемо імпульсну характеристику кола для напруги на ємності.  
 Напруга на ємності в операторній формі

$$U_c(p) = \frac{U(p) \frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{U(p)}{RCp + 1}.$$

Передаточна функція кола і, отже, зображення імпульсної характеристики

$$K(p) = G(p) = \frac{1}{RCp + 1}.$$

Оригінал цього зображення

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}.$$

Якщо позначити  $\alpha = \frac{1}{RC}$ , то  $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ .

Підставляємо всі дані в (4.20), одержуємо

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \int_0^t U e^{-\beta \tau} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U \alpha e^{-\alpha \cdot t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta) \cdot \tau} d\tau = U \alpha e^{-\alpha \cdot t} \left( \frac{e^{(\alpha-\beta) \tau}}{\alpha-\beta} \right) \Bigg|_0^t = \\ &= U \alpha e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha-\beta} \left( e^{(\alpha-\beta) \cdot t} - 1 \right) = \frac{U \alpha}{\alpha-\beta} \left( e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t} \right). \end{aligned}$$

Під час розв'язання задачі (рисунок 4.8) з використанням інтеграла Дюамеля, записаного через імпульсну характеристику (4.20), стрибки напруги в моменти  $t_1$  і  $t_2$  враховуються самими функціями  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  безпосередньо під час інтегрування, тобто

для  $0 < t < t_1$  
$$x(t) = \int_0^t u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Для  $t_1 < t < t_2$  
$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Для  $t > t_2$  
$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

## 5 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

### 5.1 Загальна характеристика нелінійних елементів і нелінійних електричних кіл

Під час розгляду лінійних електричних кіл допускалося, що параметри всіх елементів – резистивних, ємнісних та індуктивних є постійними величинами і характеризуються відповідними значеннями цих параметрів – опору  $r$ , ємності  $C$  й індуктивності  $L$ .

Існує широкий клас елементів, параметри яких залежать від струмів або прикладених до них напруг. Такі елементи називаються *нелінійними*. Для кількісного описування властивостей нелінійних елементів потрібно задавати залежності, які називають характеристиками. Звичайно, ці залежності знаходять за результатами досліду і подають у вигляді графіків (рисунок 5.1, а). Нелінійні елементи можуть бути резистивними, ємнісними, індуктивними. Нелінійні резистори, ємності та індуктивності позначаються так, як показано на рисунку 5.1, б).

Для резистора  $y=u$ ,  $x=i$  характеристика називається *вольт-амперною* (в.а.х.), для ємності  $y=q$ ,  $x=u$  характеристика *кулон-вольтна*, для індуктивності  $y=\psi$ ,  $x=i$  – характеристика *вебер-амперна*.

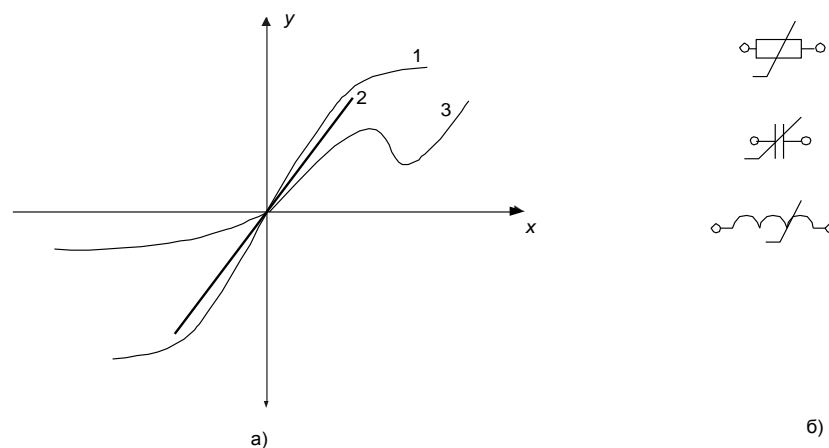


Рисунок 5.1

На рисунку 5.1, а) криві 1, 3 є характеристиками нелінійних елементів, а пряма 2 – характеристикою лінійного елемента .

Для кожної точки нелінійної характеристики можна ввести поняття статичного і динамічного параметрів (рисунок 5.2).

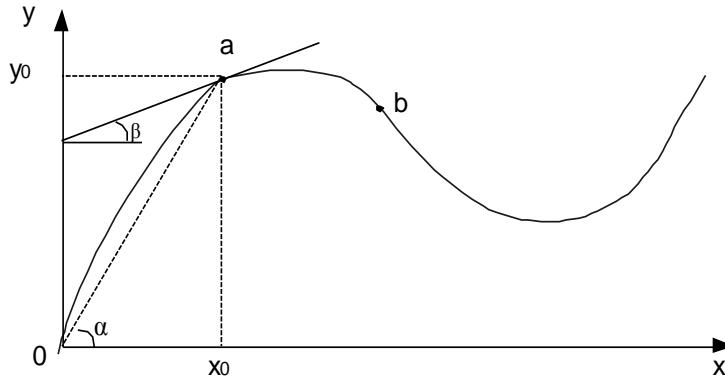


Рисунок 5.2

Під статичним опором в точці  $a$  розуміють відношення постійної напруги нелінійного елемента в цій точці до постійного струму, який відповідає цій точці, тобто

$$r_{cm} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Відповідно для ємності  $C_{cm} = \frac{q_0}{U_0},$

для індуктивності  $L_{cm} = \frac{\psi_0}{I_0}.$

Статичні параметри пропорційні тангенсу кута  $\alpha$  і завжди додатні.

Під динамічним опором розуміють відношення малого приросту напруги в точці  $a$  до відповідного приросту струму

$$R_d = \frac{du}{di}.$$

Аналогічно

$$C_d = \frac{dq}{du}, \quad L_d = \frac{d\psi}{di}.$$

Динамічні параметри пропорційні тангенсу кута  $\beta$  – кута між дотичною в цій точці і горизонтальною лінією. Вони можуть бути як додатні (точка  $a$ ), так і від’ємні (точка  $b$ ) на спадних ділянках характеристик.

Крім того, розрізняють нелінійні елементи за типом характеристик:

- з симетричною відносно початку координат (крива 1 на рисунку 5.3) і

несиметричною (крива 2 на рисунку 5.3) характеристиками;

- з монотонною (крива 1 на рисунку 5.1, а), коли нахил кривої (похідна  $di/du$ ) не змінює свого знаку, і немонотонною (крива 3 на рисунку 5.1, а) характеристиками;

- з однозначною (крива 1 на рисунку 5.1, а), коли кожному значенню змінної  $x$  відповідає єдине значення функції  $y$ , і неоднозначною (рис. 5.3) характеристиками.

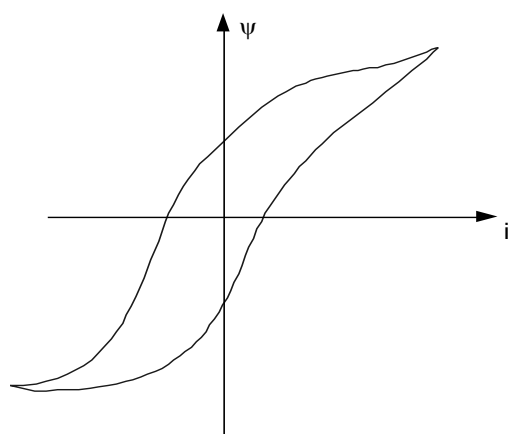


Рисунок 5.3

Наведемо деякі конкретні нелінійні елементи і їх характеристики.

На рисунку 5.4, а) показано напівпровідниковий діод і його характеристику.

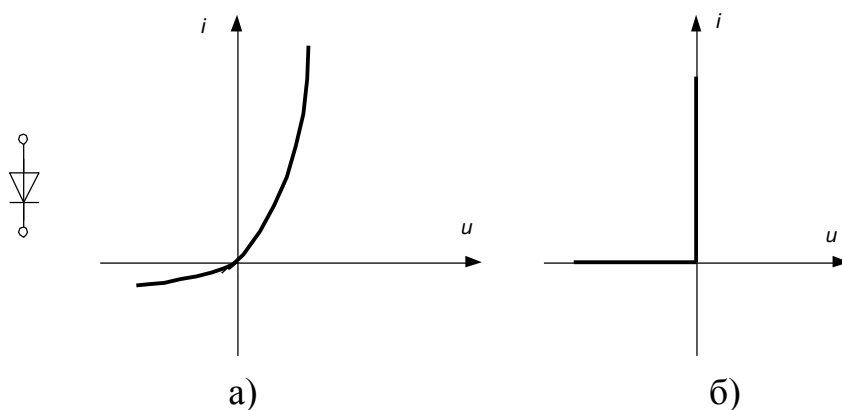


Рисунок 5.4

За додатних значень напруги опір діода малий, а за від'ємних значень напруги – великий. Часто опір діода в прямому напрямі вважають таким, що дорівнює нулю, а у зворотному напрямі – нескінченності. Характеристику такого діода показано на рисунку 5.4, б), а діод називають ідеальним.

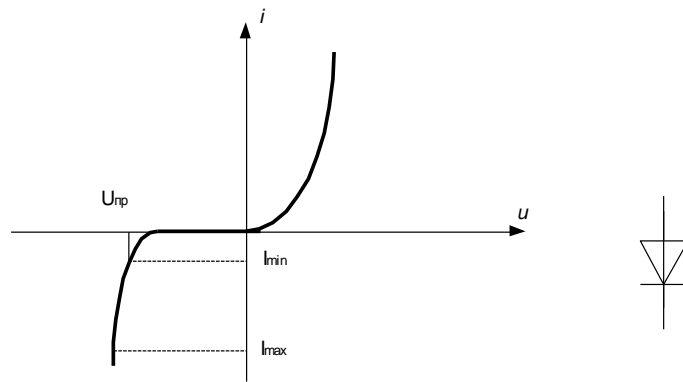


Рисунок 5.5

На рисунку 5.5 показано напівпровідниковий стабілітрон і його характеристику. За напруги  $u=U_{пр}$  характеристика має круту лінійну ділянку, на якій значна зміна струму не приводить до зміни напруги.

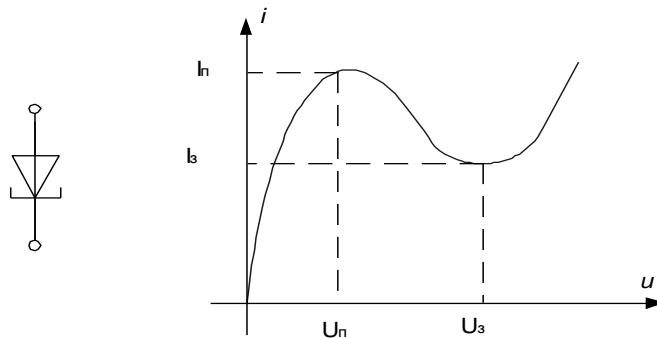


Рисунок 5.6

На рисунку 5.6 показано характеристику тунельного діода, на якій відмічено піковий струм  $I_n$  і пікову напругу  $U_n$ , струм  $I_s$  і напругу  $U_s$  западини.

Сім'я характеристик, показана на рисунку 5.7, відноситься до біполярного транзистора, що є нелінійним керованим елементом, характеристика якого може змінюватися залежно від керівної дії, в цьому випадку – струму бази.

Електричне коло, яке містить хоч би один нелінійний елемент, називається **нелінійним** електричним колом.

Процеси в нелінійних електричних колах відрізняються складністю і багатосторонністю.

Перерахуємо деякі із найбільш відомих явищ, які властиві тільки нелінійним колам і принципово неможливі в лінійних колах.

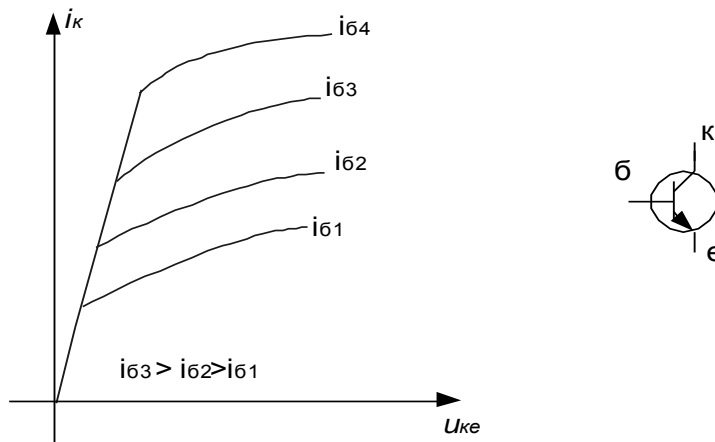


Рисунок 5.7

1. За прикладеної на вході синусоїдної дії на виході з'являється сигнал несинусоїдної форми, що дозволяє здійснювати перетворення частоти або випрямлення змінного струму.

2. У випадку зміни рівня вхідного сигналу або величини навантаження в широкому діапазоні напруги чи струми навантаження можуть залишатися практично постійними, тобто можна здійснювати стабілізацію напруги або струму.

3. В лінійному колі з заданими параметрами і зовнішньою дією усталений режим встановлюється завжди один і той самий незалежно від початкових умов. В нелінійних колах можливе існування декількох усталених станів рівноваги, стійких чи нестійких. Тому в нелінійних колах залежно від початкових умов усталений режим може бути не єдиним.

4. В нелінійних колах за наявності джерела постійної напруги можливе існування автоколивань, тобто виникнення періодичних коливань, що дозволяє створювати генератори періодичних напруг різної форми.

5. У разі плавної зміни напруги вхідного сигналу або частоти в нелінійних колах можуть мати місце стрибкоподібні зміни напруг і струмів або фаз і частоти у випадку періодичного режиму.

Такі можливості нелінійних кіл обумовили їх широке використання в електротехніці, радіоелектроніці і автоматиці. Нелінійність характеристик елементів в нелінійних електричних колах приводить до того, що процеси в таких колах описуються нелінійними диференціальними рівняннями, до яких невідома змінна напруга або струм і їх похідні входять нелінійно, тобто не в першому степені, як у лінійних рівняннях, а довільно.

Одна із головних особливостей нелінійних кіл, з погляду аналізу, полягає в тому, що до них не можна застосувати принцип накладання. Наслідком цього є те, що не існує скільки-небудь загальних засобів аналітичного розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, навіть

першого порядку. Тому аналіз процесів в нелінійних колах проводиться, як правило, наближеними методами.

## 5.2 Розрахунок електричних кіл постійного струму з нелінійними резисторами

### Графічний метод

Якщо коло містить всього одне джерело і один нелінійний елемент з відомою вольт-амперною характеристикою (рисунок 5.8, а), то за відомої е.р.с. джерела  $E$  легко графічно з допомогою характеристики знайти струм  $I$  в колі (рисунок 5.8, б).

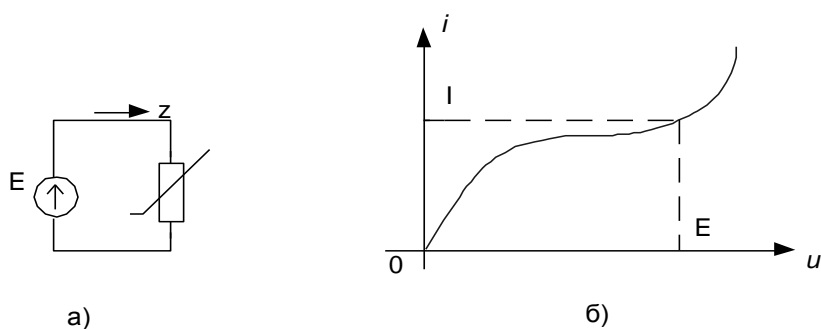


Рисунок 5.8

Таким чином, суть графічного методу полягає в тому, що шляхом графічних побудов визначається вольт-амперна характеристика всього кола, що приводить складне коло з декількома резисторами до кола з одним нелінійним резистором.

Для двох послідовно з'єднаних елементів (рисунок 5.9, а) з вольт-амперними характеристиками, показаними на рисунку 5.9, б), будується графічно вольт-амперна характеристика всього кола.

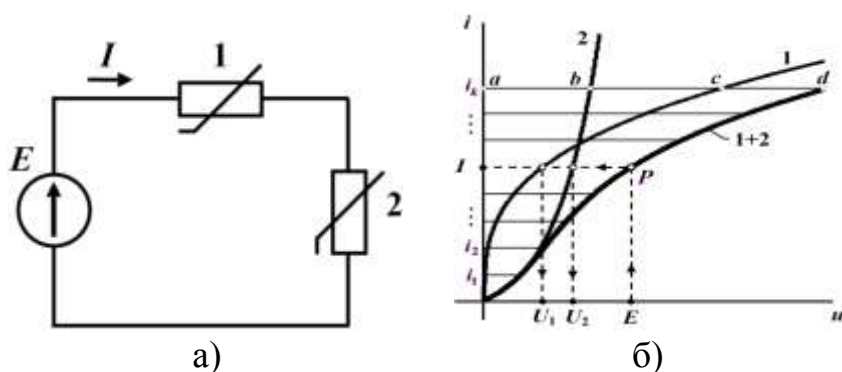


Рисунок 5.9

Оскільки за послідовного з'єднання струм через елементи протікає один і той самий, то точки загальної в.а.х. визначаються додаванням напруг

елементів 1 і 2 для різних значень струмів. Так, наприклад, точка  $k$  загальної характеристики одержана додаванням відрізків  $ab$  і  $ac$ , тобто

$$ak = ab + ac.$$

За більшого числа послідовно з'єднаних елементів додається відповідне число відрізків. Ця сама задача може бути вирішена також графічно, але другим методом – графічним розв'язанням рівнянь. Задану вольт-амперну характеристику (рисунок 5.10)

$$i = f(u_n) \quad (5.1)$$

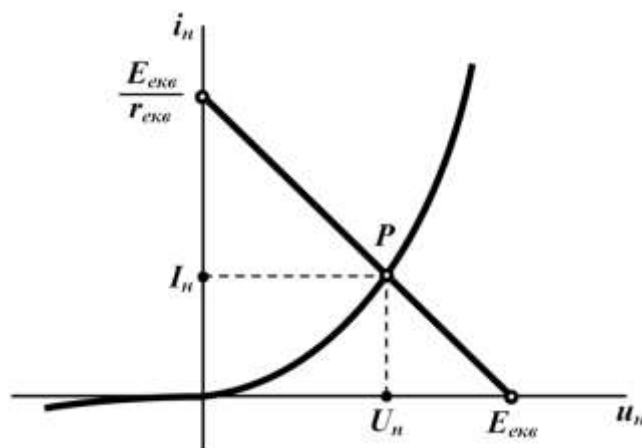


Рисунок 5.10

вважаємо одним рівнянням з двома невідомими: струмом  $I$  і напругою нелінійного елемента  $U_n$ . Друге рівняння для визначення невідомих одержуємо із другого закону Кірхгофа

$$i r = u_{не} - E \quad (5.2)$$

$$\text{або } i = \frac{E}{r} - \frac{u_{не}}{r}. \quad (5.3)$$

Рівняння (5.2) – рівняння прямої лінії, яка легко будується на тому ж рисунку (рисунок 5.10). Точка перетину графіків рівнянь (5.1) і (5.2) дає розв'язок.

Якщо елементи в колі з'єднані паралельно (рисунок 5.11, а), то точки загальної характеристики знаходяться додаванням ординат окремих в.а.х., тобто за одних і тих самих напруг на елементах (рисунок 5.11, б).

Загальний струм  $I$  знаходиться за заданої е.р.с.  $E$  за допомогою загальної в.а.х., а струми в вітках – за відповідними в.а.х. елементів (рисунок 5.11, б).

У випадку змішаного з'єднання елементів (рисунок 5.12, а) спочатку будується характеристика паралельно з'єднаних елементів (пунктир на рисунку 5.12, б), а потім в.а.х. всього кола (товста лінія на рисунку 5.12, б).

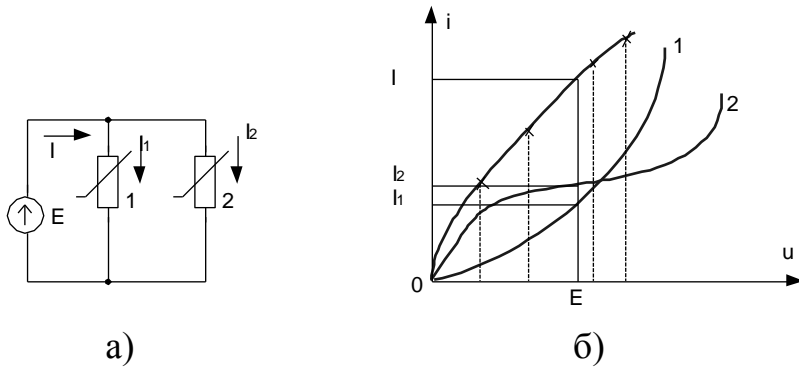


Рисунок 5.11

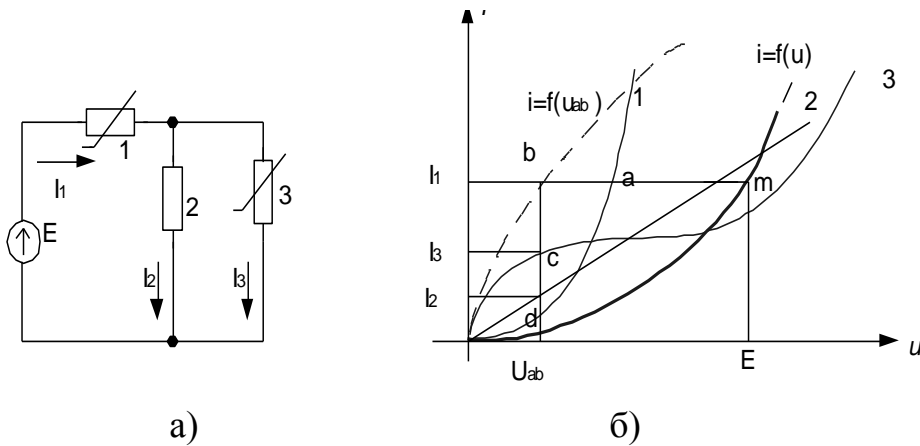


Рисунок 5.12

Вхідний струм  $I_1$  визначається за в.а.х. всього кола за заданою е.р.с.  $E$  (точка  $m$ ). Точки перетину лінії струму  $I_1$  з характеристикою елемента 1 (точка  $a$ ) і характеристикою  $i=f(U_{ab})$  (точка  $b$ ) визначають відповідно напругу на елементі 1  $-U_1$  і напругу  $u_{ab}$ . Точки перетину лінії напруги  $U_{ab}$  з характеристиками елемента 2 (точка  $d$ ) і 3 (точка  $c$ ) визначають струми  $I_2$  і  $I_3$ . Цей метод певною мірою аналогічний методу перетворень для лінійних кіл.

