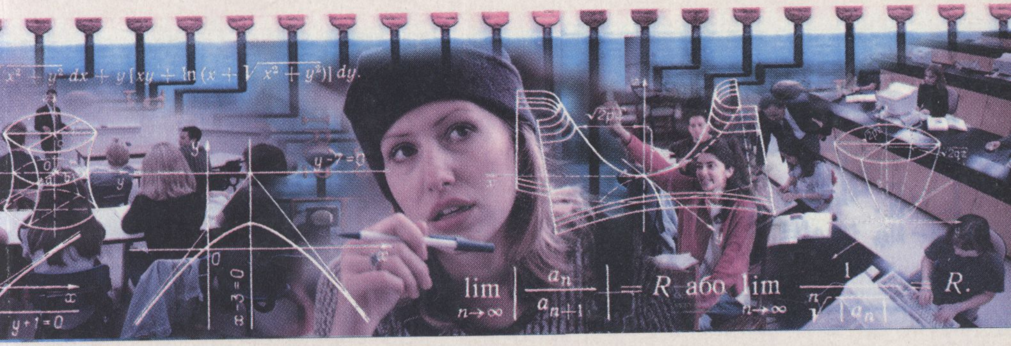
ВИЩА ШКОЛА

В. П. Дубовик, І. І. Юрик

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## II Частина

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В. П. Дубовик, І. І. Юрик

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

# II

## ЧАСТИНА

2-ге видання

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів



Харків
"Веста"
2008

ББК 22.11я73
Д79

*Видано за рахунок державних коштів.*
*Продаж заборонено.*

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (Лист № 1.4/18-Г-1475.1 від 06.09.07)*

Рецензенти: *Л. Ф. Баранник*, д-р фіз.-мат. наук, проф.; *В. О. Марченко*, канд. фіз.-мат. наук (Полтавський пед. ін-т); *В. Б. Рудницький*, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Хмельницький технолог. ін-т).

**Дубовик В. П., Юрик І. І.**
Д79 Вища математика: Навч. посібн. —У трьох частинах. Ч. 2. — 2-ге вид. — Х.: Веста, 2008. — 240 с.: іл.
ISBN 978-966-08-3056-1 (повне зібрання)
ISBN 978-966-08-3058-5 (частина 2).

У другій частині посібника розглянуто диференціальне й інтегральне числення функцій однієї змінної та диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Теоретичний матеріал відповідає навчальній програмі з курсу вищої математики і супроводжується достатньою кількістю прикладів і задач. Особливу увагу приділено прикладній і практичній спрямованості курсу.

Для студентів вищих навчальних закладів.

**ББК 22.11я73**

**ISBN 978-966-08-3056-1**
**ISBN 978-966-08-3058-5**

Частина друга

## Глава 5

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Деякі задачі диференціального числення розв'язані ще в давнину. Так, Евклід розв'язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, а Аполлоній — дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь.

## § 1. ПОХІДНА

Центральне поняття диференціального числення — похідна — широко використовується при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

### 1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної

**1.** *Задача про швидкість прямолінійного руху.* Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно вздовж деякої прямої (рис. 5.1) і за час $t$ проходить відстань $S$, що дорівнює відрізку $OM$. Тоді різним моментам часу $t$ відповідатимуть різні положення точки $M$, тобто відстань $S$ рухомої точки $M$ є деякою функцією часу $t$: $S = S(t)$. Треба знайти швидкість руху точки $M$.

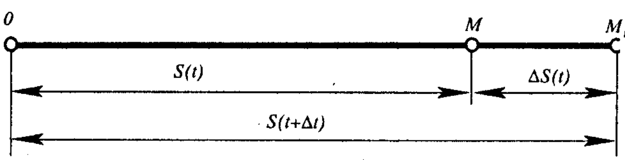



Рис. 5.1

Нехай з моменту $t$ пройшов деякий час $\Delta t$ ($\Delta t > 0$ — приріст часу). За час $\Delta t$ рухома точка перейде в положення $M_1$ і пройде шлях, який позначимо через $\Delta S$ ($\Delta S$ — приріст шляху, що дорівнює відрізку $MM_1$). Отже, за час $t + \Delta t$ матеріальна точка пройде шлях $S(t) + \Delta S = S(t + \Delta t)$, тому

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

*Середньою швидкістю* $v_c$ *руху точки за проміжок часу* $[t;\ t + \Delta t]$ називають відношення приросту шляху до приросту часу:

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Середня швидкість залежить від значення $\Delta t$, причому чим менший проміжок $\Delta t$ після моменту часу $t$, тим точніше середня швидкість відображає швидкість руху точки у даний момент часу $t$. Істинну ж (миттєву) швидкість руху точки дістанемо як границю, до якої прямує середня швидкість $v_c$ при $\Delta t \to 0$. Цю границю називають *швидкістю руху точки в момент часу* (або *миттєвою швидкістю*) і позначають

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

***Приклади***

1. Знайти середню $v_c$ і миттєву $v$ швидкості точки, яка рухається рівномірно прискорено з прискоренням $a$ і з нульовою початковою швидкістю.

○ З курсу фізики відомо, що для даного випадку закон руху виражається формулою $S = \frac{at^2}{2}$. Знайдемо приріст шляху $\Delta S$:

$$S + \Delta S = \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{at^2}{2} + at\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2},$$

$$\Delta S = \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{at^2}{2} = at\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}.$$

Далі маємо

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = at + \frac{a\Delta t}{2};$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim \left(at + \frac{a\Delta t}{2}\right) = at. \ ●$$

2. Нехай закон руху точки виражається формулою $S = t^3 + 3t + 1$, де $S$ вимірюється в метрах. Знайти середню швидкість руху на проміжку часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 5$ с і від $t_0$ до $t_2 = 2$ с та швидкість в момент часу $t_0 = 1$ с.

○ Знайдемо приріст шляху $\Delta S$ за проміжок часу $\Delta t$:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S = [(t + \Delta t)^3 + 3(t + \Delta t) + 1] -$$

$$-(t^3 + 3t + 1) = 3(t^2 + 1)\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3.$$

Середня швидкість за час $\Delta t$

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 3(t^2 + 1) + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Проміжок часу $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 5 - 1 = 4$ с, тому

$$V_c = 3(1^2 + 1) + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 4^2 = 34 \text{ м/с}.$$

Проміжок часу $\Delta t_2 = t_2 - t_0 = 2 - 1 = 1$ с, тому

$$V_c = 3(1^2 + 1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = 10 \text{ м/с}.$$

Знайдемо миттєву швидкість в будь-який момент часу $t$:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_c = \lim\,[3(t^2 + 1) + 3t\Delta t + \Delta t^2] = 3(t^2 + 1).$$

Зокрема, при $t_0 = 1$ с маємо

$$V = 3(1^2 + 1) = 6 \text{ м/с}. \bullet$$

2. *Задача про густину неоднорідного стержня.* Розглянемо тонкий прямолінійний неоднорідний стержень довжини $l$ (рис. 5.2) і розмістимо його на осі $Ox$ так, щоб лівий кінець стержня збігався з початком координат (матеріальне тіло називається *неоднорідним,* якщо його густина не є сталою, а змінюється від точки до точки). Позначимо через $m$ масу стержня між точками $O$ і $M$ з координатами $0$ і $x$. Оскільки маса відрізка $OM$ залежить від його довжини, то $m$ є функцією від $x$:

$$m = m(x).$$

Треба знайти густину стержня в точці $M$. Як і в попередній задачі крім точки $M$ візьмемо ще точку $M_1$ з координатою $x + \Delta x$ ($\Delta x$ — приріст довжини $x$) і позначимо через $m + \Delta m$ масу відрізка $OM_1$ ($\Delta m$ — приріст маси, що дорівнює масі відрізка $MM_1$):

$$m + \Delta m = m(x + \Delta x).$$

Відрізок стержня між точками $M$ і $M_1$ має довжину $\Delta x$ і масу

$$\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x).$$

*Середньою густиною* $\gamma_c$ *стержня на відрізку* $[x;\ x + \Delta x]$ називають відношення приросту маси до приросту довжини:

$$\gamma_c = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Границю середньої густини $\gamma_c$ при $\Delta x \to 0$ називають *лінійною густиною стержня в точці* $x$ і позначають

$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

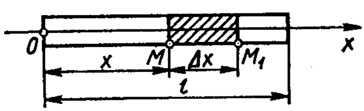



Рис. 5.2

3. *Задача про силу струму.* Нехай $Q = Q(t)$ — кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час $t$, треба знайти силу струму в момент часу $t$. *Середньою силою струму $I_c$ за проміжок часу* $[t;\ t + \Delta t]$ називають відношення приросту кількості електрики до приросту часу:

$$I_c = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}.$$

Границя середньої сили струму $I_c$ при $\Delta t \to 0$ є *сила струму* в момент часу $t$:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}. \qquad (3)$$

4. *Задача про теплоємність.* Нехай $\omega = \omega(\tau)$ — кількість теплоти, яку дістає тіло при нагріванні його до температури $\tau$. Треба знайти теплоємність тіла при температурі $\tau$.

*Середньою теплоємністю* $C_c$ тіла на проміжку $[\tau;\ \tau + \Delta\tau]$ називають відношення приросту теплоти до приросту температури:

$$C_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}.$$

Границю середньої теплоємності $C_c$ при $\Delta\tau \to 0$ називають *теплоємністю тіла* при температурі $\tau$:

$$C = \lim_{\Delta\tau \to 0} C_c = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}. \qquad (4)$$

5. *Задача про швидкість хімічної реакції.* Нехай $N = N(t)$ — кількість речовини, що вступає в хімічну реакцію за час $t$. Треба знайти швидкість реакції. Середньою швидкістю $v_c$ реакції за проміжок часу $[t;\ t + \Delta t]$ називають відношення приросту кількості речовини до приросту часу:

$$v_c = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

Границя середньої швидкості $v_c$ реакції при $\Delta t \to 0$ є швидкість реакції в момент часу $t$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}. \qquad (5)$$

6. *Задача про дотичну до кривої.* Відомо, що дотичною до кола називають пряму, яка має з колом одну спільну точку. Це означення дотичної не можна застосувати до незамкнених кривих. Дійсно, парабола $y = x^2$ має з віссю $Oy$ лише одну спільну точку $(0; 0)$, але пряма $x = 0$ не є дотичною до цієї параболи у вказаній точці. З іншого

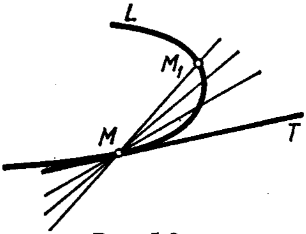


Рис. 5.3

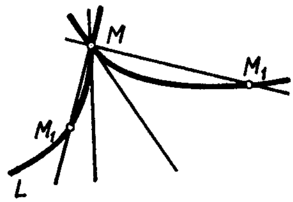


Рис. 5.4

боку, пряма $y = 1$ має безліч спільних точок з кривою $y = \sin x$ і є дотичною до цієї кривої.

Дамо загальне означення дотичної. Розглянемо криву $L$ і на ній точки $M$, $M_1$ (рис. 5.3). Пряму $MM_1$, що проходить через ці точки, називають *січною*. Нехай точка $M_1$, рухаючись вздовж кривої, наближається до точки $M$. Тоді січна $MM_1$ повертатиметься навколо точки $M$, а довжина відрізка $MM_1$ прямуватиме до нуля.

Якщо при цьому і величина кута $M_1MT$ прямує до нуля, то пряму $MT$ називають граничним положенням січної $MM_1$.

Пряму $MT$, яка є граничним положенням січної $MM_1$, називають *дотичною до кривої* $L$ в точці $M$.

З цього означення випливає, що існування дотичної не залежить від того, з якого боку точка $M_1$ наближається до точки $M$. У будь-якому випадку січна $MM_1$ має наближатись до однієї і тієї самої прямої $MT$.

Якщо січна $MM_1$ наближається до різних прямих (рис. 5.4) або взагалі не наближається ні до якої прямої, то вважають, що в точці $M$ дотичної не існує.

Розглянемо випадок, коли крива в прямокутній системі координат (рис. 5.5) задана рівнянням $y = f(x)$ і має в точці $M(x; y)$ не вертикальну дотичну. Розглянемо задачу про знаходження кутового коефіцієнта цієї дотичної. Надамо аргументу $x$ приросту $\Delta x$: тоді значенню $x + \Delta x$ відповідатимуть значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ і точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ на кривій.

Проведемо січну $MM_1$ і позначимо через $\varphi$ кут, утворений цією січною з додатним напрямом осі $Ox$. З графіка видно, що кутовий коефіцієнт січної $MM_1$ дорівнює

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AM_1}{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

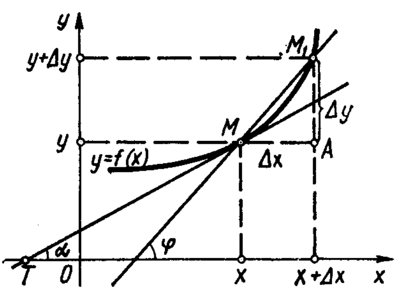


Рис. 5.5

Якщо $\Delta x \to 0$, то точка $M_1$ прямує до точки $M$ вздовж кривої $y = f(x)$, а січна $MM_1$, повертаючись навколо точки $M$, переходить в дотичну $MT$. Кут $\varphi$ при цьому прямує до деякого граничного значення $\alpha$. Отже, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (6)$$

Розглянуті задачі, незважаючи на різний зміст, приводять нас до знаходження границь (1) — (6) одного й того самого виду — границі відношення приросту функції до приросту аргументу.

Цю границю в математиці називають *похідною*. Переходимо до точного означення.

## 1.2. Означення похідної. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної

Нехай на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in \langle a;\ b\rangle$ і надамо $x$ довільного приросту $\Delta x$ такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала проміжку $\langle a;\ b\rangle$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

*Похідною функції* $y = f(x)$ в точці $x$ називається границя відношення приросту функції $\Delta y$ в цій точці до приросту аргументу $\Delta x$, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці $x$ позначається одним із таких символів:

$$y';\quad \frac{dy}{dx};\quad \frac{df}{dx};\quad y'_x;\quad f'(x).$$

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (7)$$

Якщо в деякій точці $x$ границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то похідну $f'(x)$ в цій точці називають нескінченною.

Якщо границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ в деякій точці $x$ не існує, то не існує в цій точці і похідної $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається одним із таких символів:

$$f'(x_0);\quad f'(x)|_{x=x_0};\quad y'|_{x=x_0};\quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

З означення похідної випливає такий спосіб її знаходження. Щоб знайти похідну функції $y = f(x)$ в деякій точці $x$, треба:

1) надати значенню $x$ довільного приросту $\Delta x$ і знайти відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) знайти відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

3) знайти границю цього відношення:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона й дорівнює похідній $f'(x)$.

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається *диференціюванням цієї функції.*

***Приклади***

1. Знайти похідну функції $y=x^2$: а) в довільній точці $x$; б) в точці $x=5$.

○ а) Надамо аргументу $x$ приросту $\Delta x$ і обчислимо приріст $\Delta y$:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Отже, $(x^2)'=2x$.

б) Підставивши в загальний вираз для похідної значення $x=5$, дістанемо

$$(x^2)'\big|_{x=5}=2x\big|_{x=5}=2\cdot 5=10. \quad ●$$

2. Довести, що функція $y=x^n$, $x\in R$, $n\in N$ має похідну $y'=nx^{n-1}$.

○ Візьмемо довільну точку $x$ і надамо їй приросту $\Delta x$. Тоді функція матиме приріст $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$. Застосовуючи до виразу $(x+\Delta x)^n$ формулу бінома Ньютона

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots+b^n, \tag{8}$$

при $a=x$, $b=\Delta x$, дістанемо

$$\Delta y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^3+\cdots+\Delta x^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^{n-1}.$$

Перейшовши в останній рівності до границі при $\Delta x\to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

Отже,

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \quad ● \tag{9}$$

Користуючись означенням похідної, розв'язки задач 1—6 п. 1.1 можна тлумачити так.

1. *Швидкість в даний момент часу* — це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом $t: v = S'(t)$.

Це *механічний зміст похідної*. Узагальнюючи, можна сказати: якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає *фізичний зміст похідної*. Інакше кажучи, яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як *середню швидкість зміни функції $y$* відносно аргументу $x$, а похідну $f'(x)$ — *миттєву швидкість зміни функції*.

2. *Лінійна густина неоднорідного стержня* — це похідна від маси $m(x)$ за довжиною $x: \gamma = m'(x)$

3. *Сила струму* — це похідна від кількості електрики $Q(t)$ за часом $t$: $I = Q'(t)$.

4. *Теплоємність* — це похідна від кількості теплоти $\omega(\tau)$ за температурою $\tau$: $c = \omega'(\tau)$.

5. *Швидкість хімічної реакції* — це похідна від кількості речовини $N(t)$, що вступила в реакцію, за часом $t$: $v = N'(t)$.

6. *Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута $\alpha$ (рис. 5.6), що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі $Ox$,— це похідна $f'(x_0)$ в цій точці:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$

У цьому полягає *геометричний зміст похідної*.

Знайдемо рівняння дотичної. Оскільки дотична проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ в напрямі, що визначається кутом $\alpha$, то, поклавши в формулі (9) (гл. 3) $k = f'(x_0)$, маємо

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (10)$$

Рівняння (10) називається *рівнянням дотичної до кривої* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Зокрема, якщо функція в точці $M_0$ має нескінченну похідну, то дотична в цій точці паралельна осі $Oy$, а її рівняння таке: $x = x_0$.

*Нормаллю до кривої* називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов'язані між собою умовою перпендикулярності ((24), гл. 3), то рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (11)$$

За допомогою рівняння (10) можна знайти довжину відрізка $AM_0$ (рис. 5.6), яка називається *довжиною відрізка дотичної* (як відстань між точками $M_0$ і $C$), і довжину відрізка $AB$, який називається

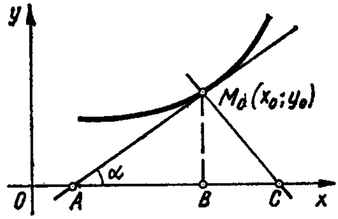


Рис. 5.6

*піддотичною* (як відстань між точками $A$ і $B$). Аналогічно за допомогою рівняння (11) знаходять *довжину відрізка нормалі* $M_0C$ та *піднормалі* $BC$. Ці відрізки часто зустрічаються в задачах.

Наведемо деякі твердження, які випливають з геометричного змісту похідної.

Нехай на інтервалі $(a, b)$ задано (рис. 5.7) неперервну функцію $f(x)$. Якщо похідна $f'(x_1)$ при $x_1 \in (a, b)$ додатна, то дотична до графіка функції $f(x)$ в точці $(x_1; f(x_1))$ утворює з віссю $Ox$ гострий кут. Якщо похідна $f'(x_2) = 0$, то дотична в точці $(x_2; f(x_2))$ паралельна осі $Ox$: якщо похідна $f'(x_3) < 0$, то дотична до графіка в точці $(x_3; f(x_3))$ утворює з віссю $Ox$ тупий кут; якщо похідна $f'(x_4)$ не існує, то в точці $(x_4; f(x_4))$ не існує й дотичної, тобто графік в цій точці має злом (кажуть також, що графік має кутову точку); якщо похідна $f'(x_5)$ дорівнює нескінченності, то дотична у відповідній точці графіка паралельна осі $Oy$. Справедливі й обернені твердження. Наприклад, якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_1; f(x_1))$ утворює з віссю $Ox$ гострий кут, то $f'(x_1) > 0$; якщо дотична до графіка в точці $(x_2; f(x_2))$ паралельна осі $Ox$, то $f'(x_2) = 0$ і т. д.

