В. Ф. ЧУДЕСЕНКО

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ КУРСАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
(Типовые расчеты)

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших
технических учебных заведений

АБОНЕМЕНТ-2

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

517(075)

ББК 22.11
Ч84
УДК 51

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук Б. Ю. Стернин и кафедра общей математики факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова (зав. кафедрой проф. В. А. Ильин)

Чудесенко В. Ф.

Ч84 Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. — М.: Высш. школа, 1983. — 112 с.

25 к.

Пособие написано в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики. Оно содержит типовые расчеты по теории функций комплексного переменного, операционному исчислению, уравнениям математической физики, теории вероятностей и математической статистике. Задачи представлены 31 вариантом. Типовые расчеты содержат также теоретические вопросы, упражнения и справочный материал.

$Ч\frac{1702000000-160}{001(01)-83}$ 57—83

ББК 22.11
514

Валерий Федорович Чудесенко

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ КУРСАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

(типовые расчеты)

Зав. редакцией *Е. С. Гридасова*
Редактор *А. И. Селиверстова*
Младшие редакторы *С. А. Доровских, Н. П. Майкова*
Художественный редактор *В. И. Пономаренко*
Технический редактор *Ю. А. Хорева*
Корректор *Р. К. Косинова*

ИБ № 3933

Изд. № ФМ-734. Сдано в набор 01.11.82. Подп. в печать 22.02.83. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. кн.-журн. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 7 усл. печ. л. 7,25 усл. кр.-отт. 7,03 уч.-изд. л. Тираж 60 000 экз. Зак. № 652. Цена 25 коп.
Издательство «Высшая школа», Москва, К-51. Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.

© Издательство «Высшая школа», 1983

НТБ РПИ
г. Ек...

ПРЕДИСЛОВИЕ

Активная самостоятельная работа студентов — залог успешного овладения изучаемым курсом. Одной из форм активизации учебного процесса по математике служит система типовых расчетов (ТР). Применение системы ТР рекомендовано действующей программой по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов, утвержденной Минвузом СССР в 1979 г.

Основой системы ТР является индивидуализация заданий. Задачи — расчетные задания, входящие в настоящий сборник, представлены каждая 31 вариантом, что позволяет предложить каждому студенту учебной группы индивидуальное задание. Помимо задач типовые расчеты содержат теоретические вопросы и теоретические упражнения, общие для всех студентов. Расчетные задания сопровождаются ссылками на справочный материал, в котором содержатся необходимые теоретические сведения и примеры решения некоторых задач.

Система ТР не исключает традиционных текущих заданий. Поскольку не все разделы спецкурсов отражены в книге в равной мере, важно, чтобы ТР и текущие домашние задания дополняли друг друга.

Расчетные задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса. Теоретические вопросы прорабатываются по лекционному материалу и обсуждаются на аудиторных занятиях. Теоретические упражнения и задачи решаются студентами самостоятельно и сдаются на проверку в указанные преподавателем сроки. Решение каждой задачи приводится на отдельном листе стандартного формата. Неверно решенные примеры возвращаются на доработку с указанием характера ошибки. В специальном журнале преподаватель фиксирует сданные на проверку, а также зачтенные задачи и упражнения.

Защита ТР осуществляется в письменной форме по специальным билетам в часы занятий. Во время защиты проверяется умение студента правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решение теоретических упражнений и задач, решать задачи аналогичного типа. Как правило, защита занимает один учебный час. Срок защиты устанавливается учебным графиком. Повторная защита проводится вне сетки расписания в письменной форме или путем собеседования (по усмотрению преподавателя). Промежуток времени до повторной защиты не должен превышать одной недели.

Каждый из предлагаемых в настоящей книге ТР обеспечивает семестровый спецкурс. В том случае, когда соответствующий раздел излагается в меньшем объеме, ТР подлежит сокращению.

Предлагаемые ТР составлены на кафедре высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой проф. С. И. Похожаев). Существенный вклад в их разработку принадлежит В. Н. Агееву, И. Ф. Бывшевой, А. П. Васину, В. В. Жаринову, А. И. Кириллову, Ю. Н. Киселеву, Л. А. Кузнецову, Н. К. Нарышкиной, В. П. Пикулину, Р. Ф. Салихджанову, А. Г. Черных. Материалы раздела III подготовил И. М. Петрушко.

Автор благодарен коллегам за предоставленные материалы, рецензентам за полезные замечания, С. И. Похожаеву за внимание к работе над сборником и содействие в его подготовке.

Книга представляет собой первую попытку обеспечить учебным пособием систему типовых расчетов по специальным курсам высшей математики. Все замечания и советы будут приняты с благодарностью.

Автор

I. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1.1. Извлечение корня. *Корень n-й степени из комплексного числа z* имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad \varphi=\arg z,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

1.2. Элементарные функции комплексного переменного. Значения *показательной функции* комплексного переменного $z=x+iy$ вычисляются по формуле

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{1}$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2},$$

где z_1 и z_2 — любые комплексные числа;

$$e^{z+2\pi ki}=e^z,\ k=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \text{т. е. } e^z$$

является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ выражаются через показательную:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Функции $w=\sin z$ и $w=\cos z$ — периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z=k\pi$ и $z=\pi/2+k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ соответственно.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все известные формулы тригонометрии.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth}=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Имеют место тождества $\operatorname{sh} z=-i\sin iz$, $\operatorname{ch} z=\cos iz$.

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Значение функции, которое получается при $k=0$, называется *главным значением* и обозначается

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z.$$

Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n=n\operatorname{Ln} z+2\pi ki,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \operatorname{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z.$$

Функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как *обратные* к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ соответственно. Так, если $z=\cos w$, то w называется арккосинусом числа z и обозначается $w=\operatorname{Arccos} z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\quad \operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\quad \operatorname{Arcctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}.$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы ($\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$); они называются *главными значениями.*

Общая степенная функция $w=z^\alpha$, где α — любое комплексное число, определяется соотношением

$$z^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln} z},\ z\neq0.$$

Эта функция многозначная; значение $z^\alpha=e^{\alpha\ln z}$ называется *главным значением.*

Общая показательная функция $w=\alpha^z$, $\alpha\neq0$ определяется равенством

$$\alpha^z=e^{z\operatorname{Ln}\alpha}.$$

Главное значение этой функции $\alpha^z=e^{z\ln\alpha}$.

1.3. Кривые на комплексной плоскости. Уравнение вида $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид

$$x=x(t),\ y=y(t).$$

Исключением параметра t из этих уравнений получаем уравнение кривой в виде $F(x,\ y)=0$.

1.4. Дифференцирование функций комплексного переменного, условия Коши — Римана. Пусть функция $w=f(z)$ определена в некоторой области G комплексного переменного z. Пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области G. Введем обозначения $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$, $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$.

Функция $w=f(z)$, называется дифференцируемой в точке $z\in G$, если отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при $\Delta z\to0$. Этот предел называется производной функции $w=f(z)$ и обозначается $f'(z)$ $\left(\text{или } \frac{dw}{dz}\right)$, $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$.

Пусть $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, тогда в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

называемые *условиями Коши — Римана.*

Обратно, если в некоторой точке $(x,\ y)$ выполняются условия Коши — Римана и, кроме того, функции $u=u(x,\ y)$ и $v=v(x,\ y)$ дифференцируемы как функции двух действительных переменных, то функция $f(z)=u+iv$ является дифференцируемой в точке $z=x+iy$ как функция комплексного переменного z.

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в данной точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она аналитична в каждой точке $z\in G$.

Производная аналитической функции вычисляется по формулам

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пользуясь условиями Коши — Римана, можно восстановить аналитическую функцию $w=f(z)$, если известна ее действительная часть $u=u(x, y)$ или мнимая часть $v=v(x, y)$ и, кроме того, задано значение $f(z_0)$ функции в некоторой точке z_0.

Пусть, например, $u=e^x\cos y$, $f(0)=1$. Определить аналитическую функцию $f(z)$.

В силу условий (2) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y. \qquad (4)$$

Интегрируя уравнение (4) по переменной x, находим мнимую часть

$$v=e^x\sin y+C(y). \qquad (5)$$

Слагаемое $C(y)$ представляет собой постоянную (относительно x) интегрирования. Дифференцируя (5) по y и сопоставляя результат с (3), получаем $C'(y)=0$, откуда $C(y)=C$. Таким образом, имеем

$$v=e^x\sin y+C \text{ и } f(z)=u+iv=e^x(\cos y+i\sin y)+C;$$

с учетом формулы (1) — $f(z)=e^z+C$. Учтем дополнительное условие $f(0)=1$, откуда $C=0$; итак, $f(z)=e^z$.

1.5. Интегрирование функций комплексного переменного. Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена и непрерывна в области G, а Γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G; $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$, где $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ — действительные функции переменных x и y. Вычисление интеграла от функции $w=f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению криволинейных интегралов по координатам:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=\int\limits_\Gamma u\,dx-v\,dy+i\int\limits_\Gamma v\,dx+u\,dy.$$

Если кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям $t=\alpha$ и $t=\beta$, то

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=\int\limits_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \text{ где } z(t)=x(t)+iy(t).$$

Если $w=f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области G, то интеграл не зависит от пути интегрирования (зависит только от начальной и конечной точек). В этом случае для вычисления интеграла применяется *формула Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1),$$

где $\Phi(z)$ — какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т. е. $\Phi'(z)=f(z)$ в области G.

Если функция $w=f(z)$ является аналитической в области G, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Γ, и на самом контуре, то

$$\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz=0 \qquad \text{(теорема Коши)}$$

и для любой внутренней точки $z_0 \in G$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \qquad (\textit{интегральная формула Коши}).$$

1.6. Ряд Лорана. Функция $w=f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $\rho<|z-z_0|<R$, разлагается в этом кольце в *ряд Лорана*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-z_0)^k=\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k(z-z_0)^k+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k, \qquad (6)$$

коэффициенты находятся по формулам

$$C_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}, \quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots \qquad (7)$$

Здесь Γ — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри заданного кольца. Разложение в ряд Лорана единственно.

В формуле (6) ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k(z-z_0)^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k$$

называются соответственно *главной частью ряда Лорана* и *правильной частью ряда Лорана*.

На практике для нахождения коэффициентов C_k, если это возможно, используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Для примера разложим в ряд Лорана с центром в точке $z_0=0$ функцию $f(z)=z^3e^{1/z}$.

Функция $z^3e^{1/z}$ аналитична в кольце $0<|z|<\infty$, следовательно, разложима в нем в ряд Лорана. Воспользуемся разложением показательной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta_0=0$:

$$e^{\zeta}=1+\zeta+\frac{\zeta^2}{2!}+\dots+\frac{\zeta^k}{k!}+\dots$$

и положим $\zeta=1/z$, тогда

$$f(z)=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\dots+\frac{1}{z^k k!}+\dots\right)=$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{z4!}+\dots+\frac{1}{z^{k-3}k!}+\dots$$

В силу единственности ряда Лорана полученное разложение функции $f(z)$ по степеням z является рядом Лорана для функции $f(z)=z^3e^{1/z}$ в кольце $0<|z|<\infty$.

1.7. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $w=f(z)$, если $f(z)$ — однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0<|z-z_0|<\delta$, кроме самой точки z_0.*

Функцию $w=f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана (6), сходящийся в кольце $0<|z-z_0|<\delta$. При этом возможны три различных случая, когда ряд Лорана: 1) не содержит членов с отрицательными степенями разности $z-z_0$, т. е. $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k$. В этом случае z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $w=f(z)$; 2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, т. е. $f(z)=$

$= \sum\limits_{k=-n}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$, причем $C_{-n} \neq 0$. В этом случае z_0 называется *полюсом* порядка n функции $w=f(z)$; 3) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $z-z_0$, т. е. $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$. В этом случае z_0 называется *существенно особой точкой* функции $w=f(z)$.

При определении характера изолированной особой точки используются следующие утверждения.

1. Для того чтобы точка z_0 являлась устранимой особой точкой аналитической функции $w=f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0$, причем $|C_0| < \infty$.

2. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом аналитической функции $w=f(z)$, необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

2'. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \varphi(z)/(z-z_0)^n$, где $\varphi(z)$ — функция аналитическая в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

2''. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z) = \lambda(z)/\mu(z)$, где $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ — функции аналитические в точке z_0.

Если числитель $\lambda(z)$ и все производные до $k-1$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0$, знаменатель $\mu(z)$ и все производные до $l-1$ порядка включительно также равны нулю в точке z_0, $\mu^{(l)}(z_0) \neq 0$, то при $l > k$ точка z_0 является полюсом порядка $n = l-k$ аналитической функции $f(z)$. (Если $l \leqslant k$, то точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$.) В частном случае, при $k=0$, $l=1$ имеем: если $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$, то z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$.

3. Пусть при $z \to z_0$ аналитическая функция $w=f(z)$ не имеет пределов ни конечного, ни бесконечного. Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $w=f(z)$.

1.8. Вычеты. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $w=f(z)$. *Вычетом функции* $f(z)$ *в точке* z_0 называется число, обозначаемое символом $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz \tag{8}$$

(другие обозначения: $\operatorname{res} f(z_0)$, $\operatorname{res}[f(z), z_0]$). Замкнутый контур интегрирования γ лежит в области аналитичности функции $f(z)$ и не содержит внутри других особых точек функции $f(z)$, кроме z_0.

Сопоставление формул (7) и (8) показывает, что вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = C_{-1}. \tag{9}$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе n-го порядка вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n];$$

при $n=1$

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z-z_0)].$$

Если функция $w=f(z)$ в окрестности точки z_0 представляется как частное двух аналитических функций, $f(z) = \lambda(z)/\mu(z)$, причем $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$,

$\mu'(z_0) \neq 0$ (в этом случае z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$), то

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lambda(z_0)/\mu'(z_0).$$

Если точка z_0 есть существенно особая точка функции $w = f(z)$, то вычет вычисляется по формуле (9).

Основная теорема Коши о вычетах. *Если функция $w = f(z)$ является аналитической на границе Γ области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z). \tag{10}$$

1.9. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geqslant k+2$, т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{m} \operatorname{res}_{z_m} R(z),$$

здесь сумма вычетов функции $R(z) = P_k(z)/Q_l(z)$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

1.10. Вычисление несобственных интегралов специального вида. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, где $P_k(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geqslant k+1$ (т. е. $R(x)$ — правильная рациональная дробь), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x\, dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{m} \operatorname{res}_{z_m} R(z)\, e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x\, dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{m} \operatorname{res}_{z_m} R(z)\, e^{i\lambda z}\right\}, \quad \lambda > 0,$$

где сумма вычетов функции $R(z)\, e^{i\lambda z}$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

1.11. Вычисление определенных интегралов специального вида. Пусть R — рациональная функция $\cos t$ и $\sin t$, непрерывная внутри промежутка интегрирования. Полагаем $z = e^{it}$, тогда

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dt = \frac{dz}{iz};$$

имеем

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \oint_{|z|=1} F(z)\, dz, \tag{11}$$

где путь интегрирования — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Контурный интеграл в правой части равенства (11) вычисляется по формуле (10), где сумма вычетов функции $F(z)$ берется по всем особым точкам, лежащим в области $|z| < 1$.

1.12. Преобразование Лапласа. *Функцией-оригиналом* называется функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям: 1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t; 2) для всех отрицательных t $f(t) = 0$; 3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные M и σ_0, что для всех t $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$.

Изображением функции $f(t)$ *по Лапласу* называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=\sigma+i\tau$, определяемая равенством

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt;$$

обозначение: $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Свойства

1°. Линейность: *для любых комплексных постоянных* C_1 *и* C_2

$$C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t) \risingdotseq C_1 F_1(p)+C_2 F_2(p).$$

2°. Формула подобия: для любого постоянного $\omega > 0$

$$f(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{\omega}\, F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3°. Дифференцирование оригинала: *если функции* $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ *являются функциями-оригиналами, то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

Величина $f^{(k)}(0)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, понимается как $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

4°. Дифференцирование изображения: $F'(p) \risingdotseq -tf(t)$.

5°. Интегрирование оригинала: $\displaystyle\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

6°. Интегрирование изображения: *если* $\dfrac{f(t)}{t}$ *является функцией-оригиналом, то*

$$\int\limits_p^{\infty} F(p)\,dp \risingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

7°. Формула смещения: *для любого комплексного* λ

$$f(t)\,e^{-\lambda t} \risingdotseq F(p+\lambda).$$

8°. Формула запаздывания: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$, $\tau > 0$.

9°. Формула умножения изображений:

$$F_1(p)\,F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau. \qquad (12)$$

Интеграл в (12) называется *сверткой функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

Отыскание оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ наиболее широко применяются следующие приемы:

1) если $F(p)$ есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства 1^0—9^0 преобразования Лапласа;

2) используют *формулу разложения*, согласно которой при некоторых достаточно общих условиях оригиналом для $F(p)$ служит функция

$$f(t)=\sum_k \operatorname{res}_{p_k}[F(p)\ e^{pt}],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

1.13. Формулы соответствия. Широко применяются следующие табличные соотношения:

$$1 \risingdotseq 1/p;\ \ e^{at} \risingdotseq 1/(p-a);\ \ \sin\omega t \risingdotseq \omega/(p^2+\omega^2);\ \cos\omega t \risingdotseq p/(p^2+\omega^2);$$
$$\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \omega/(p^2-\omega^2);\ \ \operatorname{ch}\omega t \risingdotseq p/(p^2-\omega^2);\ \ t^n \risingdotseq n!/p^{n+1}.$$

Левые части операционных соотношений предполагаются домноженными на функцию $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ которая для сокращения записи, как правило, опускается.

1.14. Изображение кусочно-линейной функции. Примерный вид графика кусочно-линейной (полигональной) функции представлен на рис. 1. Введем следующие обозначения:

τ_k — точки разрыва функций $f(t)$ или $f'(t)$;

$\alpha_k=a_k-b_k$ — скачки функций в узлах «стыка»;

$\beta_k=\operatorname{tg}\gamma_k-\operatorname{tg}\delta_k$ — скачки производной $f'(t)$ в узлах «стыка».

Изображение полигональной функции имеет вид

$$F(p)=\sum_k e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right).$$

1.15. Задача Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Решение линейных дифференциальных уравнений *операционным методом* предполагает три этапа: 1) переход от исходных функций к их изображениям по Лапласу, при этом дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое относительно изображения искомой функции; 2) решение полученного алгебраического уравнения; 3) получение искомого решения по его изображению.

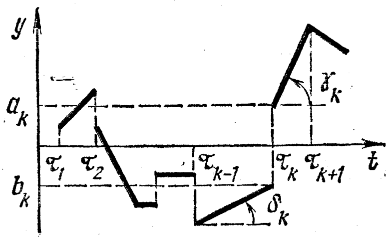


рис. 1.

Решим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$x'-x=1 \tag{13}$$

при начальном условии $x(0)=1$.

Операционный метод решения такой задачи состоит в том, что искомую функцию и правую часть дифференциального уравнения считаем оригиналами и переходим от уравнения, связывающего оригиналы, к уравнению, связывающему их изображения. Для этого воспользуемся формулой дифференцирования оригинала

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Применяя свойство линейности, перейдем в уравнении (13) от оригиналов к изображениям:

$$[pX(p) - 1] - X(p) = 1/p.$$

Решим полученное уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $X(p)$:

$$X(p) = 2/(p-1) - 1/p.$$

Осталось по известному изображению $X(p)$ найти соответствующий ему оригинал $x(t)$. Используя свойство линейности преобразования Лапласа и табличные операционные соотношения (см. п. 1.13), получаем $x(t) = 2e^t - 1$. Это и есть искомое решение задачи Коши.

Аналогично решаются системы линейных дифференциальных уравнений.

1.16. Формула Дюамеля. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\{x(t)\} = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \tag{14}$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{15}$$

(Заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями.)

Допустим, что известно решение уравнения $L\{x(t)\} = 1$ (с той же левой частью и правой частью, равной единице) при условиях (15). Обозначим его $x_1(t)$. Тогда решение $x(t)$ задачи (14)—(15) можно выразить через $x_1(t)$ и $f(t)$ с помощью одной из формул:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\,d\tau, \quad x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

$$x(t) = f(0)\,x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)\,x_1(t-\tau)\,d\tau, \quad x(t) = f(0)\,x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau)\,x_1(\tau)\,d\tau.$$

Каждое из этих выражений называют *формулой* (или *интегралом*) *Дюамеля*.

Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на формуле Дюамеля, применяют, как правило, в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ уравнения (14), а также при необходимости многократного решения задачи (14)—(15) для различных функций $f(t)$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Комплексные числа, действия над ними.
2. Показательная и логарифмическая функции комплексного переменного. Формулы Эйлера.
3. Степенная функция. Тригонометрические и гиперболические функции.
4. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Понятие аналитической функции.
5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Понятие о конформном отображении.

6. Интеграл от функции комплексного переменного, его свойства.

7. Теорема Коши для одно- и многосвязных областей. Формула Ньютона — Лейбница.

8. Интегральная формула Коши.

9. Существование производных всех порядков у аналитической функции.

10. Ряд Тейлора. Теорема о разложимости аналитической функции в ряд Тейлора.

11. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Теорема Лорана.

12. Классификация изолированных особых точек.

13. Вычеты. Вычисление вычетов.

14. Основная теорема Коши о вычетах. Вычисление контурных интегралов.

15. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

16. Преобразование Лапласа. Функция-оригинал. Существование и аналитичность преобразования Лапласа. Поведение изображения в бесконечности.

17. Свойства преобразования Лапласа: свойство линейности, теорема подобия, теорема затухания (смещения), теорема запаздывания.

18. Дифференцирование оригинала и изображения.

19. Интегрирование оригинала и изображения.

20. Методы отыскания оригинала по заданному изображению.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать равенство

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},\quad \theta\neq 2\pi n,\quad n=0,\pm1,\ldots$$

Указание. Рассмотреть геометрическую прогрессию $e^{i\theta}$, $e^{i2\theta}$, ..., $e^{in\theta}$.

2. Доказать, что в полярных координатах r, φ условия Коши — Римана имеют вид $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}$; $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$.

3. Доказать, что функция $w=|z|$ нигде не дифференцируема.

4. Пусть функция $u(x, y)$ гармоническая в некоторой области G, т. е. $\Delta u=0$ в любой точке $(x, y)\in G$. Для каких «f» сложная функция $f[u(x, y)]$ будет также гармонической в области G?

5. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|\leqslant R$ и $M=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$. Для всех внутренних точек круга $|z|<R$ доказать неравенство

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|\leqslant\frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}},\quad n=1,2,\ldots$$

6. Числа A_n, определяемые условиями $A_0=1$, $A_1=1$, $A_{n+2}=$ $=A_n+A_{n+1}$, $n=0, 1, \ldots$, называются числами Фибоначчи. Доказать, что в некоторой области $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \dfrac{1}{1-z-z^2}$. Определить область сходимости ряда.

7. Доказать, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = -\operatorname{res}_{-z_0} f(z)$, а для нечетной функции — равенство $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \operatorname{res}_{-z_0} f(z)$.

8. Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ в точке $z=z_0$ имеют полюс соответственно порядка m и n. Что можно сказать о характере особой точки $z=z_0$ для функций: а) $f(z)\varphi(z)$; б) $f(z)/\varphi(z)$; в) $f(z)+\varphi(z)$?

9. Функции $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в точке z_0, причем $f(z_0)\neq 0$, $g(z_0)=g'(z_0)=0$, $g''(z_0)\neq 0$. Найти вычет функции $\varphi(z)=f(z)/g(z)$ в точке z_0.

10. Являются ли оригиналами функция $f(t)=\eta(t)\sin e^{t^2}$ и ее производная $f'(t)$? Здесь

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

11. Используя теорему умножения изображений, найти решение интегрального уравнения $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 1-\cos t$.

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти все значения корня (см. п. 1.1).

1.1. $\sqrt[4]{-1}$.	**1.2.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.	**1.3.** $\sqrt[3]{1}$.
1.4. $\sqrt[3]{i}$.	**1.5.** $\sqrt[4]{1}$.	**1.6.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.
1.7. $\sqrt[3]{-1}$.	**1.8.** $\sqrt[3]{-i}$.	**1.9.** $\sqrt[4]{-16}$.
1.10. $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.	**1.11.** $\sqrt[3]{8}$.	**1.12.** $\sqrt[3]{8i}$.
1.13. $\sqrt[4]{16}$.	**1.14.** $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$.	**1.15.** $\sqrt[3]{-8}$.
1.16. $\sqrt[3]{-8i}$.	**1.17.** $\sqrt[4]{-1/16}$.	**1.18.** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.
1.19. $\sqrt[3]{1/8}$.	**1.20.** $\sqrt[3]{i/8}$.	**1.21.** $\sqrt[4]{1/16}$.
1.22. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$.	**1.23.** $\sqrt[3]{-1/8}$.	**1.24.** $\sqrt[3]{-1/8}$.
1.25. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.	**1.26.** $\sqrt[3]{27}$.	**1.27.** $\sqrt[4]{1/256}$.
1.28. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.	**1.29.** $\sqrt[3]{i/27}$.	**1.30.** $\sqrt[4]{256}$.
1.31. $\sqrt[3]{-i27}$.		

Задача 2. Представить в алгебраической форме (см. п. 1.2).

2.1. $\sin(\pi/4+2i)$. 2.2. $\cos(\pi/6+2i)$, 2.3. $\operatorname{Ln} 6$.
2.4. $\operatorname{sh}(2+\pi i/4)$. 2.5. $\operatorname{ch}(2+\pi i/2)$. 2.6. $\operatorname{Ln}(1+i)$.
2.7. $\sin(\pi/3+i)$. 2.8. $\cos(\pi/4+i)$. 2.9. $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$.
2.10. $\operatorname{sh}(1+\pi i/2)$. 2.11. $\operatorname{ch}(1-\pi i)$. 2.12. $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)$.
2.13. $\operatorname{Ln}(-1+i)$. 2.14. $\cos(\pi/4-2i)$. 2.15. $\sin(\pi/2-5i)$.
2.16. $\operatorname{sh}(3+\pi i/6)$. 2.17. $\operatorname{ch}(1+\pi i/3)$. 2.18. $\operatorname{Ln}(-1-i)$.
2.19. $\sin(\pi/6-3i)$. 2.20. $\cos(\pi/3+3i)$. 2.21. $\operatorname{Ln}(1-i)$.
2.22. $\operatorname{sh}(1-\pi i/3)$. 2.23. $\operatorname{ch}(2-\pi i/6)$. 2.24. 1^{2i}.
2.25. $\sin(\pi/3-2i)$. 2.26. $\cos(\pi/6-i)$. 2.27. i^{3i}.
2.28. $\operatorname{sh}(2-\pi i)$. 2.29. $(-i)^{5i}$. 2.30. $(-1)^{4i}$.
2.31. $\operatorname{ch}(3+\pi i/4)$.

Задача 3. Представить в алгебраической форме (см. п. 1.2).

3.1. $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$. 3.2. $\operatorname{Arcsin} 4$. 3.3. $\operatorname{Arch}(-2)$.
3.4. $\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$. 3.5. $\operatorname{Arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$. 3.6. $\operatorname{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$.
3.7. $\operatorname{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$. 3.8. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$. 3.9. $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$.
3.10. $(-1-i)^{4i}$. 3.11. $\sin(\pi/4+i)$. 3.12. $\operatorname{Arch}(3i)$.
3.13. $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$. 3.14. $\operatorname{Arcth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$. 3.15. $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$.
3.16. $\operatorname{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right)$. 3.17. $\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$. 3.18. $\operatorname{Arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$.
3.19. $\operatorname{Arccos}(-5)$. 3.20. $\operatorname{Arsh}(-4i)$. 3.21. $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$.
3.22. $\omega=\sin\frac{i}{z}$ при $z=\frac{8+2\pi i}{\pi^2+16}$. 3.23. $w=e^{\frac{1}{z}}$ при $z=\frac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$. 3.24. $\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.
3.25. $\operatorname{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$. 3.26. $\operatorname{Arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$. 3.27. $w=\operatorname{ch} iz$ при $z=\pi/4+2i$.
3.28. $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$. 3.29. $\operatorname{Arccos}(-3i)$. 3.30. $(4-3i)^{i}$.
3.31. $(-12+5i)^{-i}$.

Задача 4. Вычертить область, заданную неравенствами.