Коли в складному колі є тільки один нелінійний елемент, то задача значно спрощується, якщо вся лінійна частина замінюється еквівалентним джерелом з е.р.с.  $E_0$  і внутрішнім опором  $r_0$  (рисунок 5.13).

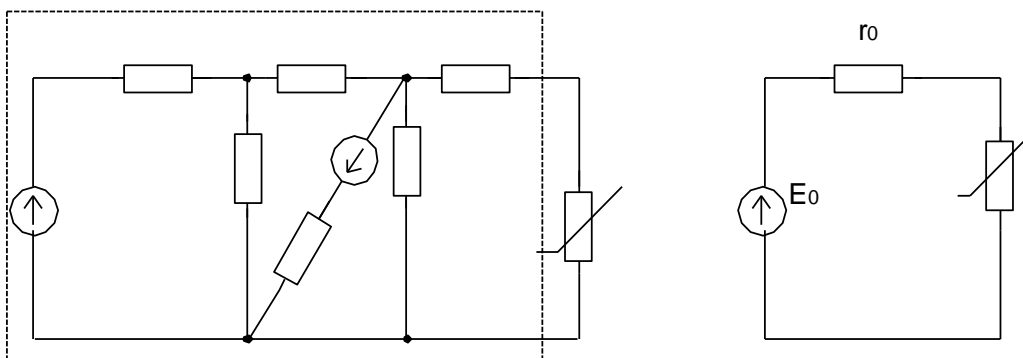


Рисунок 5.13

В тих випадках, коли в вітках з нелінійним елементом є е.р.с., зручно будувати за відповідною в.а.х. елемента в.а.х. вітки.

Нехай в вітці  $ab$  (рисунок 5.14, а) послідовно з нелінійним елементом, в.а.х. якого зображено на рисунку 5.14, б) суцільною лінією, присутня е.р.с.  $E_0$ , яка направлена назустріч струму.

Потрібно побудувати в.а.х. вітки, тобто залежність  $i=f(u_{ab})$ . Оскільки має місце співвідношення  $u_{ab}=u_n+E_0$ , неважко бачити, що кожна точка в.а.х. елемента під час переходу до напруги  $u_{ab}$  зміщується вправо на величину  $E_0$  (пунктир на рисунку 5.14, б).

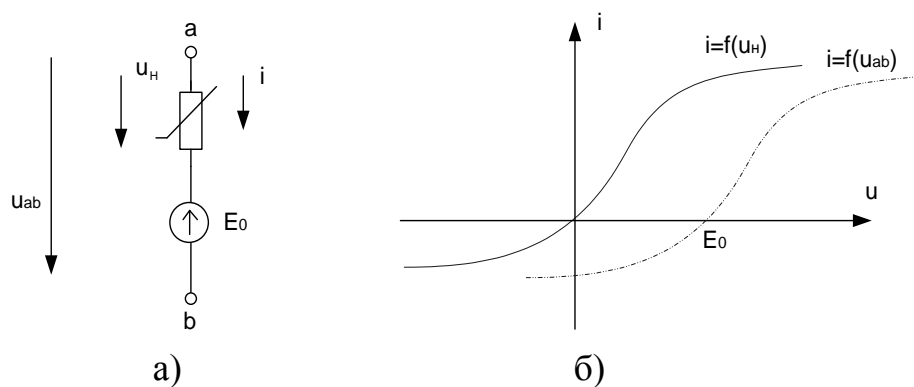


Рисунок 5.14

Якщо е.р.с. направлена як і струм, то в (5. 2) змінюється знак біля  $E_0$  і в цьому випадку в.а.х. вітки зміщується вліво на величину  $E_0$ .

### Метод двох вузлів

Можливість побудови в.а.х. віток дозволяє використовувати для нелінійних кіл метод двох вузлів у випадку графічного розв'язання нелінійних рівнянь.

Розглянемо цей метод на конкретному прикладі (рисунок 5.15).

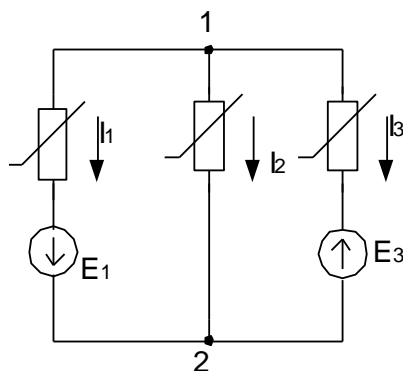


Рисунок 5.15

Всі струми направимо від точки 1 до точки 2. Характеристики елементів задано (рисунок 5.16, а).

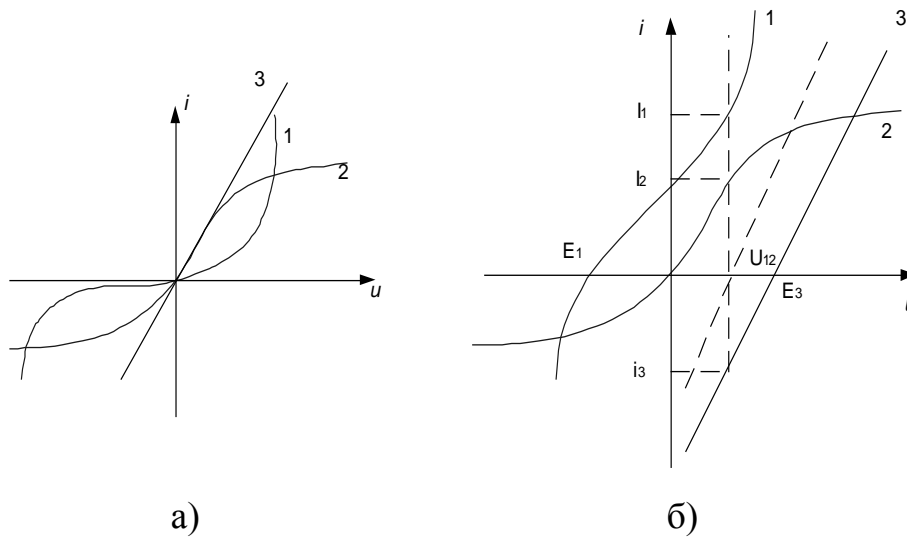


Рисунок 5.16

Побудуємо в.а.х. віток, тобто залежності струмів в вітках від напруги  $u_{12}$ . Оскільки в вітці 1 е.р.с. направлена за струмом, то в.а.х. першої вітки зміщена вліво на величину е.р.с.  $E_1$  порівняно з в.а.х. елемента 1, в.а.х. другої вітки збігається з в.а.х. елемента 2, а в.а.х. третьої вітки зміщена вправо на величину е.р.с.  $E_3$  (рисунок 5.16, б).

Побудуємо нову функцію (пунктир на рисунку 5.16, б)

$$i_1 + i_2 + i_3 = f(u_{12}). \quad (5.4)$$

Згідно з першим законом Кірхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (5.5)$$

тому точка перетину створеної функції (5.4) з віссю абсцис визначає напругу  $u_{12}$  і, отже, за відповідними характеристиками – струми в вітках.

Графічні методи не потребують обчислень, досить прості для засвоєння, можуть використовуватися для широкого класу кіл, але громіздкі у використанні, а їх точність визначається точністю графічних побудов.

### Графоаналітичний метод

В колі, яке містить джерело, лінійний і нелінійний елементи (рисунок 5.17, а) визначимо струм графоаналітичним методом.

Припустимо, що заздалегідь із яких-небудь міркувань приблизне положення робочої точки на в.а.х. нелінійного елемента відоме. Нехай вона знаходиться на ділянці  $ab$  (рисунок 5.17, б). Замінімо криволінійну

ділянку  $ab$  прямою лінією, яка перетинає вісь абсцис в точці  $E_0$ , подаючи тим самим нелінійний елемент віткою, яка містить лінійний опір  $r_0$  і е.р.с.  $E_0$ . Оскільки одержана лінійна характеристика зміщена відносно початку координат вправо, то е.р.с.  $E_0$  в вітці направлена назустріч струму.

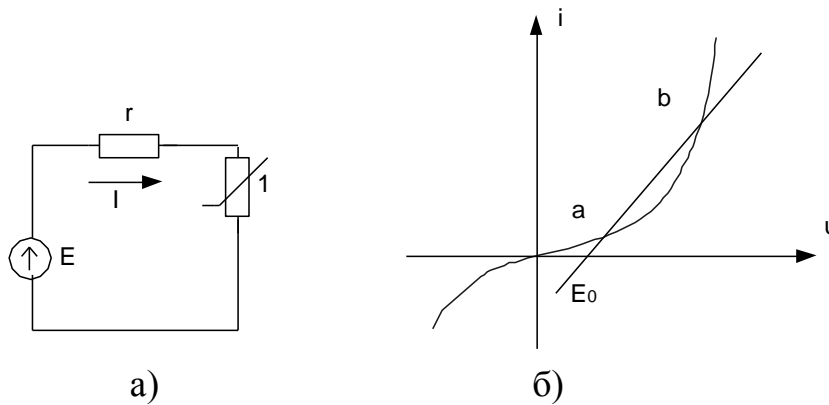


Рисунок 5.17

Таким чином, одержуємо лінійну схему заміщення (рисунок 5. 18), із якої легко визначаємо струм

$$I = \frac{E - E_0}{r + r_0}. \quad (5.6)$$

Необхідно тепер перевірити, чи знаходиться знайдене значення струму  $I$  на ділянці  $ab$ . Якщо ця умова виконується, то розрахунок закінчено. Якщо одержане значення струму не потрапляє на цю ділянку, то необхідно вибрати нову ділянку випрямлення і розрахунок повторити.

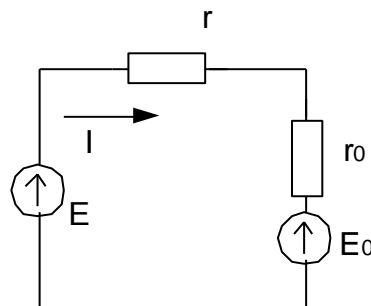


Рисунок 5.18

Якщо в електричному колі є декілька нелінійних елементів, кожен із них замінюється лінійним опором з е.р.с., складається лінійна схема заміщення, робиться її розрахунок, а всі знайдені значення струмів нелінійних елементів перевіряються на відповідність їх спрямленим ділянкам характеристики.

### Аналітичний метод

За аналітичного методу в.а.х. нелінійного елемента має бути задана у вигляді аналітичного виразу. Нехай, наприклад, характеристика нелінійного елемента в колі (рис. 6.17, а) задана виразом

$$i = a_1 u_n + a_2 u_n^2 + a_3 u_n^3, \quad (5.7)$$

де  $a_1, a_2, a_3$  – відомі коефіцієнти.

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для цього кола

$$ir + u_n = E$$

або з врахуванням (5.7)

$$ra_3 u_n^3 + ra_2 u_n^2 + (ra_1 + 1)u_n - E = 0. \quad (5.8)$$

Розв'язуючи це нелінійне алгебраїчне рівняння, знаходимо  $u_n$  і за допомогою (5.7) шуканий струм.

Розв'язок задачі і в цьому випадку наближений, тому що нелінійне алгебраїчне рівняння майже ніколи точно не розв'язується.

Одним із досить простих і ефективних методів наближеного розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь є метод Ньютона-Рафсона. Нехай маємо нелінійне алгебраїчне рівняння

$$f(x) = 0. \quad (5.9)$$

Припустимо, що  $x_0$  – нульове наближене рішення цього рівняння. Позначимо наступний наближений розв'язок

$$x_1 = x_0 + h, \quad (5.10)$$

де  $h$  – поправка до нульового наближення.

Підставимо (5.10) в (5.9) і розкладемо функцію в ряд Тейлора, обмежившись двома членами.

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0. \quad (5.11)$$

Із (5.11) знаходимо значення поправки

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (5.12)$$

де  $f'(x_0)$  – значення похідної функції  $f(x)$  за  $x=x_0$ .

Згідно з (5.10)

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \\x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

**Приклад 5.1.** Нехай в рівнянні (5.8) коефіцієнти мають значення:

$$a_1=0,5 \text{ A/B}, \quad a_2=0, \quad a_3=0,25 \text{ A/B}, \quad r=1 \text{ Ом}, \quad E=5 \text{ В}.$$

Тоді (5.8) запишеться у вигляді

$$0,25u_n^3 + 1,5u_n - 5 = 0$$

або, позначивши  $u_n = x$

$$f(x) = 0,25x^3 + 1,5x - 5 = 0.$$

Використаємо нульові наближення  $x_0 = 1$ .

Перше наближення

$$x_1 = 1 - \frac{0,25 \cdot 1^3 + 1,5 \cdot 1 - 5}{0,75 \cdot 1^2 + 1,5} = 1 - (-1,444) = 2,444.$$

Друге наближення

$$x_2 = 2,444 - \frac{0,25 \cdot 2,444^3 + 1,5 \cdot 2,444 - 5}{0,75 \cdot 2,444^2 + 1,5} = 2,444 - 0,388 = 2,056.$$

Третє наближення

$$x_3 = 2,056 - \frac{0,25 \cdot 2,056^3 + 1,5 \cdot 2,056 - 5}{0,75 \cdot 2,056^2 + 1,5} = 2,056 - 0,055 = 2,001.$$

Наступного наближення можна не знаходити, оскільки  $x_2$  і  $x_3$  мало відрізняються одне від одного. Точний розв'язок рівняння  $x_0=2$ .

Таким чином

$$U_n = 2 \text{ В}, \quad i = 0,5 \cdot 2 + 0,25 \cdot 2^3 = 3 \text{ А}.$$

Якщо в.а.х. подати не степеневим поліномом, а іншими функціями (показниковими, логарифмічними і т. д.), процедура розв'язання залишається незмінною.

### 5.3 Деякі використання нелінійних кіл постійного струму

#### Стабілізація напруги на навантаженні

Для стабілізації напруги на навантаженні під час зміни величини постійної вхідної напруги або зміни опору навантаження використовуються стабілітрони (рисунок 5.19).

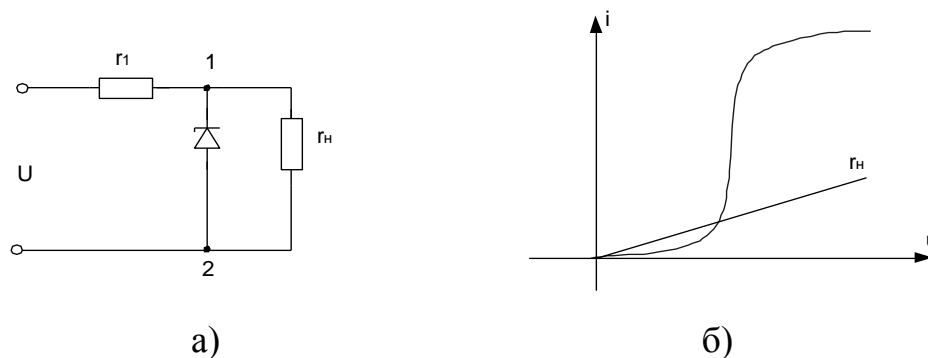


Рисунок 5.19

На рисунку 5.19, б) показано в.а.х. стабілітрона і опору навантаження. Одержимо в.а.х. паралельно з'єднаних стабілітрона і опору навантаження, додавши ординати окремих в.а.х. (крива 2, рисунок 5.20).

Визначення напруги навантаження проведемо шляхом графічного розв'язання двох рівнянь (див. рисунок 5.20).

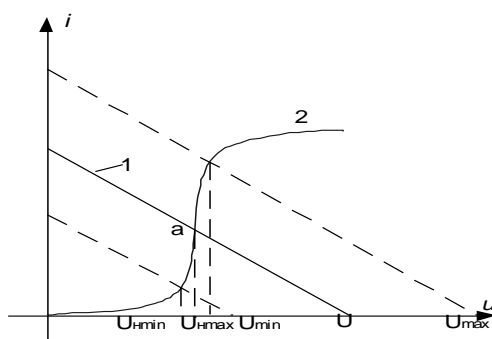


Рисунок 5.20

Проведемо пряму лінію (пряма 1), яка відповідає рівнянню

$$i = \frac{E}{r_1} - \frac{u_n}{r_1}.$$

Січна характеристик 1 і 2 дає робочу точку *a*, яка визначає режим роботи кола.

У разі зміни напруги джерела його характеристика (пряма 1) переміщується паралельно собі. Із графіків (рисунок 5.20) і переміщення робочої точки видно, що напруга на навантаженні змінюється мало. Граничні положення прямих, які нанесені пунктиром, відповідають

мінімально і максимально допустимим значенням напруги джерела  $U_{min}$  і  $U_{max}$ , за яких ще відбувається стабілізація. Перше із них визначається величиною струму навантаження, а друге – максимально допустимим струмом стабілітрона.

Стабілізатори напруги, звичайно, характеризуються коефіцієнтом стабілізації, під яким розуміють відношення відносної зміни напруги на вході до відносної зміни напруги на виході

$$K_{ст} = \frac{\Delta U_{вх} / U_{вх}}{\Delta U_{вих} / U_{вих}}$$

Цей коефіцієнт можна виразити через параметри конкретного стабілізатора.

#### Логічні схеми на діодах

На рисунку 5.21 показано логічну схему «І» на ідеальних діодах. На схемі показано лише два входи  $x_1$  і  $x_2$  але їх може бути і більше. За відсутності сигналів на входах діоди знаходяться в відкритому стані, потенціал точки  $a$  дорівнює нулю, на виході  $y$  сигнал відсутній.

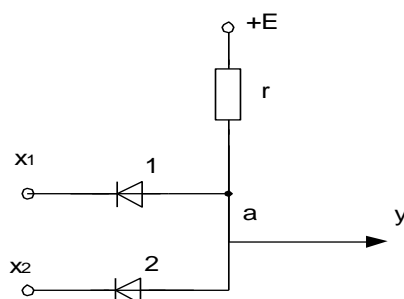


Рисунок 5.21

За появи сигналу на одному із входів, наприклад  $x_1$ , діод 1 закривається, діод 2 залишається відкритим і потенціал точки  $a$  залишається таким, що дорівнює нулю – сигналу на виході немає. Якщо сигнали з'являються одночасно на всіх входах, всі діоди закриваються, струм в колі відсутній і точка  $a$  одержує потенціал  $+E$ , на виході з'являється сигнал.

Таким чином на виході з'являється сигнал тільки коли на всіх входах є одночасно сигнали.

В таблиці 5.1 записані перетворення, які здійснює логічна схема «І».

Таблиця 5.1

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $y$   | 0 | 0 | 0 | 1 |

На рисунку 5.22 показано логічну схему «АБО» на ідеальних діодах. За відсутності сигналів на входах діоди відкриті, потенціал точки  $a$  дорівнює нулю і сигнал на виході відсутній.

Поява сигналу на одному із входів, наприклад  $x_1$ , – діод 1 залишається відкритим, потенціал точки  $a$  стає таким, що дорівнює потенціалу входу  $x_1$ , всі інші діоди закриваються і на виході з'являється сигнал. Таким чином, поява сигналу хоч би на одному вході викликає появу сигналу на виході.

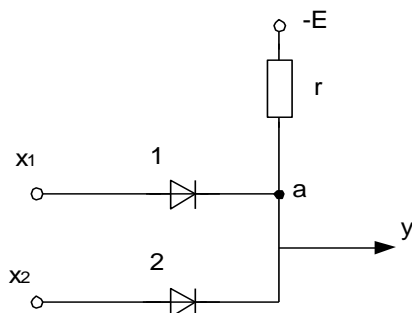


Рисунок 5.22

Перетворення, які здійснюються логічною схемою «АБО», записано в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |
|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0   |
| 1     | 0     | 1   |
| 0     | 1     | 1   |
| 1     | 1     | 1   |

#### 5.4 Загальна характеристика магнітних кіл

*Магнітним колом* називається сукупність пристроїв, переважно із феромагнітних матеріалів, призначених для створення і концентрації в певному місці магнітного потоку. Магнітні кола є невід’ємною частиною електромагнітних реле, електромагнітів, трансформаторів, двигунів, електромашинних генераторів і т. д. Феромагнітні осердя використовуються тому, що вони мають малий опір і полегшують проходження магнітного потоку.

Як відомо із курсу фізики, залежність між магнітною індукцією  $B$  і магнітною напруженістю  $H$  в феромагнітних тілах є нелінійною і являє

собою петлю гістерезису (рисунок 5.23).

Значення магнітної індукції  $B_r$  за  $H=0$  називається залишковою індукцією, а значення  $H_e$  за  $B=0$  – коерцитивною силою.

Геометричне місце вершин петель гістерезису, знятих за різних значень  $H_{max}$ , називається основною кривою намагнічення .