Такий зв'язок між похідною і дотичною, як і зв'язок між похідною і швидкістю, допомагає інтуїтивному сприйняттю багатьох математичних фактів.

***Приклади***

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3$ в точці $A$ (2; 8). Знайти довжини відрізка дотичної і піднормалі в цій точці.

○ За формулою (9) при $n = 3$ маємо $y' = (x^3)' = 3x^2$, звідки $f'(2) = 12$.

Поклавши в формулах (10) і (11) $x_0 = 2$, $y_0 = 8$, $f'(x_0) = 12$, дістанемо рівняння дотичної (рис. 5.8)

$$y - 8 = 12(x - 2) \Rightarrow 12x - y - 16 = 0$$

і рівняння нормалі

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2) \Rightarrow x - 12y - 98 = 0.$$

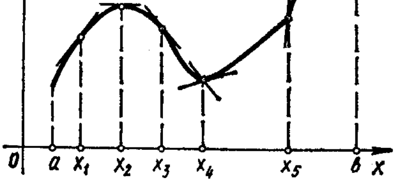


Рис. 5.7

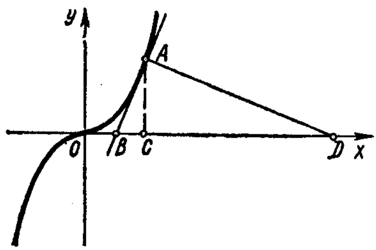


Рис. 5.8

Довжину відрізка $AB$ дотичної знайдемо як відстань між точками $A$ і $B$. Координати точки $B$ визначимо з системи рівнянь $y = 12x - 16$; $y = 0$ (точка перетину дотичної і осі $Ox$). Маємо $A$ (2; 8), $B\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$, тому довжина відрізка дотичної

$$AB = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + (8-0)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{145}.$$

Поклавши в рівнянні нормалі $y = 0$, знайдемо $x_D = 98$. Оскільки $x_C = x_A = 2$, то піднормаль $CD = 96$. ●

2. Знайти кути між параболами $y = x^2$, $y = x^3$ в точках перетину їх.

○ Розв'язуючи систему рівнянь $y = x^2$; $y = x^3$, знайдемо точки $O$ (0; 0) і $A$ (1; 1) перетину даних кривих.

За формулою (9)

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$$

Зазначимо, що *кутом між кривими в точці їхнього перетину* вважають (за означенням) кут між дотичними до даних кривих у цій точці. Оскільки при $x = 0$ ці похідні однакові (дорівнюють нулю), то це означає, що в точці $O$ (0; 0) дотичні мають однакові кутові коефіцієнти, тобто параболи $y = x^2$ і $y = x^3$ в точці $O$ (0; 0) мають одну й ту саму дотичну, тому кут між кривими в цій точці дорівнює нулю. Цей самий результат дістанемо, коли в формулі (9) (гл. 3) покладемо $k_1 = k_2 = 0$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до даних кривих у точці $A$ (1; 1). Маємо

$$k_1 = 2x\,|_{x=1} = 2, \quad k_2 = 3x^2\,|_{x=1} = 3, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{1}{7},$$

звідки $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. ●

### 1.3. Графічне диференціювання

Наведемо ще одне застосування геометричного змісту похідної.

*Графічним диференціюванням* називається наближена побудова графіка похідної $y' = f'(x)$ за даним графіком функції $y = f(x)$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$ (рис. 5.9).

Розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на $n$ частин і позначимо відповідні їм точки $M_0$, $M_1$, $M_2$, ..., $M_{n-1}$, $M_n$ графіка. В кожній з цих точок проведемо дотичну. Через точку $A$ (—1; 0) проведемо паралельні цим дотичним прямі до перетину з віссю $Oy$ в точках $B_0$, $B_1$, $B_2$, ..., $B_{n-1}$, $B_n$, тоді

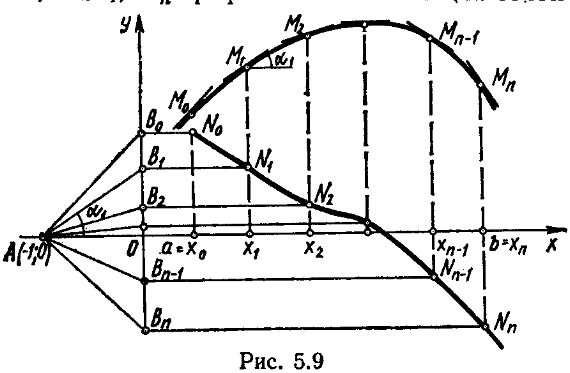



Рис. 5.9

$$y_{B_0} = f'(x_0),$$

$$y_{B_1} = f'(x_1),$$

$$y_{B_2} = f'(x_2), \quad \ldots,$$

$$y_{B_{n-1}} = f'(x_{n-1}),$$

$$y_{B_n} = f'(x_n).$$

Справді, наприклад, з $\triangle\ OB_1A$ маємо

$$\frac{OB_1}{OA} = \frac{OB_1}{1} = \operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x_1).$$

Проведемо через точку $B_1$ пряму, паралельну осі $Ox$, а через $M_1$ пряму, паралельну осі $Oy$. Точка $N_1$ перетину їх належить графіку похідної $y = f'(x)$, оскільки

$$x_{N_1} = x_1, \quad y_{N_1} = f'(x).$$

Аналогічно знаходять точки $N_0, N_2, \ldots, N_n$. Сполучивши плавною лінією всі ці точки, матимемо наближений графік похідної $y' = f'(x)$. Цей графік тим точніший, чим більше число $n$ поділу відрізка $[a; b]$ на частини.

### 1.4. Односторонні похідні. Неперервність і диференційовність

Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь (гл. 4, п. 5.1). Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки $x$. Якщо в формулі (7) передбачається, що $\Delta x \to 0$ і $\Delta x > 0$, то відповідну границю (коли вона існує) називають *правою похідною* від $f(x)$ в точці $x$ і позначають

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається *ліва похідна:*

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$, то під похідною в точці $a$ розуміють праву похідну, а в точці $b$ — ліву.

З формули (25) (гл. 4) випливає, що коли неперервна функція $f(x)$ має ліву і праву похідні в точці $x$ і вони рівні, то похідна $f'(x)$ існує і

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x). \tag{12}$$

Якщо ж $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, то похідна в точці $x$ не існує. Не існує похідної і в точках розриву функції.

Як уже зазначалося, похідна може бути як скінченною, так і нескінченною, залежно від значення границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Надалі під словом «похідна» розумітимемо, якщо не буде спеціального застереження, лише скінченну похідну.

Функція $f(x)$ називається *диференційовною* в точці $x_0$, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функцію $f(x)$ називають *диференційовною на проміжку*, якщо вона диференційовна в кожній точці цього проміжку.

***Приклади***

1. Функція $y = \sin x$ (рис. 4.15) неперервна і диференційовна на всій числовій осі.

2. Функція $y = E(x)$ (рис. 4.8) в точках $x = n$ має розриви першого роду, тому в цих точках вона недиференційовна.

3. Функція $y = |x|$ (рис. 4.3) в точці $x = 0$ неперервна, але недиференційовна, тому що порушується умова (12) і похідна не існує. Справді, $f'_+(0) \neq f'_-(0)$:

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

4. Функція $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 4.9, *в*) в точці $x = 0$ неперервна і має нескінченну похідну

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x + 0} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

Тому в точці $x = 0$ дана функція є недиференційовною.

5. Функція $y = e^{|x|}$ в точці $x = 0$ є неперервною, тому що

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = e^{|0+\Delta x|} - e^{|0|} = e^{|\Delta x|} - 1;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (e^{|\Delta x|} - 1) = 0.$$

Оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{|\Delta x|} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0; \\ -1, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

то дана функція в точці $x = 0$ є недиференційовною.

6. Функція $y = e^x$ в точці $x = 0$ є неперервною і диференційовною, оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Зв'язок між неперервністю функції в точці і диференційовністю її в цій точці встановлює така теорема.

***Теорема.*** *Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x_0$, то вона в цій точці неперервна.*

○ Справді, якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то за властивістю 1° (п. 3.6 гл. 4)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тоді $\Delta y = (f'(x_0) + \alpha)\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а це означає, що функція $f(x)$ в точці $x_0$ неперервна. ●

Як показують приклади 3, 4, 5, обернене твердження неправильне: існують неперервні функції, які в деяких точках не є диференційовними. Крім того, відомі приклади функцій, неперервних на всій числовій осі і недиференційовних в жодній її точці [12]. Таким чином, неперервність функції в точці є лише необхідною умовою її диференційовності в цій точці.

### Завдання для самоконтролю

1. Дати означення похідної заданої функції.
2. Охарактеризувати символи $f'(x)$, $f'(x_0)$.
3. Який геометричний, механічний і фізичний зміст похідної?
4. Як знайти похідну, виходячи з її означення?
5. Довести, користуючись означенням похідної, що

$$(3x^2 - 5x + 2)' = 6x - 5.$$

6. Довести, користуючись означенням похідної, що

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

7. Вивести рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.
8. Як знайти довжини дотичної, піддотичної, нормалі і піднормалі, користуючись рівнянням дотичної і нормалі?
9. Упевнитись, що довжини піддотичної і нормалі параболи $y = x^2$ в точці $A(2; 4)$ дорівнюють відповідно 1 і $4\sqrt{17}$.
10. Нехай точка $M_1(x_1; y_1)$ належить кривій $y = f(x)$ і існує похідна $y_1' = f'(x_1)$ в цій точці $M_1$. Нехай $T$, $S_T$, $N$, $S_N$ — відповідно довжини відрізка дотичної, піддотичної, відрізка нормалі та піднормалі до даної кривої в точці $M_1$. Довести, що

$$S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|; \quad T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{y_1'^2 + 1}\right|; \quad S_N = |y_1 y_1'|; \quad N = \left|y_1\sqrt{1 + y_1'^2}\right|.$$

11. Виконати завдання 9 за допомогою формул із завдання 10.
12. Як визначається кут між лініями?
13. Упевнитись, що лінії $y = x^2$ і $y = x$ перетинаються під кутом 45° в точці $O(0; 0)$ і під кутом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ в точці $A(1; 1)$.
14. Дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ нахилена під кутом 45°. Чому дорівнює $f'(x_0)$?
15. Дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ паралельна осі $Ox$. Чому дорівнює $f'(x_0)$?
16. Описати спосіб графічного диференціювання.
17. Дати означення правої і лівої похідних функцій в точці. Який зв'язок між односторонніми похідними і похідною функції в точці? Навести приклад функції, для якої існує права і ліва похідні в деякій точці, але не існує похідна в цій точці.
18. Упевнитись, що для функції $f(x) = e^{-|x|}$ права похідна $f_+'(0) = -1$, а ліва похідна $f_-'(0) = 1$.
19. Дати означення диференційовної функції в точці і на проміжку.
20. Який клас функцій ширший: неперервних в точці $x = x_0$ чи диференційовних в цій точці? Навести приклади.

## § 2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

У попередньому параграфі ми знаходили похідні деяких функцій, виходячи з означення похідної. На практиці функції диференціюють за допомогою ряду правил і формул.

### 2.1. Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки

***Теорема 1.*** *Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні в точці $x$, сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці і справедливі такі формули:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \tag{13}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \tag{14}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{15}$$

○ На основі означення похідної і теореми 1 (гл. 4, п. 3.7) маємо

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v';$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x}\right] =$$

$$= v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= vu' + u'v + 0 \cdot u' = u'v + uv'.$$

Тут ми скористалися теоремою (п. 1.4) про зв'язок диференційовності і неперервності: оскільки функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в точці $x$, то вони в цій точці неперервні, тому $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Знайдемо похідну частки:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\,v(x) + v(x)\,\Delta u - v(x)\,u(x) - u(x)\,\Delta v}{(v(x) + \Delta v)\,v(x)\,\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v^2 + v\Delta v)\,\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta u} =$$

$$= \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u} = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \bullet$$

### 2.2. Похідні сталої, добутку сталої на функцію, степеневої, тригонометричних, показникової і логарифмічної функцій

***Теорема 2.*** *Якщо $y = f(x) = C$, де $C$ — стале число, то*

$$f'(x) = C' = 0. \tag{16}$$

○ Для довільних $x$ і $\Delta x \neq 0$ маємо $f(x) = C$, $f(x + \Delta x) = C$, тому $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. Отже,

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0. \bullet$$

***Теорема 3.*** *Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто*

$$(Cu)' = Cu'. \tag{17}$$

○ З формул (14) і (16) маємо

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'. \bullet$$

***Теорема 4.*** Похідну степеневої функції $y = x^\alpha$, де $\alpha$ — довільне число, знаходять за формулою

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{18}$$

○ Застосувавши еквівалентність $(1 + t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ при $t \to 0$ (гл. 4, п. 4.3), маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Формула (18) є узагальненням формули (9). ●

***Теорема 5.*** *Похідні тригонометричних функцій знаходять за формулами*

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{19}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{20}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{21}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{22}$$

○ $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

оскільки з першої важливої границі випливає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$,

а внаслідок неперервності функції $\cos x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x.$$

Таким чином, формулу (19) доведено. Аналогічно доводиться формула (20):

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Формули (21) і (22) випливають з правила диференціювання частки і формул (19) і (20):

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad ●$$

***Теорема 6.*** *Похідну показникової функції $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ знаходять за формулою*

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{23}$$

○ Скориставшись еквівалентністю $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$ при $\alpha \to 0$ маємо

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a. \ ●$$

**Н а с л і д о к.** Похідну функції $y = e^x$ знаходять за формулою

$$(e^x)' = e^x. \tag{24}$$

***Теорема 7.*** *Похідну логарифмічної функції* $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ *знаходять за формулою*

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e. \tag{25}$$

○ Скориставшись еквівалентністю $\log_a (1 + t) \sim t \log_a e$, $t \to 0$, (гл. 4, п. 4.3), дістанемо

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \log_a e}{x \Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e. \ ●$$

**Н а с л і д о к.** Похідну функції $y = \ln x$ знаходять за формулою

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{26}$$

### 2.3. Похідна складеної функції

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f[\varphi(x)]$ — складена функція з проміжним аргументом $u$ і кінцевим $x$.

***Теорема 8.*** *Якщо функція* $u = \varphi(x)$ *має похідну* $u'_x$ *в точці* $x$, *а функція* $y = f(u)$ *має похідну* $y'_u$ *у відповідній точці* $u$, *то складена функція* $y = f[\varphi(x)]$ *має похідну* $y'_x$ *в точці* $x$ *і справедлива формула*

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{27}$$

○ Оскільки функція $y = f(u)$ диференційовна в точці $u$, то за властивістю 1° (гл. 4, п. 3.6) маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \ \text{або} \ \Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u, \tag{28}$$

де $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функція $u = \varphi(x)$ має похідну $u'_x$ в точці $x$, тому

$$\Delta u = u'_x \Delta x + \alpha_1 \Delta x, \tag{29}$$

де $\alpha_1 \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Підставивши значення $\Delta u$ з формули (29) у формулу (28), дістанемо

$$\Delta y = y'_u u'_x \Delta x + y'_u \alpha_1 \Delta x + u'_x \alpha \Delta x + \alpha \alpha_1 \Delta x.$$

Якщо цю рівність розділити на $\Delta x$ і перейти до границі при $\Delta x \to 0$, то одержимо формулу (27). ●

Згідно з формулою (27) маємо таке правило диференціювання складеної функції: похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по кінцевому аргументу. Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів. Якщо, наприклад, $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x. \tag{30}$$

Зазначимо, що при диференціюванні складених функцій потрібно чітко уявляти собі, яка з дій, що приводять до значення складеної функції, є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

*Зауваження.* $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Дійсно, нехай $x > 0$, тоді $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Якщо $x < 0$, то $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

***Приклад***

Знайти похідні функцій:

а) $y = \sin^3 x$; б) $y = \ln \operatorname{tg} x^3$; в) $y = 2^{\sqrt[3]{\cos 5x}}$.

○ а) Для функції $y = \sin^3 x$ останньою дією є піднесення до кубу, тому проміжний аргумент $u = \sin x$ і $y = u^3$. За формулами (27), (18) і (19) дістанемо

$$y'_x = (\sin^3 x)'_x = (u^3)'_u (\sin x)'_x = 3u^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x.$$

б) Для функції $y = \ln \operatorname{tg} x^3$ останньою операцією є взяття логарифма, тому проміжним аргументом є значення $u = \operatorname{tg} x^3$. Проміжним аргументом виразу $\operatorname{tg} x^3$ є $v = x^3$, тому дана функція має вигляд

$$y = \ln u, \quad u = \operatorname{tg} v, \quad v = x^3.$$

Застосовуючи формули (30), (26), (21) і (18), дістанемо

$$y'_x = (\ln u)'_u (\operatorname{tg} v)'_v (x^3)'_x = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} v} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sin x^3 \cos x^3}.$$

На практиці проміжні аргументи не виписують, але похідні від них позначають штрихом. Ось як, наприклад, знаходять похідну функції б):

$$(\ln \operatorname{tg} x^3)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} (\operatorname{tg} x^3)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{\sin x^3 \cos x^3}.$$

в) При достатній підготовці похідну знаходять зразу, не вводячи допоміжних позначень для похідних від проміжних аргументів:

$$y'_x = \left(2^{\sqrt[3]{\cos 5x}}\right)' = 2^{\sqrt[3]{\cos 5x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{3} (\cos 5x)^{-\frac{2}{3}} (-\sin 5x) \cdot 5 =$$

$$= \frac{-5 \ln 2 \cdot 2^{\sqrt[3]{\cos 5x}} \sin 5x}{3 \sqrt[3]{\cos^2 5x}}. \bullet$$

## 2.4. Гіперболічні функції та їхні похідні

У математиці, будівельній механіці, електротехніці та інших дисциплінах зустрічаються так звані *гіперболічні функції*.

Гіперболічними синусом $\operatorname{sh} x$, косинусом $\operatorname{ch} x$, тангенсом $\operatorname{th} x$ і котангенсом $\operatorname{cth} x$ називаються функції, які визначаються за такими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \tag{31}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Функції $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ визначені на всій числовій осі, а функція $\operatorname{cth} x$ визначена для всіх дійсних значень $x$, крім точки $x = 0$.

Графіки цих функцій (рис. 5.10) можна побудувати, використовуючи метод, описаний в п. 2.4 (гл. 4).

Гіперболічні функції зв'язані співвідношеннями, аналогічними до співвідношень між відповідними тригонометричними функціями,

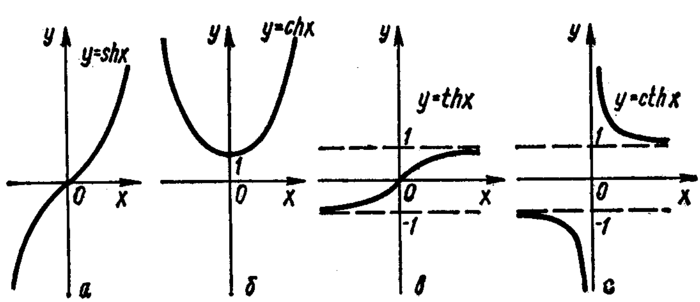



Рис. 5.10

чим і пояснюються їхні назви. Зокрема, справедливі формули

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1;$$

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y;$$

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y;$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}\, x \pm \mathrm{th}\, y}{1 \pm \mathrm{th}\, x\, \mathrm{th}\, y};$$

$$\mathrm{sh}\, 2x = 2\, \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x; \quad \mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x.$$

Всі ці формули випливають з означень гіперболічних функцій. Наприклад,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{4}^2 = 1;$$

$$\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \mathrm{sh}(x + y).$$

Природу цих аналогій з'ясуємо пізніше, коли розглянемо комплексні ч исла. За їх допомогою можна буде довільне співвідношення між тригонометричними функціями перетворити у відповідне співвідношення між гіперболічними функціями.