4.1. $|z-1|\leqslant 1$, $|z+1|>2$. 4.2. $|z+i|\geqslant 1$, $|z|<2$.
4.3. $|z-i|\leqslant 2$, $\operatorname{Re} z>1$. 4.4. $|z+1|\geqslant 1$, $|z+i|<1$.
4.5. $|z+1|<1$, $|z-i|\leqslant 1$. 4.6. $|z+i|\leqslant 2$, $|z-i|>2$.
4.7. $|z-1-i|\leqslant 1$, $\operatorname{Im} z>1$, $\operatorname{Re} z\geqslant 1$.
4.8. $|z-1+i|\geqslant 1$, $\operatorname{Re} z<1$, $\operatorname{Im} z\leqslant -1$.
4.9. $|z-2-i|\leqslant 2$, $\operatorname{Re} z\geqslant 3$, $\operatorname{Im} z<1$.
4.10. $|z-1-i|\geqslant 1$, $0\leqslant \operatorname{Re} z<2$, $0<\operatorname{Im} z\leqslant 2$.

4.11. $|z+i|<2,\ 0<\operatorname{Re} z\leqslant 1.$

4.12. $|z-i|\leqslant 1,\ 0<\arg z<\pi/4.$

4.13. $|z-i|\leqslant 2,\ 0<\operatorname{Im} z<2.$

4.14. $|z+i|>1,\ -\pi/4\leqslant\arg z<0.$

4.15. $|z-1-i|<1,\ |\arg z|\leqslant\pi/4.$

4.16. $|z|<2,\ -\pi/4\leqslant\arg(z-1)\leqslant\pi/4.$

4.17. $|z|\leqslant 1,\ \arg(z+i)>\pi/4.$

4.18. $1<|z-1|\leqslant 2,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0,\ \operatorname{Re} z<1.$

4.19. $1\leqslant|z-i|<2,\ \operatorname{Re} z\leqslant 0,\ \operatorname{Im} z>1.$

4.20. $|z|<2,\ \operatorname{Re} z\geqslant 1,\ \arg z<\pi/4.$

4.21. $|z|>1,\ -1<\operatorname{Im} z\leqslant 1,\ 0<\operatorname{Re} z\leqslant 2.$

4.22. $|z-1|>1,\ -1\leqslant\operatorname{Im} z<0,\ 0\leqslant\operatorname{Re} z<3.$

4.23. $|z+i|<1,\ -3\pi/4\leqslant\arg z\leqslant-\pi/4.$

4.24. $|z-i|\leqslant 1,\ -\pi/2<\arg(z-i)<\pi/4.$

4.25. $z\bar z<2,\ \operatorname{Re} z\leqslant 1,\ \operatorname{Im} z>-1.$

4.26. $z\bar z\leqslant 2,\ \operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z>-1.$

4.27. $1<z\bar z<2,\ \operatorname{Re} z>0,\ 0\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant 1.$

4.28. $|z-1|<1,\ \arg z\leqslant\pi/4,\ \arg(z-1)>\pi/4.$

4.29. $|z-i|<1,\ \arg z\geqslant\pi/4,\ \arg(z+1-i)\leqslant\pi/4.$

4.30. $|z-2-i|\geqslant 1,\ 1\leqslant\operatorname{Re} z<3,\ 0<\operatorname{Im} z\leqslant 3.$

4.31. $|\operatorname{Re} z|\leqslant 1,\ |\operatorname{Im} z|<2.$

Задача 5. Определить вид кривой (см. п. 1.3)

5.1. $z=3\sec t+i2\operatorname{tg} t.$

5.2. $z=2\sec t-i3\operatorname{tg} t.$

5.3. $z=-\sec t+i3\operatorname{tg} t.$

5.4. $z=4\operatorname{tg} t-i3\sec t.$

5.5. $z=3\operatorname{tg} t+i4\sec t.$

5.6. $z=-4\operatorname{tg} t-i2\sec t.$

5.7. $z=3\operatorname{cosec} t+i3\operatorname{ctg} t.$

5.8. $z=4\operatorname{cosec} t-i2\operatorname{ctg} t.$

5.9. $z=\operatorname{ctg} t-i2\operatorname{cosec} t.$

5.10. $z=-\operatorname{ctg} t+i3\operatorname{cosec} t.$

5.11. $z=3\operatorname{ch} 2t+i2\operatorname{sh} 2t.$

5.12. $z=2\operatorname{ch} 3t-i3\operatorname{sh} 3t.$

5.13. $z=5\operatorname{sh} 4t+i4\operatorname{ch} 4t.$

5.14. $z=-4\operatorname{sh} 5t-i5\operatorname{ch} 5t.$

5.15. $z=\dfrac{2}{\operatorname{ch} 2t}+i4\operatorname{th} 2t.$

5.16. $z=\dfrac{4}{\operatorname{ch} 4t}+i2\operatorname{th} 4t.$

5.17. $z=\operatorname{th} 5t+\dfrac{5i}{\operatorname{ch} 5t}.$

5.18. $z=\dfrac{1}{\operatorname{sh} t}-i\operatorname{cth} t.$

5.19. $z=2e^{it}+\dfrac{1}{2e^{it}}.$

5.20. $z=3e^{it}-\dfrac{1}{2e^{it}}.$

5.21. $z=-2e^{it}+\dfrac{1}{e^{it}}.$

5.22. $z=2e^{2it}-\dfrac{1}{e^{2it}}.$

5.23. $z=\dfrac{1+t}{1-t}+i\dfrac{2+t}{2-t}.$

5.24. $z=\dfrac{t-1+it}{t(t-1)}.$

5.25. $z=\dfrac{1+i}{1-t}+\dfrac{t}{1-t}(2-4i).$

5.26. $z=\dfrac{2+t}{2-t}+i\dfrac{1+t}{1-t}.$

5.27. $z=t^2+4t+20-i(t^2+4t+4).$

5.28. $z=t^2+2t+5+i(t^2+2t+1).$

5.29. $z=2t^2+2t+1-i(t^2+t+4).$

5.30. $z=t-2+i(t^2-4t+5).$

5.31. $z=t^2-2t+3+i(t^2-2t+1).$

НТБ ВПИ
г. Е...

Задача 8. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z (см. п. 1.6).

8.1. $\frac{z-2}{2z^3+z^2-z}$. 8.2. $\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$. 8.3. $\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.

8.4. $\frac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$. 8.5. $\frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$. 8.6. $\frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.

8.7. $\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$. 8.8. $\frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$. 8.9. $\frac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$.

8.10. $\frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$. 8.11. $\frac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$. 8.12. $\frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.

8.13. $\frac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$. 8.14. $\frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$. 8.15. $\frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$.

8.16. $\frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$. 8.17. $\frac{z+2}{z+z^2-2z^3}$. 8.18. $\frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.

8.19. $\frac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$. 8.20. $\frac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$. 8.21. $\frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.

8.22. $\frac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$. 8.23. $\frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$. 8.24. $\frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.

8.25. $\frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$. 8.26. $\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$. 8.27. $\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$.

8.28. $\frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$. 8.29. $\frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$. 8.30. $\frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$.

8.31. $\frac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$.

Задача 9. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z-z_0$ (см. п. 1.6).

9.1. $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=1+2i$. 9.2. $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=2-3i$.

9.3. $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-3-2i$. 9.4. $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-2+i$.

9.5. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=1+3i$. 9.6. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=2-i$.

9.7. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-1+2i$. 9.8. $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-2-3i$.

9.9. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=2+i$. 9.10. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=3-i$.

9.11. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2+3i$. 9.12. $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=-2-2i$.

9.13. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=2+i$. 9.14. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=1-2i$.

9.15. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3+i$. 9.16. $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3-2i$.

9.17. $4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+2i$. 9.18. $4\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=1-3i$.

9.19. $4 \cdot \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-3-i$.

9.20. $4 \cdot \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+1$.

9.21. $4 \cdot \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-1-2i$.

9.22. $4 \cdot \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=3+i$.

9.23. $4 \cdot \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=2-2i$.

9.24. $4 \cdot \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-2-i$.

9.25. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-1-3i$.

9.26. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-3+2i$.

9.27. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=2+3i$.

9.28. $\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=3+2i$.

9.29. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=-1+3i$.

9.30. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=2+2i$.

9.31. $\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=3-2i$.

Задача 10. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 (см. п. 1.6).

10.1. $z\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=2$.

10.2. $\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.3. $ze^{z/(z-5)}$, $z_0=5$.

10.4. $\sin\dfrac{2z-z}{z+2}$, $z_0=-2$.

10.5. $\cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0=i$.

10.6. $\sin\dfrac{5z}{z-2i}$, $z_0=2i$.

10.7. $\sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$, $z_0=-\dfrac{i}{3}$.

10.8. $z\cos\dfrac{3z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.9. $z\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

10.10. $(z-3)\cos\pi\dfrac{z-3}{z}$, $z_0=0$.

10.11. $z^2\sin\pi\dfrac{z+1}{z}$, $z_0=0$.

10.12. $z\cos\dfrac{z}{z+2i}$, $z_0=-2i$.

10.13. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

10.14. $\sin\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=i$.

10.15. $\sin\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$.

10.16. $ze^{\frac{1}{z-2}}$, $z_0=2$.

10.17. $e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$.

10.18. $\sin\dfrac{2z}{z-4}$, $z_0=4$.

10.19. $\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

10.20. $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$, $z_0=1$.

10.21. $ze^{\frac{\pi}{(z-a)^2}}$, $z_0=a$.

10.22. $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$, $z_0=\pi$.

10.23. $z\sin\pi\dfrac{z+2}{z}$, $z=0$.

10.24. $z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$, $z_0=1$.

10.25. $z^2\sin\dfrac{z+3}{z}$, $z_0=0$.

10.26. $z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$.

10.27. $z\cos\frac{z}{z-3}$, $z_0=3$.

10.28. $z\sin\pi\frac{z-1}{z-2}$, $z_0=2$.

10.29. $z\cos\frac{z}{z-5}$, $z_0=5$.

10.30. $ze^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$.

10.31. $z\sin\frac{\pi z}{z-a}$, $z_0=a$.

Задача 11. Определить тип особой точки $z=0$ для данной функции (см. п. 1.7).

11.1. $\frac{e^{9z}-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.2. z^3e^{7/z^2}.

11.3. $\frac{\sin 8z-6z}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.4. $\frac{\cos 7z-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.5. $\frac{\operatorname{sh} 6z-6z}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.6. $\frac{\operatorname{ch} 5z-1}{e^z-1-z}$.

11.7. $z\sin\frac{6}{z^2}$.

11.8. $\frac{e^z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.9. $\frac{\sin z^2-z^2}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.10. $\frac{\cos z^2-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.11. $\frac{e^{5z}-1}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.12. $\frac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}$.

11.13. $z^4\cos\frac{5}{z^2}$.

11.14. $\frac{\cos 3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.15. $\frac{\operatorname{sh} 2z-2z}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.16. $\frac{\operatorname{ch} 2z-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.17. $\frac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.18. ze^{4/z^3}.

11.19. $\frac{\sin z^3-z^3}{e^z-1-z}$.

11.20. $\frac{\cos z^3-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.21. $\frac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.22. $\frac{\sin 6z-6z}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.23. $z\sin\frac{3}{z^3}$.

11.24. $\frac{\cos 5z-1}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.25. $\frac{\operatorname{sh} 4z-4z}{e^z-1-z}$.

11.26. $\frac{\operatorname{ch} 3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

11.27. $\frac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

11.28. $\frac{\sin z^4-z^4}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

11.29. $z\cos\frac{2}{z^3}$.

11.30. $\frac{\cos z^4/2}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

11.31. $(e^{z^5}-1)/(e^z-1-z)$.

Задача 12. Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип (см. п. 1.7).

12.1. $e^{1/z}/\sin(1/z)$.

12.2. $1/\cos z$.

12.3. $\operatorname{tg}^2 z$.

12.4. $z\operatorname{tg} z e^{1/z}$.

12.5. $\frac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$.

12.6. $\frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

12.7. $\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.

12.8. $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$.

12.9. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$.

12.10. $\frac{1}{e^z+1}$.

12.11. $\operatorname{ctg}\pi z$.

12.12. $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.

12.13. $\frac{1}{\sin z^2}$.

12.14. $\frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$.

12.15. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$.

12.16. $\dfrac{e^z-1}{\sin \pi z}$.

12.17. $\operatorname{th} z$.

12.18. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.

12.19. $\dfrac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3}$.

12.20. $\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}$.

12.21. $\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$.

12.22. $z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

12.23. $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{z^4-1}$.

12.24. $\dfrac{\sin \pi z}{(z^3-1)^2}$.

12.25. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.

12.26. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$.

12.27. $\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{1/z}$.

12.28. $\dfrac{\cos \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.

12.29. $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

12.30. $\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

12.31. $\dfrac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{1/z}$.

Задача 13. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

13.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{dz}{z(z^2+1)}$.

13.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=5/4}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$.

13.3. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3/2}\frac{dz}{z(z^2+4)}$.

13.4. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$.

13.5. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1/2}\frac{e^z\,dz}{\sin z}$.

13.6. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2}\frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$.

13.7. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3}\frac{ze^z}{\sin z}dz$.

13.8. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2}\frac{2z\,|z-1|}{\sin z}dz$.

13.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/4|=1/3}\frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}dz$.

13.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/2|=1}\frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}dz$.

13.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$.

13.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/2|=1}\frac{e^z+1}{z(z-1)}dz$.

13.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}dz$.

13.14. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz$.

13.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3/2}\frac{\ln(z+2)}{\sin z}dz$.

13.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z-6|=1}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$.

13.17. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1/2}\frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz$.

13.18. $\displaystyle\oint\limits_{|z+3/2|=1}\frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}dz$.

13.19. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$.

13.20. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1/4}\frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}dz$.

13.21. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\pi/2}\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz$.

13.22. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz$.

13.23. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}\,dz.$

13.24. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}\,dz.$

13.25. $\oint\limits_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z\,(z-\pi)}\,dz.$

13.26. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z-\pi)\left(z+\frac{\pi}{3}\right)}\,dz.$

13.27. $\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^3+\pi)^2}{i\sin z}\,dz.$

13.28. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz.$

13.29. $\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}\,dz.$

13.30. $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z}{2}\,(z-\pi)}\,dz.$

13.31. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}\,dz.$

Задача 14. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

14.1. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}\,dz.$

14.2. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}\,dz.$

14.3. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}\,dz.$

14.4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}\,dz.$

14.5. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}\,dz.$

14.6. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}\,dz.$

14.7. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}\,dz.$

14.8. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}\,dz.$

14.9. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3}\,dz.$

14.10. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3-2z+4z^4}{z^3}\,dz.$

14.11. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}\,dz.$

14.12. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}\,dz.$

14.13. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^5}\,dz.$

14.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}\,dz.$

14.15. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3}\,dz.$

14.16. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz-1}{z^3}\,dz.$

14.17. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}\,dz.$

14.18. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3}\,dz.$

14.19. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}\,dz.$

14.20. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{z^4}\,dz.$

14.21. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2-1}{z^4}\,dz.$

14.22. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}\,dz.$

14.23. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}}-z-1}{z^3}\,dz.$

14.24. $\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin\frac{i}{z^2}\,dz.$

14.25. $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}\,dz.$

14.26. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}\,dz.$

14.27. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}\,dz.$

14.28. $\oint\limits_{|z|=2} z^3\cos\frac{2i}{z}\,dz.$

14.29. $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{e^z-\sin z}{z^2}\,dz.$

14.30. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}\,dz.$

14.31. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2e^{1/z^2}-1}{z}\,dz.$

Задача 15. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

15.1. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2-\text{sh}^2\pi^2 z}\,dz.$

15.2. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z-1+9z^2/2}{z^4\,\text{sh}\,\frac{9}{4}z}\,dz.$

15.3. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\text{sh}\,2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2\frac{\pi^2 z}{3}}\,dz.$

15.4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\text{ch}\,3z-1-9z^2/2}{z^4\sin\frac{9z}{8}}\,dz.$

15.5. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\text{sh}^2\,4iz}\,dz.$

15.6. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z\,\text{sh}\,2\pi z}\,dz.$

15.7. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{8z}\,\text{ch}\,4z}{z\sin 4\pi z}\,dz.$

15.8. $\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{\text{ch}\,z-\cos 3z}{z^2\sin 5\pi z}\,dz.$

15.9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\text{sh}\,3z-\sin 3z}{z^3\,\text{sh}\,2z}\,dz.$

15.10. $\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^3\,\text{sh}\,16\pi z}\,dz.$

15.11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2\,\text{sh}^2\,2z}\,dz.$

15.12. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4\,\text{sh}\,\frac{4z}{3}}\,dz.$

15.13. $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\text{sh}\,\pi z-\pi z}{z^2\sin^2\frac{\pi z}{6}}\,dz.$

15.14. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\text{ch}\,4z-8z^2-1}{z^4\sin\frac{8z}{3}}\,dz.$

15.15. $\oint\limits_{|z|=0,9} \frac{e^{3z}-1-3z}{\text{sh}^2\,\pi z}\,dz.$

15.16. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\,\text{sh}\,4z}\,dz.$

15.17. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{7z}-\text{ch}\,5z}{z\sin 2iz}\,dz.$

15.18. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\text{ch}\,3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}\,dz.$

15.19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\text{sh}\,3z-\sin 3z}{z^3\,\text{sh}-iz}\,dz.$

15.20. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z}-1-\sin 5z}{z^2\,\text{sh}\,5z}\,dz.$

15.21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz}\,dz.$

15.22. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{3}}\,dz.$

15.23. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}}\,dz.$

15.24. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}}\,dz.$

15.25. $\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 2\pi z}\,dz.$

15.26. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz}\,dz.$

15.27. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \operatorname{ch} 6z}{z \sin \pi z}\,dz.$

15.28. $\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z}\,dz.$

15.29. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh} \frac{z}{3}}\,dz.$

15.30. $\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z}\,dz.$

15.31. $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi iz}\,dz.$

Задача 16. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8).

16.1. $\oint\limits_{|z+i|=3} \left(\frac{4 \sin \frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2 (z-4+i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi z/2} + i} \right) dz.$

16.2. $\oint\limits_{|z+6|=2} \left(z e^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2 \cos \pi z/5}{(z+5)^2 (z+3)} \right) dz.$

16.3. $\oint\limits_{|z-i|=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2} - i} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi i z}{4+2i}}{(z-2-i)^2 (z-4-i)} \right) dz.$

16.4. $\oint\limits_{|z+2|=2} \left(z \operatorname{ch} \frac{1}{z+2} - \frac{2 \sin (\pi z/2)}{(z+1)^2 (z-1)} \right) dz.$

16.5. $\oint\limits_{|z-2i|=2} \left(\frac{2 \cos \frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2 (z-4-2i)} + \frac{\pi}{e^{\pi z/2} + 1} \right) dz.$

16.6. $\oint\limits_{|z+3|=2} \left(z \operatorname{sh} \frac{i}{z+3} - \frac{4 \operatorname{sh} (\pi i z/4)}{(z+2)^2 z} \right) dz.$

16.7. $\oint\limits_{|z+5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2} + i} + \frac{8 \operatorname{ch} \frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2 (z-3+5i)} \right) dz.$

16.8. $\oint\limits_{|z+4|=2} \left(z \cos \frac{1}{z+4} + \frac{2 \sin (\pi z/6)}{(z+3)^2 (z+1)} \right) dz.$

16.9. $$\oint\limits_{|z-7i|=2} \left(\frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2\,(z-3-7i)} + \frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i} \right) dz.$$

16.10. $$\oint\limits_{|z+5|=2} \left(z\sin\frac{1}{z+5} + \frac{2\,\mathrm{ch}\,(\pi i z/4)}{(z+4)^2\,(z+2)} \right) dz.$$

16.11. $$\oint\limits_{|z-3i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2\,(z-3-3i)} \right) dz.$$

16.12. $$\oint\limits_{|z-1|=2} \left(z e^{\frac{2}{z-1}} + \frac{2\cos \pi z/2}{(z-2)^2\,(z-4)} \right) dz.$$

16.13. $$\oint\limits_{|z+i|=2} \left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2\,(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i} \right) dz.$$

16.14. $$\oint\limits_{|z-2|=2} \left(z\,\mathrm{ch}\,\frac{3}{z-2} + \frac{2\cos \pi z/3}{(z-3)^2\,(z-5)} \right) dz.$$

16.15. $$\oint\limits_{|z+7i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i} - \frac{8\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi i z}{1-7i}}{(z-1+7i)^2\,(z-3+7i)} \right) dz.$$

16.16. $$\oint\limits_{|z-3|=2} \left(z\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{z-3} - \frac{2\sin \pi z/8}{(z-4)^2\,(z-6)} \right) dz.$$

16.17. $$\oint\limits_{|z+3i|=2} \left(\frac{4\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi i z}{2-6i}}{(z-1+3i)^2\,(z-3+3i)} - \frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i} \right) dz.$$

16.18. $$\oint\limits_{|z-4|=2} \left(z\cos\frac{1}{z-4} + \frac{10\,\mathrm{ch}\,\pi i z/5}{(z-5)^2\,(z-7)} \right) dz.$$

16.19. $$\oint\limits_{|z-5i|=2} \left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i} + \frac{2\cos\frac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2\,(z-3-5i)} \right) dz.$$

16.20. $$\oint\limits_{|z-5|=2} \left(z\sin\frac{i}{z-5} + \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi i z/12}{(z-6)^2\,(z-8)} \right) dz.$$

16.21. $$\oint\limits_{|z-i|=2} \left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2\,(z-3-i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i} \right) dz.$$

16.22. $$\oint\limits_{|z-6|=2} \left(z e^{\frac{1}{z-6}} - \frac{2\,\mathrm{ch}\,\pi i z/5}{(z-5)^2\,(z-3)} \right) dz.$$

16.23. $\displaystyle\oint\limits_{|z-6i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}-\frac{2\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz.$

16.24. $\displaystyle\oint\limits_{|z-5|=2}\left(z\operatorname{ch}\frac{2}{z-5}+\frac{4\cos\pi z/4}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz.$

16.25. $\displaystyle\oint\limits_{|z+6i|=2}\left(\frac{2\operatorname{sh}\dfrac{\pi i z}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$

16.26. $\displaystyle\oint\limits_{|z-4|=2}\left(z\operatorname{sh}\frac{1}{z-4}+\frac{2\sin\pi z/6}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz.$

16.27. $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{4\cos\dfrac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz.$

16.28. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z\cos\frac{1}{z-3}+\frac{4\operatorname{ch}\pi i z/2}{z(z-2)^2}\right)dz.$

16.29. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2}\left(\frac{2\sin\dfrac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$

16.30. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\sin\frac{i}{z-2}-\frac{2\operatorname{sh}\pi i z/2}{(z-1)^2(z+1)}\right)dz.$

16.31. $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{6\operatorname{ch}\dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz.$

Задача 17. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.11).

17.1. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}.$

17.2. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}.$

17.3. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}.$

17.4. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}.$

17.5. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}.$

17.6. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}.$

17.7. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}.$

17.8. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}.$

17.9. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}.$

17.10. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}.$

17.11. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$.
17.12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$.

17.13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$.
17.14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}$.

17.15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}$.
17.16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}$.

17.17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}$.
17.18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}$.

17.19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}$.
17.20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35}\sin t-6}$.

17.21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}$.
17.22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t+5}$.

17.23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t+5}$.
17.24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t+8}$.

17.25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t+9}$.
17.26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t+4}$.

17.27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3}$.
17.28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}$.

17.29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4}$.
17.30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{21}\sin t+5}$.

17.31. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}$.

Задача 18. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.11).

18.1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\sqrt{10/11}\cos t)^2}$.
18.2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\cos t)^2}$.

18.3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\sqrt{6/7}\cos t)^2}$.
18.4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t)^2}$.

18.5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.
18.6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\cos t)^2}$.

18.7. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$.

18.8. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.9. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+2\cos t)^2}$.

18.10. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.11. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.12. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.13. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

18.14. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\cos t)^2}$.

18.15. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.16. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t)^2}$.

18.17. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}$.

18.18. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+2\cos t)^2}$.

18.19. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2}$.

18.20. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.21. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\cos t)^2}$.

18.22. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.23. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.24. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.25. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$.

18.26. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$.

18.27. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{10}+3\cos t)^2}$.

18.28. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

18.29. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t)^2}$.

18.30. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}$.

18.31. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}$.

Задача 19. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.9).

19.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

19.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}\,dx$.

19.3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

19.4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.

19.5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$.

19.6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$.

19.7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.

19.8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

19.9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+3)^2}$.

19.10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.

19.11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

19.12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.

19.13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$.

19.14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2}\,dx$.

19.15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

19.16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}\,dx$.

19.17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

19.18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}\,dx$.

19.19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$.

19.20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.

19.21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}\,dx$.

19.22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

19.23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$.

19.24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}\,dx$.

19.25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}\,dx$.

19.26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

19.27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$.

19.28. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}\,dx$.

19.29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

19.30. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2}\,dx$.

19.31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

Задача 20. Вычислить интеграл (см. п. 1.7; 1.8; 1.10).

20.1. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}\,dx$.

20.2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}\,dx$.

20.3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}\,dx$.

20.6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

20.7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}\,dx$.

20.8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-2)\cos\frac{x}{2}}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}\,dx$.

20.10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17}\,dx$.

20.11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx$.

20.12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

20.13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

20.14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx$.

20.15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

20.16. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}\,dx$.

20.17. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)^3}$.

20.18. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$.

20.19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}$.

20.20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$.

20.21. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}}{x^2+4}\,dx$.

20.22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}\,dx$.

20.23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x\,dx}{(x^2-x+1)^3}$.

20.24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

20.25. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x \, dx}{x^4+10x^2+9}$.

20.26. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1) \cos x}{x^4+5x^2+4}\, dx$.

20.27. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1) \sin x}{x^4+5x^2+4}\, dx$.

20.28. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2+1)^2}\, dx$.

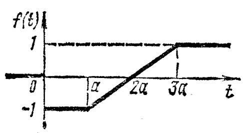
20.29. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x) \sin x}{x^4+13x^2+36}\, dx$.

20.30. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x) \cos x}{x^4+13x^2+36}\, dx$.

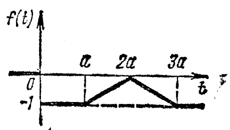
20.31. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2+1)^2}\, dx$.

Задача 21. По данному графику оригинала найти изображение (см. п. 1.12; 1.14).

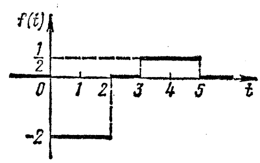
21.1.



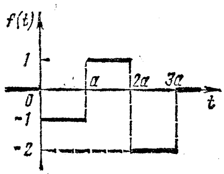
21.2.



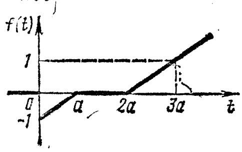
21.3.



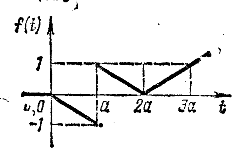
21.4.



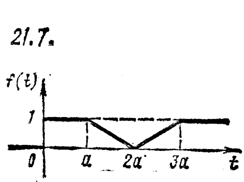
21.5.



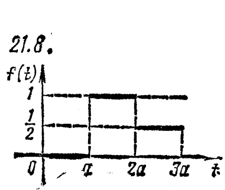
21.6.



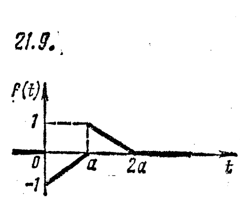
21.7.



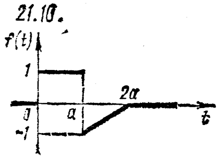
21.8.



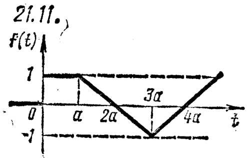
21.9.



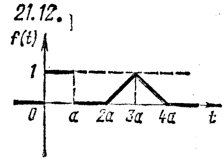
21.10.



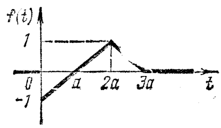
21.11.



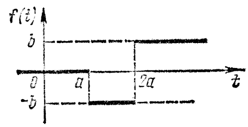
21.12.



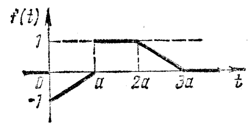
21.13.



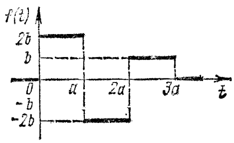
21.14.



