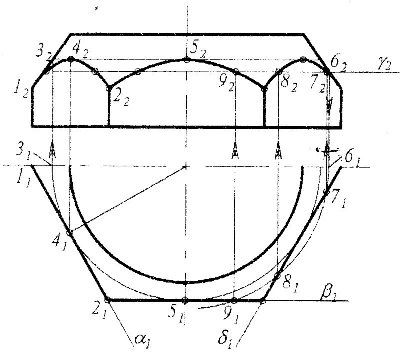
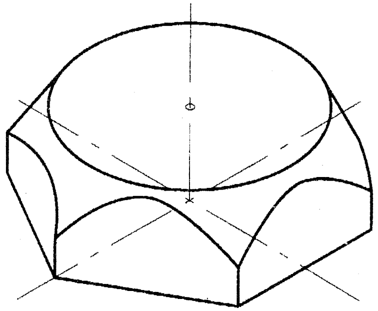
А.Г. Буда

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Збірник прикладів та задач з теоретичними відомостями для студентів машинобудівних спеціальностей





Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А.Г.Буда

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Збірник прикладів та задач з теоретичними відомостями для студентів машинобудівних спеціальностей

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як збірник задач для студентів машинобудівних спеціальностей денної та заочної форм навчання. Протокол №10 від 27 травня 2004р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 744(075)
Б 90

Рецензенти:

В.Ф. Анісімов, доктор технічних наук, професор (ВДАУ)
Ю.А. Бурєнніков, кандидат технічних наук, професор (ВНТУ)
В.Д. Іскович-Лотоцький, доктор технічних наук, професор (ВНТУ)

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Буда А.Г.
Б 90 **Збірник прикладів та задач з теоретичними відомостями для студентів машинобудівних спеціальностей.** Збірник задач. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 142 с.

У збірнику пропонується значна кількість задач та прикладів, які вивчаються в розділі „Нарисна геометрія" дисципліни „Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка". За навчальним планом студенти повинні оволодіти 14-ма темами, теоретичні відомості до яких разом із запропонованими до них задачами та прикладами містяться у цьому виданні. З метою засвоєння кожної теми наводяться приклади розв'язання деякої частини задач, решта, для остаточного закріплення теми, пропонується студентам для самостійної роботи.

Збірник прикладів та задач підготовлено для студентів машинобудівних спеціальностей денної та заочної форм навчання і допомагає студентам при підготовці до колоквіумів та контрольних заходів, передбачених програмою курсу. Він може бути корисним студентам інших спеціальностей, для яких передбачається вивчення запропонованих тем нарисної геометрії.

УДК 744(075)

ЗМІСТ

Прийняті позначення

1. Точки в просторі позначаються великими буквами латинського алфавіту A, B, C, ... а також цифрами.
2. Лінії в просторі (прямі та криві) – малими літерами латинського алфавіту a, b, c, d, ...
3. Площини та кути – малими літерами грецького алфавіту.
4. Лінії окремого положення – малими літерами латинського алфавіту, а саме: горизонталь – h, фронталь – f, профільна пряма – p.
5. Площини проекцій – великими буквами українського алфавіту, а саме: $П_1$ – горизонтальна, $П_2$ – фронтальна, $П_3$ – профільна, ...– додаткова площина проекцій.
6. Проекції точок:
   на горизонтальну площину $П_1$ – A_1, B_1, C_1;
   на фронтальну площину $П_2$ – A_2, B_2, C_2;
   на профільну площину $П_3$ – A_3, B_3, C_3 .
7. Осі проекцій – малими літерами латинського алфавіту x_{12}, y_{13}, z_{23}, початок координат – великою літерою O.
8. Позначення площин, які задані слідами:
   горизонтальний слід площини h^0,
   фронтальний слід площини f^0,
   профільний слід площини p^0.

Для проекціювальних площин краще задати слід-проекцію цієї площини:

α_1 – горизонтально-проекціювальна площина;
α_2 – фронтально-проекціювальна площина;
α_3 – профільно-проекціювальна площина.

Найбільш поширені символи

$=$	дорівнює, результат дії.
$\equiv$	збігається, конкурує.
$\parallel$	паралельність.
$\perp$	перпендикулярність.
$\underline{\circ}$	мимобіжність.
$\in$	належить, є елементом.
$\ni$	проходить, включає в собі.
$\cap$	перетин (прямих, площин).
$\wedge$	відповідає сполучникам „і", „та".
$\vee$	відповідає сполучникам „або", „чи".
$\Rightarrow$	логічний наслідок.
$\forall$	квантор спільності.
$\exists$	квантор існування.
$\{...\}$	сукупність або складається зі...
$\alpha\wedge\beta$	кут, кут між площинами α та β.
н.в.	натуральна величина.

Вступ

Нарисна геометрія – розділ геометрії, в якому просторові фігури, що являють собою сукупність точок, ліній, поверхонь, вивчаються за їх проекційним відображенням, або – це розв'язання математичної задачі в графічній інтерпретації.

Одна із головних задач нарисної геометрії – створення методу відображення тривимірних фігур на площину та розробка способів розв'язання позиційних та метричних задач, пов'язаних з цими зображеннями, що розвиває просторову уяву.

Нарисна геометрія є теоретичною базою для створення креслення. Креслення – своєрідна мова, за допомогою якої, використовуючи точки, лінії, обмежене число знаків та цифр, людина має змогу зобразити на поверхні, частково, на площині геометричні фігури або їх сполучення (машини, пристрої, споруди).

Методи нарисної геометрії находять своє застосування в авіаційній та машинобудівній промисловості при створенні корпусів літаків, суден, а також в інших областях техніки, в архітектурі, будівництві, образотворчому мистецтві. Різноманітні форми рельєфу земної поверхні при проектуванні доріг, каналів, тунелей, земельних робіт можна зображати на площині. Математичні задачі в графічній інтерпретації знаходять своє застосування у фізиці, хімії, механіці, кристалографії і т.п.

Історія

З давніх часів постійно виникала необхідність в плоских зображеннях просторових фігур, визначення розмірів ліній та фігур. Окремі правила та прийоми побудови таких зображень були приведені в систему та розвинуті в працях французького вченого Г.Монжа в 1799 р. Г.Монж увійшов в історію як видатний геометр кінця ХУІІІ ст. і початку XIX ст., інженер почав використовувати свої методи для виконання креслень військового значення без розповсюдження цих результатів за межами Франції (цей час припадав на період правління Наполеона, тому друкування його праць було заборонено).

Нарисна геометрія стала предметом викладання в Росії в 1810 році в Інституті корпусу інженерів шляхів сполучення. Перші твори, які були перекладені з французької мови, пов'язані іменем Севастьянова Я. О. (1814р.). Розв'язанню інженерних задач з використанням методів нарисної геометрії присвятили себе Макаров Н.І., Курдюмов В.І. Розширили теоретичну основу та звернулись до досліджень Федоров Є.С,. Рінін Н.А.

Значний розвиток як науки отримано в працях радянських вчених Глаголєва Ц.А., Добрякова А.І., Громова М.Я., Колотова С.М., Мордухай-Болтовського Д.Д., Четверухіна Н.Ф., Котова І.І. та вчених України Павлова А.В., Михайленко В.Є.

1 Ортогональне проекціювання

Положення точки, прямої, будь-якої геометричної фігури найбільш зручно визначити в декартовій системі координат, яка складається з 3-х взаємно-перпендикулярних площин. Для визначення положення точок в просторі французький математик XVI ст. Декарт запропонував систему координат.

1.1 Означення та позначення

Лінії перетину площин проекцій утворюють осі координат: X_{12} – вісь абсцис, Y_{13} – вісь ординат, X_{23} – вісь аплікат, O – початок координат або точка перетину координатних осей. В нарисній геометрії використовують три площини проекцій: $П_1$ – горизонтальна площина проекцій, $П_2$ – фронтальна площина проекцій, $П_3$ – профільна площина проекцій.

В більшості країн світу прийнята система розташування площин проекцій, в якій напрями осей X та Y задають від початку координат вліво, вісь Y – до спостерігача, вісь Z – вверх від початку координат. Координатні площини ділять простір на 8 частин – октантів.

Надалі будемо розглядати положення точок в 4-х октантах, виключаючи від'ємний напрямок осі X. Всі об'єкти будемо розташовувати між площиною проекцій та спостерігачем. Всі промені при проекціюванні ортогональні.

2 Точка

Зображення точки виконується за її визначником відповідно в першому, другому, третьому, четвертому октантах (чверті нумеруються як I, II, III, IV октанти). Побудова кожної із точок простору на відповідні площини проекцій відповідає побудові паралелепіпеду, у якого X – довжина, Y – ширина, Z – висота. З врахуванням напрямку осей (відповідних знаків „+" та „-") для означених точок (рис. 1) введемо відповідні символьні позначення: $A(x, y, z) \in$ I; $B(x, -y, z) \in$ II; $D\ (x, y, -z) \in$ IV.

2.1 Епюр точки

Епюр точки (її плоский рисунок) одержують суміщенням горизонтальної $П_1$ та фронтальної $П_2$ площин проекцій відносно осі Z, тобто обертанням горизонтальної $П_1$ та профільної $П_3$ площин проекцій навколо їх ліній перетину X та Z в одну площину, яка суміщається з фронтальною площиною проекцій. При суміщенні вказаних площин площини проекцій $П_1$ та $П_3$ роз'єднані вздовж осі Y. Тому надалі під позначенням осі Y будемо розуміти відповідно Y_1(як та, що належить $П_1$) та Y_3(як та, що належить $П_3$). Епюр, плоский рисунок, може складатись з двох або трьох ортогональних проекцій.

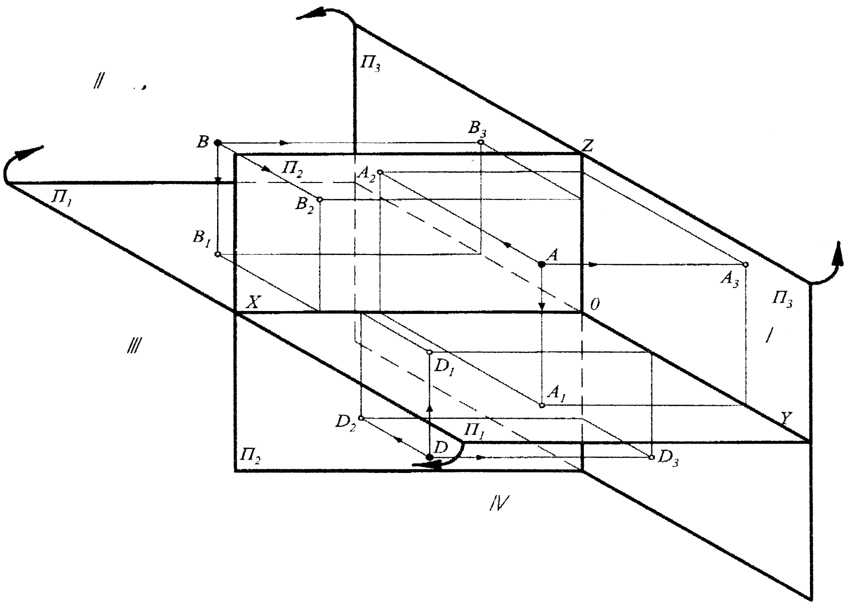


Рисунок 1 – Положення точок в октантах

Винесемо I октант та утворимо епюр (рис. 2, а, б).

Надалі будемо використовувати такі умовні позначення та назви:

A_1 – горизонтальна проекція точки А;

A_2 – фронтальна проекція точки А;

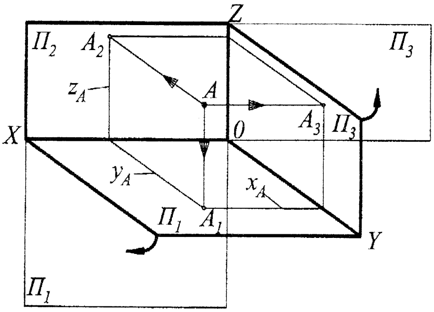
A_3 – профільна проекція точки А.

Кожна із проекцій точок будується на перетині горизонтальних та вертикальних ліній, які обмежують відповідні координати X, Y, Z заданої точки. Тому відповідні проекції, наприклад т. А, можна символьно записати такими визначниками: $A_1(x, y)$, $A_2(x, z)$, $A_3(y, z)$. Лінії A_1A_2 та A_2A_3 називаються, відповідно, вертикальною та горизонтальною лініями зв'язку.

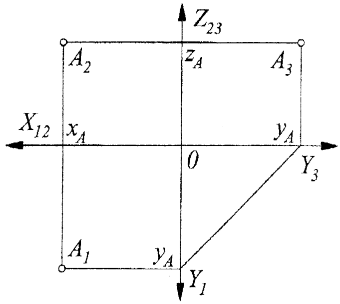
Винесемо II октант та побудуємо епюр точки В (рис. 3, а, б, в).

Винесемо IV октант та покажемо епюр точки D (рис. 4, а, б, в).

Примітка: Для закріплення цієї теми студенту пропонується здійснити аналогічні побудови стосовно винесення III октанта та побудови в цьому октанті трьох проекцій точки С. Координати точки С вибираються довільно.

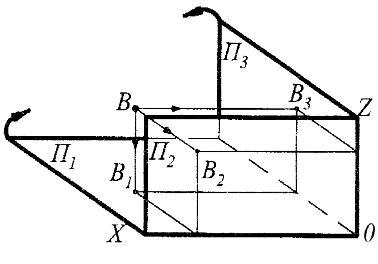


а) просторове зображення т. А
та суміщення площин проекцій

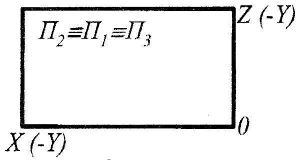


б) епюр т. А

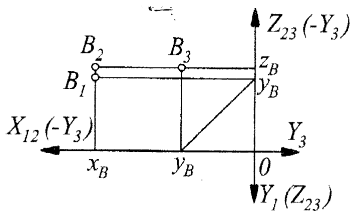
Рисунок 2 – Утворення епюра т. А



а)



б)



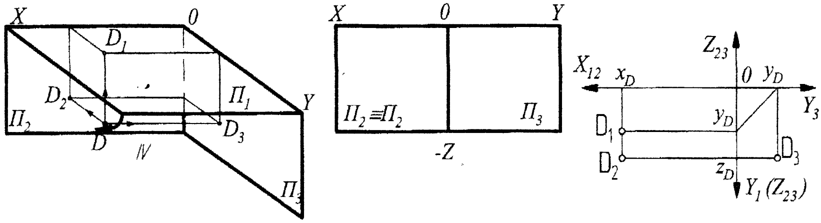
в)

а) просторове зображення т. В

б) суміщення площин проекцій

в)епюр т. В

Рисунок 3 – Утворення епюра т. В



а) просторове зображення т. D　　б) суміщення площин проекцій　　в) епюр т. D

Рисунок 4 – Утворення епюра т. D

Крім цього, точки можуть знаходитись в площинах проекцій або на осях. Точка належить одній із площин проекцій, якщо у неї відсутня одна із координат.

Якщо абсциса точки X=0, то точка належить $П_1$; ордината У=0, то точка належить $П_2$; апліката Z=0, то точка належить $П_3$. Наприклад, якщо точка E належить площині проекцій $П_2$ (E є $П_2$), то умовний запис визначника такий: E (X, 0 , Z).

Точка належить одній із координатних осей, якщо у неї відсутні дві координати. Якщо у точки координати У,Z=0, то точка належить осі абсцис X; якщо у точки координати X,Z=0, то точка належить осі ординат У; якщо у точки координати X,У=0, то точка належить осі аплікат Z.

Тобто, згідно з умовою запису визначника для т. F (0, 0, 20), слід розуміти, що точка F належить осі аплікат Z і знаходиться на відстані 20мм від початку координат.

Якщо розглядати в просторі декілька точок, то за взаємним положенням вони можуть бути рівновіддалені від певної площини проекцій. Згідно з трьома координатами будь-якої точки абсциса X характеризує віддаленість від площини проекцій $П_3$, ордината У – від $П_2$, апліката Z – від $П_1$. Наприклад, т. M та N рівновіддалені від $П_3$, значить їх аплікати Z за модулем характеризуються однаковими числовими значеннями, тобто $|Z_M|=|Z_N|$. Точки, S та Q, які рівновіддалені від $П_2$, мають однакові ординати $|Y_S|=|Y_Q|$, аналогічно, якщо $|X_E|=|X_F|$, то т. E та т. F рівновіддалені від $П_3$.

2.2 Приклади для закріплення

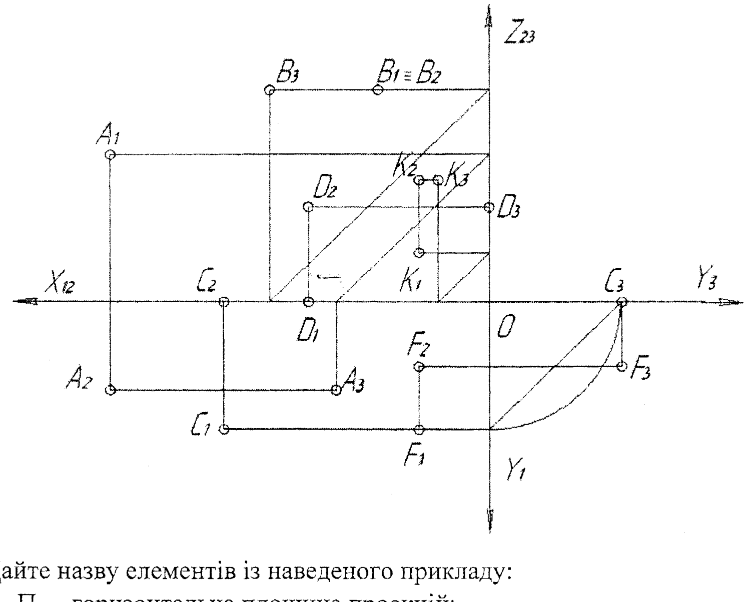
Приклад 1. Точки A та B мають такі числові значення координат: A(10,20,30), B(40,20,60). Дайте відповіді на такі питання:

1. В яких октантах знаходяться вказані точки?
2. Яка з точок найбільш близько розташована до $П_3$?
3. Яка з точок найвіддаленіша від $П_1$?
4. Визначте площину проекцій, відносно якої ці точки рівновіддалені.

Відповіді

При відповіді на перше питання враховуємо знаки ("+","-") за координатою У і з врахуванням символьних записів маємо: A є I, B є II. При відповіді на друге питання увага зосереджується на числових значеннях координат X_A та X_B (абсцис) цих точок, оскільки $X_B > X_A$, то т. А має меншу координату, ніж т. В. Віддаленість точок від $П_1$ (третє питання) характеризують координати Z_A та Z_B, тому т. В більш віддалена від $П_1$, ніж т. А. Виділимо однакові числові значення (за модулем) ординат цих точок, тобто $|У_A|=|У_B|$, а також враховуємо те, що координата У характеризує віддаленість точки від $П_2$. Значить, т. А та т. В рівновіддалені від $П_2$.

Приклад 2. Ознайомтесь з прикладами побудов профільної проекції точок та відповідей до деяких із них.



1. Дайте назву елементів із наведеного прикладу:

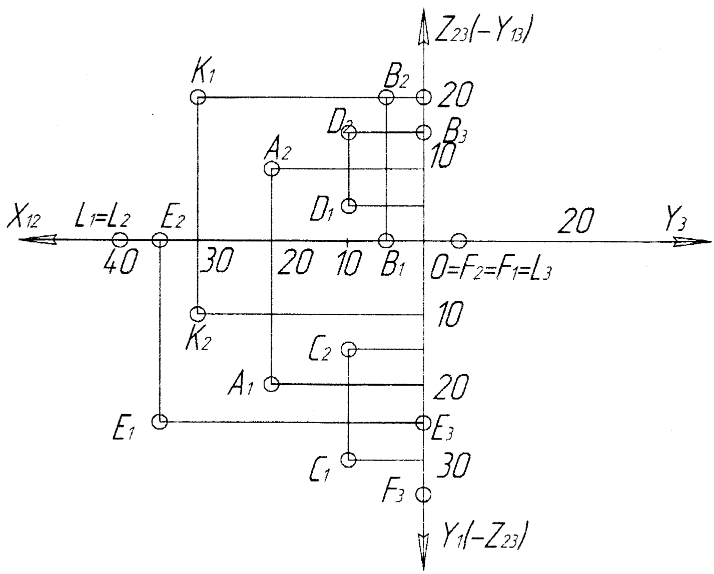
   $П_1$ – горизонтальна площина проекцій;

   OY – вісь ординат; A_1A_2 – лінія зв'язку.
2. Яка з точок належить III октанту простору, площині проекцій $П_2$ /дайте символьний запис/: A є III, D є $П_2$.
3. Які точки рівновіддалені від площини проекцій $П_3$?

Приклад 3. Побудуйте проекції точок за заданими числовими даними таблиці.

	A	B	C	D	E	F	K	L
X	20	5	15	10	35	0	30	40
Y	20	0	30	-5	25	35	-20	0
Z	10	20	-15	-15	0	0	10	0

З врахуванням теоретичних відомостей, які висвітлені вище, покажемо епюри всіх точок, що запропоновані в таблиці прикладу. Самостійно побудуйте третю проекцію кожної із точок (див. побудови прикладу 2).



Для побудов горизонтальних проекцій вказаних точок використовуємо координати X,У; фронтальних проекцій точок – X,Z; профільних проекцій точок – координати Y,Z.

2.3 Теоретичні питання

1. Які види проекціювання Вам відомі?
2. Що називають проекцією точки, проекцією площини?
3. На скільки октантів можна поділити простір площинами проекцій?
4. Дайте означення епюра чи комплексного креслення.
5. Дайте означення осі проекцій.
6. Скільки координат і скільки проекцій визначають положення точки в просторі?

2.4. Питання до розв'язання задач на практичному занятті

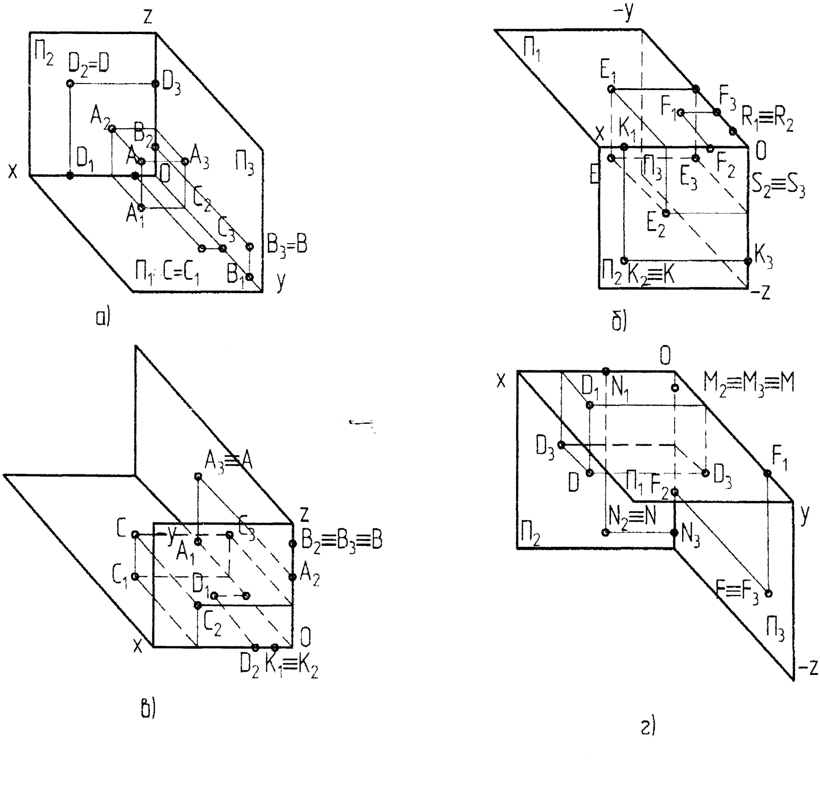
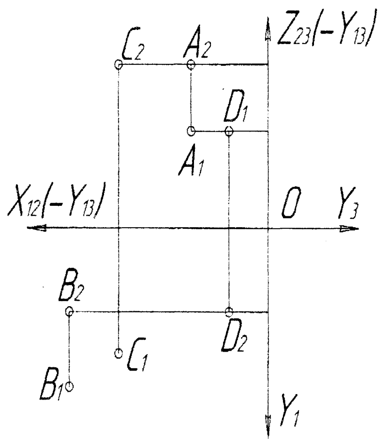


Рисунок 5 – Виділені октанти

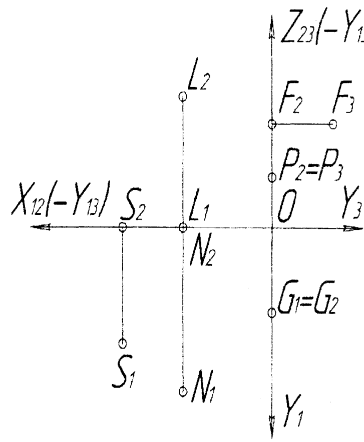
1. Які октанти виділені на рис. 5, а, б, в, г ?
2. Які з точок належать октантам простору, площинам проекцій, осям проекцій /дайте символьний запис/?
3. Побудуйте епюри виділених точок.
4. Дайте назву елементів креслення:
   - Π_1, Π_2, Π_3;
   - OX, OY, OZ;
   - A_1, A_2, A_3;
   - A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3.

2.5 Задачі для самостійної підготовки

Задача 1. За двома проекціями точок побудуйте третю та дайте символьний запис. Які з точок рівновіддалені від площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3?

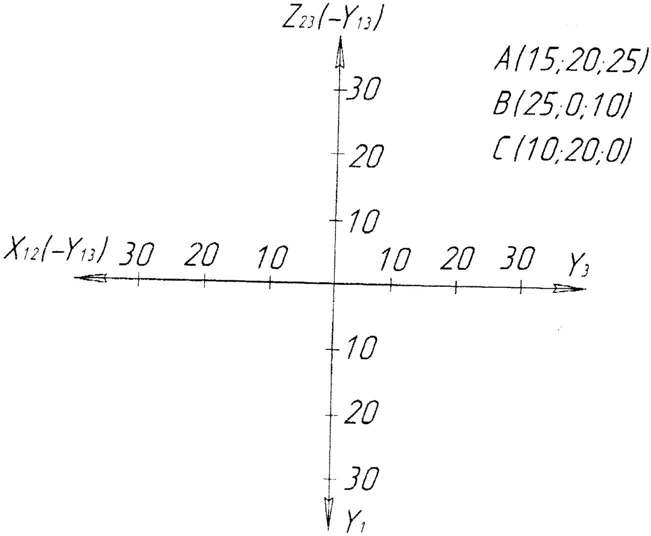


а)



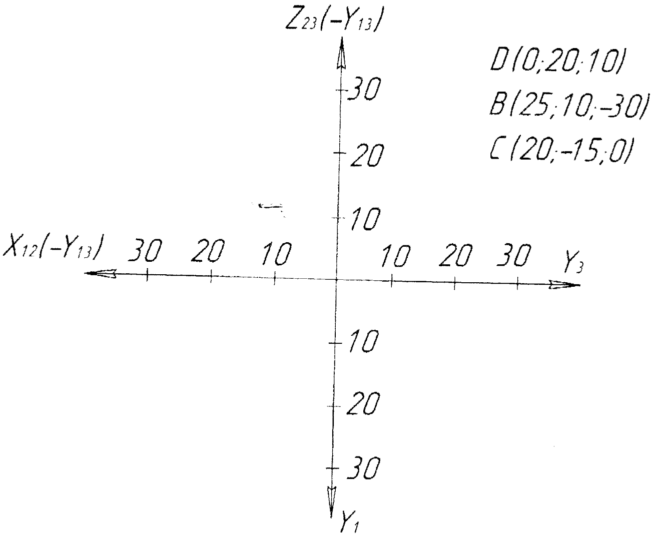
б)

Задача 2. За заданими координатами побудуйте проекції заданих точок. Визначте положення цих точок в просторі.



Z23(–Y13)
A(15;20;25)
B(25;0;10)
C(10;20;0)
X12(–Y13)
Y3
Y1

а)



Z23(–Y13)
D(0;20;10)
B(25;10;–30)
C(20;–15;0)
X12(–Y13)
Y3
Y1

б)

3 Пряма

Пряму в просторі можна задати 2-ма точками або точкою з відповідним напрямом.

Визначником прямої у просторі є дві точки, умовний запис визначника прямої: l (A, B). На рис. 6 (а, б) пряму визначають двома проекціями прямої: AB (A_1B_1, A_2B_2) або (l_1, l_2).

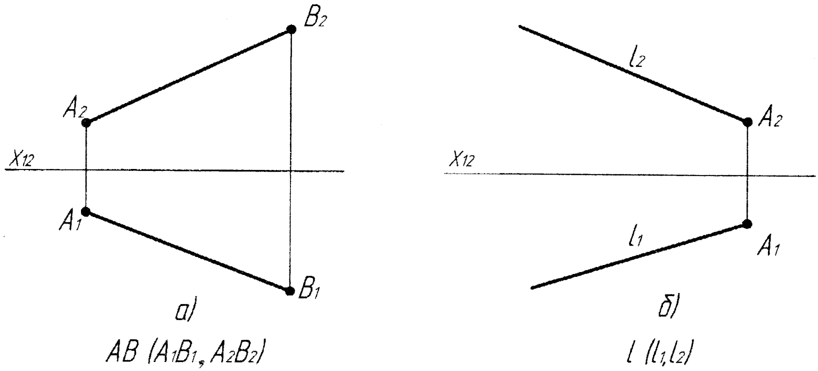


Рисунок 6 – Задання прямої на епюрі

3.1 Різновиди прямих

Прямі бувають загального та окремого положення. В свою чергу, до прямих окремого положення відносять прямі рівня та проекціювальні.

Означення

Пряма загального положення – пряма, яка непаралельна і неперпендикулярна ні до жодної з площин проекцій (рис. 7).

Пряма окремого положення - пряма, яка паралельна тільки одній із площин проекцій або перпендикулярна тільки до однієї із площин проекцій.

Пряма рівня паралельна тільки одній із площин проекції та утворює кути нахилу з двома іншими (табл. 1).

Проекціювальна пряма перпендикулярна лише до однієї із площин проекцій та паралельна двом іншим площинам проекцій (табл. 2).

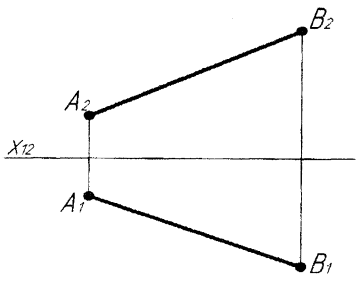
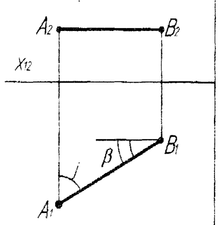
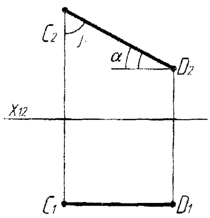
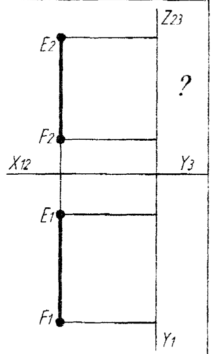


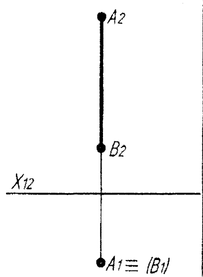
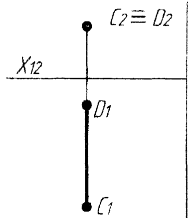
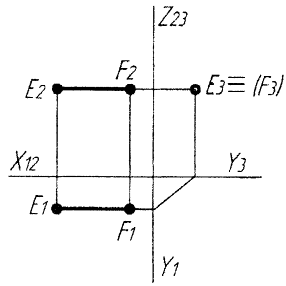
Рисунок 7 – Епюр прямої загального положення

Таблиця 1 – Прямі рівня

Різновиди, символічний запис	Горизонтальна пряма ($AB \parallel \Pi_1$)	Фронтальна пряма (CD $\parallel \Pi_2$)	Профільна пряма ($EF \parallel \Pi_3$)
Епюри прямих1			
Ознаки	$A_2B_2 \parallel X_{12}$, A_1B_1 = *н.в. AB*, β, j – кути нахилу прямої відповідно до Π_2 та Π_3.	$C_1D_1 \parallel X_{12}$, C_2D_2 = *н.в. CD*, α, j – кути нахилу прямої відповідно до Π_2 та Π_3.	?

Примітка: знак „?" націлює увагу студента на те, що він повинен самостійно побудувати 3-ю проекцію прямої EF (E_3F_3) та визначити ознаки.

Таблиця 2 – Проекціювальні прямі

<table>
<tr><td>Різновиди</td><td>Горизонтально-проекціювальна ($AB \perp П_1$)</td><td>Фронтально-проекціювальна ($CD \perp П_2$)</td><td>Профільно-проекціювальна ($EF \perp П_3$)</td></tr>
<tr><td>Епюри прямих</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ознаки</td><td>$A_2B_2 \perp X_{12}$,
$A_2B_2 = н.в.\ AB$,
Точки A та B конкурують на $П_1$</td><td>?</td><td>$E_2F_2 \perp Z_{23}$, $E_1F_1 \perp У_1$,
$E_2F_2 = E_1F_1 = н.в.\ EF$
Точки E та F конкурують на $П_3$</td></tr>
</table>

Примітка: знак „?” націлює увагу студента на те, що він повинен самостійно визначити ознаки фронтально-проекціювальної прямої.

$A_1 \equiv B_1$ – вироджена проекція прямої AB.

$C_2 \equiv D_2$ – вироджена проекція прямої CD.

$E_3 \equiv F_3$ – вироджена проекція прямої EF.

3.2 Класифікація прямих

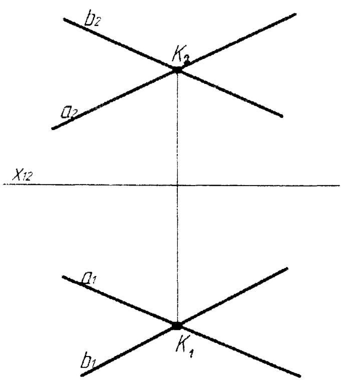
Класифікацію прямих можна подати таким чином:

- Прямі
  - Загального положення
  - Окремого положення
    - Рівня
      - Горизонталь
      - Фронталь
      - Профільна
    - Проекціювальні
      - Горизонтально-проекціювальна
      - Фронтально-проекціювальна
      - Профільно-проекціювальна

3.3 Взаємне положення прямих

Прямі перетинаються, якщо їх однойменні проекції перетинаються, а точка перетину знаходиться на одній лінії зв'язку (рис. 8).

Символьний запис:

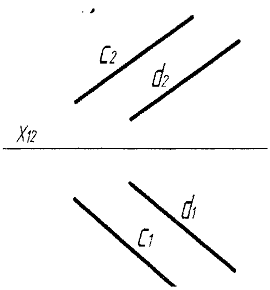


$$a \cap b = K \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cap b_1 = K_1, \\ a_2 \cap b_2 = K_2. \end{cases}$$

Рисунок 8 – Прямі, які перетинаються

Прямі паралельні, якщо їх однойменні проекції паралельні (рис. 9).

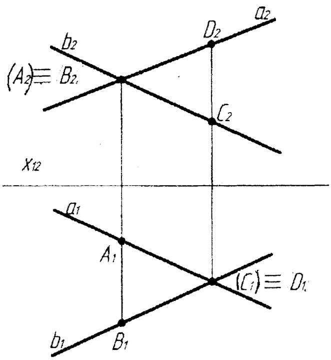
Символьний запис:



$$c \parallel d \Rightarrow \begin{cases} c_1 \parallel d_1, \\ c_2 \parallel d_2. \end{cases}$$

Рисунок 9 – Паралельні прямі

Мимобіжні прямі – прямі, які не перетинаються та непаралельні, тобто не належать одній площині (рис. 10).



Точки А і В конкурують на $П_2$, точки С і D конкурують на $П_1$.

Символьний запис:

$$a \,\underline{\circ}\, в \Rightarrow \begin{cases} a_1 \,\underline{\circ}\, в_1, \\ a_2 \,\underline{\circ}\, в_2. \end{cases}$$

Рисунок 10 – Мимобіжні прямі

Точки А, В та С,D – конкурують. Конкуруючі точки – точки, які знаходяться на одному проекціювальному промені.

В даному випадку потрібно визначати видимість точок. Видимість точок визначають за віддаленістю від площини проекцій, на якій вони конкурують. Оскільки в нарисній геометрії ми розглядаємо об'єкти проекціювання між площиною проекцій та спостерігачем, то видимою точкою буде та, яка знаходиться далі від площини проекцій (ближче до спостерігача), тобто має більшу координату:

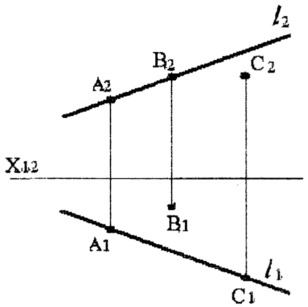
т. D – видима на Π_1, $y_D > y_C$,

оскільки

т. B – видима на Π_2, $z_B > z_A$.

3.4 Точка на прямій. Сліди прямої

Умова інцидентності – точка належить прямій, якщо її проекції належать однойменним проекціям цієї прямої (рис. 11).



Символьний запис:

$$A \subset L \Rightarrow \begin{cases} A_1 \subset L_1, \\ A_2 \subset L_2. \end{cases}$$

Рисунок 11 – Інцидентність точки прямій

Сліди прямої – точки перетину прямої з площинами проекцій і визначаються як особливі точки прямої, одна із координат яких дорівнює нулю (рис. 12).

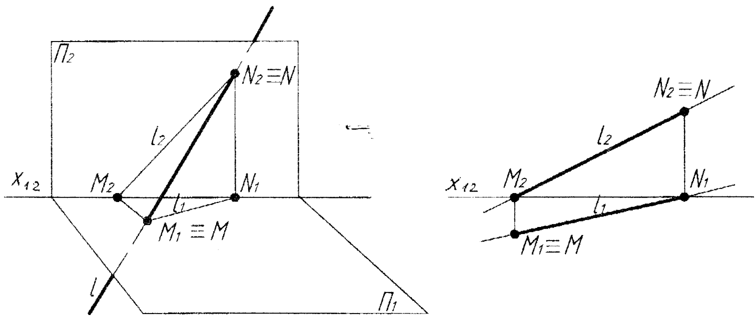


Рисунок 12 – Побудова горизонтального M (M_1, M_2) та фронтального N (N_1, N_2) слідів прямої *l*

Позначення на рис. 12 слід читати так:

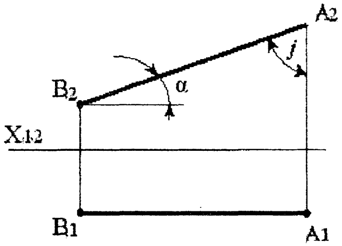
1. т. M – горизонтальний слід, який на епюрі визначається проекціями точок M_1 (горизонтальна проекція горизонтального сліду) та M_2 (фронтальна проекція горизонтального сліду). У цієї точки відсутня координата Z, тобто $Z_M = 0$.

2. т. N – фронтальний слід, який на епюрі визначається проекціями точок N_1 (горизонтальна проекція фронтального сліду) та N_2 (фронтальна проекція фронтального сліду). У цієї точки відсутня координата У, тобто $У_N = 0$.

3.5 Приклади для закріплення

Приклад 1. Уявіть і побудуйте проекції відрізка АВ, паралельного $П_2$, причому точка В знаходиться далі від $П_3$, ніж точка А. Запишіть символьне позначення прямої, покажіть її довжину та кути нахилу до площин проекцій.

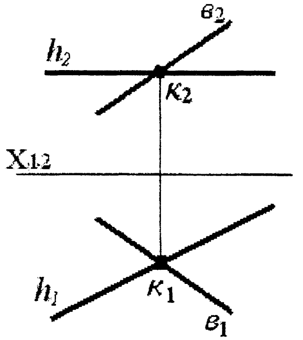
Оскільки відрізок прямої АВ паралельний $П_2$, то слід врахувати ознаки фронтальної прямої, тобто $A_1B_1 \parallel X_{12}$, та відповідні позначення кутів нахилу α та j.