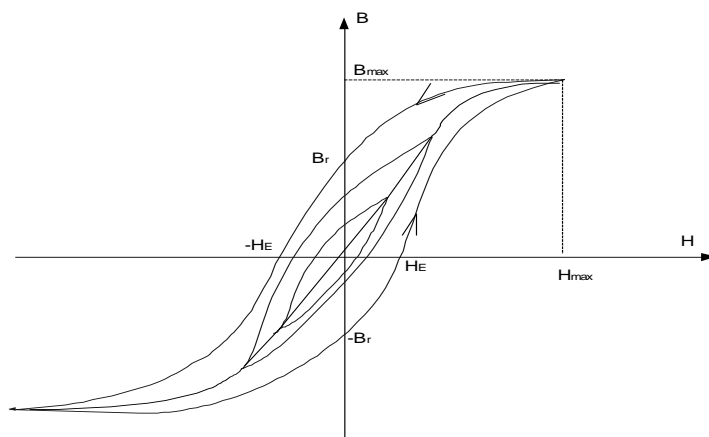


Рисунок 5.23

Потік магнітної індукції, який називається магнітним потоком  $\Phi$  через деяку поверхню  $S$ , визначається за виразом

$$\Phi = \int_s \bar{B} d\bar{S}. \quad (5.14)$$

Якщо магнітна індукція у всіх точках поверхні однакова, тобто магнітне поле однорідне, то

$$\Phi = B \cdot S. \quad (5.15)$$

Магнітний потік через замкнену поверхню завжди дорівнює нулю.

$$\oint_s \bar{B} d\bar{S} = 0. \quad (5.16)$$

Зв'язок між магнітною індукцією  $B$  і магнітною напруженістю  $H$  визначається співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (5.17)$$

де  $\mu_a$  – магнітна проникність речовини.

Для повітря  $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} / \text{м}$ .

Для феромагнітних матеріалів  $\mu_a$  величина змінна і може перевищувати  $\mu_0$  в десятки тисяч раз.

В магнітному полі виконується закон повного струму

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = i,$$

де  $i$  – повний струм, який пронизує контур інтегрування.

### 5.5 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму

Розглянемо нерозгалужене магнітне коло постійного струму, яке містить в собі осердя з феромагнітного матеріалу з поперечним перерізом  $S$ , повітряним проміжком величиною  $\delta$ , обмотку з числом витків  $W$ , через яку протікає постійний струм  $I$  (рисунок 5.24).

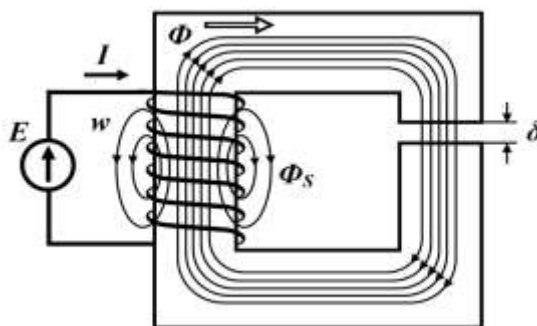


Рисунок 5.24

Струм, який протікає через обмотку, створює магнітний потік, більша частина якого замикається через осердя, а менша – через повітря навколо обмотки. Частина магнітного потоку, який замикається через осердя, називається *основним магнітним потоком*  $\Phi_0$ , а магнітний потік, який замикається через повітря, називається *потокот розсіювання*  $\Phi_s$ .

У всіх подальших міркуваннях будемо припускати:

- відсутність потоку розсіювання,
- постійність величини магнітної індукції у всіх точках поперечного перерізу,
- шлях магнітного потоку визначається за довжиною середньої лінії  $l$ .

Застосуємо до заданого магнітного кола основні співвідношення, які розглянуто в попередньому параграфі. Оскільки магнітний потік через всю довжину осердя однаковий (припущення 1), магнітне поле в осерді однорідне (припущення 2), то по всій довжині осердя його переріз всюди однаковий, то магнітна індукція в осерді  $B_c$  і магнітна індукція в проміжку  $B_0$  – однакові.

Напруженість магнітного поля в осерді  $H_c = B_c / \mu_a$  і в повітрі  $H_0 = B_0 / \mu_0$  значно відрізняються одна від одної.

Використаємо закон повного струму. Інтегрування проведемо вздовж середньої лінії осердя. Оскільки вздовж шляху інтегрування напруженість поля має два значення, то вираз складається з двох частин

$$H_c l + H_0 \cdot \delta = I \cdot W, \quad (5.19)$$

а в правій частині записується  $I \cdot W$ , оскільки струм  $I$  пронизує контур інтегрування  $W$  раз. Виразимо в (5.19) магнітну напруженість через магнітний потік

$$\frac{B_c}{\mu_0} l + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = IW; \quad \Phi_0 \frac{l}{s \mu_a} + \Phi_0 \frac{\delta}{\mu_0} = IW \quad (5.20)$$

За аналогією з електричними колами добуток  $IW$  називають *магніторушійною* силою або *намагнічувальною силою*, вираз (5.19) – другим законом Кірхгофа для магнітних кіл,  $HI$  – магнітною напругою,  $\frac{l}{s \mu_0} = R_m$  – магнітним опором, а вираз (5.16) – першим законом Кірхгофа для магнітних кіл.

Розрахунок магнітних кіл зводиться зазвичай до двох типів задач:

1. Пряма задача – за заданих геометрії магнітного кола, матеріалу осердя, магнітної індукції в деякому місці магнітного кола визначити намагнічувальну силу  $IW$ .

2. Обернена задача – за заданих геометрії, матеріалу осердя і намагнічувальних сил визначити величину магнітної індукції в деякому місці магнітного кола.

Розглянемо розв'язання більш простої прямої задачі. Нехай задані:

- довжина середньої лінії осердя  $l$ ,
- переріз осердя  $S$ ,
- величина проміжку  $\delta$ ,
- значення магнітної індукції в проміжку  $B_0$ .

Необхідно визначити намагнічувальну силу  $IW$ .

Оскільки магнітний потік по всій довжині осердя однаковий, переріз незмінний, то магнітна індукція в проміжку, як це було встановлено раніше, дорівнює магнітній індукції в осерді.

Для знаходження намагнічувальної сили скористаємося другим законом

Кірхгофа для магнітного кола (5.19), попередньо визначивши магнітні напруженості ділянок. Магнітна напруженість в повітряному проміжку визначається виразом

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0},$$

а магнітна напруженість осердя визначається за допомогою основної кривої намагнічування матеріалу осердя (рисунок 5. 25).

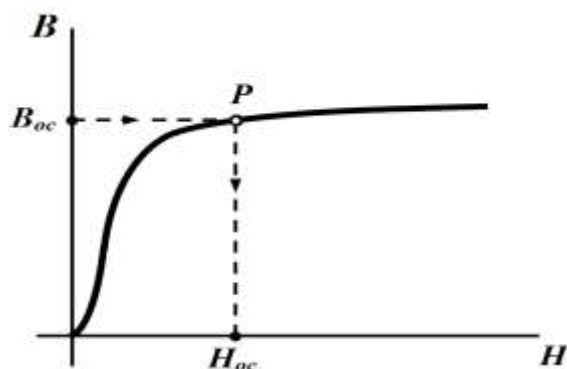


Рисунок 5.25

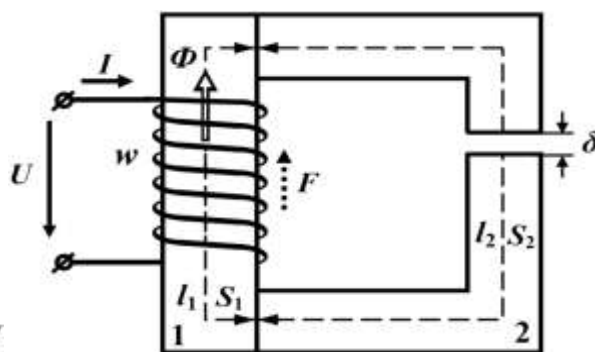


Рисунок 5.26

Якщо частина осердя (рисунок 5.26) (наприклад 1) із іншого матеріалу, то ліва частина виразу (5.19) буде складатися із трьох складових

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 \cdot \delta = IW \quad (5.21)$$

і напруженості  $H_1$  і  $H_2$ . будуть визначатися із основних кривих намагнічування відповідних матеріалів.

Якщо ділянка 1 осердя із того самого матеріалу, що і ділянка 2, але має інший переріз, то будуть різні магнітні індукції, тобто

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$$

і магнітні напруженості цих ділянок хоч і будуть визначатися по одній і тій самій кривій намагнічування (матеріал один і той самий), але будуть різними і для визначення намагнічувальної сили потрібно користуватися виразом (5.21).

Обернена задача вирішується за аналогією з нелінійними електричними колами постійного струму, наприклад, графічно.

Подамо магнітне коло (рисунок 5.24) у вигляді нелінійного електричного кола постійного струму (рисунок 5.27, а).

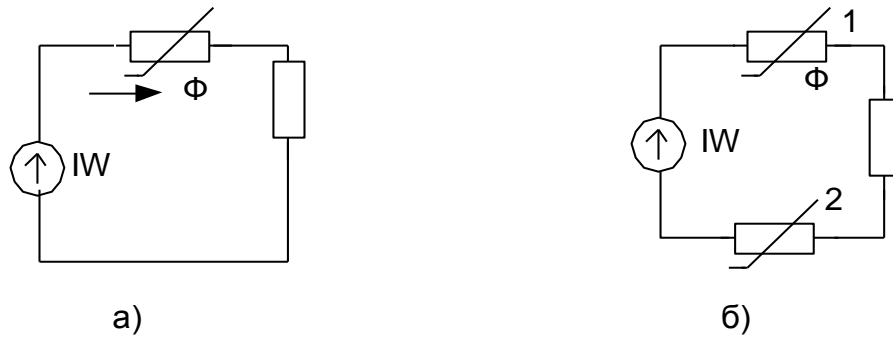


Рисунок 5.27

Як е.р.с. в ньому маємо м.р.с.  $IW$ , струм – магнітний потік  $\Phi$ , напругу – магнітну напругу  $Hl$ . Нелінійний резистор відповідає магнітному опору осердя, а лінійний резистор – магнітному опору повітряного проміжку. Замість вольт-амперних характеристик нелінійних резисторів необхідно використовувати вебер-амперні характеристики ділянок  $\Phi = f(Hl)$ . Для визначення вебер-амперної характеристики ділянки використовується характеристика магнітного матеріалу (основна крива намагнічення на рисунку 5.28, а) і складається таблиця.

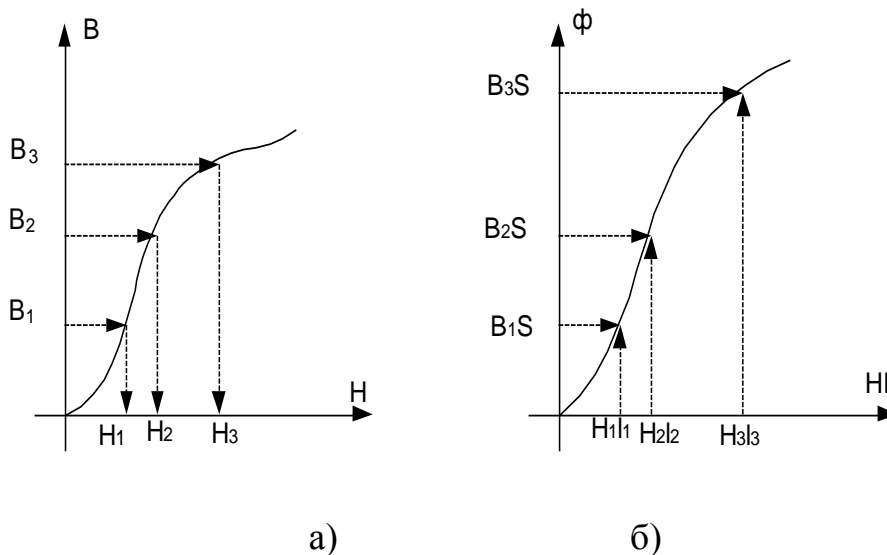


Рисунок 5.28

Таблиця 5.3

|           |        |        |        |
|-----------|--------|--------|--------|
| $B$       | $B_1$  | $B_2$  | $B_3$  |
| $H$       | $H_1$  | $H_2$  | $H_3$  |
| $\Phi=BS$ | $B_1S$ | $B_2S$ | $B_3S$ |
| $Hl$      | $H_1l$ | $H_2l$ | $H_3l$ |

Задавшись 8÷10 значеннями  $B_i$ , по кривій намагнічення визначають значення  $H_i$ ; значення їх записують в першій і другий рядок таблиці. За

одержаними значеннями  $B_i S$  і  $H_i l$  будується вебер-амперна характеристика ділянки (рисунок 5.28, б).

Подальший розрахунок аналогічний розрахунку нелінійних кіл постійного струму. Будується характеристика лінійної ділянки, потім додаються абсциси характеристик, тому що з'єднання послідовне, і визначається характеристика всього кола (товста лінія на рисунку 5.29).

За заданою намагнічувальною силою  $IW$  визначається магнітний потік  $\Phi_0$ , і за відомого перерізу магнітна індукція –  $B = \Phi_0/S$ .

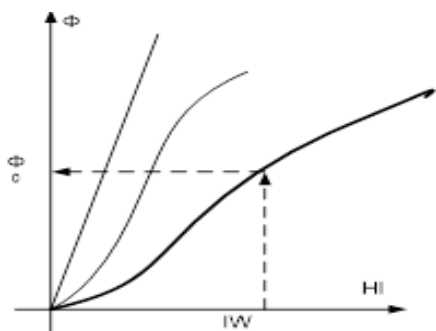


Рисунок 5.29

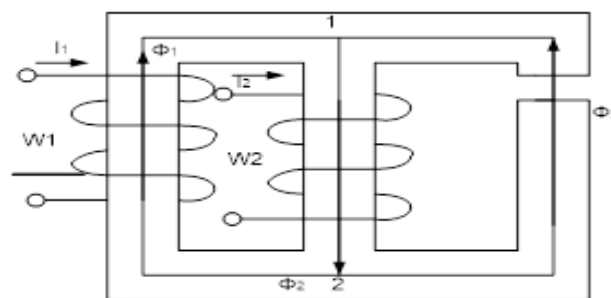


Рисунок 5.30

Аналогом магнітного кола, зображеного на рисунку 5.26, буде електричне коло, показане на рисунку 5.27, б).

## 5.6 Розгалужене магнітне коло постійного струму

Для розгалуженого магнітного кола також існують два типи задач – пряма і обернена.

Розглянемо розв'язання прямої задачі на прикладі розгалуженого магнітного кола, зображеного на рисунку 5.30.

В поданому магнітному колі три стержні, через які протікають відповідні потоки. Потоки  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  направлені згідно з намоткою обмоток і напрямками струмів  $I_1$  та  $I_2$ .

Напрямок потоку  $\Phi_3$  вибрано довільно. Позначимо переріз і довжину стержнів через  $S_i$  і  $l_i$ . Задані: геометрія і матеріал магнітного кола, намагнічувальна сила  $I_1 W_1$  і магнітна індукція в проміжку  $B_0$ . Визначити намагнічувальну силу  $I_2 W_2$ .

Приймаючи ті самі припущення, що і раніше, встановлюємо, що  $B_3 = B_0$  і магнітний потік третього стержня  $\Phi_3 = B_3 S_3$ .

Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, який складається із першого і третього стержнів. Обхід контуру виконаємо за

годинниковою стрілкою

$$H_1 l_1 - H_3 l_3 - H_0 \cdot \delta = I_1 W_1. \quad (5.22)$$

Друга і третя складові від'ємні, оскільки напрям обходу контуру і напрям магнітного потоку  $\Phi_3$  направлені назустріч один одному. Магнітна напруженість проміжку визначається за виразом  $H_0 = B_0 / \mu_0$ , а  $H_3$  – із кривої намагнічення за відомими значенням  $B_3$ .

Із (5.22) одержуємо

$$H_1 = \frac{I_1 W_1 + H_0 \delta + I_3 W_3}{l_1}.$$

Знаючи  $H_1$  із кривої намагнічення визначається  $B_1$  і магнітний потік першого стержня  $\Phi_1 = B_1 S_1$ .

За першим законом Кірхгофа для магнітного кола

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3, \quad B_2 = \Phi_2 / S_2,$$

а  $H_2$  визначається із кривої намагнічування.

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, що складається з першого та другого стержнів, одержуємо

$$H_1 L_1 + H_2 L_2 = I_1 W_1 + I_2 W_2,$$

звідки

$$I_2 W_2 = H_1 L_1 + H_2 L_2 - I_1 W_1.$$

Для розв'язання оберненої задачі, коли відомі намагнічувальні сили і необхідно визначити магнітні потоки в стержнях, звернемося до аналізу електричного кола (рисунок 5. 31).

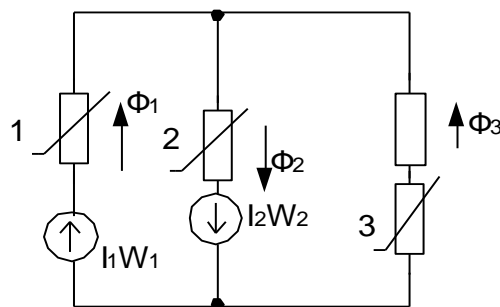


Рисунок 5.31

Визначивши вебер-амперні характеристики ділянок магнітного кола, для знаходження потоків  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  можна використати уже відомі методи розрахунку нелінійних кіл постійного струму.

## 5.7 Електричні кола змінного струму з нелінійними резисторами

У лінійних електричних колах за синусоїдної входньої напруги струми і напруги у всіх вітках також синусоїдні. В нелінійних електричних колах ця умова не виконується.

Розглянемо коло (рисунок 5.32), до складу якого входять джерело синусоїдної е.р.с.  $e = E_m \sin \omega t$  і нелінійний резистор з вольт-амперною характеристикою  $i = au^3$ .

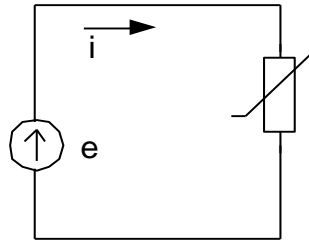


Рисунок 5.32

У цьому колі напруга на нелінійному елементі дорівнює е.р.с, тому

$$i = aE_m^3 \sin^3 \omega t = aE_m^3 \cdot \frac{3}{4} \sin \omega t - aE_m^3 \cdot \frac{1}{4} \sin 3\omega t, \quad (5.23)$$

тобто за входньої синусоїдної дії струм крім першої гармоніки має ще і третю гармоніку. Це твердження можна довести і графічним шляхом. Зобразимо половину хвилі напруги на нелінійному резисторі (рисунок 5.33, а), а біля нього вольт-амперну характеристику резистора, відклавши по осі ординат  $u$ , а по осі абсцис –  $i$  (масштаб напруг для хвилі напруги і для вольт-амперної характеристики однакові).

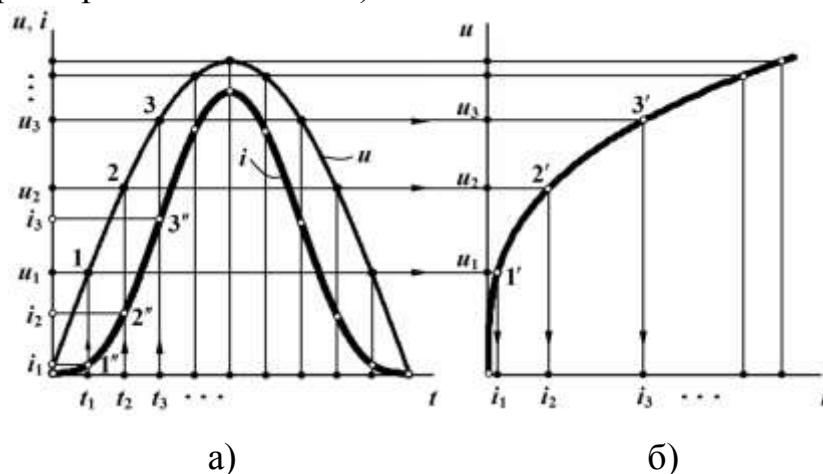


Рисунок 5.33

Побудова графіку струму  $i(t)$  проводиться таким чином.

Півперіод напруги на нелінійному елементі ділиться на  $n$  однакових проміжків. В момент часу  $t_1$  – кінець першого інтервалу – визначається значення напруги  $u_1$  (точка 1 на рисунку 5.33, а). За одержаним значенням напруги  $u_1$  визначається точка 1' на в.а.х. (рисунок 5.33, б) і відповідне їй значення струму  $i_1$ . Величина цього струму у відповідному масштабі відкладається в момент  $t_1$  на першому графіку і отримуємо точку 1'' графіка струму. Аналогічно отримуємо всі інші точки кривої струму. За необхідності будується крива струму і на другому півперіоді. Із побудови чітко видно, що крива струму не синусоїдальна.

Якщо коло містить тільки резистори, лінійні і нелінійні, то вхідний струм можна знайти графічно, як це показано вище, попередньо знайшовши в.а.х. всього кола. Визначення струму в інших вітках з нелійними резисторами пов'язано з громіздкими побудовами і в цих випадках перевагу віддають іншим наближеним методам.

## 5.8 Метод еквівалентних синусоїд

Коли наявність нелінійних елементів не викликає значних спотворень синусоїдної величини, зручно вважати струми і напруги в вітках еквівалентними синусоїдами, характеристики нелінійних елементів зображати не для миттєвих, а для діючих значень і тоді для кіл з нелійними резисторами придатні методи, які використовують для кіл постійного струму.

Розглянемо коло (рисунок 5.34, а), яке містить джерело синусоїдної е.р.с. і два нелінійних резистори, характеристики яких для діючих значень зображено на рисунку 5.34, б).

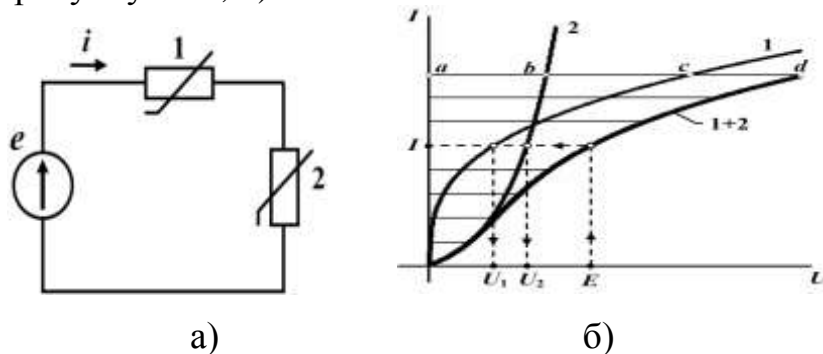


Рисунок 5.34

Вважаючи струм синусоїдним, знаходимо в.а.х. всього кола за послідовного з'єднання елементів і за відомим діючим значенням е. р. с.  $E$  визначаємо діюче значення струму в колі.