Геометрична інтерпретація гіперболічних функцій також аналогічна інтерпретації тригонометричних функцій. Як відомо (гл. 3, п. 1.4), параметричні рівняння

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

визначають одиничне коло $x^2 + y^2 = 1$, причому $\sin t = MP$, $\cos t = OP$ (рис. 5.11). Параметричні рівняння

$$x = \mathrm{ch}\, t, \quad y = \mathrm{sh}\, t$$

задають гіперболу (рис. 5.12) $x^2 - y^2 = 1$, оскільки $x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$, причому

$$\mathrm{sh}\, t = NQ, \quad \mathrm{ch}\, t = OQ.$$

Неважко пересвідчитись, що параметр $t$ в параметричних рівняннях кола чисельно дорівнює подвійній площі кругового сектора $OAM$. Зазначимо без доведення, що в параметричних рівняннях гіперболи параметр $t$ також чисельно дорівнює подвійній площі, але не кругового, а гіперболічного сектора $ONA$.

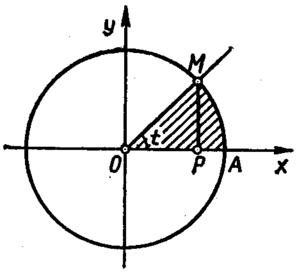



Рис. 5.11

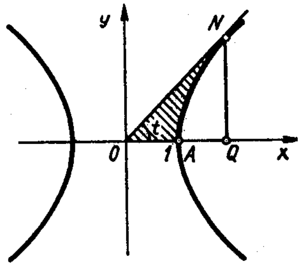



Рис. 5.12

***Теорема 9.*** *Похідні гіперболічних функцій визначаються за формулами*

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \tag{32}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \tag{33}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \tag{34}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{35}$$

○ Відповідно до формул (31), (27), (24) маємо

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x'}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad ●$$

### 2.5. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ — пара взаємно обернених функцій (гл. 4, п. 2.10). Сформулюємо без доведення теорему про зв'язок між похідними цих функцій:

***Теорема 10.*** *Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{36}$$

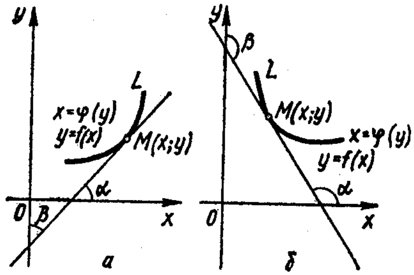



Рис. 5.13

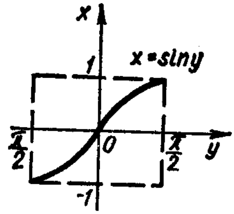



Рис. 5.14

Таким чином, похідні двох взаємно обернених функцій обернені за величиною. Якщо аргумент оберненої функції в формулі (36) позначити через $x$, а саму функцію — через $y$, то дістанемо формулу для похідної оберненої функції:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{37}$$

Формула (36) має такий геометричний зміст. Нехай крива $L$ (рис. 5.13, *а*) задається функцією $y = f(x)$ або оберненою функцією $x = \varphi(y)$. Тоді з геометричного змісту похідної випливає, що

$$y'_x = \operatorname{tg}\alpha; \quad x'_y = \operatorname{tg}\beta.$$

Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, звідки $x'_y = \frac{1}{y'_x}$. Якщо функція $y = f(x)$ монотонно спадає (рис. 5.13, *б*), то $\alpha = \frac{\pi}{2} + (\pi - \beta)$, тому $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \beta\right) = \operatorname{ctg}\beta$, що приведе до того самого висновку.

***Теорема 11.*** *Похідні від обернених тригонометричних функцій знаходять за формулами:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{38}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{39}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \tag{40}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{41}$$

○ Доведемо формулу (38). Функція $y = \arcsin x$, де $x \in [-1; 1]$ є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

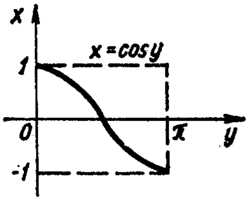



Рис. 5.15

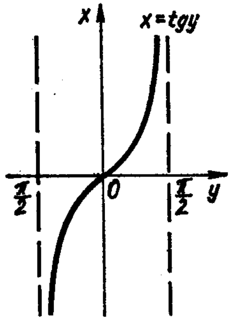



Рис. 5.16

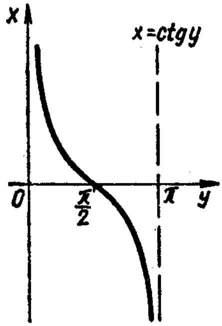



Рис. 5.17

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ зростає (рис. 5.14) і похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0$, тобто всі умови теореми 10 виконуються, то за формулою (37) $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$, звідки $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Формула (39) доводиться аналогічно. Функція $y = \arccos x$ є оберненою до функції $x = \cos y$, де $y \in [0;\ \pi]$, $x \in [-1;\ 1]$. Оскільки на інтервалі $(0;\ \pi)$ функція $x = \cos y$ спадає і $x'_y = -\sin y < 0$ (рис. 5.15), то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доведемо формули (40) і (41). Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою до функції $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \operatorname{tg} y$ зростає (рис. 5.16) і

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0, \text{ то } y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

звідки

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ є оберненою до функції $x = \operatorname{ctg} y$, де $y \in (0;\ \pi)$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Оскільки на інтервалі $(0;\ \pi)$ функція

$x = \operatorname{ctg} y$ спадає (рис. 5.17) і

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}, \text{ то } y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y,$$

звідки

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}. \bullet$$

## 2.6. Похідна функції, заданої параметрично

Виведемо формулу для похідної функції $y = f(x)$, заданої параметрично (гл. 4, п. 2.11)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Припустимо, що функція $\varphi(t)$ на інтервалі $(\alpha; \beta)$ задовольняє всі умови теореми 10, а функція $\psi(t)$ на цьому самому інтервалі має похідну $\psi'(t)$. Тоді існує обернена функція $t = \Phi(x)$, яка має похідну і яку знаходять за формулою (37):

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} \text{ або } \Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \psi(t) = \psi(\Phi(x))$ з проміжним аргументом $t = \Phi(x)$, тому за формулою (27) маємо

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'(t)\Phi'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Таким чином, похідну функції, заданої параметрично, знаходять за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (42)$$

*Приклади*

1. Знайти $y'_x$, якщо $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

○ Оскільки $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = a\cos t$, то за формулою (42) дістанемо

$$y'_x = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t. \bullet$$

2. Скласти рівняння дотичної до циклоїди

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

в точці $M_0(x_0; y_0)$, яка відповідає параметру $t = \frac{\pi}{2}$.

○ Знайдемо координати точки $M_0$:

$$x_0 = (t - \sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1; \quad y_0 = (1-\cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Обчислимо значення похідної $y'_x$ при $t = \frac{\pi}{2}$ : $y'_x \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$

Скориставшись формулою (10), складемо рівняння дотичної:

$$y - 1 = 1 \cdot \left(x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \text{ або } y = x + 2 - \frac{\pi}{2}. \ \bullet$$

3. Знайти піднормаль до кривої

$$x = t^3 - 2t - 2, \quad y = t - 1$$

в точці $M_0$ (2; 1).

○ Точці $M_0$ (2; 1) відповідає значення параметра $t = 2$, оскільки $y|_{t=2} = 1$ і $x|_{t=2} = 2$. Обчислимо похідну $y'_x$ при $t = 2$: $y'_x|_{t=2} = \frac{1}{3t^2 - 2}\Big|_{t=2} = 0,1$. Піднормаль $S_N$ знайдемо за формулою $S_N = |y_1 y'_1|$ (завдання 10 для самоконтролю § 1): $S_N = 1 \cdot 0,1 = 0,1$. ●

## 2.7. Диференціювання неявно заданої функції

Нехай неявна функція $y(x)$ (гл. 4, п. 2.9) задана рівнянням

$$F(x, y) = 0. \qquad (43)$$

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по $x$ від обох частин рівності (43), вважаючи $y$ функцією від $x$, і одержане рівняння розв'язати відносно $y'$. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну $x$ і саму функцію $y$.

*Приклад*

Знайти похідну $y'$, якщо $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.

○ Маємо

$$2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0,$$

$$y'(2y - 2) = -2x - 3, \quad y' = \frac{2x + 3}{2 - 2y}.$$

Зауважимо, що при диференціюванні другого доданка ми скористалися правилом диференціювання складеної функції:

$$(y^2)'_x = (y^2)'_y y'_x = 2yy'. \ \bullet$$

## 2.8. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається *логарифмічним диференціюванням*.

*Приклад*

Знайти похідну функції $y = \frac{x^3 (x^2 + 1) e^x}{(x - 1)\sqrt{3x + 5}}$.

○ Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб дуже громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln y = 3\ln x + \ln(x^2+1) + x - \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln|3x+5|;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)};$$

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)}\right). \bullet$$

У розглянутому прикладі похідну можна знаходити двома способами: за допомогою відомих правил і формул диференціювання і логарифмічним диференціюванням. Проте існують функції, похідні яких знаходять лише логарифмічним диференцюванням. Прикладом такої функції є *показниково-степенева функція*

$$y = u^v, \tag{44}$$

де $u$, $v$ — задані і диференційовні функції від $x$. Знайдемо похідну функції (44):

$$\ln y = v\ln u; \quad \frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u};$$

$$y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}u'.$$

Отже, похідна показниково-степеневої функції (44) дорівнює сумі похідної показникової функції за умови, що $u = \text{const}$, і похідної степеневої функції за умови, що $v = \text{const}$:

$$(u^v)' = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}u'. \tag{45}$$

***Приклад***

Знайти похідну функції $y = x^{\sin 5x}$.

○ За формулою (45) маємо

$$y' = x^{\sin 5x}\ln x\cdot 5\cos 5x + \sin 5x\cdot x^{\sin 5x - 1} = x^{\sin 5x}\left(5\ln x\cos 5x + \frac{\sin 5x}{x}\right). \bullet$$

## 2.9. Таблиця похідних

У попередніх пунктах виведено формули, які дають змогу знаходити похідні, не користуючись означенням похідної, тобто диференціювати довільну елементарну функцію, не вдаючись до знаходження границь.

Зведемо формули в таблицю. Вважатимемо, що $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовні функції, $C$ — стала величина.

П р а в и л а   д и ф е р е н ц і ю в а н н я:

$$(u \pm v)' = u' \pm v; \qquad y = f(u), \quad u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u u'_x;$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad y = f(x), \quad x = \varphi(y) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y};$$

$$(Cu)' = Cu'; \qquad y = y(t), \quad x = x(t) \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \qquad (u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u'.$$

Формули диференціювання:

1. $C' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u', \quad \alpha \in R$;
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad a > 0, \quad a \neq 1$;
4. $(e^u)' = e^u u'$;
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$;
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$;
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
9. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$;
10. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$;
11. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$;
12. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$;
13. $(\mathrm{th}\, u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} u'$;
14. $(\mathrm{cth}\, u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} u'$;
15. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;
16. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;
17. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$;
18. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$.

**Завдання для самоконтролю**

1. Вивести правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки двох функцій. Навести приклади.
2. Вивести правило диференціювання складеної функції. Навести приклад.
3. Дати означення гіперболічних функцій. Чим пояснюється їхня назва? Який геометричний зміст?
4. Вивести формули для похідних гіперболічних функцій.

5. Вивести правило диференціювання оберненої функції.

6. Вивести правило диференціювання параметрично заданої функції. Навести приклад.

7. Як диференціювати неявно задану функцію? Навести приклад.

8. У чому суть логарифмічного диференціювання? Навести приклад.

9. Вивести формули похідних всіх основних елементарних функцій.

10. Довести методом логарифмічного диференціювання формули:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (a^x)' = a^x \ln a.$$

11. Продиференціювати функцію:
$y = \log_u v, \ \ u = u(x), \ \ v = v(x).$

*Вказівка*. Якщо $y = \log_u v$, то $y = \dfrac{\ln v}{\ln u}$.

12. Нехай

$$f(x) = \frac{2^x (x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}, \quad u(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8},$$

$$v(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sin x + \ln \cos \sin x, \quad z(x) = \log_x e.$$

Упевнитись, що $f'(0) = \ln 2 + 4$, $u'(0) = 0$, $v'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $z'(e) = -\frac{1}{e}$.

13. Нехай $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^t \cos t$. Довести, що

$$y'_x \big|_{t=1} = e^2.$$

14. Нехай $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$. Перевірити, що

$$y' \big|_{x=e} = -\frac{y}{2e}.$$

## § 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ. Будь-який процес протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини, що характеризує процес, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну називають *лінеаризацією процесу*.

Термін «диференціал» (від латинського слова differentia — різниця) ввів у математику Лейбніц.

### 3.1. Означення, геометричний та механічний зміст диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x \in [a; b]$, тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді з властивості 1° (гл. 4, п. 3.6)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha, \quad \alpha\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0,$$

звідки

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha\Delta x. \tag{46}$$

Перший з доданків лінійний відносно $\Delta x$ і при $\Delta x\to 0$ та $f'(x)\neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з $\Delta x$, тому що (гл. 4, п. 4.3):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\,\Delta x}{\Delta x}=f'(x).$$

Другий доданок — нескінченно мала вищого порядку, ніж $\Delta x$, тому що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$$

Цей доданок не є лінійним відносно $\Delta x$, тобто містить $\Delta x$ в степені, вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок у формулі (46) є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

*Диференціалом* $dy$ *функції* $y=f(x)$ в точці $x$ називається головна, лінійна відносно $\Delta x$, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy=f'(x)\,\Delta x. \tag{47}$$

Диференціал $dy$ називають також *диференціалом першого порядку*.

Якщо $y=x$, то $y'=x'=1$, тому $dy=dx=\Delta x$, тобто диференціал $dx$ незалежної змінної $x$ збігається з її приростом $\Delta x$. Тому формулу (47) можна записати так:

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{48}$$

Формула (48) дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Зауважимо, що коли в точці $x_0$ похідна $f'(x_0)=0$, то перший доданок у формулі (46) дорівнює нулеві і вже не є головною частиною приросту $\Delta y$. Але і в цьому випадку диференціал $dy$ знаходять за формулою (48).

Геометричний зміст диференціала зрозумілий з рис. 5.18. Маємо

$$PN=\Delta y, \quad QN=MN\operatorname{tg}\alpha=\Delta x f'(x)=f'(x)\,dx=dy.$$

Отже, диференціал функції $f(x)$ при заданих значеннях $x$ і $\Delta x$ дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $x$. Приріст функції $\Delta y$ при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати $AP$ кривої ординатою дотичної $AQ$. Зрозуміло, що така заміна доцільна лише для достатньо малих значень $\Delta x$.

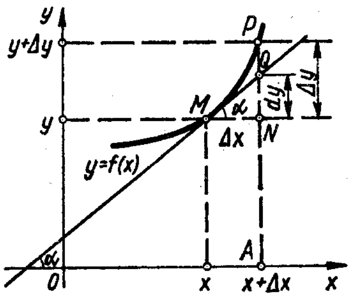


Рис. 5.18

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $S = f(t)$, де $f(t)$ — диференційовна на деякому проміжку функція. Тоді диференціал цієї функції $dS = f'(t)\,\Delta t$ при фіксованих значеннях $t$ і $\Delta t$ — це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час $\Delta t$, якби вона рухалась прямолінійно і рівномірно із сталою швидкістю $v = f'(t)$.

Зрозуміло, що фактичний шлях $\Delta S$ у випадку нерівномірного руху на відміну від диференціала $dS$ не є лінійною функцією часу $\Delta t$ і тому відрізняється від шляху $dS$. Проте якщо час $\Delta t$ достатньо малий, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись, і тому рух точки на проміжку часу від $t$ до $t + \Delta t$ є майже рівномірним.

Поняття диференціала можна проілюструвати і на інших прикладах, які розглянуто в п. 1.1. У кожному з них поняття диференціала набуває конкретного фізичного змісту.

### 3.2. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко дістати із відповідних властивостей похідної. Якщо, наприклад, $u$ і $v$ — диференційовні функції від $x$, $C$ — стала, то маємо такі правила знаходження диференціалів:

$$dC = 0; \qquad d(uv) = vdu + udv;$$

$$d(Cu) = Cdu; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

Доведемо, наприклад, четверту формулу. За означенням диференціала маємо

$$d(uv) = (uv)'_x dx = (u'v + uv')\,dx =$$
$$= vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання складеної функції. Нехай $y = f(x) = f(\varphi(t))$ — складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом $t$, причому функції $f(x)$, $\varphi(t)$ диференційовні в точках $x$ і $t$. Тоді існує похідна $y'_t = y'_x x'_t$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_t dt = y'_x x'_t dt = y'_x dx. \tag{49}$$

Порівнюючи формули (48) і (49), бачимо, що перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається за однією і тією самою формулою незалежно від того, чи змінна $x$ є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Цю властивість диференціала називають *інваріантністю (незмінністю) форми диференціала.* Проте слід зауважити, що формули (48), де $x$ — незалежна змінна, і (49), де $x$ — залежна змінна, однакові лише на вигляд, а зміст їх різний: якщо у формулі (48) $dx = \Delta x$, то у формулі (49)

$$dx = x'(t)\,dt \neq \Delta x.$$

### 3.3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях

Як уже зазначалось, приріст $\Delta y$ функції $y = f(x)$ у точці $x$ можна наближено замінити диференціалом $dy$ в цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення $\Delta y$ і $dy$, дістанемо

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{50}$$

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ є при $\Delta x \to 0$ нескінченно малою вищого порядку, ніж $\Delta x$, тому що при $f'(x) \neq 0$ величини $\Delta y$ і $dy$ еквівалентні (гл. 4, п. 4.3):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x}{f'(x)\,\Delta x} = 1.$$

Оцінка (точність) формули (50) при фіксованих значеннях $x$ та $\Delta x$ з'ясована в п. 5.2.

Іноді користуються наближеною рівністю

$$f(x + \Delta x) \approx f(x). \tag{51}$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x$, то абсолютна похибка формули (51) наближено дорівнює абсолютній величині диференціала:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| = |\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)\,\Delta x|.$$

Відносна похибка формули (51) визначається за формулою

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right|.$$

***Приклади***

1. Знайти диференціал функції $y = \ln \sin 2x$: а) при довільних значеннях $x$ і $\Delta x$; б) при $x = \frac{\pi}{8}$; в) при $x = \frac{\pi}{8}$ і $\Delta x = 0{,}1$.

○ а) Користуючись формулою (48), знаходимо

$$dy = (\ln \sin 2x)'\,dx = 2\operatorname{ctg} 2x\,dx;$$

б) $dy\Big|_{x=\frac{\pi}{8}} = 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\,dx = 2dx$; в) $dy\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{8}\\ \Delta x=0{,}1}} = 0{,}2.$ ●

2. Порівняти приріст $\Delta y$ і диференціал $dy$ функції $y = x^3 + 2x^2$.

○ Знаходимо приріст і диференціал функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x)^2 - (x^3 + 2x^2) =$$

$$= (3x^2 + 4x)\Delta x + (3x + 2 + \Delta x)\Delta x^2;$$

$$dy = f'(x)\Delta x = (3x^2 + 4x)\,dx.$$

Величини $\Delta y$ і $dy$ еквівалентні при $\Delta x \to 0$ і $x \neq 0$, оскільки $dx = \Delta x$ і

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3x^2 + 4x)\Delta x + (3x + 2 + \Delta x)\Delta x^2}{(3x^2 + 4x)\Delta x} = 1.$$

Абсолютна похибка $|\Delta y - dy| = |3x + 2 + \Delta x|\,\Delta x^2$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою другого порядку в порівнянні з $\Delta x$, тому що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta y - dy|}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|3x + 2 + \Delta x|\,\Delta x^2}{\Delta x^2} = |3x + 2| \neq 0,$$

якщо $x \neq -\frac{2}{3}$ і є нескінченною малою більш високого порядку, ніж другий, коли $\Delta x \to 0$ і $x \to -\frac{2}{3}$. ●

3. Довести, що при малих значеннях $\Delta x$ і $x > 0$ справедлива формула

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

○ Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$. Маємо $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ і шукана рівність випливає з формули (50). Зокрема, якщо $x = 1$, то $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{2}$.