Ознаки та позначення:
$AB \parallel П_2$, $X_B > X_A$;
АВ – фронталь f,
$A_1B_1 \parallel X_{12}$;
Н.в. $AB = A_2B_2$;
α – кут нахилу до $П_1$,
j – кут нахилу до $П_3$.

Приклад 2. Побудуйте дві прямі, які перетинаються, причому одна з яких займає горизонтальне положення.

Використовуємо ознаку горизонтальної прямої h (h_1, h_2), тобто $h_1 \parallel X_{12}$.

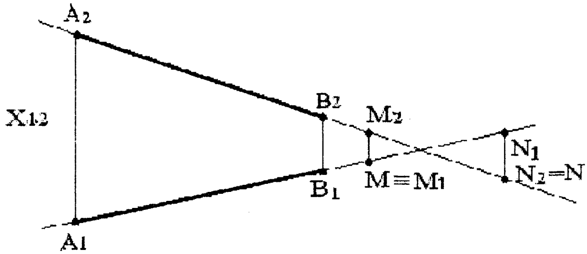


Символьний запис:

$$\text{в} \cap h = K \Rightarrow \begin{cases} \text{в}_1 \cap h_1 = K_1, \\ \text{в}_2 \cap h_2 = K_2. \end{cases}$$

$$h \parallel П_1$$

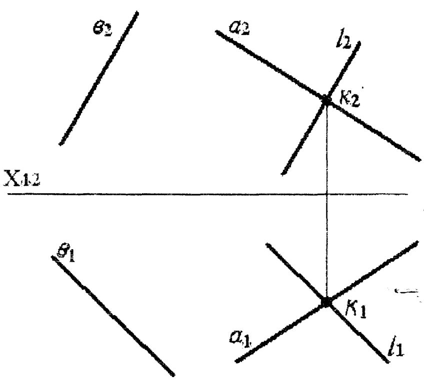
Приклад 3. Побудуйте горизонтальний та фронтальний сліди прямої АВ.



Ознаки:
$M \in \Pi_1$,
$N \in \Pi_2$.

Продовжимо проекції A_1B_1 та A_2B_2 до перетину з віссю X_{12}.
Визначимо проекції точок $M(M_1, M_2)$ та $N(N_1, N_2)$.
т. M – горизонтальний слід, є результатом перетину прямої АВ з площиною проекцій ($Z_M = 0$); т. N – фронтальний слід, є результатом перетину прямої АВ з площиною проекції Π_2 ($У_N = 0$).

Приклад 4. Побудуйте пряму *l*, яка перетинає пряму *a* та паралельна до прямої *в*.



Символьний запис:

$$a \cap l = K \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cap l_1 = K_1, \\ a_2 \cap l_2 = K_2. \end{cases}$$

$$l \parallel в \Rightarrow \begin{cases} l_1 \parallel в_1, \\ l_2 \parallel в_2. \end{cases}$$

3.6 Теоретичні питання

1. Які положення прямих Вам відомі?
2. Які прямі окремого положення Ви знаєте?
3. За якими ознаками можна визначити прямі рівня?
4. За якими ознаками можна визначити проекціювальні прямі?
5. Які точки називають конкуруючими?
6. Ознаки паралельних прямих.
7. Ознаки мимобіжних прямих.
8. Ознаки прямих, які перетинаються.

3.7 Питання до розв'язання задач на практичному занятті

1. Визначте положення прямої АВ за наочним зображенням (рис. 13).
2. Запишіть назву прямої, довжину, кут нахилу до площин проекцій.

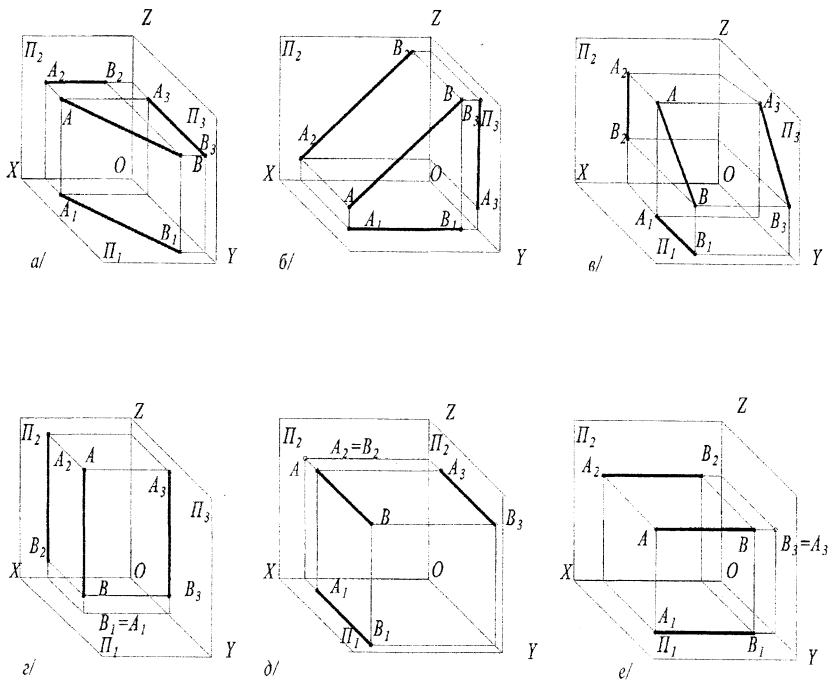


Рисунок 13 – Наочні зображення прямої АВ

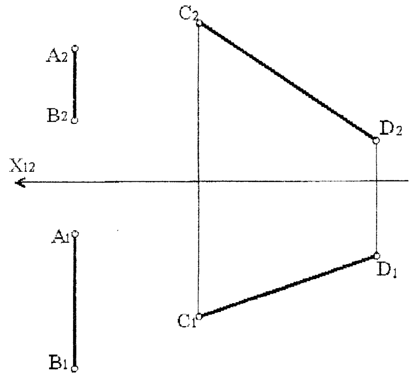
3.8 Задачі для самостійної підготовки

Задача 1. Побудуйте дві проекції прямих:

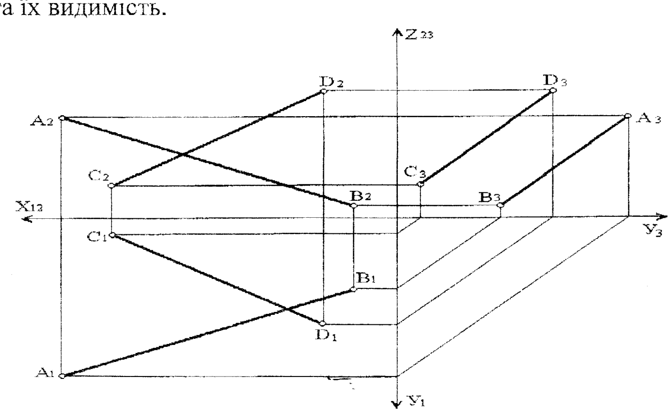
– які перетинаються, причому дві з них окремого положення;

– які паралельні між собою та займають фронтальне положення.

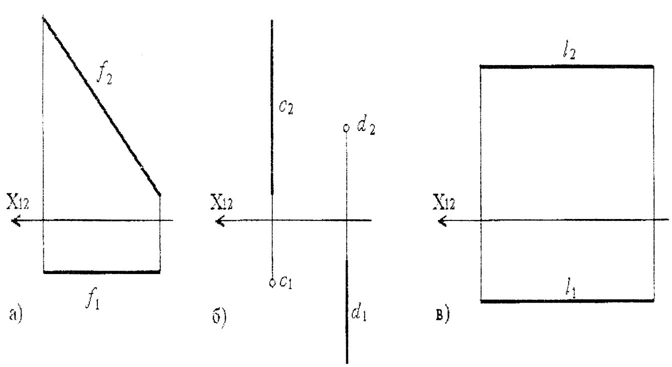
Задача 2. Перетніть прямі АВ та CD прямою EF, яка проходить через т. А та паралельна $П_1$.



Задача 3. Визначте відносне положення прямих, проекції конкуруючих точок та їх видимість.



Задача 4. Побудуйте сліди прямих та позначте їх проекції.



4 Площина

Точка, пряма, площина відносяться до невизначених понять геометрії. Площину можна розглядати як безперервну двопараметричну множину точок, тобто площина безмежна.

4.1 Способи задання площини

Площину на епюрі можна задавати шістьома способами:

1. Трьома точками, які не лежать на одній прямій.
2. Прямою та точкою, яка не лежить на цій прямій.
3. Двома паралельними прямими.
4. Двома прямими, які перетинаються.
5. Плоскою фігурою.
6. Слідами.

4.2 Класифікація площин

Площини бувають загального та окремого положення. До площин окремого положення відносять площини рівня та проекціювальні.

Площини окремого положення мають особливу властивість, а саме: вироджуються /перетворюються/ в пряму лінію та проекціюються в слід-проекцію.

Відносно площин проекцій Π_1,Π_2, Π_3 площини можуть займати такі положення: бути паралельними або перпендикулярними до площин проекцій, непаралельними та неперпендикулярними до площин проекцій.

Означення

Площина загального положення – це площина, яка непаралельна та неперпендикулярна ні до жодної з площин проекцій.

Площина окремого положення – це площина, яка паралельна або перпендикулярна до однієї з координатних площин проекцій.

Площини, паралельні одній із координатних площин, називають площинами рівня.

На паралельну їй координатну площину площина рівня проекціюється без спотворення. На дві інші координатні площини площина рівня проекціюється в лінії перетину її з цими координатними площинами, і називаються вони виродженими проекціями цієї площини.

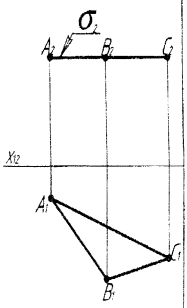
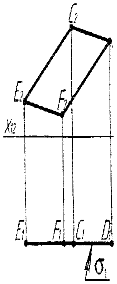
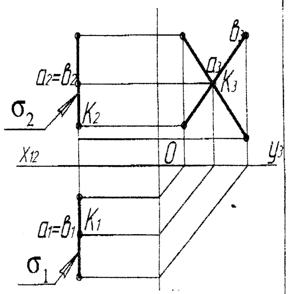
Площини, які перпендикулярні одній із координатних площин, називаються проекціювальними.

На перпендикулярну до неї координатну площину проекціювальна площина проекціюється в лінію перетину її з цією координатною площиною, тобто утворює вироджену проекцію цієї площини. На цю ж площину проекції проекціюються без спотворення кути нахилу проекціювальної площини до двох інших.

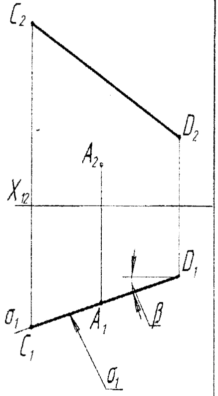
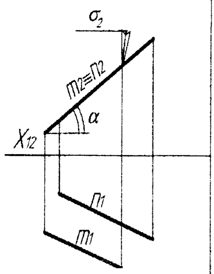
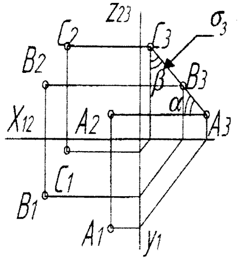
Назви площинам окремого положення дають аналогічно вищезгаданим прямим. Наприклад, якщо площина σ перпендикулярна до $П_1$, то їй відповідає назва горизонтально-проекціювальна площина.

В таблицях 3 – 4 наведені наочні зображення та епюри площин окремого положення, де в кожному окремому випадку площина задана одним із шести способів. На рис. 14 показаний епюр площини загального положення.

Таблиця 3 – Площини рівня

Різновиди, символьний запис	Горизонтальна площина σ: σ (ABC) II $П_1$	Фронтальна площина σ: σ (ECDF) II $П_2$	Профільна площина σ: σ (a^в) II $П_3$
Епюри площин	 σ_2 – вироджена проекція площини	 σ_1 – вироджена проекція площини	 σ_1, σ_2 – вироджені проекції площини
Ознаки	σ_2 II X_{12}. Всі точки площини рівновіддалені від $П_1$.	?	σ_1 II y_1, σ_2 II z_{23}. Всі точки площини рівновіддалені від $П_3$.

Таблиця 4 – Проекціювальні площини

Різновиди, символь-ний запис	Горизонтально-проекціювальна площина σ: σ (A,CD) $\perp$ $П_1$	Фронтально-проекціювальна площина σ: σ (m ∥ n) $\perp$ $П_2$	Профільно-проекціювальна площина σ: σ (A,B,C) $\perp$ $П_3$
Епюри площин			
Ознаки	?	$σ_2$^X_{12}=α, α – кут нахилу площини σ до $П_1$.	$σ_3$ ^Z_{23}=β, $σ_3$^Y_3=α ; α,β – кути нахилу відповідно до $П_1$ та $П_2$.

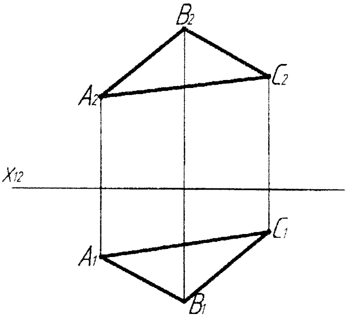
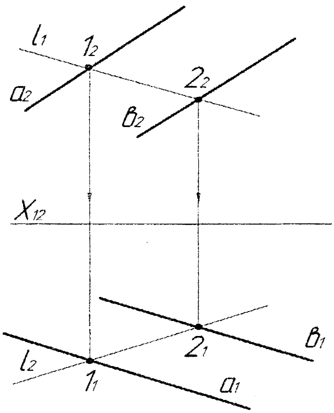


Рисунок 14 – Площина загального положення

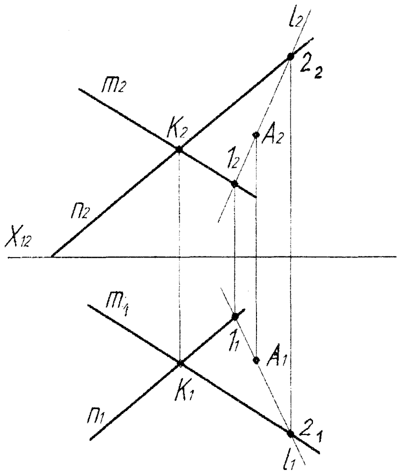
4.3 Умови інцидентності

1-а умова – пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, які належать цій площині (рис. 15, а);

2-а умова – точка належить площині, якщо вона належить прямій, яка знаходиться в цій площині (рис. 15, б).



а) l є $\Sigma(a$ *II* $в)$



б) А є ($m \frown n = K$)

Рисунок 15 – Умови інцидентності

4.4 Головні лінії площини

Горизонталь площини – пряма, яка належить площині та паралельна горизонтальній площині проекцій.

Фронталь площини – пряма, яка належить площині та паралельна фронтальній площині проекцій (рис. 16).

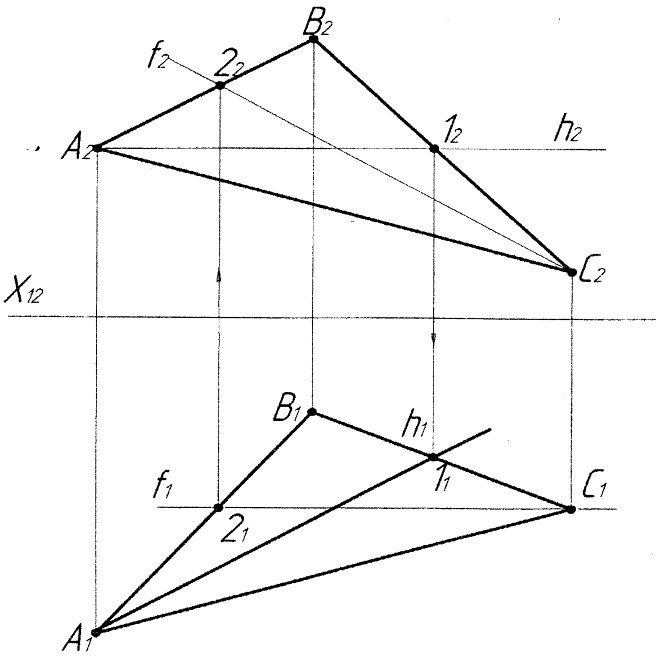


Рисунок 16 –Горизонталь та фронталь площини

Побудову проекцій горизонталі h та фронталі f починають, враховуючи їх ознаки на епюрі: для h[A,1] – h_2 II X_{12}, f[C,2] – f_1 II X_{12}.

Тобто, h_2,f_1 – вихідні проекції, відповідно, горизонталі h та фронталі f. Для зручності головні лінії (лінії рівня) проведені через т. А (горизонталь) та т. С (фронталь) площини ΔАВС.

4.5 Сліди площини

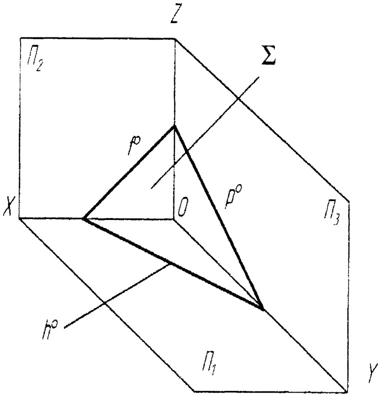
Сліди площини – лінії перетину площини з площинами проекцій. На рис. 17(а, б) показані, відповідно, наочне зображення площини, заданої слідами, та її епюр. Можливі епюри площин, заданих слідами, показані на рис. 17(а, б). Позначення:

f^0 – фронтальний слід площини $\sum$;

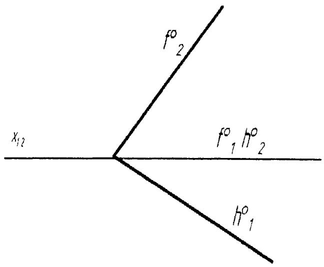
h^0 – горизонтальний слід площини $\sum$;

p^0 – профільний слід площини $\sum$;

x_Σ – точка сходу горизонтального та фронтального слідів.



а) наочне зображення



б) епюр

Рисунок 17 – Сліди площини

При розгляді зображень проекціювальних площин та площин рівня було виділено поняття виродженої проекції площини. Вироджена проекція площини також утворює слід площини.

Покажемо побудову слідів площини, яка задана двома паралельними прямими. Причому, площина може бути задана будь-яким із шести способів. Щоб побудувати сліди площини, досить побудувати сліди двох прямих, які належать площині Π_1 та Π_2 (рис. 18).

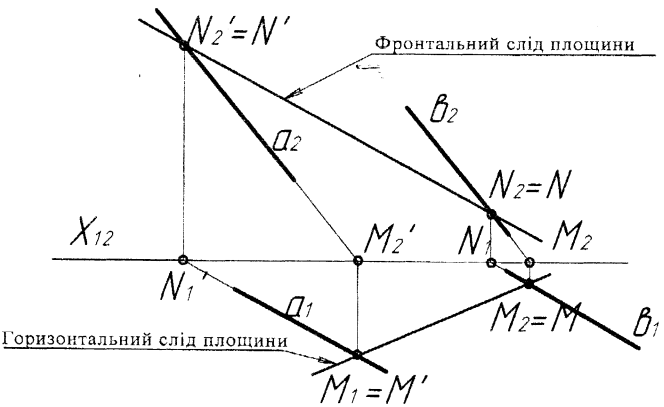
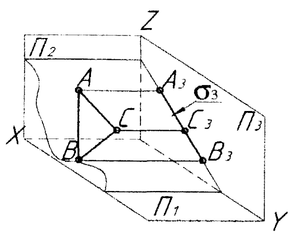


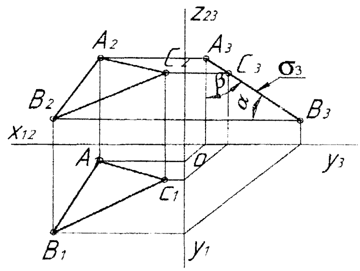
Рисунок 18 – Горизонтальний та фронтальний сліди площини загального положення Σ /*а* ІІ *в*/

4.6 Приклади для закріплення

Приклад 1. Визначте положення площини та її спосіб задання за наочним зображенням. Запишіть назву площини, її положення, побудуйте епюр цієї площини.

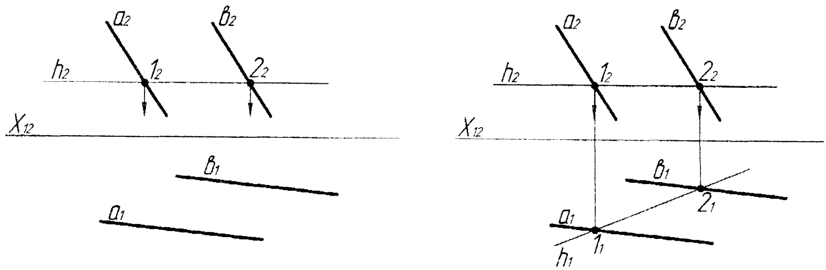
Із наочного зображення видно, що площина, яка задана ΔABC, розташована перпендикулярно до Π_3 і на цій площині проекцій вироджується в пряму лінію. $\sigma(\Delta ABC)$ – профільно-проекціювальна; α – кут нахилу до Π_1; β – кут нахилу до Π_2.





Приклад 2. В площині загального положення, яка задана двома паралельними прямими, побудуйте горизонталь.

Горизонталь площини позначається буквою h. Горизонталь – це лінія, яка належить площині та паралельна Π_1 (рис. 19 а, б). Вихідною проекцією горизонталі має бути фронтальна проекція h_2, яка за ознаками паралельна осі X_{12} (це точки 1, 2). За вертикальними лініями зв'язку визначаємо проекції точок 1_1 та 2_1 і через них проводимо h_1. Лінія h_1 називається горизонтальною проекцією горизонталі та є неспотвореною проекцією (натуральною величиною горизонталі h).



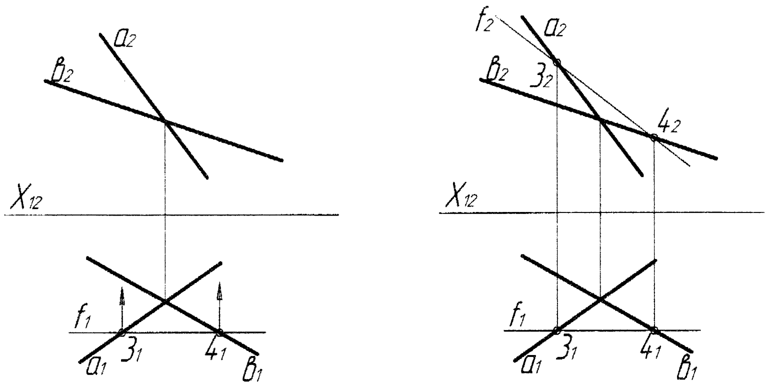
а) h_2 – вихідна проекція б) побудова h_1

Рисунок 19 – Побудова горизонталі в площині σ (a II $в$)

Приклад 3. В площині загального положення, яка задана прямими, що перетинаються, побудуйте фронталь.

Фронталь площини позначається буквою f. Фронталь – це лінія, яка належить площині та паралельна $П_2$ (рис. 20 а, б). Вихідною проекцією фронталі має бути горизонтальна проекція, яка за ознаками паралельна до осі X_{12} та проходить через проекцію двох точок, які належать площині (це точки 3 та 4). За вертикальними лініями зв'язку визначаємо проекції точок 3_2 та 4_2 і через них проводимо f_2. Лінія f_2 називається фронтальною проекцією фронталі та є неспотвореною проекцією (натуральною величиною фронталі f).

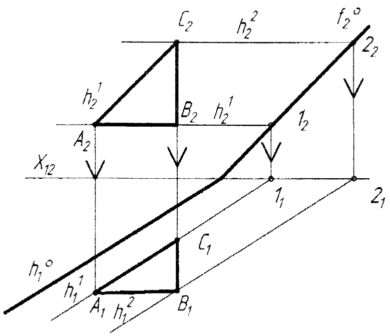
Аналогічно, якщо задані три проекції заданої площини, то можна побудувати, використовуючи ознаки профільної прямої, профільну пряму ρ площини.



а) f_1 - вихідна проекція б) побудова f_2

Рисунок 20 – Побудова фронталі у площині σ($a \cap в$)

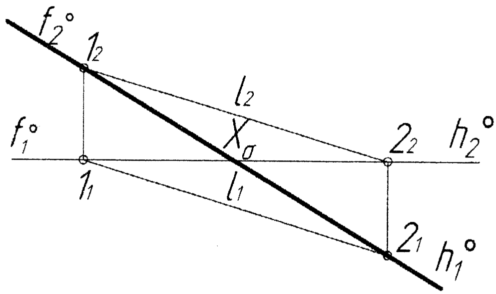
Приклад 4. Побудуйте проекції плоскої фігури, яка належить площині σ($f^0 \cap h^0$).



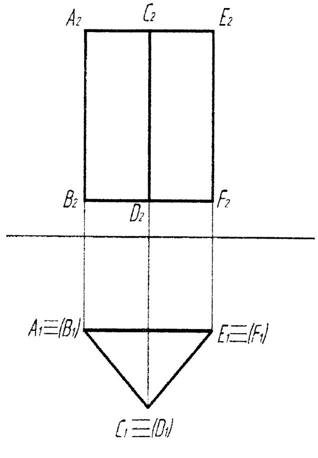
Проекції плоскої фігури знаходять за допомогою горизонталей h^1 та h^2 площини, яка задана слідами.

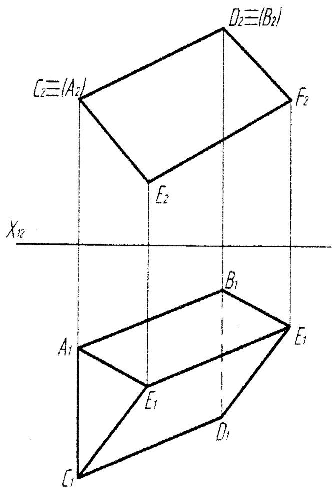
Приклад 5. В площині, яка задана слідами під розгорнутим кутом $\sigma(f^0 \cap h^0)$, побудувати пряму загального положення l, яка належить площині, тобто $l \in (f^0 \cap h^0)$.

Пряма l визначається двома точками 1 та 2, тобто l [1, 2], причому точка 1 належить фронтальному слідові $f^0(f_1^0, f_0^2)$, а точка $2 - h^0(h_1^0, h_2^0)$.



Приклад 6. Проаналізуйте положення ребер та граней многогранника.

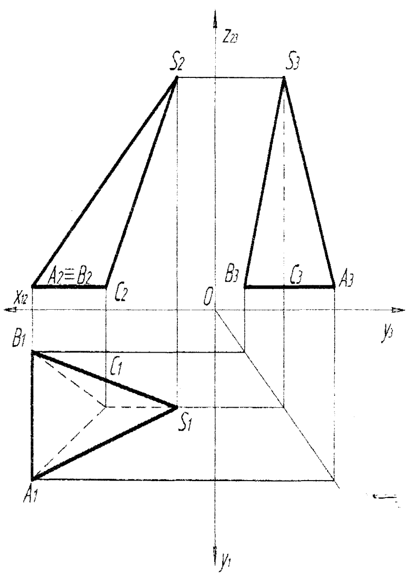




Скористаємось таблицями 1, 2 та 3, 4. Знайдемо особливості зображень ребер та граней. Запишемо в символьному вигляді положення ребер та граней:

1-й варіант		2-й варіант	
ребра	грані	ребра	грані
AB, CD, EF$\perp \Pi_1$, AE, BF$\perp \Pi_3$, AC,CE та BD, DF$//\Pi_1$.	ACE,BDF$//\Pi_1$ ABCD,CDEF$\perp\Pi_1$ ABEF$//\Pi_2$.	AC,BD$\perp\Pi_2$ AB,EF,CD,AE - загального положення	CABD,ACE BDF$\perp\Pi_2$ ABEF,CEFD- загального положення

Приклад 7. Самостійно ознайомтесь з побудовою третьої проекції многогранника та аналізом його ребер і граней.



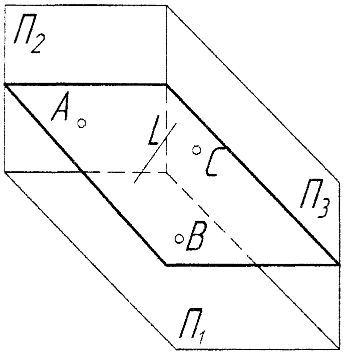
Положення	Ребра	Грані
Загальне	SB;SA	SBC;SCA
Горизонтальне	AC;BC	ABC
Фронтальне	SC	-
Профільне	-	-
Горизонтально-проекціювальне	-	-
Фронтально-проекціювальне	AB	SAB
Профільно-проекціювальне	-	-
Паралельні	-	-
Перетинаються	ABxBC	SBCxSAC
Мимобіжні	AB_Ω_SC	-

4.7 Теоретичні питання

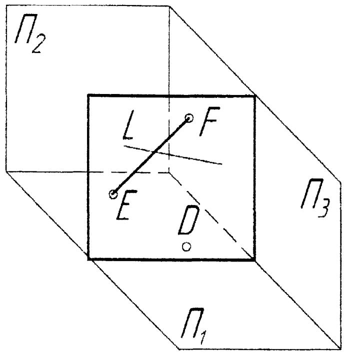
1. Які способи задання площини на епюрі Ви знаєте?
2. Які положення площин Вам відомі?
3. Які площини окремого положення Ви знаєте?
4. За якими ознаками можна визначити площини рівня?
5. За якими ознаками можна визначити проекціювальні площини?
6. Яка властивість характерна для площин окремого положення?
7. В якому випадку пряма належить площині?
8. В якому випадку точка належить площині?
9. З якої площини проекцій доцільно починати побудову горизонталі, фронталі площини?

4.8 Питання до розв'язання задач на практичному занятті

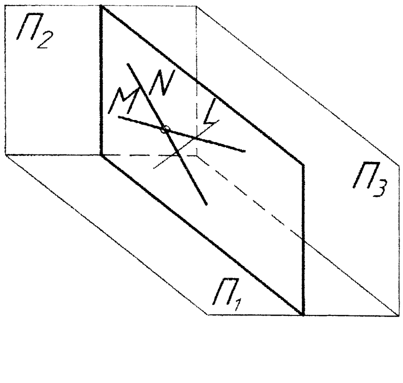
1. Визначте положення площини σ та її спосіб задання за наочним зображенням (рис. 21).
2. Дайте назву площини, її положення, визначте кут нахилу до площин проекцій.
3. Побудуйте епюр цієї площини.



а)



б)

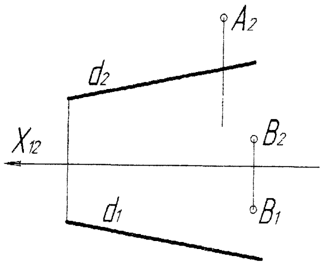


в)

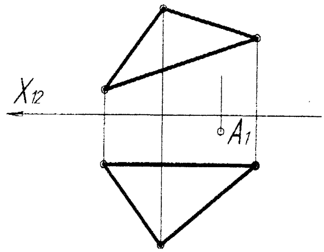
Рисунок 21 - Наочні зображення площин

4.9 Задачі для самостійної підготовки

Задача 1. В заданих площинах побудуйте відсутню проекцію т. А .

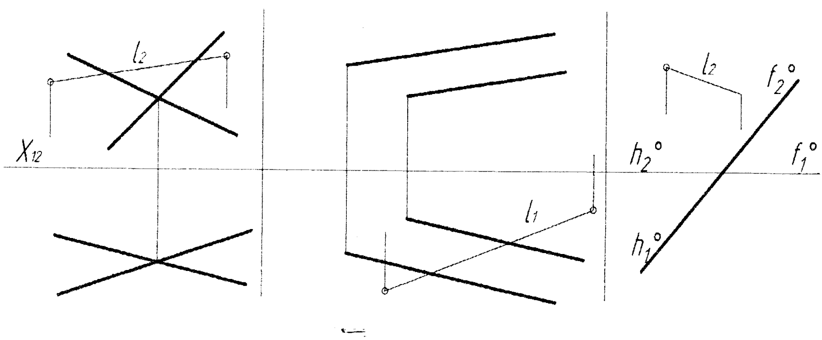


а)

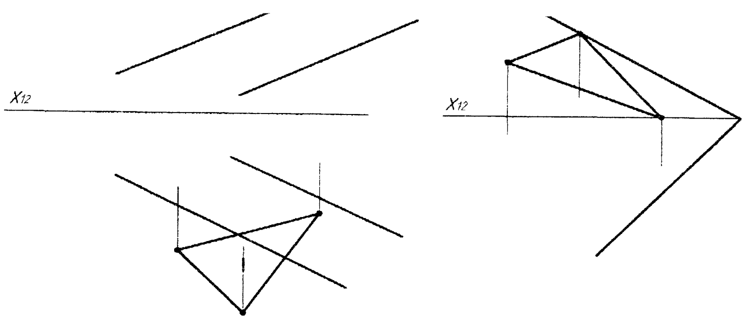


б)

Задача 2. Побудуйте: відсутню проекцію прямої l, що належить площинам; горизонталь та фронталь цієї площини.



Задача 4. Побудуйте відсутню проекцію ΔABC, якщо відомо, що Δ ABC належить заданій площині.



5 Взаємне положення прямої та площини

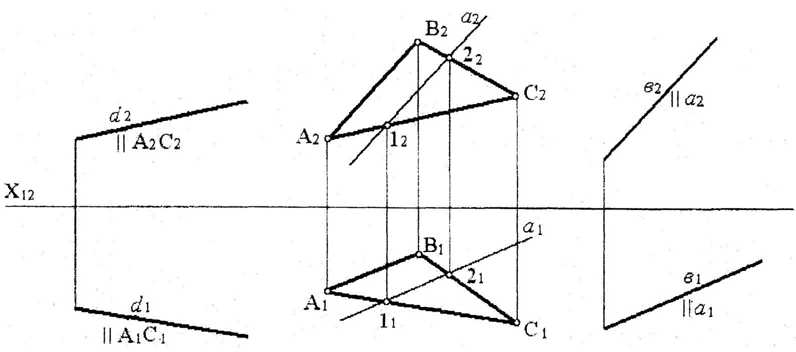
Пряма відносно площини може займати різні положення:
- належати площині,
- бути паралельною,
- перетинати її,
- бути перпендикулярною (є окремим випадком перетину).

5.1 Паралельність прямої площині

Означення: пряма паралельна площині, якщо вона паралельна прямій, яка знаходиться в цій площині.

В будь-якій площині можна провести безліч прямих, тому, як приклад, запропонуємо один із варіантів прямої, яка знаходиться в площині.

Проведемо до площини σ, яка задана трикутником (Δ ABC), пряму, паралельну їй (рис. 22). Запропонуємо варіанти окремого та загального випадків паралельності. В окремому випадку (рис. 22, а) пряма d проведена паралельно до сторони AC Δ ABC. В загальному випадку (рис. 22, б) слід попередньо довільно побудувати проекції прямої *a* (a_1, a_2), яка належить площині, а потім, згідно з означенням, провести проекції прямої *в* ($в_1$, $в_2$) паралельно відповідним проекціям прямої *a*, тобто $в_1 \parallel a_1$, $в_2 \parallel a_2$.



а) окремий випадок б) загальний випадок

Рисунок 22 – Побудова прямої, паралельної площині

Для пояснення розв'язування задачі (загальний випадок) введемо символьні позначення.
Дано: σ (Δ ABC).
Побудувати: *в* // σ (Δ ABC).

План розв'язання:

1. В площині довільно проведемо пряму a [1, 2], тобто $a \subset \Delta$ ABC.
2. Через т. D проведемо пряму в, паралельну прямій а, що належить площині трикутника ABC, тобто:

$$[(в\|\ni D)\|a] \rightarrow \begin{cases} (в_1 \ni D_1)\|a_1, \\ (в_2 \ni D_2)\|a_2. \end{cases}$$

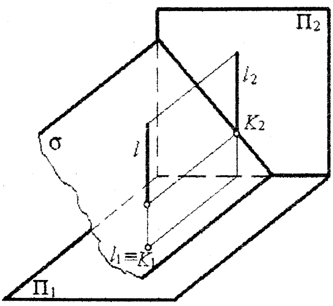
Отже , пряма *в* паралельна площині Σ (Δ ABC).

5.2 Перетин прямої з площиною

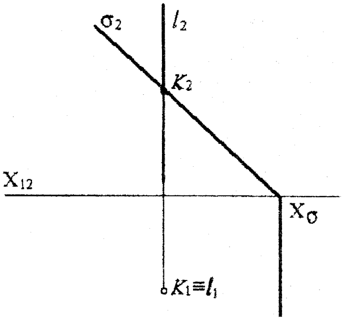
Результатом перетину прямої з площиною є точка. Розглянемо випадки перетину прямої з площиною, а саме, коли, в залежності від положення заданої площини та прямої, проекції точок визначаються безпосередньо або за рахунок допоміжних побудов.

5.2.1 Окремі випадки перетину прямої з площиною

1. Проекціювальна пряма l перетинає площину σ окремого положення (рис. 23, а, б).



а) аксонометричне зображення



$\sigma\ (\sigma_2) \cap l = K$

б) епюр

Рисунок 23 – Визначення проекцій точок перетину горизонтально-проекціювальної прямої l з фронтально-проекціювальною площиною σ

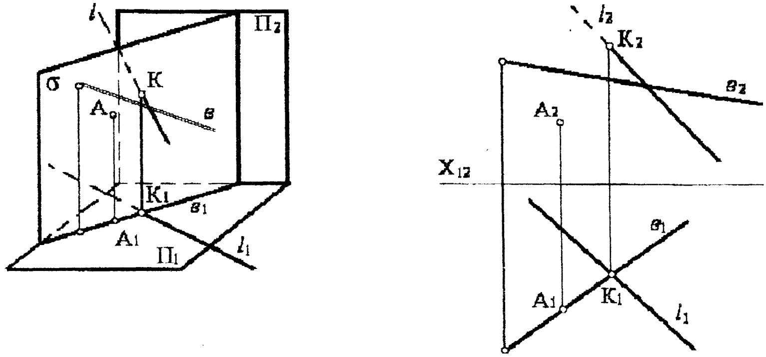
Фронтальна проекція точки K знаходиться на перетині фронтального сліду-проекції з проекцією прямої $l_2 : l_2 \cap \sigma_2 = K_2$.

Горизонтальна проекція точки K збігається з виродженою проекцією прямої $l : l_1 \equiv K_1$.

Висновок: дві проекції точки перетину K визначаються безпосередньо в тому разі, якщо пряма займає проекціювальне положення, а площина – проекціювальне або положення рівня.

2. Пряма загального положення або рівня перетинає площину окремого положення (рис. 24, а, б).

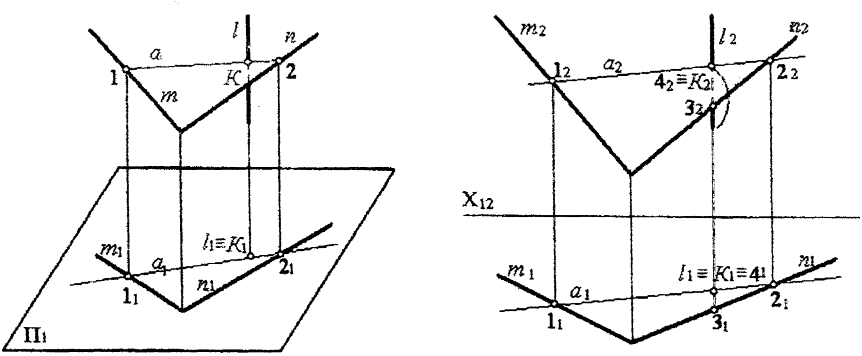
Вихідна проекція точки перетину K – горизонтальна (перетин горизонтальної проекції l_1 зі слідом-проекцією σ_1), тобто: $l_1 \cap \sigma_1 = K_1$ знаходиться в точці перетину l_2 з вертикальною лінією зв'язку ($K_2 \subset l_2$).