Аналогічно проводиться розрахунок і у випадку більш складних нелінійних кіл змінного струму.

Побудова в.а.х. всього кола за наявності реактивних елементів має свої особливості. Розглянемо коло (рисунок 5.35, а), яке містить нелінійний резистор і нелінійну індуктивність за синусоїдної вхідної дії. Не дивлячись на те, що струм в колі буде не синусоїдним, як і раніше, використовуємо еквівалентні синусоїди і в.а.х. для діючих значень

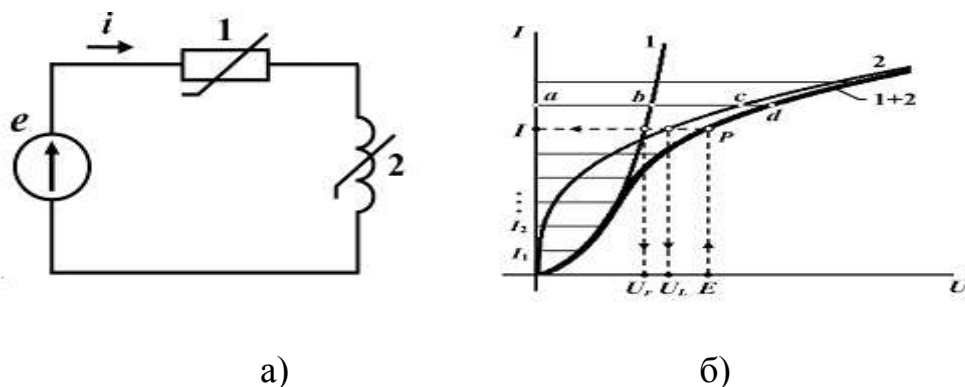


Рисунок 5.35

Для одержання результуючої в.а.х. всього кола за послідовного з'єднання потрібно додавати діючі значення напруг елементів за одного і того самого струму, але за наявності реактивних елементів таке додавання має бути геометричним. Наприклад, для одержання точки *a* в.а.х. необхідно  $U_a = \sqrt{U_{br}^2 + U_{ca}^2}$ , тому що вектор напруги на резисторі і індуктивності перпендикулярні один до одного. Інші точки характеристики знаходяться подібним чином.

### 5.9 Котушка з феромагнітним осердям

Як уже відмічалось, феромагнітні тіла мають малий магнітний опір, що забезпечує великий магнітний потік і велику індуктивність порівняно з такою котушкою без осердя.

Магнітний потік  $\Phi$ , що зчеплений з котушкою, складається з двох потоків: потоку  $\Phi_o$  – основного магнітного потоку, що замикається в осерді, та  $\Phi_s$  – потоку розсіювання, який замикається в повітрі.

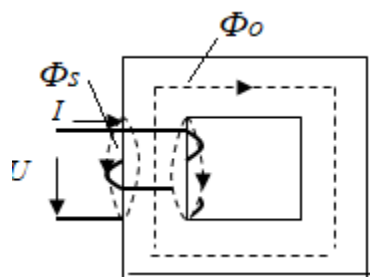


Рисунок 5.36

За другим законом Кірхгофа маємо:

$$u = i r + \frac{d\psi}{dt} = i r + \frac{d\psi_s}{dt} + \frac{d\psi_o}{dt} \quad (5.24)$$

Зв'язок між основним потокозчепленням  $\psi_o = W\Phi_o$  і струмом нелінійний, а зв'язок між потокозчепленням розсіювання  $\psi_s$  і струмом є лінійним

$$\psi_s = L_s i,$$

де  $r$  – опір обмотки;

$L_s$  – індуктивність розсіювання, яка враховує потік розсіювання.

З урахуванням цього отримуємо:

$$u = ri + L_s \frac{di}{dt} + W \frac{d\Phi_o}{dt}, \quad (5.25)$$

самоіндукції за зміни основного магнітного потоку

$$W \frac{d\Phi_o}{dt} = u_o. \quad (5.26)$$

Вважатимемо для спрощення, що можна знехтувати активним опором  $r$  обмотки і потоком розсіювання. Залишиться тільки остання складова

$$u = u_o = W \frac{d\Phi_o}{dt}. \quad (5.27)$$

Якщо основний магнітний потік змінюється за синусоїдним законом  $\Phi_o = \Phi_{mo} \sin \omega t$ , то напруга  $u_o$  і за зроблених допущень вхідна напруга змінюються за синусоїдним законом

$$u = u_o = W\Phi_{mo} \omega \cos \omega t. \quad (5.28)$$

Амплітуда напруги  $U_{mo} = W\Phi_{mo} 2\pi f.$

Якщо переріз осердя однаковий по всій довжині, то

$$\Phi_{mo} = B_m S, \quad (5.29)$$

де  $S$  – переріз осердя,

$B_m$  – амплітуда магнітної індукції в осерді і

$$U_{mo} = 2 \pi W S f B_m.$$

Діюче значення напруги

$$U_o = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} W S f B_m = 4,44 \cdot W S f B_m. \quad (5.30)$$

Визначимо форму кривої струму графічно згідно з підрозділом 5.7,

враховуючи, що за змінного магнітного потоку характеристикою феромагнітного матеріалу є петля гістерезису (рисунок 5.37).

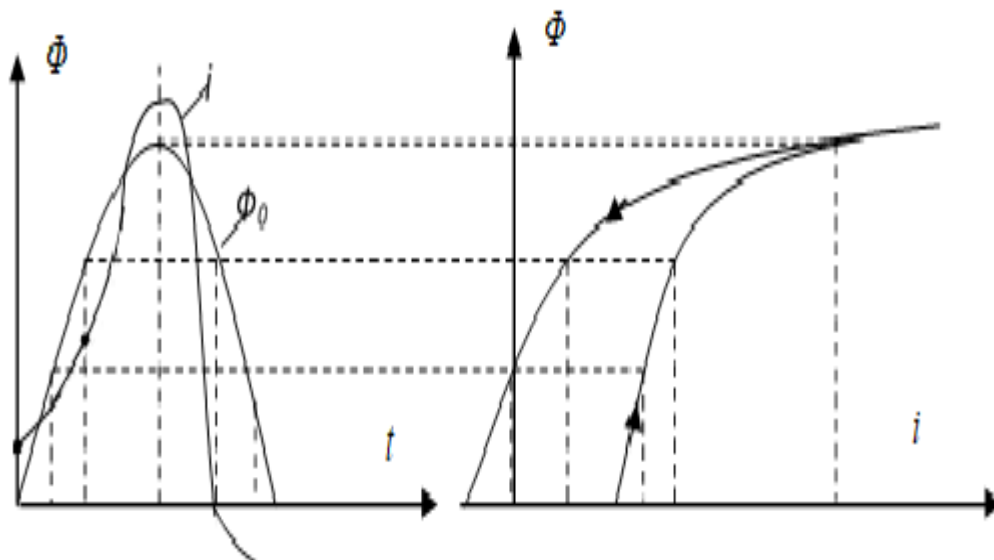


Рисунок 5.37

Як і можна було чекати, крива струму не синусоїдальна і випереджає основний магнітний потік за фазою. Величина кута випередження залежить від ширини петлі гістерезису. Використаємо для аналізу метод еквівалентних синусоїд. Замінімо криву струму еквівалентною синусоїдою і побудуємо векторну діаграму (рисунок 5.38, а).

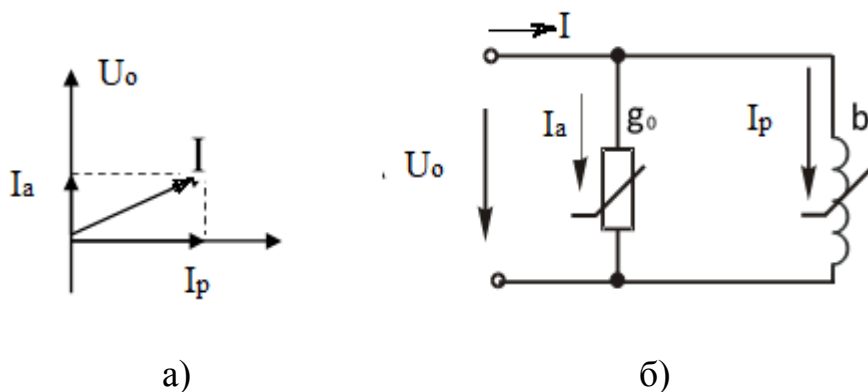


Рисунок 5.38

Із векторної діаграми видно, що напруга на котушці випереджує струм на кут менший, ніж  $90^\circ$ , що відповідає активно-індуктивному навантаженню. Не дивлячись на те, що активний опір обмотки взято таким, що дорівнює нулю, в котушці є втрати, пов'язані з втратами в осерді на гістерезис  $P_H$  і вихрові струми  $P_B$ . Ці втрати звичайно називають втратами в сталі.

$$P_{cm} = P_{\Gamma} + P_B. \quad (5.31)$$

Втрати від гістерезису викликаються незворотними процесами в сталі під час зміни орієнтації областей, що довільно намагнічені і пропорційні частоті

$$P_{\Gamma} = k_I f.$$

Під дією змінного магнітного потоку в осерді наводиться е.р.с., що викликає струми в осерді, які називають вихровими. Втрати від дії цих струмів пропорційні квадрату частоти

$$P_B = k_{\Gamma} f^2.$$

Струм на векторній діаграмі можна розкласти на дві складові – струм втрат  $I_B$ , який збігається за фазою з напругою, і струм намагнічування  $I_H$ , який збігається за фазою з магнітним потоком.

Схему заміщення, яка відповідає векторній діаграмі, показано на рисунок 5.38, б). Нелінійна провідність  $g_o$  характеризує втрати в сталі, а нелінійна індуктивність – основний магнітний потік.

Для побудови векторної діаграми котушки з осердям з урахуванням втрат в обмотці та індуктивності розсіювання запишемо рівняння (5.25) в комплексній формі

$$\underline{U} = r\underline{I} + j\omega L_s \underline{I} + \underline{U}_o. \quad (5.32)$$

Звідси видно, що вектор вхідної напруги  $\underline{U}$  складається із суми трьох складових – напруги  $\underline{U}_o$ , напруги на активному опорі обмотки  $r\underline{I}$ , яка збігається за напрямом зі струмом, і напруги індуктивності розсіювання  $jx_s \underline{I}$ , яка випереджає струм на кут  $90^\circ$ . Векторну діаграму котушки показано на рисунок 5.39, а), а схему заміщення – на рисунку 5.39, б).

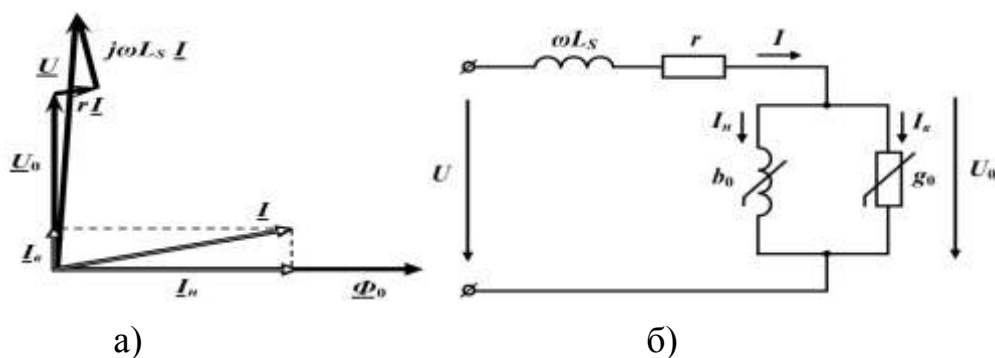


Рисунок 5.39

Для розрахунку котушок з феромагнітними матеріалами характеристики матеріалів звичайно задаються у вигляді нелінійних залежностей  $P_o = f_1(B_m)$ ,  $Q_o = f_2(B_m)$  (рисунок 5.40), де  $P_o$  і  $Q_o$  відповідно, питомі

потужності активних втрат та намагнічування, тобто потужності, що відносяться до одиниці ваги осердя.

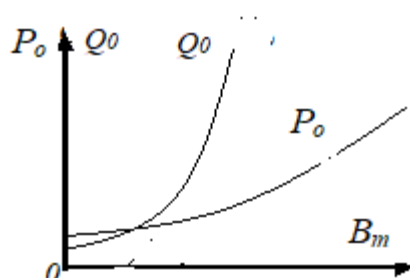


Рисунок 5.40

$$P_o = P_{cm} / G, \quad Q_o = Q / G. \quad (5.35)$$

Наведемо приклад розрахунку котушки з феромагнітним осердям за відомих: матеріалу, геометрії осердя і вхідної напруги. Розрахунок проводиться за умовами зміни всіх несинусоїдальних величин еквівалентними синусоїдами. Спочатку задаються першим наближенням діючого значення напруги  $U_o^{(1)}$ .

Звичайно беруть

$$U_o^{(1)} \approx (0,85 \div 0,9) U, \quad (5.35)$$

де  $U$  – вхідна напруга.

Знаючи  $U_o^{(1)}$ , знаходиться перше наближення амплітуди магнітної індукції із (5.30).

$$B_m^{(1)} = U_o^{(1)} / 4,44wsf.$$

Використовуючи характеристики матеріалу (рисунок 5.40), визначаємо спочатку питому потужність втрат  $P_o^{(1)}$  і питому намагнічувальну потужність  $Q_o^{(1)}$ , а після цього і повні значення  $P_{cm}^{(1)}$  та  $Q^{(1)}$

$$P_{cm}^{(1)} = P_o^{(1)} G, \quad Q^{(1)} = Q_o^{(1)} G.$$

Визначаємо струми в паралельних вітках схеми заміщення

$$I_g^{(1)} = P_{cm}^{(1)} / U_o^{(1)}, \quad I_n^{(1)} = Q^{(1)} / U_o^{(1)},$$

і комплексне значення струму в нерозгалуженій частині, тобто вхідний струм

$$\underline{I} = I_g - jI_n.$$

За відомих  $r$  і  $L_s$  згідно з (5.32) знаходиться вхідна напруга

$$\underline{U}^{(1)} = r\underline{I}^{(1)} + j\omega L_s \underline{I}^{(1)} + \underline{U}_o^{(1)}.$$

Одержане значення  $U^{(1)}$ , як правило, буде відрізнитись від заданого, тому необхідно взяти нове значення  $U^{(2)}$  – друге наближення і повторити розрахунок. Графік, побудований за одержаними значеннями  $U_o^{(k)}$  і  $U^{(k)}$ ,

дозволяє знайти значення  $U_o$  і  $U$  (рисунок 5.41), а також вхідний струм  $I$  та значення  $g_o$  і  $b_o$  для заданого режиму  $g_o = I_e / U_o$ ,  $b_o = I_n / U_o$

В багатьох випадках для спрощення розрахунків нехтують втратами в сталі і в обмотці котушки з осердям та користуються нелінійною в.а.х. для діючих значень.

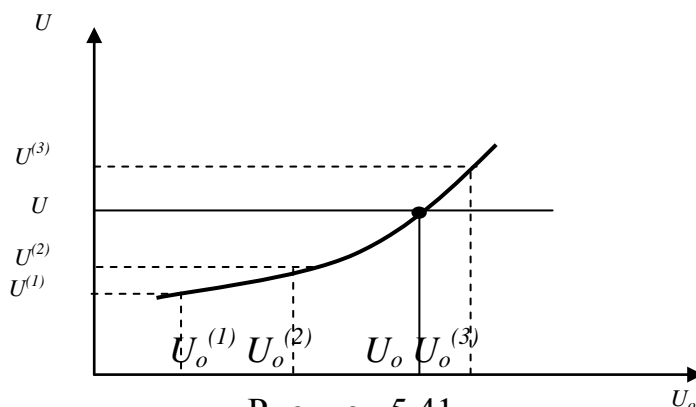


Рисунок 5.41

## 5.10 Ферорезонанси

Розглянемо контур, який містить послідовне з'єднання нелінійної індуктивності і лінійної ємності (рисунок 5.42). Знехтуємо втратами в котушці, струми і напруги будемо вважати еквівалентними синусоїдами та знайдемо в.а.х. усього кола (рисунок 5.43).

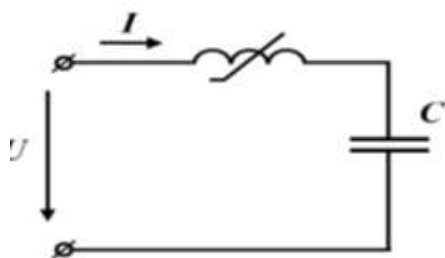


Рисунок 5.42

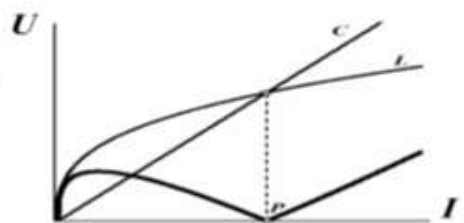


Рисунок 5.43

За другим законом Кірхгофа  $\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C$ , але оскільки напруги на індуктивності і ємності направлені назустріч одна одній, то модуль вхідної напруги

$$U = |U_L - U_C|. \quad (5.35)$$

Для побудови в.а.х. всього кола напруги  $U_L$  і  $U_C$  віднімаються одна від одної. Точка  $a$  на характеристиці, де  $U_L = U_C$ , є точкою резонансу. На відміну від резонансу в послідовному лінійному контурі, де резонансу можна досягти, змінюючи величину ємності, індуктивності або частоти, в нелінійному послідовному контурі резонансу можна досягти ще і зміною напруги, тому такий резонанс називають *ферорезонансом* напруги. По суті,

це теж зміна індуктивності, тому що характеристика нелінійна.

Наявність спадної ділянки на в.а.х. всього кола викликає появу деяких ефектів, які принципово неможливі в лінійному колі.

Розглянемо в.а.х. з урахуванням втрат. Наявність активного опору і напруги на ньому піднімає характеристику і вона буде мати вигляд, показаний на рисунку 5.44.

Якщо на вході схеми (див. рис. 5.43) встановити пристрій, який регулює величину вхідної напруги (наприклад, автотрансформатор), то у разі збільшення напруги від нуля до  $U$  і у разі зменшення її до нуля струм в колі два рази зміниться стрибком. У випадку збільшення напруги робоча точка

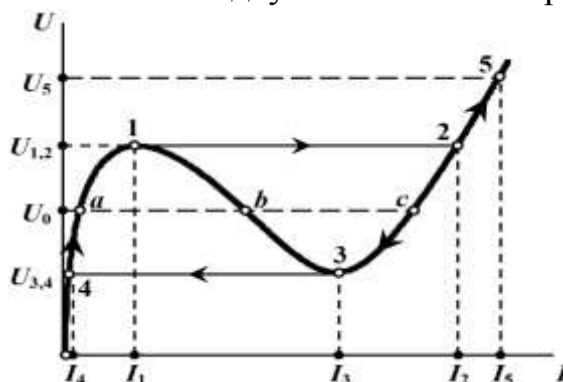


Рисунок 5.44

із точки 1 стрибком переміщується в точку 2, а у разі зменшення напруги – із точки 3 в точку 4. Така стрибкоподібна зміна струму за малих відхилень напруги називається *тригерним ефектом*.

Явище ферорезонансу напруг можна використовувати для стабілізації вихідної напруги за зміни діючого значення вхідної напруги.

На рисунку 5.45, а), показано принципову схему ферорезонансного стабілізатора напруги, а на рисунку 5.45, б) – вольт-амперну характеристику.

У разі зміни вхідної напруги від  $U_1^{(1)}$  до  $U_1^{(2)}$  з в.а.х. всього кола визначають вхідні струми  $I^{(1)}$  та  $I^{(2)}$ , а з характеристики індуктивності – вихідні напруги  $U_2^{(1)}$  і  $U_2^{(2)}$ , які відповідають струмам  $I^{(1)}$  та  $I^{(2)}$ . Із графіків видно, що значним змінам напруги відповідають незначні зміни вихідної напруги.

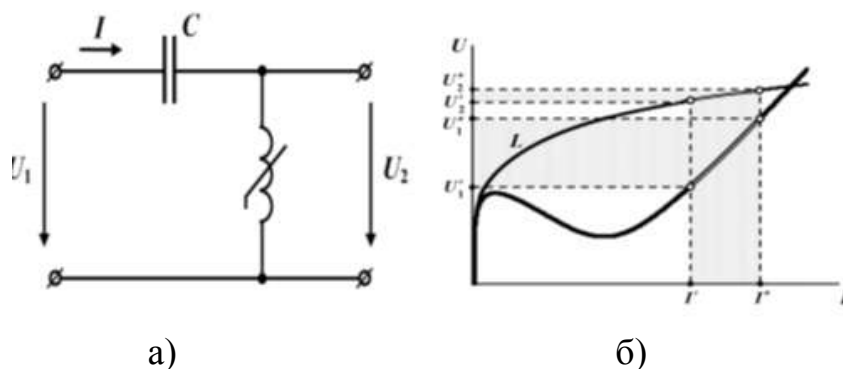


Рисунок 5.45

У випадку паралельного з'єднання нелінійної індуктивності і лінійної ємності (рисунок 5.46, а) має місце *ферорезонанс струмів*.