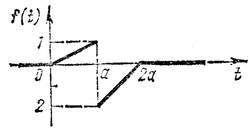
21.15.



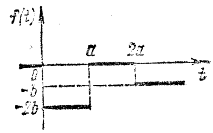
21.16.



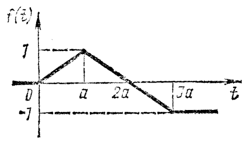
21.17.



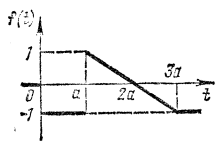
21.18.



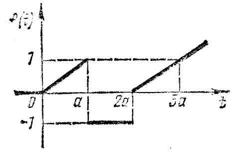
21.19.



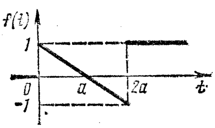
21.20.



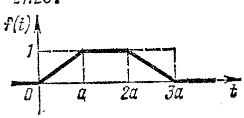
21.21.



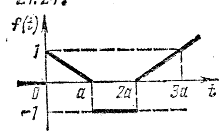
21.22.



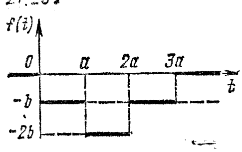
21.23.



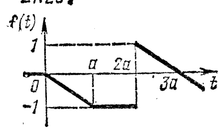
21.24.



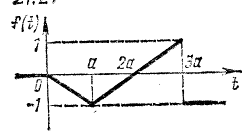
21.25.



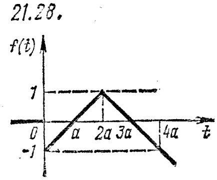
21.26.



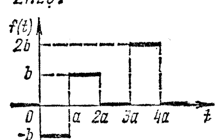
21.27



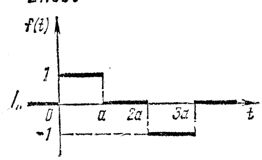
21.28.



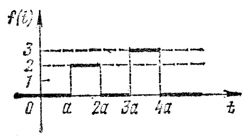
21.29.



21.30.



21.31.



Задача 22. Найти оригинал по заданному изображению (см. п. 1.12).

22.1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

22.2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

22.3. $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

22.4. $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

22.5. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

22.6. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.7. $\dfrac{6}{p^3-8}$.

22.8. $\dfrac{4}{p^3+8}$.

22.9. $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

22.10. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$.

22.11. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

22.12. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

22.13. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$.

22.14. $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

22.15. $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$.

22.16. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$.

22.17. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$.

22.18. $\dfrac{1}{p^3-1}$.

22.19. $\dfrac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)}$.

22.20. $\dfrac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$.

22.21. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

22.22. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.

22.23. $\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$.

22.24. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$.

22.25. $\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$.

22.26. $\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$.

22.27. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$.

22.28. $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$.

22.29. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

22.30. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.

22.31. $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$.

Задача 23. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$ (см. п. 1.12; 1.15; 1.16).

23.1. $y''-y=\operatorname{th} t$.

23.2. $y''-y'=\dfrac{1}{1+e^t}$.

23.3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$.

23.4. $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$.

23.5. $y''-y=\operatorname{th}^2 t$.

23.6. $y''-y=\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$.

23.7. $y''-y'=\frac{e^t}{1+e^t}$.

23.8. $y''-2y'+y=\frac{e^t}{t+1}$.

23.9. $y''+y'=\frac{e^{2t}}{3+e^t}$.

23.10. $y''-2y'=\frac{e^t}{\operatorname{ch} t}$.

23.11. $y''-y=\frac{1}{1+\operatorname{ch} t}$.

23.12. $y''+y'=\frac{1}{1+e^t}$.

23.13. $y''-4y'+4y=\frac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}$.

23.14. $y''-4y=\frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$.

23.15. $y''-y=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.16. $y''+y'=\frac{e^t}{1+e^t}$.

23.17. $y''+2y'+y=\frac{e^{-t}}{(t+1)^2}$.

23.18. $2y''-y'=\frac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}$.

23.19. $y''-y=\frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$.

23.20. $y''-y'=\frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$.

23.21. $y''+2y'+y=\frac{te^{-t}}{t+1}$.

23.22. $y''-y'=\frac{e^{2t}}{2+e^t}$.

23.23. $y''-y=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.24. $y''+y'=\frac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

23.25. $y''+2y'+y=\frac{e^{-t}}{1+t^2}$.

23.26. $y''-2y'+y=\frac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.27. $y''+2y'+y=\frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.28. $y''-4y=\operatorname{th}^2 2t$.

23.29. $y''+2y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

23.30. $y''+y'=\frac{1}{(1+e^t)^2}$.

23.31. $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$.

Задача 24. Операционным методом решить задачу Коши (см. п. 1.12; 1.15).

24.1. $y''+y=6e^{-t}$,
$y(0)=3,\ y'(0)=1$.

24.2. $y''-y'=t^2$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1$.

24.3. $y''+y'=t^2+2t$,
$y(0)=0,\ y'(0)=-2$.

24.4. $y''-y=\cos 3t$,
$y(0)=1,\ y'(0)=1$.

24.5. $y''+y'+y=7e^{2t}$,
$y(0)=1,\ y'(0)=4$.

24.6. $y''+y'-2y=-2(t+1)$,
$y(0)=1,\ y'(0)=1$.

24.7. $y''-9y=\sin t-\cos t$,
$y(0)=-3,\ y'(0)=2$.

24.8. $y''+2y'=2+e^t$,
$y(0)=1,\ y'(0)=2$.

24.9. $2y''-y'=\sin 3t$,
$y(0)=2,\ y'(0)=1$.

24.10. $y''+2y'=\sin t/2$,
$y(0)=-2,\ y'(0)=4$.

24.11. $y''+y=\operatorname{sh} t$,
$y(0)=2,\ y'(0)=1$.

24.12. $y''+4y'+29y=e^{-2t}$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1$.

24.13. $y''-3y'+2y=e^t$,
$y(0)=1,\ y'(0)=0$.

24.14. $2y''+3y'+y=3e^t$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1$.

24.15. $y''-2y'-3y=2t$,
$y(0)=1$, $y'(0)=1$.

24.16. $y''+4y=\sin 2t$,
$y(0)=0$, $y'(0)=1$.

24.17. $2y''+5y'=29\cos t$,
$y(0)=-1$, $y'(0)=0$.

24.18. $y''+y'+y=t^2+t$,
$y(0)=1$, $y'(0)=-3$.

24.19. $y''+4y=8\sin 2t$,
$y(0)=3$, $y'(0)=-1$.

24.20. $y''-y'-6y=2$,
$y(0)=1$, $y'(0)=0$.

24.21. $y''+4y=4e^{2t}+4t^2$,
$y(0)=1$, $y'(0)=2$.

24.22. $y''+4y'+4y=t^3e^{2t}$,
$y(0)=1$, $y'(0)=2$.

24.23. $y''-3y''+2y=12e^{3t}$,
$y(0)=2$, $y'(0)=6$.

24.24 $y''+4y=3\sin t+10\cos 3t$,
$y(0)=-2$, $y'(0)=3$.

24.25. $y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t$,
$y(0)=5$, $y'(0)=1$.

24.26. $y''+3y'-10y=47\cos 3t-\sin 3t$,
$y(0)=3$, $y'(0)=-1$.

24.27. $y''+y'-2y=e^{-t}$,
$y(0)=-1$, $y'(0)=0$.

24.28. $y''-2y'=e^{t}(t^2+t-3)$,
$y(0)=2$, $y'(0)=2$.

24.29. $y''+y=2\cos t$,
$y(0)=0$, $y'(0)=1$.

24.30. $y''-y=4\sin t+5\cos 2t$,
$y(0)=-1$, $y'(0)=-2$.

24.31. $y''-3y'+2y=2e^{t}\cos\frac{t}{2}$,
$y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Задача 25. (см. п. 1.12; 1.15).

Варианты 1—8

Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $F=-kx$, пропорциональной смещению x и направленной в противоположную сторону, и силы сопротивления $R=rv$. В момент $t=0$ частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Найти закон движения $x=x(t)$ частицы.

25.1. $k=m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.
25.2. $k=m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.
25.3. $k=5m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.
25.4. $k=5m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.
25.5. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=2$ м, $v_0=1$ м/с.
25.6. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.
25.7. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.
25.8. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

Варианты 9—16

Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой $F=kx$, пропорциональной расстоянию. На точку действует сила сопротивления среды $R=rv$, пропорциональная скорости v. При $t=0$ расстояние точки от начала координат x_0, а скорость v_0. Найти закон движения $x = x(t)$ материальной точки.

25.9. $k=2m$, $r=m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.

25.10. $k=2m$, $r=m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.11. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.12. $k=3m$, $r=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=2$ м/с.

25.13. $k=4m$, $r=3m$, $x_0=2$ м, $v_0=0$.

25.14. $k=4m$, $r=3m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.15. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=1$ м, $v_0=1$ м/с.

25.16. $k=5m$, $r=4m$, $x_0=1$ м, $v_0=2$м/с.

Варианты 17—24

Материальная точка массы m совершает прямолинейное колебание по оси Ox под действием восстанавливающей силы $F=-kx$, пропорциональной расстоянию x от начала координат и направленной к началу координат, и возмущающей силы $f=A\cos t$. Найти закон движения $x=x(t)$ точки, если в начальный момент времени $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$.

25.17. $k=m$, $A=2m$, $x_0=0$, $v_0=0$.

25.18. $k=m$, $A=m$, $x_0=0$, $v_0=1$ м/с.

25.19. $k=m$, $A=2m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.

25.20. $k=m$, $A=m$, $x_0=1$ м, $v_0=0{,}5$ м/с.

25.21. $k=9m$, $A=8m$, $x_0=1$ м, $v_0=0$.

25.22. $k=9m$, $A=4m$, $x_0=0$, $v_0=0$.

25.23. $k=9m$, $A=8m$, $x_0=0$, $v_0=3$ м/с.

25.24. $k=9m$, $A=m$, $x_0=1/8$ м, $v_0=3$м/с.

Варианты 25—31

На материальную точку массы m действует сила сопротивления $R=kv$, пропорциональная скорости v. Какое расстояние пройдет точка за неограниченное время, если ей сообщена начальная скорость v_0?

25.25. $k=2m$, $v_0=10$ м/с. 25.26. $k=\frac{m}{3}$, $v_0=5$ м/с.

25.27. $k=3m$, $v_0=6$ м/с. 25.28. $k=m$, $v_0=7$ м/с.

25.29. $k=m/2$, $v_0=6$ м/с. 25.30. $k=0{,}1m$, $v_0=1$ м/с.

25.31. $k=10m$, $v_0=1$ м/с.

Задача 26. Решить систему дифференциальных уравнений (см. п. 1.12; 1.15).

26.1. $\begin{cases} \dot{x}=x+3y+2, \\ \dot{y}=x-y+1; \end{cases}$ $x(0)=-1$, $y(0)=2$.

26.2. $\begin{cases} \dot{x}=-x+3y+1, \\ \dot{y}=x+y; \end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=2$.

26.3. $\begin{cases} \dot{x}=x+4y, \\ \dot{y}=2x-y+9; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.4. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y+1, \\ \dot{y}=4x-y; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.5. $\begin{cases} \dot{x}=2x+5y, \\ \dot{y}=x-2y+2; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1.$

26.6. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+5y+1, \\ \dot{y}=x+2y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

26.7. $\begin{cases} \dot{x}=3x+y, \\ \dot{y}=-5x-3y+2; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=0.$

26.8. $\begin{cases} \dot{x}=-3x-4y+1, \\ \dot{y}=2x+3y; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

26.9. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+6y+1, \\ \dot{y}=2x+2 \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.10. $\begin{cases} \dot{x}=2x+3y+1, \\ \dot{y}=4x-2y; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0$

26.11. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y, \\ \dot{y}=2x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=5.$

26.12. $\begin{cases} \dot{x}=2x-2y, \\ \dot{y}=-4x; \end{cases}$ $x(0)=3,\ y(0)=1.$

26.13. $\begin{cases} \dot{x}=-x-2y+1, \\ \dot{y}=-\dfrac{3}{2}x+y; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.14. $\begin{cases} \dot{x}=3x+5y+2, \\ \dot{y}=3x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=2.$

26.15. $\begin{cases} \dot{x}=3x+2y, \\ \dot{y}=\dfrac{5}{2}x-y+2; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.16. $\begin{cases} \dot{x}=2y+1, \\ \dot{y}=2x+3; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0.$

26.17. $\begin{cases} \dot{x}=2x+8y+1, \\ \dot{y}=3x+4y; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=1.$

26.18. $\begin{cases} \dot{x}=2x+2y+2, \\ \dot{y}=4y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.19. $\begin{cases} \dot{x}=x+y, \\ \dot{y}=4x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.20. $\begin{cases} \dot{x}=x-2y+1, \\ \dot{y}=-3x; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.21. $\begin{cases} \dot{x}=3y+2, \\ \dot{y}=x+2y; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=1.$

26.22. $\begin{cases} \dot{x}=x+4y+1, \\ \dot{y}=2x+3y; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.23. $\begin{cases} \dot{x}=2y, \\ \dot{y}=2x+3y+1; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=1.$

26.24. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+y+2, \\ \dot{y}=3x; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.25. $\begin{cases} \dot{x}=4x+3, \\ \dot{y}=x+2y; \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=0.$

26.26. $\begin{cases} \dot{x}=y+3, \\ \dot{y}=x+2; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.27. $\begin{cases} \dot{x}=x+3y+3, \\ \dot{y}=x-y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.28. $\begin{cases} \dot{x}=-x+3y+2, \\ \dot{y}=x+y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

26.29. $\begin{cases} \dot{x}=3y, \\ \dot{y}=3x+1; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=0.$

26.30. $\begin{cases} \dot{x}=x+3y, \\ \dot{y}=x-y; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0.$

26.31. $\begin{cases} \dot{x}=-2x+y, \\ \dot{y}=3x; \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=1.$

Задача 27. Выяснить, во что преобразуется геометрическая фигура при отображении с помощью функции $w=f(z)$.

27.1. $w=e^z$; прямые $x=C$, $y=C$.

27.2. $w=e^z$; полоса $\alpha<y<\beta$, $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi$.

27.3. $w=e^z$; прямые $y=kx+b$.

27.4. $w=e^z$; полоса между $y=x$ и $y=x+2\pi$.

27.5. $w=e^z$; полуполоса $x<0$, $0<y<\alpha\leqslant 2\pi$.

27.6. $w=e^z$; полуполоса $x>0$, $0<y<\alpha\leqslant 2\pi$.

27.7. $w=\dfrac{1-z}{1+z}$; область $D: \{|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$.

27.8. $w=\ln z$; полярная сетка $|z|=R$, $\arg z=\theta$.

27.9. $w=\ln z$; угол $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$.

27.10. $w=\ln z$; сектор $|z|<1$, $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$.

27.11. $w=\ln z$; кольцо $r_1<|z|<r_2$ с разрезом по отрезку $[r_1, r_2]$.

27.12. $w=\cos z$; прямоугольная сетка $x=C$, $y=C$.

27.13. $w=\cos z$; полуполоса $0<x<\pi$, $y<0$.

27.14. $w=\cos z$; полуполоса $0<x<\pi/2$, $y>0$.

27.15. $w=\cos z$; полуполоса $-\pi/2<x<\pi/2$, $y>0$.

27.16. $w=\cos z$; полоса $0<x<\pi$.

27.17. $w=\cos z$; прямоугольник $0<x<\pi$, $-h<y<h$, $h>0$.

27.18. $w=\arcsin z$; верхняя полуплоскость.

27.19. $w=\arcsin z$; первый квадрант.

27.20. $w=\operatorname{ch} z$; прямоугольная сетка $x=C$, $y=C$.

27.21. $w=\operatorname{ch} z$; полоса $0<y<\pi$.

27.22. $w=\operatorname{ch} z$; полуполоса $x>0$, $0<y<\pi$.

27.23. $w=\operatorname{Arsh} z$ первый квадрант.

27.24. $w=\operatorname{tg} z$; полуполоса $0<x<\pi$, $y>0$.

27.25. $w=\operatorname{tg} z$; полоса $0<x<\pi$.

27.26. $w=\operatorname{tg} z$; полоса $0<x<\pi/4$.

27.27. $w=\operatorname{tg} z$; полоса $-\pi/4<x<\pi/4$.

27.28. $w=\operatorname{cth} z$; полуполоса $0<y<\pi$ $x>0$.

27.29. $w=\operatorname{cth} z$; полоса $0<y<\pi$.

27.30. $w=\dfrac{z-3+i}{z+1+i}$; полуплоскость $\operatorname{Re} z<1$.

27.31. $w=\dfrac{2}{z-1}$; область $D: \{1<|z|<2\}$.

II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

2.1. Классическое определение вероятности. *Вероятностью события A* называется отношение

$$P(A)=m/n$$

числа равновозможных случаев m, благоприятствующих событию A к общему числу n равновозможных случаев.

2.2 Комбинаторные формулы. Допустим, что требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами, третье — n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ способами, в этом заключается *основной принцип комбинаторики* (правило умножения).

Пусть Ω — множество из n элементов. Произвольное k-элементное подмножество множества из n элементов называется *сочетанием из n элементов по k*. Порядок элементов в подмножестве не существен. Число k-элементных подмножеств множества из n элементов обозначают C_n^k.

Например, если $\Omega=\{a, b, c\}$, тогда $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ — все возможные сочетания из 3 по 1 (следовательно, $C_3^1=3$); $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, — все возможные сочетания из 3 по 2 (таким образом, $C_n^2=3$).

Число сочетаний из n элементов по k находится с помощью формулы

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Множество называется *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n (n — число элементов множества) так, что различным элементам соответствуют различные числа.

Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества.

Например, перестановки множества $\Omega=\{a, b, c\}$ имеют вид

$$\{a, b, c\},\ \{a, c, b\},\ \{b, a, c\},$$
$$\{b, c, a\},\ \{c, a, b\},\ \{c, b, a\}.$$

Число перестановок P_n множества, содержащего n элементов, определяется по формуле $P_n=n!$

Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества данного множества Ω. Само множество Ω считаем неупорядоченным, поэтому каждое его подмножество может быть упорядочено каким-либо возможным способом. Число всех k-элементных подмножеств множества Ω равно C_n^k. Каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами. Таким образом получим все упорядоченные k-элементные подмножества множества Ω. Число упорядоченных k-элементов подмножеств множества, состоящего из n элементов, обозначается через A_n^k,

$$A_n^k=k!\,C_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются *размещениями из n элементов по k*. Различные размещения из n по k отличаются либо элементами, либо их порядком.

Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — целые неотрицательные числа, причем $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Представим множество A из n элементов в виде суммы m множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов. Обозначим число различных способов такого *разбиения на группы* через $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Оно определяется по формуле

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}.$$

Приведем еще одну комбинаторную схему, часто встречающуюся при решении задач: n-элементное множество A является суммой множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, число элементов которых равно соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$, B — m-элементное подмножество множества A, содержащее m_1 элементов из A_1, m_2 из $A_2, \ldots, m_k$ элементов из A_k $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m\right)$. Число способов, которыми можно выбрать такое множество B из A (множества неупорядоченные), в силу основного принципа комбинаторики равно

$$C_{n_1}^{m_1} \times C_{n_2}^{m_2} \times \ldots \times C_{n_k}^{m_k}.$$

2.3. Геометрическое определение вероятности. Допустим, что в результате опыта в некоторой области Ω наудачу появляется точка ω. Требуется определить вероятность $P(A)$ того, что $\omega \in A$, где A — область, принадлежащая Ω, $A \subset \Omega$. По определению полагают $P(A) = m(A)/m(\Omega)$, где $m(A)$ и $m(\Omega)$ — мера области A и области Ω. Под мерой будем понимать длину, площадь, объем в одно-, двух- и трехмерном случаях соответственно.

2.4. Теорема сложения и формула умножения вероятностей. *Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A/B)$, определяемое по формуле*

$$P(A/B) = P(AB)/P(B), \qquad P(B) \neq 0.$$

Из данного определения вытекает *формула умножения вероятностей*

$$P(AB) = P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B)$$

для двух событий, которая допускает следующее обобщение для n событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}).$$

События A и B называются независимыми, если выполняется соотношение

$$P(AB) = P(A)\, P(B).$$

Теорема. *Для любых событий A и B имеет место формула*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

для n событий — формула

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

2.5. Формула полной вероятности, формулы Байеса. Набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *называется полной группой попарно несовместных событий,*

если
$$H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega \quad \text{и} \quad H_iH_j=\varnothing, \quad i, j=1, 2, \ldots, n, \ i\neq j,$$

где Ω — достоверное событие; $\varnothing$ — невозможное событие.

Теорема 1. *Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа попарно несовместных событий, причем $P(H_i)\neq 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, то для любого события A имеет место равенство (формула полной вероятности)*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i).$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для любого события A, такого, что $P(A)\neq 0$, справедливы формулы Байеса*

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\,P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i)}, \qquad k=1, 2, \ldots, n.$$

2.6. Схема независимых испытаний. Пусть вероятность появления события A при единичном испытании равна p. Опыт повторяется n раз, т. е. осуществляется серия из n независимых испытаний. Вероятность $P_n(m)$ того, что в результате этих n опытов событие A произойдет m раз (наступит m успехов), определяется по формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad m=0, 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $q=1-p$ — вероятность наступления противоположного события $\bar{A}$ при единичном испытании.

Совокупность чисел, определяемых формулой (1), называется *биномиальным распределением вероятностей*.

Значение $m=m_0$, при котором вероятность (1) принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим числом успехов*.

Если $(n+1)p$ — дробное число, то m_0 принимает единственное значение

$$m_0=[(n+1)p],$$

где $[\ldots]$ — символ целой части числа. Если величина $(n+1)p$ — дробная, то m_0 принимает два значения

$$m_0^{(1)}=(n+1)p-1 \quad \text{и} \quad m_0^{(2)}=(n+1)p.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в результате каждого из n независимых испытаний может произойти одно из k попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ соответственно ($p_1+p_2+\ldots+p_k=1$). Обозначим через m_i число тех испытаний, в которых произошло событие A_i, $i=1, 2, \ldots, k$. Тогда вероятность m_1 наступлений события A_1, m_2, наступлений события $A_2, \ldots, m_k$, наступлений события A_k, причем $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$, определяется равенством

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)=\frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_k!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{m_k}.$$

Это *полиномиальное распределение вероятностей*; при $m=2$ оно превращается в биномиальное.

При больших значениях n (порядка десятков, сотен) для биномиального распределения применяют следующие приближенные формулы:

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x), \tag{2}$$

где $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$;

$$P_n\left(x_1\leqslant\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\leqslant x_2\right)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{3}$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt; \tag{4}$$

$$P_n(m)\approx\frac{a^m}{m!}e^{-a}, \qquad a=np; \tag{5}$$

$$P_n(k_1\leqslant m\leqslant k_2)\approx\sum_{m=k_1}^{k_2}\frac{a^m}{m!}e^{-a}. \tag{6}$$

Формула (2) основана на локальной теореме Муавра—Лапласа, (3)—на интегральной теореме Муавра—Лапласа, (5) и (6)—на формуле Пуассона. Асимптотику Муавра—Лапласа [формулы (2) и (3)] рекомендуется применять в случае, когда $npq>9$. В противном случае более точные результаты дает асимптотика Пуассона [формулы (5) и (6)].

Замечание 1. Приближенные формулы (3) и (6) остаются в силе и в том случае, когда входящие в них неравенства являются строгими.

Замечание 2. Вычисления по формулам (2), (3), (5), (6) выполняются с использованием таблиц I—IV соответственно (см. приложение).

2.7. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин. *Случайной величиной ξ называется функция $\xi=\xi(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω.*

Это определение является точным в случае дискретного пространства элементарных событий Ω. В общем случае на функцию $\xi(\omega)$ накладывается требование измеримости.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция

$$F(x)=P\{\xi<x\}, \quad -\infty<x<\infty.$$

Иными словами, значение функции распределения $F(x)$—случайной величины ξ—есть вероятность того, что ξ принимает значение меньшее, чем x.

Случайная величина ξ называется дискретной, если существует конечное или счетное множество чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ (без предельных точек), таких, что

$$P(\xi=x_k)=p_k>0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots; \quad \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1.$$

Совокупность значений x_k и соответствующих вероятностей p_k называется *распределением* дискретной случайной величины.

Примеры дискретных распределений

1. *Биномиальное распределение*

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad 0<p<1, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

2. *Распределение Пуассона*

$$P(\xi=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad a>0, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

3. *Геометрическое распределение*

$$P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}, \quad 0<p<1, \quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

4. *Гипергеометрическое распределение*

$$P(\xi=k)=C_M^k C_{N-M}^{n-k}/C_N^n, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \min(M,\ n).$$

Случайная величина ξ называется непрерывной случайной величиной, если ее функция распределения представима в виде

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx, \tag{7}$$

где $p(x)$ — некоторая неотрицательная функция.

Подынтегральная функция $p(x)$ в формуле (7) называется *плотностью распределения* случайной величины ξ, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x=1$.

Примеры непрерывных распределений

1. *Равномерное распределение*

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,\ b], \\ 0, & x\notin[a,\ b], \end{cases} \quad -\infty<a<b<+\infty.$$

2. *Нормальное распределение* (с параметрами $(a,\ \sigma)$)

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty<a<+\infty, \quad \sigma>0.$$

3. *Показательное распределение*

$$p(x)=\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \ \lambda>0. \end{cases}$$

4. *Распределение Коши*

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Из формулы (7) следует, что в любой точке непрерывности $p(x)$ имеет место равенство $p(x)=F'(x)$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$\mathbf{M}\xi=\sum_k x_k p_k. \tag{8}$$

Если случайная величина принимает счетное множество значений, то требуется абсолютная сходимость ряда (8). Если ряд не сходится абсолютно, то говорят, что случайная величина не имеет математического ожидания.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число $\mathbf{M}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x$, *если интеграл абсолютно сходится.*

Дисперсией $\mathbf{D}\xi$ случайной величины ξ называется математическое ожидание случайной величины $(\xi-\mathbf{M}\xi)^2$:

$$\mathbf{D}\xi=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2.$$

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле

$$\mathbf{D}\xi=\sum_k (x_k-\mathbf{M}\xi)^2\,p_k,$$

для непрерывной — по формуле

$$\mathbf{D}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathbf{M}\xi)^2\,p(x)\,dx.$$

Вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение в заданном числовом промежутке, вычисляется по одной из формул:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1), \quad P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx.$$

Двумерные случайные величины

Распределение двух случайных величин ξ и η, или двумерной случайной величины (ξ, η), не исчерпывается распределением каждой из них, так как при этом не учитывается зависимость, которая может существовать между ними.

Функция распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ, η) определяется как вероятность совместного выполнения неравенств $\xi < x$ и $\eta < y$:

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \ \eta < y\}.$$

Если $F(x, y)$ представима в виде $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p(x, y)\,dx\,dy$, где $p(x, y)$ — некоторая неотрицательная функция, то двумерную случайную величину (ξ, η) называют *непрерывной*, функцию $p(x, y)$ — *плотностью распределения* двумерной случайной величины (ξ, η).

Плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ выражается через совместную плотность $p(x, y)$ следующим образом: $p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,dy$.

Аналогично для плотности распределения случайной величины η имеем $p_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,dx$.

В отличие от совместной плотности распределения $p(x, y)$ одномерные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ называют *маргинальными*.

Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если их совместная функция распределения $F(x, y)$ при любых значениях аргументов x, y равна произведению маргинальных функций распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ и $F_\eta(y)$ случайной величины η:

$$F(x, y) = F_\xi(x)\,F_\eta(y).$$

Пусть (ξ, η) — непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $p(x, y)$. Тогда для независимости ξ и η необходимо и достаточно, чтобы совместная плотность $p(x, y)$ распадалась в произведение маргинальных плотностей $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$:

$$p(x, y) \equiv p_\xi(x)\,p_\eta(y).$$

Коэффициент корреляции

Величина $\mathbf{M}[(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)]$ называется *ковариацией* случайных величин ξ и η, $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$. Если (ξ, η) — непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $p(x, y)$, то

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}\xi)(y - \mathbf{M}\eta)\,p(x, y)\,dx\,dy.$$

Величина $r = \operatorname{cov}(\xi, \eta)/\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}$ называется *коэффициентом корреляции* случайных величин ξ и η.