а) аксонометричне зображення б) епюр

Рисунок 24 – Визначення проекцій точок перетину прямої l з горизонтально-проекціювальною площиною σ

3. Проекціювальна пряма перетинає площину загального положення (рис. 25, а, б).



а)аксонометрія зображення б) епюр

Рисунок 25 – Визначення проекцій точок перетину горизонтально-проекціювальної прямої з площиною загального положення

Вихідна проекція точки перетину К – горизонтальна проекція K_1, вона збігається з виродженою проекцією l_1 заданої горизонтально-проекціювальної прямої l. Відсутня проекція знайдена з умови належності точки К площині σ ($K \subset a$, $a \subset \sigma$), проекція K_2 фіксується на перетині проекції l_2 з a_2, тобто: $l_2 \cap a_2 = K_2$. Прямі l і n площини мимобіжні, відповідно, т. 3 та 4 цих прямих конкурують на Π_2, т. 3 належить видимій стороні n площини σ ($y_3 > y_4$). Тому частина проекції l_2, яка виділена дугою, в межах точок K_2, 3_2 є невидимою.

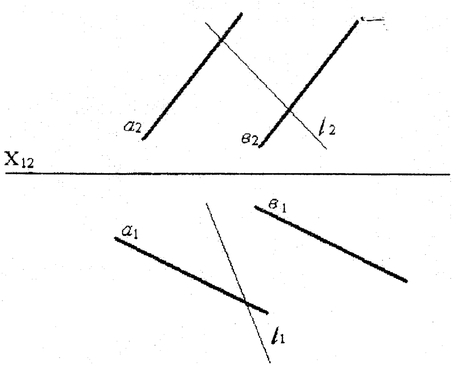
Висновки:

1. Якщо пряма загального положення або рівня перетинає площину окремого положення, то одна із проекцій шуканої точки перетину *К* знаходиться на перетині сліду-проекції площини з проекцією прямої. Відсутня проекція визначається за лінією зв'язку до перетину з другою проекцією прямої.
2. Якщо проекціювальна пряма перетинає площину загального положення, то одна із проекцій шуканої точки перетину *К* збігається з виродженою проекцією цієї прямої. Відсутня проекція точки перетину визначається як точка, яка належить площині.

5.2.2 Загальні випадки перетину прямої з площиною

В цьому випадку площину загального положення σ може перетинати пряма l, яка займає загальне положення або положення рівня.

Приклад. Побудуйте проекції точок перетину прямої з площиною. Визначте видимість прямої l (рис. 26).



Дано:

σ (a // $в$),

$l \cap \sigma = K$.

Побудуйте: K_1, K_2.

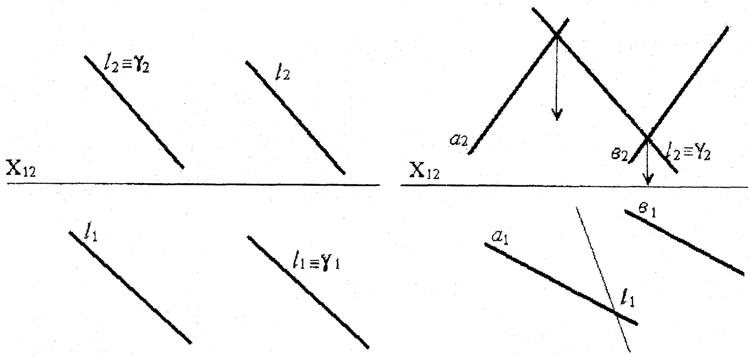
Визначте видимість l.

Рисунок 26 – Загальний випадок перетину прямої з площиною

Для визначення проекцій точки перетину слід знати алгоритм розв'язання задачі.

Алгоритм

1. Через пряму загального положення проводять допоміжну січну площину (горизонтально- або фронтально-проекціювальну) (рис. 27, а, б, в).



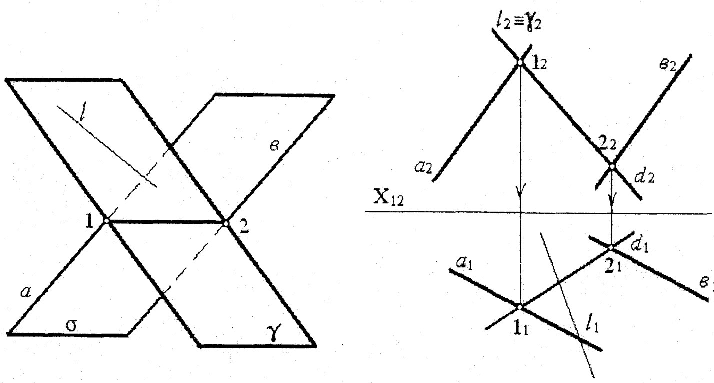
а) б) в)

Варіанти введення проекціювальної площини γ

Вибраний варіант введення січної фронтально-проекціювальної площини γ

Рисунок 27 – Варіанти введення допоміжної січної площини γ

2. Знаходять пряму перетину *а* заданої площини σ з введеною січною площиною γ (рис. 28, а, б).

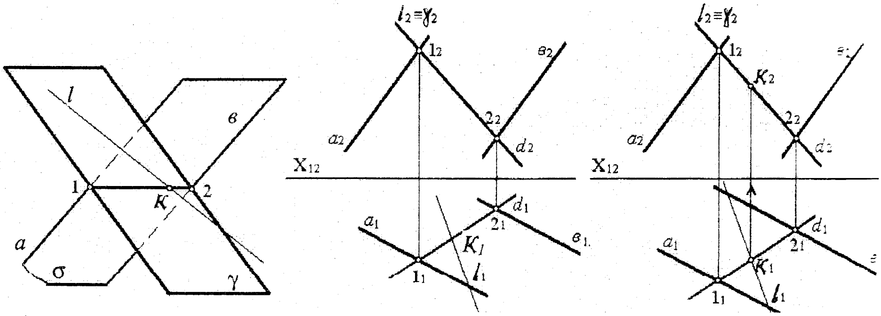


а) наочне зображення

б) епюр

Рисунок 28 – Побудова лінії перетину *а* з допоміжною січною площиною γ

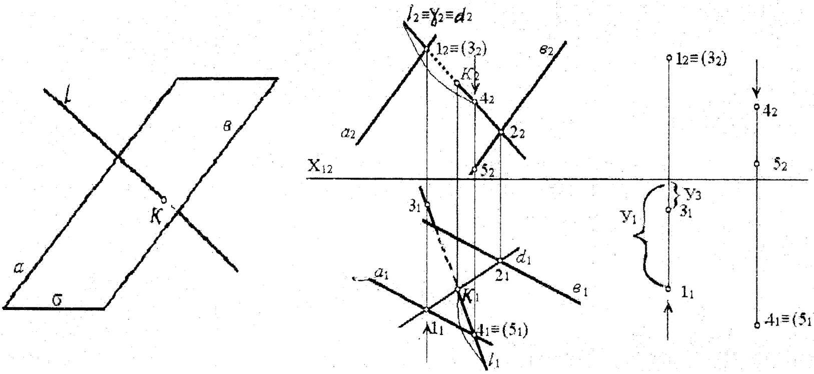
3. Знаходять точку перетину *К* з площиною (рис. 29, а, б, в).



а) аксонометричне зображення б) епюр в) K_1- вихідна проекція т. К

Рисунок 29 – Побудова точки перетину *К* з площиною

4. Визначають видимість прямої, використовуючи конкуруючі точки 1, 3 та 2, 4 (рис. 30, а, б, в).



а) наочне зображення б) визначення видимості в) конкуруючі точки

Рисунок 30 – Варіанти введення конкуруючих точок

4.1. Щоб визначити видимість прямої на $П_2$, виділимо частину проекції прямої l_2 дугою. Т.K_2 – проекція точки перетину. На цьому ж проміжку точки 1 та 3 конкурують ($1 \subset a$, $3 \subset l$). Видимою на $П_2$ буде точка 1, точка 3 – невидима (рис. 30, б), оскільки $У_1 > У_3$. А це означає, що частина прямої *l*, яка виділена дугою, невидима (точка 3 невидима та належить прямій *l*). Частина проекції l_2, яка обмежена проекціями K_2 та 3_2, закривається площиною, тобто невидима.

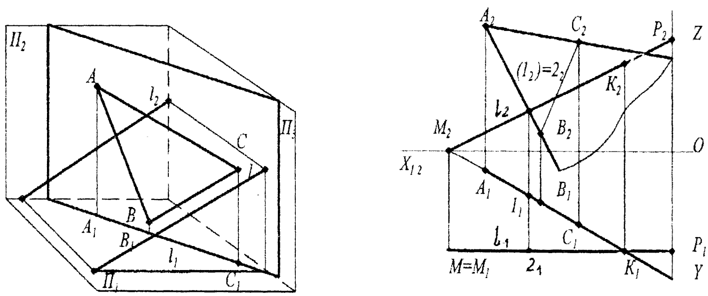
4.2. Для визначення видимості прямої l на Π_1 виділимо частину проекції l_1 дугою. На цьому проміжку позначимо конкуруючі точки 4 та 5 ($4 \subset l$, $5 \subset в$), т.4 – видима, т.5 – невидима (рис. 30, б). Враховуючи те, що т.4 належить прямій l, виділену частину проекції l_2 наводимо суцільною основною лінією. Решта частини прямої, яка знаходиться в межах контуру площини, – невидима.

Підсумовуючи пояснення щодо загального випадку перетину прямої з площиною, запишемо алгоритм розв'язання цієї задачі в символьній формі (див. зазначені пункти розв'язання задачі):

1. $l \equiv \gamma,\ \gamma \perp \Pi_2.$
2. $\gamma \cap \sigma = d.$
3. $d \cap l = K \Rightarrow \begin{cases} d_1 \cap l_1 = K_1, \\ K_2 \subset d_2, l_2. \end{cases}$
4. Видимість l.

5.3 Приклади для закріплення

Приклад 1. За наочним зображенням побудуйте проекції точки перетину прямої з площиною.



1. Площина Δ ABC займає горизонтально-проекціювальне положення. Значить, горизонтальна проекція точки K_1 визначається безпосередньо на перетині сліду проекції Δ $A_1B_1C_1$ з проекцією l_1.

2. Пряма l займає фронтальне положення і має точки перетину M з площиною Π_1 та P з площиною Π_3. Як видно з побудов, проекція точки перетину K_2 виходить за межі трикутника, тому для визначення видимості l на Π_2 проекції A_2B_2 та A_2C_2 слід продовжити. Пряма до точки K знаходиться перед сторонами AB та AC (див. проекції конкуруючих точок 1 та 2). Це означає, що відрізок MK прямої l на Π_2 видимий.

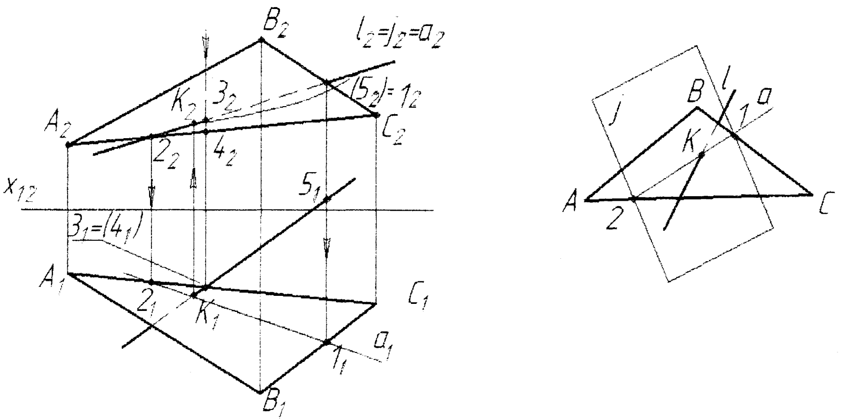
Приклад 2. Визначте проекції точок перетину прямої l загального положення з площиною загального положення, яка задана трикутником (рис. 31, а, б).

Для пояснення введемо символьні позначення.

Дано: $l \cap \sum (\Delta ABC) = K (K_1, K_2)$.
Побудувати: $K (K_1, K_2)$.

Алгоритм побудови

1.Через пряму l проведемо фронтально-проекціювальну площину j ($l \subset j, j \perp \Pi_2$).
2. Визначимо лінію перетину a [1, 2] заданої площини $\sum$ з введеною j $\sum \cap j = a$ [1, 2].
3. На перетині лінії a_1 з проекцією l_1, фіксуємо горизонтальну проекцію K_1 точки К. Використовуючи умову інцидентності, знайдемо фронтальну проекцію K_2 точки К, тобто $a_1 \cap l_1 = K_1$, $K_2 \subset l_2, a_2$.



а) епюр

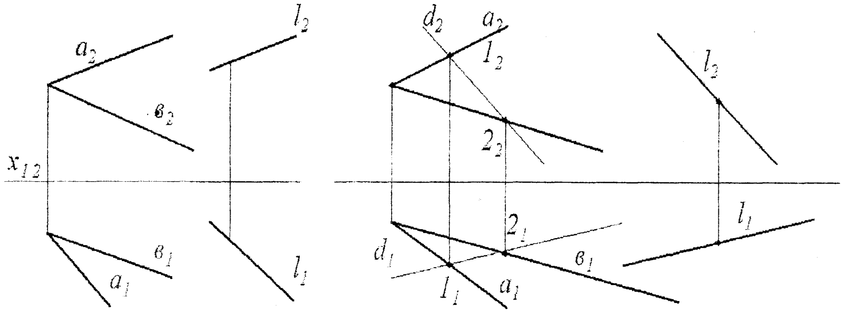
б) наочне зображення

Рисунок 31 – Перетин прямої l загального положення з площиною $\sum (\Delta ABC)$ загального положення

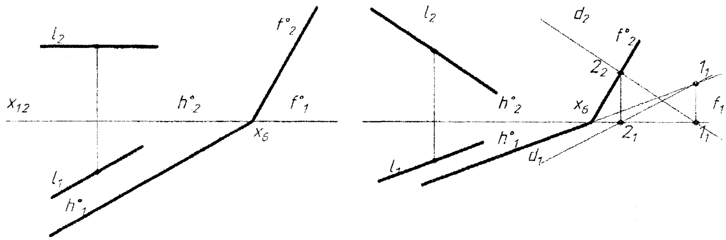
4. Для визначення видимості проекції l_1 скористаємось конкуруючими точками прямої l із стороною АС, тобто 3, 4 ($3 \subset l$, $4 \subset AC$). За поглядом, означеним стрілкою, спочатку зустрічаємо проекцію l_2, значить, ця частина проекції прямої l_1 до проекції т. K_1 видима.

Для визначення видимості проекції l_2 скористаємось конкуруючими точками прямої l із стороною ВС, це - 1, 5 ($1 \subset BC$, $5 \subset l$). Першою за поглядом зустрічаємо т. 1, яка належить стороні Δ ABC, це означає, що Δ ABC на означеному проміжку на Π_2 перекриває пряму до т. К.

Приклад 3. Ознайомтесь з окремими та загальними випадками паралельності прямої площини (рис. 32, а - г).



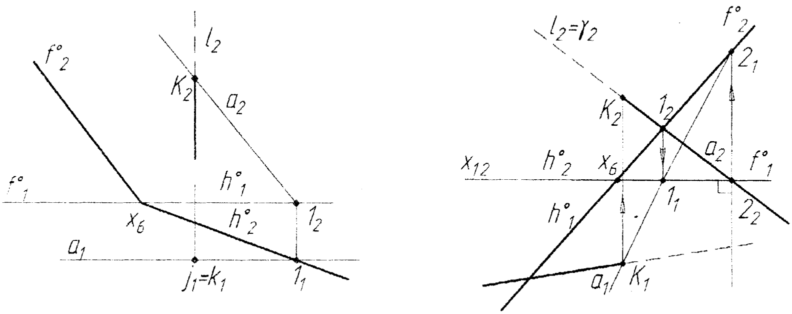
а) a – пряма площини σ, $a \parallel l$ б) $d \subset σ\ (a \cap в),\ a \parallel l$



в) h^o – пряма площини σ, $l \parallel h^o$ г) $d \subset σ\ (f^o \cap h^o),\ d \parallel l$

Рисунок 32 – Випадки паралельності прямої площині

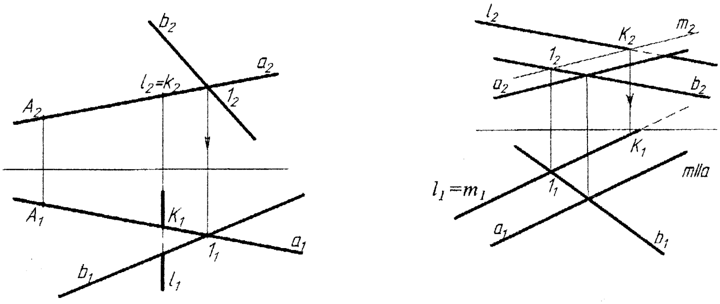
Приклад 4. Ознайомтесь з окремими (рис. 33, а, б) та загальними випадками перетину прямої з площиною (рис 33, в, г).



а) σ $(f^o \cap h^o) \cap l$ = К б) σ $(f^o \cap h^o) \cap l$ = К

$К_1$ – вихідна проекція точки перетину

Рисунок 33 – Випадки перетину прямої з площиною



в) $l \cap \sigma$ (A, $в$) = K   г) $l \cap \sigma$ (a$\cap$$в$) = K

K_2 – вихідна проекція точки перетину

Рисунок 33 – Випадки перетину прямої з площиною

5.4 Теоретичні питання

1. Дайте означення паралельності прямої площині.
2. В чому відміни при побудовах окремих та загальних випадків паралельності прямої площині?
3. Які випадки перетину прямої з площиною ви знаєте?
4. Які спрощення існують при визначенні проекцій точок перетину в окремих випадках?
5. Алгоритм побудови точки перетину прямої з площиною.

5.5 Питання до розв’язання задач на практичному занятті

За наочним зображенням побудуйте епюри перетину прямої з площиною (рис. 34), дайте символьні записи положень прямої l та площини α.

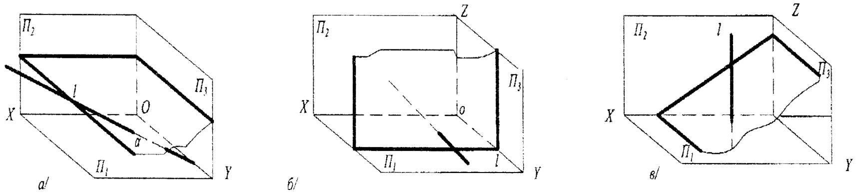
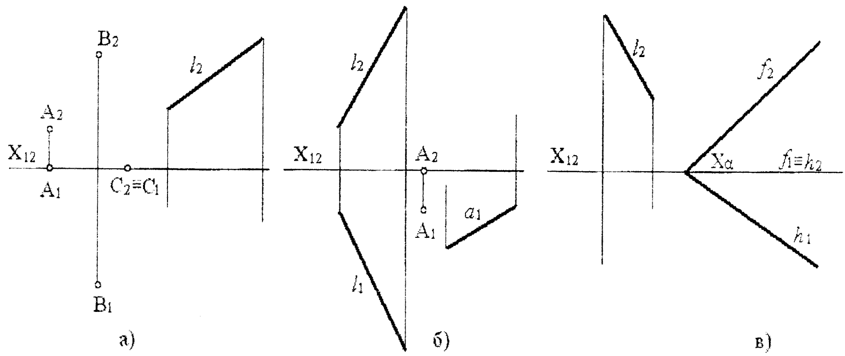


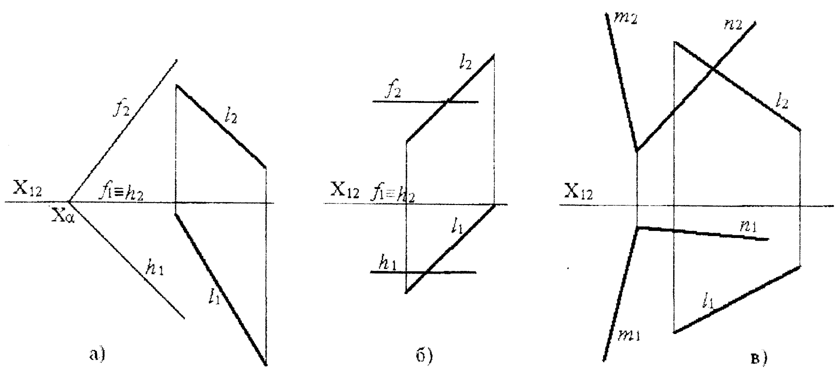
Рисунок 34 – Наочні зображення перетину прямої з площиною

5.6 Задачі для самостійної підготовки

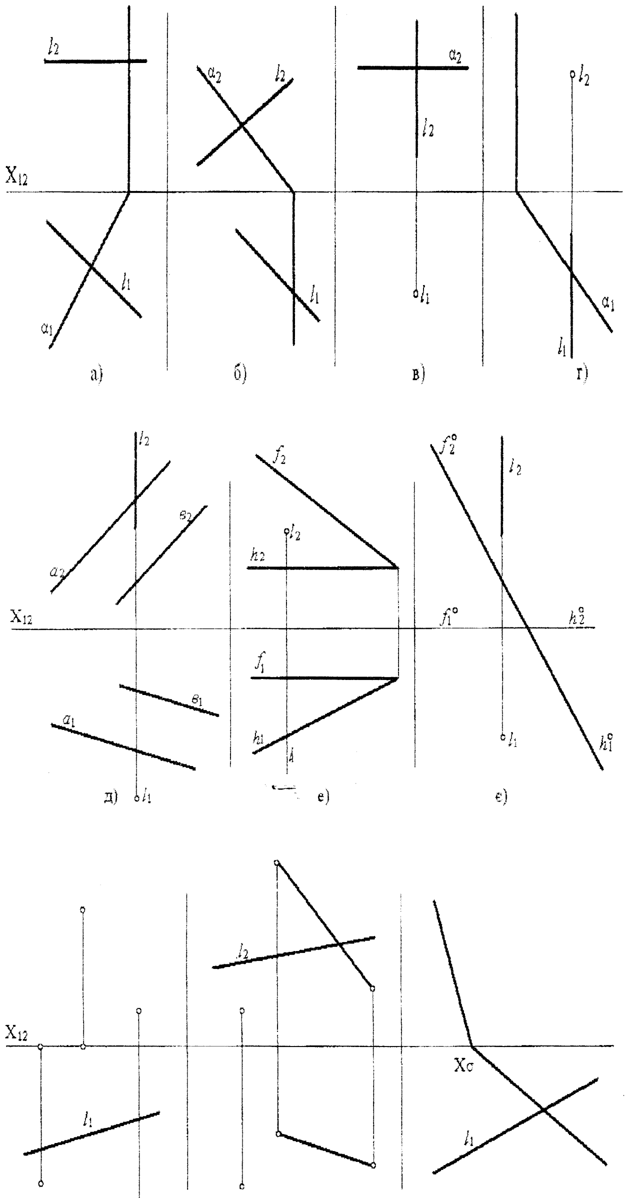
Задача 1. Побудуйте відсутню проекцію прямої l, якщо відомо, що вона паралельна заданій площині.



Задача 2. Перевірте побудовами, чи паралельна пряма l заданій площині?



Задача 3. Побудуйте проекції точки перетину прямої l з площиною σ.



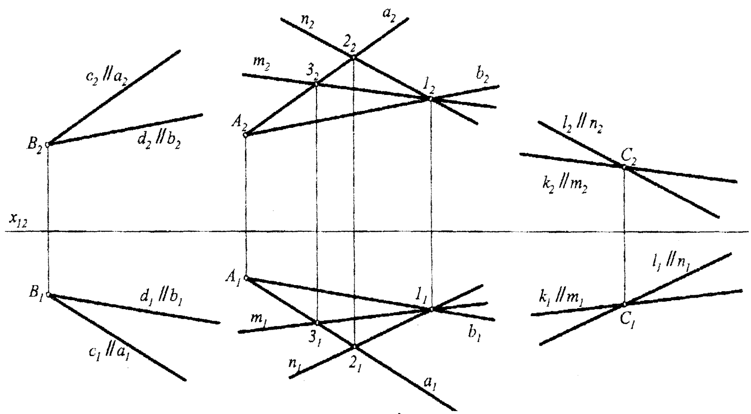
6 Взаємне положення площин

За взаємним положенням площини можуть бути:

- паралельними;
- перетинатися;
- перпендикулярними (є окремим випадком перетину).

6.1 Паралельність площин

Означення: якщо дві прямі однієї площини, що перетинаються, паралельні двом прямим другої площини, що перетинаються, то ці площини паралельні між собою (рис. 35).



а) - окремий випадок б) - загальний випадок

Рисунок 35 – Випадки паралельності двох площин

Окремий випадок (рис. 35, а) передбачає побудову паралельної площини β, прямі c, d якої відповідно паралельні двом прямим a, b заданої площини σ, тобто $\sigma(a \cap b = A) \parallel \beta(c \cap d = B) \Rightarrow \begin{cases} (a_1 \cap b_1 = A_1) \parallel (c_1 \cap d_1 = B_1), \\ (a_2 \cap b_2 = A_2) \parallel (c_2 \cap d_2 = B_2). \end{cases}$

Загальний випадок (рис. 35, б) передбачає побудову площини Σ, паралельної заданій σ, причому прямі $m \cap n$ в площині σ введені довільно. Це означає, що попередньо в заданій площині σ можна побудувати безліч пар прямих, які перетинаються (відповідає означенню паралельності 2-х площин) та належать цій площині. Символьно розв'язок записується так:

$$\sigma(n \cap m = 1) \parallel \Sigma(l \cap k = C) \Rightarrow \begin{cases} (n_1 \cap m_1 = 1_1) \parallel (l_1 \cap k_1 = C_1), \\ (n_2 \cap m_2 = 1_2) \parallel (l_2 \cap k_2 = C_2). \end{cases}$$

6.2 Перетин площин

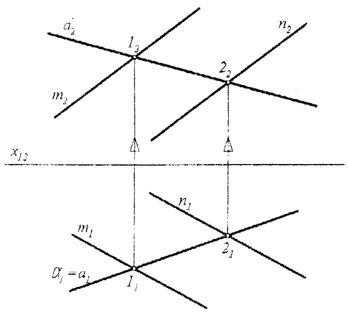
Лінія перетину двох площин визначається двома точками, що одночасно належать двом площинам, або однією загальною точкою і відомим напрямком цієї лінії.

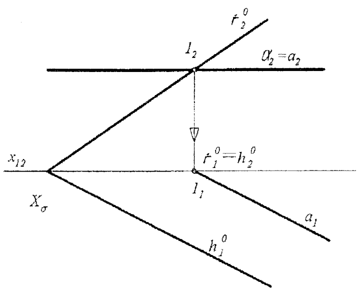
6.2.1 Окремі випадки перетину

1. Дві площини окремого положення перетинаються по прямій, яка займає проекціювальне положення.

? - студенту пропонується виконати рисунок та дати символьні позначення самостійно.

2. Площину загального положення σ перетинає площина окремого положення α (рис. 36, а, б).





$\alpha \cap \sigma(m \| n) = a[1,2]$

a_1 – вихідна проекція лінії перетину $a_1=\alpha_1$.

а) лінія перетину будується за двома точками 1 та 2

$\alpha \cap \sigma(f^0, h^0)$

a_2 – вихідна проекція лінії задається точкою 1 та напрямком, паралельним h, $a_2=\alpha_2$.

б) лінія перетину будується за точкою 1 і напрямком, паралельним h^0

Рисунок 36 – Окремі випадки площин

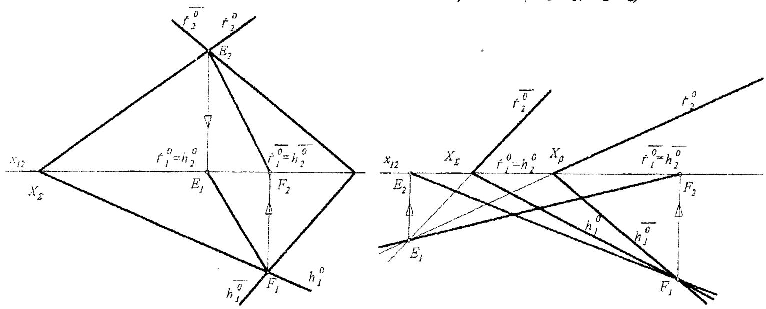
У випадку, показаному на рис. 36, а, вихідна проекцію лінії перетину $a(a_1)$ визначається безпосередньо на слід-проекції площини $\alpha(\alpha_1)$.

Випадок, який ілюструється на рис.36, б, показує, що лінія перетину площин може бути горизонтальною (або фронтальною) прямою, якщо одна із площин, які перетинаються є, горизонтальною площиною(фронтальною) рівня. Як видно з рисунка, $\alpha \| \Pi_1$, тому лінія $a(a_1,a_2)$ – горизонтальна пряма.

3. Перетин двох площин, заданих слідами.

В одному із випадків дві точки перетину визначають як точки перетину однойменних слідів: горизонтальних, що дає точку $F(F_1,F_2)$; фронтальних, що дає точку $E(E_1,E_2)$ (рис. 37, а, б).

Символьний запис: $\Sigma\cap\beta=EF(E_1F_1,E_2F_2)$.



а) перетин фронтальних слідів $f^0\cap\overline{f^0}=E$ фіксується безпосередньо (вище осі x_{12})

б) перетин фронтальних слідів визначається на продовженні (нижче осі x_{12})

Рисунок 37 – Лінія перетину площин, заданих слідами, визначається за двома точками E та F

В другому випадку лінія перетину визначається за точкою E та напрямком. В конкретній задачі напрям лінії перетину паралельний горизонтальним проекціям горизонтальних слідів двох площин, оскільки ці сліди паралельні між собою $h_1^0\,||\,\overline{h_1^0}$. Точка перетину E визначається на перетині фронтальних проекцій фронтальних слідів ($f_2^0\cap\overline{f_2^0}=E_2$) (рис. 38).

Символьний запис: $\Sigma\cap\beta=l(l_1,l_2)$.

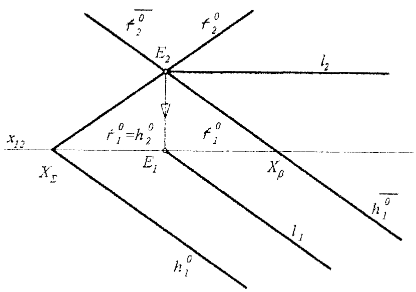


Рисунок 38 – Лінія перетину площин, заданих слідами, визначається точкою E та напрямком

6.2.2 Загальні випадки перетину

В даному випадку дві площини займають загальне положення. Точки, що належать лінії перетину двох площин, визначаються методом допоміжних січних площин (площин-посередників).

1. Допоміжні січні площини, прекціювальні або рівня, вводять додатково.

2. Допоміжні січні площини вводять, використовуючи задані елементи площин (прямі або сторони плоских фігур).

Сутність використання площин-посередників пояснюється нижче. Нехай задані дві площини α та β, які перетинаються по лінії d, яка визначається точками E, F. Допоміжною січною площиною τ водночас перетнемо задані площини α та β, результатом перетину якої будуть прямі a та b. Оскільки ці прямі належать одній і тій же площині τ, то вони перетинаються в точці E, яка одночасно належить площинам α та β (рис. 39).

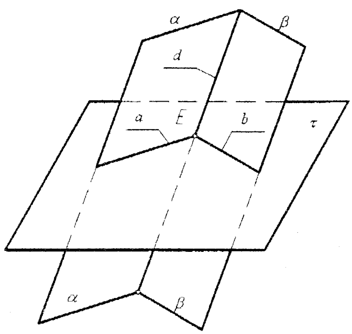


Рисунок 39 – Сутність використання площин-посередників

Задача. Використовуючи метод допоміжних січних площин, побудуйте лінію взаємного перетину площин α (m||n) та β (ΔABC) (рис. 40).

Алгоритм розв'язання

1. Введемо першу площину-посередник τ^1 ($\tau^1 || \Pi_1$).
2. Знайдемо лінії перетину площини, площини-посередника τ^1 з площинами α та β, відповідно: a^1 *[1, 2]* та b^1 *[C, 3]*.
3. Визначаємо точку перетину E лінії a^1 та b^1.
4. Введемо другу площину-посередник τ^2, яка паралельна попередній τ^1.
5. Знайдемо лінії перетину площини-посередника τ^2 з площинами α, β – a^2 та b^2, причому $(a^1 // a^2,\ b^1 // b^2)$.

6. Визначимо точку перетину F ліній a^2 та b^2.
7. Через отримані точки $E(E_1, E_2)$, $F(F_1, F_2)$ проведемо пряму $EF(E_1F_1, E_2F_2)$, яка визначає лінію взаємного перетину двох заданих площин α та β.

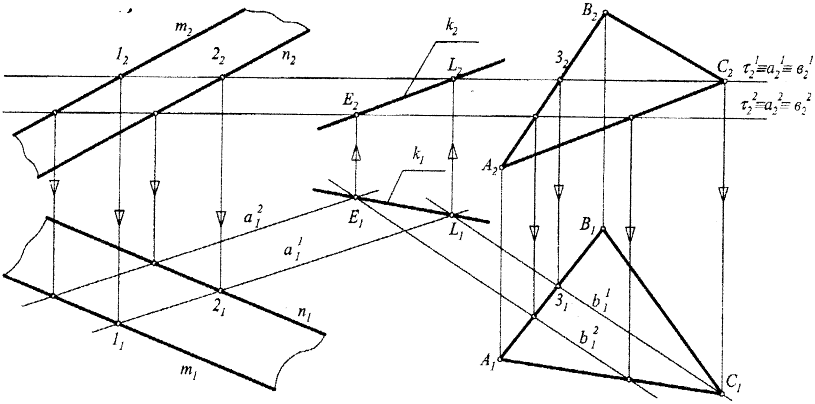


Рисунок 40 – Побудова проекцій ліній взаємного перетину двох площин шляхом введення допоміжних січних площин

Задача. Використовуючи лінії a та b площини Σ, побудуйте лінію взаємного перетину двох площин $\Sigma(a||b)$ та $\beta(\Delta ABC)$ (рис. 41).

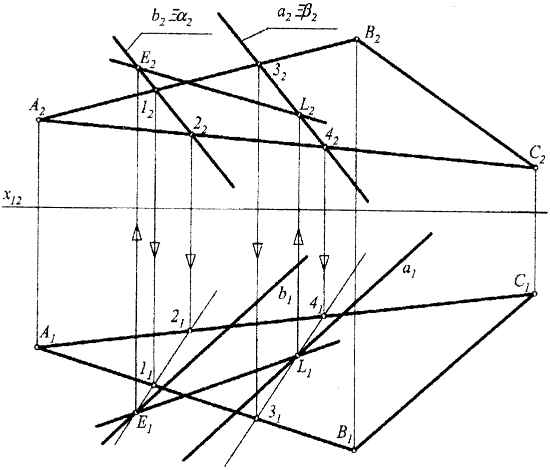


Рисунок 41 – Перетин площин загального положення, сліди площин-посередників збігаються з прямими a та b

Побудова проекцій ліній взаємного перетину базується на підставі алгоритму знаходження точки перетину прямої з площиною, а саме:

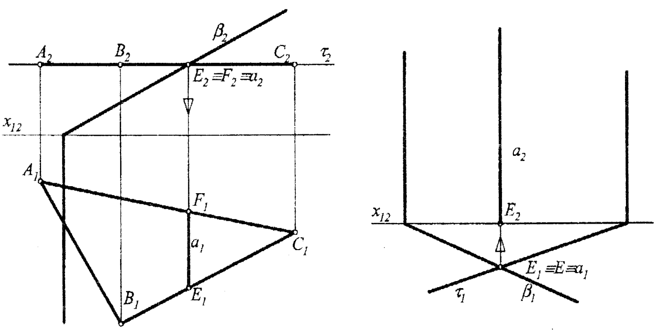
пряма b перетинає $\beta(\Delta ABC)$ в т. E (E_1, E_2);

пряма a перетинає $\beta(\Delta ABC)$ в т. F (F_1, F_2).

Точки E, F – точки лінії перетину $E\ F$ (E_1, F_1, E_2, F_2), що мають подвійну належність заданим площинам Σ та β.

6.3 Приклади для закріплення

Приклад 1. Побудуйте лінію взаємного перетину двох площин окремого положення (рис. 42, 43).



а) лінія перетину перпендикулярна до Π_2

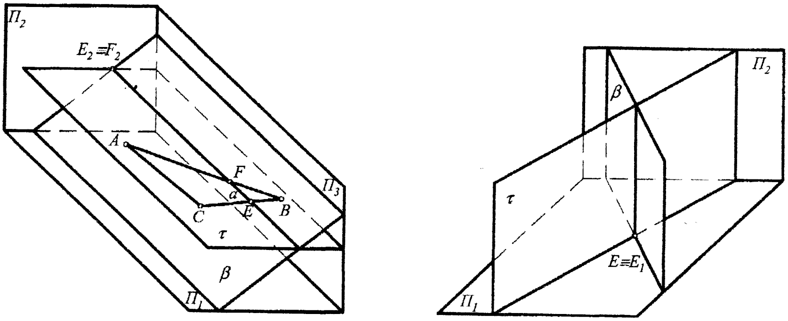
б) лінія перетину перпендикулярна до Π_1

Рисунок 42 – Перетин площин окремого положення

Вихідна проекція a_2 лінії перетину a визначається за двома точками F та E на перетині слідів проекцій заданих площин (β_2 та τ_2). Відсутня проекція a_1 знаходиться за проекційним зв'язком в межах заданого трикутника τ (рис. 42, а та рис. 43, а).

Вихідна проекція лінії перетину a визначається в точці E, на перетині горизонтальних слідів заданих площин (τ_1 та β_1). Відсутня проекція a_2 знаходиться за допомогою т. E_2 та напрямку, паралельного фронтальним слідам заданих площин (рис. 42, б та рис. 43, б).

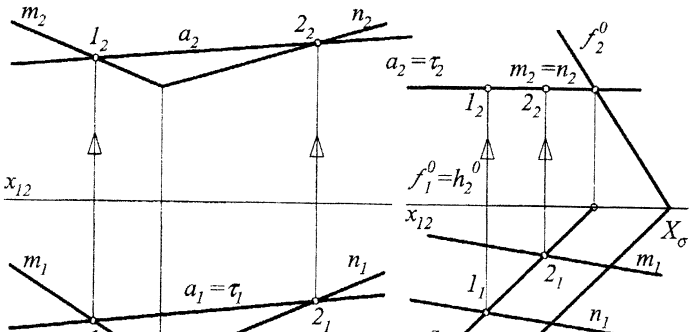
На рис. 43 показані аксонометричні проекції двох площин β та τ, які перетинаються між собою.



а) $\tau\ (\Delta ABC) \cap \beta(\beta_2) = EF$ б) $\tau(\tau_1) \cap \beta(\beta_2) = EF$

Рисунок 43 – Аксонометричне зображення перетину заданих площин

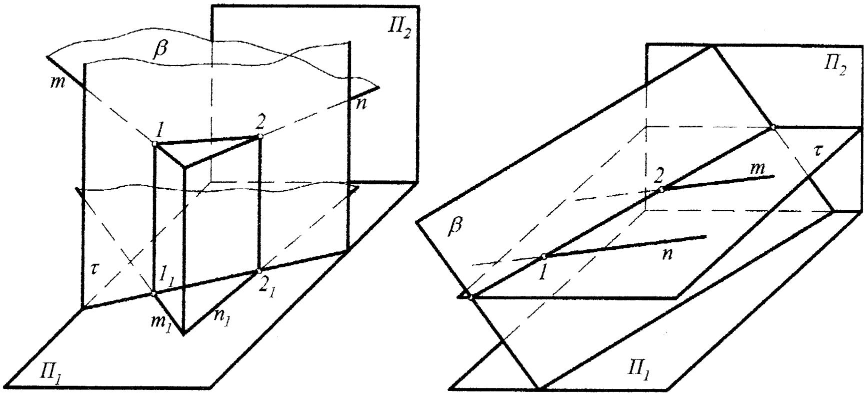
Приклад 2. Побудуйте лінію взаємного перетину двох площин, одна з яких займає загальне положення, а друга – окреме (рис. 44, 45).



а) τ – проекціювальна площина б) τ –площина рівня

Рисунок 44 – Перетин площин загального положення β з площиною окремого положення τ

Вихідна проекція a_1 лінії перетину a належить горизонтальному сліду проекції τ_1 площини та визначається за двома точками *1* та *2*.