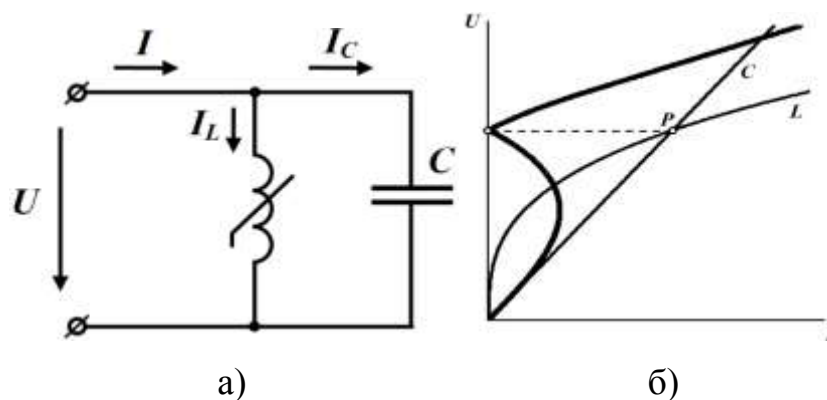


Рисунок 5.46

### 5.11 Трансформатор з феромагнітним осердям

Якщо на осердя котушки, яка розглянута в попередньому підрозділі, помістити ще одну обмотку, то одержимо простий трансформатор, який зображено на рисунок 5.47.

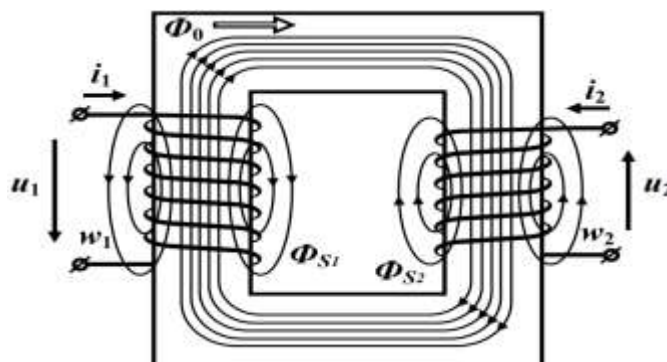


Рисунок 5.47

Основний магнітний потік  $\Phi_o$ , що проходить через осердя, наводить е.р.с. в обмотках. В первинній обмотці, яка приєднана до джерела живлення з напругою  $u_1$ , е.р.с.

$$e_1 = -W_1 \frac{d\Phi_o}{dt},$$

а у вторинній обмотці, до якої приєднується навантаження,

$$e_2 = -W_2 \frac{d\Phi_o}{dt},$$

де  $W_1, W_2$  – число витків відповідно первинної і вторинної обмоток.

Якщо вважати всі струми і напруги синусоїдними, то

$$E_1 = -j4.44W_1f\Phi_o, \quad E_2 = -j4.44W_2f\Phi_o.$$

Звідси одержуємо співвідношення

$$n = E_1 / E_2 = W_1 / W_2, \quad (5.36)$$

яке характеризує основні властивості трансформатора – перетворювати напругу – і називається коефіцієнтом трансформації.

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа.

Для першого контуру

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{s1} \underline{I}_1 + \underline{U}_o, \quad (5.37)$$

де  $\underline{U}_o = -\underline{E}_1$ .

Для другого контуру

$$\underline{E}_2 = r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_{s2} \underline{I}_2 + \underline{U}_2, \quad (5.38)$$

де  $L_{s1}, L_{s2}$  – індуктивності розсіювання первинної і вторинної обмоток.

Для побудови схеми заміщення і векторної діаграми трансформатора звичайно користуються приведеними параметрами вторинної обмотки. Вторинну обмотку замінюють еквівалентною обмоткою з числом витків, що дорівнює числу витків первинної обмотки. Для того, щоб режим роботи трансформатора не змінився, необхідно виконати рівність магніторушійних сил  $i_2 W_2 = i'_2 W'_2 = i'_2 W_1$ .

Враховуючи (5.36), одержуємо, що приведені значення струму вторинної обмотки

$$i'_2 = i_2 (W_2 / W_1) = i_2 / n. \quad (5.39)$$

Аналогічно 
$$e'_2 = -W_2 \frac{d\Phi_o}{dt} = \frac{W_1}{W_2} \left( -W_2 \frac{d\Phi_o}{dt} \right) = n e_2 = e_1. \quad (5.40)$$

Запишемо рівняння (5.38) для приведених значень

$$\underline{E}'_2 / n = r_2 \underline{I}'_2 n + j\omega L_{s2} \underline{I}'_2 n + \underline{U}_2$$

або

$$\underline{E}'_2 = r_2 \underline{I}'_2 n^2 + j\omega L_{s2} \underline{I}'_2 n^2 + n \underline{U}_2.$$

Позначимо 
$$\underline{U}'_2 = n \underline{U}_2, \quad r'_2 = n^2 r_2, \quad L'_{s2} = n^2 L_{s2},$$

Тоді 
$$\underline{E}'_2 = r'_2 \underline{I}'_2 + j\omega L'_{s2} \underline{I}'_2 + \underline{U}'_2. \quad (5.41)$$

Магніторушійна сила, яка визначає основний магнітний потік, складається із двох складових –  $i_1 W_1 + i_2 W_2$ .

Конструкція трансформаторів звичайно така, що за зміни навантаження в деяких границях магнітний потік в осерді практично не змінюється, тому магніторушійна сила залишається незмінною. Якщо трансформатор працює в режимі холостого ходу ( $i_2 = 0$ ), то

$$i_1 W_1 + i_2 W_2 = i_o W_1, \quad (5.42)$$

де  $i_o$  – струм холостого ходу.

Рівність (5.42) запишемо у вигляді

$$i_1 W_1 + i_2' W_1 = (i_1 + i_2') W_1 = i_o W_1.$$

Звідси

$$i_o = i_1 + i_2',$$

або

$$\underline{I}_o = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2. \quad (5.43)$$

Струм  $I_o$  називається струмом намагнічування.

На підставі рівнянь (5.37), (5.41) і (5.43) можна побудувати векторну діаграму (рисунок 5.48,).

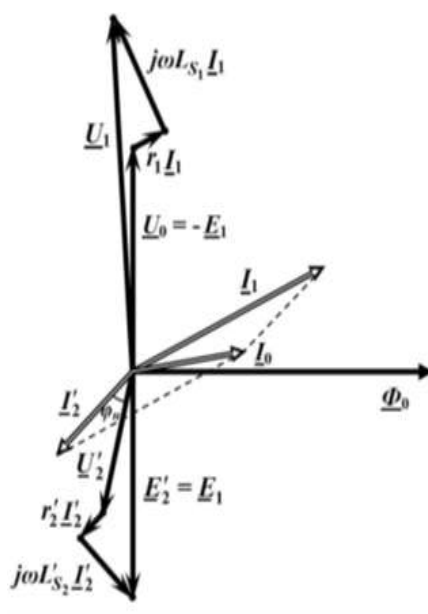


Рисунок 5.48

та схему заміщення трансформатора (рисунок 5.49).

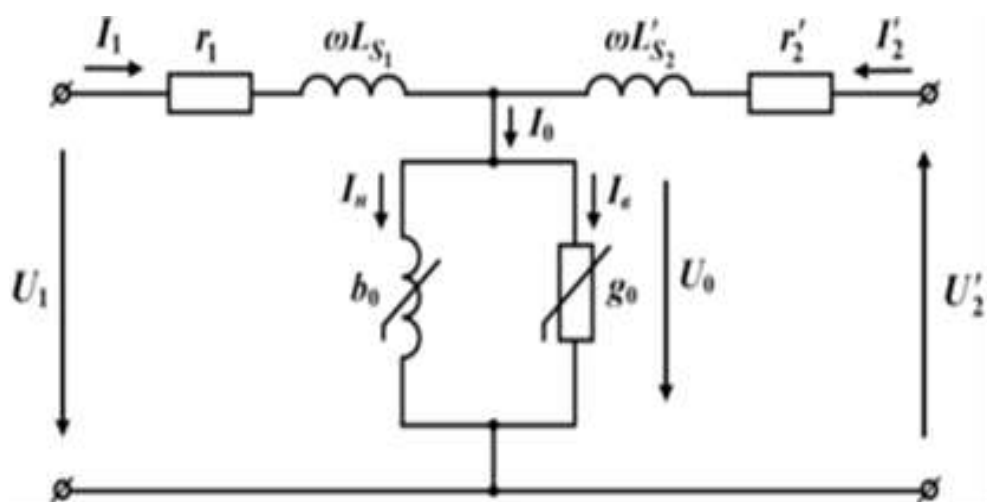


Рисунок 5.49

Параметри схеми заміщення звичайно визначають із дослідів холостого ходу і короткого замикання.

В режимі холостого ходу можна знехтувати спадом напруги на опорах  $r_1$  і  $x_{S1}$  та вважати, що  $\underline{U}_1 = \underline{U}_o$ . В цьому випадку, маючи активну потужність  $P_{1xx}$ , вхідну напругу  $U_{1xx}$  і вхідний струм  $I_{1xx}$ , визначають параметри  $b_o$  та  $g_o$ .

$$g_o = \frac{P_{1xx}}{U_{1xx}^2}; \quad y_o = \frac{I_{1xx}}{U_{1xx}};$$

$$\cos \varphi_{1xx} = \frac{P_{1xx}}{U_{1xx} I_{1xx}}; \quad b_o = y_o \sin \varphi_{1xx}.$$

Режим короткого замикання проводиться за номінального струму вторинної обмотки, тобто за зниженої вхідної напруги. Струм  $I_o$  у цьому разі значно менший струмів  $I_1$  та  $I_2$  і ним можна знехтувати. Вважаючи, що

$$r_1 = r'_2, \quad L_{S1} = L'_{S2}$$

визначають інші параметри схеми заміщення трансформатора.

$$(r_1 + r'_2) = \frac{P_{1k}}{I_{1k}^2}; \quad \cos \varphi_{1k} = \frac{P_{1k}}{U_{1k} I_{1k}};$$

$$(x_{S1} + x'_{S2}) = (r_1 + r'_2) \operatorname{tg} \varphi_{1k}$$

**Приклад:** Досліди холостого ходу і короткого замикання трансформатора дали такі результати:

$$U_{1x} = 220 \text{ В}, \quad I_{1x} = 0.565 \text{ А}, \quad P_{1x} = 30.2 \text{ Вт},$$

$$U_{1k} = 12 \text{ В}, \quad I_{1k} = 0.25 \text{ А}, \quad P_{1k} = 2.5 \text{ Вт}.$$

Коефіцієнт трансформації  $n = 5$ . Визначити параметри схеми заміщення.

### Розв'язання

За результатами холостого ходу визначаємо

$$g_o = \frac{P_{1x}}{U_{1x}^2} = \frac{30.2}{220^2} = 6.25 \cdot 10^{-4} \text{ См},$$

$$\cos \varphi_{1x} = \frac{P_{1x}}{U_{1x} I_{1x}} = \frac{30.2}{220 \cdot 0.565} = 0.243; \varphi_{1x} = 76^\circ,$$

$$b_o = g_o \operatorname{tg} \varphi_{1x} = 6.25 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ См}.$$

За результатами дослідів короткого замикання визначаємо сумарні опори обмоток приведенного трансформатора:

$$(r_1 + r_2') = \frac{P_{1k}}{I_{1k}^2} = \frac{2.5}{0.25^2} = 40 \text{ Ом},$$

$$\cos \varphi_{1K} = \frac{P_{1K}}{I_{1K} U_{1K}} = \frac{2,5}{12 * 0,25} = 0,833; \quad \varphi_{1K} = 33,5^\circ.$$

$$x_{s1} + x'_{s2} = (r_1 + r'_s) \operatorname{tg} \varphi_{1K} = 40 * 0.662 = 26.5 \text{ Ом.}$$

Враховуючи коефіцієнти трансформації, знаходимо дійсні опори обмоток:

$$r_1 = r_2' = 20 \text{ Ом} \quad r_2 = \frac{r_2'}{n^2} = \frac{20}{25} = 0.8 \text{ Ом}$$

$$x_{s1} = x_{s2}' = 13.25 \text{ Ом} \quad x_{s2} = \frac{x_{s2}'}{n^2} = \frac{13.25}{25} = 0.54 \text{ Ом}$$

## 6 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Як уже відзначалося раніше, основна складність розрахунку перехідних процесів полягає в необхідності розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, для яких не існує регулярних методів розрахунку і доводиться використовувати різні наближені способи.

### 6.1 Метод умовної лінеаризації

Цей метод полягає в тому, що, якщо нелінійний елемент заданий характеристикою  $y = f(x)$ , то на першому етапі нелінійна характеристика замінюється лінійною  $y = ax$ , визначається одна із змінних  $y$  або  $x$  із розв'язку лінійного диференціального рівняння, а друга змінна  $x$  або  $y$  знаходиться із нелінійної характеристики.

Розглянемо використання цього методу на прикладі вмикання нелінійної котушки з активним опором  $r$  на постійну напругу (рис. 6.1).

Нелінійне диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = U . \quad (6.1)$$

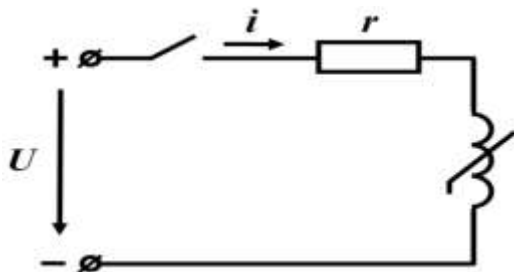


Рисунок 6.1

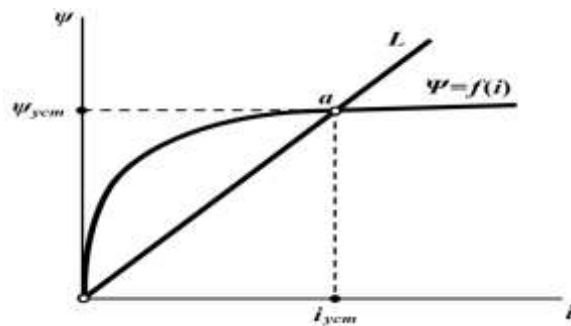


Рисунок 6.2

Характеристика індуктивності нелінійна (рис. 6.2), але на першому етапі уявляємо її лінійною, де точка  $a$  – точка усталеного стану, за якого струм

$$I_{уст} = U / r. \quad (6.2)$$

Така зміна дозволяє записати

$$\psi = Li \quad ; \quad L = \psi_o / I_{уст} \quad (6.3)$$

і

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{r}{L}\psi = U . \quad (6.4)$$

Розв'язуючи це рівняння за нульових початкових умов, одержуємо

$$\psi = \psi_{ycm}(1 - e^{-(r/L)t}). \quad (6.5)$$

Для знаходження струму як функції часу за відомими значеннями  $\psi$  використовується нелінійна характеристика, а не співвідношення (6.3). В цьому прикладі змінна  $\psi$  знаходиться за лінеаризованою характеристикою, а змінна  $i$  – з урахуванням нелінійності.

## 6.2 Метод кусково-лінійної апроксимації

Під час розв'язування задачі цим методом нелінійна характеристика подається декількома відрізками прямих (рис. 6.3).

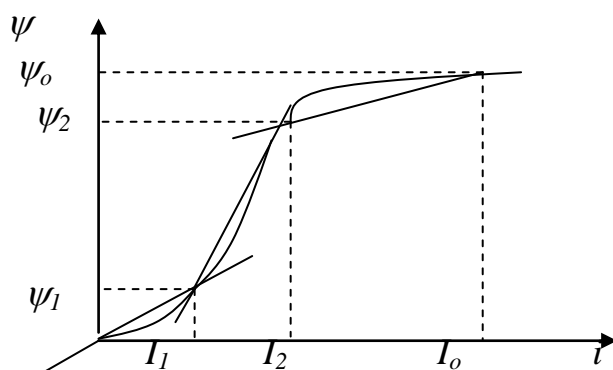


Рисунок 6.3

Кількість відрізків визначається видом характеристики і бажаною точністю розрахунків. В розглянутому прикладі таких відрізків три. Відповідно для кожного відрізка диференціальне рівняння буде лінійним, водночас кінцеві значення неперервних змінних (струму через індуктивність або напруги на ємності) однієї ділянки мають бути початковими значеннями наступної ділянки.

Розглянемо використання методу кусково-лінійної апроксимації на прикладі (див. рис. 6.1).

Для першої ділянки

$$L_1 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad (6.6)$$

де

$$L_1 = \psi_1 / I_1.$$

Розв'язок цього лінійного рівняння, як відомо, має вигляд

$$i = i_{np} + i_s = I_o + A_1 e^{p_1 t},$$

де  $I_o = U / r$  – усталене значення струму,

$A_1$  – стала інтегрування,

$p_1 = - (r/L_1)$  – корінь характеристичного рівняння.

За нульових початкових умов

$$i = I_o (1 - e^{p_1 t}), \quad 0 < t < t_1 \quad (6.7)$$

Це рівняння справедливе лише для проміжку часу  $0 < t < t_1$ .

В момент часу  $t_1$  струм набуває значення  $I_1$ , тому

$$I_1 = I_o (1 - e^{-\frac{r}{L_1} t_1}) \quad (6.8)$$

$$t_1 = \frac{L_1}{r} \ln \frac{I_o}{I_o - I_1}.$$

$$L_2 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad (6.9)$$

де

$$L_2 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{I_2 - I_1}.$$

Розв'язок цього рівняння

$$i = i_{np} + i_e = I_o + A_2 e^{p_1(t-t_1)},$$

де  $I_o$  – усталене значення струму,

$$p_2 = -(r/L_2).$$

В показнику експоненти записано не  $t$ , а  $t - t_1$ , тому що перехідний процес для другої ділянки починається не з нуля часу, а в момент  $t_1$ .

Стала інтегрування  $A_2$  визначається із початкових умов для другої ділянки, тобто за  $t = t_1$ ,  $i = I_1$ .

$$\text{В цьому випадку} \quad I_1 = I_o + A_2 ; \quad A_2 = I_1 - I_o$$

$$\text{і} \quad i = I_o + (I_1 - I_o) e^{-\frac{r}{L}(t-t_1)} \quad t_1 < t < t_2 \quad (6.10)$$

Вираз (6.10) правильний і для  $t=t_2$ , коли струм набуває значення  $I_2$ . Із цієї умови визначається момент  $t_2$  за допомогою рівняння

$$i_2 = I_o + (I_1 - I_o) e^{-\frac{r}{L}(t_2 - t_1)},$$

звідки

$$t_2 = \frac{L_2}{r} \cdot \ln \frac{I_1 - I_o}{I_2 - I_o} + \frac{L_1}{r} \cdot \ln \frac{I_o}{I_o - I_1}. \quad (6.11)$$

Аналогічно ведеться розрахунок і для третьої частини ділянки

$$L_3 \frac{di}{dt} + ri = U, \quad L_3 = \frac{\psi_0 - \psi_2}{I_0 - I_2},$$

$$i = I_0 + A_3 e^{p_3(t-t_2)}, \quad p_3 = -\frac{r}{L_3}$$

Початкові умови для третьої ділянки:

$$\text{за } t = t_2 \quad i = I_2,$$

а отже

$$A_3 = I_2 - I_0$$

$$i = I_0 + (I_2 - I_0) e^{p_3(t-t_2)}, \quad t > t_2. \quad (6.12)$$

### Контрольні питання та вправи

1. Які фізичні явища можуть спостерігатись в нелінійних електричних колах і не можуть в лінійних?
2. Чому під час аналізу процесів в нелінійних електричних колах використовують, як правило, наближені методи?
3. Чим відрізняються статичні і динамічні параметри нелінійних елементів?
4. Що характеризують параметри схеми заміщення котушки з феромагнітним осердям?
5. Яким чином можна визначити параметри схеми заміщення трансформатора?
6. Побудуйте векторну діаграму трансформатора за активно-емнісного навантаження.
7. В чому полягає суть методу гармонічного балансу розрахунку нелінійних кіл в усталеному режимі?
8. В чому полягає суть методу кусково-лінійної апроксимації під час розрахунків перехідних процесів в нелінійних колах?

## 7 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 7.1 Диференціальні рівняння однорідної лінії

В попередніх розділах розглядалися електричні кола з зосередженими параметрами, тобто припускалось, що електричне поле, магнітне поле і перетворення енергії в інші види зосередженні на окремих, локальних ділянках кола.

В багатьох випадках доводиться зустрічатися з такими електричними колами, в яких не можна виділити ділянки зосереджених електричних та магнітних полів або незворотних перетворень електричної енергії. Такі кола називають колами з розподіленими параметрами, оскільки електричне поле, магнітне поле і втрати енергії розподілені вздовж всіх ділянок кола.

В колах з розподіленими параметрами напруга і струм змінюються не тільки залежно від часу, але і від віддалі. Щодо кіл з розподіленими ділянками кола – завжди можна виділити ці ділянки і характеризувати їх ємністю, індуктивністю та активним опором. За такого зображення струм в усіх точках однієї і тієї самої вітки має одне й те саме значення.

Для дослідження процесів в лінії приймаємо умову, що параметри лінії – індуктивність, активний опір проводів, ємність і активна провідність між проводами – розподілені вздовж лінії рівномірно. Таку лінію будемо називати однорідною і характеризувати питомими параметрами на одиницю довжини –  $L_o$  [Г/м],  $C_o$  [Ф/м],  $r_o$  [Ом/м],  $g_o$  [См/м], що отримали назву *первинних параметрів*.

Для складання диференціальних рівнянь виділимо на віддалі  $x$  від початку лінії ділянку лінії довжиною  $dx$  (рис. 7.1, а) і подамо її у вигляді ділянки кола з зосередженими параметрами (рис. 7.1, б).