Свойства коэффициента корреляции

1°. Модуль коэффициента корреляции не превосходит единицы, $|r| \leqslant 1$.

2°. *Если ξ и η независимые случайные величины, то $r = 0$.*

Обратное неверно: *из условия* $r=0$ (некоррелированность случайных величин ξ и η) *не следует независимость* ξ *и* η.

3°. *Если* ξ *и* η *связаны линейной зависимостью, то* $|r|=1$.

Свойства математического ожидания и дисперсии

1°. *Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной, т. е.* $\mathbf{M}c=c$, $c=\text{const}$.

2°. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т. е.* $\mathbf{M}(\xi+\eta)=\mathbf{M}\xi+\mathbf{M}\eta$ (предполагается, что $\mathbf{M}_\xi$ и $\mathbf{M}_\eta$ существуют).

3°. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т. е.* $\mathbf{M}(\xi\eta)=\mathbf{M}\xi\cdot\mathbf{M}\eta$ (предполагается, что $\mathbf{M}_\xi$ и $\mathbf{M}_\eta$ существуют).

4°. *Дисперсия постоянной равна нулю, т. е.* $Dc=0$, $c=\text{const}$.

5°. *Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, т. е.* $\mathbf{D}(\xi+\eta)=\mathbf{D}\xi+\mathbf{D}\eta$ (предполагается, что $\mathbf{D}_\xi$ и $\mathbf{D}_\eta$ существуют).

2.8. Характеристические функции. *Характеристической функцией* $\varphi(t)$ *случайной величины* ξ *называется математическое ожидание случайной величины* $e^{it\xi}$,

$$\varphi(t)=\mathbf{M}e^{it\xi},\quad t\text{ — вещественный параметр.}$$

Для дискретной случайной величины и для непрерывной соответственно имеем:

$$\varphi(t)=\sum_k e^{itx_k}p_k,\quad \varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)\,dx.$$

Плотность распределения $p(x)$ случайной величины ξ выражается через характеристическую функцию $\varphi(t)$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt.$$

Свойства характеристических функций

1°. *Характеристическая функция* $\varphi(t)$ *случайной величины* ξ *определена для любого* $t\in(-\infty,+\infty)$, *причем* $|\varphi(t)|\leqslant 1$, $\varphi(0)=1$.

2°. *При изменении знака аргумента значение характеристической функции изменяется на комплексно-сопряженное;* $\varphi(-t)=\bar{\varphi}(t)$, $-\infty<t<+\infty$.

3°. *Если случайные величины связаны соотношением* $\xi_2=k\xi_1+b$, то $\varphi_{\xi_2}(t)=e^{itb}\varphi_{\xi_1}(kt)$.

4°. *Если* ξ *и* η *— независимые случайные величины, то*

$$\varphi_{\xi+\eta}(t)=\varphi_\xi(t)\,\varphi_\eta(t).$$

5°. *Если существует* $\mathbf{M}\xi$, *то* $\mathbf{M}\xi=\varphi'(0)/i$; *если существует* $\mathbf{D}\xi$, *то* $\mathbf{D}\xi=-\varphi''(0)+[\varphi'(0)]^2$.

6°. *Соответствие между множеством функций распределения и множеством характеристических функций, устанавливаемое формулой* $\varphi(t)=\mathbf{M}e^{it\xi}$, *является взаимно однозначным (теорема единственности) и непрерывным (предельная теорема Леви).*

2.9. Законы распределения функций случайных аргументов. Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ и другую случайную величину η, связанную с ней функциональной зависимостью $\eta=\varphi(\xi)$. Функция распределения $F_\eta(y)$ случайной величины η выражается через плотность распределения $p_\xi(x)$ случайного аргумента ξ:

$$F_\eta(y) = \sum_k \int_{\Delta_k(y)} p_\xi(x)\,dx, \tag{9}$$

где $\Delta_k(y)$ — интервалы, в которых выполняется неравенство $\varphi(x) < y$. Суммирование в формуле (9) распространяется на все указанные интервалы. Границы интервалов $\Delta_k(y)$ зависят от y и при заданном конкретном виде функции $y = \varphi(x)$ могут быть выражены как явные функции y.

Плотность распределения $p_\eta(y)$ случайной величины η (если она существует) получается путем дифференцирования функции распределения:

$$p_\eta(y) = F'_y(y). \tag{10}$$

В простейшем случае монотонной функции $\eta = \varphi(\xi)$ использование формул (9) и (10) приводит к выражению

$$p_\eta(y) = p_\xi[\psi(y)]\,|\psi'(y)|,$$

где $\psi(y)$ — функция, обратная функции $y = \varphi(x)$.

Рассмотрим отдельно случай, когда функция распределения $F_\eta(y)$ имеет точки разрыва $y_1, y_2, \ldots, y_n$ со скачками $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Это означает существование значений случайной величины η (совпадающих с точками разрыва $y_1, y_2, \ldots, y_n$), которым соответствуют ненулевые вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В данном случае плотность распределения вероятностей в точках $y_1, y_2, \ldots, y_n$ обращается в бесконечность.

Математическая идеализация указанного явления опирается на использование *дельта-функции* $\delta(y)$, которая не является функцией в обычном понимании, а представляет собой так называемую *обобщенную функцию*. Будем рассматривать $\delta(y)$ как производную функции единичного скачка

$$\eta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

В классическом анализе функция $\eta(y)$ не дифференцируема в точке $y = 0$, однако в теории обобщенных функций это ограничение снимается; таким образом,

$$\delta(y) = \eta'(y). \tag{11}$$

Представим функцию $F_\eta(y)$ в виде

$$F_\eta(y) = \tilde{F}_\eta(y) + \sum_{k=1}^{n} p_k \eta(y - y_k),$$

где $\tilde{F}_\eta(y)$ — непрерывная («сомкнутая») функция.

Согласно формулам (10) и (11) получаем

$$p_\eta(y) = \tilde{p}_\eta(y) + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(y - y_k), \text{ где } \tilde{p}_\eta(y) = \tilde{F}'_\eta(y).$$

Пусть теперь (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) — двумерные случайные величины, причем

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2), \tag{12}$$

где функции f_1 и f_2 предполагаются непрерывно дифференцируемыми и отображение (12) — взаимно однозначным, т. е. существуют функции φ_1 и φ_2, такие, что $\xi_1 = \varphi_1(\eta_1, \eta_2)$, $\xi_2 = \varphi_2(\eta_1, \eta_2)$. Тогда плотность распределения $p_\eta(y_1, y_2)$ двухмерной случайной величины (η_1, η_2) выразится через плотность распределения $p_\xi(x_1, x_2)$ случайной величины (ξ_1, ξ_2):

$$p_\eta(y_1, y_2) = p_\xi[\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)]\,|I|, \quad I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}.$$

2.10. Числовые характеристики функций случайных величин. Пусть случайная величина $\eta=\varphi(\xi)$ есть функция случайной величины ξ. Если требуется определить лишь числовые характеристики случайной величины η, нет необходимости находить ее закон распределения. Числовые характеристики выражаются через закон распределения случайного аргумента ξ. Так, если ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, то математическое ожидание $\mathrm{M}\eta$ и дисперсия $\mathrm{D}\eta$ равны соответственно

$$\mathrm{M}\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,p_\xi(x)\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{D}\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x)-\mathrm{M}\eta]^2\,p_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.11. Закон больших чисел. Под законом больших чисел понимают ряд теорем, объединенных идеей устойчивости средних результатов при большом числе испытаний.

Теорема Чебышева. *Пусть случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *попарно независимы и* $\mathrm{D}\xi_i\leqslant c$, $i=1, 2, \ldots$, *где* c — *некоторая постоянная. Тогда при любом* $\varepsilon>0$ *выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}\xi_i\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{13}$$

Теорема Маркова. *Пусть случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *удовлетворяют условию* $\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\to 0$ *при* $n\to\infty$. *Тогда при любом* $\varepsilon>0$ *выполняется предельное соотношение* (13).

Теорема Бернулли. *Пусть* m — *число успехов в* n *независимых испытаниях,* p — *вероятность успеха в каждом испытании. Тогда при любом* $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Доказательство этих теорем основано на *неравенстве Чебышева* $P\{|\xi-\mathrm{M}\xi|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\mathrm{D}\xi/\varepsilon^2$, справедливом при любом $\varepsilon>0$ для любой случайной величины ξ, имеющей конечное математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$ и конечную дисперсию $\mathrm{D}\xi$.

2.12. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных слагаемых. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие математические ожидания $\mathrm{M}\xi_i=a$ и дисперсии $\mathrm{D}\xi_i=\sigma^2$. Тогда при $n\to\infty$ функция распределения нормированной суммы $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)/\sigma\sqrt{n}$ сходится к функции распределения нормальной случайной величины с параметрами (0,1), т. е. при любом x

$$P\{\eta_n<x\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z.$$

Отсюда получается приближенная формула

$$P\{x_1<\eta_n<x_2\}\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

справедливая при достаточно больших n. Она выражает вероятность выполнения неравенства $x_1<\eta_n<x_2$ через интеграл вероятности (4) (см. табл. II в приложении).

2.13. Точечные оценки параметров распределения. *Выборкой называется* n-*мерная случайная величина* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *с независимыми одинаково распределенными компонентами* X_i, $i=1, 2, \ldots, n$. *Число* n *называется объемом выборки.*

Любая функция $h=h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ выборочных значений называется статистикой.

Пусть α — неизвестный параметр распределения случайной величины ξ. Статистика

$$\alpha^*=\alpha^*(X_1, X_2, \ldots, X_n), \tag{14}$$

используемая в приближенном равенстве $\alpha\approx\alpha^*$, называется оценкой (точечной оценкой) неизвестного параметра по выборке.

Классификация оценок

Желательно, чтобы оценка (14) не давала систематического завышения или занижения результатов, т. е. чтобы $M\alpha^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)=\alpha$.

Оценка α^*, обладающая указанным свойством, называется несмещенной. В противном случае она называется смещенной.

Если при $n\to\infty$ оценка α^* сходится по вероятности к истинному значению параметра α:

$$\alpha^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{по вер}}\alpha,$$

то оценка α^* называется состоятельной.

Состоятельность означает, что с ростом объема выборки качество оценки улучшается.

Если оценки α_1^* и α_2^* удовлетворяют неравенству $M(\alpha_1^*-\alpha)^2<M(\alpha_2^*-\alpha)^2$, то оценка α_1^* называется более эффективной, чем α_2^*. Если существует оценка α^* более эффективная, чем любая другая, то она называется эффективной.

Методы получения оценок

1. Метод моментов. Пусть ξ — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x, \alpha)$, зависящей от одномерного неизвестного параметра α. Тогда математическое ожидание $M\xi$ является функцией α:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, \alpha)\,dx=\mu_1(\alpha).$$

Выборочное среднее $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ принимает значение, близкое к $M\xi$. Это позволяет записать уравнение для определения неизвестного параметра α:

$$\mu_1(\alpha)=\bar{X}.$$

Метод моментов аналогичным образом применяется к дискретным случайным величинам.

2. Метод максимального правдоподобия. Пусть ξ — дискретная случайная величина с распределением

$$P(\xi=a_i)=p_i(\alpha),\quad i=1, 2, \ldots, k,$$

где a_i — возможные значения случайной величины ξ; $p_i(\alpha)$ — соответствующие вероятности, зависящие от неизвестного параметра α, причем $\sum_{i=1}^{k}p_i(\alpha)=1$ при любом допустимом значении α. Множество значений a_i случайной величины ξ может быть не только конечным, но и счетным.

Если среди наблюдаемых выборочных значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ число a_i встречается n_i раз $(i=1, 2, \ldots, k)$, то для вероятности $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha)$ получения данной выборки имеем выражение

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha)=p_1^{n_1}(\alpha)\,p_2^{n_2}(\alpha)\ldots p_k^{n_k}(\alpha). \tag{15}$$

Функция (15) параметра α называется *функцией правдоподобия*, а величина α^*, при которой функция $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha)$ достигает максимума, — *оценкой максимального правдоподобия* неизвестного параметра α.

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x, \alpha)$, зависящей от неизвестного параметра α, метод максимального правдоподобия остается в силе. Отличие состоит в том, что теперь функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = p(x_1, \alpha)\, p(x_2, \alpha) \ldots p(x_n, \alpha)$ выражается не через вероятность получения данной выборки, а через плотность распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_\alpha,)$, зависящую от параметра α. При этом α служит аргументом, значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, считаются фиксированными.

2.14. Доверительные интервалы. Кроме точечных оценок используются так называемые доверительные интервалы: указывается не одна точка $\alpha^*(X_1, X_2, \ldots \ldots, X_n)$, а интервал $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, к которому с заданной вероятностью принадлежит истинное значение параметра α,

$$P(\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}) = \mathscr{P}. \qquad (16)$$

Число $\mathscr{P}$, $0 < \mathscr{P} < 1$ называется *доверительной вероятностью* и характеризует надежность полученной оценки: чем ближе $\mathscr{P}$ к единице, тем надежнее оценка (обычно выбирают $\mathscr{P} = 0{,}9$; $0{,}95$ или $0{,}99$).

Величины $\underline{\alpha}$ и $\overline{\alpha}$ называются *доверительными границами*. Они являются функциями выборочных значений $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и, следовательно, являются случайными величинами.

Интервал $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ *со случайными границами* $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *которые при любом допустимом значении* α *удовлетворяют соотношению* (16), *называется доверительным интервалом для неизвестного параметра* α.

Примеры доверительных интервалов

1. Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной случайной величины при известной дисперсии σ^2 имеет вид

$$\overline{X} - u_{\mathscr{P}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + u_{\mathscr{P}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Здесь $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, величина $u_{\mathscr{P}}$ определяется по заданной доверительной вероятности $\mathscr{P}$ с помощью табл. V (см. приложение).

2. Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии σ^2 имеет вид

$$\overline{X} - t_{\mathscr{P}} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\mathscr{P}} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}},$$

где оценка σ^* вычисляется по формуле

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}, \qquad (17)$$

а величина $t_{\mathscr{P}}$ определяется по заданной доверительной вероятности $\mathscr{P}$ и объему выборки n с помощью табл. VI (см. приложение).

3. Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины имеет вид

$$\frac{(n-1)\,\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

где n — объем выборки; σ^* — оценка величины σ, определяемая формулой (17); $\chi^2_{(1)}$ и $\chi^2_{(2)}$ — корни уравнений

$$\int\limits_0^{\chi^2_{(1)}} p_{n-1}(x)\,dx = \frac{1-\mathcal{P}}{2}, \quad \int\limits_{\chi^2_{(2)}}^{+\infty} p_{n-1}(x)\,dx = \frac{1-\mathcal{P}}{2}, \tag{18}$$

в которых подынтегральная функция $p_{n-1}(x)$ представляет собой плотность распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

Уравнения (18) при заданной доверительной вероятности $\mathcal{P}$ решаются с помощью табл. VII (см. приложение). При определении $\chi^2_{(1)}$ входами этой таблицы служат $\nu = n-1$ и $\alpha = \frac{1+\mathcal{P}}{2}$, при определении $\chi^2_{(2)}$ — $\nu = n-1$; $\alpha = \frac{1-\mathcal{P}}{2}$.

4. Пусть n — число независимых испытаний, m — число наступлений события A, p — вероятность наступления события A в каждом отдельном испытании. Рассмотрим случай, когда n достаточно велико, а значение p не слишком близко к нулю или к единице так, что можно воспользоваться асимптотикой Муавра — Лапласа (см. п. 2.6). При этом доверительный интервал для p имеет вид

$$\frac{m}{n+u^2_{\mathcal{P}}} < p < \frac{m+u^2_{\mathcal{P}}}{n+u^2_{\mathcal{P}}},$$

$u_{\mathcal{P}}$ определяется по заданной доверительной вероятности $\mathcal{P}$ с помощью табл. V (см. приложение).

Рассмотрим отдельно случай $m=0$. При этом нижняя доверительная граница равна нулю, верхняя $1-\sqrt[n]{1-\mathcal{P}}$. Аналогично, при $m=n$ нижняя и верхняя доверительные границы равны соответственно $\sqrt[n]{1-\mathcal{P}}$ и единице.

2.15. Статистическая проверка гипотез. *Случайная величина X, которая служит для статистической проверки гипотезы, называется критерием.* Иногда термином *критерий* обозначают не только случайную величину X, но и все правило проверки в целом. При этом X называют *статистикой критерия.*

Проверка гипотезы состоит в том, что если наблюдаемое значение критерия принадлежит некоторому определенному множеству S, т. е. наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза H_0 отвергается.

Множество S, такое, что при наступлении события $\{X \in S\}$ основная гипотеза H_0 отвергается, называется критическим множеством (для гипотезы H_0).

Событие $\{X \in S\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 отвергается, когда она является истинной, называется ошибкой первого рода. Событие $\{X \overline{\in} S\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 не отвергается, когда верна одна из альтернативных гипотез H_λ, называется ошибкой второго рода.

Вероятности P_{I} и P_{II} ошибок первого и второго рода вычисляются в предположениях о справедливости различных гипотез — основной H_0 и альтернативной H_λ соответственно:

$$P_{\mathrm{I}} = P_{H_0}(X \in S), \quad P_{\mathrm{II}} = P_{H_\lambda}(X \overline{\in} S).$$

Вероятность ошибки второго рода, а также вероятность

$$P_{H_\lambda}(X \in S) = 1 - P_{H_\lambda}(X \overline{\in} S) \tag{19}$$

противоположного события связаны с конкретной альтернативной гипотезой H_λ, т. е. могут зависеть от некоторого параметра λ.

Функция (19) параметра λ, равная вероятности отвергнуть гипотезу H_0, если верна гипотеза H_λ, называется функцией мощности критерия.

Правило статистической проверки гипотезы

1. Задаются малым числом $\alpha > 0$, называемым *уровнем значимости критерия*; обычно $\alpha = 0{,}05$; $0{,}01$ или $0{,}001$. Чем более опасными признаются ошибки первого рода, тем меньшее значение α должно быть выбрано.

2. Определяют критическое множество S из условия выполнения неравенства

$$P_{\mathrm{I}} = P_{\mathrm{H}_0}(X \in S) \leqslant \alpha. \tag{20}$$

3. Условием (20) критическое множество определяется неоднозначно. Выбирают ту из возможностей, которая обеспечивает минимум вероятности ошибки второго рода, или, что то же самое, максимум мощности критерия.

4. Производят опыт и получают наблюдаемое значение критерия. Если при этом наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза H_0 отвергается. В противном случае считается, что H_0 не противоречит опытным данным. Результат проверки гипотезы выражается словами: гипотеза H_0 отвергается (не отвергается) на уровне значимости α.

2.16. Критерий согласия χ^2. Критерии, которые служат для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины, называются *критериями согласия*. Пусть основная гипотеза H_0 состоит в том, что функция распределения случайной величины ξ есть вполне определенная функция $F(x)$.

Разобьем числовую ось на r промежутков (разрядов).

$$(-\infty = a_0,\ a_1),\ [a_1,\ a_2),\ \ldots,\ [a_{r-1},\ a_r = +\infty),$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1}$. При справедливой гипотезе H_0 i-му разряду $[a_{i-1}, a_i)$ соответствует вероятность

$$p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Из n выборочных значений $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайной величины ξ в i-й разряд $[a_{i-1}, a_i)$ попадает случайное число m_i значений $\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = n\right)$. Тогда отношение m_i/n представляет собой частоту попадания выборочных значений в i-й разряд. Близость частот m_i/n к вероятностям p_i свидетельствует в пользу основной гипотезы H_0, заметные различия отвергают гипотезу H_0.

Случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \tag{21}$$

характеризует согласованность гипотезы H_0 с опытными данными. Критерий χ^2 применяется в соответствии с общим правилом статистической проверки гипотез. При этом наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле (21), критическое множество выбирается в виде полубесконечного интервала $(\chi^2_\alpha, +\infty)$, где величина χ^2_α находится с помощью табл. VII (см. приложение). Входами таблицы служат величина $\nu = r - 1$ и уровень значимости α.

Если выполняется соотношение $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, то говорят, что гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α. В противном случае она не противоречит опытным данным.

Замечание 1. Число выборочных значений m_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ в каждом разряде должно быть не менее 5—10. Если это условие не выполняется, рекомендуется объединять разряды.

Замечание 2. Критерий согласия χ^2 применим не только в случае, когда гипотетическая функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ полностью определена. Если она зависит от l неизвестных параметров, т. е. имеет вид $F(x;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$, и параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ оцениваются по выборке методом максимального правдоподобия (см. п. 2.13), то критерий согласия остается в силе, только входом в табл. VII служит величина $\nu = r - l - 1$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. События. Правила действий над событиями.
2. Классическое, геометрическое и статистическое определения вероятности. Аксиомы Колмогорова.
3. Теорема сложения вероятностей.
4. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей. Попарная независимость событий и независимость в совокупности.
5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
6. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли.
7. Локальная теорема Муавра — Лапласа (без доказательства).
8. Формула Пуассона как асимптотическая для формулы Бернулли.
9. Случайная величина. Функция распределения одномерной случайной величины, ее свойства.
10. Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики.
11. Понятие многомерной случайной величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины. Свойства.
12. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Коэффициент корреляции.
13. Свойства математического ожидания и дисперсии.
14. Характеристическая функция случайной величины. Свойства.
15. Функциональное преобразование случайных величин.
16. Композиция законов распределения случайных величин.
17. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных слагаемых.
18. Закон больших чисел. Теоремы Чебышева, Маркова, Бернулли.
19. Точечные оценки параметров распределения. Свойства оценок. Методы получения оценок.
20. Доверительная вероятность. Доверительный интервал. Примеры построения доверительных интервалов.
21. Статистическая проверка гипотез. Критерии согласия.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Привести примеры противоположных случайных событий.
2. Привести примеры несовместных (совместных) событий.
3. Привести примеры зависимых и независимых событий.
4. Доказать соотношения между событиями:

а) $(A+B)C=AC+BC$, б) $AB+C=(A+C)(B+C)$, в) $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$, г) $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$, д) если $C=A-B$ и $B\subset A$, то $A=B+C$.

5. Доказать неравенство $P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$.
6. Доказать, что функция распределения случайной величины есть функция неубывающая.

7. Дано: m — число успехов в серии из n независимых испытаний, p — вероятность успеха в одном испытании, $q=1-p$ и $\zeta=(m-np)/\sqrt{npq}$. Определить $\mathbf{M}\zeta$, $\mathbf{D}\zeta$.

8. Каково соотношение между ошибками первого и второго рода при статистической проверке гипотез?

9. Пусть $\alpha_1<\alpha_2$. Основная гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости $\alpha_1\,(\alpha_2)$. Следует ли отсюда, что она будет отвергнута на уровне значимости $\alpha_2\,(\alpha_1)$?

10. Показать, что выборочное среднее является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания.

11. Найти оценку максимального правдоподобия для вероятности p наступления события в схеме независимых испытаний Бернулли по известной частоте наступления этого события. Будет ли эта оценка несмещенной и состоятельной?

12. В серии из n опытов событие A наступило m раз. Найти доверительный интервал для вероятности наступления события A, соответствующий доверительной вероятности $\mathscr{P}$.

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

(Исходные данные к задачам см. в конце главы)

Задача 1. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит N; б) произведение числа очков не превосходит N; в) произведение числа очков делится на N. (См. п. 2.1 и исходные данные.) 5/36

Задача 2. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий i-го сорта равно n_i, $i=1, 2, 3, 4$. Для контроля наудачу берутся m изделий. Определить вероятность того, что среди них m_1 первосортных, m_2, m_3 и m_4 второго, третьего и четвертого сорта соответственно $\left(\sum_{i=1}^{4} m_i=m\right)$. (См. п. 2.1; 2.2 и исходные данные.)

Задача 3. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных. (См. п. 2.1; 2.2 и исходные данные.)

Задача 4. В лифт k-этажного дома сели n пассажиров ($n<k$). Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, двое сошли на одном этаже. (См. п. 2.1, 2.2 и исходные данные.)

Задача 5. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $1/k$. (См. п. 2.3 и исходные данные.)

Задача 6. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от T_1 до T_2. Одно из событий длится

10 мин., другое — t мин. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются». (См. п. 2.3 и исходные данные.)

Задача 7. В круге радиуса R наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны S_1 и S_2. (См. п. 2.3 и исходные данные.)

Задача 8. В двух партиях k_1 и k_2% доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное? (См. п. 2.4 и исходные данные.)

Задача 9. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком p_1, вторым — p_2. Первый сделал n_1, второй — n_2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена. (См. п. 2.4 и исходные данные.)

Задача 10. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает герб. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т. д.

1. Найти вероятность указанного ниже события.

Варианты 1—8. Выиграл A до k-го броска.

Варианты 9—15. Выиграл A не позднее k-го броска.

Варианты 16—23. Выиграл B до k-го броска.

Варианты 24—31. Выиграл B не позднее k-го броска.

2. Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре? (См. п. 2.4 и исходные данные.)

Задача 11. Урна содержит M занумерованных шаров с номерами от 1 до M. Шары извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события:

A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1, 2, ... M;

B — хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения;

C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения.

Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей при $M \to \infty$ (См. п. 2.4 и исходные данные.)

Задача 12. Из 1000 ламп n_i принадлежат i-й партии, $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа — бракованная. (См. п. 2.5 и исходные данные.)

Задача 13. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй N_2 белых и M_2 черных. Из первой во вторую переложено K шаров, затем из второй урны извлечен один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый. (См. п. 2.5 и исходные данные.)

Задача 14. В альбоме k чистых и l гашеных марок. Из них наудачу извлекаются m марок (среди которых могут быть и чистые и гашеные), подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается n марок. Определить вероятность того, что все n марок чистые. (См. п. 2.5 и исходные данные.)

Задача 15. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем i-й завод поставляет $m_i\%$ изделий ($i=1, 2, 3$). Среди изделий i-го завода $n_i\%$ первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено j-м заводом. (См. п. 2.5 и исходные данные.)

Задача 16. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает n раз. Определить вероятность того, что цифра выпадает m раз. (См. п. 2.6 и исходные данные.)

Задача 17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность. (См. п. 2.6 и исходные данные.)

Задача 18. На каждый лотерейный билет с вероятностью p_1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью p_2 — мелкий выигрыш и с вероятностью p_3 билет может оказаться без выигрыша, $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i=1$. Куплено n билетов. Определить вероятность получения n_1 крупных выигрышей и n_2 мелких. (См. п. 2.6 и исходные данные.)

Задача 19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна p. Поступило n вызовов. Определить вероятность m «сбоев» (См. п. 2.6 и исходные данные.)

Задача 20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из n независимых испытаний равна p. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет следующему неравенству.

Варианты 1—11: $k_1 \leqslant m \leqslant k_2$.

Варианты 12—21: $k_1 \leqslant m$.

Варианты 22—31: $m \leqslant k_2$.

(См. п. 2.6 и исходные данные.)

Задача 21. Дана плотность распределения $p(x)$ случайной величины ξ. Найти параметр γ, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, функцию распределения случайной величины ξ, вероятность выполнения неравенства $x_1 < \xi < x_2$. (См. п. 2.7 и исходные данные).

Варианты 1—8: $p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \overline{\in} [a, b]. \end{cases}$

Варианты 9—16: $p(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,\ b], \\ 0, & x\overline{\in}[\gamma,\ b]. \end{cases}$

Варианты 17—24: $p(x)=\begin{cases} \gamma, & x\in[a,\ b], \\ 0, & x\overline{\in}[a,\ b]. \end{cases}$

Варианты 25—31: $p(x)=\begin{cases} a, & x\in\left[\frac{b-\gamma}{2},\ \frac{b+\gamma}{2}\right], \\ 0, & x\overline{\in}\left[\frac{b-\gamma}{2},\ \frac{b+\gamma}{2}\right]. \end{cases}$

Задача 22. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $p(x)=\gamma e^{ax^2+bx+c}$. Найти: γ, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, функцию распределения случайной величины ξ, вероятность выполнения неравенства $x_1<\xi<x_2$. (См. п. 2.7 и исходные данные.)

Задача 23. По данному закону распределения случайной величины найти характеристическую функцию $\varphi(t)$, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ случайной величины ξ. (См. п. 2.7; 2.8 и исходные данные.)