Наприклад,

$$\sqrt{1{,}08} = \sqrt{1 + 0{,}08} \approx 1 + \frac{0{,}08}{2} = 1{,}04;$$

$$\sqrt{146} = \sqrt{144 + 2} = \sqrt{144\left(1 + \frac{2}{144}\right)} = 12\sqrt{1 + \frac{1}{72}} \approx 12{,}008. \quad ●$$

4. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

○ Нехай $f(x) = \operatorname{arctg} x$, тоді за формулою (48) маємо

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)'\,\Delta x;$$

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Якщо

$$x = 1, \quad \Delta x = 0{,}5, \text{ то } \operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}5}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}811. \quad ●$$

**Завдання для самоконтролю**

1. Що називається диференціалом функції? Як визначається диференціал функції через її похідну?

2. Який геометричний та механічний зміст диференціала.

3. Який фізичний зміст диференціала в задачах п. 1.1 про густину неоднорідного стержня; про силу струму; про теплоємність; про швидкість хімічної реакції?

4. Назвати властивості диференціала. У чому полягає інваріантність форми диференціала?

5. Обгрунтувати формулу для наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала.

6. Показати, що диференціал і приріст функції $y = x^3$ при $x = 1$ і $\Delta x = 0,1$ відповідно дорівнюють 0,3 і 0,331.

7. Знайти диференціали функцій:

а) $y = \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + 8 \arcsin \frac{x}{4}$; б) $y = 3 \ln \operatorname{ch} \frac{x}{3}$;

в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$, $x \in (0; \pi)$; г) $y = \arccos \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

8. Користуючись формулою (50), переконатись, що

$$\operatorname{tg} 46° \approx 1,035; \quad \arcsin 0,51 \approx 0,513; \quad \cos 61° \approx 0,485.$$

9. Довести формули:

$$\sin (x + \Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cos x;$$

$$\cos (x + \Delta x) \approx \cos x - \Delta x \sin x;$$

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad n \geqslant 2;$$

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x; \quad \ln (x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}.$$

*Відповіді*

7. а) $\sqrt{16 - x^2}\, dx$; б) $\operatorname{th} \frac{x}{3} dx$;

в) $\frac{dx}{2}$; г) $\frac{-2x dx}{|x| (x^2 + 1)}$.

## § 4. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

### 4.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції

Нехай на інтервалі $(a;\ b)$ задана диференційовна функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо ще *першою похідною* (або *похідною першого порядку*), також є функцією від $x$. Може трапитись, що функція $f'(x)$ також має похідну на інтервалі $(a;\ b)$ або в деякій точці $x \in (a;\ b)$. Цю останню похідну називають *другою похідною* (або *похідною другого порядку*) і позначають одним із таких символів:

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Друга похідна має такий механічний зміст. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $S = f(t)$, то похідна $S'$, як було з'ясовано в п. 1.1, дорівнює швидкості точки в даний момент часу: $v = S' = f'(t)$. Оскільки прискорення — це похідна від швидкості, то $a = v' = S'' = f''(t)$.

Отже, другу похідну можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають *третьою похідною*, або *похідною третього порядку*, і позначають так:

$$y''', \quad f'''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

*Похідною n-го порядку* функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' \quad \text{або} \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

або

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називають *похідними вищого порядку*.

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної береться в дужки для того, щоб не сплутати його з показником степеня.

***Приклади***

1. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$.

○ Маємо $y' = 5x^4 - 14x + 1$, $y'' = 20x^3 - 14$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$. ●

2. Знайти похідну $n$-го порядку функцій:

а) $y = e^{ax}$; б) $y = \sin x$.

○ а) $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2e^{ax}$, $y''' = a^3e^{ax}$,
$y^{(4)} = a^4e^{ax}$, ..., $y^{(n)} = a^ne^{ax}$.

б) $y = \sin x$;

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(y + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right);$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \quad ●$$

## 4.2. Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність по $x$ і розв'язуючи одержане рівняння відносно $y'$, знайдемо першу похідну.

Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по $x$ першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одну за одною послідовно похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну $x$ і саму функцію $y$.

***Приклад***

Знайти $y''$, якщо $x^2 + y^3 = 1$.

○ Продиференціюємо задану рівність по $x$ і знайдемо $y'$:

$$2x + 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y^2}.$$

Далі маємо

$$y'' = -\frac{2}{3}\frac{y^2 - x2yy'}{y^4} = -\frac{2}{3}\frac{y - 2xy'}{y^3} =$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{y - 2x\left(-\frac{2x}{3y^2}\right)}{y^3} = -\frac{2}{9}\frac{3y^3 + 4x^2}{y^5} =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{3y^3 + 3x^2 + x^2}{y^5} = -\frac{2}{9}\frac{3(x^2 + y^3) + x^2}{y^5} = -\frac{2(3 + x^2)}{9y^5}. \bullet$$

### 4.3. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{де} \quad t \in (\alpha;\ \beta).$$

Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ мають перші похідні, причому $x'(t) \neq 0$, а $x(t)$ строго монотонна функція, то, як відомо (п. 2.6), першу похідну знаходять за формулою

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від $y$ по $x$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)}.$$

Дійсно, диференціюючи першу похідну за правилом диференціювання складеної функції і використовуючи похідну оберненої функції, маємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t t'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)}.$$

Аналогічно знаходять похідну будь-якого порядку $n > 2$:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \frac{1}{x'(t)}.$$

*Приклад*

Знайти $\frac{d^n y}{dx^n}$, якщо $x = \ln t$, $y = t^3$.

○ Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = 3t^3;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (3t^3)'_t \frac{1}{(\ln t)'_t} = 9t^3 = 3^2t^3;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (9t^3)'_t \frac{1}{(\ln t)'_t} = 27t^3 = 3^3t^3;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 3^n t^3. \bullet$$

### 4.4. Диференціали вищих порядків

Нехай маємо диференційовну на деякому проміжку функцію $y = f(x)$, де $x$ — незалежна змінна. Тоді її перший диференціал або диференціал першого порядку

$$dy = f'(x)\,dx \tag{52}$$

— це деяка функція від $x$ і можна говорити про диференціал цієї функції.

*Другим диференціалом* $d^2y$, або *диференціалом другого порядку*, називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d\,(dy).$$

Оскільки $dx$ не залежить від $x$, то при диференціюванні першого диференціала $dx$ можна винести за знак похідної, тому

$$d^2y = d\,(dy) = d\,(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'_x\,dx = f''(x)\,dxdx = f''(x)\,dx^2.$$

Тут $dx$ розглядається як єдиний символ (а не як добуток $d$ на $x$), тому дужки в степені диференціала $dx$ опускають, $(dx)^n = dx^n$:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{53}$$

*Третім диференціалом* $d^3y$, або *диференціалом третього порядку*, називається диференціал від другого диференціала:

$$d^3y = d\,(d^2y) = d\,(f''(x)\,dx^2) = f'''(x)\,dx^3. \tag{54}$$

Взагалі, *n-м диференціалом* $d^ny$, або *диференціалом n-го порядку*, називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d\,(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{55}$$

Зауважимо, що формули (53) — (55) справедливі лише для випадку, коли $x$ — незалежна змінна. Дійсно, нехай задано складену функцію $y = f(x)$, $x = x(t)$. Відомо (п. 3.2), що перший диференціал має інваріантну форму, тобто рівність (52) виконується як для випадку, коли $x$ є функцією від $t$, так і за умови, що $x$ є незалежною змінною.

Виявляється, що диференціали вищих порядків інваріантної властивості не мають. Покажемо це на прикладі диференціала другого порядку. Користуючись правилом диференціювання добутку, маємо:

$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x)\,d(dx) =$$
$$= f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,x''(t)\,dt^2;$$
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,x''(t)\,dt^2. \qquad (56)$$

Порівнявши формули (53) і (56), переконаємось, що у випадку складеної функції формула другого диференціала змінюється. Отже, диференціал другого порядку інваріантної властивості не має. Якщо виявиться, що $x$ — незалежна змінна, то

$$d^2x = d(dx) = d(1 \cdot dx) = dx\,d(1) = dx \cdot 0 = 0$$

і формула (56) переходить у формулу (53).

*Приклади*

1. Знайти $d^3y$, якщо $y = \sin 2x$.

○ Скористаємось формулою (54). Оскільки

$$y' = 2\cos 2x, \quad y'' = -4\sin 2x, \quad y''' = -8\cos 2x,$$

то

$$d^3y = -8\cos 2x dx^3. \bullet$$

2. Знайти $d^2y$, якщо $y = x^2$, $x = t^3 - 1$.

○ Застосуємо формулу (56). Оскільки $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ і $x'(t) = 3t^2$, $x''(t) = 6t$, то $d^2y = 2dx^2 + 2x6tdt^2 = 2(3t^2dt)^2 + 2(t^3 - 1)\,6tdt^2 = (30t^4 - 12t)\,dt^2$. Такий самий результат дістанемо, коли виключимо залежну змінну $x$ і скористаємось формулою (53): $y = x^2$, $x = t^3 - 1$, тому $y = (t^3 - 1)^2 = t^6 - 2t^3 + 1$, $y' = 6t^5 - 6t^2$, $y'' = 30t^4 - 12t$, $d^2y = (30t^4 - 12t)\,dt^2$. ●

**Завдання для самоконтролю**

1. Що називається похідною другого порядку від функції $y = f(x)$? У чому полягає її механічний зміст?
2. Що називається похідною $n$-го порядку?
3. Як знайти похідні вищих порядків від функцій, заданих явно, неявно, параметрично? Навести приклади.
4. Довести формулу Лейбніца для диференціювання добутку функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}$$

для випадку, коли $n = 4$.

5. Довести, що другу похідну функції $y(x)$, заданої рівняннями $y = y(t)$, $x = x(t)$, знаходять за формулою

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)\,x'(t) - y'(t)\,x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

6. Що називається диференціалом $n$-го порядку даної функції?
7. Як знайти диференціал $d^ny$, якщо $y = f(x)$ і $x$ — незалежна змінна?
8. Чи мають диференціали вищих порядків інваріантну властивість?
9. Довести формули:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x;$$

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx d^2x + f'(x)\,d^3x.$$

10. Знайти похідні другого порядку функцій:

а) $y = x\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sqrt{x^2+1}$; б) $x^2 + 3y^2 = 3$;
в) $x = \arccos\sqrt{t}$, $y = \sqrt{t - t^2}$.

11. Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, якщо:

а) $y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$;
б) $2x^2 + y^2 = 2$;
в) $x = \cos t$, $y = \sin t$.

12. Показати, що функція $y = e^x + 2e^{2x}$ задовольняє рівняння $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

13. Довести, що $(x^n)^{(n)} = n!$, $n \in N$; $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

14. Нехай $y = 1 + 3\cos^2 x$. Переконатись, що

$$y^{(n)} = 3\cdot 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

15. Нехай $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$. Переконатись, що

$$d^2y = \frac{4\ln x - \ln^3 x - 4}{x^2(\ln^2 x - 4)^{3/2}}\,dx^2.$$

16. Довести, що

$$d^n(\sin^2 x) = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right)dx^n.$$

*Відповіді.* 10. а) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $-\dfrac{1}{3y^3}$; в) $-4\sqrt{t-t^2}$. 11. а) $\dfrac{4}{(x^2+1)^2}$; б) $-\dfrac{24x}{y^5}$; в) $-\dfrac{3\cos t}{\sin^5 t}$.

## § 5. ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

### 5.1. Теореми Ферма і Ролля

***Теорема Ферма.***

*Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a; b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці $c$ цього інтервалу. Тоді, якщо в точці $c$ існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.*

○ Для визначеності вважатимемо, що в точці $c$ функція $f(x)$ набуває свого найбільшого значення (рис. 5.19), тобто

$$f(x) \leqslant f(c), \quad x \in (a;\ b). \qquad (57)$$

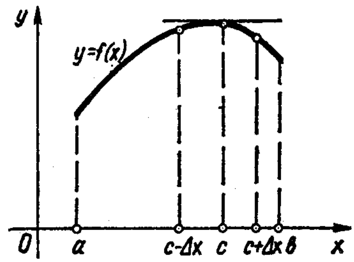


Рис. 5.19.

Оскільки точка $c$ є внутрішньою точкою інтервалу $(a; b)$, то приріст $\Delta x$ може бути як додатним, так і від'ємним, а відповідний приріст функції, як випливає з умови (57), не може бути додатним: $f(c + \Delta x) - f(c) \leqslant 0$. Звідси при $\Delta x > 0$ маємо

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0, \text{ тому } f'_{+}(c) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

Аналогічно, якщо $\Delta x < 0$, то $f'_{-}(c) \geqslant 0$. За умовою похідна існує, тобто

$$f'_{+}(c) = f'_{-}(c) = f'(c). \qquad (58)$$

З рівностей (58) за умов $f'_{+}(c) \leqslant 0$ і $f'_{-}(c) \geqslant 0$ випливає, що $f'(c) = 0$. ●

Геометричний зміст теореми Ферма зрозумілий з рис. 5.19: якщо в точці $x = c$ функція $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(c; f(c))$ паралельна осі $Ox$.

**Теорема Ролля.** *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f'(c) = 0$.*

○ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого значення $M$ і найменшого значення $m$. Якщо $M = m$, то $f(x) = \text{const}$ і $f'(x) = 0$ в довільній точці $x \in [a, b]$.

Нехай $M \neq m$ (рис. 5.20, *а*, *б*, *в*), тоді хоча б одне із значень $M$ чи $m$ досягається функцією у внутрішній точці інтервалу $(a; b)$, тому

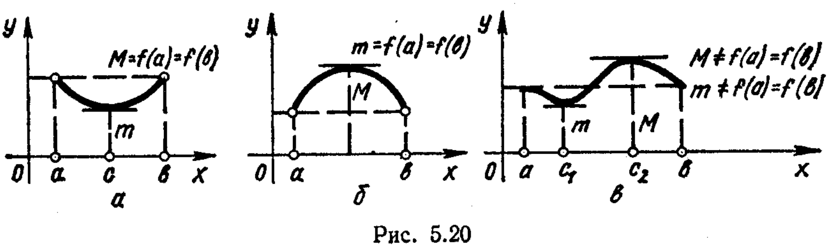


Рис. 5.20

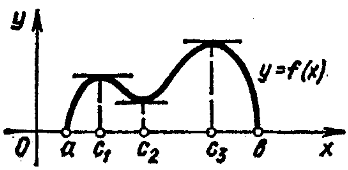



Рис. 5.21

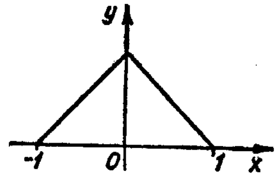



Рис. 5.22

що $f(a) = f(b)$. За теоремою Ферма похідна в такій точці дорівнює нулю. ●

Геометричний зміст теореми Ролля: якщо функція задовольняє умови теореми Ролля, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі $Ox$.

Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можна сформулювати так: між двома коренями функції лежить хоча б один корінь похідної. Так, на рис. 5.21 значення $x = a$ і $x = b$ — корені функції, $x = c_1$; $x = c_2$; $x = c_3$ — корені похідної. У зв'язку з цим теорему Ролля іноді називають теоремою про корені похідної.

*Зауваження.* Всі три умови теореми Ролля є суттєвими, тобто якщо хоча б одна з умов не виконується, то теорема Ролля не справджується також.

Наприклад, функція $1 - |x|$ (рис. 5.22) неперервна на відрізку $[-1;\ 1]$ і має на його кінцях рівні значення $f(-1) = f(1) = 0$. Проте не існує жодної точки $x \in [-1;\ 1]$, де б $f'(x) = 0$. Це пояснюється тим, що при $x = 0$ дана функція недиференційовна.

Для функцій $\varphi(x) = x^2$, $x \in [0;\ 1]$; $\psi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;\ 1); \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ теорема Ролля не виконується, тому що $\varphi(0) \neq \varphi(1)$; функція $\psi(x)$ на відрізку $[0;\ 1]$ розривна.

## 5.2. Теореми Коші і Лагранжа

***Теорема Коші.*** *Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;\ b]$, диференційовні в інтервалі $(a;\ b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in (a;\ b)$, то існує така точка $c \in (a;\ b)$, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{59}$$

○ Введемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(x) - \varphi(a)],$$

яку можна розглядати на відрізку $[a;\ b]$, бо $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. У противному разі за теоремою Ролля знайшлася б точка $c \in (a;\ b)$, в якій $\varphi'(c) = 0$, що неможливо, бо за умовою $\forall x \in (a;\ b) : \varphi'(x) \neq 0$.

Неважко пересвідчитись, що функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому знайдеться точка $c \in (a; b)$, в якій $F'(c) = 0$ або

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = 0,$$

звідки й випливає формула (59). ●

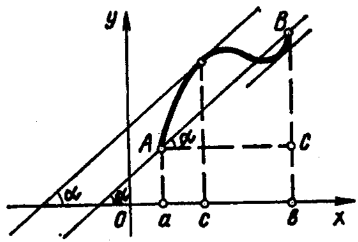


Рис. 5.23

***Теорема Лагранжа.*** *Якщо функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{60}$$

○ Цю теорему можна розглядати як окремий випадок теореми Коші. Справді, поклавши у формулі (59) $\varphi(x) = x$, дістанемо формулу (60). ●

Розглянемо геометричний зміст теореми Лагранжа (рис. 5.23). Запишемо формулу (60) у вигляді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b,$$

тоді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha = f'(c).$$

Тобто якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає кінці кривої $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$. Таких точок може бути і кілька, але хоча б одна завжди існує.

Формулу (60) називають *формулою Лагранжа*, або *формулою скінченних приростів*, оскільки вона виражає точне значення приросту функції $\Delta y = f(b) - f(a)$ через похідну в деякій точці $c$ інтервалу $(a; b)$ і скінченне значення приросту аргументу $\Delta x = b - a$; $\Delta y = f'(x) \Delta x$. У теоремі Лагранжа вказується лише на існування точки $c$, для якої справедлива формула (60), але використання цієї теореми у математичному аналізі надзвичайно широке.

Теорема Лагранжа має також і механічну інтерпретацію. Якщо $S = S(t)$, $t_1 < t < t_2$,— закон руху матеріальної точки, то відношення $\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$ — це середня швидкість руху за проміжок часу $[t_1; t_2]$. Теорема Лагранжа стверджує, що в деякий момент часу $c \in (t_1; t_2)$ миттєва швидкість неодмінно збігається із середньою швидкістю:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = S'(c), \quad c \in (t_1; t_2).$$

Іншими словами, серед усіх можливих швидкостей $S'(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, неодмінно знайдеться така швидкість $S'(c)$, що коли її підтримувати сталою, то за той самий проміжок часу $[t_1; t_2]$ точка пройде той самий шлях $S(t_2) - S(t_1)$, що і при русі із змінною швидкістю $S'(t)$:

$$S(t_2) - S(t_1) = S'(c)(t_2 - t_1).$$

Якщо при цьому русі в деякий момент часу $\tau$ доводиться повертати назад, то для цього швидкість потрібно повністю погасити: ($S'(\tau) = 0$ (теорема Ролля!). Зрозуміло, що ці інтерпретації вірні лише тоді, коли закон руху $S(t)$ задовольняє умови, які відповідають умовам теорем Ролля і Лагранжа.