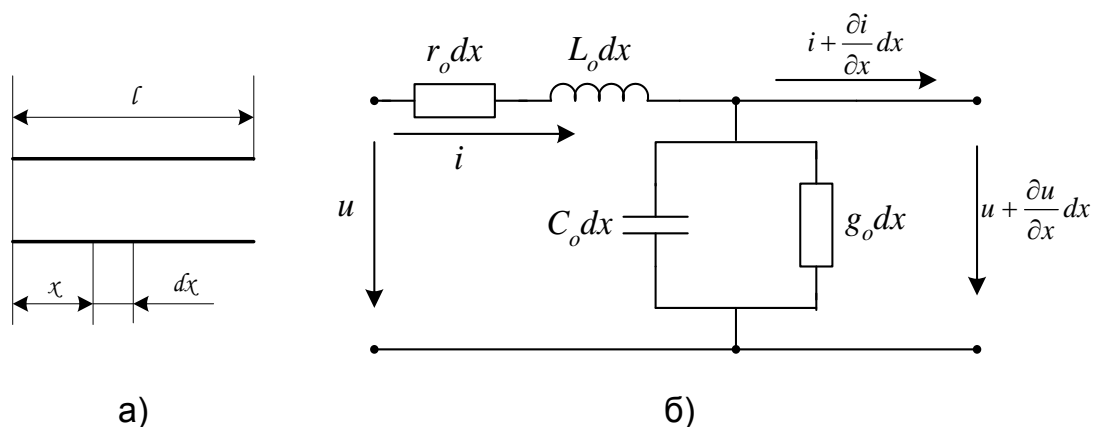


Рисунок 7.1

На виділеній ділянці його параметри визначаються як добуток

первинних параметрів на довжину ділянки. Через те, що струм та напруга змінюються рівномірно вздовж лінії із швидкістю  $\frac{\partial i}{\partial x}$  і  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , то струм й напруга в кінці ділянки будуть  $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ ,  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

За другим законом Кірхгофа різниця вхідної і вихідної напруг дорівнює сумі спадів напруг на активному опорі та індуктивності, тобто

$$u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = r_o dx i + L_o dx \frac{\partial i}{\partial t},$$

або 
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r_o i + L_o \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (7.1)$$

За першим законом Кірхгофа

$$i - (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) = g_o dx (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + C_o dx \frac{\partial (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)}{\partial t}.$$

Нехтуючи складовими другого порядку меншості, одержуємо

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_o u + C_o \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Рівняння (7.1) і (7.2) запишемо у вигляді системи

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_o i + L_o \frac{\partial i}{\partial t}. \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_o u + C_o \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Ця система диференціальних рівнянь в частинних похідних називається *телеграфними рівняннями*.

## 7.2 Розв'язання телеграфних рівнянь в усталеному режимі за синусоїдної напруги

Якщо на початку лінії підключено джерело синусоїдної напруги з частотою  $f$ , то струм і напруга в будь-якій точці лінії також будуть змінюватися за синусоїдним законом.

Використаємо символічний метод, замінивши синусоїдну функцію часу комплексними величинами  $u \rightarrow \underline{U}$  і  $i \rightarrow \underline{I}$ .

Підставимо комплексні значення струму і напруги в (7.3), враховуючи, що операція диференціювання у цьому випадку замінюється множенням на  $j\omega$ .

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= r_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I}, \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= g_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

В цих рівняннях комплексні  $\underline{U}$  і  $\underline{I}$  не є функціями часу, тому частинні похідні в (7.4) замінені повними.

Із (7.4) одержимо одне диференціальне рівняння. Продиференціюємо перше рівняння системи

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0) \frac{d\underline{I}}{dx}$$

і підставимо замість  $\frac{d\underline{I}}{dx}$  його значення із другого рівняння системи.

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0) \underline{U}.$$

Позначивши  $\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)}$ , (7.5)

одержимо

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0. \quad (7.6)$$

Одержане диференціальне рівняння другого порядку має розв'язок

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{p_1 x} + \underline{A}_2 e^{p_2 x},$$

де  $p_1 = -\gamma$ ;  $p_2 = \gamma$  – корені характеристичного рівняння,

$\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  – комплексні сталі інтегрування.

Таким чином

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} + \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}. \quad (7.7)$$

Із першого рівняння системи (7.4)

$$\underline{I} = -\frac{1}{r_0 + j\omega L_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{(r_0 + j\omega L_0)} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}).$$

Підставляючи значення  $\gamma$  із (7.5) одержимо

$$\underline{I} = \sqrt{\frac{g_0 + j\omega C_0}{r_0 + j\omega L_0}} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}).$$

Позначимо

$$\underline{Z}_{x\delta} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}. \quad (7.8)$$

і назвемо його *хвильовим або характеристичним опором лінії*, тоді

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_{x\delta}} \cdot (\underline{A}_1 e^{-\gamma \cdot x} - \underline{A}_2 e^{\gamma \cdot x}). \quad (7.9)$$

Сталу інтегрування можна знайти із граничних умов. Якщо, наприклад, відомі вхідний струм  $\underline{I}_1$  і напруга  $\underline{U}_1$  (за  $x=0$ ), то

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{x\delta} &= \underline{A}_1 - \underline{A}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Звідси

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{x\delta}}{2}, \quad \underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{x\delta}}{2}. \quad (7.11)$$

### 7.3 Падаючі і відбиті хвилі

Для того, щоб з'ясувати фізичну суть складових в рівнянні (7.7), розглянемо миттєві значення першої складової, позначивши її  $U_n$ .

Через те, що  $\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\Psi_1}$  і коефіцієнт  $\gamma$  також комплексне число  $\gamma = \alpha + j\beta$ , то комплексне значення  $\underline{U}_n$  можна записати в вигляді

$$\underline{U}_n = A_1 e^{j\Psi_1} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x} = A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j(\Psi_1 - \beta \cdot x)}.$$

Миттєве значення

$$u_n = A_{1m} e^{-\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x). \quad (7.12)$$

В кожній точці лінії за  $x = x_i$  напруга  $u_n$  залежно від часу змінюється за синусоїдним законом з амплітудою  $A_{1m} e^{-\alpha \cdot x_i}$ . В фіксований момент часу  $t = t_1$  напруга  $u_n$  вздовж лінії змінюється за затухаючою синусоїдою (рисунок 7.2).

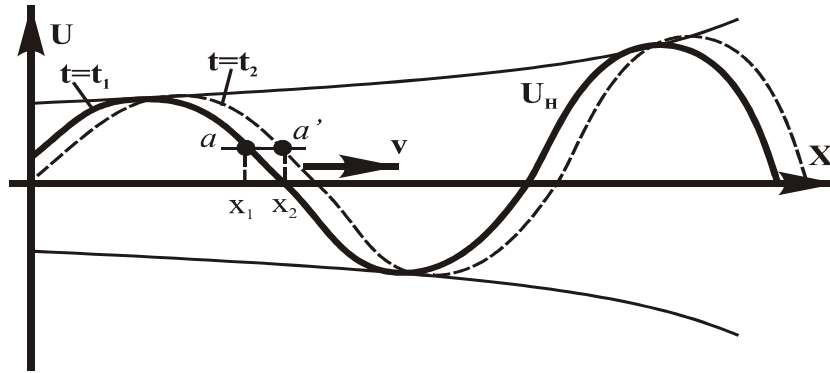


Рисунок 7.2

Фаза коливань в точці  $a$  визначається виразом  $\omega \cdot t_1 + \Psi_1 - \beta \cdot x_1$ .  
Визначимо положення цієї самої точки хвилі в момент  $t_2 > t_1$ . Оскільки фаза коливань цієї точки залишається без змін, має виконуватись рівність

$$\omega \cdot t_1 + \Psi_1 - \beta \cdot x_1 = \omega \cdot t_2 + \Psi_1 - \beta \cdot x_2 .$$

Оскільки  $t_2 > t_1$ , то  $x_2 > x_1$ . Це означає, що всі точки хвилі напруги  $U_n$  за час  $t_2 - t_1$  зміщуються на величину  $x_2 - x_1$  (див. рис. 7.2, пунктирна лінія).

Іншими словами, хвиля напруги переміщується з часом від початку лінії до кінця із швидкістю  $v$ , яку називають фазовою швидкістю. Тому цю хвилю напруг називають *прямою* або *падаючою*.

Визначимо фазову швидкість. Під час руху фаза будь-якої точки хвилі залишається незмінною, тобто

$$\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x = Const . \quad (7.13)$$

Продиференціювавши (7.13) за часом, одержимо

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 .$$

Звідси

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} . \quad (7.14)$$

Фазова швидкість звичайно близька до швидкості світла  $v \approx c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Із виразу (7.12) ясна і фізична суть коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$ . Величина  $\alpha$  характеризує ступінь зміни амплітуди хвилі під час руху її

вздовж лінії і називається *коефіцієнтом згасання*. Величина  $\beta$  показує відмінність фаз напруги хвилі в різних точках лінії і називається *фазовим коефіцієнтом*, а величина  $\gamma$  називається коефіцієнтом або *сталю поширення*.

Коефіцієнт  $\alpha$  вимірюють в  $\text{Hn}/\text{м}$ , а  $\beta$  в  $\text{рад}/\text{м}$ .

Для характеристики хвильових процесів в лінії вводять поняття *довжини хвилі*  $\lambda$ . Довжиною хвилі називають відстань між двома точками лінії, в яких фази хвилі в будь-який момент часу відрізняються одна від одної на  $2\pi$ , тобто:

$$(\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot x) - [\omega \cdot t + \Psi_1 - \beta \cdot (x + \lambda)] = 2 \cdot \pi .$$

Звідси

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad (7.15)$$

або з врахуванням (7.14)

$$\lambda = \frac{v}{f} . \quad (7.16)$$

Якщо прийняти  $V = 3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$ , то для  $f = 50 \text{ Гц}$  довжина хвилі  $\lambda = 6000 \text{ км}$ , для  $f = 30 \text{ МГц}$  —  $\lambda = 10 \text{ м}$ .

Якщо довжина лінії і довжина хвилі сумірні, то вздовж лінії помітні зміни напруги, якщо ж  $\lambda \ll L$ , то зміна напруги практично не помітна і лінію можна розглядати як коло з зосередженими параметрами.

Друга складова в (7.7) відрізняється від першої знаком при  $X$ , тому друга складова

$$u_e = A_{2m} e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega \cdot t + \Psi_2 + \beta \cdot x) \quad (7.17)$$

являє собою хвилю напруги, яка переміщується від кінця лінії до початку з тією самою швидкістю  $v$  (рисунок 7.3) і називається *звотною* або *відбитою*.

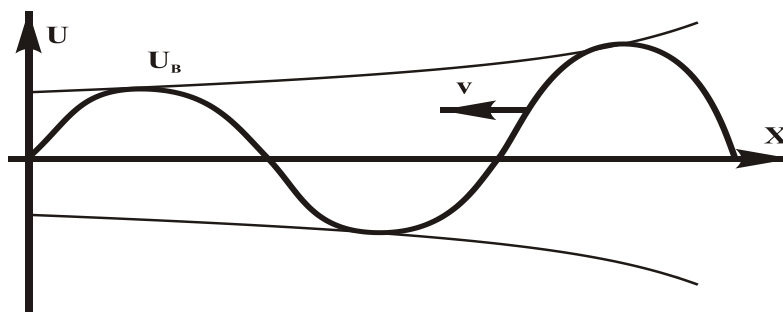


Рисунок 7.3

Поділ хвилі на падаючу і відбиту умовний. Насправді в лінії існує одна напруга як результат додавання падаючої і відбитої хвиль.

Точно так само умовно можна розділити на падаючу і відбиту хвилі струму, а результируючий струм визначити як різницю цих хвиль.

$$i = i_n - i_e \quad \text{або} \quad \underline{I} = \underline{I}_n - \underline{I}_e. \quad (7.18)$$

Для синусоїдних величин виконуються співвідношення

$$\underline{I}_n = \frac{U}{\underline{Z}_{x\epsilon}}, \quad \underline{I}_e = \frac{U}{\underline{Z}_{x\epsilon}}. \quad (7.19)$$

Таким чином, хвильовий опір  $\underline{Z}_{x\epsilon}$  являє собою опір лінії струму падаючої і відбитої хвиль.

Величини  $\gamma$  – коефіцієнт поширення і  $\underline{Z}_{x\epsilon}$  – хвильовий опір називають *вторинними* або *хвильовими* параметрами.

### Приклад 7.1

Визначити хвильові параметри для повітряної лінії з первинними параметрами  $r_0 = 2,84 \text{ Ом/км}$ ,  $L_0 = 1,94 \frac{\text{мГ}}{\text{км}}$ ,  $g_0 = 0,7 \text{ мкСм/км}$ ,  $C_0 = 6,25 \text{ нФ/км}$  на частоті  $f = 800 \text{ Гц}$ .

Хвильовий опір

$$\underline{Z}_{x\epsilon} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2,84 + j2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3}}{0,7 \cdot 10^{-6} + j2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9}}} = 5,68 \cdot e^{-j7^\circ 30'} \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт поширення

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{10,15 \cdot e^{j73^\circ 45'} \cdot 31,4 \cdot e^{j88^\circ 45'} \cdot 10^{-6}} = 2,74 \cdot 10^{-3} + j \cdot 17,8 \cdot 10^{-3}.$$

Коефіцієнт затухання  $\alpha = 2,74 \cdot 10^{-3} \text{ Нн/км}.$

Фазовий коефіцієнт  $\beta = 17,8 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}.$

Фазова швидкість  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{17,8 \cdot 10^{-3}} = 2,84 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$

### Приклад 7.2

Визначити хвильові параметри коаксіального кабелю з параметрами

$r_0 = 19,7 \text{ Ом/км}$ ,  $L_0 = 0,263 \text{ мГ/км}$ ,  $C_0 = 46,5 \text{ нФ/км}$ ,  $g_0 = 3,2 \text{ мкСм/км}$   
на частоті  $f = 20 \text{ кГц}$ .

$$\underline{Z}_{x\epsilon} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{19.7 + j2\pi \cdot 10^3 \cdot 0.263 \cdot 10^{-3}}{3.2 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 46.5 \cdot 10^{-9}}} = 81e^{-j15^\circ} \text{ Ом}$$

$$\gamma = 0.474e^{j75^\circ} = 0.123 + j0.458; \quad \alpha = 0.123 \text{ Нн/км};$$

$$\beta = 0.458 \text{ рад/км}, \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3}{0.458} = 2.74 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

#### 7.4 Відбивання в довгих лініях

Вияснимо фізичну суть появи зворотних або відбитих хвиль напруги або струму і їх величини.

Перенесемо початок відліку координати  $x$  на кінець лінії, тоді в виразах для струму і напруги в будь-який момент (7.7) і (7.9) потрібно змінити  $x$  на  $L - x$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma(\ell-x)} + \underline{A}_2 e^{\gamma(\ell-x)} = \underline{B}_1 e^{\gamma x} + \underline{B}_2 e^{-\gamma x}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_{x\epsilon}} e^{-\gamma(\ell-x)} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_{x\epsilon}} e^{\gamma(\ell-x)} = \frac{\underline{B}_1}{\underline{Z}_{x\epsilon}} e^{\gamma x} - \frac{\underline{B}_2}{\underline{Z}_{x\epsilon}} e^{-\gamma x}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Нові сталі інтегрування  $\underline{B}_1$  і  $\underline{B}_2$  визначимо із граничних умов для кінця лінії за  $x = 0$ ,  $\underline{U} = \underline{U}_2$ ,  $\underline{I} = \underline{I}_2$ , де  $\underline{U}_2, \underline{I}_2$  – напруга і струм в кінці лінії.

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_1 + \underline{B}_2, \\ \underline{I}_2 \cdot \bar{\underline{Z}}_{x\epsilon} &= \underline{B}_1 - \underline{B}_2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Звідси

$$\underline{B}_1 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \bar{\underline{Z}}_{x\epsilon}}{2}, \quad \underline{B}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \bar{\underline{Z}}_{x\epsilon}}{2}. \quad (7.22)$$

і

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \bar{\underline{Z}}_{x\epsilon}}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \bar{\underline{Z}}_{x\epsilon}}{2} \cdot e^{-\gamma x}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \bar{\underline{Z}}_{x\epsilon}}{2 \cdot \underline{Z}_{x\epsilon}} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \bar{\underline{Z}}_{x\epsilon}}{2 \cdot \underline{Z}_{x\epsilon}} \cdot e^{-\gamma x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Відношення комплексного значення напруги зворотної хвилі на кінці

лінії  $\underline{U}_{B_2} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{ex}}{2}$  до комплексного значення падаючої хвилі на кінці

лінії  $\underline{U}_{n_2} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{ex}}{2}$  називається *коефіцієнтом відбивання*

$$K_B = \frac{\underline{U}_{B_2}}{\underline{U}_{n_2}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{ex}}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{ex}} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_{xg}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{xg}}. \quad (7.24)$$

Тут враховано, що  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H$ , де  $\underline{Z}_H$  – опір навантаження.

Із (7.24) видно, що величина відбитої хвилі залежить від співвідношення між опором навантаження і хвильовим опором лінії.

За короткого замикання лінії ( $\underline{Z}_H = 0$ ) коефіцієнт відбивання  $K_B = -1$ , а за холостого ходу ( $\underline{Z}_H = \infty$ )  $K_B = 1$ , тобто в цих режимах падаюча хвиля повністю відбивається від кінця лінії. За  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{xg}$  коефіцієнт відбивання дорівнює нулю, потужність, яка передається через лінію, повністю поглинається навантаженням. Такий режим роботи лінії називається *узгодженим*.

Таким чином, відбита хвиля від кінця лінії виникає тому, що за відсутності узгодження навантаження з лінією ( $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_{xg}$ ) не вся потужність поглинається навантаженням і частина потужності повертається до джерела.

## 7.5 Рівняння довгої лінії через гіперболічні функції

Систему рівнянь (7.23) запишемо в вигляді

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_2}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{ex}}{2} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2}{2} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{xg}}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \underline{U}_2 \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{xg} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2},$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{2 \cdot \underline{Z}_{xg}} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\underline{I}_2}{2} \cdot e^{\gamma x} - \frac{\underline{U}_2}{2 \cdot \underline{Z}_{xg}} \cdot e^{-\gamma x} + \frac{\underline{I}_2}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{xg}} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2};$$

або

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 ch \gamma x + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{xg} sh \gamma x, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{xg}} sh \gamma x + \underline{I}_2 ch \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Одержаний вираз дозволяє визначити напругу і струм в будь-якій точці лінії, якщо відомі напруга і струм в кінці лінії і вторинні параметри ( $\gamma$ ,  $\underline{Z}_{xg}$ )

лінії.

Напруга і струм на початку лінії ( $x = L$ )

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cdot ch \gamma L + \underline{I}_2 \underline{Z}_{xg} \cdot sh \gamma L, \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{xg}} \cdot sh \gamma L + \underline{I}_2 \cdot ch \gamma L. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Система рівнянь (7.26) являє собою рівняння симетричного чотириполюсника.

В узгодженому режимі  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{xg}$ , тому  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{xg}$  і система (7.25) набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma x}, \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_H = \underline{Z}_{xg} \quad (7.28)$$

не залежить від довжини лінії і дорівнює хвильовому опору.

Як уже відмічалось, однорідну лінію можна розглядати як симетричний чотириполюсник з характеристичним опором  $\underline{Z}_{xg}$  і сталою передачі  $\gamma L$ . Відповідно, під час дослідження режимів генератора і приймача для однієї заданої частоти лінію можна подати в вигляді  $T$ - або  $\Pi$ -подібної схеми заміщення.

## 7.6 Лінія без спотворень

Під час передавання сигналів через лінію необхідно, щоб форма сигналу на початку і кінці лінії була однаковою. Така лінія, в якій в процесі передавання не виникають спотворення сигналів, називається лінією без спотворення.

Сигнал в загальному випадку являє собою сукупність різних гармонічних складових. Щоб сигнал передавався без спотворення, затухання складових (різних гармонік) має бути однаковим. Іншими словами, коефіцієнт затухання  $\alpha$  не має залежати від частоти. Фазова швидкість різних гармонік також має бути однаковою, щоб не виникали фазові викривлення. Через те, що  $v = \omega/\beta$ , коефіцієнт фази має бути пропорційний частоті.

Такі умови виконуються, якщо виконується співвідношення

$$\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0}. \quad (7.29)$$

Дійсно, тоді

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (g_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = \sqrt{L_0 \cdot C_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{L_0} + j \cdot \omega\right) \cdot \left(\frac{g_0}{C_0} + j \cdot \omega\right)} = \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left(\frac{r_0}{L_0} + j \cdot \omega\right) = \\ &= r_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0} = \sqrt{r_0 \cdot g_0} + j \cdot \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\alpha = \sqrt{r_0 \cdot g_0}; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}.$$

Звичайно в лінії

$$\frac{r_0}{L_0} > \frac{g_0}{C_0}.$$

Щоб добитися виконання умови (7.29), можна зменшувати  $r_0$ , для чого необхідно збільшувати діаметр проводів або взяти матеріал з кращою провідністю, що значно збільшує вартість лінії. Можна збільшити  $g_0$ , але тим самим значно збільшиться затухання лінії, що також недоцільно. Зменшення  $C_0$  також може привести до виконання рівності (7.29), але це потребує збільшення відстані між провідниками, що ускладнює конструкцію і вартість лінії.

Найбільш прийнятним шляхом виявляється штучне збільшення індуктивності лінії шляхом вмикання в лінію через однакові проміжки спеціально виготовлених котушок індуктивності.

Спотворення сигналу викликаються ще і неузгодженістю опору навантаження та хвильового опору лінії, при якій виникає відбивання хвиль. Для одержання узгодженого режиму роботи лінії часто використовують ідеальні трансформатори з належним вибором коефіцієнта трансформації.

## 7.7 Лінія без втрат на холостому ходу

На високих частотах  $\omega \cdot L_0 \gg r_0$  і  $\omega \cdot C_0 \gg g_0$ , тому під час визначення  $\underline{Z}_{xв}$  та  $\mathcal{Y}$  можна знехтувати величинами  $r_0$  та  $g_0$ .

В цьому випадку хвильовий опір лінії

$$\underline{Z}_{x\epsilon} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (7.30)$$

дійсне число, а

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0) \cdot (g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega \cdot \sqrt{L_0 C_0}, \quad (7.31)$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{L_0 C_0}. \quad (7.32)$$

Затухання в лінії без втрат відсутнє, а фазова швидкість  $v = \frac{\omega}{\beta}$  не залежить від частоти. Таким чином, лінія без втрат одночасно є і лінією без спотворень.