а) $\beta(m \cap n) \cap \tau = a$ б) $\beta(m // n) \cap \tau = a$

Рисунок 45 – Аксонометричне зображення перетину двох площин

Вихідна проекція a_2 лінії перетину a належить фронтальному сліду τ_2 площини та визначається за точкою 1 та напрямом, паралельним h^0.

Приклад 3. Побудуйте лінію взаємного перетину двох площин загального положення (рис. 46).

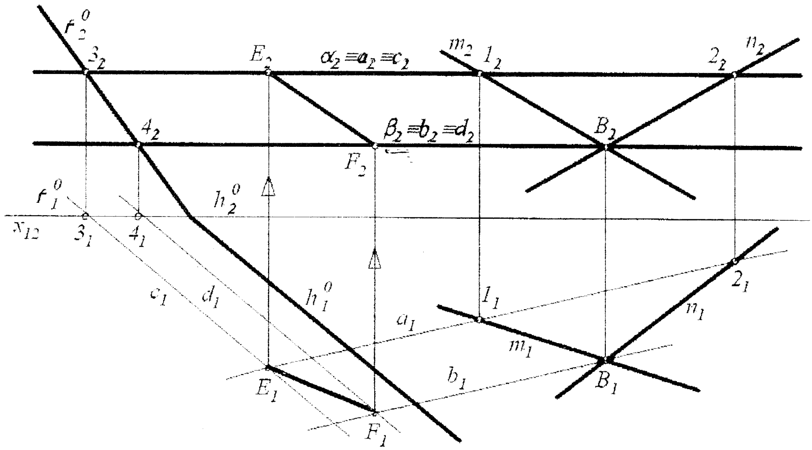
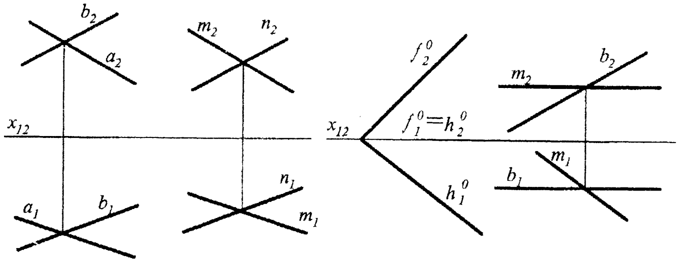


Рисунок 46 – Перетин площин загального положення

Сліди площин-посередників α, β вводять окремо (рис. 46). Січна площина α перетинає площину τ по лінії a[1, 2], площина β – по лінії C [точкою 3 та напрямом]. Перетин ліній a та c визначає т. E. За допомогою січної площини β визначається т. F як результат перетину ліній b та d, які паралельні a та c, тобто $a_1 || b_1$, $c_1 || d_1$.

Приклад 4. Побудуйте площину, паралельну заданій (рис. 47, а, б).



а) $\beta(a \cap b) || \tau(m \cap n)$ б) $\beta(f^0 \cap h^0) || \tau(m \cap b)$

Ознаки

$a_1 // m_1$ та $a_2 // m_2$,
$b_1 // n_1$ та $b_2 // n_2$.

$f_1^0 // b_1$ та $f_2^0 // b_2$,
$h_1^0 // m_1$ та $h_2^0 // m_2$.

Рисунок 47 – Побудова площини τ, паралельної заданій β

Паралельні площини (рис. 47, а, б) побудовані згідно з означенням паралельних площин з використанням перетину заданих ліній площини β. Оскільки додаткові побудови в цьому прикладі відсутні, то маємо окремі випадки паралельності площин.

Для заданої площини β (рис. 47, а, б) введіть додаткові побудови та покажіть загальні випадки паралельності площин β та τ (виконайте побудови самостійно).

6.4 Теоретичні питання

1. Дайте означення двох паралельних площин.
2. Відміни побудов окремих та загальних випадків паралельності двох площин.
3. Які випадки перетину двох площин вам відомі? В чому їх різниця?
4. Сутність введення площин-посередників.
5. Який алгоритм побудови лінії взаємного перетину двох площин шляхом введення допоміжних січних площин?

6.5 Питання до розв'язання задач на практичному занятті

1. За наочним зображенням побудуйте епюри ліній перетину двох площин (рис. 48).

2. Дайте символьний запис площин, які перетинаються.

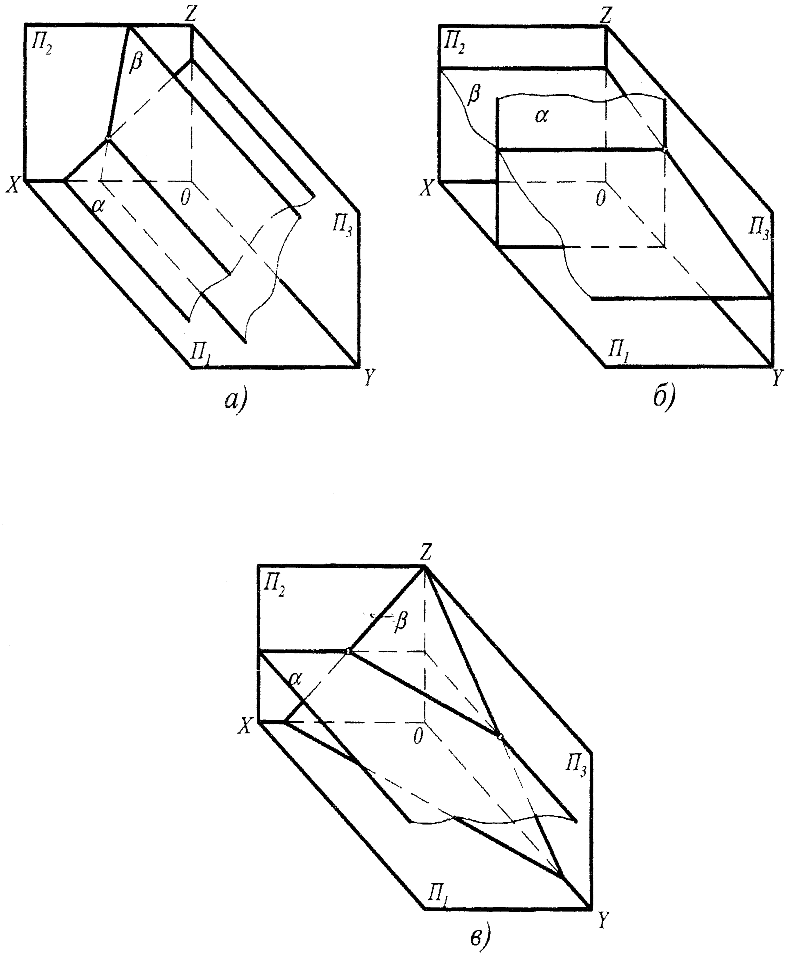
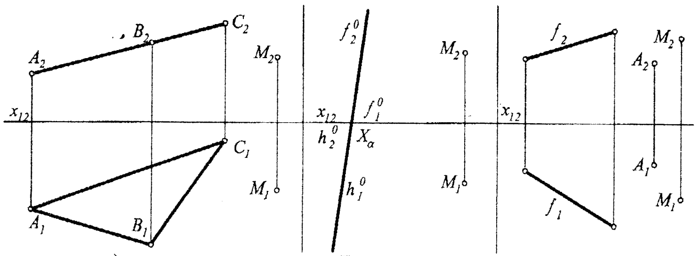


Рисунок 48 – Наочні зображення перетину двох площин

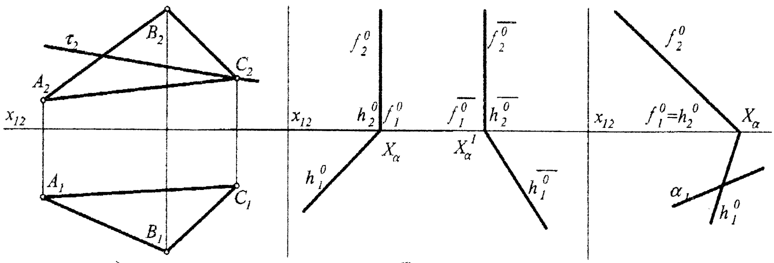
6.6 Задачі для самостійної підготовки

Задача 1. Побудуйте площину, паралельну заданій.

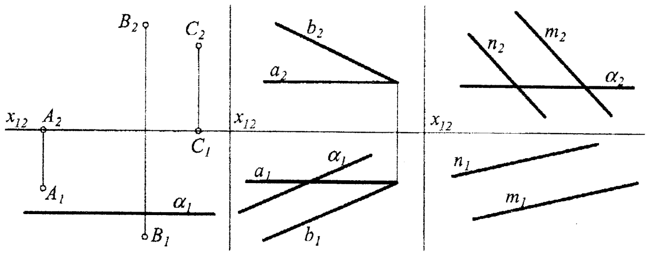


а) б) в)

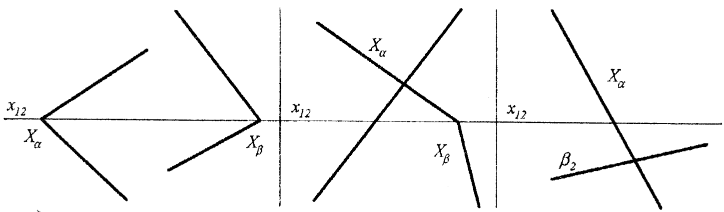
Задача 2. Побудуйте проекції лінії взаємного перетину двох площин без введення допоміжних січних площин.



а) б) в)

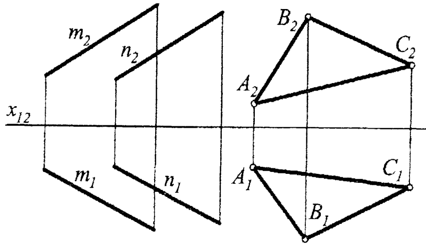


г) д) е)

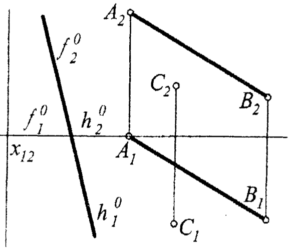


ж) з) і)

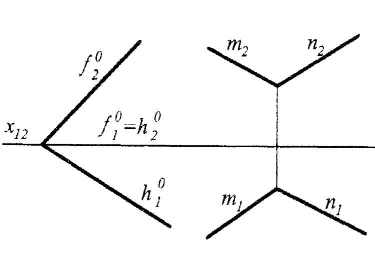
Задача 3. Побудуйте проекції лінії взаємного перетину двох площин за допомогою введення допоміжних січних площин.



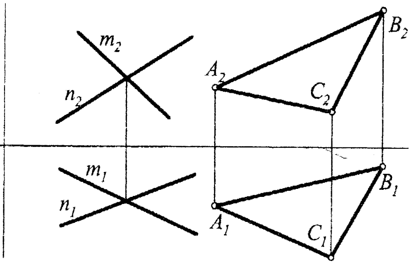
а)



б)

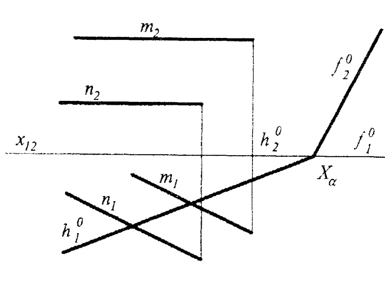


в)

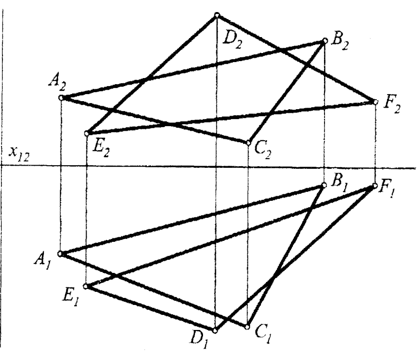


г)

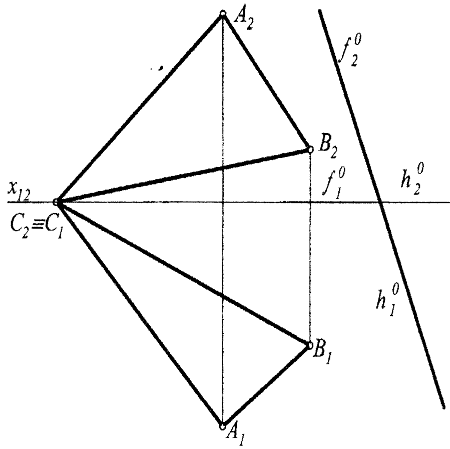
Задача 4. Побудуйте проекції лінії взаємного перетину двох площин з використанням прямих однієї із заданих площин в якості допоміжних січних площин.



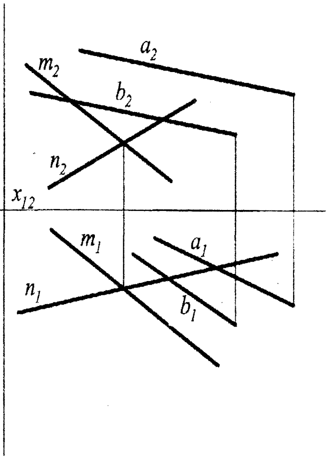
а)



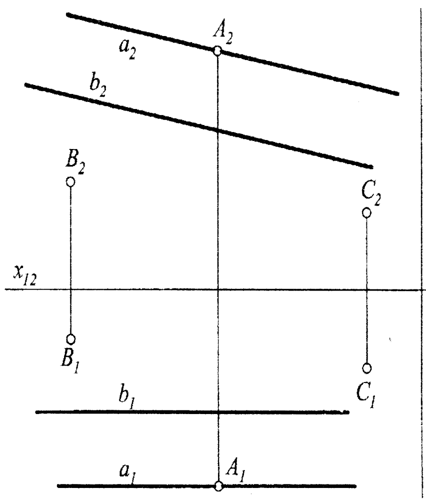
б)


A_2
B_2
x_{12}
$C_2 \equiv C_1$
B_1
A_1
f_2^0
f_1^0
h_2^0
h_1^0

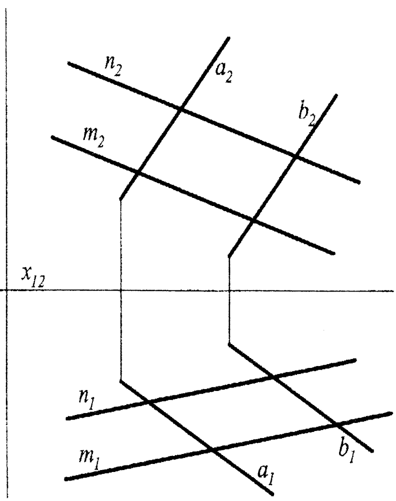
в)


a_2
m_2
b_2
n_2
x_{12}
m_1
a_1
n_1
b_1

г)


A_2
a_2
b_2
B_2
C_2
x_{12}
B_1
b_1
C_1
a_1
A_1

д)

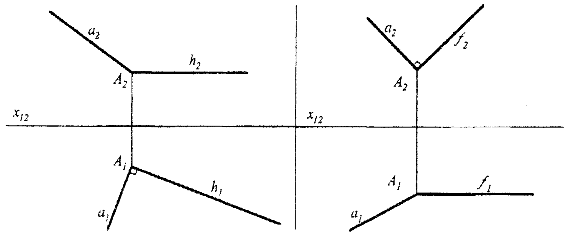

n_2
a_2
b_2
m_2
x_{12}
n_1
m_1
b_1
a_1

е)

7 Перпендикуляр до площини та перпендикулярність площин

7.1 Властивості прямого кута

Прямий кут проекціюється в натуральну величину на $П_1(П_2)$, якщо одна з його сторін $h(f)$ паралельна площині проекцій $П_1(П_2)$ (рис. 49, а, б).



а) $a_1 \hat{} h_1 = 90°$ б) $a_2 \hat{} f_2 = 90°$

Рисунок 49 – Властивості прямого кута

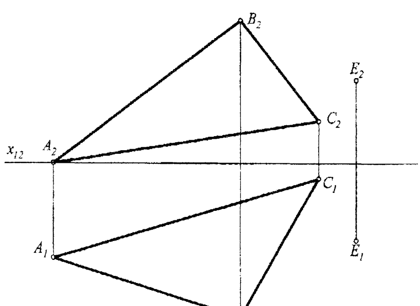
7.2 Перпендикуляр до площини

Введемо означення перпендикуляра, враховуючи властивості прямого кута: у перпендикуляра ρ до площини його горизонтальна проекція ρ_1 перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі ($\rho_1 \perp h_1$), а фронтальна проекція перпендикуляра ρ_2 перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі ($\rho_2 \perp f_2$).

Задача. Через т. E провести перпендикуляр до площини $\beta(\Delta ABC)$.

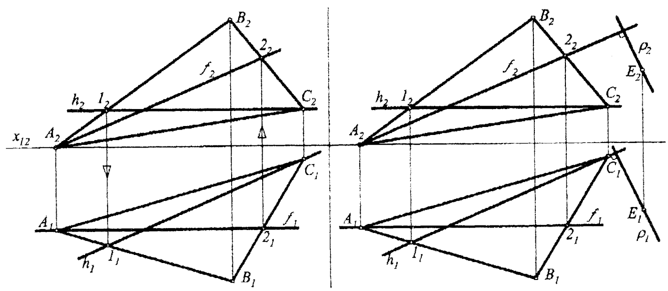
Дано: т. E, $\beta(\Delta ABC)$.

Побудувати: $\rho \perp \beta$, $\rho \in E$.



Алгоритм розв'язання

1. В заданій площині побудувати горизонталь $h(h_1,h_2)$ та фронталь $f(f_1,f_2)$ площини, причому вихідною проекцією у горизонталі є h_2, у фронталі – f_1. Тобто $f_1 \| x_{12}$ проводимо через проекцію A_1 т. A, а $h_2 \| x_{12}$ проводимо через проекцію C_2 т. C (рис. 50, а).
2. Будуємо проекції перпендикуляра. Згідно з означенням, горизонтальна проекція перпендикуляра ρ_1 повинна проходити перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі $h_1 (\rho_1 \perp h_1)$, фронтальна проекція ρ_2 – до фронтальної проекції фронталі $f_2 (\rho_2 \perp f_2)$ (рис. 50, б).



а) – побудова ліній рівня h, f б) – побудова проекцій перпендикуляра $\rho(\rho_1\ \rho_2)$

Рисунок 50 – Побудова перпендикуляра до площини

7.3 Перпендикулярність площин

Означення: площина γ перпендикулярна до заданої площини ∑, якщо вона (γ) може бути задана двома прямими, які перетинаються, причому одна із цих прямих є перпендикуляром до заданої площини.

З елементарної геометрії відома теорема: пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються (h і f).

Приклад. Через точку А провести площину, перпендикулярну до заданої площини σ ($a \| в$) (рис. 51).

Пояснення

Розв'язання прикладу, що міститься на рис. 48, складається з таких послідовних побудов:

1) в площині σ ($a \parallel в$) довільно проведені лінії рівня – горизонталь h (h_1, h_2) та фронталь f (f_1, f_2);
2) через проекції т. А (A_1, A_2) побудовані проекції перпендикуляра p (p_1, p_2) до заданої площини, а саме – $p_1 \perp h_1$, $p_2 \perp f_2$;
3) перпендикулярна площина τ на рис. 51 задана двома прямими, які перетинаються τ ($p \cap n$).

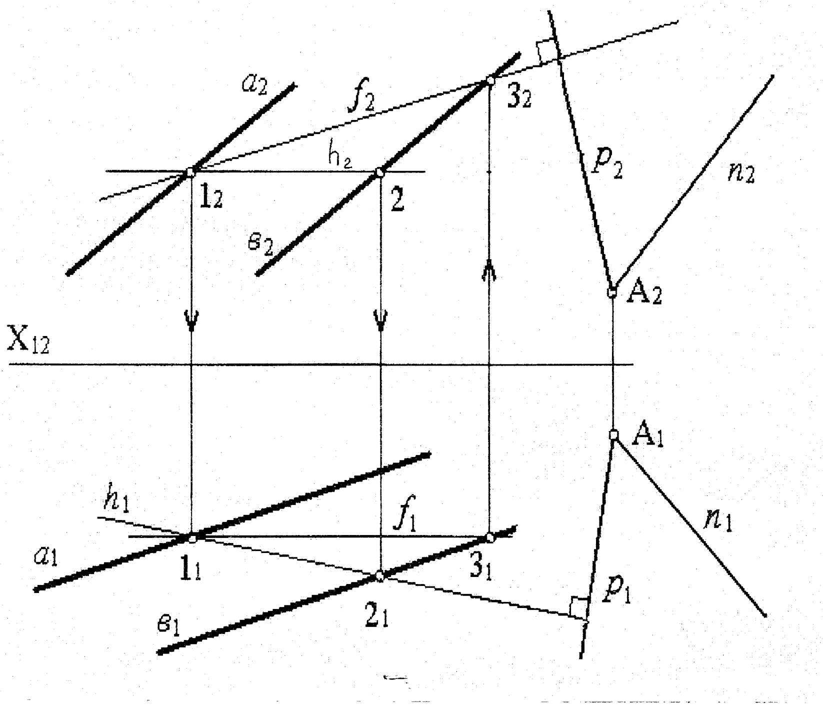
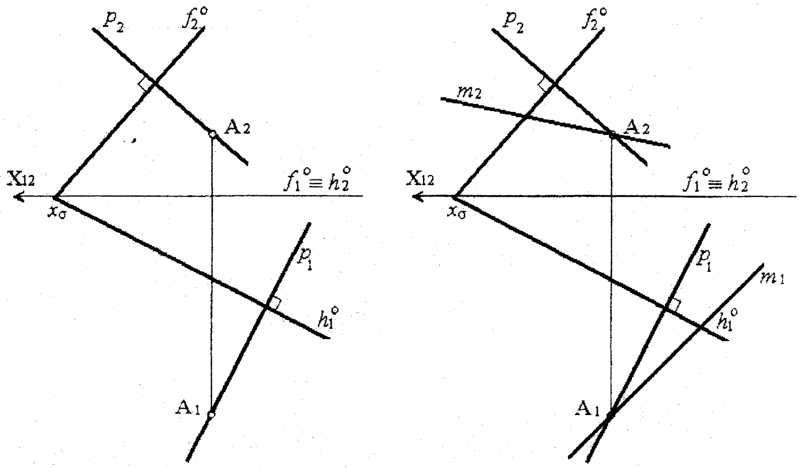


Рисунок 51 – Проведення площини τ ($p \cap n$ = А), перпендикулярної до σ ($a \parallel в$)

Побудова перпендикуляра до площини, перпендикулярної до заданої, значно спрощується, якщо ставиться задача побудови перпендикуляра (перпендикулярної площини) до площини, яка задана слідами (рис. 52, а, б).

Спрощений варіант розв'язання пояснюється тим, що для площин, які задані слідами, горизонталь та фронталь площини проводити необов'язково.



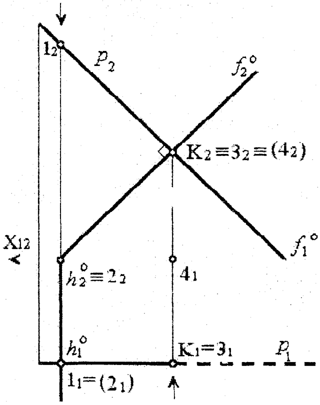
а) $p \perp \sigma(h^\circ \cap f^\circ)$ б) $\tau(p \cap m = A) \perp \sigma(h^\circ \cap f^\circ)$

Рисунок 52 – Побудова перпендикуляра р та площини τ, перпендикулярної до заданої площини σ

7.4 Приклади для закріплення

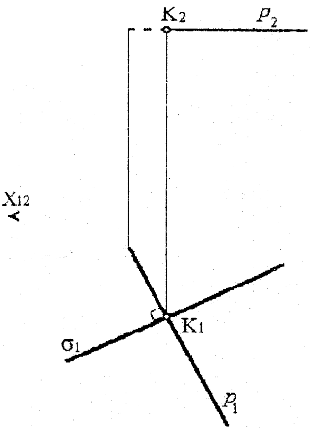
Приклад 1. Побудуйте проекції перпендикуляра до проекціювальних площин та визначте проекції точки перетину К (K_1, K_2) з площиною з врахуванням видимості перпендикуляра.

1-й випадок



$p \perp \sigma(\sigma \perp \Pi_2)$

2-й випадок



$p \perp \sigma(\sigma \perp \Pi_1)$

Для першого випадку

Площина задана слідами ($f^o \cap h^o$) та перпендикулярна до Π_2.

1. Проекції перпендикуляра (p_1, p_2) побудовані, виходячи з умови перпендикулярності $p_1 \perp f^o_2$.
2. Точка К – точка перетину проекціювальної площини з перпендикуляром.

Для другого випадку

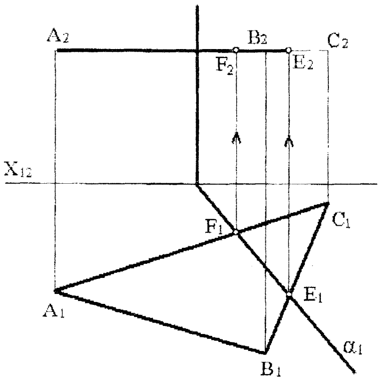
Площина задана слідом-проекцією σ_1 та перпендикулярна до Π_1.

Спробуйте самостійно дати аналіз розв'язаної задачі і відповісти на питання:

1. Як проведені проекції перпендикуляра?
2. Як визначені точка перетину К та видимість перпендикуляра p?

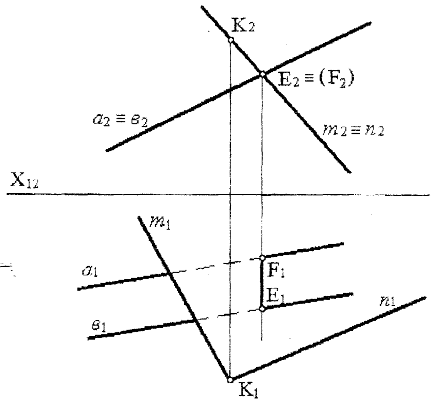
Приклад 2. Побудуйте проекції ліній взаємного перетину двох взаємно-перпендикулярних площин, кожна з яких займає окреме положення.

1-й випадок



$\alpha\ (\alpha_1) \perp \Pi_1$,
$\sigma\ (\Delta\, ABC) \parallel \Pi_1$,
$\alpha \perp \sigma$.
$\alpha \cap \sigma = EF$

2-й випадок

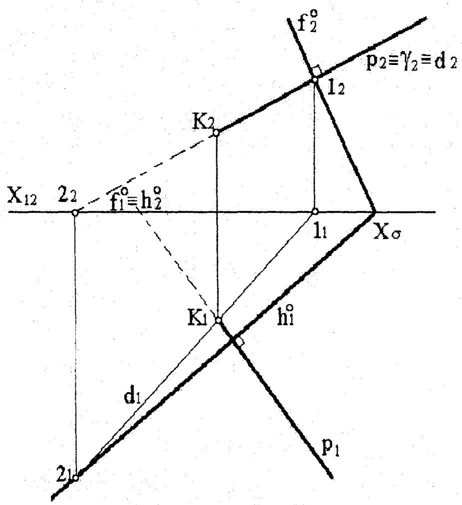


$\tau\ (a \parallel в) \perp \Pi_2$,
$\gamma\ (m \cap n) \perp \Pi_2$,
$\tau \perp \gamma$.
$\gamma \cap \tau = EF$

Оскільки взаємно-перпендикулярні площини є площинами окремого положення (горизонтально-проекціювальною і горизонтальною, в першому випадку, та фронтально-проекціювальними в другому випадку), то проекції лінії взаємного перетину визначаються безпосередньо. В першому випадку E_1F_1 – вихідна проекція лінії взаємного перетину, яка належить сліду-проекції площини α. На перетині фронтальних слідів площин γ та τ, другий випадок, фіксуємо вихідну проекцію E_2F_2 лінії взаємного перетину вказаних площин.

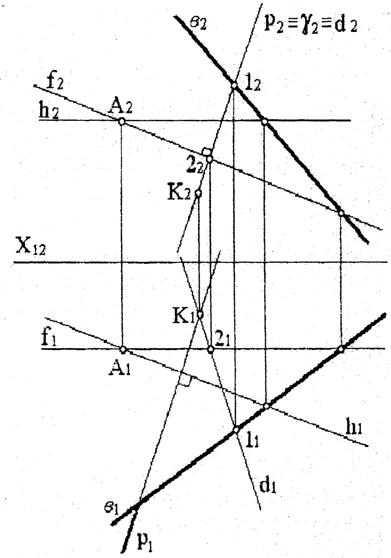
Приклад 3. Побудуйте проекції перпендикуляра *p* (p_1, p_2) до заданих площин, визначте видимість.

1-й випадок



$p \perp \sigma\ (f^o \cap h^o)$

2-й випадок



$p \perp \sigma\ (A, в)$

Символьний запис до розв'язання цих задач такий:

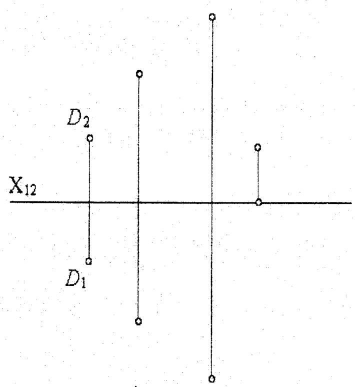
1. $p_1 \perp h_1, \quad p_2 \perp f_2.$
2. $p = \gamma, \quad \gamma = \Pi_2.$
3. $\gamma \cap \sigma = d\ [1, 2].$
4. $d \cap p = K \Rightarrow \begin{cases} d_1 \cap p_1 \perp K_1, \\ K_2 \subset d_2, p_2. \end{cases}$

7.5 Теоретичні питання

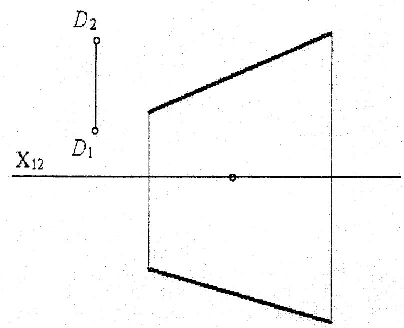
1. Дайте означення перпендикуляра до площини.
2. Дайте означення взаємно-перпендикулярних площин.
3. Сутність властивостей прямого кута.

7.6 Задачі для самостійної підготовки

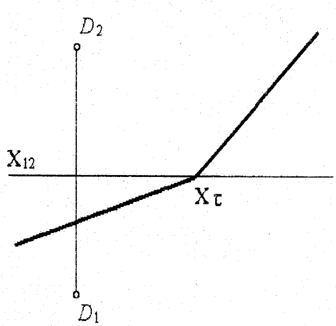
Задача 1. Через т. *D* побудуйте перпендикуляр до заданої площини та визначте проекції точки перетину перпендикуляра з площиною.



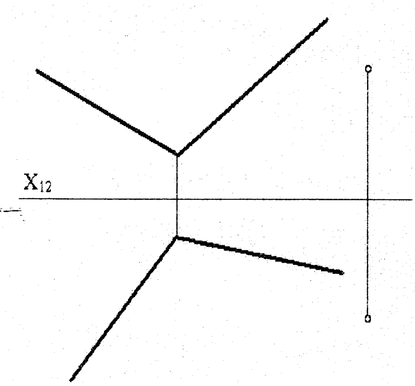
а)



б)

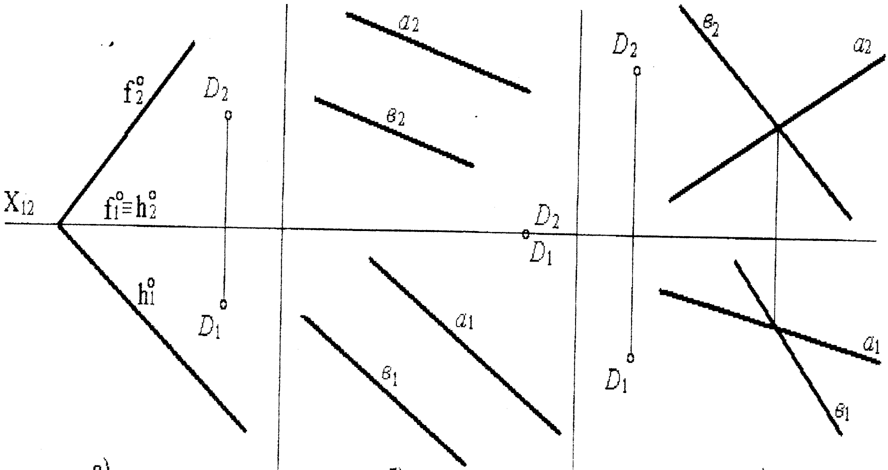


в)



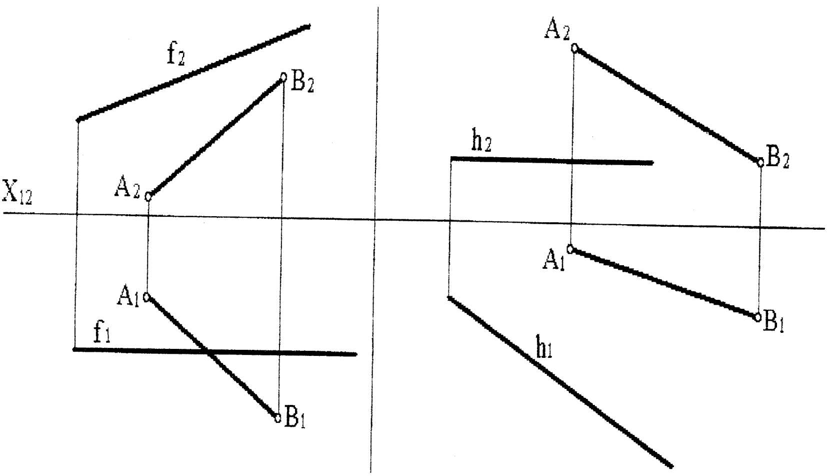
г)

Задача 2. Через т. *D* побудуйте проекції перпендикулярної площини до заданої площини та визначте проекції лінії перетину двох площин.



а) б) в)

Задача 3. Через середину відрізка загального положення АВ побудуйте пряму, яка перетинає головні лінії h, f під прямим кутом.



а) б)

8 Методи перетворень

Задання прямих ліній та плоских фігур, які займають окреме положення, дозволяє спростити побудови та розв'язання задач.

Якщо прямі лінії та плоскі фігури займають загальне положення відносно площин проекцій $П_1$ та $П_2$, то за рахунок способів перетворень можна розв'язувати ряд метричних задач. Причому, для геометричних побудов, пов'язаних з прямими та точками, використовують алгоритм, який дозволяє визначати відстані між двома точками, паралельними та мимобіжними прямими; від точки до прямої, кути нахилу прямих до горизонтальної та фронтальної площин проекцій. Для метричних задач, що стосуються площин, використовують інший алгоритм, яким користуються для визначення натуральних величин плоских фігур (площа, периметр), кутів нахилу заданих площин до площин проекцій, відстаней від точки до площини, між двома паралельними площинами.

8.1 Спосіб заміни площин проекції

Сутність методу: об'єкт проекціювання (пряма та площина) залишають нерухомим, а нову площину проекції вводять так, як це зручно для розв'язання задачі. Причому, додаткова площина проекцій, яка замінює попередню $П_2$ ($П_1$), повинна бути перпендикулярною до тієї, що залишається, тобто $П_4 \perp П_1$ ($П_4 \perp П_2$) (рис. 53, а, б).

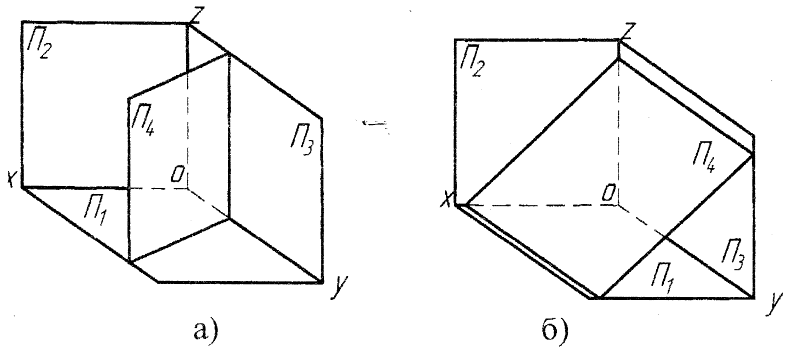


Рисунок 53 - Введення допоміжної площини проекцій відносно основних площин проекцій $П_1$ та $П_2$

При утворенні епюра для подальших побудов профільна площина проекцій $П_3$ до уваги не береться.

Задача 1. Прямій EF надайте окремі положення та визначте кути нахилу цієї прямої до площин проекцій $П_1$ та $П_2$ (рис. 54).

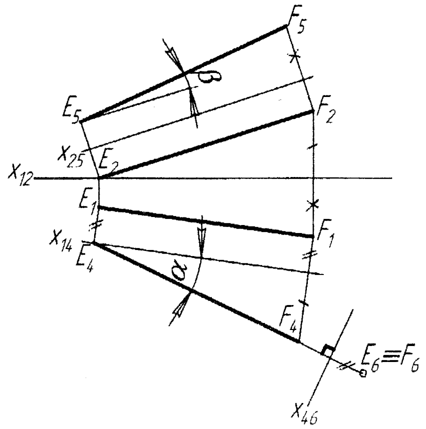


Рисунок 54 - Основні положення прямої EF

Алгоритм розв'язання

1. Для визначення кута нахилу прямої EF до горизонтальної площини $П_1$ нову площину проекцій $П_4$ вводять таким чином, щоб вона була перпендикулярною до $П_1$ та паралельною прямій EF. Ознакою цих побудов є: $П_1 \cap П_4 = X_{14}$, $X_{14} \parallel E_1F_1$.

2. Будуємо фронтальну проекцію прямої EF в новій площині проекцій $П_4$. Для цього ортогонально до нової осі X_{14} проекціюємо точки E та F, враховуючи сталість координати Z, тобто: $Z_{E,\ F} = \text{const}$. В новій площині проекцій натуральна величина (н.в.) $EF = E_4F_4$, причому пряма EF утворює кут нахилу з горизонтальною площиною проекцій $П_1$, який дорівнює α, тобто $E_4F_4 \wedge П_1 = \alpha$.

3. Шляхом введення нової площини проекцій $П_6$ на підставі аналогічних побудов, які пояснюються в пунктах 1, 2, знаходимо натуральну величину відрізка прямої EF та кут нахилу β до фронтальної площини проекцій. Символьно хід розв'язання можна записати так:

$X_{25} \parallel E_2F_2$, $Y = \text{const}$, $E_5F_5 = $ н. в. EF, $E_5F_5 \wedge П_2 = \beta$.

4. Пряма загального положення EF може бути перетворена в проекціювальну в тому випадку, якщо попередньо вона перетворена в

пряму рівня. Тоді наступна нова площина проекцій вводиться перпендикулярно до натуральної величини цієї прямої, наприклад до $E_4 F_4$, тобто: $X_{46} \perp E_4 F_4$.

Задача 2. Площині загального положення (трикутник АВС) надайте окремі положення.

Для побудов передбачаються два етапи:

1) перетворення площини в проекціювальну;
2) перетворення проекціювальної площини в площину рівня.

Рис. 55 демонструє перший етап перетворення площини ΔABC у проекціювальну. Нова площина проекцій $П_4$ проводиться перпендикулярно до $П_1$ та горизонталі площини h, тобто $П_1 \perp П_4 = X_{14}$ та h $(h_1) \perp П_4$.