Варианты 1—10. Биномиальный закон:

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \qquad 0<p<1, \quad k=0,\ 1,\ \dots,\ n.$$

Варианты 11—20. Закон Паскаля:

$$P(\xi=k)=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, \quad a>0,\ k=0,1,2,\dots$$

Варианты 21—31. Закон Пуассона:

$$P(\xi=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad a>0,\ k=0,1,2\dots$$

Задача 24. Зная закон распределения случайной величины ξ, найти характеристическую функцию $\varphi(t)$ и в вариантах 1—20 математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ случайной величины ξ. (См. п. 2.7; 2.8 и исходные данные.)

Варианты 1—10. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[a,\ b]$.

Варианты 11—20. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-ax}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases} \qquad (a>0,\ b>0).$$

Варианты 21—31. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $M\xi=a$ и $D\xi=b$.

Задача 25. Дана плотность распределения $p_\xi(x)$ случайной величины ξ. Найти плотность распределения $p_\eta(y)$, математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η, которая представляет собой площадь одной из указанных ниже геометрических фигур.

Варианты 1—15:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a,\ b], \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [a,\ b]; \end{cases}$$

в вариантах 1—5 η — площадь равностороннего треугольника со стороной ξ, в вариантах 6—10 η — площадь круга радиуса ξ, в вариантах 11—15 η — площадь квадрата со стороной ξ.

Варианты 16—31:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & x \in [a,\ b], \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [a,\ b]; \end{cases}$$

в вариантах 16—20 η — площадь равностороннего треугольника со стороной ξ, в вариантах 21—25 η — площадь круга радиуса ξ, в вариантах 26—31 η — площадь квадрата со стороной ξ.

(См. п. 2.9; 2.10 и исходные данные.)

Задача 26. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, указанную в задаче 25. Другая случайная величина η связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi^m + 1$. Определить математическое ожидание $\mathbf{M}\eta$ и дисперсию $\mathbf{D}\eta$ случайной величины η. (См. п. 2.10 и исходные данные.)

Задача 27. Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей $p_\xi(x)$. Найти плотность распределения вероятностей $p_\eta(y)$ случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$. (См. п. 2.9 и исходные данные.)

Задача 28. По заданной плотности распределения $p_1(x)$ случайной величины ξ_1 определить функцию распределения случайной величины $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. Функция $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$ задана графически. Построить график функции распределения и, используя дельта-функцию, найти выражение для плотности распределения $p_2(y)$ случайной величины ξ_2.

Варианты 1—6:

$$p_1(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [-1,\ 1], \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [-1,\ 1]. \end{cases}$$

Варианты 7—15: $p_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Варианты 16—23: $p_1(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$.

Варианты 24—31: $p_1(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

(См. п. 2.9 и исходные данные.)

Задача 29. По заданной плотности распределения $p_\xi(x_1, x_2)$ двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2) найти плотность распределения $p_\eta(y_1, y_2)$ двумерной случайной величины (η_1, η_2), связанной взаимно однозначно с (ξ_1, ξ_2) указанными ниже соотношениями.

Варианты 1—15:

$$p_{\xi}(x_1,\ x_2)=\frac{1}{2\pi ab}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}\right)};$$

$$\xi_1=a\eta_1\cos n\eta_2,\quad \xi_2=b\eta_1\sin n\eta_2,\quad 0\leqslant\eta_1<\infty,\quad 0\leqslant\eta_2<\frac{2\pi}{n}.$$

Варианты 16—31:

$$p_{\xi}(x_1,\ x_2)=\frac{ab}{\pi^2(x_1^2+a^2)(x_2^2+b^2)};$$

$$\xi_1=a\operatorname{tg} n\eta_1,\quad \xi_2=b\operatorname{tg} n\eta_2,\quad |\eta_1|<\frac{\pi}{2n},\quad |\eta_2|<\frac{\pi}{2n}.$$

(См. п. 2.9 и исходные данные.)

Задача 30. Двумерная случайная величина $(\xi,\ \eta)$ имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области ABC, т. е.

$$p(x,\ y)=\begin{cases}1/S, & \text{если}\quad (x,\ y)\in ABC,\\ 0, & \text{если}\quad (x,\ y)\overline{\in} ABC,\end{cases}$$

где S — площадь $\triangle ABC$. Определить маргинальные плотности распределения $p_{\xi}(x)$ и $p_{\eta}(y)$ случайных величин ξ и η, математические ожидания $\mathbf{M}\xi$, $\mathbf{M}\eta$, дисперсии $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{D}\eta$, коэффициент корреляции r. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми? (См. п. 2.1.9; в исходных данных указаны декартовы координаты вершин $\triangle ABC$).

Задача 31. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания $\mathbf{M}\xi$ менее чем на $N\sigma$, где $\sigma=\sqrt{\mathbf{D}\xi}$ — среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ; N — номер варианта. (См. п. 2.11.)

Задача 32. Случайная величина ξ_i с одинаковой вероятностью может принимать одно из двух значений: i^{α} или $-i^{\alpha}$. Выяснить, удовлетворяет ли последовательность $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_i, \ldots$ попарно независимых случайных величин закону больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\xi_i\right|<\varepsilon\right\}=1,\qquad \varepsilon>0.$$

Решить задачу для двух значений параметра α: α_1 и α_2. (См. п. 2.11 и исходные данные.)

Задача 33. На отрезке $[0,\ \alpha]$ случайным образом выбраны n чисел, точнее, рассматриваются n независимых случайных величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$, равномерно распределенных на отрезке $[0,\ \alpha]$. Найти вероятность того, что их сумма заключена между x_1 и x_2, т. е. $P\left\{x_1<\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i<x_2\right\}$. (См. п. 2.12 и исходные данные.)

Задача 34. Известно, что случайная величина ξ имеет распределение Пуассона $P(\xi=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}$, неизвестным является параметр a. Используя указанный ниже метод получения точечных оценок, найти по реализации выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$ значение оценки a^* неизвестного параметра a.

Варианты 1—15. Метод моментов.

Варианты 16—31. Метод максимального правдоподобия. (См. п. 2.13 и исходные данные.)

Задача 35. Известно, что случайная величина ξ имеет биномиальное распределение $P(\xi=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, неизвестным является параметр p. Используя указанный ниже метод получения точечных оценок, найти по реализации выборки $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_8)$ значение оценки p^* неизвестного параметра p.

Варианты 1—15. Метод максимального правдоподобия.

Варианты 16—31. Метод моментов.

(См. п. 2.13 и исходные данные.)

Задача 36. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием a и известной дисперсией σ^2. По выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ объема n вычислено выборочное среднее $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a^*$. Определить доверительный интервал для неизвестного параметра распределения a, отвечающий заданной доверительной вероятности $\mathscr{P}$. (См. п. 2.14 и исходные данные.)

Задача 37. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с неизвестными математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. По выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ объема n вычислены оценки

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ и}$$

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a^*)^2 \qquad (22)$$

неизвестных параметров. Найти доверительный интервал для математического ожидания a, отвечающий доверительной вероятности $\mathscr{P}$. (См. п. 2.14 и исходные данные.)

Задача 38. В результате n опытов получена несмещенная оценка (22) для дисперсии нормальной случайной величины. Найти доверительный интервал для дисперсии при доверительной вероятности $\mathscr{P}$. (См. п. 2.16 и исходные данные.)

Задача 39. В серии из n выстрелов по мишени наблюдалось m попаданий. Найти доверительный интервал для вероятности p попадания в мишень при доверительной вероятности $\mathscr{P}=0{,}95$. (См. п. 2.16 и исходные данные.)

Задача 40. В серии из n опытов событие A не наступило ни разу. Определить число опытов n, при котором верхняя доверительная граница для вероятности $P(A)$ равна заданному числу p_1. Доверительную вероятность принять равной 0,95. (См. п. 2.16 и исходные данные.)

Задача 41. Для контроля взяты 200 узлов, собранных на ученическом конвейере. Число узлов m_i, при сборке которых пропущено i операций, сведено в таблицу:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	
m_i	41	62	45	22	16	8	4	2	Всего 200

Согласуются ли полученные результаты с распределением Пуассона $\left(P(\xi=i)=\frac{a^i}{i!}e^{-a}\right.$, где ξ — случайное число пропущенных $\left.\text{операций}\right)$ по критерию χ^2 при уровне значимости α? Решить задачу для заданного значения параметра a и для случая, когда параметр a оценивается по выборке. (См. п. 2.15; 2.16 и исходные данные.)

Исходные данные к расчетным заданиям

(В первой горизонтальной строке указаны номера задач, в левом столбце — номера вариантов)

№	1	2								3				4		5
	N	n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4	n	l	m	k	k	n	k
1	3	1	2	3	4	1	1	2	3	10	2	4	6	6	4	4
2	4	2	2	4	2	1	1	1	2	10	2	3	6	7	4	5
3	5	2	3	4	1	1	2	3	1	10	3	5	7	8	5	6
4	6	1	4	2	3	1	2	1	2	10	3	5	6	9	5	5
5	7	4	2	2	2	3	1	2	1	11	2	5	7	10	6	6
6	8	3	2	3	2	2	1	3	1	11	3	4	8	11	4	7
7	9	5	1	2	2	3	1	1	1	11	3	5	7	12	4	6
8	10	2	5	2	1	1	3	1	1	12	3	8	5	13	3	7
9	3	4	2	3	2	2	1	2	1	12	2	8	3	14	3	8
10	4	3	3	4	1	2	1	2	1	12	2	5	4	13	4	7
11	5	2	3	3	3	1	2	3	1	9	2	4	6	12	3	8
12	6	1	3	4	3	1	2	2	1	9	3	5	6	11	3	5
13	7	2	3	4	2	1	2	3	1	9	2	3	7	10	4	6
14	8	1	2	3	5	1	1	2	3	8	2	4	5	9	4	7
15	9	2	3	4	2	1	2	2	1	8	2	5	4	8	3	8
16	10	3	2	2	4	2	1	1	1	8	3	4	5	7	3	9
17	11	4	3	2	3	2	1	2	1	10	4	6	5	6	4	8
18	12	3	3	4	2	2	1	2	2	10	5	7	7	7	4	7
19	13	2	4	5	1	2	2	3	1	10	4	6	7	8	5	6
20	14	3	4	3	2	2	2	3	2	12	4	8	6	9	5	5
21	15	2	5	2	3	1	3	1	2	8	2	3	4	10	6	4
22	16	4	4	2	2	2	2	2	1	8	2	3	5	11	4	4
23	17	2	7	2	1	1	5	2	1	8	2	4	3	12	4	5
24	18	3	1	6	2	2	1	3	1	8	3	5	4	13	3	6
25	19	2	2	2	3	1	1	1	2	8	1	4	2	14	3	7
26	20	1	3	3	2	1	3	1	1	9	2	3	5	12	3	8

Продолжение

№	1	2								3				4		5
	N	n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4	n	l	m	k	k	n	k
27	[illegible]	1	4	2	2	0	2	1	1	9	3	4	4	11	3	9
28	4	2	3	1	3	1	2	0	1	9	2	6	3	10	4	10
29	5	3	1	2	3	0	1	1	2	9	4	5	5	9	4	9
30	6	3	2	3	1	2	2	2	0	9	3	5	4	8	3	8
31	8	2	3	1	3	2	1	0	2	9	2	3	6	7	3	7

Продолжение

№	6			7			8		9				10
	T_1*)	T_2*)	t	R	S_1	S_2	k_1	k_2	p_1	p_2	n_1	n_2	k
1	900	1000	10	11	2,25	3,52	71	47	0,61	0,55	2	3	4
2	900	1100	20	12	2,37	3,52	78	39	0,62	0,54	3	2	5
3	1000	1100	10	13	2,49	3,52	87	31	0,63	0,53	2	3	6
4	1000	1200	20	14	2,55	1,57	72	46	0,64	0,52	3	2	7
5	1100	1200	15	11	2,27	5,57	79	38	0,65	0,51	2	3	8
6	1100	1300	15	12	2,39	5,57	86	32	0,66	0,49	3	2	9
7	900	930	10	13	2,51	1,57	73	45	0,67	0,48	2	3	10
8	900	1130	20	14	2,57	3,52	81	37	0,68	0,47	3	2	11
9	1000	1030	15	11	2,29	3,52	85	33	0,69	0,46	2	3	4
10	1000	1130	15	12	2,41	3,52	74	44	0,71	0,45	3	2	5
11	1100	1130	5	13	2,53	3,52	82	36	0,72	0,44	2	3	6
12	1100	1230	5	14	2,59	5,57	84	34	0,73	0,43	3	2	7
13	1200	1300	5	15	2,5	8,7	75	43	0,74	0,42	2	3	8
14	1200	1230	10	16	2,6	8,5	83	35	0,75	0,41	3	2	9
15	1200	1330	5	11	2,2	3,5	76	42	0,76	0,39	2	3	10
16	1300	1400	10	12	2,4	3,5	77	41	0,77	0,38	3	2	12
17	1800	1900	10	13	2,5	3,5	47	71	0,78	0,37	2	3	5
18	1800	2000	20	14	2,6	1,8	39	78	0,39	0,45	3	2	6
19	1700	1800	10	15	2,7	7,9	31	87	0,38	0,46	2	3	7
20	1700	1900	20	16	2,7	8,2	72	46	0,37	0,47	3	2	8
21	1900	2000	15	11	2,3	3,5	38	79	0,36	0,48	2	3	9
22	1900	2100	15	12	2,4	3,5	32	86	0,35	0,49	3	2	10
23	1700	1730	10	13	2,5	3,5	73	45	0,34	0,51	2	3	11
24	1700	1830	20	14	2,6	5,6	81	37	0,33	0,52	3	2	4
25	1600	1630	15	15	2,5	8,7	33	85	0,32	0,53	2	3	5
26	1600	1730	15	11	2,3	5,6	44	74	0,31	0,54	3	2	6
27	1700	1730	5	12	2,4	5,6	36	82	0,29	0,55	2	3	7
28	1700	1830	5	13	2,5	3,5	84	34	0,28	0,56	3	2	8
29	1600	1700	5	14	2,6	5,6	75	43	0,27	0,57	2	3	9
30	1600	1630	10	15	2,7	7,9	83	35	0,26	0,58	3	2	10
31	1600	1730	5	12	2,25	3,52	76	42	0,25	0,59	2	3	11

*) Здесь две последние цифры означают минуты.

№	11	12		13					14				15						
	M	n_1	n_2	N_1	M_1	N_2	M_2	K	k	l	m	n	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	l
1	12	100	250	4	1	2	5	3	8	10	3	2	50	30	20	70	80	90	1
2	8	430	180	7	3	5	1	4	7	6	2	3	50	30	20	70	80	90	2
3	5	170	540	2	3	5	4	1	6	8	3	1	50	30	20	70	80	90	3
4	11	520	390	8	2	3	2	5	12	5	3	2	60	20	20	70	80	90	1
5	7	360	600	6	4	1	7	2	13	11	2	4	60	20	20	70	80	90	2
6	10	700	90	3	2	4	4	2	11	8	2	5	60	20	20	70	80	90	3
7	6	240	610	5	5	4	10	6	12	7	2	4	40	30	30	80	80	90	1
8	9	80	710	13	12	4	6	10	9	6	2	3	40	30	30	80	80	90	2
9	3	630	230	1	9	3	3	4	10	7	4	1	40	30	30	80	80	90	3
10	8	500	320	3	7	5	2	3	11	7	4	4	40	20	40	90	90	80	1
11	5	810	70	4	6	7	8	5	13	8	5	2	40	20	40	90	90	80	2
12	10	450	280	2	3	7	1	2	8	7	3	3	40	20	40	90	90	80	3
13	6	270	640	2	2	3	1	1	12	10	4	2	70	20	10	70	80	90	1
14	9	380	470	2	8	3	1	6	9	6	1	3	70	20	10	70	80	90	2
15	4	640	80	6	4	3	3	4	6	8	3	2	70	20	10	70	80	90	3
16	7	160	570	5	5	4	3	3	14	13	3	3	60	10	30	80	90	80	1
17	5	590	200	25	3	25	2	19	11	10	4	5	60	10	30	80	90	80	2
18	11	620	190	20	1	40	7	15	7	5	2	2	60	10	30	80	90	80	3
19	9	730	100	20	4	25	5	7	15	9	4	3	50	20	30	90	80	90	1
20	6	540	200	50	8	20	6	42	8	10	3	3	50	20	30	90	80	90	2
21	12	90	690	40	8	10	2	35	12	5	2	2	50	20	30	90	80	90	3
22	8	220	550	25	2	20	4	12	14	11	3	5	30	30	40	70	70	80	1
23	10	290	700	20	1	40	5	15	6	7	2	2	30	30	40	70	70	80	2
24	7	350	440	25	2	25	6	15	13	9	4	4	30	30	40	70	70	80	3
25	3	470	360	10	3	50	11	7	9	6	3	3	20	40	40	90	70	80	1
26	6	680	230	20	1	20	4	15	11	10	2	5	20	40	40	90	70	80	2
27	9	710	160	25	3	25	7	17	7	8	4	3	20	40	40	90	70	80	3
28	4	180	270	40	5	50	8	12	12	11	5	4	10	50	40	70	90	80	1
29	7	260	620	40	8	20	4	27	8	3	2	2	10	50	40	70	90	80	2
30	5	650	140	25	3	40	2	14	6	6	1	2	10	50	40	70	90	80	3
31	8	230	480	20	1	50	6	11	10	8	3	3	20	30	50	70	70	90	1

№	16		17		18					19		
	n	m	p	n	n	n_1	n_2	p_1	p_2	m	n	p
1	3	2	0,3	10	15	1	2	0,1	0,2	7	1000	0,002
2	7	3	0,3	14	15	2	1	0,15	0,15	7	1000	0,003
3	4	7	0,3	13	15	2	2	0,15	0,15	7	1000	0,004
4	4	3	0,3	12	15	1	1	0,1	0,15	7	1000	0,005
5	3	6	0,3	11	15	3	2	0,2	0,25	7	1000	0,006
6	6	5	0,3	15	15	2	2	0,15	0,2	7	1000	0,007
7	3	5	0,4	11	15	3	1	0,2	0,15	7	1000	0,008
8	8	3	0,4	13	15	1	2	0,13	0,17	7	1000	0,009
9	6	4	0,4	14	15	2	1	0,14	0,16	7	1000	0,01
10	4	5	0,4	10	15	1	3	0,16	0,24	7	1000	0,011
11	2	7	0,4	12	15	3	2	0,17	0,23	8	200	0,01
12	5	4	0,4	15	15	3	1	0,18	0,12	8	300	0,01
13	8	6	0,5	12	15	3	1	0,19	0,11	8	200	0,02
14	2	6	0,4	12	15	3	3	0,2	0,26	8	500	0,01
15	2	3	0,5	11	14	1	3	0,09	0,21	8	300	0,02
16	4	2	0,5	13	14	1	4	0,1	0,21	8	700	0,01
17	7	6	0,5	14	14	2	2	0,11	0,2	8	400	0,02
18	5	3	0,5	15	14	2	4	0,12	0,2	8	900	0,01
19	4	6	0,6	13	14	3	3	0,15	0,2	8	500	0,02
20	8	5	0,6	11	14	2	3	0,2	0,2	8	1000	0,011
21	6	3	0,6	12	14	3	4	0,3	0,2	9	500	0,004
22	5	2	0,6	10	14	2	3	0,1	0,2	9	600	0,005
23	3	7	0,6	15	14	3	4	0,2	0,25	9	400	0,01
24	6	8	0,6	14	14	5	4	0,25	0,35	9	500	0,01
25	5	6	0,7	14	14	4	4	0,21	0,39	9	600	0,01
26	7	4	0,7	10	14	4	3	0,1	0,3	9	1000	0,007
27	5	7	0,7	15	14	2	2	0,25	0,35	9	1000	0,008
28	6	2	0,7	11	14	1	2	0,1	0,15	9	1000	0,009
29	7	5	0,7	12	14	1	1	0,05	0,15	9	1000	0,01
30	8	4	0,7	13	14	1	2	0,1	0,1	9	1000	0,011
31	7	2	0,3	13	14	2	2	0,05	0,05	9	1000	0,012

Продолжение

№	20				21				22				
	n	p	k_1	k_2	a	b	x_1	x_2	a	b	c	x_1	x_2
1	100	0,8	80	90	2,5	4	3	3,3	—2	8	—2	1	3
2	100	0,8	85	95	1,5	3	2	2,6	—2	4/3	—2/3	1/3	2/3
3	100	0,8	70	95	1,5	2,5	2	2,3	—2	—8	2	—3/2	—1
4	100	0,7	83	93	1	3,5	2	2,8	—4	6	2	0	3/4
5	100	0,7	50	60	—1	2	—0,7	1,1	—3	3	—2	1/2	3/2
6	100	0,7	65	75	—2	1	—1,5	0,3	—4	—6	—2	—3/4	1/4
7	100	0,7	70	80	—3	5	—2	2	—3	—3	2	—1/2	3/2
8	100	0,6	40	50	—1,5	2,5	—1	0	—3	—4	2	1/3	4/3
9	100	0,75	65	80	1	1,8	1,3	1,6	—2	—4/3	2/3	—1/3	2/3
10	100	0,75	70	85	1	2,4	1,5	2	—3	4	—2	—1/3	5/3
11	100	0,75	68	78	2	3,5	2,5	3	—2	8	0	1	3
12	100	0,7	60	—	2	2,8	2,1	2,5	—2	4/3	0	1/3	2/3
13	100	0,7	70	—	1	2,8	—1	3	—2	—8	0	—3/2	—1
14	100	0,7	80	—	1	2,6	1,5	3	—4	6	0	0	3/4
15	100	0,6	65	—	2	3	1	3	—3	3	0	1/2	3/2
16	100	0,6	75	—	2	4,8	4,5	5	—4	—6	0	—3/4	1/4
17	100	0,6	50	—	—4	—2	—1	0	—3	—3	0	—1/2	3/2
18	100	0,8	70	—	—3	—1	—2	0	—3	—4	0	1/3	4/3
19	100	0,8	80	—	2	4	0	3	—2	—4/3	0	—1/3	2/3
20	100	0,8	90	—	1	3	0	2	—3	4	0	—1/3	5/3
21	100	0,8	95	—	1	1,5	0	0,5	—2	8	—1	1	3
22	100	0,3	—	20	—1	1,5	0	1	—4	6	1	0	3/4
23	100	0,3	—	30	—1,5	—1	—1	2	—2	—8	1	—3/2	—1
24	100	0,3	—	40	—1,5	1	—1	1	—4	—6	—1	—3/4	1/4
25	200	0,4	—	80	0,5	1	0	3	—3	3	—1	1/2	3/2
26	200	0,4	—	90	0,2	2	0	4	—3	—4	1	1/3	4/3
27	200	0,4	—	100	0,5	3	0	0,5	—3	—3	1	—1/2	3/2
28	300	0,8	—	250	0,4	4	1	5	—3	4	—1	—1/3	5/3
29	400	0,6	—	270	1/4	1	0	3	—2	—4/3	1/3	—1/3	2/3
30	400	0,7	—	290	0,02	2	0	3	—2	4/3	—1/3	1/3	2/3
31	400	0,8	—	300	0,05	4	0	10	—1	2	3	—1/3	4/3

№	23			24		25, 26		
	n	p	a	a	b	a	b	m
1	5	0,37	—	—3	5	0	2	4
2	14	0,28	—	2	4	1	2	3
3	6	0,53	—	—7	—2	2	3	2
4	9	0,46	—	—4	3	2	4	5
5	7	0,18	—	—1	6	3	5	4
6	3	0,67	—	—5	1	0	2	3
7	8	0,32	—	—2	3	1	3	2
8	10	0,87	—	—6	—2	2	4	3
9	4	0,25	—	4	7	3	5	4
10	12	0,41	—	1	8	4	6	2
11	—	—	0,68	2,7	6	0	2	5
12	—	—	0,35	3,8	13	1	2	4
13	—	—	0,21	4,5	8	2	3	3
14	—	—	0,89	2,0	5	2	4	5
15	—	—	0,72	6,1	9	3	5	4
16	—	—	0,43	1,8	4	0	2	4
17	—	—	0,17	5,7	11	1	3	3
18	—	—	0,95	2,9	7	2	4	2
19	—	—	0,38	1,1	3	3	5	4
20	—	—	0,63	4,3	10	4	6	3
21	—	—	0,026	3,7	1,1	0	2	4
22	—	—	0,38	4,5	2,0	1	2	5
23	—	—	0,033	2,8	1,3	3	4	6
24	—	—	0,218	5,0	3,5	2	4	5
25	—	—	0,65	4,7	1,9	3	5	4
26	—	—	0,816	6,4	2,8	3	4	3
27	—	—	0,74	6,1	1,7	0	2	4
28	—	—	0,015	5,3	1,4	1	3	5
29	—	—	0,671	7,2	4,1	2	4	4
30	—	—	0,324	3,9	1,2	3	5	3
31	—	—	0,57	2,7	1,5	4	6	2

Исходные данные к задаче 27

№	$p_\xi(x)$	$\eta=\varphi(\xi)$	№	$p_\xi(x)$	$\eta=\varphi(\xi)$
27.1	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\eta=\lvert\xi\rvert$	27.2	$\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$\eta=e^{-\xi^2}$
27.3	$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$\eta=\lvert\xi\rvert$	27.4	$\dfrac{1}{\pi\,\mathrm{ch}\,x}$	$\eta=e^{-\xi^2}$
27.5	$\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$	$\eta=\lvert\xi\rvert$	27.6	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\eta=\xi^2$
27.7	$\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$\eta=\lvert\xi\rvert$	27.8	$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$	$\eta=\xi^2$
27.9	$\dfrac{1}{\pi\,\mathrm{ch}\,x}$	$\eta=\lvert\xi\rvert$	27.10	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\eta=\xi^2$

Продолжение

№	$p_{\xi}(x)$	$\eta=\varphi(\xi)$	№	$p_{\xi}(x)$	$\eta=\varphi(\xi)$
27.11	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\eta=e^{-\xi^2}$	**27.12**	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\,\overline{\in}\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=\xi^2$
27.13	$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\,\overline{\in}\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=e^{-\xi^2}$	**27.14**	$\dfrac{1}{\pi\,\mathrm{ch}\,x}$	$\eta=\xi^2$
27.15	$\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$	$\eta=e^{-\xi^2}$	**27.16**	$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\,\overline{\in}\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=2\xi+3$
27.17	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\eta=2\xi+3$	**27.18**	$\dfrac{1}{\pi\,\mathrm{ch}\,x}$	$\eta=4\xi+5$
27.19	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\eta=2\xi+3$	**27.20**	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\eta=6\xi+4$
27.21	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\,\overline{\in}\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=2\xi+3$	**27.22**	$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\,\overline{\in}\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=6\xi+4$

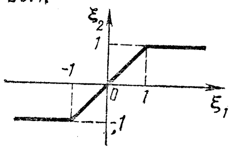
Продолжение

№	$p_\xi(x)$	$\eta=\varphi(\xi)$	№	$p_\xi(x)$	$\eta=\varphi(\xi)$
27.23	$\dfrac{1}{\pi \operatorname{ch} x}$	$\eta=2\xi+3$	27.24	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\eta=6\xi+4$
27.25	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\eta=4\xi+5$	27.26	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=6\xi+4$
27.27	$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=4\xi+5$	27.28	$\dfrac{1}{\pi \operatorname{ch} x}$	$\eta=6\xi+4$
27.29	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\eta=4\xi+5$	27.30	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\eta=8\xi+1$
27.31	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$	$\eta=4\xi+5$			

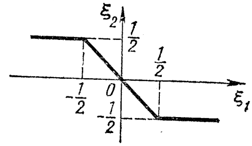
Продолжение

Исходные данные к задаче 28. График функции $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$.

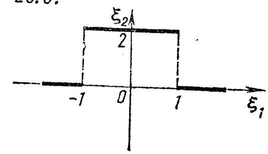
28.1.



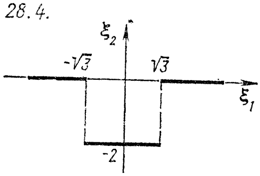
28.2.



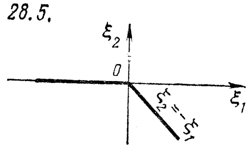
28.3.



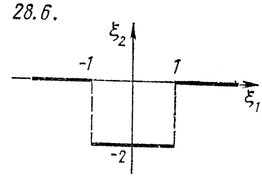
28.4.



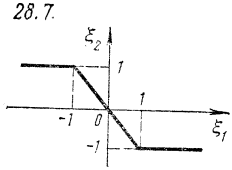
28.5.