***Приклади***

1. Довести, що рівняння $x^7 + 7x - 1 = 0$ має лише один дійсний корінь.

○ Введемо функцію $f(x) = x^7 + 7x - 1$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = 7 > 0$, то дане рівняння має дійсний корінь $x_1 \in (0; 1)$ (гл. 4, п. 5.3). Припустимо, що існує принаймні ще один корінь $x_2$, тоді $f(x_1) = f(x_2) = 0$, причому для визначенності вважатимемо, що $x_1 < x_2$. Отже, на відрізку $[x_1; x_2]$ функція $f(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $c \in (x_1; x_2)$, в якій $f'(c) = 0$. Але $\forall x \in R$: $f'(x) = 7(x^6 + 1) \neq 0$.

Знайдена суперечність показує, що припущення про існування ще одного кореня було хибним ●.

2. Чи виконується теорема Ролля для функції $f(x) = x^2 - 6x + 7$ на відрізку $[1; 5]$? При якому значенні $c$?

○ Оскільки дана функція неперервна і диференційовна при всіх значеннях $x \in [1; 5]$ і її значення на кінцях відрізка $[1; 5]$ рівні між собою ($f(1) = f(5) = 2$), то теорема Ролля на цьому відрізку справджується.

Значення $c$ знаходимо з рівняння $f'(x) = 2x - 6 = 0$, звідки $c = 3$. ●

3. Крива $y = x^2 - 4x$ сполучає точки $A(1; -3)$ і $B(4; 0)$. На дузі $AB$ знайти точку $M_0(x_0; y_0)$, в якій дотична паралельна хорді $AB$.

○ Функція $f(x) = x^2 - 4x$ неперервна і диференціовна на відрізку $[1; 4]$. Тому за теоремою Лагранжа існує точка $x_0 \in (1; 4)$, для якої

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(x_0),$$

де $f'(x) = 2x - 4$. Підставивши відповідні значення, дістанемо

$$\frac{0 - (-3)}{4 - 1} = 2x_0 - 4 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2}, \quad y_0 = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{4}.$$

Отже, точка $M_0$ має координати $x_0 = \frac{5}{2}$, $y_0 = -\frac{15}{4}$. ●

4. Для того щоб диференційовна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ була сталою, необхідно і достатньо, щоб $\forall x \in (a; b)$: $f'(x) = 0$. Довести.

○ Необхідність була доведена в п. 2.2.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай $\forall x \in (a; b): f'(x) = 0$ і точки $x_1 < x_2 \in [a; b]$. Тоді за теоремою Лагранжа

$$\exists c \in (x_1; x_2): f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

але $\forall x \in (x_1; x_2): f'(x) = 0$, тому $f'(c) = 0$. Отже, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, або $f(x_1) = f(x_2)$.

Оскільки $x_1$ і $x_2$ — довільні точки відрізка $[a;\ b]$, то $\forall x \in [a;\ b] : f(x) = c$. ●

5. Довести, що

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1;\ 1].$$

○ Введемо функцію $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, тоді

$$\forall x \in (-1;\ 1) : f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

тому з попередньої задачі випливає, що

$$\arcsin x + \arccos x = c.$$

Поклавши в цій рівності $x = 0$, знайдемо, що $c = \frac{\pi}{2}$ і $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Безпосередньо переконуємось, що ця рівність виконується і при $x = \pm 1$. ●

6. Оцінити точність наближеної рівності $\Delta y \approx dy$ (п. 3.3).

○ Нехай функція $f(x)$ має похідні $f'(x)$, $f''(x)$, $x \in [a;\ b]$. Візьмемо на інтервалі $(a;\ b)$ дві точки: $x$ і $x + \Delta x$, тоді за теоремою Лагранжа

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c_1)\,\Delta x,$$

де $c_1$ лежить між $x$ і $x + \Delta x$.

Диференціал даної функції для значень $x$ і $\Delta x$ дорівнює

$$dy = f'(x)\,\Delta x,$$

тому

$$\Delta y - dy = (f'(c_1) - f'(x))\,\Delta x.$$

Застосуємо тепер формулу Лагранжа до різниці перших похідних:

$$\Delta y - dy = (f''(c_2)(x - c_2))\,\Delta x,$$

де $c_2$ лежить між $c_1$ і $x$. Нехай $M = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)|$. Оскільки $|x - c_1| < \Delta x$, а $|f''(c_2)| \leqslant M$, то дістаємо оцінку

$$|\Delta y - dy| \leqslant M\,|\Delta x|^2,$$

про яку згадувалось в п. 3.3. ●

### 5.3. Правило Лопіталя

У попередній главі ми ознайомились з деякими способами розкриття невизначеностей. Розглянемо ще один спосіб, який грунтується на застосуванні похідних.

**Теорема 1.** *Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки $x_0$, за винятком, можливо, самої точки $x_0$, причому*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0,$$

*і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

○ Вважатимемо, що $x_0$ — скінченне число: $|x_0| < +\infty$. Довизначимо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці $x = x_0$, поклавши $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Тоді ці функції будуть неперервні в точці $x_0$. Розглянемо відрізок $[x_0; x]$, що належить даному околу. Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на $[x_0; x]$, диференційовні на $(x_0; x)$ і $\forall x \in (x_0; x): \varphi'(x) \neq 0$. Тому за теоремою Коші знайдеться точка $c \in (x_0; x)$, для якої

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad \text{або} \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{61}$$

тому що $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Оскільки за умовою $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ існує і $c \to x_0$, якщо $x \to x_0$, то з рівності (61) маємо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \bullet$$

*Зауваження 1.* Теорема справедлива і в тому випадку, коли $x_0 = \infty$. Дійсно, поклавши $x = \frac{1}{z}$, маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{\left(\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right)'} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

*Зауваження 2.* Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему 1 можна застосувати ще раз. При цьому дістанемо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Взагалі, теорему 1 можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x \to x_0$. Цю саму границю матиме й відношення функцій:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Теорема 1 дає змогу розкривати невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Сформулюємо теорему, яка стосується розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

***Теорема 2.*** *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *визначені і диференційовні в околі точки* $x_0$ *і в цьому околі*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

*Тоді якщо існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *і*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Цю теорему приймемо без доведення [12].

Виражене теоремами 1 і 2 правило обчислення границь називають *правилом Лопіталя* за іменем математика, який опублікував його. Але це правило відкрив І. Бернуллі, тому правило Лопіталя називають ще *правилом Бернуллі — Лопіталя.*

Зауважимо, що правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називають *основними.* Відомі ще й такі невизначеності, як $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $\infty^0$, $1^\infty$, $0^0$. Покажемо, як ці невизначеності зводяться до основних.

а) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $0 \cdot \infty$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \frac{0}{0},$$

або

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

б) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $\infty - \infty$ зводиться до невизначеності $\frac{0}{0}$:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1/\varphi(x) - 1/f(x)}{1/f(x) \cdot 1/\varphi(x)}.$$

в) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} (\varphi(x)\ln f(x))}$$

і невизначеність виду $0^0$ зводиться до невизначеності $0 \cdot \infty$, розглянутої вище. Аналогічно розкриваються невизначеності $1^\infty$ і $\infty^0$.

Таким чином, щоб розкрити невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$, їх треба спочатку звести до основних і лише після цього застосовувати правило Лопіталя.

*Приклад*
Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\sec x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}x^n e^{-2x}$, $n\in N$.

○ а) Тут невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, тому за правилом Лопіталя маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

б) Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}5-e^{2x}2}{1}=3.$$

в) Тут невизначеність виду $0\cdot\infty$. Зведемо її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-1/\sin^2\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

г) Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Зведемо її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

д) Тут невизначеність виду $\infty^0$. Маємо

$$\lim_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}2x)\ln\ln\operatorname{ctg}x}$$

Знайдемо границю в показнику. Для цього зведемо дану невизначенність до виду $\frac{\infty}{\infty}$, потім скористаємось правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} 2x \ln\ln\operatorname{ctg} x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\operatorname{ctg} x}{1/\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-1/\ln\operatorname{ctg} x\; 1/\operatorname{ctg} x\; 1/\sin^2 x}{-2/\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\cos x\ln\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x\cos x\ln\operatorname{ctg} x} = 0,$$

тому

$$\lim_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^0 = 1.$$

е) Маємо невизначенність виду $1^\infty$, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x/\cos 2x}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = -2;$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)\;1/x^2 = e^{-2}.$$

є) Тут невизначенність виду $0^0$, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} 3x\ln\sin 2x};$$

$$\lim \operatorname{tg} 3x\ln\sin 2x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{ctg} 2x}{-3/\sin^2 3x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 2x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2x} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^0 = 1.$$

ж) Для розкриття цієї невизначенності правило Лопіталя потрібно застосувати $n$ разів:

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-2x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{2e^{2x}} = \frac{n}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \frac{n}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)\,x^{n-2}}{2e^{2x}} = \frac{n\,(n-1)}{2^2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-3}}{e^{2x}} = \dots =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{2^n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}} = \frac{n!}{2^n}\cdot 0 = 0. \quad \bullet$$

### 5.4. Формула Тейлора

Розглянемо одну з основних формул математичного аналізу, так звану формулу Тейлора, яка широко застосовується як в самому аналізі, так і в суміжних дисциплінах. Зупинимося лише на трьох застосуваннях.

В п. 3.3 ми бачили, що заміна приросту функції її диференціалом дає змогу утворювати різні наближені формули. Виявляється, що ці формули можна уточнити, якщо застосувати диференціали вищих порядків: про це і йдеться у формулі Тейлора.

Формула Тейлора дає змогу розробити простий аналітичний апарат для обчислення значень функції $y = f(x)$, які відповідають заданим значенням незалежної змінної $x$. Зрозуміло, що в тих випадках, коли функція задається формулою виду $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 5$, значення обчислюється лише за допомогою чотирьох арифметичних дій. Але як знайти, наприклад, значення функції $y = \sin x$? Очевидно, цю задачу найпростіше можна «розв'язати» за допомогою калькулятора. Але ж калькулятор дає лише відповідь. А питання про те, які він при цьому виконує дії, залишається відкритим. Формула Тейлора і вказує, які арифметичні дії потрібно виконати над $x$, щоб одержати $\sin x$.

Іншими словами, формула Тейлора дає змогу зобразити дану функцію многочленом, що зручно для складання програм і обчислень цієї функції на ЕОМ.

Ще одне практичне застосування цієї формули пов'язане з обробкою числових експериментальних даних. Якщо в результаті експерименту одержано масив значень $(x_i;\ y_i)$, то спочатку будують графік залежності $y = f(x)$, а потім цю залежність описують аналітично, причому, як правило, у вигляді многочлена.

Обгрунтування можливості представляти функцію многочленом дає *формула Тейлора.*

***Теорема.*** *Нехай функція $f(x)$ має в точці $x_0$ і в деякому її околі похідні до $(n+1)$-го порядку включно, і нехай $x$ — довільне значення аргументу із вказаного околу $(x \neq x_0)$. Тоді між точками $x_0$ і $x$ знайдеться така точка $c$, що справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (62)$$

$$(c = x_0 + \theta(x-x_0),\ 0 < \theta < 1).$$

○ Позначимо многочлен, то стоїть у правій частині формули (62), через $\varphi(x, x_0)$:

$$\varphi(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (63)$$

Його називають *многочленом Тейлора* степеня $n$ для функції $f(x)$.

Різницю між функціями $f(x)$ і $\varphi(x, x_0)$ позначимо через $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - \varphi(x, x_0).$$

Теорема буде доведена, якщо встановимо, що

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (64)$$

де точка $C$ лежить між точками $x_0$ і $x$.

Зафіксуємо довільне значення $x > x_0$ із вказаного околу. Позначимо через $t$ величину, що змінюється на відрізку $[x_0; x]$, тобто $x_0 \leqslant t \leqslant x$, і розглянемо функцію

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x - t)^{n+1} R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}. \quad (65)$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $c \in (x_0; x)$ для якої

$$F'(c) = 0. \quad (66)$$

Якщо в функцію (65) підставити значення функції $\varphi(x, t)$ з формули (63) і результат продиференціювати по $t$, то знайдемо

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{(n+1)(x - t)^n R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}. \quad (67)$$

Покладемо у формулі (67) $t = c$, тоді з рівності (66) дістанемо

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{(n+1)(x - c)^n R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $R_n(x)$, дістанемо формулу (64). ●

Формула (62) називається *формулою Тейлора для функції* $f(x)$ *в околі точки* $x_0$, а вираз (64) для $R_n(x)$ — *залишковим членом у формі Лагранжа*. Величина $R_n(x)$ показує, яку помилку ми робимо, замінюючи функцію $f(x)$ її многочленом Тейлора (63).

При цьому формулу (64) можна використати для того, щоб оцінити величину $R_n(x)$ при $x \to x_0$ і фіксованому $n$, а також при $n \to \infty$.

*Формулою Маклорена* називають формулу Тейлора (62) при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{68}$$

де точка $c$ знаходиться між 0 і $x$ ($c = \theta x$, $0 < \theta < 1$).

Подамо формулу (62) через диференціали вищих порядків. Для цього покладемо в ній $x - x_0 = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + R_n(x). \tag{69}$$

Оскільки $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, $f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n y$, то формулу (69) можна записати у вигляді

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!} + \cdots + \frac{d^n y}{n!} + R_n(x). \tag{70}$$

Покажемо, що коли функція $f^{(n+1)}(x)$ в околі точки $x_0$ обмежена, то залишковий член $R_n(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x - x_0)^n$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n (n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\lim_{x \to x_0} f^{(n+1)}(c)(x - x_0) = 0,$$

тому що добуток обмеженої величини на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Таким чином, обриваючи формулу (69) або (70) все далі і далі, дістаємо все точніші наближені формули: з точністю до величини $\Delta x^2$ $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ або $\Delta y \approx dy$ (це відомі формули (п. 3.3) для наближених обчислень за допомогою першого диференціала); з точністю до величини $|\Delta x|^3$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 \text{ або } \Delta y \approx dy + \frac{d^2 y}{2!};$$

з точністю до величини $\Delta x^4$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 \text{ або } \Delta y \approx dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!}.$$

Те саме можна сказати про формулу (62): для тих значень $x$, для яких залишковий член $R_n(x)$ достатньо малий, многочлен Тейлора (63) дає наближене зображення функції $f(x)$.

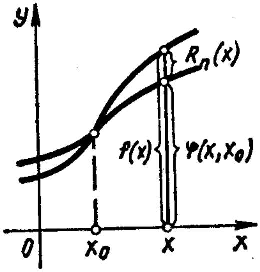



Рис. 5.24

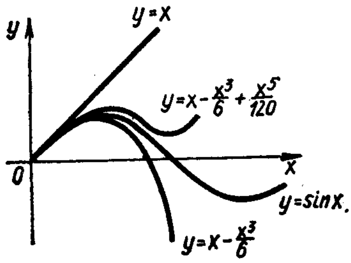



Рис. 5.25

Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції $f(x)$ у вигляді многочлена даного степеня поблизу точки $x_0$. Це треба розуміти так (рис. 5.24): серед усіх многочленів цього степеня, які збігаються з функцією при $x = x_0$, лише для многочлена Тейлора величина $|R_n(x)|$ виявляється найменшою.

Із формули (64) видно, що залишковий член $R_n(x)$ може бути малим навіть при великому відхиленні $x$ від $x_0$, якщо взяти достатньо великим порядок $n$ многочлена Тейлора, тому що факторіал при збільшенні $n$ росте швидше степеня.

*Приклади*

1. Написати формулу Маклорена для функції $f(x) = \sin x$ і оцінити залишковий член. Побудувати функцію і чотири перших многочлени Тейлора.

○ Оскільки (п. 4.1, приклад 2)

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

то

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2k; \\ (-1)^k, & n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2k+1. \end{cases}$$

Підставивши значення похідних у формулу (68), дістанемо для функції $f(x) = \sin x$ формулу Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k \cos c \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

де $c$ лежить між 0 і $x$.

Оскільки $|\cos x| \leqslant 1$, $|x| < \infty$, то для залишкового члена справедлива оцінка

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Нехай, наприклад, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Покладемо $k = 4$, тоді

$$|R_9(x)| \leqslant \frac{x^9}{9!} \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^9}{9!} < \frac{(0,8)^9}{9!} < 0,000005.$$

Це означає, що наближена формула

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

дає змогу обчислювати значення $\sin x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ з точністю до п'яти знаків.

Неважко (за допомогою калькулятора) переконатись, що ця сама формула, але на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ наближає функцію $\sin x$ з точністю до 0,01. На рис. 5.25 показано, як із збільшенням степеня $n$ розширюється «сфера дії» перших трьох многочленів Тейлора:

$$\sin x \approx P_1(x) = x, \quad |R_1(x)| \leqslant \frac{|x^3|}{6};$$

$$\sin x \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad |R_3(x)| \leqslant \frac{|x^5|}{120};$$

$$\sin x \approx P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad |R_5(x)| \leqslant \frac{|x^7|}{5040};$$

$$\sin x \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}, \quad |R_7(x)| \leqslant \frac{|x^9|}{362\,880} \text{ і т. д.}$$

Оскільки функція $f(x) = \sin x$ і її многочлени Тейлора є функції непарні, то на рис. 5.25 зображена лише «половина» графіків. ●

2. Знайти формулу Маклорена для функції $f(x) = \ln(1+x)$.

○ Знаходимо значення даної функції і її похідних при $x = 0$:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1 = -1!;$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2 = 1 \cdot 2 = 2!;$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = -3!;$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}, \quad f^{(5)}(0) = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Підставляючи значення похідних у формулу Маклорена, маємо

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

3. Розкласти за формулою Маклорена функції:

а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in R$.

○ Аналогічно до попереднього розв'язання маємо:

а) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$;

б) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{k+1} \cos c \cdot x^{2k+2}}{(2k+2)!}$;

в) $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)}{(n+1)!} (1 + c)^{\alpha - n - 1} x^{n+1}. \quad ●$$

4. Знайти многочлен Тейлора для функції $f(x) = e^x$, який зображав би цю функцію на відрізку $[-1; 1]$ з точністю до 0,001. Обчислити наближене значення e.

○ З попереднього прикладу маємо

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Підберемо таке $n$, при якому модуль залишкового члена був би меншим від числа 0,001, маючи на увазі, що $|x| \leqslant 1$, число $c$ лежить між 0 і $x$ та $e^c < e^{|x|} < e$:

$$|R_n(x)| = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!};$$

$$|R_1(x)| < \frac{3}{(1+1)!} = \frac{3}{2} > 0,001; \quad |R_4(x)| < \frac{3}{5!} = \frac{1}{40} > 0,001;$$

$$|R_2(x)| < \frac{3}{(1+2)!} = \frac{1}{2} > 0,001; \quad |R_5(x)| < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} > 0,001;$$

$$|R_3(x)| < \frac{3}{(3+1)!} = \frac{1}{8} > 0,001; \quad |R_6(x)| < \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < 0,001.$$

Отже, $n = 6$, тому з точністю до 0,001 справедлива наближена формула

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}, \quad x \in [-1; 1].$$

Якщо в цій формулі покласти, наприклад, $x = 1$, то матимемо наближене значення числа e:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2,718. \quad ●$$

5. Знайти многочлен Тейлора $P_3(x - 1)$ третього степеня відносно двочлена $x - 1$ для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

○ Маємо

$$f(1) = \sqrt[3]{x}\Big|_{x=1} = 1; \qquad f'''(1) = \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}}\Big|_{x=1} = \frac{10}{27};$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{3}; \quad f^{IV}(1) = -\frac{80}{81} x^{-\frac{11}{3}}\Big|_{x=1} = -\frac{80}{81}.$$

$$f''(1) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}\Big|_{x=1} = -\frac{2}{9};$$

Поклавши у формулі Тейлора (62) $x_0 = 1$ і $n = 3$, дістанемо

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81 \cdot 4!}\sqrt[3]{c}\,(x-1)^4,$$

де $c$ лежить між 1 і $x$, тому

$$P_3(x-1) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3. \bullet$$

Формулу (62) можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (71)$$

Коли функція $f(x)$ є многочленом $P_n(x)$ степеня $n$, то похідна $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$, тому формула (71) матиме вигляд

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i. \qquad (72)$$

Ця формула називається *формулою Тейлора для многочлена.*

***Приклади***

1. Розкласти многочлен $P_3(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$ за степенями бінома $x + 1$.