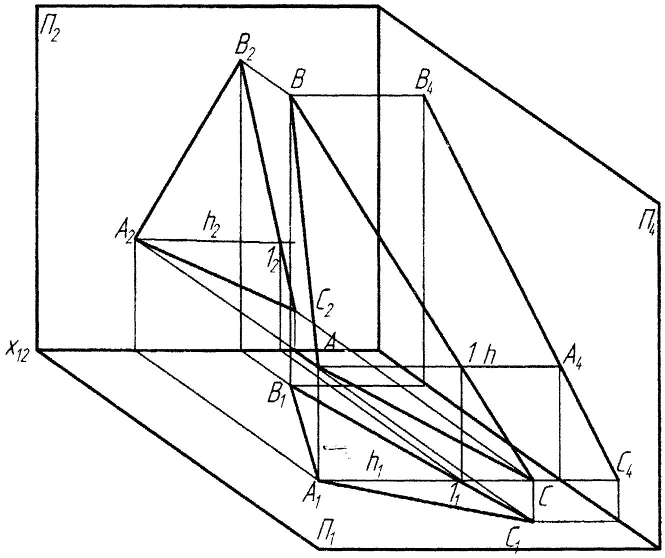


Рисунок 55 – Перетворення площини загального положення у проекціювальну

Для виконання другого етапу побудов слід замість горизонтальної площини проекцій $П_1$ ввести нову $П_5$. Нова площина проекцій $П_5$ повинна бути паралельною сліду проекціювальної площини σ_4 ($\Delta A_4B_4C_4$), тобто $X_{45} \parallel \sigma_4$ (рис. 56).

В новій площині проекцій побудована натуральна величина ΔABC, що в залежності від поставленої задачі може передбачати визначення периметра трикутника ($p = A_5 B_5 + C_5 A_5 + C_5 B_5$) або площі трикутника (слід додатково побудувати висоту трикутника).

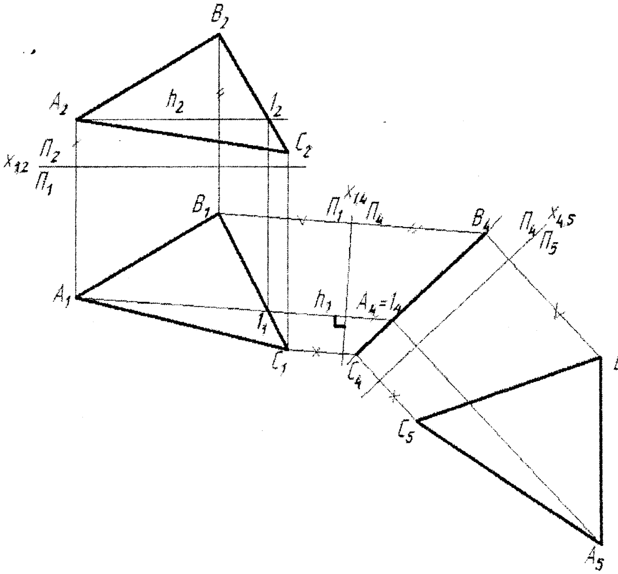


Рисунок 56 – Побудова натуральної величини ΔАВС

Висновки:

1. Для визначення натуральних величин відстаней до двох точок, до точки та прямої або до двох прямих використовують алгоритм перетворення прямої загального положення в окремі положення.
2. Для визначення натуральних величин відстаней, які мають відношення до площини, до двох площин, точки та площини, використовують алгоритм перетворення площини загального положення в окремі положення. Для здійснення таких побудов попередньо в площині трикутника слід будувати лінію рівня – горизонталь h (h_1, h_2) або фронталь f (f_1, f_2). Відносно лінії рівня площині можна надати горизонтально-проекціювальне ($f_2 \perp X_{24}$) або фронтально-проекціювальне ($h_1 \perp X_{14}$) положення.
3. Якщо пряма займає положення рівня, то можна визначити: н. в. відстані між двома точками; кути нахилу прямої до Π_1 та Π_2.
4. Якщо пряма займає проекціювальне положення, то можна визначити: відстані від точки до прямої, відстані між двома паралельними та двома мимобіжними прямими.
5. Якщо площина займає проекціювальне положення, то можна визначити: кути нахилу площини до Π_1 та Π_2, н. в. відстаней від

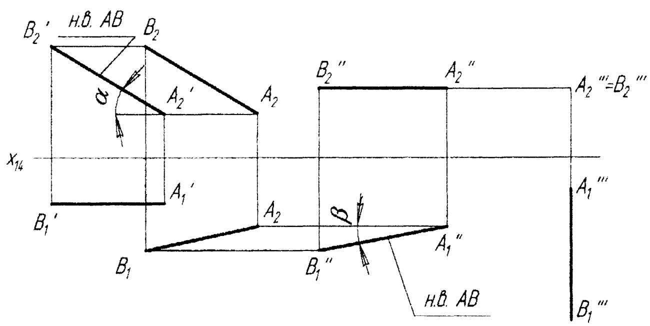
точки до площини, між двома площинами, які паралельні або перетинаються.

6. Якщо площина займає положення рівня, то можна визначити такі метричні характеристики, як площу та периметр.

8.2 Спосіб плоско-паралельного переміщення

Сутність методу: площини проекції $П_1$ та $П_4$ залишаються нерухомими, а об'єкт проекціювання розташовують так, як зручно для розв'язання задачі. Тобто зміною положення прямої лінії або плоскої фігури (обертанням навколо деякої осі) таким чином, щоб пряма або фігура зайняли окреме положення відносно нерухомих площин проекції $П_1$ та $П_2$.

Задача. Прямій АВ надайте окремі положення та визначте кути нахилу цієї прямої до площин проекції $П_1$ та $П_2$ (рис. 57).



Символьні позначення:

$AB \parallel П_2$,	$AB \parallel П_1$,	$AB \perp П_2$,
$A'B' \wedge П_1 = \alpha$,	$A''B'' \wedge П_2 = \beta$,	z=const .
z=const .	y=const.	

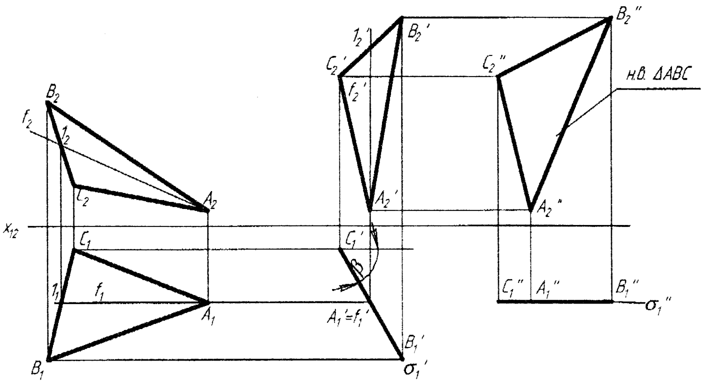
Рисунок 57 – Основні положення прямої АВ

Задача. Площині ΔABC надайте окремі положення (рівня та проекціювальне) (рис. 58).

Як було зазначено вище, для перетворення площини загального положення у проекціювальну попередньо в цій площині будують лінію рівня горизонталь або фронталь. Використаємо в даному випадку фронталь, за допомогою якої на першому етапі перетворень надамо площині горизонтально-проекціювальне положення, на другому – положення рівня (фронтальної площини).

8.3 Спосіб обертання навколо проекціювальної осі

Сутність методу: площини проекцій $П_1$ та $П_2$ залишають нерухомими, а пряму (площину) обертають навколо введеної осі *i*, яка займає окреме положення відносно $П_1$ або $П_2$ (рис. 58).



Символьні позначення:	$f_2' \perp X_{12}$, $\sigma(\Delta ABC) \perp П_1$, $\sigma \wedge П_2 = \beta$.	$\sigma_1'' \parallel X_{12}$, $\sigma(\Delta ABC) \parallel П_2$.

Рисунок 58 - Надання площині ΔАВС проекціювального та положення рівня

Задача. Прямій АВ загального положення надайте проекціювальне положення (рис. 59).

Задачу розв'язують в два етапи. На першому етапі відносно осі *i* ($i \perp П_1$) пряму повертають до положення, коли вона паралельна фронтальній площині проекцій ($A'B' \parallel П_2$). На другому етапі вводять нову вісь i' ($i \perp П_2$), відносно якої пряму $A''B''$ повертають перпендикулярно до $П_1$ ($A''B'' \perp П_1$).

Задача. Визначте натуральну величину чотирикутника ABCD (рис. 60).

Через одну із точок (т. D) чотирикутника проводимо вісь *i* ($i \perp П_1$). Слід-проекцію площини σ_1 ($A_1B_1C_1D_1$) повертаємо до положення, паралельного фронтальній площині проекції ($\sigma_1 \parallel X_{12}$). На $П_2$ отримуємо натуральну величину ($A'B'C'D'$) чотирикутника ABCD. Периметр плоскої фігури визначається як сума його сторін.

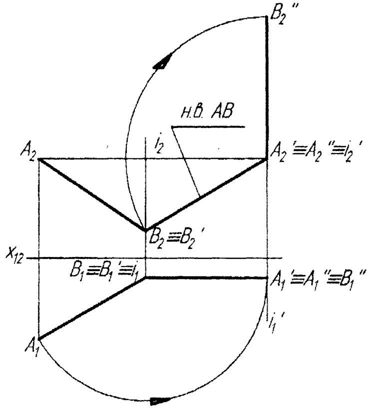
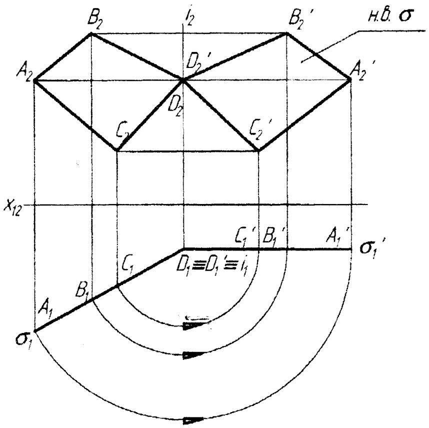


Рисунок 59 – Перетворення прямої загального положення в проекціювальне



$$p=A_2'B_2'+B_2'D_2'+D_2'C_2'+C_2'+C_2'A_2'$$

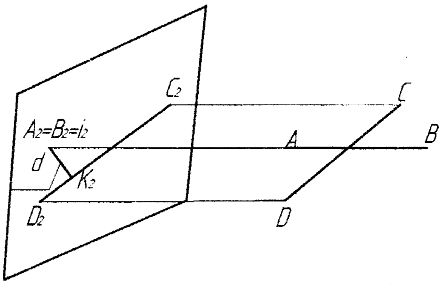
Рисунок 60 – Визначення периметра плоскої фігури

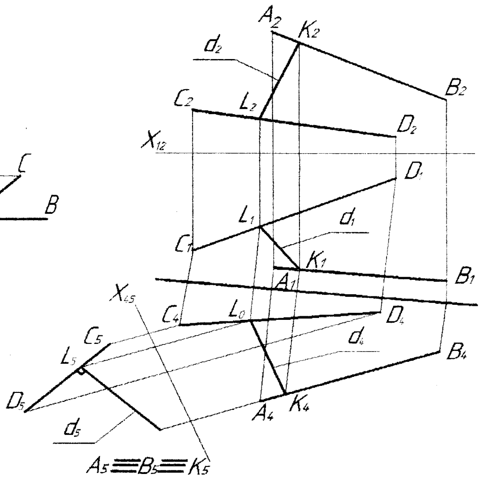
8.4 Приклади для закріплення

Приклад 1. Проаналізуйте побудови, які показані на аксонометричному та ортогональному кресленнях.

1. Скільки перетворень слід виконати для визначення відстані d, відповідно, від точки до прямої , між двома паралельними прямими та між двома мимобіжними прямими AB та CD.

2. Побудуйте самостійно відсутні проекції відстані d у випадках, коли визначається відстань від точки D до прямої AB та між двома паралельними прямими AB та CD.

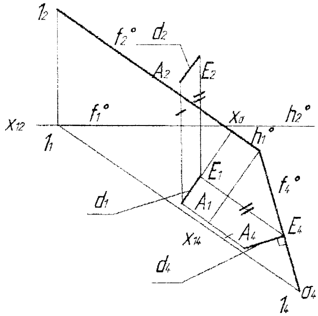




Приклад 2. Проаналізуйте побудови, які показані на аксонометричному та ортогональному кресленнях (див. приклад 1).

1. Чому для надання прямій проекціювального положення використовується лише одна заміна площин проекцій?
2. До якої із площин проекцій (горизонтальної чи фронтальної) ця пряма перпендикулярна?

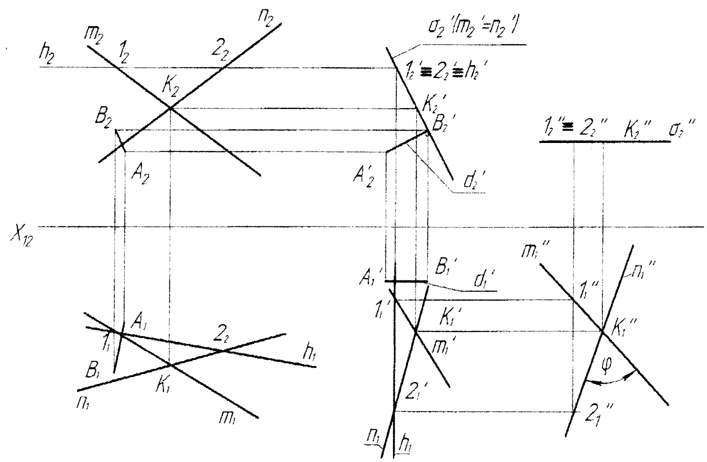
Приклад 3. Побудуйте натуральну величину відстані від т. А до площини $\sigma\,(h^0 \cap f^0)$.



В даному разі площина задана слідами, які між собою утворюють розгорнутий кут.

Для визначення відстані від т. А до площини а слід площині надати проекціювальне положення. Нову вісь X_{14} вводимо перпендикулярно до h_1. Відстань d_4 ($d_4 \perp \sigma_4$) визначає натуральну величину відстані від т. А до площини σ.

Приклад 4. Застосовуючи спосіб плоско-паралельного переміщення, визначте:
- відстань від т. А до площини;
- натуральну величину кута між двома прямими, які перети – наються.



Символьні позначення	h (h_1, h_2)	$h_1 \perp X_{12}$,	$\sigma_2'' // \Pi_1$,
		$\sigma_2' \perp \Pi_2$,	m''^ n''
		$y = const$	$z = const$

Розв'язання задачі

В площині σ ($m \cap n = K$) попередньо проведена горизонталь площини h (h_1, h_2).

В першому перетворенні площина займає фронтально-проекціювальне положення ($\sigma' \perp \Pi_2$) і шукана відстань визначається від Проекції точки A_2' до сліду – проекції площини σ_2'' за перпендикуляром d_2' Відсутня проекція d_1' перпендикулярна до $h_1'(d_1' \perp h_1')$.

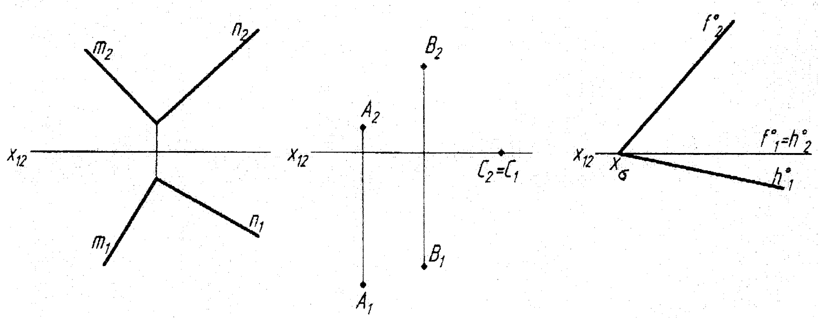
В другому перетворенні слід-проекцію площини σ_2 необхідно розташувати так, щоб площина зайняла окреме положення, тобто $\sigma_2 \parallel X_{12}$. В площинах рівня завжди можна визначити основні метричні характеристики. В даному разі – це величина лінійного кута φ, під яким перетинаються дві прямі площини m та n.

8.5 Теоретичні питання

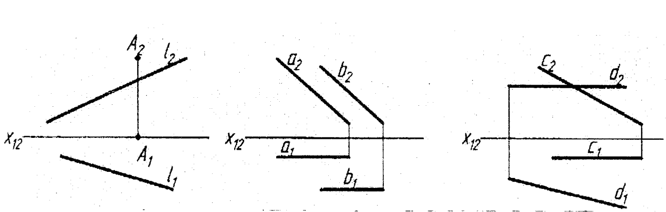
1. В чому сутність методів заміни площин проекцій та плоско-паралельного переміщення?
2. Скільки потрібно виконати перетворень, щоб прямій загального положення надати проекціювальне положення (положення рівня)?
3. Скільки потрібно виконати перетворень, щоб площині загального положення надати проекціювальне положення (положення рівня)?
4. Які додаткові побудови вводяться, щоб площину загального положення перетворити в проекціювальну?

8.6 Задачі для самостійної підготовки

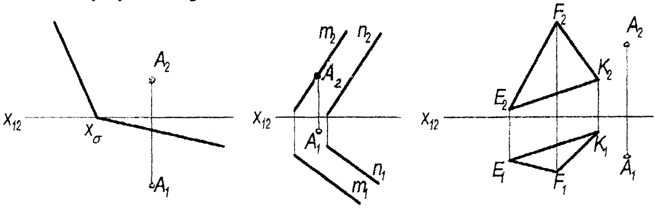
Задача 1. Застосовуючи один із методів перетворень, побудуйте проекції проекціювальних площин та визначте кути нахилу до площин проекцій Π_1 та Π_2.



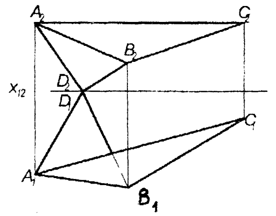
Задача 2. Побудуйте проекції відстані між геометричними елементами.



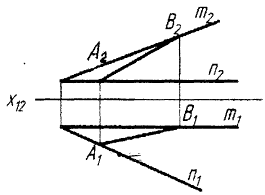
Задача 3. Побудуйте проекції відстані від точки А до площини.



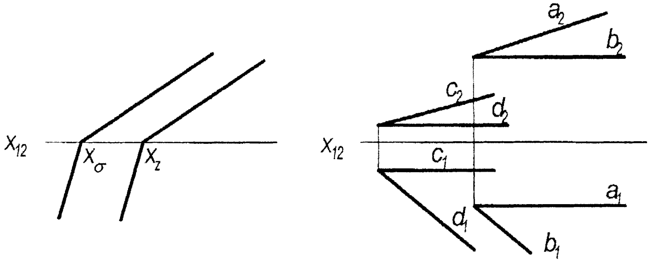
Задача 4. Визначте натуральну величину кута при ребрі АВ.



Задача 5. Побудуйте проекції правильного трикутника АВС, який належить площині σ (m ∩ n), якщо задана одна його сторона АВ.



Задача 6. Побудуйте проекції відстані між двома паралельними площинами.



9 Криві лінії та поверхні. Загальні положення

Криві лінії

Криві лінії – геометричне місце послідовних положень точки, яка безперервно рухається в просторі (рис. 61).

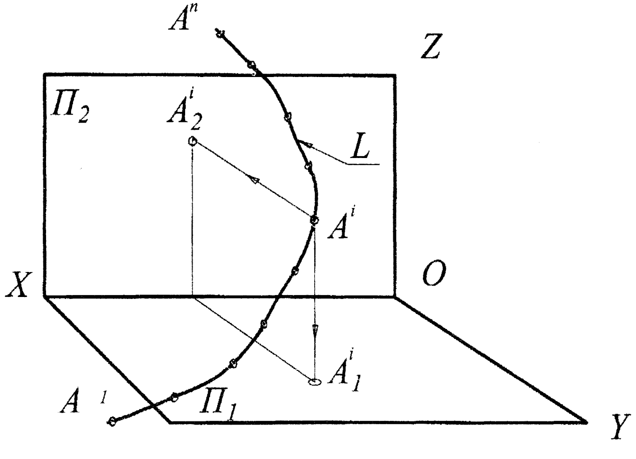


Рисунок 61 – Утворення кривої лінії

Область застосування кривих ліній досить широка: кулачки, профілі зубців, елементи будівельних конструкцій. За їх допомогою можна задати або описати:

1) обриси різноманітних інженерних конструкцій;

2) траєкторії руху складних частин механізмів;

3) рельєф місцевості;

4) виконувати дослідження у вигляді графіків залежності між різними параметрами.

Способи задання кривої:

а) аналітичний – коли крива лінія задається математичним рівнянням;

б) графічний – коли крива лінія задається візуально на носії графічної інформації;

в) табличний – коли крива лінія задається координатами послідовного ряду його точок.

В нарисній геометрії використовують графічний метод. До різновидів кривих відносять плоскі та просторові криві. Однією із найпоширеніших плоских кривих є коло. Проекціями кола можуть бути: коло, пряма, еліпс.

Поверхні

В нарисній геометрії поверхня визначається як слід руху лінії або іншої поверхні.

Лінія, за допомогою якої утворюється поверхня, називається твірною. Лінія, яка задає закон руху твірної, називається напрямною. Твірна та напрямна можуть бути прямі та криві.

Поверхня, яка утворена за допомогою певного закону, називається закономірною (правильною), і навпаки – незакономірною (неправильною).

Поверхні, у яких твірна є прямою лінією, називаються лінійчастими, і навпаки, якщо твірна є кривою лінією, то поверхні називаються нелінійчастими.

Класифікація поверхонь

Поверхні класифікують за такими ознаками:

1. За способом утворення:
   - 1.1 поверхні обертання,
   - 1.2 поверхні переносу,
   - 1.3 гвинтові.
2. За формою кривої:
   - 2.1 лінійчасті,
   - 2.2 нелінійчасті.
3. За законом утворення:
   - 3.1 закономірні,
   - 3.2 незакономірні.
4. За суміщенням поверхні з площиною:
   - 4.1 розгортні,
   - 4.2 нерозгортні.

Способи задання поверхонь

Поверхні задають такими способами:

1. Каркасом – двома сімействами ліній, перетин яких утворює сітку.
2. Обрисом – лініями, які обмежують поверхню на кресленні.
3. Визначником — сукупністю умов, які однозначно задають поверхню.

Визначник складається з двох частин:

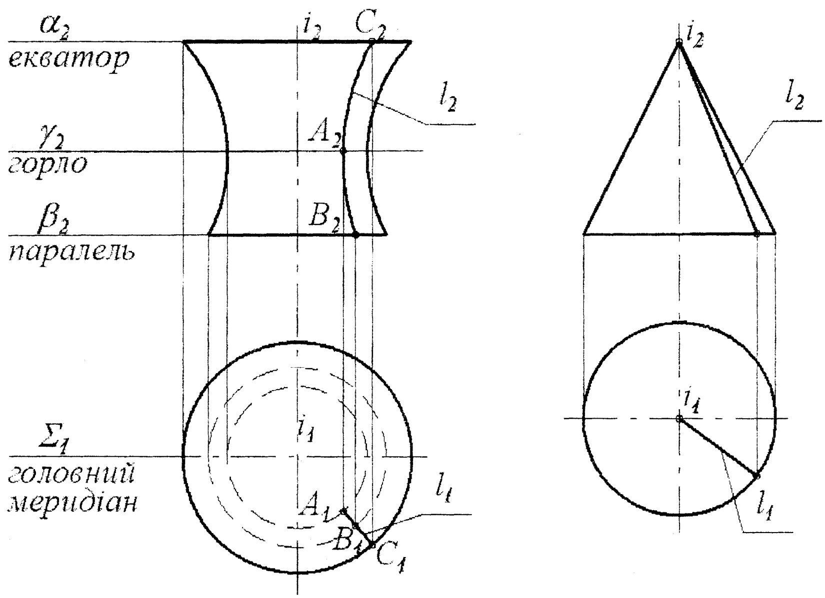
а) геометричної частини (ГЧ) – точки, лінії, поверхні (елементи, за допомогою яких позначаються: твірні, напрямні);

б) алгоритмічної частини (АЧ) – символьний запис закону утворення поверхні з використанням знаків (перетину, паралельності, мимобіжності і т.ін.).

9.1 Поверхні обертання

Умовний запис визначника поверхонь – $\Omega\ (l,\ i)$ (рис.62),

де ГЧ $\begin{cases} l \text{ – твірна (пряма або крива);} \\ i \text{ – вісь обертання.} \end{cases}$ АЧ $\begin{cases} l Ю i, \\ i \perp \Pi_1 \end{cases}$



а) l – плоска крива б) l – пряма лінія

Рисунок 62 – Утворення поверхонь обертання

Поверхні обертання можна отримати, якщо деяку твірну l, обертати навколо осі i, причому в якості твірної може бути пряма, плоска або просторова крива (рис. 62, а, б). На поверхні обертання найпростішою лінією є коло. Кола отримаємо, якщо поверхню перетнути площинами, які перпендикулярні до осі обертання поверхні, і надалі будемо їх називати паралелями (здобуті площиною β).

Паралель найменшого радіуса, здобута площиною γ, називається горлом. Паралель найбільшого радіуса, здобута площиною α, називається екватором.

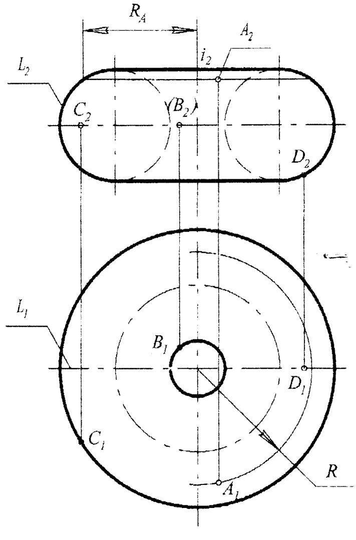
Лінія, здобута перерізом поверхні площиною, яка проходить через вісь обертання *i*, називається меридіаном.

Головний меридіан – меридіан, який знаходиться в площині, що паралельна одній з площин проекцій (здобута площиною Σ). Головний меридіан утворює обрис поверхні та дозволяє визначати видимість поверхні.

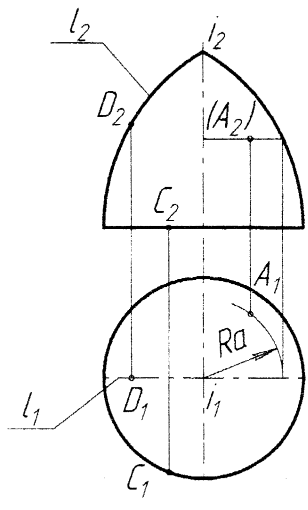
Поверхні обертання з плоскою твірною другого порядку мають назву меридіана, аналогічну назві цієї твірної (для параболоїда обертання – парабола, еліпсоїда – еліпс, і т.д.) Ці поверхні відносять до закономірних.

Різновиди поверхонь обертання

1. Тор – поверхня, що може бути отримана обертанням твірної (кола) навколо осі *i* (рис. 63, а, б).

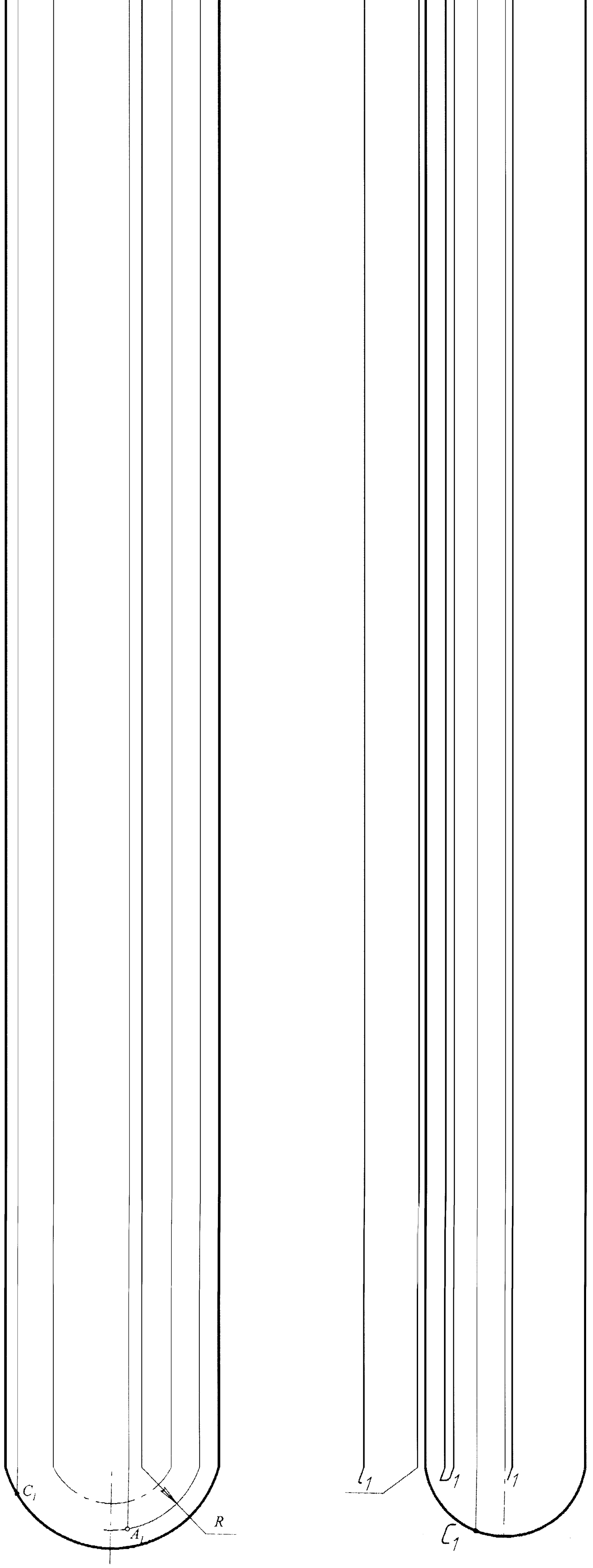


а) відкритий



б) закритий

Рисунок 63 – Різновиди поверхні тора



а) відкритий

б) закритий

Рисунок 63 – Різновиди поверхні тора

перпендикулярні до осі обертання поверхні, і надалі будемо їх називати паралелями (здобуті площиною β).

Паралель найменшого радіуса, здобута площиною γ, називається горлом. Паралель найбільшого радіуса, здобута площиною α, називається екватором.

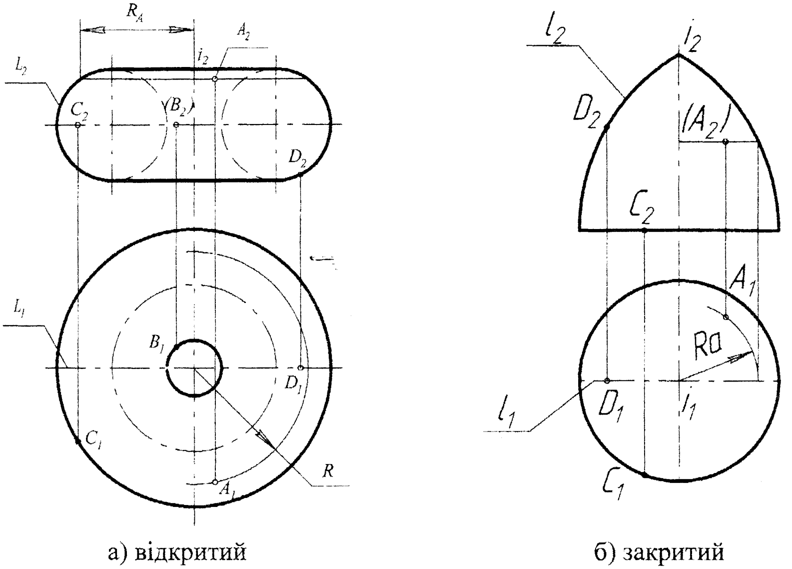
Лінія, здобута перерізом поверхні площиною, яка проходить через вісь обертання *i*, називається меридіаном.

Головний меридіан – меридіан, який знаходиться в площині, що паралельна одній з площин проекцій (здобута площиною Σ). Головний меридіан утворює обрис поверхні та дозволяє визначати видимість поверхні.

Поверхні обертання з плоскою твірною другого порядку мають назву меридіана, аналогічну назві цієї твірної (для параболоїда обертання – парабола, еліпсоїда – еліпс, і т.д.) Ці поверхні відносять до закономірних.

Різновиди поверхонь обертання

1. Тор – поверхня, що може бути отримана обертанням твірної (кола) навколо осі *i* (рис. 63, а, б).



а) відкритий б) закритий

Рисунок 63 – Різновиди поверхні тора

На рис. 63, а точка С належить екватору, т. В – горлу, т. D – головному меридіану, т. А – паралелі певного радіуса (R_A). Паралель та її радіус визначаються в площині, яка перпендикулярна до осі обертання *i*, на площині проекцій Π_2, радіус паралелі R_A вимірюють від осі обертання до обрису поверхні. Т. А (рис. 63, а) на Π_2, видима, оскільки знаходиться перед головним меридіаном. Згідно з рис. 63, б т. А на Π_2 – невидима, оскільки знаходиться за головним меридіаном.

Запишемо визначник торової поверхні:

Ω (*l, i*) – загальний для відкритого та закритого тора.

Відміни, як видно з рисунка, існують при побудові. Тому визначимо графічну та алгоритмічну частини:

а) відкритого

$$\text{ГЧ}\begin{cases} l \text{ - твірна, коло;} \\ i \text{ - вісь обертання.} \end{cases}$$

$$\text{АЧ}\begin{cases} l \circlearrowleft i, \\ l \not\cap i. \end{cases}$$

б) закритого

$$\text{ГЧ}\begin{cases} l \text{ - твірна, частина кола;} \\ i \text{ - вісь обертання.} \end{cases}$$

$$\text{АЧ}\begin{cases} l \circlearrowleft i, \\ l \cap i. \end{cases}$$

Алгоритм визначення проекцій точок на поверхнях обертання

При визначенні проекцій точок слід пам'ятати, що деякі із них можуть бути визначені безпосередньо, оскільки знаходяться на характерних (обрисових) лініях цих поверхонь (екваторі, горлі, головному меридіані).

1. Поверхні обертання:

1.1 з криволінійною твірною;

а) проекції точок визначають тільки за допомогою паралелей;

б) через проекцію точки проводять паралель, яка перпендикулярна до осі обертання;

в) визначають радіус паралелі (від осі обертання вздовж паралелі до обрисового меридіана для однієї проекції або від сліду осі обертання до проекції точки – для другої проекції);

г) за характерними лініями (екватор, обрисовий меридіан) визначають видимість проекцій точок.

1.2 з прямолінійною твірною:

а) проекції точок можна визначити з допомогою паралелей або твірних;

б) паралелі, їх радіуси визначають аналогічно попередньому алгоритму;

в) твірні проводять, використовуючи алгоритм утворення поверхні.

9.2 Поверхні переносу

Поверхні переносу можна одержати поступальним рухом плоскої кривої, причому лінії, які утворюють поверхню, весь час залишаються паралельними між собою (рис. 64).

Ø (a, $в$) – загальний визначник поверхні,

де АЧ $\begin{cases} a \text{ - твірна, крива;} \\ в \text{ - напрямна, пряма.} \end{cases}$ ГЧ $\begin{cases} a \| a^1 \| a^2 \ldots \| a^n, \\ a^i \cap в. \end{cases}$

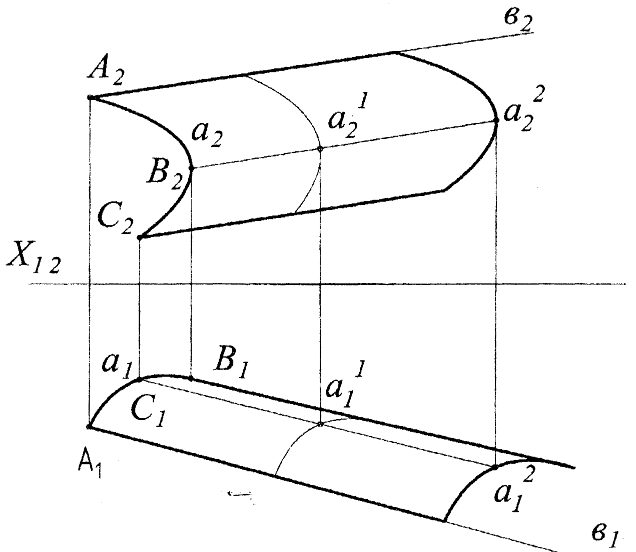


Рисунок 64 – Утворення поверхні переносу

Для того, щоб перейти від задання поверхні елементів її визначником до задання поверхні каркасом, достатньо на напрямній прямій $в$ з однаковим кроком відмітити ряд точок A, A′, A″, … та через ці точки провести криві a^1 , a^2, …, паралельні a.

Лінійчасті поверхні

До цих поверхонь відносяться поверхні: циліндр та конус обертання, конічна та циліндрична поверхні обертання загального положення, поверхні Каталана та торса (поверхня з ребром повертання). Ці поверхні утворюють переміщенням прямої - твірної l вздовж другої лінії (кривої чи прямої), яка називається напрямною.

9.2.1 Лінійчаті поверхні з однією напрямною

1. Циліндр загального положення – прямолінійна твірна l_l переміщається вздовж криволінійної напрямної m, причому всі твірні залишаються паралельними між собою (рис. 65).

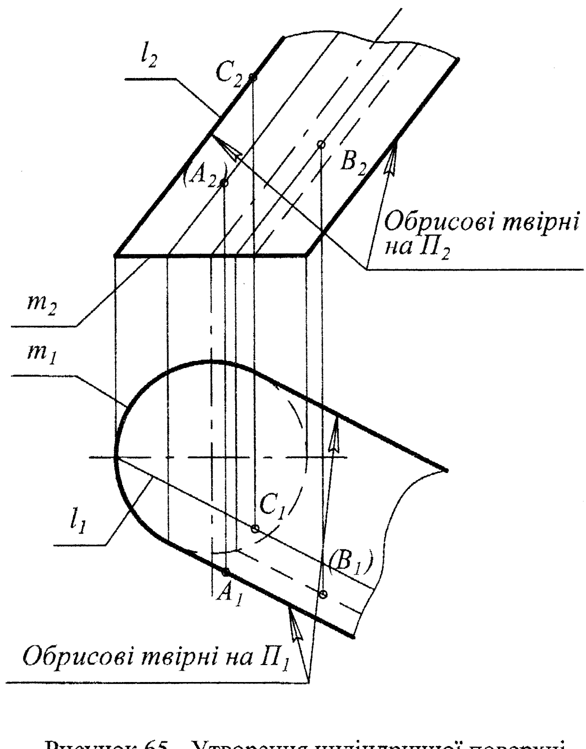


Рисунок 65 - Утворення циліндричної поверхні

Запишемо загальний визначник цієї поверхні:

$$\varnothing\ (l,m),$$

де $ГЧ \begin{cases} l \ – \text{ твірна, пряма лінія;} \\ m \ – \text{ пряма, крива, коло.} \end{cases}$ $АЧ \begin{cases} l \cap m; \\ l \parallel l^1 \parallel l^2 \parallel \ldots \parallel l^n. \end{cases}$

Межу видимості на $П_1$ утворюють твірні, які є дотичними до проекції кола. Проекції точок А та В будують, використовуючи алгоритмічну частину визначника, тобто через проекції т. А та В проводять твірні, які паралельні обрисовим циліндричної поверхні та перетинають напрямну m.

Через видиму проекцію т. А проводять видиму твірну, через невидиму проекцію т. В – невидиму. Т. С належить твірній, яка на $П_1$ є обрисовою.

2. Конус загального виду – прямолінійна твірна *l* переміщається вздовж деякої напрямної *m*, яка проходить через одну *і* ту ж точку, яку називають вершиною S (рис. 66).