Запишемо рівняння однорідної лінії без втрат через гіперболічні функції, враховуючи, що

$$\operatorname{ch} j\beta x = \cos \beta x, \quad \operatorname{sh} j\beta x = j \sin \beta x$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x\epsilon} \sin \beta x, \\ \underline{I} &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\epsilon}} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

На холостому ходу  $\underline{I}_2 = 0$ , тому

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta x, \\ \underline{I} &= \frac{j \underline{U}_2}{\underline{Z}_{x\epsilon}} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Запишемо ці вирази у вигляді миттєвих функцій, вважаючи початкову фазу напруги  $U_2$  такою, що дорівнює нулю

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \sin \omega t \cos \beta x, \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_{x\epsilon}} \cos \omega t \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Виразимо фазовий коефіцієнт через довжину хвилі  $\lambda$  із (7.15)

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{\lambda} x, \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_{xв}} \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Проаналізуємо одержані рівняння. В будь-якій точці лінії ( $x = \text{Const}$ ) напруга змінюється залежно від часу за синусоїдним законом з різною амплітудою. Наприклад, в кінці лінії за  $x=0$ ,  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 1$  і амплітуда напруги максимальна.

Зі зростанням  $x$  амплітуда напруги зменшується, і за  $x=\lambda/4$ ,  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$  амплітуда напруги дорівнює нулю в будь-який момент часу. На проміжку  $\lambda/4 < x < 3\lambda/4$  амплітуда зростає до максимального значення за  $x = \lambda/2$  і знову стає такою, що дорівнює нулю, за  $x=3\lambda/4$ .

Ті точки лінії, в яких напруга завжди дорівнює нулю ( $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \dots$ ), називаються *вузлами*, а ті точки, в яких напруга може набувати максимального значення ( $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ ), називаються *пучностями*.

На рисунку 7.4 зображено графіки миттєвих значень напруги вздовж лінії для деяких послідовних моментів часу  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$  протягом одного півперіоду коливань.

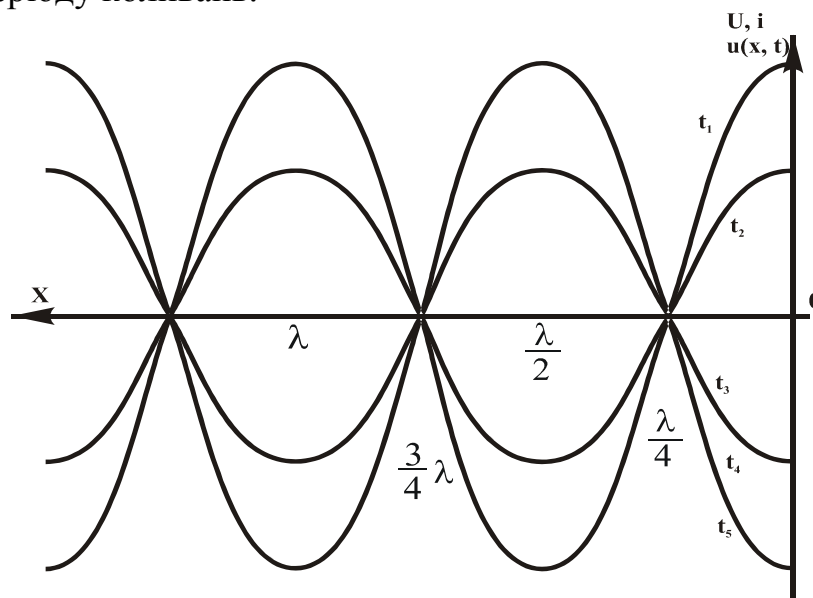


Рисунок 7.4

В лінії виникають хвилі, які пульсують, і не переміщуються вздовж. Такі хвилі називаються *стоячими*.

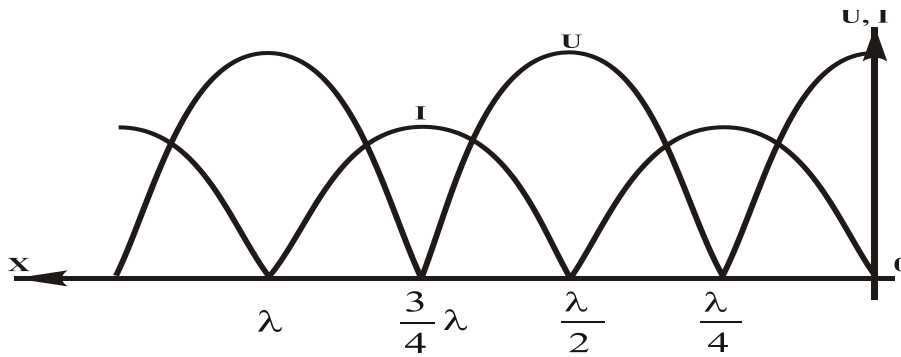


Рисунок 7.5

На рисунку 7.5 зображено розподіл діючого значення напруги і струму вздовж лінії.

Струм вздовж лінії розподілений за синусоїдний законом (7.36), тому в кінці лінії вузол струму. Із графіка розподілення діючого значення струму вздовж лінії (рисунок 7.5) видно, що вузли струму збігаються з пучностями напруги і навпаки.

Пулсуюче значення струму і напруги в точках лінії означає відсутність передачі енергії вздовж лінії. В лінії відбувається тільки обмін енергією між електричним і магнітним полями.

В режимі холостого ходу також можна подавати напругу і струм у вигляді падаючої і відбитої хвиль. Оскільки за холостого ходу коефіцієнт відбивання  $K_v = -1$ , то додавання падаючої і відбитої хвиль приводить до виникнення стоячої хвилі.

Вхідний опір лінії на холостому ході

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{U}{I} = \frac{U_2 \cos \beta x}{\frac{jU_2}{\underline{Z}_{ex}} \cdot \sin \beta x} = -j\underline{Z}_{ex} \cdot \operatorname{ctg} \beta x. \quad (7.37)$$

Оскільки  $\underline{Z}_{ex}$  дійсна величина для лінії без втрат, то вхідний опір лінії на холостому ході є реактивним і його величина та характер залежать від довжини лінії.

На рисунку 7.6 зображено графік зміни вхідного опору лінії залежно від її довжини. Із графіка видно, що за  $0 < L < \frac{\lambda}{4}$  вхідний опір носить ємнісний характер і зі зростанням довжини лінії зменшується. За  $\frac{\lambda}{4} < L < \frac{\lambda}{2}$  вхідний опір лінії є індуктивним і зі зростанням довжини збільшується.

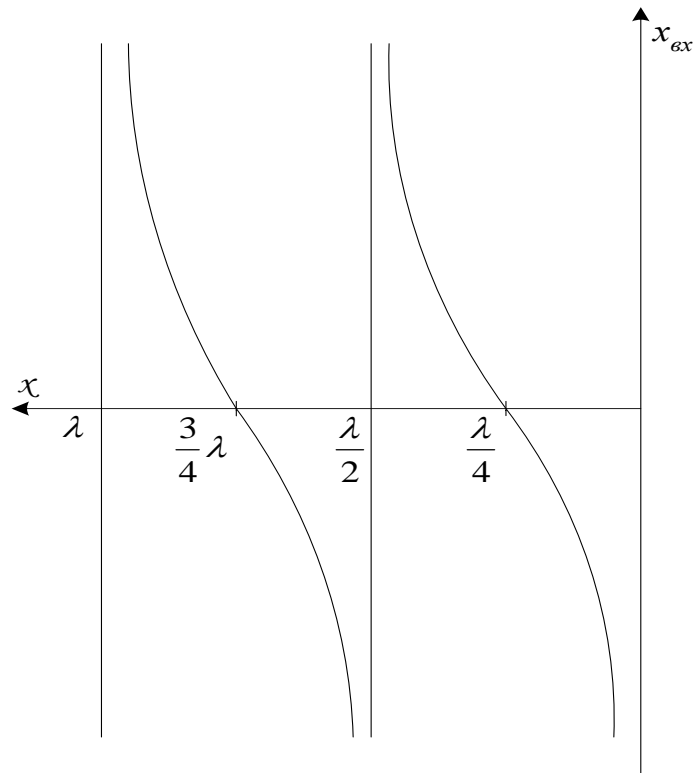


Рисунок 7.6

За  $L = \lambda/4$  вхідний опір лінії дорівнює нулю, а за  $L = \lambda/2$  – нескінченності.

### 7.8 Лінія без втрат за короткого замикання

У разі короткого замикання  $\underline{U}_2 = 0$  і система (7.33) має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= j \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6} \sin \beta x, \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Миттєві значення напруги і струму

$$\left. \begin{aligned} u &= I_{2m} \cdot Z_{x6} \cdot \cos \omega t \sin \beta x, \\ i &= I_{2m} \cdot \sin \omega t \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Міркування, аналогічні зробленим раніше, приводять до висновку, що і в цьому випадку мають місце стоячі хвилі. Розподіл діючих значень напруги і струму вздовж лінії показано на рисунку 7.7.

Вузли і пучності напруги за короткого замикання збігаються відповідно з вузлами і пучностями струму за холостого ходу.

Вхідний опір лінії за короткого замикання

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{j \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_{x6} \cdot \sin \beta x}{\underline{I}_2 \cos \beta x} = j \underline{Z}_{x6} \operatorname{tg} \beta x. \quad (7.40)$$

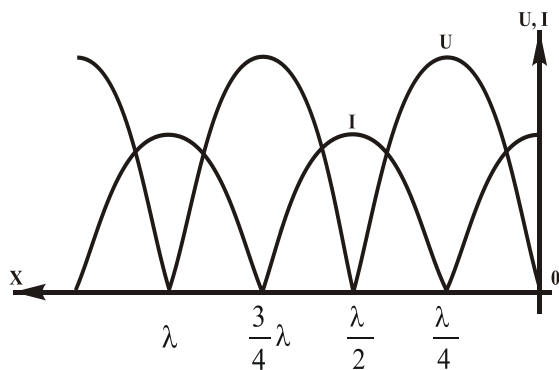


Рисунок 7.7

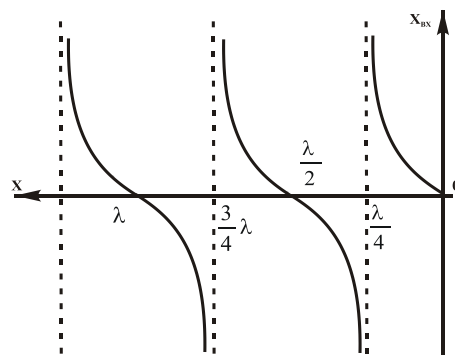


Рисунок 7.8

Вхідний опір лінії і за короткого замикання реактивний, величина та характер якого залежать від довжини лінії (рисунок 7.8). За  $0 < L < \lambda/4$  характер вхідного опору індуктивний і величина опору зростає зі зростанням довжини.

Розглянуті властивості лінії без втрат широко використовуються для практичних цілей. Наприклад, короткозамкнуті або розімкнуті лінії використовуються в коливальних контурах як добротні індуктивності і ємності.

### Приклад 7.3

Послідовно з активним опором  $r = 10 \text{ Ом}$  і ємністю  $C = 1.2 \text{ нФ}$  потрібно підключити короткозамкнуту лінію без втрат з  $L_0 = 2 \text{ мкГн/м}$ ,  $C_0 = 5,55 \text{ нФ/м}$  так, щоб на частоті  $f = 200 \text{ МГц}$  контур працював в резонансному режимі. Визначити мінімальну довжину короткозамкнутої лінії.

#### Розв'язання

Визначимо спочатку величину індуктивності, за якої контур працює в резонансному режимі. Відомо, що для послідовного коливального контура резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Звідси

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^8)^2 \cdot 2 \cdot 1.2 \cdot 10^{-12}} = 0.53 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

Вхідний опір короткозамкненої лінії без втрат

$$\underline{Z}_{ex} = j \cdot \underline{Z}_{x\epsilon} \cdot \operatorname{tg} \beta x \quad \text{або} \quad X_{ex} = Z_{x\epsilon} \operatorname{tg} \beta x.$$

Хвильовий опір лінії

$$Z_{x\epsilon} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{5.55 \cdot 10^{-12}}} = 600 \text{ Ом}$$

Індуктивний вхідний опір на частоті  $f_0 = 200 \text{ МГц}$

$$X_{ex} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0.53 \cdot 10^{-6} = 672 \text{ Ом}.$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \beta x = \frac{X_{ex}}{Z_{ex}} = \frac{672}{600} = 1.12,$$

$$\beta x = 41.7^\circ = 0.728 \text{ рад}.$$

Оскільки фазовий коефіцієнт

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5.55 \cdot 10^{-12}} = 4.2 \text{ рад / м},$$

то

$$x = \frac{0.728}{4.2} = 0.173 \text{ м} = 17.3 \text{ см}.$$

Як виходить із (7.40), вхідний опір короткозамкненої довгої лінії без втрат за  $x = \frac{\lambda}{4}$  дорівнює нескінченості, тому така лінія може слугувати металевим ізолятором для кріплення ліній (рисунок 7.9).

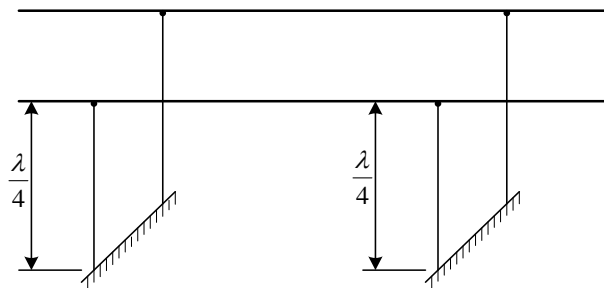


Рисунок 7.9

## 7.9 Перехідні процеси в довгих лініях

Під час аналізування перехідних процесів в однорідних довгих лініях потрібно користуватися телеграфними рівняннями

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

де за початок відліку  $x$  взято початок лінії.

Задача розрахунку перехідних процесів зводиться до визначення загального розв'язку системи (7.41) за певних початкових ( $t=0$ ) і граничних ( $x=0, x=L$ ) умов. В загальному вигляді розв'язання такої системи досить складне. Обмежимося тому розглядом лінії без втрат ( $r_0=0, g_0=0$ ).

В цьому випадку система набуде вигляду:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

де  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$  – швидкість хвилі.

Систему рівнянь (7.43) задовольняє рішення

$$\left. \begin{aligned} u(x,t) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \\ i(x,t) &= \frac{1}{Z_{xs}} f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{Z_{xs}} f_2\left(t + \frac{x}{v}\right), \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

де  $Z_{xs} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  – хвильовий опір лінії (дійсне число).

Конкретні значення функцій  $f_1$  і  $f_2$  визначаються характером зовнішньої дії та початковими і граничними умовами. Перша складова напруги або струму являє собою напругу або струм хвилі, яка рухається від

початку лінії до кінця із швидкістю  $v$  і є падаючою або прямою хвилею, а друга складова – зворотна або відбита хвиля, тому можна записати

$$\left. \begin{aligned} u &= u_n + u_g \\ i &= i_n - i_g = \frac{u_n}{Z_{xg}} - \frac{u_g}{Z_{xg}} \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Перехідний процес в лінії подається як сума падаючої і відбитої хвиль, так само як і в усталеному режимі.

### 7.10 Вмикання довгої лінії на постійну напругу

Після вмикання ключа (рисунок 7.10) напруга на початку лінії зразу досягає постійного значення  $U = E$  і виникає падаюча хвиля прямокутної форми (рисунок 7.11), яка рухається від початку лінії до кінця із швидкістю  $v$ .

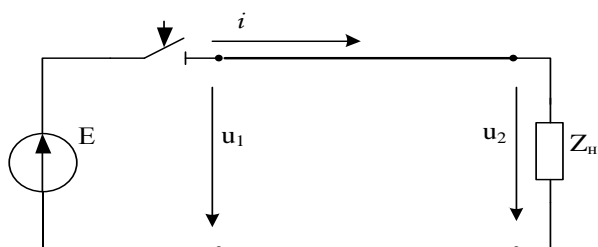


Рисунок 7.10

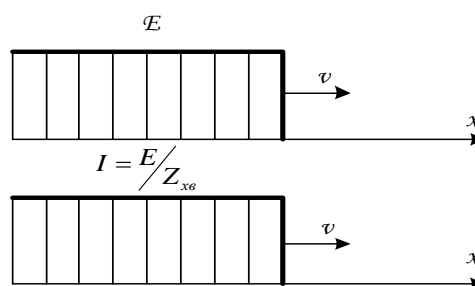


Рисунок 7.11

Струм хвилі  $i_n = I = \frac{E}{Z_{xg}}$ . В будь-який момент часу в тій частині лінії, до якої хвиля ще не дійшла, напруга і струм дорівнюють нулю. Ділянка лінії, до якої дійшло хвильове збурення, називається *фронтом хвилі*. До кінця лінії хвиля підходить через час  $t_1 = \frac{L}{v}$ .

Для кінця лінії справедливими є співвідношення (7.45), тобто

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_n + u_g, \\ i_2 &= \frac{u_n}{Z_{xg}} - \frac{u_g}{Z_{xg}} \end{aligned} \right\}$$

або

$$\begin{aligned} u_2 &= u_n + u_\epsilon, \\ i_2 Z_{x\epsilon} &= u_n - u_\epsilon. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Додаючи рівняння, одержимо

$$2u_n = i_2 Z_{x\epsilon} + u_2. \quad (7.47)$$

Одержаному рівнянню відповідає розрахункова схема, зображена на рисунку 7.12

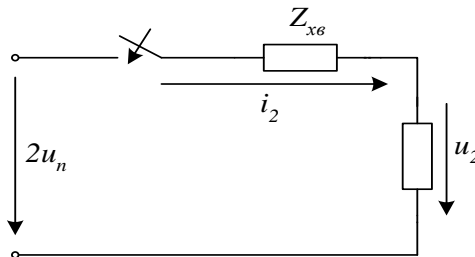


Рисунок 7.12

Ця схема дозволяє визначити для кожного конкретного навантаження відбиті хвилі напруги та струму.

Початок перехідного процесу в розрахунковій схемі запізнюється порівняно з моментом вмикання лінії на  $t_l = L/v$ , тобто на час, який потрібен хвилі напруги для проходження всієї лінії.

Якщо навантаження лінії – це активний опір  $r_n$ , то  $u_2 = r_n i_2$  і (7.47) записується у вигляді

$$2u_n = i_2 (Z_{x\epsilon} + r_n).$$

Звідси

$$i_2 = \frac{2u_n}{Z_{x\epsilon} + r_n}.$$

Із другого рівняння (7.46)

$$u_\epsilon = u_n - i_2 Z_{x\epsilon} = u_n - \frac{2u_n Z_{x\epsilon}}{Z_{x\epsilon} + r_n} = u_n \frac{r_n - Z_{x\epsilon}}{r_n + Z_{x\epsilon}}.$$

Коефіцієнт відбивання

$$K_0 = \frac{u_\epsilon}{u_n} = \frac{r_n - Z_{x\epsilon}}{r_n + Z_{x\epsilon}} \quad (7.48)$$

є постійною величиною, яка залежить від опору навантаження і хвильового опору.

## 7.11 Вмикання лінії на постійну напругу за холостого ходу

За холостого ходу  $r_n = \infty$ ,  $K_B = 1$ .

На рисунку 7.13, а) показано графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії, коли хвиля, яка виникла, ще не дійшла до кінця лінії.

В кінці лінії хвиля напруги і струму відбивається з тим самим знаком і рухається до початку лінії. Загальна напруга в лінії подвоюється, а струм дорівнює нулю (рисунок 7.13, б). Для відбитої хвилі початок лінії є навантаженням і за  $Z_{дж} = 0$ ,  $K_B = -1$ , тобто хвиля напруги і струму відбивається з оберненим знаком. На рисунку 7.13, в) показано третю хвилю напруги і струму.

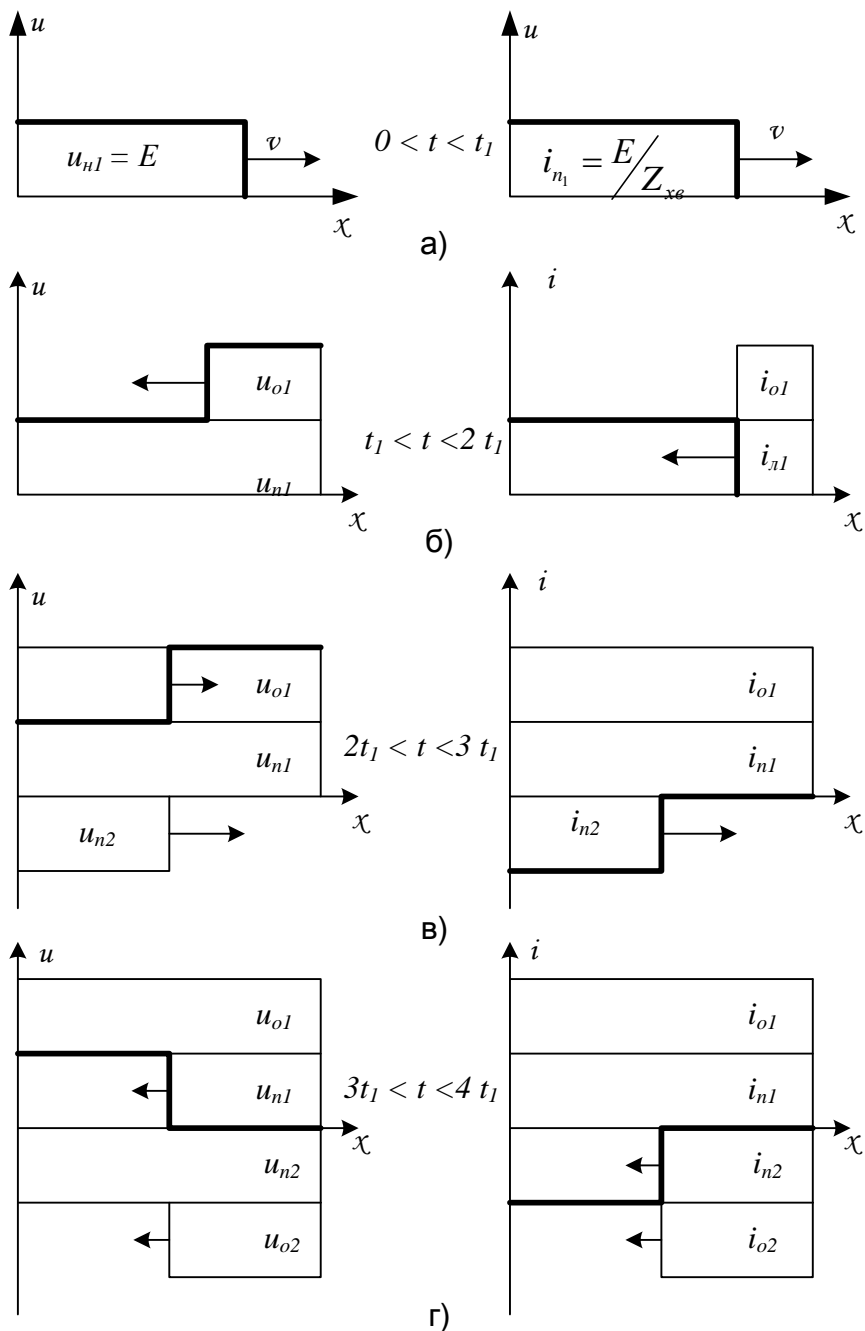


Рисунок 7.13

Загальна напруга у цьому випадку дорівнює  $E$ , а струм набуває від'ємного значення. Після відбивання третьої хвилі від кінця лінії виникає друга відбита хвиля напруги і струму (рисунок 7.13, г). Коли вона досягає початку лінії, напруга і струм в лінії будуть дорівнювати нулю, як і було до вмикання джерела напруги. З цього моменту, тобто після

$$T = 4t_1 = 4 \frac{L}{v},$$

перехідний процес в лінії повторюється.