○ Скориставшись формулою (72) при $x_0 = -1$, маємо

$$\begin{aligned} &P_3(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3, && P_3(-1) = 10; \\ &P_3'(x) = -2 + 6x - 12x^2, && P_3'(-1) = -20; \\ &P_3''(x) = 6 - 24x, && P_3''(-1) = 30; \\ &P_3'''(x) = -24, && P_3'''(-1) = -24, \end{aligned}$$

тому

$$P_3(x) = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3. \bullet$$

2. Розкласти многочлен $P_n(x) = (b+x)^n$ за степенями $x$.

○ Маємо $P_n(0) = b^n$, $P_n^{(i)}(x) = n(n-1)\ldots(n-i+1)(b+x)^{n-i}$, тому, поклавши у формулі (72) $P_n(x) = (b+x)^n$, $x_0 = 0$, дістанемо відому формулу бінома Ньютона:

$$(b+x)^n = b^n + nb^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}b^{n-2}x^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^{n-3}x^3 + \cdots + x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}b^{n-i}x^i. \bullet \qquad (73)$$

**Завдання для самоконтролю**

1. Сформулювати і довести теореми Ферма і Ролля.

2. Упевнитись, що функція $f(x) = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$ задовольняє умови теореми Ролля і що $x = \frac{\pi}{2}$ корінь похідної $f'(x) = \cos x$.

3. Чому для функції $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1; 1]$ не виконується теорема Ролля?

4. Сформулювати і довести теорему Коші.

5. Сформулювати і довести теорему Лагранжа. У чому полягає її геометричний і механічний зміст?

6. Користуючись теоремою Лагранжа, переконатись, що дотична до кривої $y = x^4$ при $x = \sqrt[3]{0{,}25}$ паралельна хорді, що сполучає точки $O(0; 0)$ і $A(1; 1)$.

7. Довести за допомогою теореми Лагранжа таке твердження: якщо $\forall x \in [a; b] : \Phi'(x) = F'(x)$, то $\forall x \in [x; b] : \Phi(x) - F(x) = \text{const}$.

8. У чому суть правила Лопіталя? Довести відповідну теорему для розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$. Сформулювати теорему для випадку невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$. Навести приклади.

9. Як розкриваються невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$? Навести приклади.

10. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{5x + e^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin \operatorname{ctg} x)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} (x^{-2} - \operatorname{ctg}^2 x)$; д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; є) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

11. Вивести формули Тейлора і Маклорена.

12. Що характеризує і як використовується залишковий член формули Тейлора?

13. Користуючись многочленом Тейлора, перевірити, що

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2 = (x-2)^4 + 3(x-2)^3 - (x-2)^2 - 7(x-2).$$

14. Вивести формулу Тейлора для функції $f(x) = \sqrt{x}$ при $x_0 = 1$, $n = 3$.

15. Вивести формули Маклорена для функцій:

$$e^x, \ \cos x, \ \sin x, \ \ln(x+1); \quad (1+x)^\alpha.$$

16. За допомогою формули Маклорена для функції $e^x$ обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,01.

17. З'ясувати походження і оцінити похибку наближених рівностей:

а) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right]$; б) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $x \in [0; 0{,}1]$.

*Відповіді.* **10.** а) 8; б) 0; в) 1; г) $\frac{2}{3}$; д) 1; е) $\frac{1}{e}$; є) $\frac{1}{e}$. **14.** $1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5c^{-\frac{7}{2}}}{144}(x-1)^4$. **16.** 1,65. **17.** а) $R_n(x) \leqslant 1$; б) $R_n(x) \leqslant 0{,}001$.

## § 6. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

### 6.1. Монотонність функції

***Теорема 1*** *(достатні умови строгої монотонності). Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) *всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких* $f'(x) = 0$ *на* $(a;\ b)$, *то функція* $f(x)$ *зростає* (спадає) на $(a;\ b)$.

○ Нехай для визначеності $f'(x) > 0$ і $x_1$ та $x_2$ — дві довільні точки з $(a;\ b)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1;\ x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа, тому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1;\ x_2).$$

За умовою $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, тому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ або $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ на інтервалі $(a;\ b)$ зростає.

Аналогічно доводиться теорема, якщо $f'(x) < 0$. ●

*Зауваження.* Таким самим способом можна довести, що коли $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) на інтервалі $(a;\ b)$, то функція на цьому інтервалі не спадає (не зростає).

***Теорема 2*** *(необхідна умова зростання). Якщо диференційовна на інтервалі* $(a;\ b)$ *функція зростає, то* $f'(x) \geqslant 0$ *на* $(a;\ b)$.

○ Дійсно, нерівність $f'(x) < 0$ неможлива — це суперечило б теоремі 1. Отже, $\forall x \in (a;\ b) : f'(x) \geqslant 0$. ●

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $(-\infty;\ +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$, і рівну нулю при $x = 0$.

З цього випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають *стаціонарними точками*), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками*, або *критичними точками першого роду*.

Не кожна критична точка відділяє інтервали монотонності. Теорема 2 має такий геометричний зміст. Якщо на інтервалі $(a;\ b)$ функція $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ у кожній точці $x \in (a;\ b)$ утворює з додатним напрямом осі $Ox$ гострий кут $\varphi$ або (в окремих точках) горизонтальна; тангенс цього кута невід'ємний: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geqslant 0$ (рис. 5.26). Якщо на інтервалі $(a;\ b)$ функція $f(x)$ спадає, то кут нахилу дотичної тупий, або (в окремих точках) дотична горизонтальна; тангенс цього кута недодатний: $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) \leqslant 0$ (рис. 5.27).

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного точками, де дотична або паралельна осі $Ox$, або паралельна осі $Oy$, або її не існує. Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції; 2) знайти похідну даної функції; 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умо-

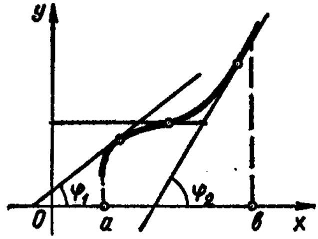



Рис. 5.26

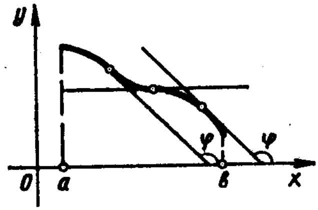



Рис. 5.27

ви, що $f'(x)$ не існує; 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна — спадає.

*Приклади*

1. Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $y = x \ln x + 3x$; в) $y = (2x + 1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

○ а) Областю визначення заданої функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$. Похідна $y' = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних точок дана функція не має. Оскільки $\forall x \in (-\infty; +\infty) : y'(x) > 0$, то функція зростає на всій області визначення.

б) Ця функція визначена на інтервалі $(0; +\infty)$. Знаходимо похідну: $y' = \ln x + 4$; знаходимо критичні точки: $\ln x + 4 = 0 \Rightarrow x = e^{-4}$. Інших критичних точок функція не має, бо похідна існує на всій області визначення.

Розбиваємо область визначення точкою $x = e^{-4}$ на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них.

Для цього досить визначити знак похідної в одній довільній внутрішній точці кожного інтервалу. Маємо

$$\forall x \in (0;\ e^{-4}) : y'(x) < 0,$$

отже, при $x \in (0;\ e^{-4})$ функція спадає;

$$\forall x \in (e^{-4};\ +\infty) : y'(x) > 0,$$

отже, при $x \in (e^{-4}; +\infty)$ функція зростає.

в) Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну

$$y' = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

Критичні точки: $x_1 = 1$ — похідна дорівнює нулю, $x_2 = 2$ — похідної не існує. Маємо

$\forall x \in (-\infty;\ 1) : y'(x) > 0$ — функція зростає;

$\forall x \in (1;\ 2) : y'(x) < 0$ — функція спадає;

$\forall x \in (2;\ +\infty) : y'(x) > 0$ — функція зростає. ●

2. Довести, що рівняння $\frac{x^5}{5} + x - 1 = 0$ має лише один дійсний корінь.

○ Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^5}{5} + x - 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Оскільки $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, то на інтервалі (0; 1) функція має принаймні один корінь. Похідна $f'(x) = x^4 + 1 > 0$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, тому функція зростає на всій області визначення. Отже, більше одного дійсного кореня дана функція мати не може. ●

3. Довести нерівність $\forall x > 0 : \ln(1 + x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$.

○ Нехай $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$. Оскільки $\forall x > 0 : f'(x) = -\frac{x^2}{(x+1)^2} < 0$, то функція $f(x)$ на інтервалі $(0; +\infty)$ спадає. Отже,

$$f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow \ln(1 + x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}. \quad ●$$

## 6.2. Локальний екстремум функції

Точка $x_0$ називається *точкою локального максимуму (або мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки $x_0$, який належить області визначення функції, і для всіх $x$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$). Геометричний зміст означення зрозумілий з рис. 5.28.

Точки локального (від латинського lokalis — місцевий) максимуму і локального мінімуму називаються *точками локального екстремуму*, а значення функції в цих точках називаються відповідно *локальним максимумом* і *локальним мінімумом* або *локальним екстремумом*.

З означення випливає, що поняття екстремуму носить локальний характер в тому розумінні, що нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$) може і не виконуватись для всіх значень $x$ з області визначення функції, але повинна виконуватись лише в деякому околі точки $x_0$. Отже, не слід плутати локальний максимум з найбільшим значенням функції (гл. 4, п. 5.3) якого вона може набувати в області визначення (його називають також *абсолютним максимумом*). Локальних максимумів функція може мати кілька, абсолютний максимум може бути тільки один. Це саме стосується локального і абсолютного мінімумів. Може статись, що окремий локальний мінімум більший від деякого локального максимуму, тоді як абсолютний мінімум не перевищує абсолютного максимуму $M$ (рис. 5.29). Нарешті, локальних екстремумів функція може досягати тільки у внутрішніх точках відрізка, тоді як абсолютні екстремуми мо-

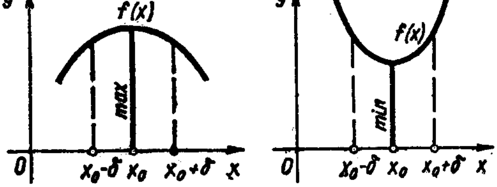


Рис. 5.28

жуть знаходитись і в крайніх його точках. З'ясуємо умови існування локального екстремуму.

***Теорема 1*** *(необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має в точці $x_0$ локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.*

○ Оскільки за умовою $x_0$ — точка локального екстремуму, то існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, в якому значення $f(x_0)$ найбільше або найменше. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. ●

Теорема 1 має такий геометричний зміст (рис. 5.29). Якщо точки $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ — точки локального екстремуму і у відповідних точках графіка існують невертикальні дотичні, то ці дотичні паралельні осі $Ox$.

Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною але не достатньою для того, щоб диференційовна в точці $x_0$ функція мала локальний екстремум.

Це означає, що не всяка точка $x_0$, в якій $f'(x_0) = 0$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ (рис. 5.8) має похідну $y = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму.

Досі розглядались функції, які в точках екстремуму мають похідну. Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y = |x|$ (рис. 4.3) має в точці $x = 0$ мінімум, але не має в цій точці похідної. Це зовсім не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 4.9, *є*) недиференційовна в точці $x = 0$ і не має в цій точці екстремуму.

Таким чином, повну необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: *якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною.* Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою.

Іншими словами, точки локального екстремуму можуть бути по-перше, серед точок, в яких $f'(x) = 0$, і, по-друге, серед точок, в яких $f'(x)$ не існує.

У зв'язку з цим критичні точки іноді називають точками *можливого екстремуму.*

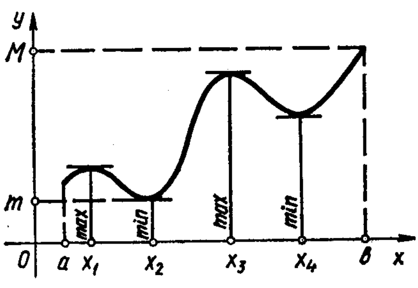



Рис. 5.29

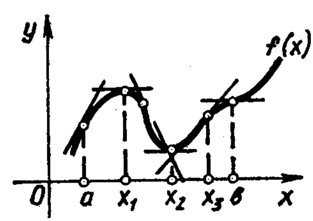



Рис. 5.30

Розглянемо критерії, які дають змогу із множини критичних точок виділити точки максимуму і мінімуму.

***Теорема 2*** *(перша достатня умова локального екстремуму). Нехай $x_0$ — критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки $x_0$, в якому функція має похідну $f'(x)$ крім, можливо, точки $x_0$, тоді:*

1) *якщо в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то $x_0$ є точкою локального максимуму функції $f(x)$;*

2) *якщо в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то $x_0$ є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;*

3) *якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то $x_0$ не є екстремальною точкою функції $f(x)$.*

Можна ще сказати так: якщо при переході зліва направо через критичну точку $x_0$ знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то $x_0$ — точка локального максимуму; якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то $x_0$ — точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці $x_0$ екстремум відсутній.

Геометричний зміст теореми 2 ілюструє рис. 5.30.

○ Нехай для деякого $\delta > 0$ виконуються умови: $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0) : f'(x) > 0$; $\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) : f'(x) < 0$.
Тоді на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ функція $f(x)$ зростає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x$ з цього інтервалу, а на інтервалі $(x_0;\ x_0 - \delta)$ функція $f(x)$ спадає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x$ з цього інтервалу.

Отже, існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки $x_0$ такий, що $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 - \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$, а це й означає, що $x_0$ — точка локального максимуму функції.

Випадки 1) і 3) доводяться аналогічно. ●

З теорем 1 і 2 випливає таке правило дослідження функції на екстремум: щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує;

2) якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках. Результати дослідження доцільно звести в таблицю.

*Приклад*

Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^x$.

○ Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну $f'(x) = \frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}} e^x$. Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x = -\frac{2}{3}$ і не існує при $x = 0$. Отже $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$ — критичні точки даної функції. Складаємо таблицю (символами ↗ та ↘ умовно позначається відповідно зростання і спадання функції на інтервалі).

При цьому скористаємось тим, що

$$f'(-1) > 0,\ f'\left(-\frac{1}{3}\right) < 0,\ f'(1) > 0,\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9e}} \approx 0{,}4,\ f(0) = 0.$$

*Таблиця*

| $x$ | $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ | $-\frac{2}{3}$ | $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ | $0$ | $(0; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | — | $\infty$ | + |
| $f(x)$ | ↗ | ≈0,4<br>max | ↘ | 0<br>min | ↗ |

Отже, $x_1 = -\frac{2}{3}$ — точка локального максимуму, $y_{max} \approx 0{,}4$; $x_2 = 0$ — точка локального мінімуму, $y_{min} = 0$. ●

**Теорема 3** *(друга достатня умова локального екстремуму). Нехай $x_0$ — стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки $x_0$ існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то $x_0$ — точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то $x_0$ — точка локального максимуму.*

*Приклад*

Знайти локальні екстремуми функції

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3.$$

○ Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Похідна $f'(x) = x^2 - 3x + 2$. Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

Звідси дістаємо стаціонарні точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Точок, в яких похідна $f'(x)$ не існує, немає. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками даної функції, тому можна знайти екстремуми за другою достатньою умовою: оскільки $f''(x) = 2x - 3$ і $f''(1) < 0$, то $x_1 = 1$ — точка локального максимуму, $y_{max} = f(1) = -\frac{13}{6}$; $f''(2) > 0$, тому $x_2$ — точка локального мінімуму, $y_{min} = f(2) = -\frac{7}{3}$. ●

Як бачимо, дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою простіше, ніж за першою. Однак ця умова застосовна до вужчого класу функцій. Її не можна використати для дослідження тих критичних точок, в яких перша похідна не існує, а також до тих стаціонарних точок, в яких друга похідна дорівнює нулю.

Проте іноді той випадок, коли в стаціонарній точці друга похідна дорівнює нулю, можна дослідити, застосувавши таку теорему.

**Теорема 4** *(третя достатня умова локального екстремуму). Нехай в околі стаціонарної точки $x_0$ існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{74}$$

*Тоді:*

1) *якщо $n$ — парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ має в $x_0$ локальний максимум:*

2) *якщо $n$ — парне і $f^{n}(x_0) > 0$, то $f(x)$ має в $x_0$ локальний мінімум:*

3) *якщо $n$ — непарне, то $f(x)$ в $x_0$ локального екстремуму не має.*

○ Скориставшись формулою Тейлора і взявши до уваги рівності (74), дістанемо

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

де $c$ лежить між $x$ та $x_0$.

Внаслідок неперервності похідної $f^{(n)}(x)$ робимо висновок, що існує $\delta$-окіл точки $x_0$, в якому числа $f^{(n)}(c)$ і $f^{(n)}(x_0)$ мають однакові знаки. Тому залишковий член у попередній рівності матиме знак $f^{(n)}(x_0)$, як при $x < x_0$, так і при $x > x_0$, якщо число $n$ парне, і набуватиме двох значень, протилежних за знаком, якщо $n$ непарне, тобто $f(x) - f(x_0) < 0$ при $f^{(n)}(x_0) < 0$ і $n$ парному означає, що $x_0$ — точка локального максимуму; $f(x) - f(x_0) > 0$ при $f^{(n)}(x_0) > 0$ і $n$ — парному означає, що $x_0$ — точка локального мінімуму; різниця $f(x) - f(x_0)$ при $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ і $n$ непарному має різні знаки на інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ та $(x_0; x_0 + \delta)$, тому $x_0$ не є екстремальною точкою для функції $f(x)$. ●

Зазначимо, що теорема 2 є окремим випадком доведеної теореми і випливає з останньої, якщо покласти $n = 2$.

***Приклад***

Дослідити на екстремум в точці $x = 0$ функцію

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

○ Маємо

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, \quad f'(0) = 0;$
$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad f''(0) = 0;$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f'''(0) = 0;$$
$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0.$$

Отже, задана функція в точці $x = 0$ має локальний мінімум.

### 6.3. Найбільше і найменше значення функції

Розглянемо спочатку випадок, коли функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Як відомо (гл. 4, п. 5.3), така функція досягає своїх найбільшого і найменшого значень, які називають також абсолютними екстремумами функції на цьому відрізку і позначають відповідно $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Зрозуміло, що для точки $x_0$, де функція досягає найбільшого значення, може бути лише три можливості:

а) $x_0 = a$, б) $x_0 \in (a; в)$, в) $x_0 = b$. Якщо $x_0 \in (a; b)$, то точку $x_0$ потрібно шукати серед критичних точок даної функції. Те саме можна сказати і про точку, в якій функція набуває найменшого значення.

Отже, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках $a$ та $b$ і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Нехай тепер функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$. Така функція може й не мати абсолютних екстремумів. Про наявність їх судять з поводження даної функції на кінцях інтервалу (обчислюючи $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$) та значення $f(x)$ в критичних точках, які належать інтервалу $(a; b)$.