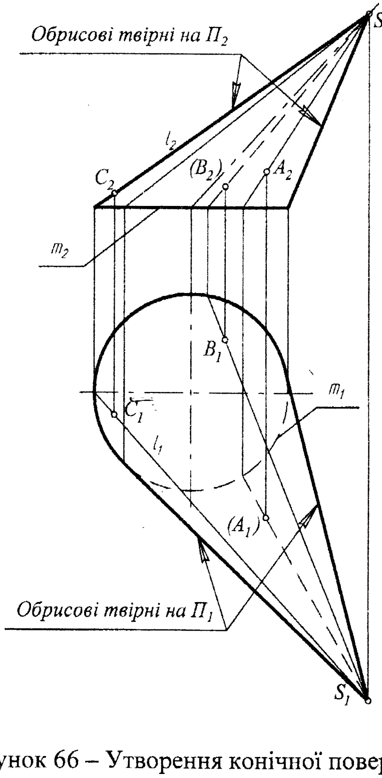


Рисунок 66 – Утворення конічної поверхні

$$\varnothing\,(l, m, S) \text{ – загальний визначник,}$$

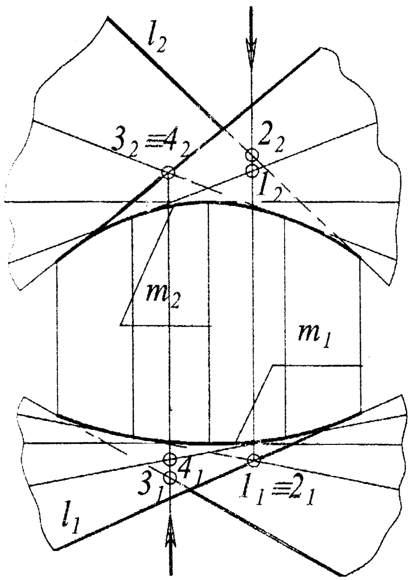
де
ГЧ $\begin{cases} l \text{ – твірна, пряма;} \\ m \text{ – напрямна, крива, коло;} \\ S \text{ – вершина.} \end{cases}$
АЧ $\begin{cases} l \cap l' \cap l^2 \cap \ldots \cap l = S; \\ l \cap m. \end{cases}$

Проекції т. А та В знаходять, використовуючи алгоритмічну частину визначника. Проекції точок, що позначені в дужках, слід розуміти як ті, які невидимі. Т. С належить твірній, яка на Π_2 є обрисовою.

3. Торс - поверхня з ребром повертання. (Torsе – витий, кручений).

Утворюється безперервним рухом прямолінійної твірної l, яка дотикається до деякої просторової криволінійної напрямної m (рис. 67).

$$\varnothing\,(l, m) \text{ – загальний визначник,}$$



де

ГЧ $\begin{cases} l \text{ – твірна, пряма;} \\ m \text{ – напрямна, просторова крива.} \end{cases}$

АЧ $\begin{cases} l^i \;{}^{\circ}\!/\; l, \\ l \;\underline{\circ}\; m. \end{cases}$

Читання знаків:

${}^{\circ}\!/$ – мимобіжність
$\underline{\circ}$ – дотик

Рисунок 67 – Побудова поверхні торса

Поверхні з однією напрямною відносяться до розгортуваних поверхонь.

9.2.2 Поверхні з двома напрямними (Поверхні Каталана)

Каталан – бельгійський математик, який досліджував властивості цих поверхонь.

Ці поверхні утворюються рухом прямої лінії, яка для всіх своїх положень зберігає паралельність деякій заданій площині (площина паралелелізма) та перетинає напрямні. До них відносять: циліндроїд, параболоїд, коноїд.

1. Гіперболічний параболоїд (коса площина) – використовується в інженерно-будівній практиці при формуванні поверхонь укосів та насипів (рис. 68).

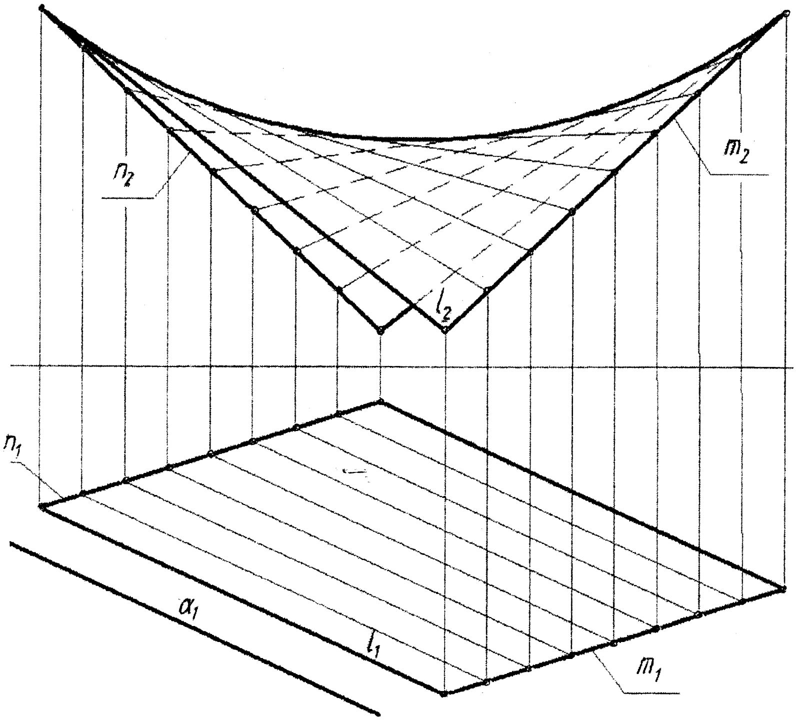


Рисунок 68 – Гіперболічний параболоїд

2. Коноїд – поверхня використовується в гідротехнічному будівництві для формування будівництва поверхні підвалин мостових опор (рис. 69).

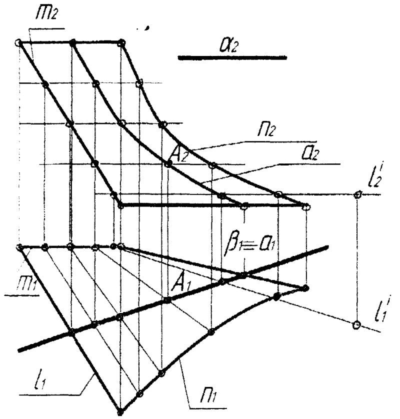


Рисунок 69 – Коноїд

Задача: Відомо, що т. А та В належать поверхні коноїда (рис. 69), але на кресленні задані лише їх проекції – A_1 та B_2. Побудувати відсутні проекції – A_2 та B_1.

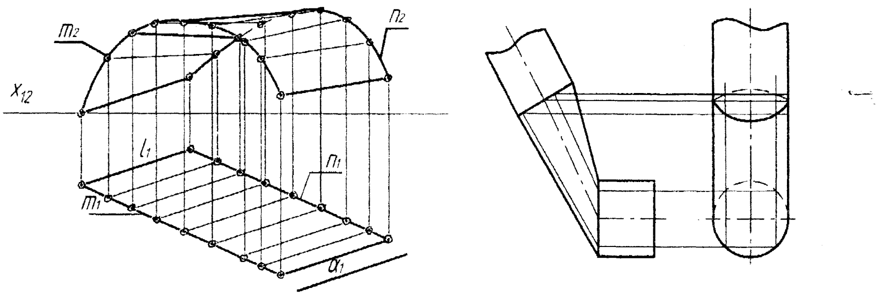
Пояснення до побудов проекцій точок A_2 та B_1.

1. Із двох проекцій більш просто будується проекція т. В – B_1. Проводять через B_2 твірну *l*, паралельну α_2. Визначають перетин твірної l^i з напрямними *m* та *n*. Знаходять відсутню проекцію твірної l^i, куди на неї проекціюють точку В.

2. Відсутню проекцію точки А (A_2) будують за рахунок введення допоміжної січної площини β ($\beta \perp \Pi_1$).

Ця площина перетинає поверхню коноїда по кривій *a*, на яку і проекціюємо відсутню проекцію точки А.

3. Циліндроїд має застосування у повітроводах великих діаметрів (рис. 70).



а) циліндроїд

б) повітровід, поверхня якого є циліндроїдом

Рисунок 70 - Циліндроїд та його використання

Загальний визначник цих поверхонь:

$$Ø(\ l, m, n, \alpha),$$

де

$$ГЧ\begin{cases} l \text{ –твірна;} \\ m, n \text{ –напрямні;} \\ \alpha \text{ – площина паралелізму.} \end{cases} \qquad АЧ\begin{cases} l \cap m, n; \\ l \parallel \alpha, \\ \alpha \text{ – займає певне положення.} \end{cases}$$

Нижче ознайомтесь з геометричною та алгоритмічною частинами визначників поверхонь, що показані, відповідно, на рис. 68 – 70.

1 Гіперболічний параболоїд:

$$ГЧ\begin{cases} m, n \text{ – напрямні,прямі;} \\ l \text{ – твірна;} \\ \alpha \text{ – площина паралелізму.} \end{cases} \qquad АЧ\begin{cases} l \parallel \alpha; \\ l \cap m, n; \\ \alpha \perp П_1. \end{cases}$$

2 Коноїд:

$$ГЧ\begin{cases} m \text{ – напрямна, пряма;} \\ n \text{ – напрямна, крива;} \\ l \text{ – твірна;} \\ \alpha \text{ – площина паралелізму.} \end{cases} \qquad АЧ\begin{cases} l \parallel \alpha; \\ l \cap m,n; \\ \alpha \parallel П_1. \end{cases}$$

3 Циліндроїд:

$$ГЧ\begin{cases} l \text{ – твірна;} \\ m,n \text{ – напрямні, криві;} \\ \alpha \text{ – площина паралелізму.} \end{cases} \qquad АЧ\begin{cases} l \parallel \alpha; \\ l \cap m,n; \\ \alpha \perp П_1. \end{cases}$$

Отже, якщо слід побудувати одну із поверхонь Каталана, то необхідною умовою є задання геометричної частини визначника будь-якої із цих поверхонь та положення площини паралелелізму. Відсутні проекції точок, що належать цим поверхням, можна будувати :

а) за допомогою проекції твірної, використовуючи алгоритмічну частину визначника поверхні;

б) за допомогою січної площини (якщо для заданої проекції точки неможливо застосувати алгоритмічну частину визначника), яка перетинає твірні, що знаходяться поблизу заданої проекції точки.

9.3 Гелікоїди

До них (гелікоїдів) відносяться гвинтові поверхні з прямолінійною твірною – гвинти, свердла, пружини, поверхні лопатей турбін, апарелі та сходини.

Основними характеристиками гелікоїдів є: крок t, діаметр d гвинтової лінії.

До визначника поверхні входять вісь i (вона може бути також і напрямною), дві напрямні, твірна.

Напрямними гелікоїдів можуть бути:

а) вісь i та гвинтова лінія m;

б) дві гвинтові лінії m та n.

В залежності від кута нахилу φ твірної l до осі i гелікоїди називаються прямими ($\varphi = 90^0$) та косими ($0 < \varphi < 90^0$).

9.3.1 Косий закритий гелікоїд (гвинтовий коноїд) (рис. 71).

$$\varnothing\,(m, l, l', i), \text{ де}$$

$$\text{ГЧ}\begin{cases} i \text{ – напрямна та вісь гелікоїда;} \\ m \text{ – напрямна, гвинтова лінія;} \\ l \text{ – твірна;} \\ l' \text{ – твірна напрямного конуса.} \end{cases} \qquad \text{АЧ}\begin{cases} l \cap m, i; \\ l \parallel l'. \end{cases}$$

Попередньо будується один виток гвинтової лінії, починаючи від точки А. Для цього коло діаметра d та крок t гвинтової лінії треба поділити на вісім рівних частин. Коли точка А на 1/8 оберту (проти годинникової стрілки) повернеться навколо осі i та переміститься на 1/8 кроку t, то отримаємо положення точки A^1. При послідовному переміщенні на 1/8 кроку t та на 1/8 оберту навколо осі i отримуємо положення гвинтової лінії m, траєкторія якої задана вісьмома точками ($A^0 - A^7$).

Положення твірних поверхні визначає напрямний конус. Кут нахилу твірної l (A, B) до осі i дорівнює куту нахилу твірної l^1 конуса, в кожному положенні $l \,//\, l^1$.

Відмітимо також і те, що другий кінець твірної l – точка B – також переміщується вздовж осі i на 1/8 кроку та на 1/8 оберту. Тому на рисунку слід розуміти, що $i_1 \equiv S_1 \equiv B_1^{\,0} \equiv B_1^{\,1} \equiv \ldots \equiv B_1^{\,7}$, тобто твірна l перетинає вісь i, тому гелікоїд називають закритим (рис. 71).

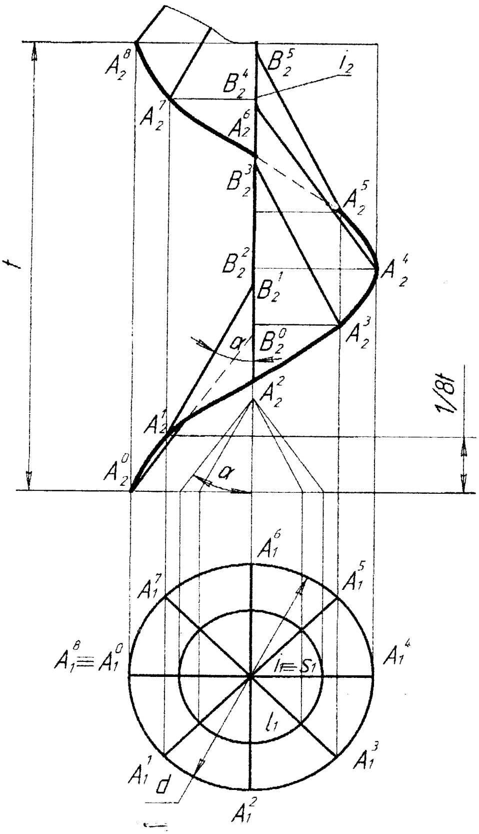


Рисунок 71 – Побудова проекцій закритого гвинтового гелікоїда

9.3.2 Прямий відкритий гелікоїд (гвинтовий циліндроїд) (рис. 72).

$\acute{\varnothing}$ (i, m, n, l), де

ГЧ $\begin{cases} i \text{ – вісь гелікоїда;} \\ m, n \text{ – напрямні, гвинтові лінії;} \\ l \text{ – твірна.} \end{cases}$

АЧ $\begin{cases} l \cap m, n; \\ l \perp i. \end{cases}$

Гелікоїд називають відкритим тому, що твірна l [AB] не перетинає вісь i, а є мимобіжною відносно неї. Один кінець твірної – т. A– переміщується за зовнішньою гвинтовою лінією m , другий кінець твірної – т. B – за внутрішньою гвинтовою лінією n . В усіх своїх положеннях твірна l залишається паралельною Π_1. Побудова зовнішньої гвинтової лінії m починається з т. A, внутрішньої n – з т. B.

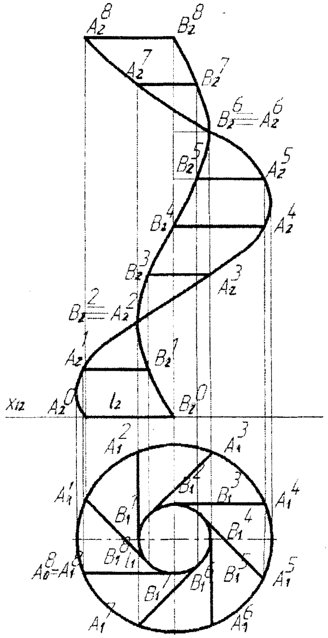


Рисунок 72 – Побудова проекцій прямого відкритого гелікоїда

9.4 Приклади для закріплення

Приклад 1. На циліндрі обертання (рис.73) задані горизонтальні проекції точок D, C та фронтальні проекції точок A та B. (Проекції точок, які взяті в дужки, слід сприймати як невидимі).

Визначте відсутні проекції заданих точок та вкажіть, на яких частинах заданої проекції вони знаходяться.

Пояснення

1. У циліндра бічна поверхня займає проекціювальне положення до Π_1, оскільки всі його твірні перпендикулярні до горизонтальної площини проекції.

Згідно з рис. 73 т. C, D належать бічній поверхні, тому на $П_1$ вони проекціюються у вироджену проекцію – коло.

Т. C видима на $П_2$, отже вона знаходиться перед головним меридіаном ($\sum_1$ – слід-проекція, що утримує проекцію головного меридіана), а т. D – невидима на $П_2$, відповідно, її проекція D_1 знаходиться за головним меридіаном.

2. Циліндр має верхню та нижню основи. Для заданих горизонтальних проекцій т. B (невидима) та т. A (видима) слід розуміти, що т. B – знаходиться на нижній основі циліндра, т. A – на верхній.

Приклад 2. Для конуса обертання задані фронтальні проекції т. A, B, B' та горизонтальні проекції т. C, C^1. Визначте відсутні проекції точок та їх видимість, а проекції т. B, B' на $П_1$ побудуйте за допомогою твірних (рис. 74).

Пояснення

1. Знайдемо горизонтальні проекції точок A, B, B^1, які знаходяться на бічній поверхні конуса обертання.

Через проекцію A_2 (т. A) проведемо паралель і визначимо її радіус (R), який проводять відносно осі i на $П_1$ та за проекційним зв'язком знаходять проекцію т. A_1. Через проекції B_2, B_2^1 т. B, B^1 проведемо твірні (твірна проходить через вершину конуса до перетину з його основою). На побудованих горизонтальних проекціях цих твірних фіксуємо положення проекцій B_1 та B_1^1.

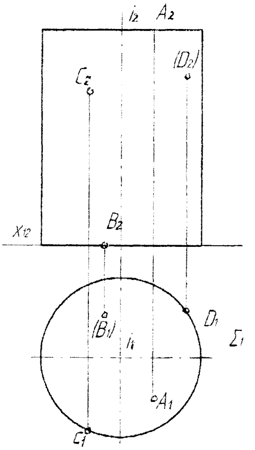


Рисунок 73 – Циліндр обертання

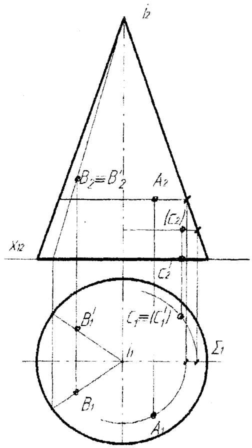


Рисунок 74 – Конус обертання

Знайдемо фронтальні проекції т. С, C^1. З рис. 74 видно, що т. С належить бічній поверхні конуса, а т. C^1 – основі. Тому проекція C_2^1 т. C^1 фіксується безпосередньо за проекційним зв'язком (на фронтальній проекції основи конуса), а C_2 знаходимо аналогічно побудові для точки А, тобто за допомогою паралелі.

Оскільки т. С знаходиться за проекцією головного меридіана (див. слід-проекцію Σ_1), то на Π_2 вона невидима.

Приклад 3. Для конічної поверхні (рис. 75) з однією напрямною запишіть визначник поверхні та вкажіть на яких лініях знаходиться т. С та т. D.

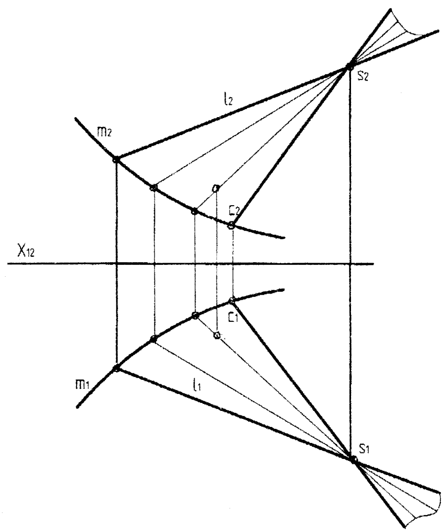


Рисунок 75 – Конічна поверхня

Відповіді:

1. Визначник поверхні: Ø (l, m, S),

де ГЧ $\begin{cases} l \text{ – твірна;} \\ m \text{ – напрямна, крива;} \\ S \text{ – вершина.} \end{cases}$ АЧ $\begin{cases} l \cap l' = S, \\ l \cap m. \end{cases}$

2. D $\subset m$ (належить напрямній), С $\subset l$(належить твірній).

Приклад 4. Для заданих поверхонь запишіть їх визначник та вкажіть, які точки кожної з поверхонь належать обрисовим твірним на $П_1$та $П_2$ (рис. 76, рис. 77).

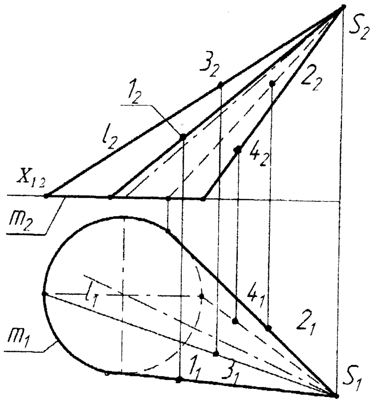


Рисунок 76 – Конус загального положення

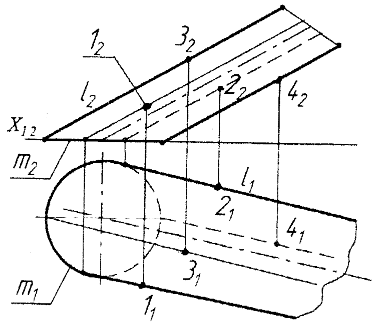


Рисунок 77 – Циліндр загального положення.

Відповіді:

1) Визначники у поверхонь такі:

(*m, l*, S) – конус загального положення,

де

$$ГЧ\begin{cases} m \text{ – напрямна, коло;} \\ l \text{ – твірна, пряма;} \\ S \text{ – вершина.} \end{cases}$$

$$АЧ\begin{cases} l \cap l^i = S, \\ l \cap m, \\ m \parallel П_1. \end{cases}$$

(*m, l*) – циліндр загального положення,

$$ГЧ\begin{cases} \text{m – напрямна, коло;} \\ l \text{ – твірна, пряма.} \end{cases}$$

$$АЧ\begin{cases} l \parallel l^i, \\ l \cap \text{m}, \\ l \parallel П_1 \end{cases}$$

2) На обрисових твірних заданих поверхнях в $П_2$ знаходяться точки 3 та 4; на обрисових твірних в $П_1$ – точки 1 та 2.

Приклад 5. Дайте назву та запишіть визначник показаної поверхні (рис. 78).

Відповіді:

1. Поверхня, що показана на рис. 78, має назву – косий відкритий гелікоїд або гвинтовий циліндроїд.

2. Визначник поверхні:

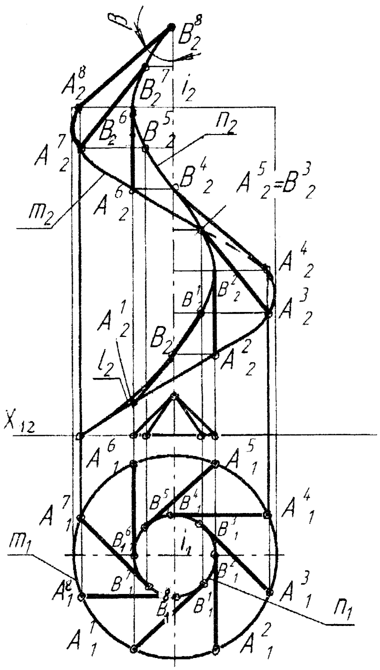


Рисунок 78 - Косий відкритий коноїд

$\varnothing\,(m, n, l, l', i)$,

де ГЧ $\begin{cases} m,\ n \text{ – напрямні, гвинтові лінії;} \\ l \text{ – твірна;} \\ l' \text{ – твірна напрямного конуса;} \\ i \text{ – вісь гелікоїда.} \end{cases}$

ГЧ $\begin{cases} l \| l'; \\ l \cap m, n, \\ (l - n); \\ i \perp \Pi_1. \end{cases}$

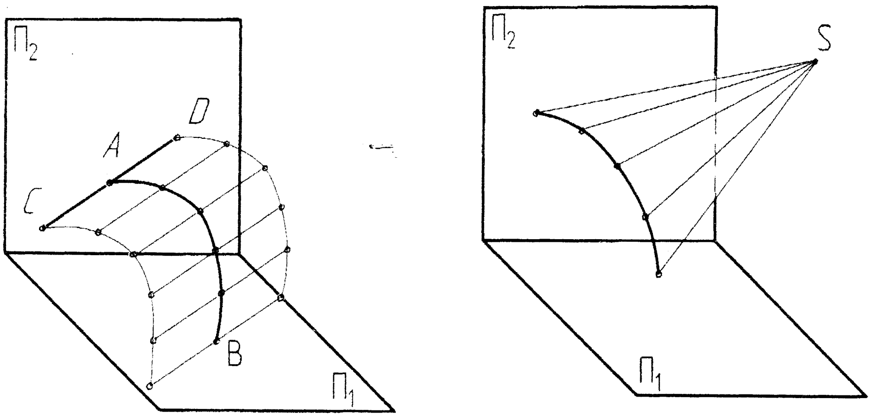
9.5 Теоретичні питання

1. Дайте означення кривої лінії. Відміни між плоскою та просторовою кривою.
2. В чому різниця між закономірною та незакономірною кривими?
3. Як утворюється циліндрична та конічна гвинтові лінії. Що таке крок гвинтової лінії?

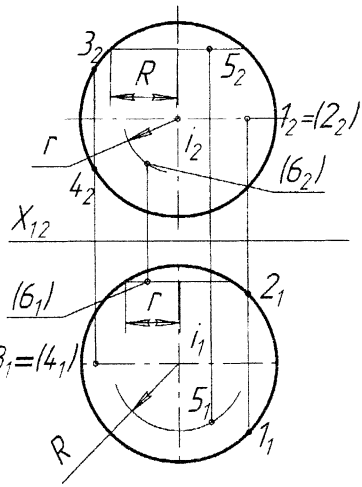
4. Які способи задання поверхонь на кресленні вам відомі?
5. Що називають каркасом, обрисом поверхні?
6. Дайте поняття визначника поверхні. Складові частини визначника.
7. Як утворюються поверхні обертання? Визначник поверхні.
8. Як побудувати на поверхні обертання паралель, меридіан, головний меридіан?
9. Які окремі види поверхонь обертання вам відомі?
10. Як утворюються поверхні переносу? Визначник поверхні.
11. Які поверхні називають лінійчастими? Скільки напрямних можуть мати лінійчасті поверхні?
12. Скільки напрямних мають поверхні Каталана? Визначник поверхні.
13. Як утворюються гвинтові поверхні? Визначник поверхні. Скільки напрямних мають гвинтові поверхні?
14. За якою ознакою гвинтові поверхні поділяють на відкриті та закриті?
15. Наведіть приклади застосування кривих поверхонь в науці та техніці.

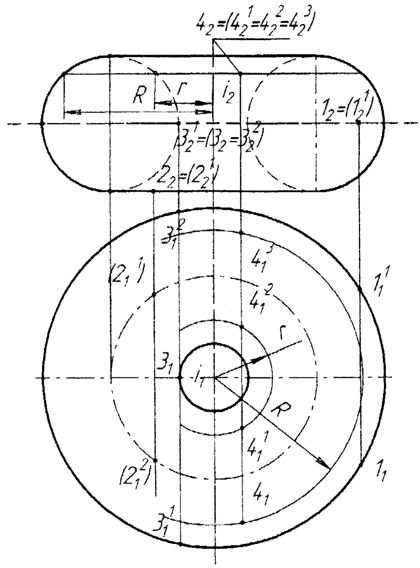
9.6 Задачі для самостійної підготовки

Задача 1. За наочним зображенням поверхонь побудуйте горизонтальну та фронтальну проекції поверхонь. Запишіть для заданих поверхонь їх визначники.

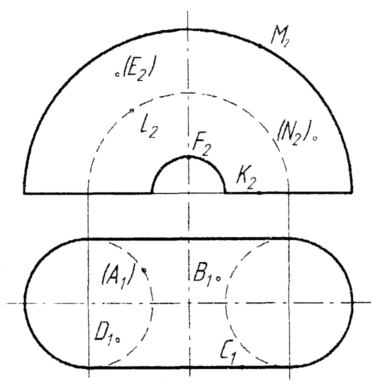


Задача 2. Із сукупності точок, правильно побудованих на вказаних поверхнях, виберіть та вкажіть ті, які належать екватору та обрисовому меридіану.

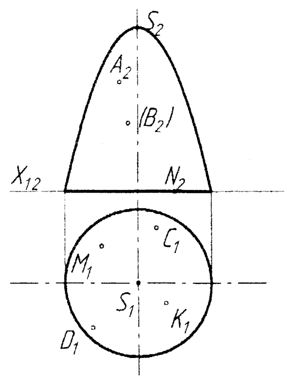




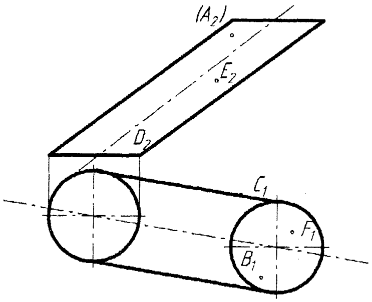
Задача 3. За заданою проекцією однієї із точок, яка належить поверхні, побудуйте відсутню проекцію.



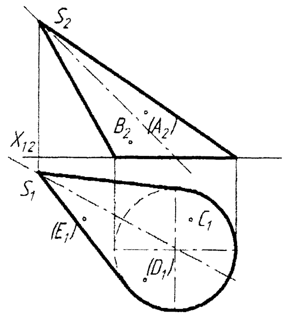
а)



б)

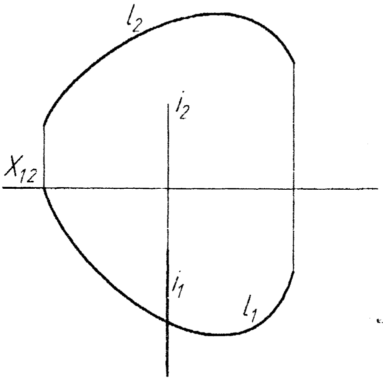


в)

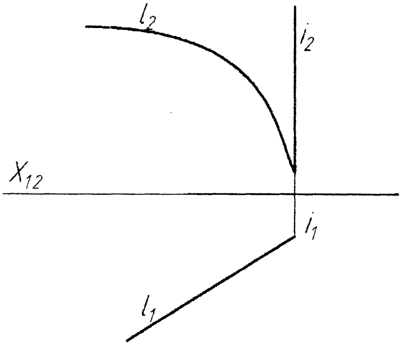


г)

Задача 4. Побудуйте проекції поверхонь обертання за заданими твірною *l* та віссю обертання *i*. Запишіть визначник поверхні.



а)

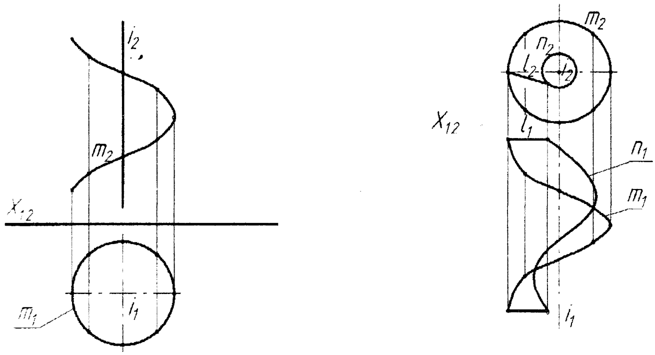


б)

Задача 5. Побудуйте проекції гелікоїда, у якого:

а) напрямні *m* та *i*,
а твірна *l* перетинає *i*.

б) напрямні *m* та *n*,
а твірна *l* мимобіжна
по відношенню до *i* .

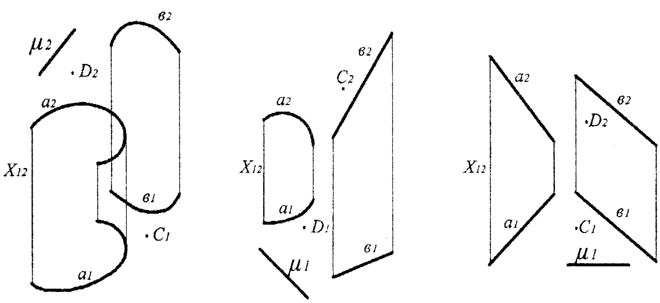


а) б)

Задача 6. Побудуйте проекції точок, що знаходяться на обрисовому меридіані, екваторі, горлі для таких поверхонь:

- конуса обертання, вісь якого перпендикулярна до Π_1;
- відкритого тора з віссю обертання, перпендикулярного до Π_2;
- закритого тора з віссю обертання, перпендикулярного до Π_3;
- еліпсоїда обертання з віссю, перпендикулярною до Π_2.

Задача 7. Для лінійчастих поверхонь з двома напрямними a, b та площиною паралелелізму μ побудуйте каркас твірних та визначте відсутні проекції точок C, D.



а) б) в)

10 Переріз поверхні площиною

10.1 Окремі випадки перерізу

1. Січна площина займає окреме положення (рис. 79, а, б).

а) поверхня гранна б) поверхня обертання

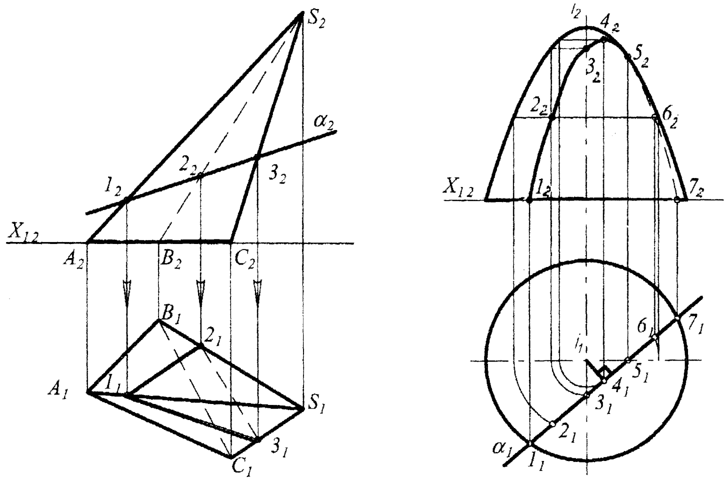


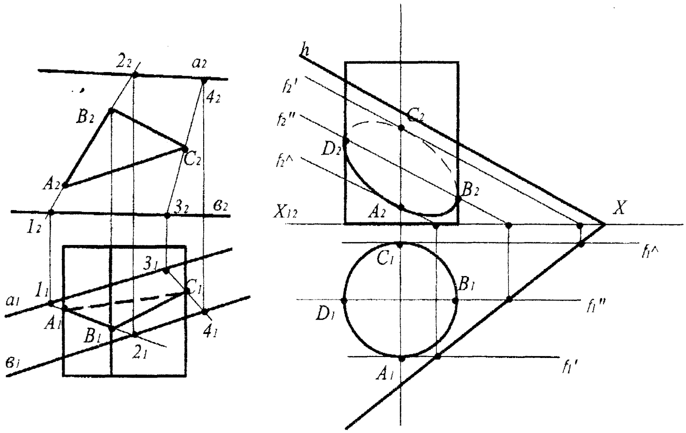
Рисунок 79 – Переріз поверхні січною площиною окремого положення

Вихідна проекція лінії перерізу знаходиться на $П_2$ і належить сліду проекції α_2. Для гранних поверхонь визначаємо точки перерізу з відповідними ребрами – 1,2,3. Лінія перерізу – ламана лінія (трикутник). В гранях, які є видимі на $П_1$, лінія взаємного перерізу видима. Грань BSC на $П_1$ невидима, значить, лінія $2_1 3_1$ також невидима.

Вихідна проекція лінії перерізу знаходиться на $П_1$ і належить сліду проекції α_1. Для кривих поверхонь визначаємо сукупність точок, кожна з яких отримана як точка, що належить поверхні тора. Точка 4 – найвища, вона отримана на перетині перпендикуляра, що проведений від осі обертання i_1 до сліду площини $\sum_1$. Точка 4 знаходиться на межі видимості (головному меридіані), тому лінія 1, 2, 3, 4, 5 на $П_2$ видима, решта – невидимі.

Висновок: у випадку, коли площина займає окреме положення, лінія перерізу належить сліду січної площини та визначається за сукупністю точок, які належать поверхні.

2. Січна площина займає загальне положення, а бічна поверхня - проекціювальне положення (рис. 80, а, б).



а) $\sum(a \| b)$ б) $\sum(f^0 \cap h^0)$

Рисунок 80 – Переріз поверхні, бічна поверхня якої займає окреме положення, з площиною загального положення

Оскільки бічні поверхні призми (ребра перпендикулярні до $П_2$) та циліндра обертання (твірні перпендикулярні до $П_1$) вироджуються в лінію (трикутник - для призми; коло – для циліндра), то проекція лінії взаємного перерізу на одній із площин проекцій відома і є вихідною.

Вихідна проекція лінії перерізу знаходиться на $П_2$. Відсутні проекції точок А,В, С знаходять на прямих [1, 2] та [3, 4], що належать площині $\sum(a \| b)$.

Вихідна проекція лінії перерізу знаходиться на $П_1$. Відсутні проекції точок еліпса знаходять за допомогою ліній рівня (фронталей), які належать площині $\sum(f^0 \cap h^0)$.

Висновок: у випадку, коли бічна поверхня займає проекціювальне положення, то лінія перерізу належить цій бічній поверхні і її точки визначаються з умови, що вони належать заданій площині.

10.2 Конічні перерізи

При перерізі конуса площиною можна отримати такі лінії: трикутник, коло, еліпс, параболу та гіперболу.

10.2.1 Лінія перерізу - трикутник

Січна площина $T(T_2)$ проходить через вершину конуса S ($T \supset S$) та перерізає основу в точках 1, 2 (рис. 81), S_1 та S_2 – твірні конуса.

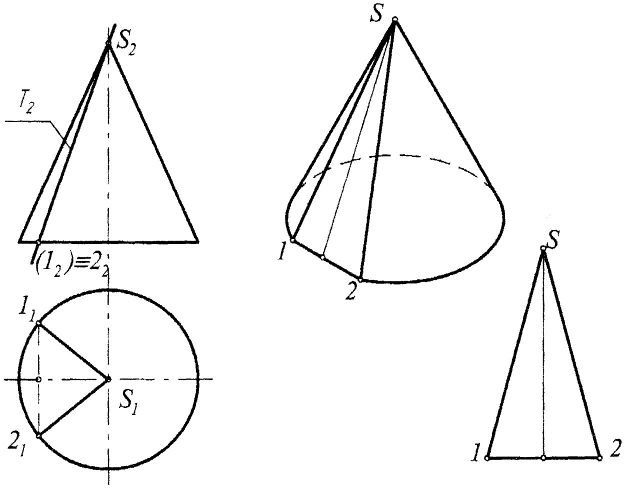


Рисунок 81 – Січна площина перерізає конус по трикутнику

10.2.2 Лінія перерізу – коло

Січна площина $T(T_2)$ перпендикулярна до осі обертання конуса та перерізає конус по колу (рис. 82).

Діаметр кола залежить від конкретного положення січної площини і визначається відстанню між точками 1_1-3_1 або 2_1-4_1.

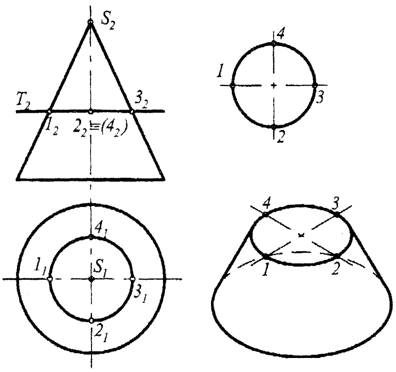


Рисунок 82 – Січна площина перерізає конус по колу

10.2.3 Лінія перерізу – еліпс

Січна площина $T(T_2)$ перерізає всі твірні та неперпендикулярна до осі обертання (рис. 83).

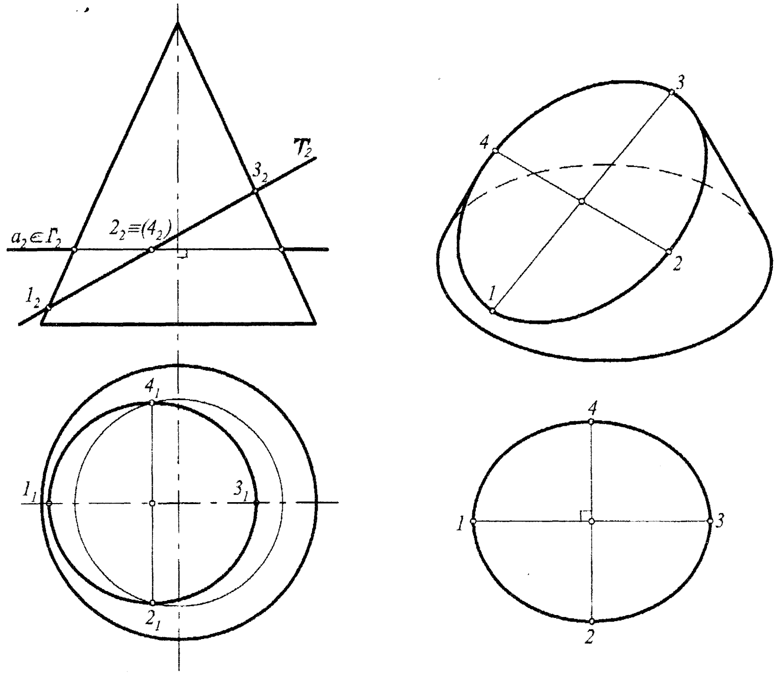


Рисунок 83 – Січна площина перерізає конус по еліпсу

Велика вісь еліпса визначається як відстань між точками 1_2 та 3_2, в яких січна площина перерізає обрисові твірні конуса і розташована паралельно фронтальній площині проекцій Π_2.