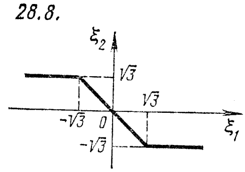
28.6.



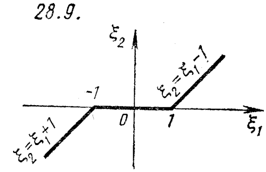
28.7.



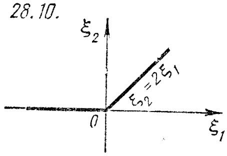
28.8.



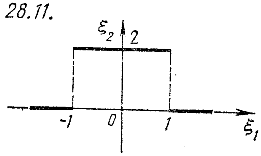
28.9.



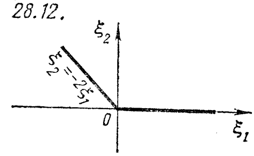
28.10.



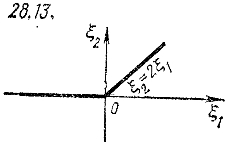
28.11.



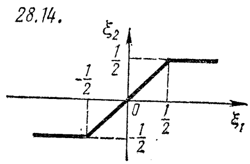
28.12.



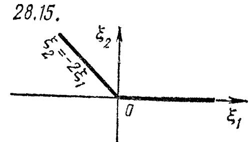
28.13.



28.14.

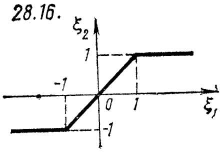


28.15.

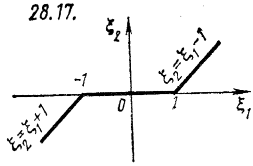


Продолжение

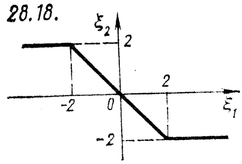
28.16.



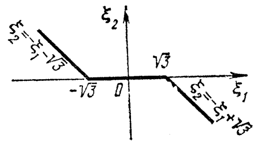
28.17.



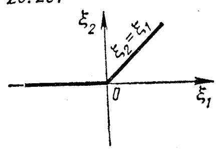
28.18.



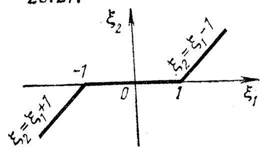
28.19.



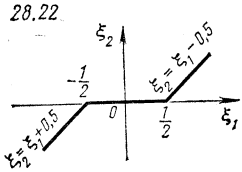
28.20.



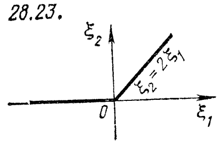
28.21.



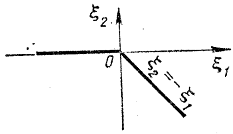
28.22



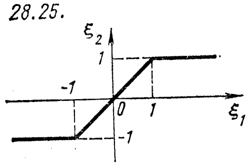
28.23.



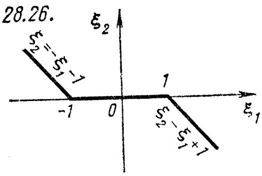
28.24.



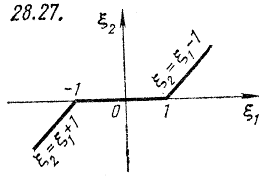
28.25.



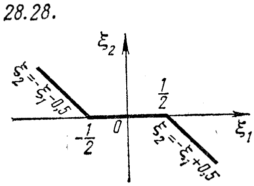
28.26.



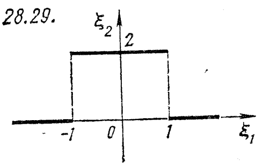
28.27.



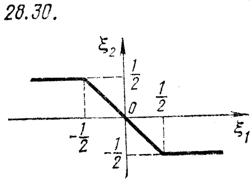
28.28.



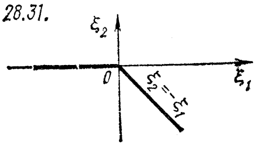
28.29.



28.30.



28.31.



Продолжение

Исходные данные к расчетным заданиям

№	29			30						32		33			
	a	b	n	x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C	α_1	α_2	α	n	x_1	x_2
1	1	2	1	0	0	1	1	1	—1	—1	0,1	1/3	108	17	20
2	2	1	2	0	0	—1	1	1	1	—2	0,2	1/4	162	22	26
3	3	2	3	0	0	—1	1	—1	—1	—3	0,3	1/5	300	28	33
4	2	3	2	0	0	—1	—1	1	—1	—4	0,4	1/6	432	35	38
5	4	2	4	0	0	2	2	2	—2	—0,5	0,05	1/7	584	40	44
6	2	4	2	0	0	—2	2	2	2	—1,5	0,15	1/8	768	46	51
7	3	4	2	0	0	—2	2	—2	—2	—2,5	0,06	1/9	972	53	56
8	4	3	2	0	0	—2	—2	2	—2	—3,5	0,07	1/10	1200	58	62
9	5	1	2	1	1	1	—1	0	0	—5	0,08	1/11	1452	64	69
10	5	2	5	—1	1	1	1	0	0	—6	0,25	1/12	1728	71	74
11	5	3	4	—1	1	—1	—1	0	0	—7	0,26	1/13	2028	76	80
12	3	5	2	—1	—1	1	—1	0	0	0	0,27	2/3	108	34	40
13	2	2	3	2	2	2	—2	0	0	—4,5	0,01	1/2	162	44	52
14	3	7	3	—2	2	2	2	0	0	—5,5	0,02	2/5	300	56	66
15	7	4	2	—2	2	—2	—2	0	0	—6,5	0,03	2/7	584	80	88
16	4	5	1	—2	—2	2	—2	0	0	—7,5	0,04	2/9	972	106	112
17	1	2	1	—1	0	0	1	0	—1	—9	0,06	2/11	1454	128	138
18	2	1	2	—1	0	0	2	0	—2	0	0,09	2/13	2028	152	160
19	3	2	3	—1	0	0	—1	0	1	—11	0,31	1	108	51	60
20	2	3	2	—1	0	0	—2	0	2	—12	0,32	3/4	162	66	78
21	4	2	4	—1	0	1	1	1	—1	—8,5	0,33	3/5	300	74	99
22	2	4	2	—1	0	1	2	1	—2	—9,5	0,34	3/7	584	120	152
23	3	4	2	—1	0	1	—1	1	1	—10,5	0,36	3/8	768	138	153
24	4	3	2	—1	0	1	—2	1	2	—11,5	0,37	3/10	1200	174	186
25	5	1	2	0	—1	—1	0	1	0	—13	0,49	3/11	1452	192	207
26	5	2	5	0	—1	—2	0	2	0	—14	0,48	3/13	2028	228	240
27	5	3	4	0	—1	1	0	—1	0	—15	0,47	1/14	584	20	22
28	3	5	2	0	—1	2	0	—2	0	—16	0,46	1/20	1200	29	31
29	2	2	3	0	0	1	1	1	—1	—1,4	0,44	1/26	2028	38	40
30	3	7	3	0	0	—1	1	1	1	—1,6	0,43	2	108	102	120
31	7	4	2	0	0	—1	—1	1	—1	—1,8	0,42	3/2	162	132	156

Продолжение

№	34, 35									36			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	n	a^*	n	σ^2	γ
1	52	48	49	49	52	50	47	48	65	110	150	100	0,95
2	117	131	128	118	125	135	123	119	150	110	130	100	0,94
3	32	37	33	35	27	36	35	34	50	110	110	100	0,93
4	101	98	113	117	98	93	105	103	140	110	90	100	0,92
5	27	34	26	33	33	36	28	30	50	120	150	144	0,95
6	81	97	75	79	85	81	78	73	100	120	130	144	0,94
7	19	13	10	11	20	22	15	14	30	120	110	144	0,93
8	73	75	69	74	73	77	68	70	110	120	90	144	0,92
9	43	39	41	45	36	42	41	37	70	110	150	100	0,94
10	5	12	8	15	4	3	7	6	25	110	130	100	0,93

Продолжение

№	34, 35									36			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	n	a^*	n	σ^2	$\mathcal{P}$
11	25	41	36	34	31	40	15	22	60	110	110	100	0,92
12	40	31	65	56	71	54	36	47	100	110	90	100	0,95
13	36	70	63	58	93	81	25	38	110	120	150	144	0,94
14	18	16	23	14	11	15	27	10	40	120	130	144	0,93
15	35	28	16	45	22	14	39	27	60	120	110	144	0,92
16	25	35	39	41	32	34	28	27	50	120	90	144	0,95
17	67	73	85	63	56	94	55	66	130	110	150	100	0,93
18	35	41	30	36	38	42	35	32	80	110	130	100	0,92
19	167	152	155	161	166	157	158	162	300	110	110	100	0,95
20	25	34	12	36	18	33	16	17	50	110	90	100	0,94
21	18	37	45	33	27	36	19	40	70	120	150	144	0,93
22	98	79	83	85	91	81	86	84	100	120	130	144	0,92
23	45	78	83	66	62	71	73	50	90	120	110	144	0,95
24	14	13	17	15	20	25	13	22	45	120	90	144	0,94
25	35	53	43	35	34	44	37	30	60	110	150	100	0,92
26	35	45	74	77	85	86	89	62	150	110	130	100	0,95
27	11	15	17	20	15	13	17	11	30	110	110	100	0,94
28	33	12	15	17	25	20	28	17	40	110	90	100	0,93
29	21	11	28	12	13	15	22	19	50	120	150	144	0,92
30	83	94	74	77	85	89	80	81	100	120	130	144	0,95
31	14	12	9	8	15	7	11	8	30	120	110	144	0,94

Продолжение

№	37				38			39		40	41	
	a^*	σ^{2*}	n	$\mathcal{P}$	n	σ^{2*}	$\mathcal{P}$	n	m	p_1	a	α
1	2,1	0,5	31	0,8	14	45	0,98	30	10	0,01	1,70	0,002
2	2,1	0,5	28	0,9	15	1,5	0,98	30	11	0,02	1,71	0,01
3	2,1	0,5	26	0,95	10	18	0,8	30	12	0,03	1,72	0,005
4	2,1	0,5	24	0,98	9	0,2	0,98	30	13	0,04	1,73	0,01
5	1,7	0,8	31	0,8	12	25	0,96	30	14	0,05	1,74	0,05
6	1,7	0,8	28	0,9	17	16	0,96	30	15	0,06	1,75	0,005
7	1,7	0,8	26	0,95	12	42	0,8	30	16	0,07	1,76	0,02
8	1,7	0,8	24	0,98	13	10	0,96	30	17	0,08	1,77	0,002
9	2,1	0,5	31	0,9	25	50	0,8	30	18	0,09	1,78	0,01
10	2,1	0,5	28	0,95	12	8	0,9	30	19	0,011	1,79	0,2
11	2,1	0,5	26	0,98	10	14	0,98	31	8	0,012	1,80	0,05
12	2,1	0,5	24	0,8	22	30	0,9	32	8	0,013	1,81	0,01
13	1,7	0,8	31	0,9	23	8	0,8	33	8	0,014	1,82	0,02
14	1,7	0,8	28	0,95	7	15	0,96	34	8	0,015	1,83	0,002
15	1,7	0,8	26	0,98	11	12	0,98	35	8	0,016	1,84	0,1
16	1,7	0,8	24	0,8	11	56	0,8	36	8	0,017	1,85	0,01
17	2,1	0,5	31	0,95	14	14	0,8	37	8	0,018	1,86	0,02
18	2,1	0,5	28	0,98	21	20	0,96	38	8	0,019	1,87	0,01
19	2,1	0,5	26	0,8	8	3,5	0,98	39	8	0,02	1,88	0,005
20	2,1	0,5	24	0,9	27	5	0,96	40	8	0,021	1,89	0,02

№	37				38			39		40	41	
	a^*	σ^{2*}	n	P	n	σ^{2*}	$\mathscr{P}$	n	m	p_1	a	α
21	1,7	0,8	31	0,95	19	40	0,9	31	14	0,022	1,90	0,1
22	1,7	0,8	28	0,98	20	36	0,9	32	15	0,023	1,76	0,005
23	1,7	0,8	26	0,8	17	24	0,96	33	16	0,024	1,77	0,05
24	1,7	0,8	24	0,9	26	32	0,9	34	17	0,025	1,78	0,02
25	2,1	0,5	31	0,98	24	31	0,98	35	18	0,026	1,79	0,01
26	2,1	0,5	28	0,8	9	36	0,96	36	19	0,027	1,80	0,02
27	2,1	0,5	26	0,9	16	4	0,8	37	20	0,028	1,81	0,05
28	2,1	0,5	24	0,95	15	54	0,8	38	21	0,029	1,82	0,01
29	1,7	0,8	31	0,98	14	32	0,9	39	22	0,03	1,83	0,05
30	1,7	0,8	28	0,8	18	48	0,96	40	23	0,031	1,84	0,02
31	1,7	0,8	26	0,9	16	64	0,98	41	24	0,032	1,85	0,05

III. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

3.1. Задача Штурма — Лиувилля. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $K(x) \in C^1[a, b]$, $K(x) \geqslant K_0 > 0$, $q(x) \in C[a, b]$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) \in C[a, b]$, $\rho(x) > 0$, параметры α_1, α_2, β_1, β_2 удовлетворяют условиям $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Требуется найти такие значения параметра α, при которых существуют отличные от тождественного нуля (нетривиальные) решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (2).

Те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (1)—(2), называются *собственными значениями* этой краевой задачи, а соответствующие им нетривиальные решения —*собственными функциями*

Свойства собственных значений и собственных функций

1° *Существует счетное множество собственных значений*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \quad \lambda_n \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

которым соответствуют собственные функции

$$y_1(x), \; y_2(x), \; \ldots, \; y_n(x), \; \ldots$$

2°. *Собственные функции на отрезке* $[a, b]$, *отвечающие разным значениям параметра* λ, *ортогональны с весом* $\rho(x)$:

$$\int_a^b \rho(x)\, y_n(x)\, y_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

3°. **Теорема Стеклова.** *Всякая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая краевым условиям* (2) *и имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд* *по собственным функциям* y_n:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n=\frac{\int_a^b \rho(x) f(x) y_n(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x) y_n^2(x)\,dx}.$$

Для примера решим следующую задачу. Найти в указанной области отличные от тождественного нуля решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

$$y''+\lambda y=0, \quad x\in[1, 2], \tag{3}$$

$$y(1)=y'(2)=0. \tag{4}$$

Рассмотрим три случая. 1) $\lambda<0$. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y=C_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(x-1)+C_2 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}(x-1).$$

Из условия $y(1)=0$ находим $C_2=0$, $y(x)=C_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(x-1)$.
Из условия $y'(2)=0$ получаем $C_1=0$, т. е. $y(x)\equiv 0$;
2) $\lambda=0$. Общее решение уравнения (3) имеет вид $y(x)=C_1x+C_2$.
Условия (4) приводят к тому, что $C_1=C_2=0$, т. е. $y(x)\equiv 0$;
3) $\lambda>0$. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}(x-1)+C_2\cos\sqrt{\lambda}(x-1).$$

Из условия $y(1)=0$ получаем $C_2=0$; $y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}(x-1)$. Условие $y'(2)=0$ приводит к уравнению $C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$. Так как $\sqrt{\lambda}\neq 0$ и $C_1\neq 0$, то $\cos\sqrt{\lambda}=0$, откуда получаем: $\sqrt{\lambda}=\pi/2+\pi n$, $n=0, 1, 2, \ldots$; таким образом, собственные значения задачи (3)—(4) равны

$$\lambda_n=(\pi/2+\pi n)^2, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

собственные функции —

$$y_n=\sin(\pi/2+\pi n)(x-1), \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

3.2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка в случае двух независимых переменных. Общее линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+au_x+bu_y+cu=f, \tag{5}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f — заданные функции переменных x, y. Оно принадлежит к э л л и п т и ч е с к о м у типу в точке (x, y), если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$; принадлежит к г и п е р б о л и ч е с к о м у типу в точке (x, y), если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, и принадлежит к п а р а б о л и ч е с к о м у типу в точке (x, y), если $a_{11}^2-a_{11}a_{22}=0$.

Уравнение

$$a_{11}\,dy^2-2a_{12}\,dy\,dx+a_{22}\,dx^2=0 \tag{6}$$

называется *уравнением характеристик* для уравнения (5), а кривые, определяемые соотношением $\varphi(x, y)=C$, где φ — решение уравнения (6), называются *характеристиками* уравнения (5).

Уравнение (6) эквивалентно двум уравнениям

$$a_{11}\,dy-\left(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}\right)dx=0, \tag{7}$$

$$a_{11}\,dy-\left(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}\right)dx=0. \tag{8}$$

Для уравнения гиперболического типа общие интегралы $\varphi(x, y)=C_1$ и $\psi(x, y)=C_2$ уравнений (7) и (8) вещественны и различны; они определяют два различных семейства вещественных характеристик уравнения (5). Замена $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ приводит уравнение (5) к каноническому виду

$$u_{\xi\eta}+\alpha_1 u_\xi+\beta_1 u_\eta+\gamma_1 u=\delta_1(\xi, \eta).$$

Если уравнение принадлежит к параболическому типу, то уравнения (7) и (8) совпадают, общий интеграл $\varphi(x, y)=C$ определяет одно семейство вещественных характеристик уравнения (5). Замена $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $D(\xi, \eta)/D(x, y)\neq 0$ в рассматриваемой области, приводит уравнение к каноническому виду

$$u_{\eta\eta}+\alpha_2 u_\xi+\beta_2 u_\eta+\gamma_2 u=\delta_2(\xi, \eta).$$

Для уравнения эллиптического типа общие интегралы уравнений (7) и (8) являются комплексно-сопряженными. Они определяют два семейства мнимых характеристик

Пусть $\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=C$ — общий интеграл уравнения (7). Тогда замена $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ приводит уравнение (5) к следующему каноническому виду:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\alpha_3 u_\xi+\beta_3 u_\eta+\gamma_3 u=\delta_3(\xi, \eta).$$

Замечание. В некоторых случаях каноническое уравнение позволяет без труда найти общее решение заданного уравнения.

Например, уравнение $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_x-u_y=0$ заменой $\xi=x+y$, $\eta=y$ приводится к каноническому виду $u_{\eta\eta}-u_\eta=0$. Его общее решение задается формулой

$$u(\xi, \eta)=C_1(\xi)\,e^\eta+C_2(\xi),$$

следовательно, общее решение данного уравнения может быть записано в виде

$$u(x, y)=C_1(x+y)\,e^y+C_2(x+y),$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

3.3. Метод разделения переменных. Рассмотрим применение этого метода к решению уравнений различных типов.

Эллиптические уравнения

А. *Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса R:*

$$\Delta u=0,\quad u|_{r=R}=f(\varphi),$$

где $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, (r, φ) — полярные координаты точки (x, y); $f(\varphi)$ — заданная функция.

В полярных координатах (r, φ) уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \tag{9}$$

Решения этого уравнения будем искать в виде

$$u(r, \varphi)=R(r)\,\Phi(\varphi). \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в (9), получим

$$\Phi(r^2R''+rR')=-R\Phi'',\quad\text{или}\quad\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Из последнего соотношения для нахождения функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{11}$$

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0,\quad \lambda=\mathrm{const}, \tag{12}$$

Из очевидного равенства $u(r,\ \varphi+2\pi)=u(r,\ \varphi)$ следует, что $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$; из уравнения (11) находим $\lambda=n^2$ и

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$R_0(r)=C_0+D_0\ln r \text{ при } n=0;\quad R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n} \text{ при } n>0.$$

В силу ограниченности решения $u(r,\ \varphi)$ в центре круга имеем $|R(0)|<C$, т. е.

$$R_0(r)=C_0 \text{ при } n=0,\quad R_n(r)=C_nr^n \text{ при } n=1,\ 2,\ \dots$$

Решение задачи Дирихле ищется в виде

$$u(r,\ \varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\,r^n,$$

где коэффициенты A_0, A_n, B_n, $n=1,\ 2,\ \dots$, определяются по формулам:

$$A_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi,\quad A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Замечание. Решение *задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце* ищется в виде

$$u(r,\ \varphi)=C_0+D_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(A_nr^n+\frac{C_n}{r^n}\right)\cos n\varphi+\left(B_nr^n+\frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\varphi\right\}.$$

Коэффициенты определяются из граничных условий.

Б. *Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре радиуса* R:

$$\Delta u=0,\quad u\,|_{r=R}=f(\varphi,\ \theta).$$

Здесь $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$, $(r,\ \varphi,\ \theta)$ — сферические координаты точки $(x,\ y,\ z)$; $f(\varphi,\ \theta)$ — заданная функция.

Частные решения уравнения Лапласа, записанного в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0, \tag{13}$$

будем искать в виде $u(r,\ \varphi,\ \theta)=R(r)\,\mathrm{X}(\varphi,\ \theta)$. Подставляя их в (13), получаем уравнения

$$r^2R''+2rR'-\lambda R=0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{X}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\sin\theta)\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial\theta}\right]+\lambda\mathrm{X}=0. \tag{15}$$

Будем искать решения уравнения (15) в виде $\mathrm{X}(\varphi,\ \theta)=\Phi(\varphi)\,\Psi(\theta)$. С учетом соотношения $\mathrm{X}(\varphi+2\pi,\ \theta)=\mathrm{X}(\varphi,\ \theta)$ получаем

$$\Phi''+\mu\Phi=0,\quad \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi), \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Psi}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Psi=0. \tag{17}$$

Из (16) имеем $\mu=k^2$, $k=0,\ 1,\ \dots$ и

$$\Phi_k(\varphi)=A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Полагая в (17) $\xi=\cos\theta$ и обозначая $\Psi(\theta)=Y(\cos\theta)=Y(\xi)$, получаем

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dY}{d\xi}\right]+\left(\lambda-\frac{k^2}{1-\xi^2}\right)Y=0$$

Это уравнение имеет ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ решения тогда и только тогда, когда $\lambda=n(n+1)$, и этими решениями являются функции

$$P_n^k(\xi)=(1-\xi^2)^{k/2}\frac{d^kP_n(\xi)}{d\xi^k},$$

где $P_n(\xi)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ — полиномы Лежандра;

$$P_n(\xi)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{d\xi^n}[(\xi^2-1)^n], \qquad \int_{-1}^{1}P_n(\xi)P_m(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

Таким образом мы находим частные решения уравнения (15):

$$X_n(\varphi, \theta)=A_0P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)P_n^k(\cos\theta)$$

и общее решение уравнения (14) при $\lambda=n(n+1)$, $0\leqslant k\leqslant n$:

$$R_n(r)=C_nr^n+D_n/r^{n+1}.$$

Следовательно, искомые частные решения уравнения (13) могут быть представлены в виде

$$u_n(r, \varphi, \theta)=(C_nr^n+D_n/r^{n+1})X_n(\varphi, \theta).$$

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре следует искать в виде

$$u(r, \varphi, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left[A_{0n}P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(A_{kn}\cos k\varphi+B_{kn}\sin k\varphi)P_n^k(\cos\theta)\right],$$

где A_{0n}, $n=0, 1, 2, \ldots$; A_{kn}, B_{kn}, $k=1, 2, \ldots, n$, $n=1, 2, \ldots$, определяются через коэффициенты разложения функции $f(\varphi, \theta)$:

$$f(\varphi, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\tilde{A}_{0n}P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(\tilde{A}_{kn}\cos k\varphi+\tilde{B}_{kn}\sin k\varphi)P_n^k(\cos\theta)\right].$$

Замечание 1. Решение *задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое* следует искать в виде

$$u(r, \varphi, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left[A_{0n}P(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}(A_{kn}\cos k\varphi+B_{kn}\sin k\varphi)P_n^k(\cos\theta)\right]+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}r^{-n-1}\left[C_{0n}P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{kn}\cos k\varphi+D_{kn}\sin k\varphi\right)P_n^k(\cos\theta)\right].$$

Коэффициенты определяются из граничных условий.

Если граничные функции не зависят от угла φ, т. е. $f(\varphi, \theta)\equiv f(\theta)$, то соответствующие формулы упрощаются: $u(r, \theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta)$ — в случае шара, где $A_n=\dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$;

$u(r, \theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nr^{-n-1}P_n(\cos\theta)$ — в случае шарового слоя, Коэффициенты определяются из граничных условий.

Замечание 2. Метод разделения переменных, примененный к *уравнению Гельмгольца* $\Delta u + cu = 0$ *в шаре*, приводит к решению уравнения

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R}{d r} + \left(c - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R = 0,$$

которое заменой $R = Y/\sqrt{r}$ сводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr} + \left(c - \frac{\left(n+\frac{1}{r}\right)^2}{r^2}\right) Y = 0.$$

Замечание 3. *Уравнение Пуассона* $\Delta u = f$ заменой $v = u - u_0$, где u_0 — частное решение уравнения Пуассона, сводится к уравненню Лапласа $\Delta v = 0$.

Гиперболические уравнения

А. *Первая смешанная задача для волнового уравнения в области* $Q\times(0, T)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$, $t \in (0, T)$:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \tag{18}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \tag{19}$$

$$u|_{\partial Q\times(0, T)} = 0. \tag{20}$$

Здесь символом ∂Q обозначена граница области Q. Сначала ищем частные решения уравнения (18), отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие условиям (20) в виде

$$u(x, t) = T(t)\, V(x). \tag{21}$$

Подставляя выражение (21) в (18), получаем

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \tag{22}$$

$$\Delta V + \lambda V = 0, \quad \lambda = \text{const}.$$

Таким образом получена задача Штурма — Лиувилля

$$\Delta V + \lambda V = 0, \quad V|_{\partial Q} = 0.$$

Решая ее, находим собственные значения λ_n и собственные функции $V_n(x)$. Общее решение уравнения (22) найдем, подставляя в него λ_n вместо λ:

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, at + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, at.$$

Искомое решение задачи (18) — (20) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, at + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, at\right) V_n(x),$$

$$A_n = \frac{\int_Q u_0(x)\, V_n(x)\, dx}{\int_Q V_n^2(x)\, dx}; \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\, a}\, \frac{\int_Q u_1(x)\, V_n(x)\, dx}{\int_Q V_n^2(x)\, dx}.$$

Б. *Первая смешанная задача для волнового уравнения на отрезке* $[0, l]$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Ее решение $u(x, t)$ находится в виде

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin\frac{\pi n a}{l} t\right)\sin\frac{\pi n}{l} x,$$

где $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi n}{l} x\,dx;\quad B_n=\frac{2}{\pi n a}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{\pi n}{l} x\,dx,\quad n=1, 2, \ldots$

В. *Смешанная задача для волнового уравнения в прямоугольнике* $[0, l; 0, m]$:

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),$$
$$u(x, y, 0)=u_0(x, y),\ u_t(x, y, 0)=u_1(x, y),$$
$$u(0, y, t)=u(l, y, t)=u(x, 0, t)=u(x, m, t)=0.$$

Решение задачи находится по формуле

$$u(x, y, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{nk}\cos\pi a\sqrt{n^2/l^2+k^2/m^2}\,t+\right.$$
$$\left.+B_{nk}\sin\pi a\sqrt{n^2/l^2+k^2/m^2}\,t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi k}{m}y,$$

где $A_{nk}=\frac{2}{l}\frac{2}{m}\int_0^l\int_0^m u_0(x, y)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi k}{m}y\,dx\,dy;\quad n, k=1, 2, \ldots,$

$$B_{nk}=\frac{4}{\pi a\sqrt{n^2m^2+k^2l^2}}\int_0^l\int_0^m u_1(x, y)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi k}{m}y\,dx\,dy,\quad n, k=1, 2, \ldots$$

Г. *Первая смешанная задача для волнового уравнения в круге* (случай осевой симметрии):

$$u_{tt}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right),\quad u(r, \varphi, 0)=u_0(r),$$
$$u_t(r, \varphi, 0)=u_0(r),\ u|_{r=R}=0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u(r, \varphi, t)\equiv u(r, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\mu_n}{R}t+B_n\sin\frac{a\mu_n}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$ ($J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка),

$$\int_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ \frac{R^2}{2}J_1^2(\mu_n), & k=n,\end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},\quad \frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода ν-го порядка.

Коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам

$$A_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)u_0(r)\,dr,\ n=1, 2, \ldots,$$

$$B_n=\frac{2}{Ra\mu_nJ_1^2(\mu_n)}\int_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)u_1(r)\,dr,\ n=1, 2, \ldots$$

А. *Первая смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке* $[0, l]$:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Применяя метод разделения переменных, решение задачи находим в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где $A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$

Б. *Первая смешанная задача для уравнения теплопроводности в круге радиуса* R *(случай осевой симметрии)*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \quad u|_{t=0} = u_0(r), \quad u|_{r=R} = 0.$$

Решение задачи находится по формуле

$$u(r, \varphi, t) \equiv u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $J_0(\mu_n) = 0, \ n = 1, 2, \ldots, \ A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int\limits_0^R r u_0(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr.$

3.4. Задача Коши для нестационарных уравнений. *Задача Коши для гиперболического уравнения* ставится следующим образом:

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Решение этой задачи выражается при $n = 2$ формулой Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|x-\xi| < at} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}} d\xi + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|x-\xi| < at} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}} d\xi;$$

при $n = 3$ — формулой Кирхгофа:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|x-\xi| = at} u_1(\xi) \, ds_\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int\limits_{|x-\xi| = at} u_0(\xi) \, ds_\xi \right].$$

Решение задачи Коши для параболического уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

выражается формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Классификация уравнений с частными производными второго порядка в случае двух переменных. Характеристики.

2. Основные уравнения. Постановка основных задач: задача Коши, краевые задачи, смешанные задачи.

3. Понятие корректной задачи. Корректность постановок основных задач математической физики. Пример Адамара.

4. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа. Принцип Гюйгенса.

5. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения. Принцип Дюамеля.

6. Уравнения Лапласа и Пуассона. Формулы Грина. Основные свойства гармонических функций.

7. Функция Грина. Функция Грина для круга и для шара.

8. Применение функции Грина к решению краевых задач.

9. Уравнение параболического типа. Принцип максимума.

10. Метод разделения переменных решения краевых задач. Задача Штурма — Лиувилля.

11. Метод разделения переменных решения смешанных задач.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти статический прогиб струны, закрепленной на концах, под действием непрерывно распределенной нагрузки.

2. Доказать, что уравнение с постоянными коэффициентами $u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$ заменой $u(x, y)=v(x, y)\,e^{-bx-ay}$ приводится к виду $v_{xy}+(c-ab)v=0$.

3. Доказать, что общее решение уравнения $u_{xy}-\frac{1}{x-y}u_x+\frac{1}{x-y}u_y=0$ имеет вид $u(x, y)=\frac{C_1(x)+C_2(y)}{x-y}$, где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

4. Пусть функция $u(x, t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt}=a^2\Delta u, \quad u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=0.$$

Доказать, что функция $v(x, t)=\int\limits_0^t u(x, \tau)\,d\tau$ является решением задачи Коши $v_{tt}=a^2\Delta v$, $v|_{t=0}=0$, $v_t|_{t=0}=\varphi(x)$.

5. Доказать, что функция $u(x, t, t_0)$ при каждом $t_0\geqslant 0$ является решением задачи Коши $u_t=a^2u_{xx}$, $u|_{t=t_0}=f(x, t_0)$ тогда и только тогда, когда функция $v(x, t, t_0)=\int\limits_{t_0}^t u(x, t, \tau)\,d\tau$ при каждом $t_0\geqslant 0$ является решением задачи Коши:

$$v_t=a^2v_{xx}+f(x, t), \quad v|_{t=t_0}=0.$$

6. Доказать, что задача Гурса

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}u(x,\ y)=0,\quad x>0,\ y>0,$$

$$u|_{y=0}=f(x),\quad u|_{x=0}=g(y),\quad f(0)=g(0)$$

имеет единственное решение $u(x,\ y)=f(x)+g(y)-f(0)$.

7. Доказать, что для решений уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ в области $\{0<x<l,\ t>0\}$ при граничных условиях $u(0,\ t)=u(l,\ t)=0$ функция

$$E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[u_t^2(x,\ t)+a^2u_x^2(x,\ t)\right]\mathrm{d}x$$

сохраняет постоянное значение для всех $t>0$ (закон сохранения энергии).

8. Построить функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $z>0$.

9. Доказать, что для любой гармонической в области D функции $u(x)$ класса $C^1(\bar{D})$ имеет место равенство $\int\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}s=0$, где ν — нормаль к ∂D.

10. Используя разложение по параметру $u(x,\ t)=u_0(x,\ t)+\varepsilon u_1(x,\ t)+\ldots$, получить решение с точностью до ε^2 задачи Коши:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+\varepsilon c(x,\ t)\,u,\quad u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x).$$

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти в указанной области отличные от тождественного нуля решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям (задача Штурма — Лиувилля, см. п. 3.1).

1.1. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 1\leqslant x\leqslant 2,\\ y(1)=y'(2)=0.\end{cases}$

1.2. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 3/2\leqslant x\leqslant 2,\\ y(3/2)=y'(2)=0.\end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ \pi/2\leqslant x\leqslant \pi,\\ y(\pi/2)=y'(\pi)=0.\end{cases}$

1.4. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ \pi/4\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ y(\pi/4)=y'(\pi/2)=0.\end{cases}$

1.5. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 1/2\leqslant x\leqslant 1,\\ y(1/2)=y'(1)=0.\end{cases}$

1.6. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 3/4\leqslant x\leqslant 1,\\ y(3/4)=y'(1)=0.\end{cases}$

1.7. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\\ y(\pi)=y'(2\pi)=0.\end{cases}$

1.8. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ \pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/4,\\ y(\pi/2)=y'(3\pi/4)=0.\end{cases}$

1.9. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 1\leqslant x\leqslant 3/2,\\ y(1)=y'(3/2)=0.\end{cases}$

1.10. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 1/4\leqslant x\leqslant 1/2,\\ y(1/4)=y'(1/2)=0.\end{cases}$

1.11. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ \pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/2,\\ y(\pi/2)=y'(3\pi/2)=0.\end{cases}$

1.12. $\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 3/4\leqslant x\leqslant 5/4,\\ y(3/4)=y'(5/4)=0.\end{cases}$

1.13. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 1/2 \leqslant x \leqslant 3/2, \\ y(1/2)=y'(3/2)=0. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi/2 \leqslant x \leqslant 5\pi/4, \\ y(\pi/2)=y'(5\pi/4)=0. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi \leqslant x \leqslant 3\pi/2, \\ y(\pi)=y'(3\pi/2)=0. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 3\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/2, \\ y(3\pi/4)=y'(5\pi/2)=0. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ y'(1)=y(2)=0. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 3/2 \leqslant x \leqslant 2, \\ y'(3/2)=y(2)=0. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi, \\ y'(\pi/2)=y(\pi)=0. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ y'(\pi/4)=y(\pi/2)=0. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \\ y'(1/2)=y(1)=0. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 3/4 \leqslant x \leqslant 1, \\ y'(3/4)=y(1)=0. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ y'(\pi)=y(2\pi)=0. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/4, \\ y'(\pi/2)=y(3\pi/4)=0. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 1 \leqslant x \leqslant 3/2, \\ y'(1)=y(3/2)=0. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 1/4 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ y'(1/4)=y(1/2)=0. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2, \\ y'(\pi/2)=y(3\pi/2)=0. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 3/4 \leqslant x \leqslant 5/4, \\ y'(3/4)=y(5/4)=0. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi \leqslant x \leqslant 3\pi/2, \\ y'(\pi)=y(3\pi/2)=0. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & \pi/2 \leqslant x \leqslant 5\pi/2, \\ y'(\pi/2)=y(5\pi/2)=0. \end{cases}$

1.31. $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 1/2 \leqslant x \leqslant 3/2, \\ y'(1/2)=y(3/2)=0. \end{cases}$

Задача 2. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду (см. п. 3.2).

2.1. $u_{xx}+2u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0.$

2.2. $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}-u_x-2u_y=0.$

2.3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+2u_x-2u_y=0.$

2.4. $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}+u_x+3u_y=0.$

2.5. $u_{xx}-6u_{xy}+9u_{yy}-2u_x+6u_y=0.$

2.6. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}-3u_x-3u_y=0.$

2.7. $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+3u_x-6u_y=0.$

2.8. $9u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}-9u_x-3u_y=0.$

2.9. $u_{xx}+8u_{xy}+16u_{yy}-u_x-4u_y=0.$

2.10. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+4u_x-4u_y=0.$

2.11. $16u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}-8u_x-2u_y=0.$

2.12. $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+8u_x+4u_y=0.$

2.13. $u_{xx}-8u_{xy}+16u_{yy}+3u_x-12u_y=0.$

2.14. $9u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}-12u_x-4u_y=0.$

2.15. $16u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}-16u_x+4u_y=0.$

2.16. $u_{xx}+10u_{xy}+25u_{yy}+u_x+5u_y=0.$

2.17. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+5u_x+5u_y=0.$

2.18. $u_{xx}-10u_{xy}+25u_{yy}+2u_x-10u_y=0.$

2.19. $4u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-10u_x+5u_y=0$.

2.20. $25u_{xx}-10u_{xy}+u_{yy}-15u_x+3u_y=0$.

2.21. $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}+5u_x+15u_y=0$.

2.22. $25u_{xx}+10u_{xy}+u_{yy}+20u_x+4u_y=0$.

2.23. $u_{xx}+8u_{xy}+16u_{yy}+5u_x+20u_y=0$.

2.24. $u_{xx}-10u_{xy}+25u_{yy}+5u_x-25u_y=0$.

2.25. $u_{xx}+12u_{xy}+36u_{yy}+u_x+6u_y=0$.

2.26. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+6u_x-6u_y=0$.

2.27. $u_{xx}-12u_{xy}+36u_{yy}+2u_x-12u_y=0$.

2.28. $36u_{xx}+12u_{xy}+u_{yy}+18u_x+3u_y=0$.

2.29. $u_{xx}+14u_{xy}+49u_{yy}+2u_x+14u_y=0$.

2.30. $36u_{xx}-12u_{xy}+u_{yy}+18u_x-3u_y=0$.

2.31. $49u_{xx}-14u_{xy}+u_{yy}+14u_x-2u_y=0$.

Задача 3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду (см. п. 3.2).

3.1. $4u_{xx}+8u_{xy}+3u_{yy}=0$.

3.2. $3u_{xx}+8u_{xy}+4u_{yy}=0$.

3.3. $3u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.4. $u_{xx}+4u_{xy}+3u_{yy}=0$.

3.5. $16u_{xx}+16u_{xy}+3u_{yy}=0$.

3.6. $3u_{xx}+16u_{xy}+16u_{yy}=0$.

3.7. $25u_{xx}+20u_{xy}+3u_{yy}=0$.

3.8. $u_{xx}+8u_{xy}+12u_{yy}=0$.

3.9. $12u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.10. $49u_{xx}+28u_{xy}+3u_{yy}=0$.

3.11. $64u_{xx}+32u_{xy}+3u_{yy}=0$.

3.12. $3u_{xx}+20u_{xy}+25u_{yy}=0$.

3.13. $u_{xx}+3u_{xy}+2u_{yy}=0$.

3.14. $2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.15. $u_{xx}+12u_{xy}+27u_{yy}=0$.

3.16. $u_{xx}+16u_{xy}+48u_{yy}=0$.

3.17. $u_{xx}+20u_{xy}+75u_{yy}=0$.

3.18. $u_{xx}+24u_{xy}+108u_{yy}=0$.

3.19. $u_{xx}+28u_{xy}+147u_{yy}=0$.

3.20. $u_{xx}+32u_{xy}+192u_{yy}=0$.

3.21. $u_{xx}+36u_{xy}+243u_{yy}=0$.

3.22. $3u_{xx}+28u_{xy}+49u_{yy}=0$.

3.23. $3u_{xx}+32u_{xy}+64u_{yy}=0$.

3.24. $27u_{xx}+12u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.25. $48u_{xx}+16u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.26. $75u_{xx}+20u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.27. $108u_{xx}+24u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.28. $147u_{xx}+28u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.29. $192u_{xx}+32u_{xy}+u_{yy}=0$.

3.30. $4u_{xx}+3u_{xy}-u_{yy}=0$.

3.31. $2u_{xx}+5u_{xy}-3u_{yy}=0$.

Задача 4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге (см. п. 3.3).

4.1. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=\varphi^2+\varphi+1$.

4.2. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=\varphi^2-\varphi$.

4.3. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=2\varphi^2+3\varphi+5$.

4.4. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=\varphi^2+5\varphi+7$.

4.5. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<3,$
$u|_{r=3}=\varphi^2$.

4.6. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=3\varphi^2+\varphi+2$.

4.7. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<4,$
$u|_{r=4}=5\varphi^2+2\varphi+2$.

4.8. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=4\varphi^2+3\varphi+1$.

4.9. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=\varphi^2.$

4.10. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=3\varphi^2-\varphi-1.$

4.11. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=2\varphi^2-5\varphi-2.$

4.12. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=4\varphi^2-3\varphi+1.$

4.13. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=5\varphi^2-2\varphi+1.$

4.14. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=\varphi^2-5\varphi.$

4.15. $\Delta u+0,\ 0\leqslant r<3,$
$u|_{r=3}=-\varphi^2+3\varphi.$

4.16. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<3,$
$u|_{r=3}=-2\varphi^2+7.$

4.17. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=\varphi^2-3\varphi+4.$

4.18. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=\varphi^2+7\varphi-1.$

4.19. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=10\varphi^2-2\varphi-1.$

4.20. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=6\varphi^2-5\varphi+3.$

4.21. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=-3\varphi^2+5\varphi-2.$

4.22. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<3,$
$u|_{r=3}=\varphi^2+2\varphi.$

4.23. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<4,$
$u|_{r=4}=\varphi^2-\varphi.$

4.24. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=3\varphi^2+2\varphi-2.$

4.25. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=-4\varphi^3-3\varphi+1.$

4.26. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=-\varphi^2+\varphi-\pi.$

4.27. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=5\varphi^2-\varphi+\pi.$

4.28. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=-6\varphi^2+\varphi-2.$

4.29. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=6\varphi^2+3\varphi+1.$

4.30. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<4,$
$u|_{r=4}=\varphi^2-4\varphi+2.$

4.31. $\Delta u=0,\ 0\leqslant r<3,$
$u|_{r=3}=-\varphi^2+2\pi\varphi.$

Задача 5. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце (см. п. 3.3).

5.1. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 2,$$
$$u|_{r=1}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=0.$$

5.2. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1/2\leqslant r\leqslant 1,$$
$$u|_{r=1/2}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=1.$$

5.3. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 2,$$
$$u|_{r=1}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=0.$$

5.4. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 2,$$
$$u|_{r=1}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=1.$$

5.5. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1/2\leqslant r\leqslant 1,$$

$$u\,|_{r=1/2}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=1.$$

5.6. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1/2\leqslant r\leqslant 1,$$

$$u\,|_{r=1/2}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0.$$

5.7. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 2,$$

$$u\,|_{r=1}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=2.$$

5.8. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 2,$$

$$u\,|_{r=1}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=0.$$

5.9. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1/2\leqslant r\leqslant 1,$$

$$u\,|_{r=1/2}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0.$$

5.10. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1/2\leqslant r\leqslant 1,$$

$$u\,|_{r=1/2}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0.$$

5.11. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1/2\leqslant r\leqslant 1,$$

$$u\,|_{r=1/2}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=2.$$

5.12. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 3,$$

$$u\,|_{r=1}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=0.$$

5.13. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 3,$$

$$u\,|_{r=1}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=1.$$

5.14. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 3,$$

$$u\,|_{r=1}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=1.$$

5.15. $$u_{xx}+u_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad 1\leqslant r\leqslant 3,$$

$$u\,|_{r=1}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=2.$$

5.16. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 3,$

$$u|_{r=1}=2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=1.$$

5.17. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 3,$

$$u|_{r=1}=2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=2.$$

5.18. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 2.$

$$u|_{r=1}=2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=1.$$

5.19. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 2,$

$$u|_{r=1}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=2.$$

5.20. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 2,$

$$u|_{r=1}=2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=2.$$

5.21. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1/2\leqslant r\leqslant 1,$

$$u|_{r=1/2}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=2.$$

5.22. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1/2\leqslant r\leqslant 1,$

$$u|_{r=1/2}=2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=1.$$

5.23. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1/2\leqslant r\leqslant 1,$

$$u|_{r=1/2}=3,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=2.$$

5.24. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1/2\leqslant r\leqslant 1,$

$$u|_{r=1/2}=3,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=3.$$

5.25. $u_{xx}+y_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 2,$

$$u|_{r=1}=3,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=1.$$

5.26. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 3/2\leqslant r\leqslant 2,$

$$u\big|_{r=3/2}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=0.$$

5.27. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 3/2\leqslant r\leqslant 2,$

$$u\big|_{r=3/2}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=1.$$

5.28. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 3,$

$$u\big|_{r=1}=2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=3.$$

5.29. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 3/2\leqslant r\leqslant 2,$

$$u\big|_{r=3/2}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=0.$$

5.30. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\leqslant r\leqslant 3,$

$$u\big|_{r=1}=3,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=2.$$

5.31. $u_{xx}+u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 3/2\leqslant r\leqslant 2,$

$$u\big|_{r=3/2}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=1.$$

Задача 6. Решить задачу для уравнения Пуассона в шаровом слое (см. п. 3.3).

6.1. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1\leqslant r\leqslant 2,$
$u\big|_{r=1}=0,\ u\big|_{r=2}=0.$

6.2. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1\leqslant r\leqslant 2,$
$u\big|_{r=1}=0,\ u\big|_{r=2}=1.$

6.3. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1\leqslant r<2,$
$u\big|_{r=1}=1,\ u\big|_{r=2}=0.$

6.4. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<2,$
$u\big|_{r=1}=1,\ u\big|_{r=2}=1.$

6.5. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<2,$
$u\big|_{r=1}=1,\ u\big|_{r=2}=2.$

6.6. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<2,$
$u\big|_{r=1}=2,\ u\big|_{r=2}=1.$

6.7. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<2,$
$u\big|_{r=1}=2,\ u\big|_{r=2}=2.$

6.8. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<2,$
$u\big|_{r=1}=3,\ u\big|_{r=2}=1.$

6.9. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2\leqslant r\leqslant 1,$
$u\big|_{r=1/2}=0,\ u\big|_{r=1}=-1.$

6.10. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2<r<1,$
$u\big|_{r=1/2}=1,\ u\big|_{r=1}=0.$

6.11. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2\leqslant r<1,$
$u\big|_{r=1/2}=1,\ u\big|_{r=1}=1.$

6.12. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2<r<1,$
$u_{r=1/2}=0,\ u\big|_{r=1}=0.$

6.13. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2<r<1,$
$u_{r=1/2}=-1,\ u_{r=1}=0.$

6.14. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2<r<1.$
$u\big|_{r=1/2}=-1,\ u\big|_{r=1}=-1.$

6.15. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2<r<1,$
$u\big|_{r=1/2}=1,\ u\big|_{r=1}=-1.$

6.16. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2<r<1,$
$u_{r=1/2}=-1,\ u\big|_{r=1}=1.$

6.17. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1/2<r<1,$
$u\big|_{r=1/2}=1,\ u\big|_{r=1}=-2.$

6.18. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u\big|_{r=2}=0,\ u\big|_{r=3}=0.$

6.19. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u|_{r=2}=0,\ u|_{r=3}=-1.$

6.20. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u|_{r=2}=-1,\ u|_{r=3}=0.$

6.21. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u|_{r=2}=1,\ u|_{r=3}=3.$

6.22. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u|_{r=2}=1,\ u|_{r=3}=-3.$

6.23. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u|_{r=2}=0,\ u|_{r=3}=4.$

6.24. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u|_{r=2}=2,\ u|_{r=3}=0.$

6.25. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 2<r<3,$
$u'|_{r=2}=1,\ u|_{r=3}=-2.$

6.26. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<3,$
$u|_{r=1}=1,\ u|_{r=3}=1.$

6.27. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<3,$
$u|_{r=1}=0,\ u|_{r=3}=1.$

6.28. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<3,$
$u|_{r=1}=1,\ u|_{r=3}=0.$

6.29. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<3,$
$u|_{r=1}=-1,\ u|_{r=3}=1.$

6.30. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<3,$
$u|_{r=1}=1,\ u|_{r=3}=-1.$

6.31. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\ 1<r<3,$
$u|_{r=1}=2,\ u|_{r=3}=1.$

Задача 7. Найти функцию, удовлетворяющую внутри круга уравнению Гельмгольца и принимающую на границе круга заданные значения (см. п. 3.3).

7.1. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<1,$
$u|_{r=1}=25\sin^3\varphi.$

7.2. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<1{,}5,$
$u|_{r=1{,}5}=24\sin^3\varphi.$

7.3. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<2,$
$u|_{r=2}=23\sin^3\varphi.$

7.4. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<2{,}5,$
$u|_{r=2{,}5}=22\sin^3\varphi.$

7.5. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<20,$
$u|_{r=20}=21\sin^3\varphi.$

7.6. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<3,$
$u|_{r=3}=20\sin^3\varphi.$

7.7. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<4,$
$u|_{r=4}=19\sin^3\varphi.$

7.8. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<15,$
$u|_{r=15}=18\sin^3\varphi.$

7.9. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<3{,}5,$
$u|_{r=3{,}5}=17\sin^3\varphi.$

7.10. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<4{,}5,$
$u|_{r=4{,}5}=16\sin^3\varphi.$

7.11. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<5,$
$u|_{r=5}=15\sin^3\varphi.$

7.12. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<5{,}5,$
$u|_{r=5{,}5}=14\sin^3\varphi.$

7.13. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<6,$
$u|_{r=6}=13\sin^3\varphi.$

7.14. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<6{,}5,$
$u|_{r=6{,}5}=12\sin^3\varphi.$

7.15. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<7,$
$u|_{r=7}=11\sin^3\varphi.$

7.16. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<7{,}5,$
$u|_{r=7{,}5}=10\sin^3\varphi.$

7.17. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<8,$
$u|_{r=8}=9\sin^3\varphi.$

7.18. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<8{,}5,$
$u|_{r=8{,}5}=8\sin^3\varphi.$

7.19. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<9,$
$u|_{r=9}=7\sin^3\varphi.$

7.20. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<9{,}5,$
$u|_{r=9{,}5}=6\sin^3\varphi.$

7.21. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<10,$
$u|_{r=10}=5\sin^3\varphi.$

7.22. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<10{,}5,$
$u|_{r=10{,}5}=4\sin^3\varphi.$

7.23. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<11,$
$u|_{r=11}=3\sin^3\varphi.$

7.24. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<11{,}5,$
$u|_{r=11{,}5}=2\sin^3\varphi.$

7.25. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<12,$
$u|_{r=12}=\sin^3\varphi.$

7.26. $\Delta u+k^2u=0,\ 0\leqslant r<12{,}5,$
$u|_{r=12{,}5}=6\sin^3\varphi.$

7.27. $\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \leqslant r < 13,$
$u|_{r=13} = 5 \sin^3 \varphi.$

7.28. $\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \leqslant r < 13{,}5,$
$u|_{r=13,5} = 4 \sin^3 \varphi.$

7.29. $\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \leqslant r < 14,$
$u|_{r=14} = 3 \sin^3 \varphi.$

7.30. $\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \leqslant r < 14{,}5,$
$u|_{r=14,5} = 2 \sin^3 \varphi.$

7.31. $\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \leqslant r < 16,$
$u|_{r=16} = \sin^3 \varphi.$

Задача 8. Найти функцию, удовлетворяющую внутри шара уравнению Гельмгольца и принимающую на границе шара заданное значение (см. п. 3.3).

8.1. $\Delta u + u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/2,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\theta.$

8.2. $\Delta u + u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi} = \cos\theta.$

8.3. $\Delta u + u = 0,\ 0 \leqslant r < 3\pi/2,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/2} = \cos\theta.$

8.4. $\Delta u + u = 0,\ 0 \leqslant r < 2\pi,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2\pi} = \cos\theta.$

8.5. $\Delta u + 4u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/4,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/4} = \cos\theta.$

8.6. $\Delta u + 4u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/2,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\theta.$

8.7. $\Delta u + 4u = 0,\ 0 \leqslant r < 3\pi/2,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/2} = \cos\theta.$

8.8 $\Delta u + 4u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi} = \cos\theta.$

8.9. $\Delta u + 9u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/6,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/6} = \cos\theta.$

8.10. $\Delta u + 9u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/3,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/3} = \cos\theta.$

8.11. $\Delta u + 9u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/2,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\theta.$

8.12. $\Delta u + 9u = 0,\ 0 \leqslant r < 2\pi/3,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2\pi/3} = \cos\theta.$

8.13. $\Delta u + 16u = 0,\ 0 < r < \pi/8,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/8} = \cos\theta.$

8.14. $\Delta u + 16u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/4,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/4} = \cos\theta.$

8.15. $\Delta u + 16u = 0,\ 0 \leqslant r \leqslant 3\pi/8,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/8} = \cos\theta.$

8.16. $\Delta u + 16u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/2,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\theta.$

8.17. $\Delta u + 25u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/10,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/10} = \cos\theta.$

8.18. $\Delta u + 25u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/5,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/5} = \cos\theta.$

8.19. $\Delta u + 25u = 0,\ 0 \leqslant r < 3\pi/10,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/10} = \cos\theta.$

8.20. $\Delta u + 15u = 0,\ 0 \leqslant r < 2\pi/5,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2\pi/5} = \cos\theta.$

8.21. $\Delta u + 36u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/12,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/12} = \cos\theta.$

8.22. $\Delta u + 36u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/6,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/6} = \cos\theta.$

8.23. $\Delta u + 36u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/4,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/4} = \cos\theta.$

8.24. $\Delta u + 36u = 0,\ 0 \leqslant r < \pi/2,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\theta.$

8.25. $\Delta u+49u=0,\ 0\leqslant r<\pi/7,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/7}=\cos\theta.$

8.26. $\Delta u+49u=0,\ 0\leqslant r<2\pi/7,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2\pi/7}=\cos\theta.$

8.27. $\Delta u+4u=0,\ 0\leqslant r<3\pi/4,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/4}=\cos\theta.$

8.28. $\Delta u+u=0,\ 0\leqslant r<3\pi,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi}=\cos\theta.$

8.29. $\Delta u+9u=0,\ 0\leqslant r<\pi,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi}=\cos\theta.$

8.30. $\Delta u+16u=0,\ 0\leqslant r<\pi,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi}=\cos\theta.$

8.31. $\Delta u+25u=0,\ 0\leqslant r<\pi,$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi}=\cos\theta.$

Задача 9. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке.

9.1. $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-1),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0.$

9.2. $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<{}^3/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^3/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^3/_2,\ t)=0.$

9.3. $u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-3),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(3,\ t)=0.$

9.4. $u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(2,\ t)=0.$

9.5. $u_{tt}={}^1/_4u_{xx},\ 0<x<{}^1/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^1/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^1/_2,\ t)=0.$

9.6. $u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-1),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0.$

9.7. $u_{tt}={}^4/_9u_{xx},\ 0<x<{}^2/_3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^2/_3),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^2/_3,\ t)=0.$

9.8. $u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<{}^1/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^1/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^1/_2,\ t)=0.$

9.9. $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(2,\ t)=0.$

9.10. $u_{tt}=16u_{xx},\ 0<x<3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-3),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(3,\ t)=0.$

9.11. $u_{tt}=16u_{xx},\ 0<x<2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(2,\ t)=0.$

9.12. $u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-1),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0.$

9.13. $u_{tt}={}^1/_9u_{xx},\ 0<x<{}^1/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^1/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^1/_2,\ t)=0.$

9.14. $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-3),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(3,\ t)=0.$

9.15. $u_{tt}=16u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-1),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0.$

9.16. $u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<{}^3/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^3/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^3/_2,\ t)=0.$

9.17. $u_{tt}=4u_{xx},\ 0<x<3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-3),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(3,\ t)=0.$

9.18. $u_{tt}={}^1/_4u_{xx},\ 0<x<2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(2,\ t)=0.$

9.19. $u_{tt}={}^1/_4u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-1),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0.$

9.20. $u_{tt}=u_{xx},\ 0<x<{}^1/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^1/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^1/_2,\ t)=0.$

9.21. $u_{tt}={}^4/_9u_{xx},\ 0<x<2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(2,\ t)=0.$

9.22. $u_{tt}={}^9/_4u_{xx},\ 0<x<{}^3/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^3/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^3/_2,\ t)=0.$

9.23. $u_{tt}={}^1/_9u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-1),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0.$

9.24. $u_{tt}={}^9/_4u_{xx},\ 0<x<3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-3),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(3,\ t)=0.$

9.25. $u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<{}^1/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^1/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^1/_2,\ t)=0.$

9.26. $u_{tt}=9u_{xx},\ 0<x<2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(2,\ t)=0.$

9.27. $u_{tt}={}^1/_4u_{xx},\ 0<x<3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-3),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(3,\ t)=0.$

9.28. $u_{tt}={}^4/_9u_{xx},\ 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-1),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0.$

9.29. $u_{tt}={}^1/_4u_{xx},\ 0<x<{}^3/_2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,\ 0)=x(x-{}^3/_2),\ u_t(x,\ 0)=0,$
$u(0,\ t)=0,\ u({}^3/_2,\ t)=0.$

9.30. $u_{tt}={}^1/_9 u_{xx}$, $0<x<2$, $0<t<\infty$,
$u(x,\ 0)=x(x-2)$, $u_t(x,\ 0)=0$,
$u(0,\ t)=0$, $u(2,\ t)=0$.