При розв'язуванні практичних задач буває наперед відомо, що функція має лише абсолютний максимум або лише абсолютний мінімум, який досягається у внутрішній точці відрізка $[a; b]$. Тоді задача зводиться до знаходження критичних точок, які належать $(a; b)$. Якщо виявиться, що така точка єдина, то вона й буде точкою абсолютного екстремуму.

***Приклади***

1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1; 3]$.

○ Знаходимо критичні точки заданої функції. Маємо $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Відрізку $[-1, 3]$ належать точки $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. Обчислюємо значення функцій в цих точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1) = -7, \ f(0) = 0; \quad f(2) = -16, \ f(3) = 9.$$

Отже,

$$M = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 3} f(x) = 9, \quad m = \min_{-1 \leqslant x \leqslant 3} f(x) = -16. \ \bullet$$

2. Завод $A$ потрібно з'єднати шосейною дорогою з прямолінійною залізничною колією, на якій розміщено місто $B$. Відстань $AC$ до залізничної колії дорівнює $a$, відстань $CB$ по залізничній колії — $l$. Вартість перевезень вагової одиниці вантажу на одиницю відстані дорівнює $\alpha$ — залізницею і $\beta$ — по шосе. Як провести шосе $AM$ до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу до міста $B$ була найменшою?

○ Вартість $y$ перевезень одиниці вантажу при довільному положенні точки $M$ (рис. 5.31) дорівнює

$$y = \alpha(l - x) + \beta\sqrt{x^2 + a^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Маємо

$$y'_x = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \alpha = \beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Якщо $\alpha \geqslant \beta$, то похідна $y'_x$ зберігає знак мінус, не перетворюючись взагалі в нуль. Функція $y$ спадає із зростанням $x$ від 0 до $l$ і очевидно, що набуває свого найменшого значення при $x = l$. У цьому випадку шосе треба починати безпосередньо від міста $B$, причому

$$y_{\min} = y\,|_{x=l} = \beta\sqrt{l^2 + a^2}.$$

Якщо $\alpha < \beta$, то похідна $y'_x$ має единий корінь

$$x_0 = \frac{\alpha a}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

При $x_0 \leqslant l$ цей корінь лежить зовні допустимого для $x$ проміжку або на кінці його, так що всередині проміжку похідна $y'_x < 0$ і ми приходимо до уже розглянутого випадку. Лише коли $\alpha < \beta$ і $x_0 < l$ значення $x_0$ визначає положення точки $M$ між $B$ та $C$, при якому витрати на перевезення будуть найменшими:

$$y_{\min} = y\,|_{x=x_0} = \alpha l + a\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}. \quad ●$$

3. З круглої колоди діаметра $d$ треба вирізати стояк, який має прямокутний переріз і може сприймати найбільше навантаження. Якими повинні бути розміри стояка?

○ Оскільки стояк є елементом конструкції, що працює на стиск, то він сприйматиме найбільшу нагрузку тоді, коли площа його поперечного перерізу буде найбільшою. Таким чином, задача зводиться до визначення прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в круг діаметра $d$ (рис. 5.32). Нехай $x$ і $y$ — сторони шуканого прямокутника, тоді $y = \sqrt{d^2 - x^2}$, тому площа прямокутника $S = S(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$, $0 < x < d$. Далі маємо

$$S'(x) = \frac{d^2 - 2x^2}{(d^2 - x^2)^{1/2}}; \quad S''(x) = \frac{x(2x^2 - 3d^2)}{(d^2 - x^2)^{3/2}};$$

$S'(x) = 0$ при $x = \pm\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ і не існує при $x = \pm d$.

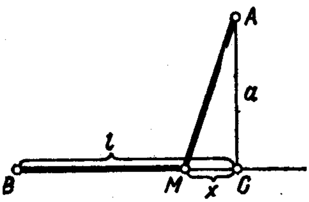


Рис. 5.31

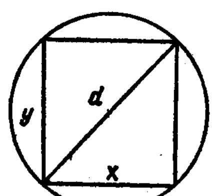


Рис. 5.32

Оскільки функція $S(x)$ визначена на інтервалі $(0; d)$, то вона має єдину критичну точку $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$. У цій точці $S(x)$ досягає максимуму, тому що $S''\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) < 0$. При цьому $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$, $S_{\max} = \frac{d^2}{2}$. Отже, найбільше навантаження сприймає квадратний стояк із стороною перерізу, рівною $d/\sqrt{2}$. ●

4. У чашку, яка має форму півкулі радіуса $r$ (рис. 5.33), опущено однорідний стержень $AB$ довжини $l$, $2r < l < 4r$. Знайти положення рівноваги стержня.

○ Положенню рівноваги стержня відповідає мінімальне значення його потенціальної енергії, тобто найнижче положення центра його тяжіння $O$ (оскільки стержень однорідний, то центр тяжіння збігається з його серединою). Позначивши через $OK$ перпендикуляр до площини $KL$, на якій стоїть чашка, зведемо задачу до знаходження такого кута $\alpha = (\widehat{AB, OC}) = (\widehat{AB, KL}) = (\widehat{ED, AB})$, при якому відрізок $OK$ має мінімальну довжину.

Враховуючи, що $ED = 2r$, $AO = OB = \frac{l}{2}$, з $\triangle EAD$ маємо $AD = 2r\cos\alpha$, тому $OD = 2r\cos\alpha - \frac{l}{2}$. Крім того, $DC = r - OK$, тоді з $\triangle DCO$ дістаємо

$$\sin\alpha = \frac{DC}{OD} = \frac{r - OK}{2r\cos\alpha - \frac{l}{2}},$$

звідки

$$OK = f(\alpha) = r + \frac{l}{2}\sin\alpha - r\sin 2\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Тепер залишається знайти те значення кута $\alpha$, при якому функція $f(\alpha)$ має мінімум. Оскільки

$$f'(\alpha) = \frac{l}{2}\cos\alpha - 2r\cos 2\alpha = \frac{l}{2}\cos\alpha + 2r - 4r\cos^2\alpha,$$

то критичні точки функції $f(\alpha)$ знаходимо з рівняння

$$4r\cos^2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha - 2r = 0.$$

За умовою задачі $\cos\alpha > 0$, тому функція $f(\alpha)$ має лише одну критичну точку:

$$\cos\alpha_0 = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128r^2}}{16r}.$$

Знайдений кут $\alpha_0$ нахилу стержня до площини, на якій стоїть чашка, відповідає положенню рівноваги стержня, тому що, як неважко упевнитись,

$$f''(\alpha_0) = \frac{\sin\alpha_0}{2}\sqrt{l^2 + 128r^2} > 0. \; ●$$

5. Визначити розміри консервної банки об'єму $V$, при яких на її виготовлення піде найменше матеріалу.

○ Нехай банка має форму циліндра з радіусом основи $r$ і висотою $h$. Тоді повна поверхня банки дорівнює

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

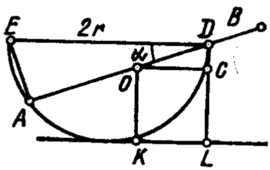


Рис. 5.33

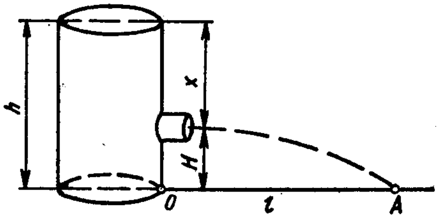


Рис. 5.34

Оскільки об'єм банки відомий:

$$V = \pi r^2 h, \text{ то } h = \frac{V}{\pi r^2},$$

тому

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right).$$

Знайдемо найменше значення функції $S(r)$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right), \quad \frac{dS}{dr} = 0 \text{ при } r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

$$\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=r_0} = 2\left.\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right)\right|_{r=r_0} > 0.$$

Отже, при $r = r_0$ функція $S(r)$ має мінімум. Це значення найменше на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки $\lim\limits_{r \to 0} S(r) = \infty$ і $\lim\limits_{r \to +\infty} S(r) = \infty$.

Обчислимо висоту

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Таким чином, для того щоб при заданому об'ємі циліндрична банка мала найменшу повну поверхню, її висота має дорівнювати діаметру.

Аналогічно розв'язується задача, коли банка має форму прямокутного паралелепіпеда. ●

**6.** Посудина з вертикальною стінкою висотою $h$ стоїть на горизонтальній площині (рис. 5.34). На якій глибині треба розмістити отвір, щоб дальність вильоту води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає, за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gx}$, де $x$ — глибина розміщення отвору; $g$ — прискорення вільного падіння)?

○ Позначимо через $H$ відстань отвору в посудині від горизонтальної площини, а через $l = OA$ — дальність вильоту. Тоді $l = vt = \sqrt{2gx}\,t$, де $t$ — час вильоту води з отвору на площину. З курсу фізики відомо, що

$$H = \frac{gt^2}{2}, \text{ звідки } t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}, \quad (H = h - x),$$

тобто

$$l = l(x) = \sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)}, \quad 0 < x < h.$$

Далі маємо

$$l'(x)=\frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}\,;\quad l'(x)=0 \text{ при } x=\frac{h}{2}\,.$$

Оскільки функція $l(x)$ має тільки одну критичну точку $x=\frac{h}{2}$, а за умовою задачі існує таке положення отвору, при якому дальність вильоту найбільша, то ця критична точка і є шуканою. ●

7. З круга радіуса $R$ потрібно вирізати сектор так, щоб з нього можна було виготовити конусоподібний фільтр з максимальним об'ємом.

○ Нехай $x$ — кут вирізаного сектора (рис. 5.35). При $x \to 0$ і $x \to 2\pi$ об'єм конуса $V \to 0$, тому на проміжку $(0;\ 2\pi)$ існує таке значення $x$, при якому цей об'єм найбільший.

При склеюванні сектора утворюється конус, твірна якого дорівнює $R$, довжина кола основи дорівнює $Rx$, радіус основи $r=\frac{Rx}{2\pi}$, висота

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$$

і об'єм

$$V=V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2},\quad 0<x<2\pi.$$

Знайдемо похідну

$$\frac{dV}{dx}=\frac{x(8\pi^2-3x^2)}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}\,;$$

$$\frac{dV}{dx}=0 \text{ при } x_1=0,\ x_2=-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,,\ x_3=\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,.$$

Значення $x_1$ та $x_2$ лежать зовні проміжка $(0;\ 2\pi)$, тому функція $V(x)$ має єдину критичну точку $x_3$. Оскільки на проміжку $(0;\ 2\pi)$ функція досягає максимуму, то, не досліджуючи значення $x_3$, можна стверджувати, що йому відповідатиме найбільший об'єм. ●

8. Пряма $l$ ділить площину на два середовища: $I$ і $II$. В середовищі $I$ точка рухається з швидкістю $v_1$, а в середовищі $II$ — із швидкістю $v_2$. По якому шляху має рухатись точка, щоб найшвидше дістатися з точки $A$ середовища $I$ в точку $B$ середовища $II$?

○ Нехай $AA_1$ і $BB_1$ — перпендикуляри до прямої $l$ і $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ (рис. 5.36).

Зрозуміло, що як в середовищі $I$, так і в середовищі $II$ найкоротший шлях має бути прямолінійним, але шлях по прямій $AB$ найкоротшим не буде. Отже, найкоротший шлях складається з двох прямолінійних відрізків $AM$ і $MB$, причому

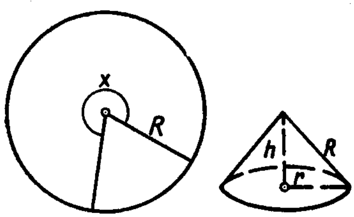


Рис. 5.35

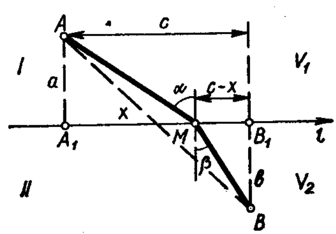


Рис. 5.36

точка $M \in l$. За незалежну змінну $x$ виберемо абсцису точки $M: x = A_1M$ і знайдемо час $t$, за який рухома точка перейде з точки $A$ в точку $B$:

$$t = f(x) = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Знайдемо похідні

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

$$f''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2(b^2 + (c - x)^2)^{3/2}}.$$

Рівняння $f'(x) = 0$ розв'язати не можна (для цього треба мати числові дані задачі), тому дослідимо його.

Оскільки похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ існують при всіх значеннях $x$ і $f''(x) > 0$, то похідна $f'(x)$ зростає на всьому проміжку $(-\infty; +\infty)$ і не може дорівнювати нулю більше одного разу. Але $f'(0) < 0$, а $f'(c) > 0$, тому рівняння $f'(x) = 0$ має єдиний корінь $x_0$, який лежить між $O$ і $c$ (гл. 4, п. 5.3) і якому відповідає єдиний мінімум функції $f(x)$. Абсциси $x = 0$ і $x = c$ відповідають точкам $A_1$ і $B_1$, тому точка $M$ знаходиться між точками $A_1$ і $B_1$.

З'ясуємо геометричний зміст знайденого розв'язку. Абсциса $x$ шуканої точки $M$ має задовольняти рівняння $f'(x) = 0$ або

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

звідки

$$\frac{A_1M}{v_1AM} = \frac{MB}{v_2BM} \quad \text{або} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Ми дістали відомий з фізики закон заломлення світла: заломлення світла відбувається так, наче промінь світла обирає найшвидший шлях з точок одного середовища в точки другого. Цей результат повністю узгоджується з відомим в оптиці принципом Ферма: із всіх можливих шляхів, які йдуть з $A$ в $B$, промінь світла обирає такий, який він проходить за найменший час. ●

**9.** Нехай в результаті однакових і ретельно проведених експериментів (спостережень) дістали $n$ різних (у зв'язку з неточністю інструментів) значень величини $x: a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Найімовірнішим значенням $x_0$ величини $x$ вважатимемо те, при якому сума квадратів похибок найменша. Знайти це значення.

○ Сума квадратів похибок виражається функцією

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2,$$

тому $x_0$ знаходиться з умови найменшого значення цієї функції. Маємо

$$f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i), \quad f''(x) = 2n > 0.$$

Прирівнюючи першу похідну до нуля, знаходимо єдину критичну точку

$$x_0 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

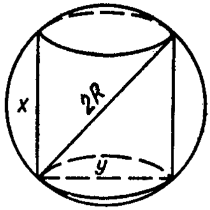



Рис. 5.37

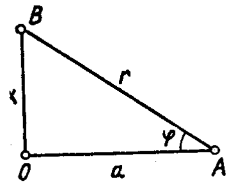



Рис. 5.38

якій відповідає найменше значення функції $f(x)$, оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Отже, найімовірнішим значенням величини $x$ буде середнє арифметичне наближених значень $a_i$. ●

10. З кулі радіуса $R$ потрібно виготовити циліндр найбільшого об'єму. Які його розміри?

○ Нехай $x$ і $y$ — висота і діаметр циліндра (рис. 5.37), тоді $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, тому об'єм циліндра

$$V = V(x) = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4}, \quad 0 < x < 2R.$$

Оскільки $V(x) > 0$ і при $x \to 0$ та $x \to 2R$ значення $V(x) \to 0$, то існують такі розміри циліндра, при яких його об'єм буде максимальним.

Далі маємо

$$V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2, \quad 0 < x < 2R.$$

На інтервалі $(0; 2R)$ похідна $V'(x) = 0$ лише в точці $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, тому циліндр матиме найбільший об'єм, коли його висота $x = \frac{2R\sqrt{3}}{2}$. При цьому

$$y = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Отже, шуканий діаметр циліндра має дорівнювати його висоті. ●

11. Нехай електрична лампочка рухається вздовж вертикальної прямої $OB$ (рис. 5.38). На якій висоті від горизонтальної площини треба розмістити лампочку, щоб в даній точці $A$ площини ($OA = a$) освітленість була найбільшою.

○ З фізики відомо, що освітленість $I$ визначається законом $I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де $k$ — коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки; $r = BA$ — відстань від лампочки до точки $A$.

Нехай шукана висота $OB = x$, тоді $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, тому $I = I(x) = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, причому за змістом задачі $x \in (0; +\infty)$. Маємо $I'(x) = \frac{k(a^2 - 2x^2)}{(x^2 + a^2)^{5/2}} = 0$ при $x_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. Інших критичних точок функція $I(x)$ не має.

Оскільки в інтервалі $(0; +\infty)$ лежить лише одна критична точка $x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ і за умовою задачі існує положення лампочки, при якому освітленість в точці $A$ найбільша, то шукана висота $OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Якби в даній задачі потрібно було ще з'ясувати, чи існує положення лампочки, при якому освітленість найбільша, то треба було б далі перевірити, що

$$I''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) < 0,\ I\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) > 0,\quad \lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to +\infty} I(x) = 0. \ ●$$

12. Газова суміш містить оксид азоту і кисню. Знайти концентрацію кисню, при якій оксид азоту, який є в суміші, окислятиметься з максимальною швидкістю.

○ Швидкість реакції $2NO + O_2 = 2NO_2$ виражається формулою $v = kx^2y$, де $x$ — концентрація NO в будь-який момент часу; $y$ — концентрація $O_2$; $k$ — стала швидкості реакції, що не залежить від концентрації реагуючих компонентів, а залежить лише від температури.

Якщо концентрації газів виразити в об'ємних процентах, то $y = 100 - x$ і $v = kx^2(100 - x)$. Далі маємо

$$v'_x = k(200x - 3x^2).$$

Оскільки $k \neq 0$, то $v'_x = 0$ при $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{200}{3}$;

$$\frac{d^2v}{dx^2} = k(200 - 6x);\quad \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=x_1} > 0;\quad \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=x_2} < 0.$$

Отже, при $x = 0$ швидкість окислення мінімальна, а при $x = \frac{200}{3}$ — максимальна, тобто швидкість окислення оксиду азоту буде максимальною, коли газова суміш міститиме $y = 100 - \frac{200}{3} \approx 33{,}3$ % кисню. ●

## 6.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається *вгнутою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

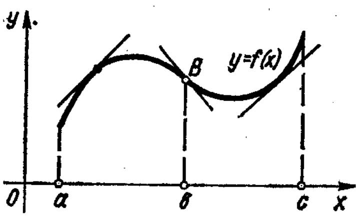


Рис. 5.39

*Точкою перегину* називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

На рис. 5.39 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a; b)$, вгнута на інтервалі $(b; c)$ і точка $B(b; f(b))$ — точка перегину.

Зрозуміло, що в точці перегину до-

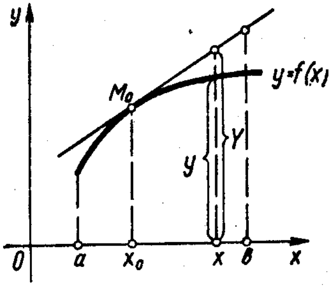



Рис. 5.40

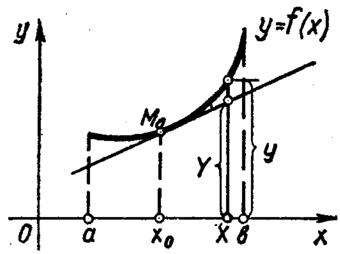



Рис. 5.41

тична перетинає криву, оскільки з одного боку околу цієї точки графік кривої знаходиться під дотичною, а з другого — над дотичною.

Позначимо довільну ординату кривої через $y$, а дотичної — через $Y$. Нехай $M(x_0; y_0)$ — точка дотику, $x_0 \in (a; b)$. Тоді означення опуклості і вгнутості можна записати так: крива $y = f(x)$ опукла (рис. 5.40) на $(a; b)$, якщо

$$\forall x \in (a; b), \quad x \neq x_0 : y - Y < 0;$$

крива $y = f(x)$ вгнута (рис. 5.41) на $(a; b)$, якщо

$$\forall x \in (a; b), \quad x \neq x_0 : y - Y > 0.$$

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять за допомогою такої теореми.