На Π_2 мала вісь ділить велику пополам ($2_2 \equiv 4_2$) на Π_2 є фронтально-проекціювальною. Точки малої осі належать паралелі $a(a_2, a_1)$.

10.2.4 Лінія перерізу – парабола

Січна площина $T(T_2)$ перерізає поверхню конуса паралельно обрисовій твірній $l(l_2 \| T_2)$ (рис. 84), результатом перерізу є парабола $b(b_1, b_2)$.

Характерними точками є 5, 1, 9, проекції яких знаходяться безпосередньо. Інші позначені проекції точок будують на Π_1 за допомогою паралелей певного радіусу ($3_2 \equiv 1_2$ паралелі a_2).

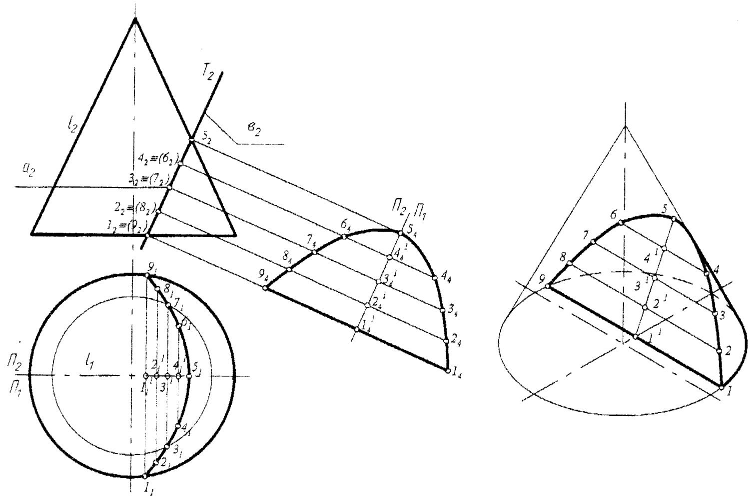


Рисунок 84 – Січна площина перерізає конус по параболі

10.2.5 Лінія перерізу – гіпербола

Січна площина $\sum(\sum_1)$ перерізає поверхню конуса паралельно до осі обертання i, результатом перерізу є гіпербола $b(b_1, b_2)$ (рис. 85).

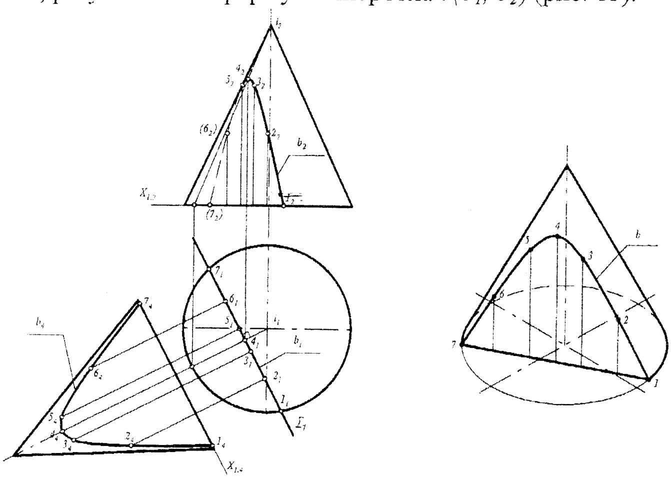


Рисунок 85 – Січна площина перерізає конус по гіперболі

Характерними точками є точка 5 (належить обрисовій твірній), точки 7, 1 (належать основі) та точка 4 (найвища). Положення найвищої точки 4 визначається за перпендикуляром, проведеним від вершини конуса до сліду проекції $\sum$. Проекції точок $2_2 \ldots 6_2$ можна побудувати за допомогою твірних або паралелей.

10.3 Загальні випадки перерізу

Лінію перерізу будь-якої поверхні площиною загального положення рекомендується будувати методом заміни площин проекцій.

Площини проекцій замінюють так, щоб січна площина загального положення у новій системі стала проекціювальною. Проекція шуканої лінії перерізу на новій площині проекцій зобразиться прямою лінією. Отже, задачу у новій системі можна розв'язати так, як і задачу перерізу поверхні площиною окремого положення. Потім розв'язання переноситься на площину, яка замінювалась на нову.

Задача. Побудувати проекції лінії взаємного перерізу конуса обертання Ω з січною площиною θ ($a \cap b$). Визначити натуральну величину фігури перерізу та дати їй назву (рис. 86).

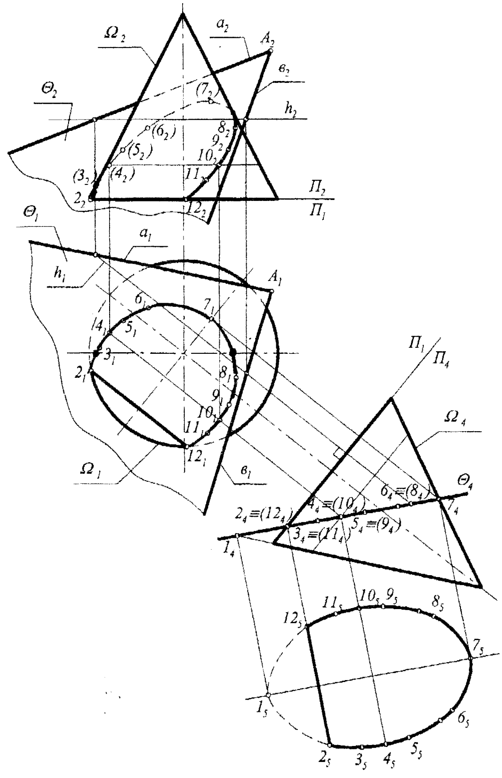


Рисунок 86 – Переріз поверхні січною площиною загального положення

Алгоритм розв′язання задачі

1. Визначаємо, яку площину проекцій слід замінити на нову.

Для цього слід звернути увагу на поверхню, а саме розташування основи поверхні Ω відносно площин проекцій $П_1$ - $П_2$. В даному випадку основа конуса належить площині проекцій $П_1$, значить для збереження стійкості основи горизонтальну площину проекцій $П_1$ залишаємо без змін.

2. Визначаємо розташування нової осі X_{14}.

Вісь X_{14} визначає лінію перерізу двох площин проекцій $П_1$ та $П_4$ ($П_1 \cap П_4 = X_{14}$). Нову площину проекцій $П_4$ слід розташовувати відносно січної площини θ ($a \cap b$) так, щоб площина θ перетворилась у слід-проекцію θ_4 ($\theta_4 \equiv a_4 \equiv b_4$). Для цього необхідно знати, що будь-яка площина може бути перетворена в слід-проекцію (пряму лінію) в тому випадку, якщо лінія рівня цієї площини (h або f) в новій площині проекцій займе проекціювальне положення. Отже, в даному випадку, слід провести горизонталь h (h_1, h_2, де h_2 – вихідна проекція) і відносно горизонтальної проекції горизонталі h_1 ввести нову площину проекцій $П_{14}$ ($X_{14} \perp h_1$).

3. В новій площині проекцій $П_4$ будуємо проекції заданої поверхні Ω (конуса обертання) та площини θ $(a \cap b)$.

При заміні площини проекцій $П_2$ на нову $П_4$ ($П_2 \rightarrow П_4$) залишається сталість координати Z (Z=const).

Для конуса обертання Ω будуємо його вісь, на якій відкладаємо вершину конуса та позначаємо радіус нижньої основи.

Площина θ в новій площині проекцій перетворюється у слід-проекцію θ_4, тобто, січна площина стала проекціювальною, а шукана лінія перерізу на новій площині проекції зображується прямою лінією ($\theta_4 \equiv a_4 \equiv b_4$).

4. Фіксуємо точки перерізу поверхні січною площиною та визначаємо форму лінії перерізу.

Позначаємо проекції точок шуканої лінії:

а) характерні точки, що належать обрису поверхні (7_4, $2_4 \equiv 12_4$);

б) проміжні точки, за допомогою яких можна побудувати графічно всю лінію ($3_4 \equiv 11_4$, $4_4 \equiv 10_4$, $5_4 \equiv 9_4$, $6_4 \equiv 8_4$).

Оскільки січна площина θ перерізає всі твірні конуса Ω, то в перерізі буде еліпс.

5. Будуємо проекції точок перерізу та визначаємо видимість кривої.

Для визначення проекцій точок використовуємо алгоритм побудови точок на поверхні обертання. Проекції точок 2 та 12 належать основі (екватору конуса), тому їх визначаємо безпосередньо за проекційним зв'язком. Проекції решти точок будуємо за допомогою паралелей певного радіуса. Для визначення видимості на $П_2$ на горизонтальній площині проекцій позначаємо характерні точки E та F, що належать головному меридіану поверхні (див. $E_1, F_1 \subset \sum_1$). Тому проекція лінії перерізу 2, E та 12, 11, 10, 9, 8, F на $П_2$ видима, а 3, 4, 5, 6, 7, F – невидима.

6. Будуємо натуральну величину фігури перерізу .

Перерізом в цій задачі є еліпс. Щоб знайти натуральну величину цієї лінії, проведемо нову площину проекцій $П_5$ паралельно сліду-проекції θ_4 ($X_{45} \parallel \theta_4$, $1_5, 7_5 \subset X_{45}$). Симетрично відносно осі X_{45} відкладаємо відстані між точками 2_5 і 12_5, 4_5 і 10_5 (та рештою), з'єднання яких визначає форму еліпса.

10.4 Приклади для закріплення

Задача 1. За наочним зображенням поверхні проаналізуйте отриману лінію перерізу (рис. 87).

Задача відноситься до окремих випадків перерізу:

– площина Т ($Т_2$) є фронтально-проекціювальною, тому на $П_2$ проекція лінії перерізу належить сліду площини $Т_2$;
– поверхня є призмою з горизонтально-проекціювальними ребрами, бічна поверхня якої вироджується в шестикутник, який містить шукану лінію перерізу 1…6;
– лінія перерізу фіксується як результат перерізу сліду-проекції $Т_2$ з відповідними ребрами призми.

Задача 2. Побудуйте проекції лінії перерізу піраміди січною площиною (рис. 87) та визначте натуральну величину фігури перерізу .

В загальному випадку в перерізі піраміди буде многокутник. Кількість його вершин залежить від положення січної площини.

Якщо січна площина перерізає всі ребра, то перерізом буде многокутник з числом вершин, яке дорівнює числу ребер. Тому в результаті перерізу шестикутної піраміди фронтально-проекціювальною площиною ми отримаємо шестикутник, кожна точка якого визначена на відповідному ребрі піраміди.

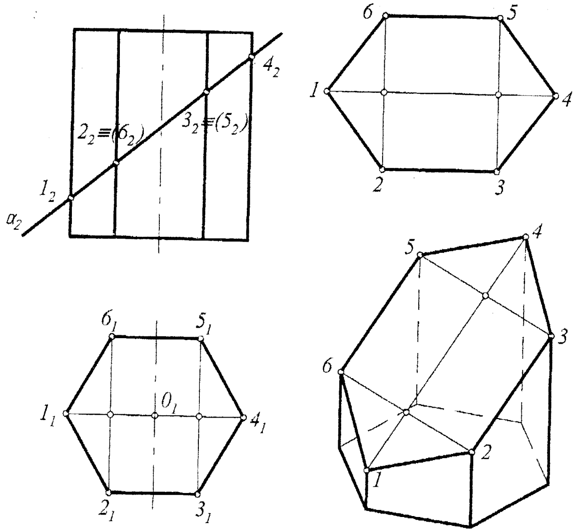


Рисунок 87 – Лінія перерізу належить проекціювальній бічній поверхні призми

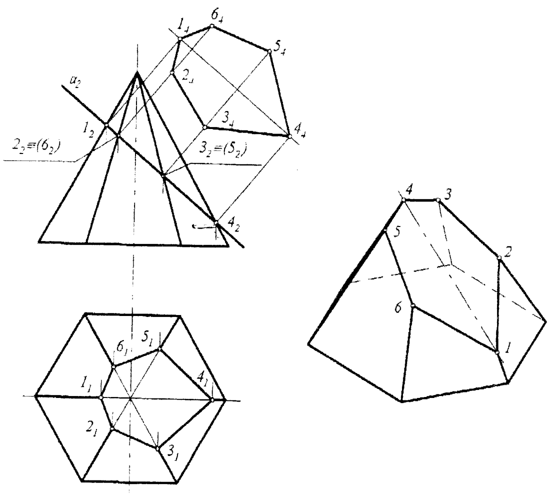


Рисунок 88 – Січна площина перерізає піраміду і в перерізі – многокутник, число сторін якого дорівнює числу бічних ребер піраміди

Для визначення натуральної величини фігури перерізу нова площина проекцій введена паралельно сліду-проекції α_2.

Приклад 2. Побудуйте проекції ліній перерізу піраміди січною площиною (рис. 88) та визначте натуральну величину фігури перерізу. В загальному випадку в перерізі піраміди буде многокутник. Кількість його вершин залежить від положення січної площини.

Якщо січна площина перерізає всі ребра, то перерізом буде многокутник з числом вершин, яке дорівнює числу ребер. Тому в результаті перерізу шестикутної піраміди фронтально-проекціювальною площиною ми отримаємо шестикутник, кожна точка якого визначена на відповідному ребрі піраміди.

Приклад 3. Згідно з виконаними побудовами для визначення проекцій лінії перерізу поверхні площиною, запишіть алгоритм розв'язання цієї задачі (рис. 89).

Криволінійну поверхню перетинає площина загального положення, яка задана двома паралельними прямими σ $(a \parallel b)$. Проекції лінії взаємного перерізу можна визначити в тому разі, якщо застосувати метод перетворень, а саме – заміну площин проекцій.

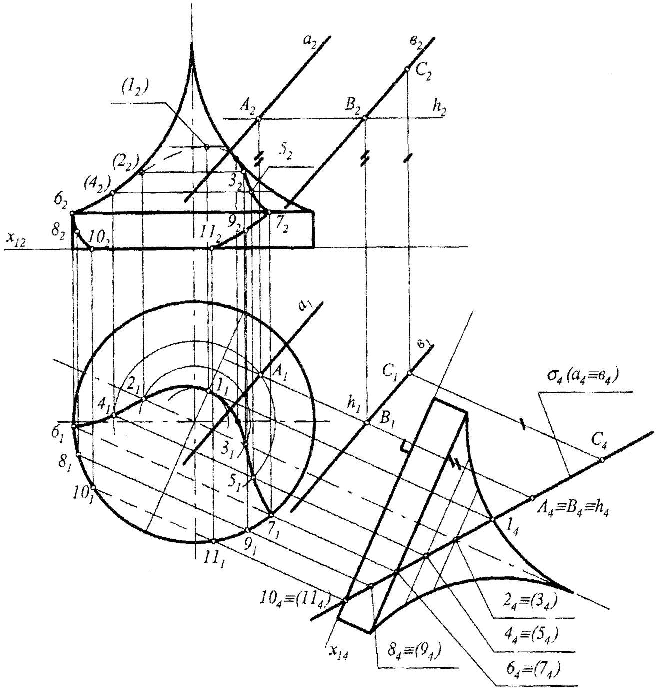


Рисунок 89 – Побудова проекцій ліній взаємного перерізу поверхні січною площиною загального положення

План розв'язання

1. Замінимо площину проекцій $П_2$ на нову $П_4$ ($П_2 \rightarrow П_4$), оскільки основа поверхні належить $П_1$.

2. Визначимо розташування нової осі X_{14} .

Ця вісь розташована перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі h_1 площини σ, тобто в заданій площині попередньо побудованої проекції горизонталі h (h_1,h_2).

3. Будуємо проекції поверхні та проекцію проекціювальної площини $\sigma_4(a_4 \equiv b_4)$ в новій площині проекцій. Для цього враховуємо сталість координати Z (Z=const).

4. Фіксуємо точки перерізу поверхні січною площиною. До характерних точок відносять: т.1 – найвища, т.6, 7 та 10, 11 належать екватору. Точки 1…5 будуються за допомогою паралелей певного радіусу.

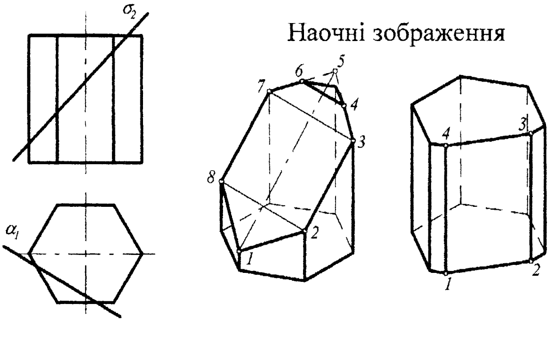
5. Видимість лінії перерізу визначаємо за допомогою характерних ліній – екватора та головного меридіана.

10.6 Теоретичні питання

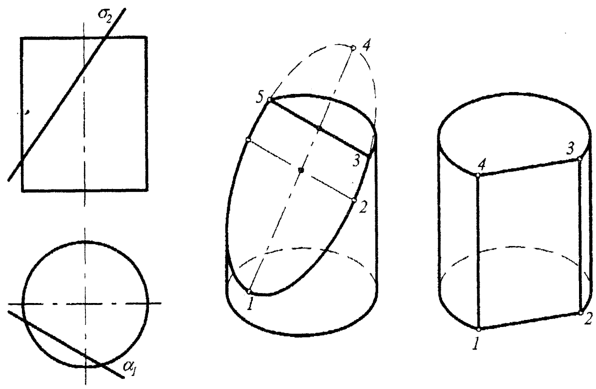
1. Яке положення може займати січна площина при перерізі з поверхнею?
2. Які плоскі фігури можна отримати в перерізі конуса та циліндра січною площиною?
3. Яке положення повинна займати січна площина, щоб стверджувати, що одна із проекцій лінії перерізу поверхні з площиною уже відома?
4. В яких випадках для побудови лінії перерізу площини з поверхнею застосовують методи перетворень ?

10.7 Задачі для самостійної підготовки

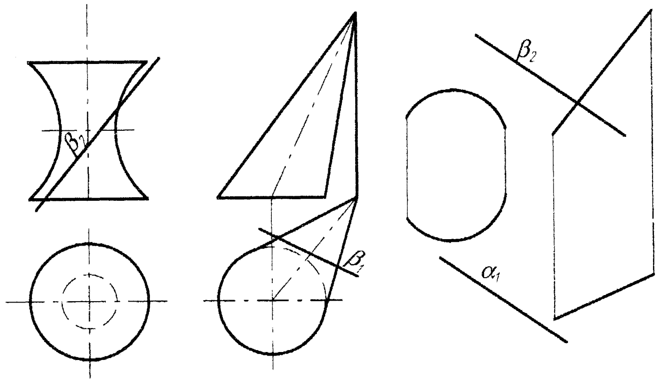
Задача 1. За наочним зображенням показаних поверхонь побудуйте проекції лінії перерізу поверхонь заданими площинами σ та α .



Наочні зображення

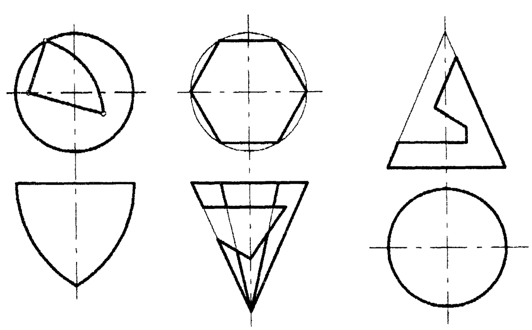


Задача 2. Побудуйте проекцію лінії перерізу поверхні січною площиною β.



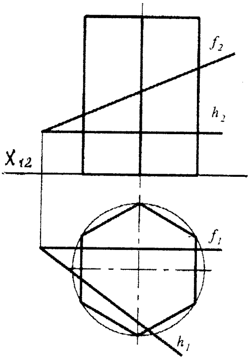
а) б) в)

Задача 3. Побудуйте проекції вирізу на поверхні. Запишіть визначник кожної поверхні.

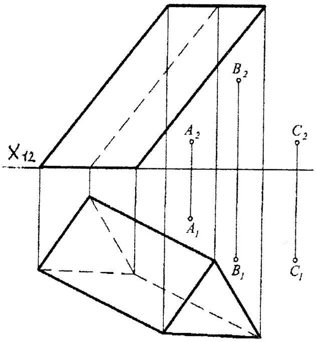


а) б) в)

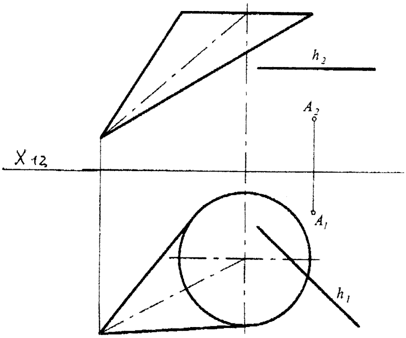
Задача 4 Побудуйте проекції ліній взаємного перетину поверхні січною площиною загального положення.



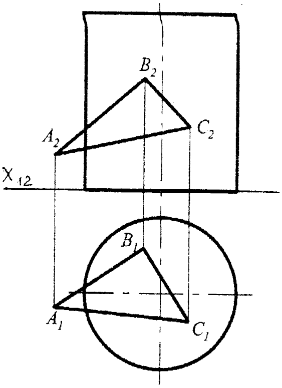
а)



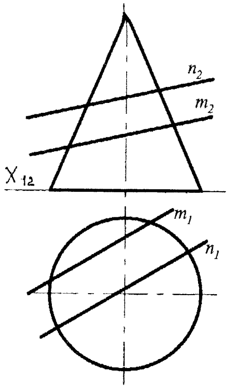
б)



в)



г)



д)

11 Перетин поверхні прямою лінією

При перетині поверхні прямою лінією утворюються точки, які прийнято називати точками перетину (проникнення) поверхні прямою, а пряму - січною прямою або січною.

Кількість точок перетину залежить від характеру заданої поверхні та положення прямої в просторі.

11.1 Окремі випадки перетину

1. Проекціювальна пряма l перетинає поверхню (рис. 90, а, б).

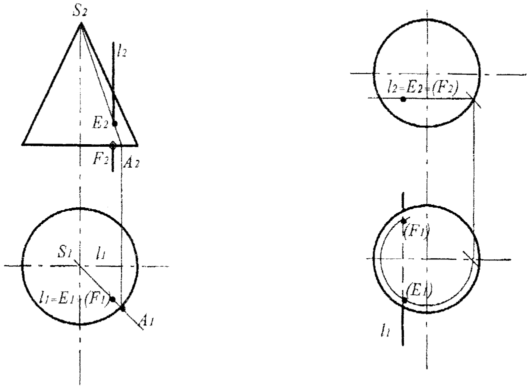
В цьому випадку одна із проекцій точок перетину уже відома і є вихідною, оскільки ці дві точки перетину належать проекціювальній прямій.

Відсутні проекції точок визначаються за алгоритмом побудови точок на поверхнях.

В першому випадку (рис. 90, а) т. E знаходиться на твірній SA конуса обертання, т. F – на основі. Для сфери (рис. 90, б) т. E, F знайдені за допомогою паралелі.

Крім побудов проекцій точок перетину прямої з поверхнею ще визначають видимість проекцій прямої, для чого до уваги слід взяти характерні лінії поверхні (головний меридіан, екватор та інше). Для конуса обертання (рис. 90, а) пряма l знаходиться перед головним меридіаном, тому пряма до т. E – видима. Січна l, яка перетинає поверхню сфери (рис. 90, б) знаходиться нижче екватора, тому дві її точки перетину E,F на $П_1$ невидимі, а проекція l_1 стає видимою за межами обрису сфери (екватора).

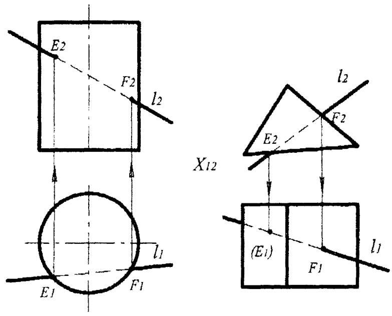
2. Бічна поверхня займає проекціювальне положення (рис. 91, а, б).



а) т. E_1, F_1 – вихідні проекції перетину прямої з поверхнею

б) т. E_2, F_2 – вихідні проекції перетину прямої з поверхнею

Рисунок 90 – Перетин поверхні проекціювальною прямою



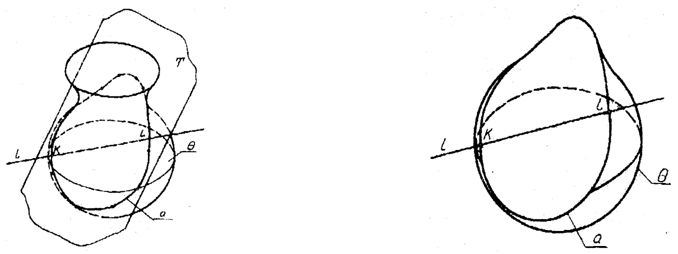
а) т. E_1, F_1 – вихідні проекції б) т. E_2, F_2 – вихідні проекції

Рисунок 91 – Бічна поверхня при перетині з прямою займає проекціювальне положення

11.2 Загальні випадки перетину

Для цього через пряму проводять допоміжну січну площину. Якщо пряма перетинається з гранями або криволінійними поверхнями (тор, сфера, еліпсоїд та ін.), то пряму беруть у проекціювальну площину або площину рівня. Коли задана конічна та циліндрична поверхня, то пряму беруть у площину загального положення.

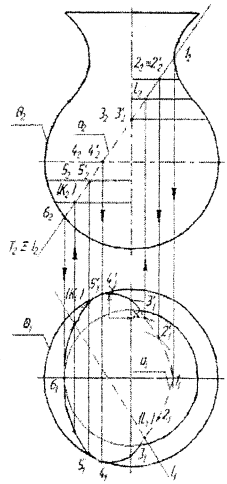
1. В якості допоміжної січної площини через пряму вводять проекціювальну площину. Для деякої криволінійної поверхні Ω більш простого перерізу ніж овал *a* при перетині з прямою *l* досягти неможливо. Тому вводимо фронтально-проекціювальну площину γ і здійснюємо всі побудови, що означені алгоритмом, описаним нижче (рис. 92, а, б).



а) наочно для поверхні Ω введена допоміжна січна площина γ

б) наочно на зрізаній частині поверхні в перерізі овала *a* фіксують точки перетину К, Е

Рисунок 92 – Введення проекціювальної площини γ для визначення точок перетину прямої з поверхнею



в) епюр точок перетину К, Е поверхні Ω з прямою l

Рисунок 92 – Введення проекціювальної площини γ для визначення точок перетину прямої з поверхнею

2. В якості допоміжної січної площини через пряму вводять площину загального положення.

Цю площину рекомендується вводити для конічної та циліндричної поверхонь. Вона перерізає поверхню по прямолінійних твірних. Наступним кроком після введення допоміжної площини загального положення буде перезадання цієї площини слідами (слідом-проекцією).

Для здобуття найпростішого перерізу (чотирикутник або твірні) на циліндричній поверхні допоміжна площина задається прямими, що паралельні твірним циліндра (рис. 93).

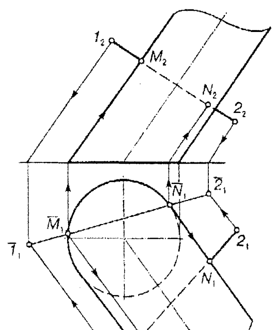


Рисунок 93 – Перетин циліндричної поверхні з прямою

Для здобуття найпростішого перерізу (трикутник або твірні) на конічній поверхні через пряму l введена допоміжна площина, яка проходить через вершину конуса (рис. 94).

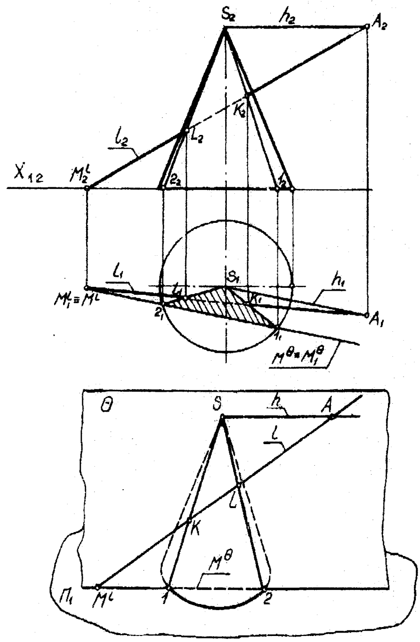


Рисунок 94 - Епюр та наочне зображення перетину конічної поверхні з прямою

Алгоритм побудови точок перетину такий:

- через пряму l проводять допоміжну січну площину γ, переріз від якої буде простим (коло, твірні, трикутник, овал та ін.);
- будують фігуру перерізу як результат перерізу допоміжною січною площиною;
- в отриманому перерізі фіксують точки перетину з заданою прямою;
- визначають видимість.

3. Допоміжну січну площину рівня вводять, застосовуючи методи перетворень.

Методи перетворень дозволяють здобувати більш прості фігури перерізу, що забезпечує менші витрати часу на точні побудови.

Наприклад, коли сферу перетинає пряма загального положення, то проекцією перерізу буде еліпс, а для його побудови слід попередньо побудувати ряд точок. Якщо ввести заміну площини проекцій ($\Pi_2 \rightarrow \Pi_4$)

таким чином, щоб в новій площині проекцій $П_4$ пряма займала положення рівня ($l \parallel П_4$), тоді найпростішим перерізом буде коло (рис. 95). Алгоритм побудови точок перетину такий:

1. Замінимо площину проекцій $П_1$ на нову $П_4$ так, щоб в новій системі площин проекцій $П_2$-$П_4$ пряма займала положення рівня ($X_{24} \parallel l_2$).
2. Проведемо через пряму l допоміжну січну площину ($\sum \perp П_2$).
3. Побудуємо переріз поверхні січною площиною – коло.
4. Зафіксуємо проекції точок перерізу M_4,N_4 та визначимо відсутні проекції – M_2,N_2 та M_1,N_1.
5. Визначимо видимість проекцій точок перетину прямої.

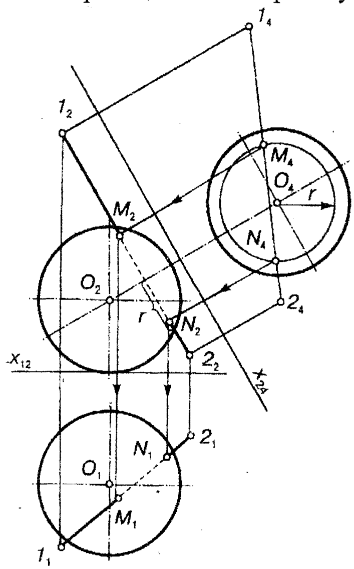


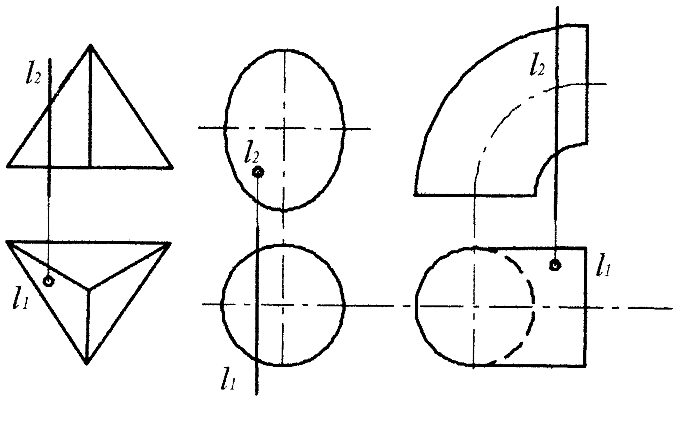
Рисунок 95 – Для визначення точок перетину застосовують методи перетворень

11.3 Задачі для самостійної підготовки

Задача 1. Побудуйте проекції точок перетину проекціювальної прямої з поверхнями обертання окремого виду:

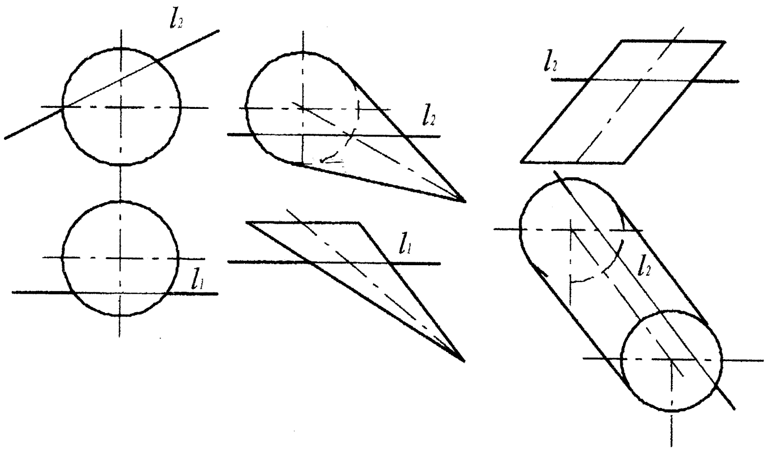
1) конус обертання ($i \perp П_2$) перетинає пряма, яка перпендикулярна до $П_2$;
2) еліпсоїд обертання ($i \perp П_1$) перетинає пряма, яка перпендикулярна до $П_1$;
3) параболоїд обертання ($i \perp П_2$) перетинає пряма, яка перпендикулярна до $П_1$;
4) однополосний гіперболоїд ($i \perp П_1$) перетинає пряма, яка перпенкулярна до $П_2$.

Задача 2. Побудуйте проекції точок перетину з проекціювальною прямою.



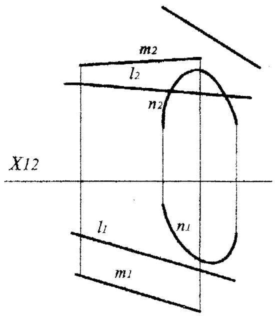
а) б) в)

Задача 3. З'ясуйте, яку з проекцій прямої *l* більш доцільно заключати в площину? Побудуйте проекції точок перетину прямої з поверхнями.

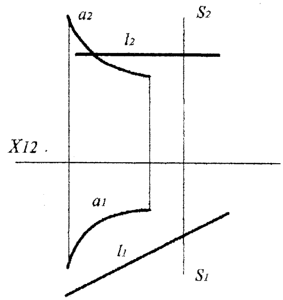


а) б) в)

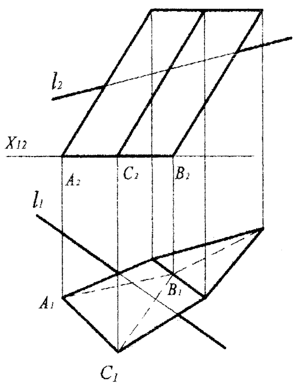
Задача 4. Побудуйте проекції точок перетину прямої l з поверхнею.



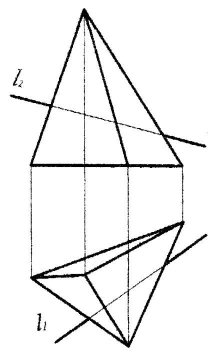
а)



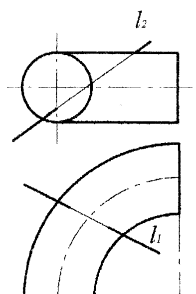
б)



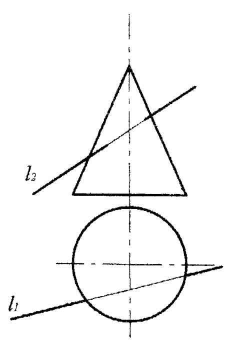
в)



г)



д)



е)

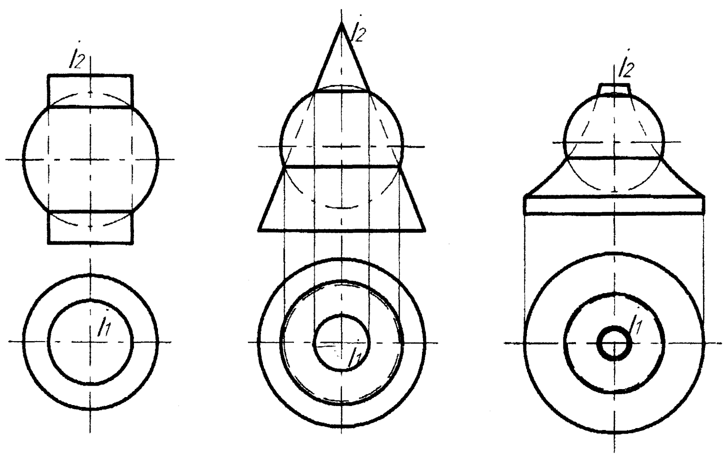
12 Перетин поверхонь

Лінія перетину являє собою геометричне місце точок, які мають подвійну належність. В загальному випадку ця лінія є просторовою кривою, складність якої залежить від складності поверхонь, що перетинаються та їх взаємного положення в просторі. В деяких випадках лінія перетину може мати вигляд відрізків прямих, тобто утримувати в собі плоскі криві.

Лінію перетину поверхонь, як і лінію перетину поверхні площиною, будують за сукупністю точок. В першу чергу звертають увагу на характерні точки обрисів (точки зламів, найбільш високі та низькі) та ті, що розташовані на осях симетрії.

12.1 Окремі випадки перетину

1. Поверхні, які перетинаються, мають спільну вісь обертання *i* (рис. 96).



а) б) в)

Рисунок 96 – Співвісні поверхні

На рис. 96 показані 3 приклади: а) циліндр та сфера, б) конус та сфера, в) поверхня обертання та сфера. Лінією перетину є коло (паралель). Приклади зображень співвісних поверхонь обертання, що мають застосування в машинобудівельному кресленні, показані на рис. 97. Поверхні позначені буквами: Кн. – конус, Ц – циліндр, Сф – сфера. Отримана лінія перетину позначена буквою Ко – коло.

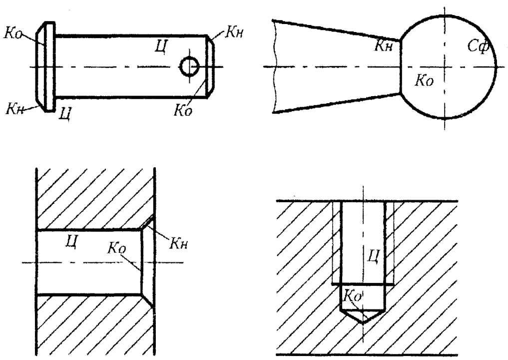


Рисунок 97 – Приклади зображень співвісних поверхонь із практики машинобудівельних креслень

2. Поверхні обертання, які описані навколо спільної для них сфери (рис. 98).

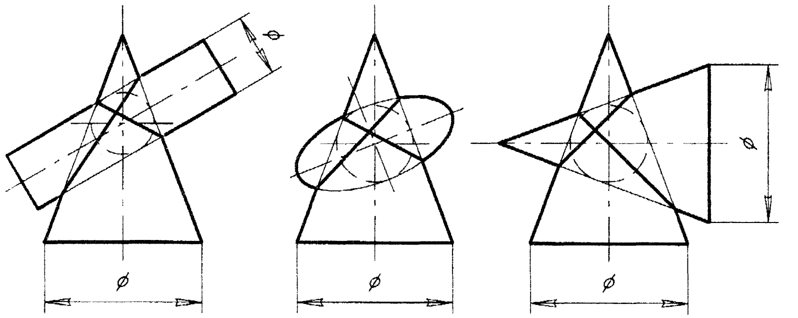


Рисунок 98 – Поверхні, які перетинаються, описані навколо спільної сфери

Цей випадок перетину підпорядкований відомій теоремі Монжа: дві поверхні другого порядку, які описані навколо третьої поверхні другого порядку (сфери), перетинаються між собою по двох кривим другого порядку. Дійсно, згідно рис. 98, перетинаються поверхні обертання: циліндр і конус, еліпсоїд і конус, два конуси. Лініями перетину вказаних поверхонь будуть еліпси.