В кожній точці лінії напруга і струм змінюються періодично, але криві зміни їх в різних точках будуть неоднаковими. На рисунку 7.14, а) показано графіки зміни залежно від часу напруги і струму в кінці лінії.

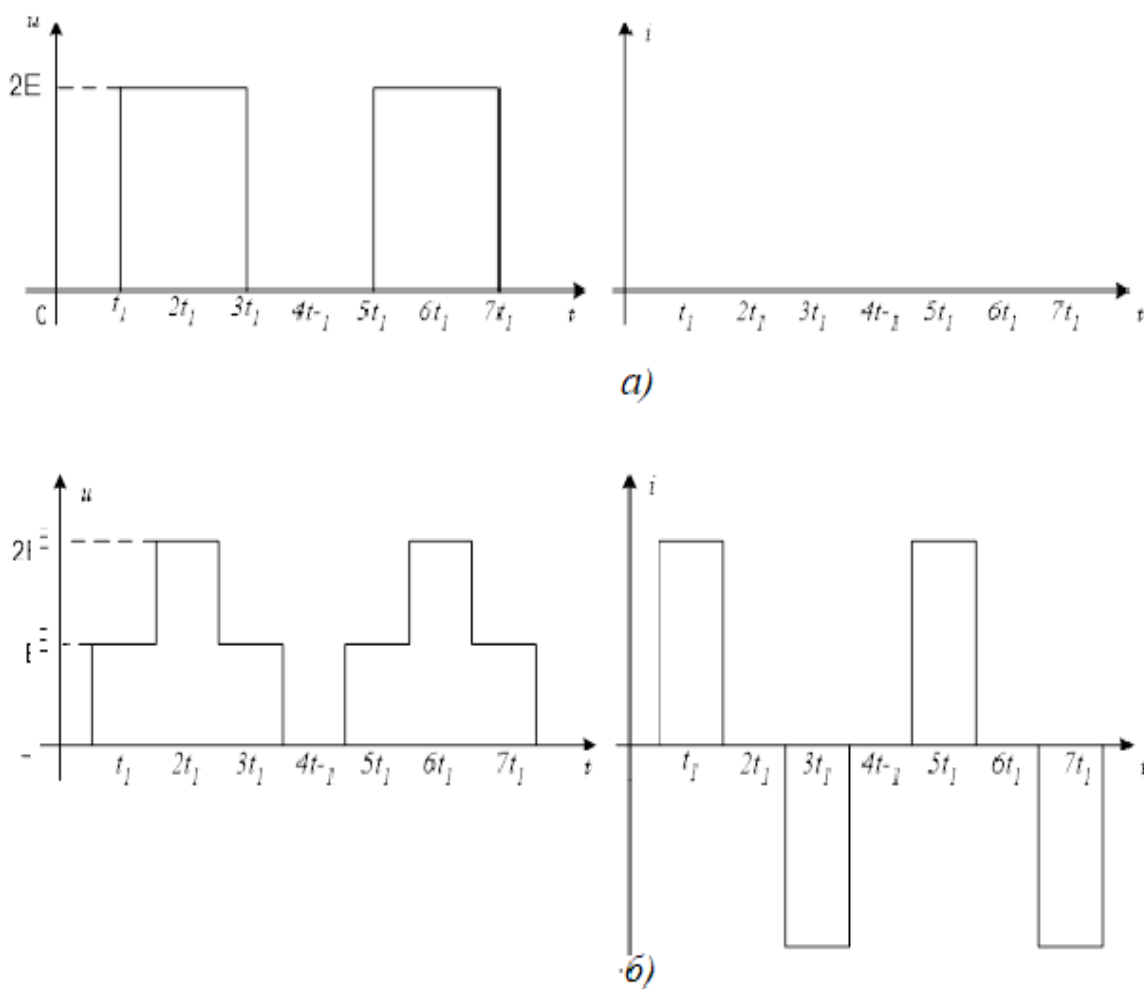


Рисунок 7.14

До моменту часу  $t_1$  в кінці лінії немає ні напруги, ні струму (хвиля ще не дійшла до кінця лінії). В момент  $t_1$  напруга в кінці лінії стрибком змінюється до значення  $u = u_{n1} + u_{e1} = 2E$  і залишається такою до тих пір, поки до кінця лінії не дійде друга падаюча хвиля  $u_{n2}$ , тобто протягом  $2t_1$ .

Потім напруга спадає до нуля і зберігає своє значення знову протягом  $2t_1$  і т. д., струм же в кінці лінії завжди дорівнює нулю. На рисунку 7.14, б) зображено графік зміни напруги і струму всередині лінії.

В реальних лініях завжди є втрати, тому напруга і струм з часом зменшуються і за кожного нового відбивання їх значення теж будуть зменшуватися. Внаслідок цього рівень напруги в лінії поступово наближається до величини напруги джерела живлення.

Аналогічно можна розглядати рух хвиль в короткозамкненій лінії у випадку підключення її до джерела постійної напруги.

### 7.12 Вмикання лінії на постійну напругу за індуктивного навантаження

На рисунку 7.15, а) показано вмикання лінії з індуктивним навантаженням, а на рисунку 7.15, б) – розрахункову схему для визначення струму в кінці лінії. Від початку вмикання лінії і до моменту  $t_1$ , коли хвиля дійде до кінця лінії, графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії мають такий самий вигляд, що і раніше (рисунки 7.16, а).

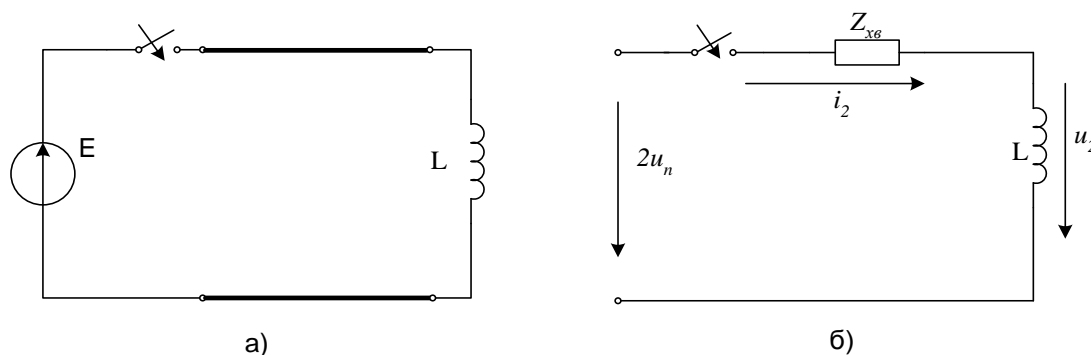


Рисунок 7.15

Визначимо коефіцієнт відбивання за індуктивного навантаження. Для схеми рисунок 7.15, б) рівняння має вигляд

$$\text{для } t > t_1 \quad L \frac{di_2}{dt} + Z_{xb} i_2 = 2u_n, \quad (7.49)$$

Розв'язок цього рівняння

$$i_2 = \frac{2u_n}{Z_{xb}} \left[ 1 - e^{-\frac{Z_{xb}}{L}(t-t_1)} \right]$$

або

$$i_2 = 2i_n \left[ 1 - e^{-\frac{Z_{xg}(t-t_1)}{L}} \right]. \quad (7.50)$$

Оскільки в кінці лінії  $i_2 = i_n - i_6$ , то

$$i_6 = i_n \left[ 2e^{-\frac{Z_{xg}(t-t_1)}{L}} - 1 \right]$$

і аналогічно

$$u_6 = u_n \left[ 2e^{-\frac{Z_{xg}(t-t_1)}{L}} - 1 \right].$$

Коефіцієнт відбивання

$$K_B = \frac{u_6}{u_n} = 2e^{-\frac{Z_{xg}(t-t_1)}{L}} - 1 \quad (7.51)$$

залежить від часу.

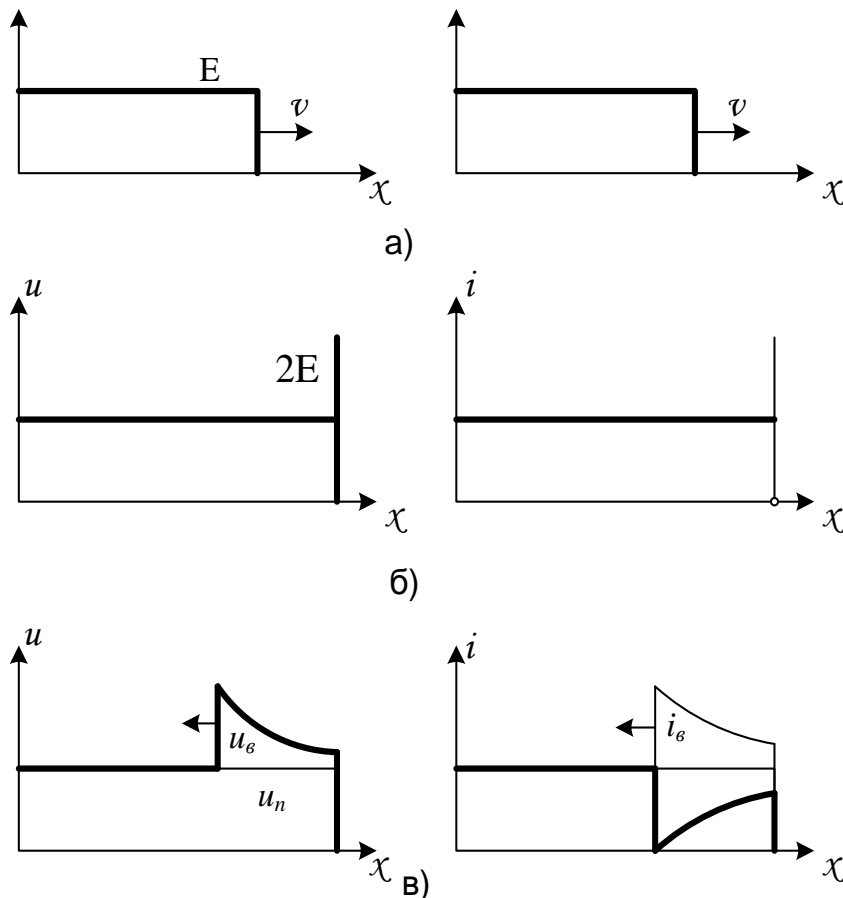


Рисунок 7.16

В момент часу  $t_1$   $K_B = 1$  і загальна напруга в кінці лінії зразу подвоюється (рисунок 7.16, б). В момент часу  $t_2 > t_1$  фронт хвилі переміщується на відстань  $vt_2$ , а коефіцієнт відбивання дорівнює

$$K_B(t_2) = \left( 2e^{-\frac{Z_{\text{вв}}(t_2-t_1)}{L}} - 1 \right) < 1.$$

Графік розподілу напруги і струму для цього моменту часу показано на рисунку 7.16, в).

З часом фронт хвилі переміщується до початку лінії. Коефіцієнт відбивання продовжує зменшуватися і за  $t = \infty$  стає таким, що дорівнює -1 ( $K_B = -1$ ).

### 7.13 Заломлення хвиль в місці спряження двох ліній

Розглянемо проходження хвиль в місці спряження ліній з різними хвильовими опорами (рисунок 7.17). Перша лінія довжиною  $L_1$  має хвильовий опір  $Z_{xв1}$  і друга лінія довжиною  $L_2$  – хвильовий опір  $Z_{xв2}$ .

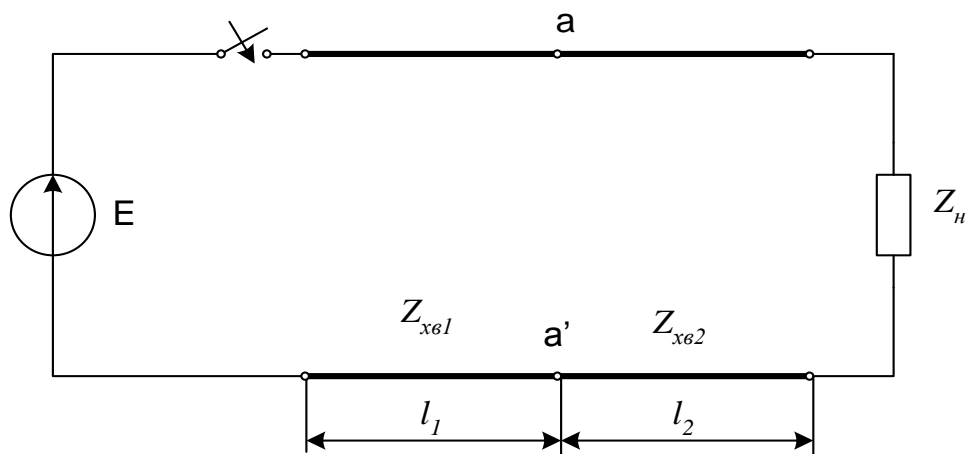


Рисунок 7.17

У разі замикання ключа фронт хвилі напруги  $E$  переміщується із швидкістю  $v$  до кінця лінії (рис. 7.18, а). В момент часу  $t_1 = \frac{L_1}{v}$  падаюча хвиля підходить до місця спряження і внаслідок різних хвильових опорів лінії падаюча хвиля частково відбивається.

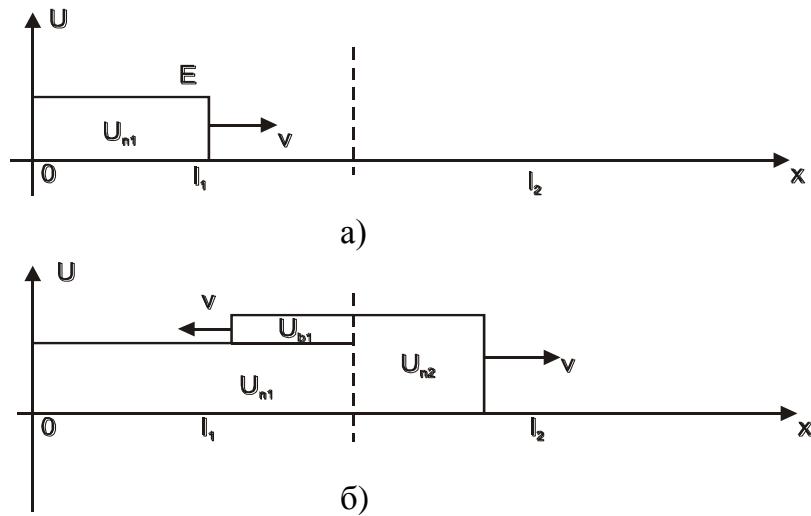


Рисунок 7.18

Загальна напруга на кінці першої лінії являє собою суму падаючої і відбитої хвиль

$$u_1 = u_{n1} + u_{\epsilon1}.$$

Напруга на початку другої лінії має дорівнювати напрузі на кінці першої лінії (напруга між одними й тими самими точками  $a$  та  $a'$ ) і вона ж є падаючою хвилею другої лінії, тобто

$$u_{n2} = u_{n1} + u_{\epsilon1}. \quad (7.52)$$

Аналогічно для струму

$$i_{n2} = i_{n1} - i_{\epsilon1} \quad (7.53)$$

або

$$\frac{u_{n2}}{Z_{x\epsilon2}} = \frac{u_{n1}}{Z_{x\epsilon1}} - \frac{u_{\epsilon1}}{Z_{x\epsilon1}}. \quad (7.54)$$

Виразимо  $u_{n2}$  із (7.54) і підставимо в (7.52)

$$u_{n1} \frac{Z_{x\epsilon2}}{Z_{x\epsilon1}} - u_{\epsilon1} \frac{Z_{x\epsilon2}}{Z_{x\epsilon1}} = u_{n1} + u_{\epsilon1},$$

$$u_{n1} \left( 1 - \frac{Z_{x\epsilon2}}{Z_{x\epsilon1}} \right) = -u_{\epsilon1} \left( 1 + \frac{Z_{x\epsilon2}}{Z_{x\epsilon1}} \right).$$

Звідки

$$u_{\epsilon1} = u_{n1} \frac{Z_{x\epsilon2} - Z_{x\epsilon1}}{Z_{x\epsilon2} + Z_{x\epsilon1}}. \quad (7.55)$$

Таким чином коефіцієнт відбивання для першої лінії

$$K_{B1} = \frac{u_{e1}}{u_{n1}} = \frac{Z_{x\epsilon 2} - Z_{x\epsilon 1}}{Z_{x\epsilon 2} + Z_{x\epsilon 1}}. \quad (7.56)$$

Падаюча хвиля другої лінії, яку називають звичайно *заломленою* хвилею, із (7.52)

$$u_{n2} = u_{n1} + u_{n1} \frac{Z_{x\epsilon 2} - Z_{x\epsilon 1}}{Z_{x\epsilon 2} + Z_{x\epsilon 1}} = u_{n1} \frac{2Z_{x\epsilon 2}}{Z_{x\epsilon 1} + Z_{x\epsilon 2}} = u_{n1} (1 + K_{e1}). \quad (7.57)$$

Перехід хвилі з першої лінії на другу характеризують *коефіцієнтом заломлення*, який дорівнює відношенню падаючої хвилі другої лінії до падаючої хвилі першої лінії, тобто

$$K_{31} = \frac{u_{n2}}{u_{n1}} = \frac{2Z_{x\epsilon 2}}{Z_{x\epsilon 1} + Z_{x\epsilon 2}} = 1 + K_{e1}. \quad (7.58)$$

Якщо  $Z_{x\epsilon 2} > Z_{x\epsilon 1}$ , то  $0 < K_{e1} < 1$  і графік розподілу хвилі напруги показано на рисунку 7.18, б).

Подальший розподіл хвилі по лінії залежить від навантаження другої лінії і внутрішнього опору джерела.

Відбита від навантаження хвиля другої лінії, підходячи до місця спряження, також відбивається і заломлюється, але в цьому випадку

$$K_{B2} = \frac{Z_{x\epsilon 1} - Z_{x\epsilon 2}}{Z_{x\epsilon 1} + Z_{x\epsilon 2}}, \quad K_{32} = 1 + K_{B2}. \quad (7.59)$$

### Контрольні питання та вправи

1. Які величини називають хвильовими параметрами лінії і як вони пов'язані з первинними параметрами?
2. Який опір потрібно ввімкнути в кінці лінії, щоб не було відбитих хвиль?
3. Від яких параметрів залежить коефіцієнт відбиття?
4. Що являють собою стоячі хвилі і за яких умов вони виникають?
5. Чи можна розглядати довгу лінію як чотириполосник і які у цьому разі його А-параметри?
6. За яких навантажень коефіцієнт відбиття у випадку перехідних процесів в довгих лініях залежить від часу?

7. Визначити для частоти  $f = 1000 \text{ Гц}$  хвильовий опір однорідній лінії, коефіцієнт згасання, фазовий коефіцієнт і фазову швидкість за заданими первинними параметрами:  $r_o = 6.5 \text{ Ом/км}$ ,  $l = 2.29 \text{ мГ/км}$ ,  $C_o = 5.22 \text{ мкФ/км}$ ,  $g_o = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$ .

Відповідь:  $\underline{Z}_e = 692e^{-j12} \text{ Ом}$ ,  $\alpha = 4,92 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}$ ,  $\beta = 22.2 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}$ ,  
 $v = 2.83 \cdot 10^5 \text{ км/с}$

7. До лінії, вказаної у попередній задачі, приєднане активне навантаження  $r_o = 200 \text{ Ом}$ . Знайти коефіцієнт відбиття.

Відповідь:  $\kappa_B = 0.558e^{j173^\circ}$ .

## Література

1. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : [підручник] / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацев ; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 530 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : [підручник] / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; за ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
3. Перхач В. С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола. – К. : Вища школа, 1992. – 439 с.
4. Карпов Ю. О. Конспект лекцій з курсу «Теоретичні основи електротехніки». Ч. I. / Карпов Ю. О., Магас Т. Є., Мадьяров В. Г. – Вінниця : ВПІ, 1992. – 174 с.

*Електронне навчальне видання*

**Вячеслав Губейович Мадьяров**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ «ТЕОРЕТИЧНІ  
ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»**

**Частина 2**

**Конспект лекцій**

Рукопис оформлено *В. Мадьяровим*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 24.11.2025 р.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2025-164.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.

**[press.vntu.edu.ua](http://press.vntu.edu.ua)**;

*E-mail*: [irvc.vntu@gmail.com](mailto:irvc.vntu@gmail.com).

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.