9.31. $u_{tt}={}^9/_4 u_{xx}$, $0<x<1$, $0<t<\infty$,
$u(x,\ 0)=x(x-1)$, $u_t(x,\ 0)=0$,
$u(0,\ t)=0$, $u(1,\ t)=0$.

Задача 10. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения в прямоугольнике (см. п. 3.3).

10.1. $u_{tt}=\Delta u$,
$u|_{t=0}=\dfrac{xy}{64}(2-x)(3-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u_{y=0}=u|_{x=2}=u|_{y=3}=0$.

10.2. $u_{tt}=4\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(3-x)(4-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=3}=u|_{y=4}=0$.

10.3. $u_{tt}=9\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(4-x)(5-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=4}=u|_{y=5}=0$.

10.4. $u_{tt}=16\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(5-x)(6-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=5}=u|_{y=6}=0$.

10.5. $u_{tt}=25\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(6-x)(2-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=6}=u|_{y=2}=0$.

10.6. $u_{tt}=4\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(2-x)(4-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=2}=u|_{y=4}=0$.

10.7. $u_{tt}=9\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(3-x)(5-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=3}=u|_{y=5}=0$.

10.8. $u_{tt}=16\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(4-x)(6-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=4}=u|_{y=6}=0$.

10.9. $u_{tt}=25\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(5-x)(2-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=5}=u|_{y=2}=0$.

10.10. $u_{tt}=\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(6-x)(3-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=6}=u|_{y=3}=0$.

10.11. $u_{tt}=9\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(2-x)(5-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=2}=u|_{y=5}=0$.

10.12. $u_{tt}=16\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(3-x)(6-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=3}=u|_{y=6}=0$.

10.13. $u_{tt}=25\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(4-x)(2-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=4}=u|_{y=2}=0$.

10.14. $u_{tt}=\Delta u$,
$u|_{t=0}=xy(5-x)(3-y)$, $u_t|_{t=0}=0$,
$u|_{x=0}=u|_{y=0}=u|_{x=5}=u|_{y=3}=0$.

10.15. $u_{tt}=4\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(6-x)\,(4-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=6}=u\big|_{y=4}=0.$

10.16. $u_{tt}=16\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(2-x)\,(6-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=2}=u\big|_{y=6}=0.$

10.17. $u_{tt}=25\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(3-x)\,(2-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=3}=u\big|_{y=2}=0.$

10.18. $u_{tt}=\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(4-x)\,(3-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=4}=u\big|_{y=3}=0.$

10.19. $u_{tt}=4\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(5-x)\,(4-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=5}=u\big|_{y=4}=0.$

10.20. $u_{tt}=9\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(6-x)\,(5-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=6}=u\big|_{y=5}=0.$

10.21. $u_{tt}=25\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(2-x)\,(2-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=2}=u\big|_{y=2}=0.$

10.22. $u_{tt}=\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(3-x)\,(3-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=3}=u\big|_{y=3}=0.$

10.23. $u_{tt}=4\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(4-x)\,(4-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=4}=u\big|_{y=4}=0.$

10.24. $u_{tt}=9\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(5-x)\,(5-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=5}=u\big|_{y=5}=0.$

10.25. $u_{tt}=16\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(6-x)\,(6-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=6}=u\big|_{y=6}=0.$

10.26. $u_{tt}=144\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(2-x)\,(7-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=2}=u\big|_{y=7}=0.$

10.27. $u_{tt}=121\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(3-x)\,(6-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=y\big|_{x=3}=u\big|_{y=6}=0.$

10.28. $u_{tt}=100\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(4-x)\,(5-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=4}=u\big|_{y=5}=0.$

10.29. $u_{tt}=81\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(5-x)\,(4-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=5}=u\big|_{y=4}=0.$

10.30. $u_{tt}=64\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(6-x)\,(3-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=6}=u\big|_{y=3}=0.$

10.31. $u_{tt}=49\Delta u,$
$u\big|_{t=0}=xy\,(7-x)\,(2-y),\ \ u_t\big|_{t=0}=0,$
$u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=u\big|_{x=7}=u\big|_{y=2}=0.$

Задача 11. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения в круге (см. п. 3.3).

11.1. $u_{tt}=\Delta u,\ 0\leqslant r<25,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{25}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(25,\ t)=0.$

11.2. $u_{tt}=2\Delta u,\ 0\leqslant r<24,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{24}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(24,\ t)=0.$

11.3. $u_{tt}=3\Delta u,\ 0\leqslant r<23,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{23}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(23,\ t)=0.$

11.4. $u_{tt}=4\Delta u,\ 0\leqslant r<22,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{22}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(22,\ t)=0.$

11.5. $u_{tt}=5\Delta u,\ 0\leqslant r<21,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{21}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(21,\ t)=0.$

11.6. $u_{tt}=6\Delta u,\ 0\leqslant r<20,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{20}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(20,\ t)=0.$

11.7. $u_{tt}=7\Delta u,\ 0\leqslant r<19,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{19}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(19,\ t)=0.$

11.8. $u_{tt}=8\Delta u,\ 0\leqslant r<18,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{18}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(18,\ t)=0.$

11.9. $u_{tt}=9\Delta u,\ 0\leqslant r<17,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{17}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(17,\ t)=0.$

11.10. $u_{tt}=10\Delta u,\ 0\leqslant r<16,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{16}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(16,\ t)=0.$

11.11. $u_{tt}=11\Delta u,\ 0\leqslant r<15,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{15}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(15,\ t)=0.$

11.12. $u_{tt}=12\Delta u,\ 0\leqslant r<14,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{14}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(14,\ t)=0.$

22

11.13. $u_{tt}=13\Delta u,\ 0\leqslant r<13,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{13}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(13,\ t)=0.$

11.14. $u_{tt}=14\Delta u,\ 0\leqslant r<12,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{12}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(12,\ t)=0.$

11.15. $u_{tt}=15\Delta u,\ 0\leqslant r<11,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{11}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(11,\ t)=0.$

11.16. $u_{tt}=16\Delta u,\ 0\leqslant r<10,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{10}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(10,\ t)=0.$

11.17. $u_{tt}=17\Delta u,\ 0\leqslant r<9,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{9}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(9,\ t)=0.$

11.18. $u_{tt}=18\Delta u,\ 0\leqslant r<8,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{8}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(8,\ t)=0.$

11.19. $u_{tt}=19\Delta u,\ 0\leqslant r<7,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{7}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(7,\ t)=0.$

11.20. $u_{tt}=20\Delta u,\ u\leqslant r<6,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{6}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(6,\ t)=0.$

11.21. $u_{tt}=21\Delta u,\ 0\leqslant r<5,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{5}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(5,\ t)=0.$

11.22. $u_{tt}=22\Delta u,\ 0\leqslant r<4,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{4}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(4,\ t)=0.$

11.23. $u_{tt}=23\Delta u,\ 0\leqslant r<3,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{3}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(3,\ t)=0.$

11.24. $u_{tt}=24\Delta u,\ 0\leqslant r<2,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{2}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(2,\ t)=0.$

11.25. $u_{tt}=25\Delta u,\ 0\leqslant r<1,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-r^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(1,\ t)=0.$

11.26. $u_{tt}=\Delta u,\ 0\leqslant r<6,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{6}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(6,\ t)=0.$

11.27. $u_{tt}=4\Delta u,\ 0\leqslant r<5,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{5}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(5,\ t)=0.$

11.28. $u_{tt}=9\Delta u,\ 0\leqslant r<4,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{4}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(4,\ t)=0.$

11.29. $u_{tt}=16\Delta u,\ 0\leqslant r<3,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{3}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(3,\ t)=0.$

11.30. $u_{tt}=25\Delta u,\ 0\leqslant r<2,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{2}\right)^2\right],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(2,\ t)=0.$

11.31. $u_{tt}=36\Delta u,\ 0\leqslant r<1,\ 0<t<\infty,$
$u(r,\ 0)=\frac{1}{8}[1-r^2],$
$u_t(r,\ 0)=0,\ u(1,\ t)=0.$

Задача 12. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке (см. п. 3.3).

12.1. $u_t=16u_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$
$$u(x,\ 0)=\begin{cases} x^2/3, & 0\leqslant x\leqslant 3/2,\\ 3-x, & 3/2<x\leqslant 3,\end{cases}$$
$u(0,\ t)=u(3,\ t)=0.$

12.2. $u_t=u_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$
$$u(x,\ 0)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$
$u(0,\ t)=u(2,\ t)=0.$

12.3. $u_t=25u_{xx},\ 0<x<5,\ t>0,$
$$u(x,\ 0)=\begin{cases} 2x^2/5, & 0\leqslant x\leqslant 5/2,\\ 5-x, & 5/2<x\leqslant 5,\end{cases}$$
$u(0,\ t)=u(5,\ t)=0.$

12.4. $u_t=16u_{xx},\ 0<x<4,\ t>0,$
$$u(x,\ 0)=\begin{cases} x^2/2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4-x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$$
$u(0,\ t)=u(4,\ t)=0.$

12.5. $u_t=4u_{xx},\ 0<x<5,\ t>0,$
$$u(x,\ 0)=\begin{cases} 2x^2/5, & 0\leqslant x\leqslant 5/2,\\ 5-x, & 5/2<x\leqslant 5,\end{cases}$$
$u(0,\ t)=u(5,\ t)=0.$

12.6. $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/3, & 0 \le x \le 3/2, \\ 3 - x, & 3/2 < x \le 3, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(3, t) = 0.$

12.7. $u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 8,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/4, & 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, & 4 < x \le 8, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(8, t) = 0.$

12.8. $u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(2, t) = 0.$

12.9. $u_t = 16u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 < x \le 1, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(1, t) = 0.$

12.10. $u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 < x \le 4, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(4, t) = 0.$

12.11. $u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 10,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/5, & 0 \le x \le 5, \\ 10 - x, & 5 < x \le 10, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(10, t) = 0.$

12.12. $u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 9,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/9, & 0 \le x \le 9/2, \\ 9 - x, & 9/2 < x \le 9, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(9, t) = 0.$

12.13. $u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/3, & 0 \le x \le 3/2, \\ 3 - x, & 3/2 < x \le 3, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(3, t) = 0.$

12.14. $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/5, & 0 \le x \le 5/2, \\ 5 - x, & 5/2 < x \le 5, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(5, t) = 0.$

12.15. $u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 7,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/7, & 0 \le x \le 7/2, \\ 7 - x, & 7/2 < x \le 7, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(7, t) = 0.$

12.16. $u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 < x \le 1, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(1, t) = 0.$

12.17. $u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 < x \le 4, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(4, t) = 0.$

12.18. $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 10,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/5, & 0 \le x \le 5, \\ 10 - x, & 5 < x \le 10, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(10, t) = 0.$

12.19. $u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(2, t) = 0.$

12.20. $u_t = 16u_{xx},\ 0 < x < 8,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/4, & 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, & 4 < x \le 8, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(8, t) = 0.$

12.21. $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x < 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 < x < 1, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(1, t) = 0.$

12.22. $u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(4, t) = 0.$

12.23. $u_t = 16u_{xx},\ 0 < x < 6,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \le x \le 3, \\ 6 - x, & 3 < x \le 6, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(6, t) = 0.$

12.24. $u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 < x \le 1, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(1, t) = 0.$

12.25. $u_t = 9u_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2/5, & 0 \le x \le 5/2, \\ 5 - x, & 5/2 < x \le 5, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(5, t) = 0.$

12.26. $u_t = 25u_{xx},\ 0 < x < 6,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \le x \le 3, \\ 6 - x, & 3 < x \le 6, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(6, t) = 0.$

12.27. $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 12,\ t > 0,$
$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/6, & 0 \le x \le 6, \\ 12 - x, & 6 < x \le 12, \end{cases}$$
$u(0, t) = u(12, t) = 0.$

12.28. $u_t=16u_{xx}$, $0<x<2$, $t>0$,

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

$u(0,t)=u(2,t)=0$.

12.29. $u_t=4u_{xx}$, $0<x<6$, $t>0$,

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2/3, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 6-x, & 3<x\leqslant 6,\end{cases}$$

$u(0,t)=u(6,t)=0$.

12.30. $u_t=36u_{xx}$, $0<x<3$, $t>0$,

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2/3, & 0\leqslant x\leqslant {}^3/_2,\\ 3-x, & {}^3/_2<x\leqslant 3,\end{cases}$$

$u(0,t)=u(3,t)=0$.

12.31. $u_t=9u_{xx}$, $0<x<8$, $t>0$,

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2/4, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 8-x, & 4<x\leqslant 8,\end{cases}$$

$u(0,t)=u(8,t)=0$.

Задача 13. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности в круге (см. п. 3.3).

13.1. $u_t=16\Delta u$, $0\leqslant r<5$, $t>0$, $u(r,0)=25-r^2$, $u(5,t)=0$.

13.2. $u_t=25\Delta u$, $0\leqslant r<3$, $t>0$, $u(r,0)=9-r^2$, $u(3,t)=0$.

13.3. $u_t=\Delta u$, $0\leqslant r<7$, $t>0$, $u(r,0)=49-r^2$, $u(7,t)=0$.

13.4. $u_t=10\Delta u$, $0\leqslant r<1$, $t>0$, $u(r,0)=1-r^2$, $u(1,t)=0$.

13.5. $u_t=9\Delta u$, $0\leqslant r<8$, $t>0$, $u(r,0)=64-r^2$, $u(8,t)=0$.

13.6. $u_t=25\Delta u$, $0\leqslant r<2$, $t>0$, $u(r,0)=4-r^2$, $u(2,t)=0$.

13.7. $u_t=16\Delta u$, $0\leqslant r<1$, $t>0$, $u(r,0)=1-r^2$, $u(1,t)=0$.

13.8. $u_t=3\Delta u$, $0\leqslant r<3$, $t>0$, $u(r,0)=9-r^2$, $u(3,t)=0$.

13.9. $u_t=5\Delta u$, $0\leqslant r<4$, $t>0$, $u(r,0)=16-r^2$, $u(4,t)=0$.

13.10. $u_t=\Delta u$, $0\leqslant r<5$, $t>0$, $u(r,0)=25-r^2$, $u(5,t)=0$.

13.11. $u_t=10\Delta u$, $0\leqslant r<2$, $t>0$, $u(r,0)=4-r^2$, $u(2,t)=0$.

13.12. $u_t=25\Delta u$, $0\leqslant r<4$, $t>0$, $u(r,0)=16-r^2$, $u(4,t)=0$.

13.13. $u_t=6\Delta u$, $0\leqslant r<6$, $t>0$, $u(r,0)=36-r^2$, $u(6,t)=0$.

13.14. $u_t=4\Delta u$, $0\leqslant r<1$, $t>0$, $u(r,0)=1-r^2$, $u(1,t)=0$.

13.15. $u_t=7\Delta u$, $0\leqslant r<5$, $t>0$, $u(r,0)=25-r^2$, $u(5,t)=0$.

13.16. $u_t=10\Delta u$, $0\leqslant r<7$, $t>0$, $u(r,0)=49-r^2$, $u(7,t)=0$.

13.17. $u_t=\Delta u$, $0\leqslant r<1$, $t>0$, $u(r,0)=1-r^2$, $u(1,t)=0$.

13.18. $u_t=\Delta u$, $0\leqslant r<2$, $t>0$, $u(r,0)=4-r^2$, $u(2,t)=0$.

13.19. $u_t=9\Delta u$, $0\leqslant r<3$, $t>0$, $u(r,0)=9-r^2$, $u(3,t)=0$.

13.20. $u_t=2\Delta u$, $0\leqslant r<4$, $t>0$, $u(r,0)=16-r^2$, $u(4,t)=0$.

13.21. $u_t=36\Delta u$, $0\leqslant r<7$, $t>0$, $u(r,0)=49-r^2$, $u(7,t)=0$.

13.22. $u_t=4\Delta u$, $0\leqslant r<2$, $t>0$, $u(r,0)=4-r^2$, $u(2,t)=0$.

13.23. $u_t=\Delta u$, $0\leqslant r<4$, $t>0$, $u(r,0)=16-r^2$, $u(4,t)=0$.

13.24. $u_t=25\Delta u$, $0\leqslant r<5$, $t>0$, $u(r,0)=25-r^2$, $u(5,t)=0$.

13.25. $u_t = 2\Delta u,\ 0 \leqslant r < 3,\ t > 0,$
$u(r,\ 0) = 9 - r^2,\ u(3,\ t) = 0.$

13.26. $u_t = 3\Delta u,\ 0 \leqslant r < 6,\ t > 0,$
$u(r,\ 0) = 36 - r^2,\ u(6,\ t) = 0.$

13.27. $u_t = 5\Delta u,\ 0 \leqslant r < 1,\ t > 0,$
$u(r,\ 0) = 1 - r^2,\ u(1,\ t) = 0.$

13.28. $u_t = 9\Delta u,\ 0 \leqslant r < 2,\ t > 0,$
$u(r,\ 0) = 4 - r^2,\ u(2,\ t) = 0.$

13.29. $u_t = 6\Delta u,\ 0 \leqslant r < 7,\ t > 0,$
$u(r,\ 0) = 49 - r^2,\ u(7,\ t) = 0.$

13.30. $u_t = 4\Delta u,\ 0 \leqslant r < 8,\ t > 0,$
$u(r,\ 0) = 64 - r^2,\ u(8,\ t) = 0.$

13.31. $u_t = 7\Delta u,\ 0 \leqslant r < 4,\ t > 0,$
$u(r,\ 0) = 16 - r^2,\ u(4,\ t) = 0.$

Задача 14. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости (см. п. 3.4).

14.1. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (x+y)^2.$

14.2. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (x-y)^2.$

14.3. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (2x+y)^2.$

14.4. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (x+2y)^2.$

14.5. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (2x-y)^2.$

14.6. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (x-2y)^2.$

14.7. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (3x+y)^2.$

14.8. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (x-3y)^2.$

14.9. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (2x+3y)^2.$

14.10. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (2x-3y)^2.$

14.11. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (3x+4y)^2.$

14.12. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (3x-4y)^2.$

14.13. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (5x+6y)^2.$

14.14. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}).$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (5x-6y)^2.$

14.15. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (6x+7y)^2.$

14.16. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = (6x-7y)^2.$

14.17. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 3x^2 + 4y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.18. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 3x^2 - 4y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.19. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 4x^2 + 5y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.20. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 4x^2 - 5y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.21. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 5x^2 + 6y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.22. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 5x^2 - 6y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.23. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 6x^2 + 7y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.24. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 6x^2 - 7y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.25. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = x^2 + y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.26. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = x^2 - y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.27. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 2x^2 + y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.28. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = x^2 + 2y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.29. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = y^2 - x^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.30. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 3x^2 + 2y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

14.31. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u|_{t=0} = 3x^2 + y^2,\ u_t|_{t=0} = 0.$

Задача 15. Используя формулу Кирхгофа, найти решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве (см. п. 3.4).

15.1. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$,
$u|_{t=0}$, $u_t|_{t=0}=(x-y+z)^2$.

15.2. $u_{tt}=2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(x-2y+z)^2$.

15.3. $u_{tt}=3(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(x+y-z)^2$.

15.4. $u_{tt}=4(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(x+y-2z)^2$.

15.5. $u_{tt}=5(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(2x+y+z)^2$.

15.6. $u_{tt}=6(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(2x+y+2z)^2$.

15.7. $u_{tt}=7(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(x+y+3z)^2$.

15.8. $u_{tt}=8(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(x+2y+3z)^2$.

15.9. $u_{tt}=9(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(2x+3y+4z)^2$.

15.10. $u_{tt}=10(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(3x+2y+4z)^2$.

15.11. $u_{tt}=11(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(2x+4y+3z)^2$.

15.12. $u_{tt}=12(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(4x+2y+3z)^2$.

15.13. $u_{tt}=13(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(4x+3y+2z)^2$.

15.14. $u_{tt}=14(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(3x+4y+2z)^2$.

15.15. $u_{tt}=15(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(5x+4y+3z)^2$.

15.16. $u_{tt}=16(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=0$, $u_t|_{t=0}=(3x+4y+5z)^2$.

15.17. $u_{tt}=15(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=x^2-y^2+z^2$, $u_t|_{t=0}=0$.

15.18. $u_{tt}=14(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=x^2-2y^2+z^2$, $u_t|_{t=0}=0$.

15.19. $u_{tt}=13(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=x^2+y^2-z^2$, $u_t|_{t=0}=0$.

15.20. $u_{tt}=12(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=x^2+y^2-2z^2$, $u_t|_{t=0}=0$.

15.21. $u_{tt}=11(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=2x^2+y^2+2z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.22. $u_{tt}=10(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=2x^2+y^2+z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.23. $u_{tt}=9(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=x^2+y^2+3z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.24. $u_{tt}=8(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=x^2+2y^2+3z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.25. $u_{tt}=7(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=3x^2+2y^2+z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.26. $u_{tt}=6(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=3x^2+y^2+2z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.27. $u_{tt}=5(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=2x^2+y^2+3z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.28. $u_{tt}=4(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=2x^2+3y^2+z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.29. $u_{tt}=3(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=3x^2+4y^2+5z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.30. $u_{tt}=2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$,
$u|_{t=0}=4x^2+5y^2+3z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

15.31. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$,
$u|_{t=0}=5x^2+3y^2+4z^2,\ u_t|_{t=0}=0.$

Задача 16. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (см. п. 3.4).

16.1. $u_t=u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-x^2+x}$.

16.2. $u_t=2u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-x^2}$.

16.3. $u_t=3u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-2x^2}$.

16.4. $u_t=4u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-2x^2+x}$.

16.5. $u_t=5u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-2x^2-x}$.

16.6. $u_t=6u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-x^2-x}$.

16.7. $u_t=7u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-2x^2+2x}$.

16.8. $u_t=8u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2}$.

16.9. $u_t=9u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2+x}$.

16.10. $u_t=10u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-2x^2-2x}$.

16.11. $u_t=11u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2-x}$.

16.12. $u_t=12u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2}$.

16.13. $u_t=13u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2+2x}$.

16.14. $u_t=14u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2+x}$.

16.15. $u_t=15u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2-2x}$.

16.16. $u_t=16u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2-2x}$.

16.17. $u_t=15u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-x^2+2x}$.

16.18. $u_t=14u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2+3x}$.

16.19. $u_t=13u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-2x^2+4x}$.

16.20. $u_t=12u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-x^2-2x}$.

16.21. $u_t=11u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2-3x}$.

16.22. $u_t=10u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-2x^2-4x}$.

16.23. $u_t=9u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-x^2+4x}$.

16.24. $u_t=8u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-x^2-4x}$.

16.25. $u_t=7u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2+2x}$.

16.26. $u_t=6u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2-x}$.

16.27. $u_t=5u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2-6x}$.

16.28. $u_t=4u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-3x^2+6x}$.

16.29. $u_t=3u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2-6x}$.

16.30. $u_t=2u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2+8x}$.

16.31. $u_t=u_{xx}$, $u|_{t=0}=e^{-4x^2-4x}$.

Таблица I

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0334	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0514	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Значения функции $\frac{a^m}{m!} e^{-a}$

(распределение Пуассона)

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

m \ a	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

m \ a	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

Таблица значений функции $\sum\limits_{m=0}^{k} \frac{a^m e^{-a}}{m!}$

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996400	0,992074	0,985612	0,976885
3	0,999996	0,999913	0,999734	0,999224	0,998248	0,996642
4	1,000000	0,999998	0,999984	0,999939	0,999828	0,999606
5	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

k \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,986542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999998	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,999954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

k \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,091579	0,040428	0,017352	0,007295	0,003019	0,001234
2	0,238105	0,124652	0,061970	0,029636	0,013754	0,006232
3	0,433472	0,265026	0,151205	0,081765	0,042380	0,021228
4	0,628839	0,440493	0,285058	0,172991	0,099632	0,054963
5	0,785132	0,615960	0,445681	0,300708	0,191236	0,115690
6	0,889326	0,762183	0,606304	0,449711	0,313374	0,206780

k \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
7	0,948866	0,866628	0,743981	0,598714	0,452961	0,323896
8	0,978636	0,931806	0,847239	0,729091	0,592548	0,455652
9	0,991867	0,968172	0,916077	0,830496	0,716625	0,587840
10	0,997159	0,986305	0,957380	0,901479	0,815887	0,705988
11	0,999084	0,994547	0,979909	0,946650	0,888077	0,803008
12	0,999726	0,997981	0,991173	0,973000	0,936204	0,875773
13	0,999923	0,999202	0,996372	0,987188	0,965820	0,926149
14	0,999979	0,999774	0,998600	0,994282	0,982744	0,958533
15	0,999994	0,999931	0,999491	0,997593	0,991770	0,977964
16	0,999998	0,999980	0,999825	0,999041	0,996283	0,988894
17	0,999999	0,999994	0,999943	0,999637	0,998407	0,994680
18	0,999999	0,999998	0,999982	0,999869	0,999351	0,997573
19	0,999999	0,999999	0,999994	0,999955	0,999748	0,998943
20	1,000000	0,999999	0,999998	0,999985	0,999907	0,999560
21		1,000000	0,999999	0,999995	0,999967	0,999824
22			0,999999	0,999998	0,999989	0,999932
23			1,000000	0,999999	0,999997	0,999974
24				0,999999	0,999999	0,999990
25				1,000000	0,099999	0,999996
26					1,000000	0,999998
27						0,999999
28						1,000000

Таблица V

Значения $u_{\mathscr{P}}$, удовлетворяющие равенству $2\Phi(u_{\mathscr{P}})=\mathscr{P}$

$\mathscr{P}$	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998
$u_{\mathscr{P}}$	1,645	1,960	2,326	2,576	3,09

Таблица VI

Значения $t_{\mathscr{P}}$, удовлетворяющие равенству $2\int\limits_0^{t_{\mathscr{P}}} S_{n-1}(x)\,dx=\mathscr{P}$, где $S_{n-1}(x)$ — плотность распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы

$n-1$ \ $\mathscr{P}$	0,9	0,95	0,98	0,99
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,624	2,977
16	1,746	2,120	2,583	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Таблица VII

Значения χ^2_α, удовлетворяющие равенству $\int\limits_{\chi^2_\alpha}^{+\infty} p_\nu(x)\,dx = \alpha$, где $p_\nu(x)$ — плотность хи-квадрат распределения с ν степенями свободы

ν \ α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2.09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2.56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6.41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33.4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., 1968.
2. **Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.** Сборник задач по математической физике. М., 1972.
3. **Ван дер Варден Б. Л.** Математическая статистика. М., 1960.
4. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей (задачи и упражнения). М., 1973.
5. **Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., 1975.
6. **Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.** Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, 1979.
7. **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., 1975.
8. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей. М., 1969.
9. **Емельянов Г. В., Скитович В. П.** Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л., 1967.
10. **Коваленко И. Н., Филиппова А. А.** Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1982.
11. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М., 1975.
12. **Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения). М., 1971.
13. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1966.
14. **Мешалкин Л. Д.** Сборник задач по теории вероятностей. М., 1963.
15. **Пугачев В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1979.
16. **Сборник** задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. М., 1965.
17. **Сборник** задач по уравнениям математической физики. / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др.; Под ред. В. С. Владимирова. М., 1974.
18. **Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М.** Сборник задач по теории вероятностей. М., 1980.
19. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., 1972.
20. **Тутубалин В. Н.** Теория вероятностей. М., 1972.
21. **Чистяков В. П.** Курс теории вероятностей. М., 1982.
22. **Шостак Р. Я.** Операционное исчисление (краткий курс). М., 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