3. Одна із поверхонь займає проекціювальне положення (рис. 99).

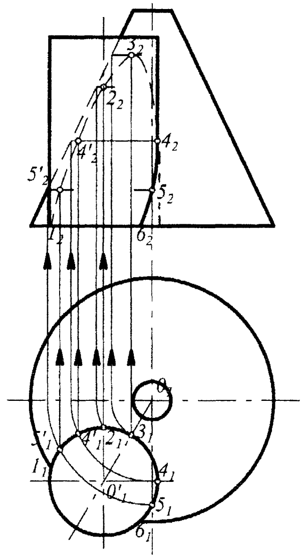


Рисунок 99 – Бічна поверхня циліндра займає проекціювальне положення

Вихідна проекція шуканої лінії перетину збігається з виродженою проекцією проекціювальної поверхні. Друга проекція лінії взаємного перетину визначається за її належністю поверхні загального положення. До характерних точок в даному випадку відносять такі: 1, 6 – найнижчі, 3 – найвища, 4 – та, що визначає видимість поверхонь. Точки 2, 5 є проміжними. Фронтальні проекції точок 1, 6 визначаються безпосередньо (належать основам конуса та циліндра), інші фронтальні проекції точок 2, 3, 4, 5 знаходять за допомогою паралелей на конусі. Видимою частиною є лінія перетину, що складається із точок 6, 5, 4; решту з'єднують невидимим контуром.

12.2 Загальні випадки перетину

В цьому разі застосовують площини-посередники або сфери-посередники. Сутність методу заключається в наступному: для двох поверхонь, які перетинаються, вводять третю таким чином, щоб в перерізі отримати найпростіші лінії (кола, твірні). Ці лінії належать одній і тій же площині (поверхні), і між собою перетинаються в одній або декількох точках. Отримані точки одночасно належать заданим поверхням.

Метод січних площин

Площини-посередники α^1-α^3 вибирають такі, які перетинають задані поверхні по найпростіших за формою лініях (рис. 100). Такими лініями для поверхонь θ (напівсфери) та Ω (конуса) будуть кола *a* та *в*, які дають спільні точки 4, 6.

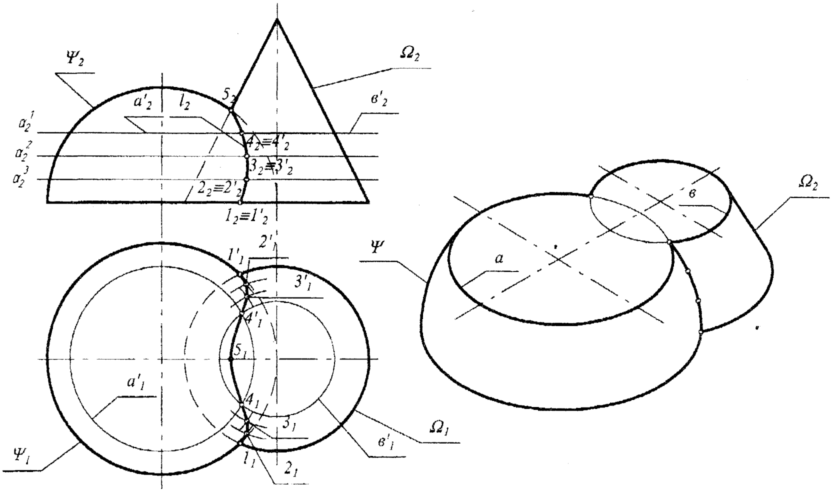


Рисунок 100 – Площини-посередники α^1-α^3 перетинають поверхні по колах *a* та *в*

Аналогічно знаходять точки 3, 7 та 2, 8 лінії перетину. Найвища точка 5 визначається на перетині обрисів поверхонь на Π_2, найнижчі точки 1, 9 фіксують як результат перетину екваторів заданих поверхонь.

Алгоритм графічних побудов

1. Вибрати площини-посередники, які перетинають задані поверхні по найпростіших за формою лініях.
2. Визначити характерні точки лінії перетину:
   а) точки, які належать обрисам проекцій поверхонь;
   б) екстремальні точки (найвищі, найнижчі).
3. Побудувати лінії перетину поверхонь вказаними посередниками і знайти проміжні точки перетину побудованих ліній у кожному посереднику.
4. З’єднати точки з врахуванням видимості частин перетину поверхонь.

Метод сфер

В цьому випадку застосовують концентричні або ексцентричні сфери. Сфери проводять таким чином, щоб в перетині з кожною поверхнею утворювались кола.

При використанні методу концентричних сфер (рис. 101) враховують, що:

1) перетинаються поверхні обертання;
2) осі цих поверхонь перетинаються в одній точці, яка визначає спільний центр сфер;
3) осі поверхонь обертання знаходяться в одній площині симетрії, яка паралельна одній із площин проекцій.

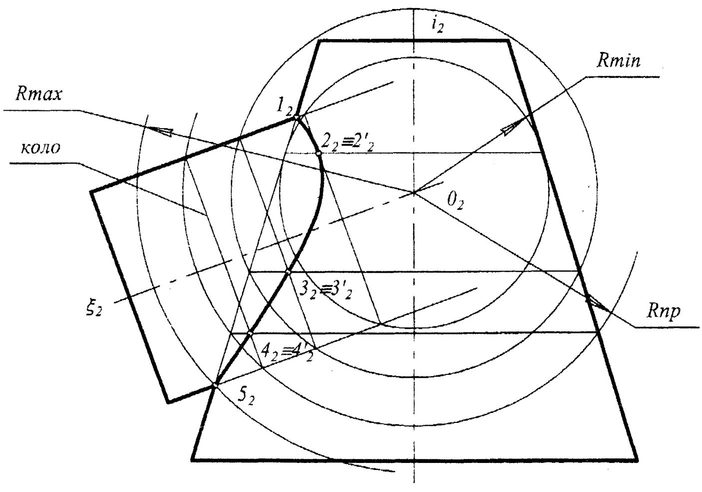


Рисунок 101 – Побудова концентричних сфер

У випадку застосування концентричних січних сфер на перетині прямолінійних осей обертання i, j знаходять спільний центр О, який надалі використовується для проведення концентричних сфер. Сфера мінімального радіуса R_{min} визначає положення найглибших точок 2, 2′ і проводиться таким чином, щоб вона була вписана в одну з поверхонь (конус) та перетинала обрисові твірні іншої поверхні (циліндра). Сфера максимального радіуса R_{max} має проходити через одну із характерних точок 5 (точки перетину обрисових твірних). Всі проміжні сфери мають значення радіуса $R_{min} < R_{пр} < R_{max}$. Кожна введена концентрична сфера співвісна з заданими поверхнями і має найпростіший переріз з ним – коло, перетин яких дає спільні точки, наприклад 4, 4′, лінії взаємного перетину.

Введення декількох концентричних сфер дозволяє побудувати сукупність точок 1; 2, 2′; 3, 3′; 4, 4′; 5, які визначають лінію перетину. Якщо порушується одна з умов використання методу концентричних сфер, то слід проводити посередники-сфери, але з різних центрів. Спосіб, який використовується на підставі таких сфер, має назву ексцентричних сфер (рис. 102).

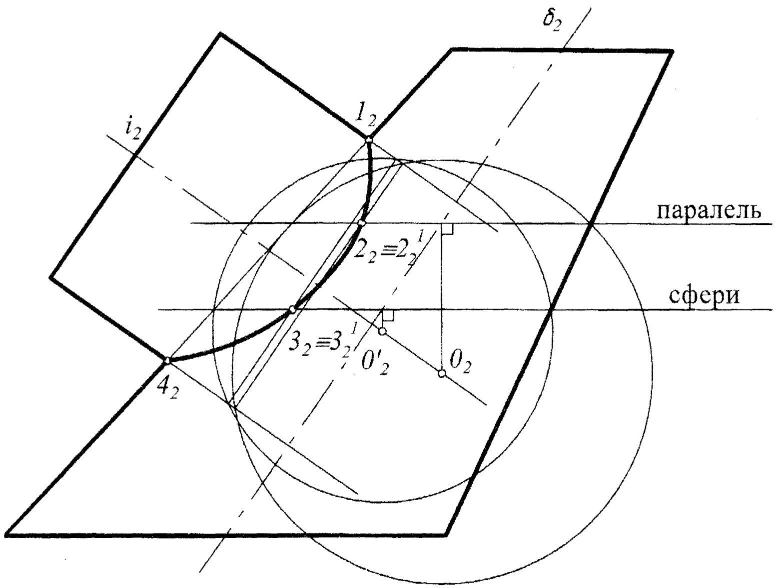


Рисунок 102 – Визначення центрів ексцентричних сфер

У випадку застосування ексцентричних сфер для визначення кожної пари точок, наприклад 2, 2′; 3, 3′, насамперед треба знайти ряд паралельних між собою перерізів, кожний з яких може бути прийнятий за паралель сфери, центр О якої беремо на осі *i* поверхні циліндра.

На відміну від попереднього випадку, для побудови лінії перетину необхідно мати декілька центрів сфер, відносно яких знаходяться фронтальні проекції шуканої лінії взаємного перетину.

На рис. 103 показана побудова фронтальної проекції лінії перетину відкритого тора з конусом обертання, якщо відомо, що обидві поверхні мають загальну площину симетрії, яка паралельна фронтальній площині проекцій Π_2.

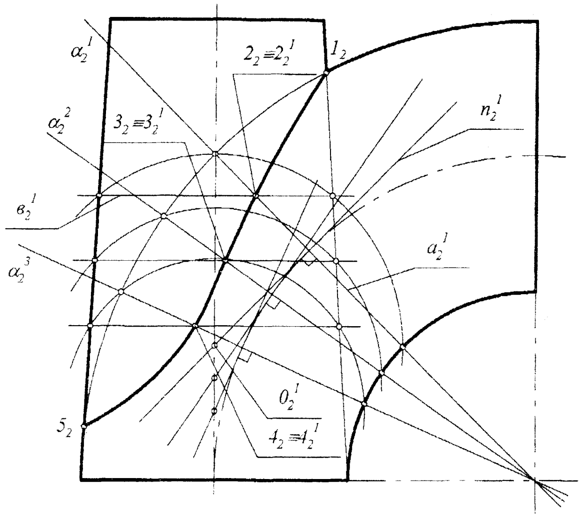


Рисунок 103 – Побудова ексцентричних сфер

Відомо, що будь-яка площина, яка проходить через вісь тора, перетинає його по колу. Тому при введені фронтально-проекціювальної площини $\alpha^1(\alpha^1_2)$ результатом перетину з тором буде коло $a^1(a^1_2)$.

Щоб визначити центр сфери, яка може дати цей же переріз (коло a^1), слід провести дотичну n^1_2 в точці перетину кола a^1_2 з віссю обертання конуса та зафіксувати як центр O^1_2. Аналогічно, за допомогою фронтально-проекціювальних площин α^2, α^3 знаходять ще два центри допоміжних ексцентричних сфер. Кожна точка лінії взаємного перетину отримана як результат перетину двох кіл (для тора – кола *а*, для конуса – кола *в*).

Алгоритм графічних побудов

1. Визначити вид посередника – сферичної поверхні (концентричні або ексцентричні сфери) та знайти центр (центри) сфер. Для цього слід врахувати умови використання концентричних сфер.
2. Визначити характерні точки лінії перетину:
   а) точки, які належать обрисам проекцій поверхонь;
   б) екстремальні точки (найглибші), положення яких знаходять за допомогою сфери мінімального радіусу, яка дотикається до більшої із заданих поверхонь та перетинає меншу.
3. Побудувати лінії перетину поверхонь сферами-посередниками і знайти проміжні точки перетину побудованих ліній у кожному посереднику.
4. З'єднати точки з врахуванням видимості частин перетину поверхонь.

12.3 Теоретичні питання

1. Які поверхні називають співісними?
2. Сутність методу січних площин. В яких випадках застосовують метод січних площин?
3. Сутність методу січних сфер. В яких випадках застосовують цей метод?
4. Умови застосування методу січних сфер.
5. В якому випадку можна застосувати теорему Монжа?

12.4 Задачі для самостійної підготовки

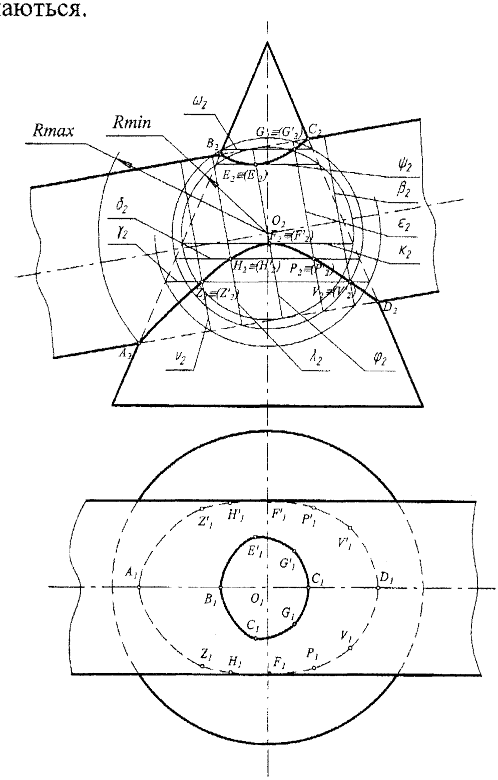
Задача 1. За двома проекціями поверхонь, що перетинаються, визначте:

а) яким методом отримана лінія взаємного перетину двох поверхонь;

б) яка з поверхонь має просторовій отвір (отвори), а яка з них зберігає цілісність;

в) за допомогою яких ліній побудовані прекції точок лінії перетину;

г) які з точок знаходяться на межі видимості двох поверхонь, що перетинаються.



Задача 2. Побудуйте лінію взаємного перетину поверхонь:

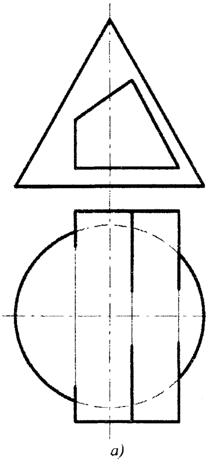
а) двох сфер, відповідно, з діаметрами 40 мм та 25 мм, які мають спільну вісь обертання;

б) двох циліндрів обертання, відповідно, з діаметрами 40 мм та 30 мм, які мають спільну вісь обертання, перпендикулярну до Π_3;

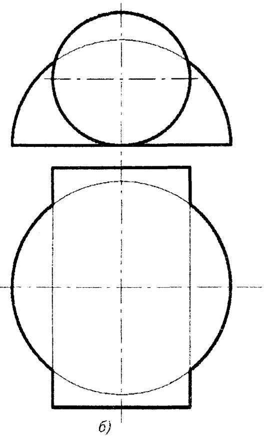
Задача 3. Побудуйте лінію взаємного перетину сфери, в яку повністю врізані такі поверхні:

1) циліндр обертання, який має спільну точку дотику з головним меридіаном сфери;
2) тригранна призма, ребра якої перпендикулярні до Π_2, причому одно з них має спільну точку дотику з екватором сфери.

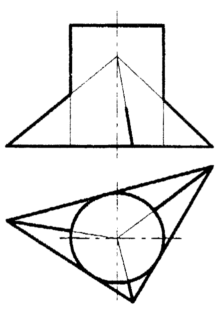
Задача 4. Застосовуючи метод січних площин-посередників, побудуйте лінію взаємного перетину двох поверхонь.



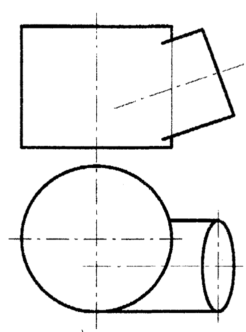
а)



б)

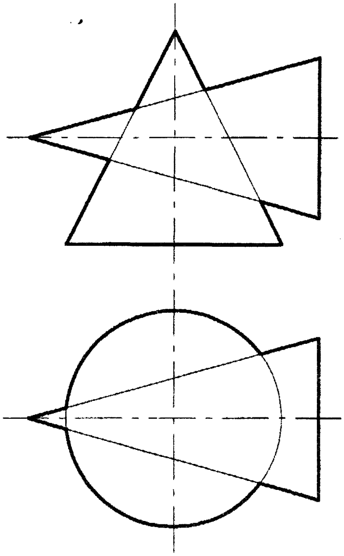


в)

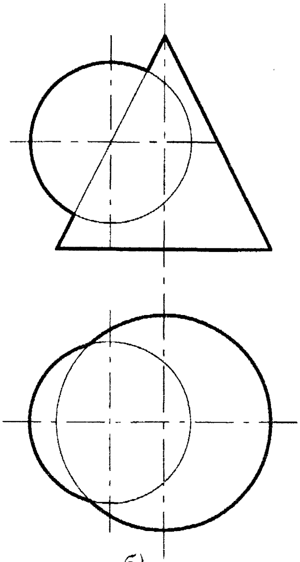


г)

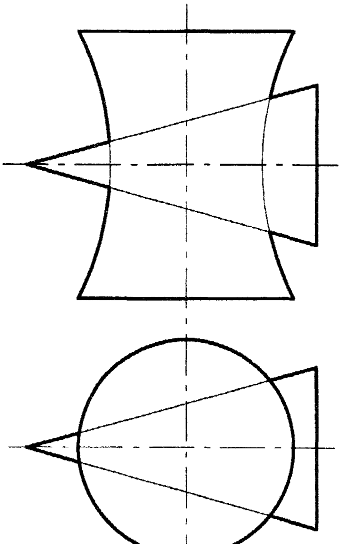
Задача 5. Застосовуючи метод січних сфер-посередників, побудуйте лінію взаємного перетину двох поверхонь.



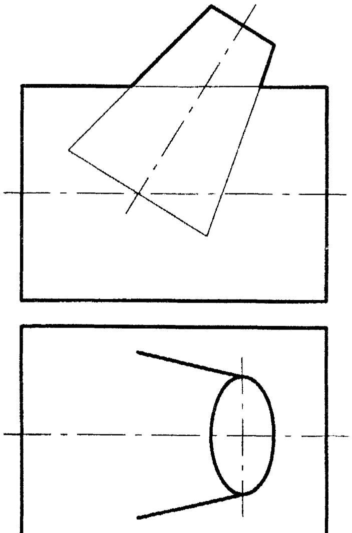
а)



б)

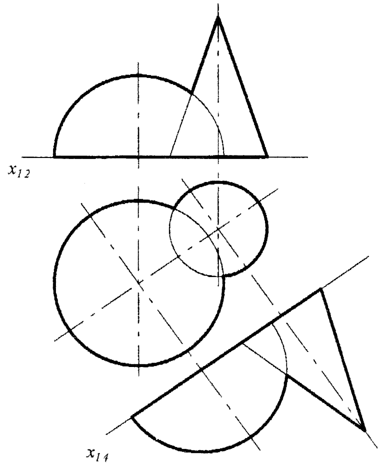


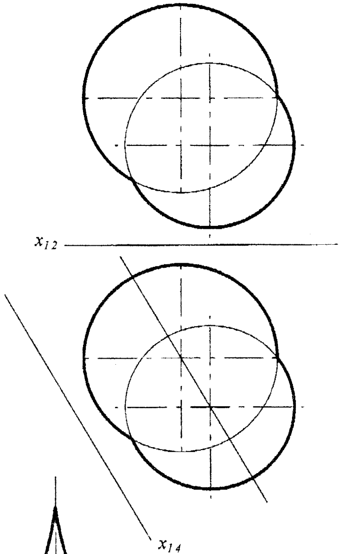
в)

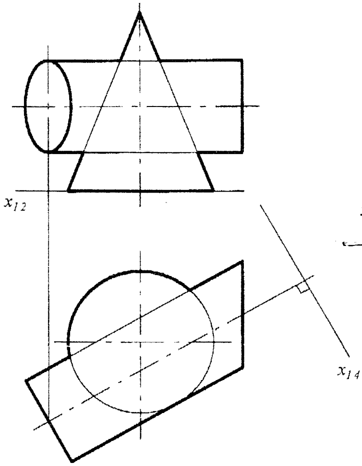


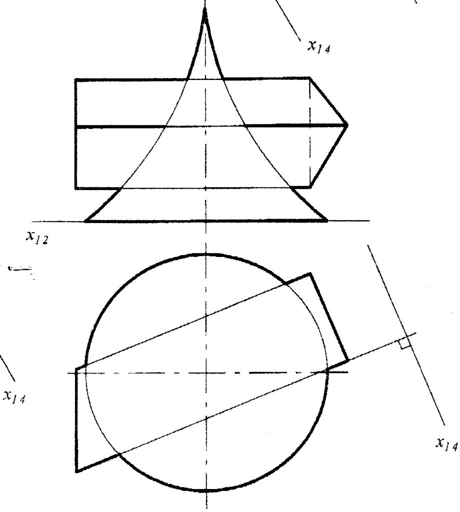
г)

Задача 6. Побудуйте лінію взаємного перетину двох поверхонь із застосуванням методів перетворень.









13 Розгортки поверхонь

Розгорткою поверхні називають плоску фігуру, яка побудована послідовним суміщенням усіх плоских елементів цієї поверхні з однією площиною без утворення розривів і складок.

Розгортки бувають точні та наближені. На кресленнях розгортку позначають знаком ⟳ .

Точні розгортки – це ті, які базуються на точних побудовах, і можуть бути підтверджені математично.

13.1 Спосіб розгортання

Цей спосіб можна застосувати для розгортання циліндра та конуса обертання.

13.1.1 Розгортання циліндра обертання (рис. 104).
Вихідні дані:

R - радіус основи циліндра,

H - висота циліндра.

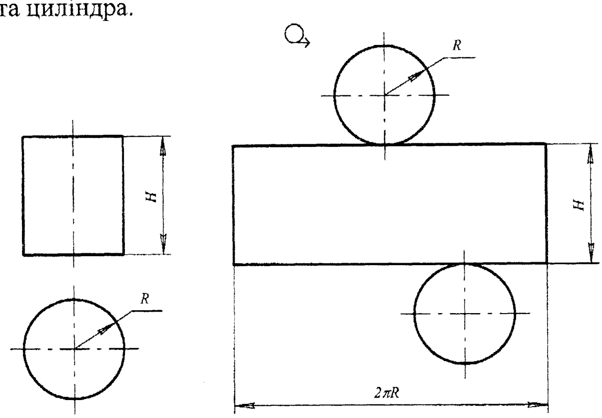


Рисунок 104 – Розгортка циліндра обертання

Довжина розгорнутої бічної поверхні циліндра обертання визначається як довжина кола, що дорівнює $2\pi R$ ($\pi = 3{,}14$).

13.1.2 Розгортання конуса обертання (рис. 105).
Вихідні дані:

R – радіус основи конуса,

L – довжина твірної конуса,

S – вершина конуса.

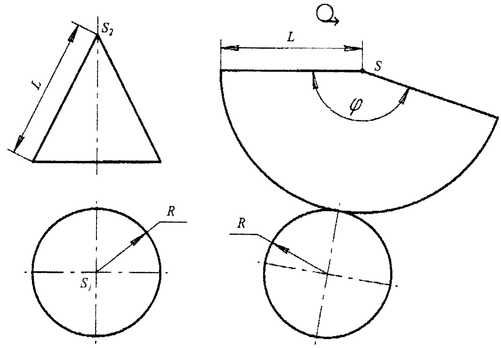


Рисунок 105 – Розгортка конуса обертання

Лінійний кут φ сектора бічної поверхні конуса визначається за формулою $\varphi = (2\pi R)/L$ ($\pi=180^0$).

13.2 Спосіб нормального перерізу

Використовується для розгортання призм (рис. 106). Пересічемо призму горизонтально-проекціювальною площиною $\sum$, що перпендикулярна до ребер, які відображаються на горизонтальній площині проекцій в натуральну величину. Способом заміни площин проекцій знайдемо натуральну величину перерізу $A^0B^0C^0$(рис. 106).

Примітка: Якщо бічні ребра призми відносно площин проекцій $П_1$ та $П_2$ займають загальне положення, то необхідно одним із методів перетворень побудувати призму так, щоб її бічні ребра зайняли положення рівня.

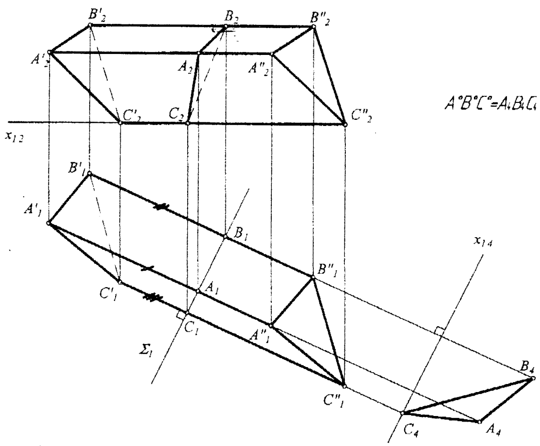


Рисунок 106 – Визначення натуральної величини перерізу $A^0B^0C^0$

Оскільки для побудови бічної поверхні призми треба мати натуральні величини периметра нормального перерізу та бічних ребер призми, то виконаємо послідовно такі побудови.

Вздовж довільної лінії *a* (рис. 107) від деякої точки A послідовно відкладемо відрізки AB, BC, CA, які дорівнюють відповідним сторонам трикутника нормального перерізу $A^0B^0C^0$. Ці величини треба взяти на площині проекцій $П_4$, а саме: A_4B_4, B_4C_4, C_4A_4.

Через точки A, B, C, A проведемо прямі, які перпендикулярні до *a*, та відкладемо на них від точок A, B, C, A відрізки, які дорівнюють відрізкам бічних ребер призми (ребра призми є відрізками рівня, їх горизонтальні проекції дорівнюють н.в. довжин ребер). Отримані точки з'єднаємо відрізками прямих.

Плоска фігура $A'B'C'A'A''C''B''A''$ являє собою розгортку бічної поверхні призми. Повну розгортку призми отримуємо за допомогою розгортання основ призми $A'B'C'$ та $A'B'C'$ (рис. 107).

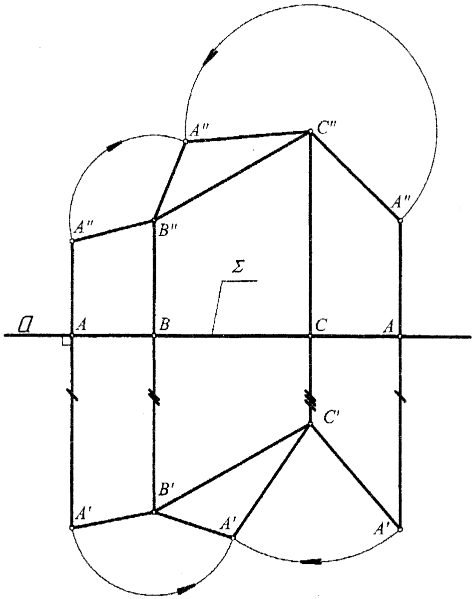


Рисунок 107 – Розгортка призми

13.3 Спосіб тріангуляції (трикутників)

Як точна розгортка може бути ілюстрована розгортка трикутної піраміди (рис. 108).

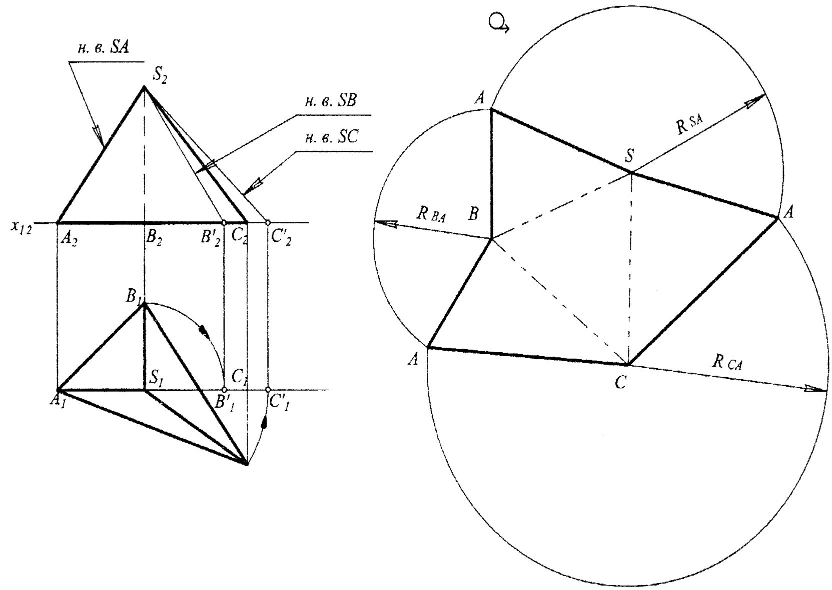


Рисунок 108 – Розгортка піраміди

Для виконання розгортки слід виконати аналіз ребер бічної поверхні та основи піраміди. Основа піраміди АВС займає горизонтальне положення, тобто ребра АВ, ВС, СА на горизонтальну площину проекцій $П_1$ проекціюються в натуральну величину. Ребро AS бічної поверхні піраміди на $П_2$ проекціюється в натуральну величину, інші натуральні величини ребер BS та SC бічної поверхні піраміди знайдені обертанням цих ребер до положення, паралельного фронтальній площині проекцій. Нові положення ребер BS та SC відзначені як натуральні величини $S_2B'_2$ та $S_2C'_2$.

Відносно вибраної точки S проводиться довільний відрізок, який дорівнює SA. Відносно сторони SA на перетині засічок радіусами, які дорівнюють н.в. ребер АВ та SA, отримуємо точку В трикутника SAB. Далі ведеться побудова т.С Δ BSC радіусами, що дорівнюють величинам ребер ВС та SC. Аналогічні побудови виконані для т.А грані SCA, далі на перетині радіусів АВ та СА отримуємо точку А основи піраміди САВ .

13.4 Наближені розгортки

Наближені розгортки будуються вписуванням правильних плоских фігур в бічну поверхню.

Побудова розгортки циліндричної поверхні

Циліндричну поверхню замінюють (апроксимують) призматичною поверхнею, яка вписана в циліндричну. Для цього основу циліндра (коло) ділять на рівне число сторін, наприклад, вісім. Всі твірні циліндричної поверхні паралельні площині проекцій Π_1.

Розгортання бічної поверхні почнемо виконувати відносно обрисової твірної. Для цього подумки розріжемо поверхню циліндра по твірній, потім здійснимо розгортання бічної поверхні відносно твірних в напрямку, перпендикулярному до кожної із них, на величину 1/8 хорди кола основи навколо твірної L. Аналогічні побудови слід здійснити відносно кожної наступної 1/8 точки кола основи циліндра. Всі твірні бічної поверхні циліндра та точки хорд при основах рівні між собою, які потім з'єднані плавною кривою (рис. 109).

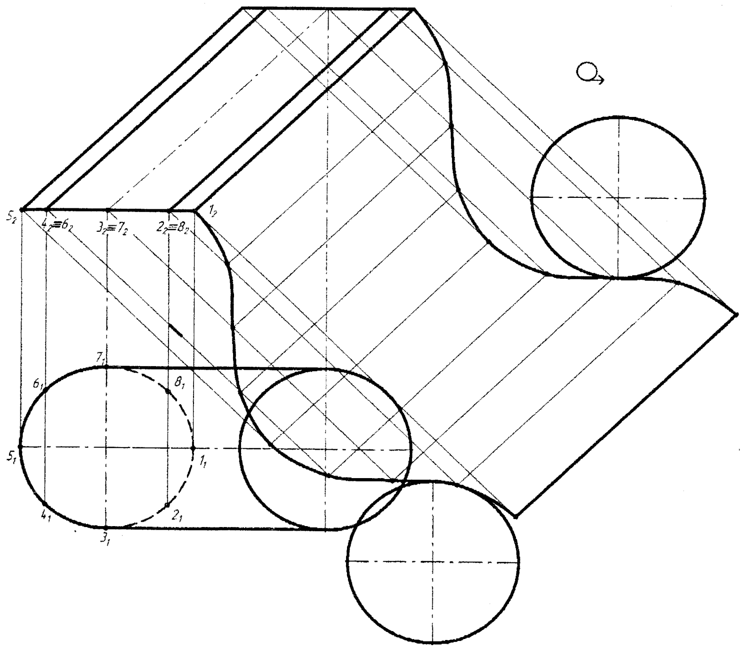


Рисунок 109 – Розгортання бічної поверхні циліндричної поверхні

Розгортка конічної поверхні

Ця задача розв'язується подібно до побудови бічної поверхні піраміди методом трикутника. Для цього бічна конічна поверхня апроксимується вписаною в неї многогранною пірамідальною поверхнею.

На рис. 110 показана розгортка поверхні піраміди, яка вписана в задану конічну поверхню. Чим більше число граней у вписаної піраміди, тим менша різниця між дійсною та наближеною розгортками конічної поверхні. Для побудови розгортки попередньо визначені натуральні величини твірних конічної поверхні методом обертання твірних навколо вершини до положення, паралельного $П_2$. Кожна з точок наступної твірної віддалена на відстань, що дорівнює 1/8 хорди кола (основи конічної поверхні).

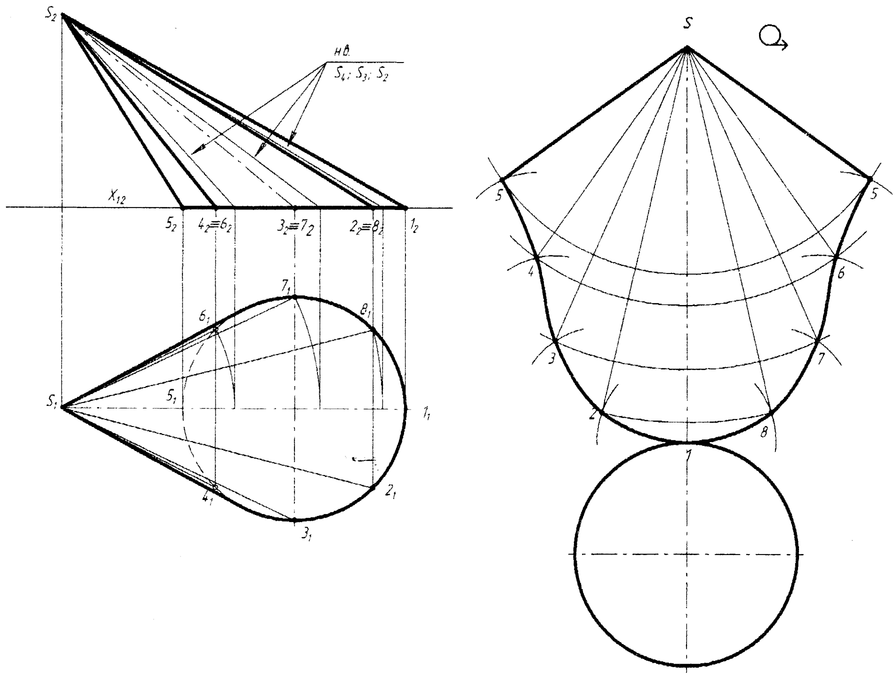


Рисунок 110 – Побудова розгортки конічної поверхні

Розгортка сфери

Спочатку будуємо циліндр (рис. 111), який має внутрішній дотик з головним меридіаном сфери (циліндр займає фронтально-проекціювальне положення). Потім виріжемо із сфери та циліндра двома горизонтально-проекціювальними площинами, які проходять через вертикальну вісь обертання сфери, „пелюстки” з поверхнею циліндричної „пелюстки”.

Для побудови розгортки циліндричної „пелюстки” апроксимуємо його гранною поверхнею. Для цього лінію дотику сфери з циліндром в межах „пелюстки” розділимо на деяку кількість рівних частин та з’єднаємо її хордами. Через отримані т. B_2', C_2', D_2', ... проведемо горизонтальні січні площини рівня. Вони будуть перерізати циліндричну „пелюстку” по частинах твірних — G_1^1, G_1^2, H_1^1, H_1^2, … тобто, елементами циліндричної „пелюстки” будуть рівнобічні трапеції з висотою, яка дорівнює довжині хорди, що з’єднує дві суміжні точки A_2B_2', B_2C_2', ..., а основами — частини твірних циліндра в межах циліндричної „пелюстки”.

Таким чином, хорди проекціюються в натуральну величину на фронтальну площину проекцій; твірні — на горизонтальну. З врахуванням вказаних складових елементів будуємо умовну розгортку „пелюстки”. Повна умовна розгортка поверхні сфери складається із розгорток всіх „пелюсток”, які будуються на сфері. Зрозумілим є і той факт, що точність побудови розгортки сфери залежить від кількості „пелюсток” та висоти елементів (тобто від довжини хорди).

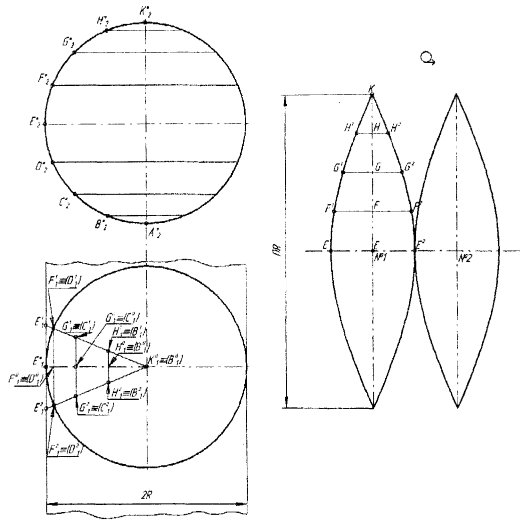


Рисунок 111 – Побудова розгортки циліндричної поверхні

13.5 Теоретичні питання

1. Які поверхні називають розгортними?
2. Які з поверхонь відносять до розгортних? Яку твірну мають ці поверхні?
3. Які з лінійчастих поверхонь відносять до нерозгортних?

Список літератури

1. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985. – 416 с.
2. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1988. – 270 с.
3. Гордон В. О., Иванов Ю. Б., Солнцева Т. Е. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. – М.: Наука, 1973. – 351 с.
4. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1981. – 496 с.
5. Сборник задач по начертательной геометрии с элементами программирования / Под общей ред. Михайленко В. Е. – М.: Высшая школа, 1976. – 222 с.
6. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1978. – 238 с.
7. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.
8. Государственные стандарты единой системы конструкторской документации (ЕСКД).
9. Збірник задач з нарисної геометрії для студентів бакалаврських напрямків 6.0902, 6.0923 спеціальностей 7.090202, 7.090203, 7.090215, 7.092304 ступеневої підготовки спеціалістів з вищою технічною освітою / Буда А.Г. – Вінниця: ВДТУ, І996. – 59 с.
10. Методичні рекомендації з нарисної геометрії для розв'язання позиційних задач до тем "Пряма та площина" для студентів бакалаврських напрямків 6.0902, 6.0923 спеціальностей 7.090202, 7.090203, 7.090215, 7.092304 / Буда А.Г. – Вінниця: ВДТУ, 1997. – 48 с.
11. Методичні рекомендації до виконання графічних завдань з нарисної геометрії та варіанти завдань для студентів бакалаврських напрямків 6.0902 – "Інженерна механіка" 6.0923 – "Зварювання" ступеневої підготовки спеціалістів з вищою технічною освітою / Буда А.Г., Король О.В. – Вінниця: ВДТУ, І996. – 41 с.
12. Буда А.Г., Король О.В., Пащенко В.Н. Проектування форм технічних деталей та аксонометричні проекції. Навчальний посібник.– Вінниця: ВДТУ, 2001. – 92 с.

Навчальне видання

Антоніна Героніївна Буда

ЗБІРНИК ПРИКЛАДІВ ТА ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНИМИ ВІДОМОСТЯМИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ МАШИНОБУДІВНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Збірник задач

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор В.О. Дружиніна

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 25.11.05р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7x42 1/4 Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 8.02
Тираж 75 прим.

Зам. № 2005-198

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі

Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