**Теорема 1.** *Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на $(a; b)$, тоді:*

1) *якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на $(a; b)$;*
2) *якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a; b)$;*

○ З формули Тейлора і рівняння дотичної маємо

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2},$$

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

де точка $c$ лежить між $x$ і $x_0$. Віднімаючи почленно ці рівності, дістанемо $y - Y = \frac{f''(c)\,(x - x_0)^2}{2}$.

Нехай $\forall x \in (a; b) : f''(x) < 0$. Тоді $\forall x \in (a; b)$, $x \neq x_0$: $y - Y < 0$, а це й означає, що крива $y = f(x)$ на $(a; b)$ опукла.

Аналогічно доводиться теорема для випадку $f''(x) > 0$. ●

З теореми 1 випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує). Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$).

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду* функції $f(x)$. Отже, якщо $x_0$ — абсциса точки перегину функції $f(x)$, то $x_0$ є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

***Приклади***

1. Функція $f(x) = x^4$ має другу похідну $f''(x) = 12x^2$, яка дорівнює нулю при $x = 0$. Але критична точка, $x = 0$ не є абсцисою точки перегину даної кривої.

2. Функція $y = x^3$ має критичну точку $x = 0$, яка є абсцисою точки перегину.

Встановимо достатні умови існування точки перегину.

**Теорема 2.** *Нехай $x_0$ — критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку $x_0$ похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0;\ f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.*

○ Нехай, наприклад, існує $\delta$-окіл точки $x_0$ такий, що

$$\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0) : f''(x) < 0;$$

$$\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) : f''(x) > 0.$$

Тоді за теоремою 1 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і вгнута на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$, тобто точка $(x_0;\ f(x_0))$ — точка перегину.

Якщо похідна $f''(x)$ не змінює знак в $\delta$-околі точки $x_0$, то крива буде в цьому околі або опуклою (при $f''(x) < 0$), або вгнутою (при $f''(x) > 0$). ●

Отже, щоб знайти точки перегину кривої, треба знайти критичні точки другого роду і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

***Приклади***

1. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

а) $f(x) = x^5 - x + 2$; б) $f(x) = 2 + (x - 5)^{5/3}$.

○ а) Область визначення $(-\infty;\ +\infty)$. Оскільки $f''(x) = 20x^3 = 0$ при $x = 0$, то точка $x = 0$ є критичною точкою другого роду. Інших критичних точок ця функція не має, бо $f''(x)$ існує на всій числовій осі.

Розбиваємо область визначення критичною точкою на інтервали і досліджуємо зміну знака другої похідної: якщо $x \in (-\infty;\ 0)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла: якщо $x \in (0;\ +\infty)$, то $f''(x) > 0$ — крива вгнута. Точка $(0;\ 2)$ — точка перегину кривої.

б) Область визначення $(-\infty;\ +\infty)$. Оскільки

$$f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}} \neq 0$$

і не існує при $x = 5$, то єдиною критичною точкою другого роду є точка $x = 5$. Маємо

$$\forall x \in (-\infty;\ 5) : f''(x) < 0; \quad \forall x \in (5;\ +\infty) : f''(x) > 0.$$

Тому крива опукла на інтервалі $(-\infty;\ 5)$ і вгнута на інтервалі $(5;\ +\infty)$; точка $(5;\ 2)$ — точка перегину. ●

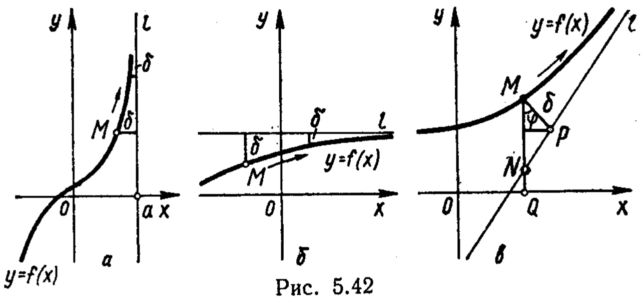


Рис. 5.42

2. Довести, що верхня частина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y>0$ опукла (гл. 3, п. 6.3).

○ Маємо $\forall x \in (-a;\ a): y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $y''=\frac{-ba}{(a^2-x^2)^{3/2}}<0$.

Тому верхня частина еліпса є опукла крива (рис. 3.45). ●

### 6.5. Асимптоти кривої

З поняттям асимптоти ми ознайомились при дослідженні форми гіперболи (гл. 3, п. 6.4). Поширимо це поняття на довільні криві.

Пряма $l$ називається *асимптотою кривої*, якщо відстань $\delta$ від змінної точки $M$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка $M$, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

На рис. 5.42 показано вертикальну ($a$), горизонтальну ($б$) і похилу ($в$) асимптоти. З означення асимптоти випливає, що для існування вертикальної асимптоти $x=x_0$ необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Дійсно, в цьому випадку (рис. 5.42, $a$)

$$\delta=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-f(x))^2}=|x-x_0|\to 0 \text{ при } x\to x_0.$$

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді

$$y=kx+b. \tag{75}$$

Знайдемо $k$ та $b$. З рис. 5.42, $в$ маємо $\delta=MP$, $MN=\frac{MP}{\cos\varphi}=\frac{\delta}{\cos\varphi}$, тому, якщо $\delta\to 0$ при $x\to\infty$, то $MN\to 0$, і навпаки. Але $MN=MQ-NQ=f(x)-(kx+b)$, тому якщо при $x\to\infty$ пряма (75) є асимптотою, то

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0 \tag{76}$$

або

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0.$$

Тому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0,\ \text{звідки}\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (77)$$

Знайшовши $k$, з рівності (76) дістанемо

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \qquad (78)$$

Отже, якщо існує похила асимптота (75), то $k$ та $b$ знаходяться за формулами (77) і (78). Навпаки, якщо існують скінченні границі (77) і (78), то виконується рівність (76), тобто пряма (75) є похилою асимптотою.

*Зауваження* 1. Якщо хоча б одна з границь (77) або (78) не існує, або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має.

*Зауваження* 2. Якщо $k=0$, то $b=\lim_{x\to\infty}f(x)$, тому $y=$ $=b$ — рівняння горизонтальної асимптоти (рис. 5.42, *б*). Оскільки це рівняння є окремим випадком рівняння (75), то розрізняють не три, а два види асимптот: вертикальні і невертикальні.

*Зауваження* 3. Асимптоти кривої $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ можуть бути різні. Тому при знаходженні асимптот границі (77) і (78) потрібно обчислювати при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$.

***Приклад***

Знайти асимптоти кривих:

а) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-1}{x}$; б) $f(x)=xe^x$.

○ а) Знайдемо вертикальні асимптоти. Оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x=0$ і

$$\lim_{x\to-0}\frac{2x^2+5x+1}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to+0}\frac{2x^2+5x+1}{x}=-\infty,$$

то $x=0$ — вертикальна асимптота.

За формулами (77) і (78) шукаємо похилу асимптоту при $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x+1}{x^2}=2,\ b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+5x+1}{x}-2x\right)=5.$$

Пряма $y=2x+5$ є похилою асимптотою даної кривої при $x\to+\infty$. Неважко переконатися, що ця пряма є асимптотою і при $x\to-\infty$. Отже, задана крива має дві асимптоти: $x=0$ і $y=2x+5$.

б) Дана крива вертикальних асимптот не має, оскільки не має точок розриву другого роду. Далі маємо

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=+\infty,$$

тому при $x \to +\infty$ задана крива асимптоти не має. При $x \to -\infty$ дістаємо

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \; b = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - 0 \cdot x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Отже, при $x \to -\infty$ крива має асимптоту $y = 0$. ●

## 6.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;

2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;

3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;

4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали мотононності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) знайти асимптоти кривої;

8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в п. 1—7.

Якщо графік виявиться не зовсім зрозумілим, потрібно додатково знайти кілька точок графіка, обчисливши значення функції при певних значеннях аргументу; бажано також в цих самих точках обчислити першу похідну, щоб визначити в них напрям дотичної.

Якщо дана функція періодична з періодом $T$, то досить побудувати її графік на відрізку $[0; T]$, після чого повторити цей графік на проміжках $(nT; (n+1)T)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі $Oy$ (або відносно початку координат).

*Приклад*

Дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

○ 1) Область існування — вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2) Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0; 0)$.

3) Функція не періодична. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$, то функція непарна, тому досліджуватимемо її лише для $x \geqslant 0$.

4) Функція в точці $x = 1$ має розрив другого роду і

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x) = \mp\infty.$$

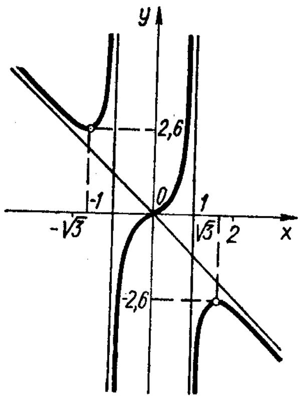


Рис. 5.43

5) Похідна

$$y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

дорівнює нулю при $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ і не існує в точках $x = \pm 1$, але останні не входять в область визначення, тому критичними точками функції є точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

На інтервалі $(0; \infty)$ маємо:
якщо $x \in (0;\ 1)$, то $f'(x) > 0$ — функція зростає;
якщо $x \in (1;\ \sqrt{3})$, то $f'(x) > 0$ — функція зростає;
якщо $x \in (\sqrt{3};\ +\infty)$, то $f'(x) < 0$ — функція спадає; в точці $x = \sqrt{3}$ функція має локальний максимум: $y_{\max} = f(\sqrt{3}) \approx -2{,}6$.

6) Знаходимо другу похідну:

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Похідна $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.

Оскільки точки $x = \pm 1$ не входять в область визначення, то $x = 0$ — єдина критична точка. Маємо:
якщо $x \in (-1;\ 0)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла;
якщо $x \in (0;\ 1)$, $f''(x) > 0$ — крива вгнута;
якщо $x \in (1;\ +\infty)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла;
точка $O\,(0;\ 0)$ — точка перегину.

7) З п. 4 випливає, що $x = 1$ — вертикальна асимптота кривої. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(1-x^2)\,x} = -1, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-1)\,x\right) = 0,$$

то при $x \to \pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y = -x$.

8) Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік (рис. 5.43). ●

## Завдання для самоконтролю

**1.** Сформулювати і довести достатні умови строгої монотонності функції на інтервалі.

**2.** Які точки називаються стаціонарними?

**3.** Навести приклад функції, у якої критична точка не відділяє інтервали монотонності, тобто належить інтервалу монотонності.

**4.** У чому полягає правило знаходження інтервалів монотонності?

**5.** Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $f(x) = \ln(x^2+3)$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

**6.** Що називається точкою локального мінімуму та локальним мінімумом функції? Чому «локальним»?

**7.** Що називається локальним екстремумом і чим він відрізняється від абсолютного екстремуму?

**8.** Сформулювати і довести необхідні умови локального екстремуму та першу, другу і третю достатні умови.

**9.** У чому полягають правила знаходження екстремуму за першою, другою та тертьою достатніми умовами. Навести приклади.

10. Знайти локальні екстремуми функцій:

а) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.

11. Як знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$?

12. Довести, що коли $x_0$ — єдина стаціонарна точка функції $f(x)$, $x \in (a; b)$, причому $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = 0$, $f(x_0) > 0$, то така функція при $x = x_0$ має абсолютний максимум.

13. Знайти абсолютні екстремуми функції:

$$y = 3x - x^3, \quad x \in [-2; 3].$$

14. У конус висотою $H$ і радіусом $R$ вписати циліндр найбільшого об'єму.

15. Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?

16. Що називається точкою перегину?

17. Які точки називаються критичними точками другого роду?

18. Чи всяка точка перегину є критичною точкою другого роду? А навпаки? Навести приклади.

19. Сформулювати і довести достатню умову опуклості (вгнутості) кривої. Навести приклади.

20. Яка достатня умова того, що критична точка другого роду є абсцисою точки перегину? Навести приклад.

21. Сформулювати правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.

22. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину кривої $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

23. Що називається асимптотою кривої?

24. Як знайти вертикальну асимптоту? невертикальну?

25. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

26. У чому полягає загальна схема дослідження функції?

27. Дослідити і побудувати графіки функцій

а) $f(x) \dfrac{x^3+4}{x^2}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

*Відповіді.* 5. а) функція спадає на інтервалі $(-\infty; 0)$ і зростає на інтервалі $(0; +\infty)$; б) функція зростає на інтервалі $(-1; 1)$ і спадає на інтер-

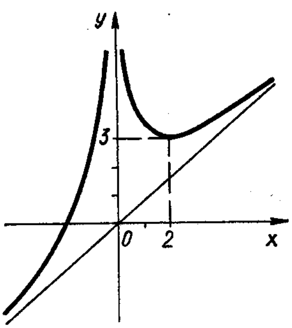



Рис. 5.44

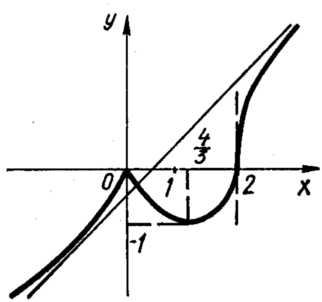



Рис. 5.45

валах $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$. **10.** а) $y_{\min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; $y_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; б) $y_{\max} = f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{24}$. **13.** 2; $-18$. **14.** $\frac{H}{3}$ і $\frac{2R}{3}$ — висота і радіус шуканого циліндра. **22.** В інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $(1; +\infty)$ крива вгнута, в інтервалі $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ — опукла; $\left(\frac{1}{3}; \frac{335}{27}\right)$, $(1; 13)$ — точки перегину. **25.** $x = 2$, $y = x + 1$ при $x \to +\infty$; $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$. **27.** а) $y_{\min} = f(2) = 3$; $x = 0$, $y = x$ — асимптоти (рис. 5.44); б) $y_{\max} = f(0) = 0$; $y_{\min} = f\left(\frac{4}{3}\right) \approx -1{,}1$, $y = x - \frac{2}{3}$ — асимптота, $(2; 0)$ — точка перегину (рис. 5.45).

## § 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДЕЯКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ, ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ

### 7.1. Наближене розв'язування рівнянь

Алгебраїчні рівняння першого та другого степенів (або лінійні та квадратні рівняння) розв'язуються за формулами, які відомі з шкільного курсу математики.

Існують формули (так звані формули Кардано) для знаходження коренів рівняння третього степеня та метод розв'язування рівнянь четвертого степеня (метод Феррарі). Коли існують формули, які дають змогу виразити корені рівняння через його коефіцієнти за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня, то кажуть, що таке рівняння розв'язується в радикалах.

Майже 300 років вчені намагалися розв'язати в радикалах рівняння п'ятого степеня, і лише в першій половині 19 ст. Н. Абель і Е. Галуа довели, що рівняння вище четвертого степеня в загальному випадку в радикалах не розв'язуються. Для розв'язування таких рівнянь застосовують наближені методи. Розглянемо лише ті з них, які безпосередньо стосуються змісту цієї глави.

Нехай треба розв'язати рівняння

$$f(x) = 0. \tag{79}$$

Перед тим як знаходити корені рівняння (79), треба їх відділити, тобто визначити такі проміжки (їх називають *проміжками ізоляції кореня*), які містять тільки один корінь.

Найпростішим методом ізоляції коренів є графічний. Точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю $Ox$ будуть коренями рівняння (79). Якщо рівняння (79) можна зобразити у вигляді різниці двох функцій:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0,$$

то $f_1(x) = f_2(x)$, тому коренями рівняння (79) будуть абсциси точок перетину кривих $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$.

*Приклад*

Знайти проміжки ізоляції коренів рівняння

$$\cos x - x + 1 = 0.$$

○ Запишемо рівняння у вигляді $\cos x = x - 1$. Побудувавши графіки функцій $f_1(x) = \cos x$ та $f_2(x) = x - 1$, бачимо (рис. 5.46), що дане рівняння має єдиний корінь, який лежить на проміжку $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$. ●

Припустимо, що на відрізку $[a, b]$ виконуються такі умови:

1) функція $f(x)$ та її похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні;

2) значення функції на кінцях відрізка мають різні знаки;

3) похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають свої знаки на відрізку $[a; b]$.

Тоді рівняння (79) на $(a; b)$ має лише корінь $x_0$, тобто $(a; b)$ — проміжок ізоляції [12] кореня $x_0$. Далі задачу можна розв'язувати одним з таких методів.

1. *Метод «вилки» (метод половинного поділу)*. Цей метод ми детально розглядали в гл. 4, п. 5.3, припускаючи, що інтервал ізоляції наперед відомий.

2. *Метод хорд* [12]. Припустимо для визначеності, що $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ і $\forall x \in (a; b) : f'(x) > 0$. Точку перетину хорди $AB$ з віссю $Ox$ позначимо через $x_1$, $x_1 \in (a; x_0)$ (рис. 5.47).

Через точку $x_1$ проведемо пряму, паралельну осі $Oy$, до перетину з кривою в точці $A_1$. Сполучивши точки $A_1$ і $B$ хордою, дістанемо точку $x_2$, $x_2 \in (x_1; x_0)$ і т. д. Можна довести, що ця послідовність наближених значень $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ прямує до кореня $x_0$.

Аналітичний вираз для послідовності $\{x_n\}$ одержимо з рівняння хорди (гл. 3, п. 3.1) $AB$, яка сполучає точки $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

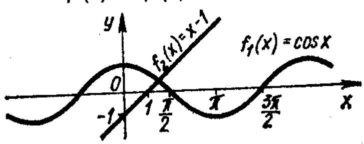



Рис. 5.46

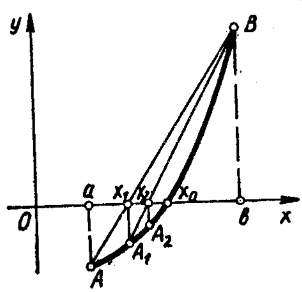



Рис. 5.47

Поклавши $y = 0$, $x = x_1$, дістанемо

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{80}$$

Число $x_1$ називають першим наближенням кореня $x_0$. Обчисливши значення $f(x_1)$, застосовуємо формулу (80) до відрізка $[x_1;\ b]$, якщо $f(x_1) < 0$ або до відрізка $[a;\ x_1]$, якщо $f(x_1) > 0$. Дістанемо точніше друге наближення $x_2$ і т. д. Якщо відома точність $\varepsilon$, з якою треба обчислити корінь $x_0$, то процес припиняється, як тільки $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

***Приклад***

Знайти з точністю до 0,01 корінь рівняння

$$x^3 + x - 1 = 0.$$

○ Нехай $f(x) = x^3 + x - 1$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = 1 > 0$, то на проміжку (0; 1) є хоча б один корінь. Оскільки $\forall x \in (-\infty;\ +\infty)$: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, то крива $y = f(x)$ перетинає вісь $Ox$ лише раз. Отже, (0; 1) — проміжок ізоляції кореня $x_0$.

Знайдемо перше наближення кореня, поклавши в (80) $a = 0$, $b = 1$:

$$x_1 = 0 - \frac{(1-0)\cdot(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Враховуючи, що $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}375 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, маємо $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

Застосувавши формулу (80) до відрізка $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$, дістанемо друге наближення кореня (проміжні обчислення виконуємо з точністю до 0,001):

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)(-0{,}375)}{1-(0{,}375)} = 0{,}636.$$

Оскільки $f(0{,}636) = -0{,}106 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, то $x_0 \in (0{,}636;\ 1)$ і формулу (80) треба застосувати до відрізка $[0{,}636;\ 1]$. Щоб прискорити процес, звузимо цей відрізок. Обчисливши $f(0{,}7) = 0{,}043 > 0$, дістанемо, що $x_0 \in (0{,}636;\ 0{,}7)$.

Застосувавши формулу (80) до відрізка $[0{,}636;\ 0{,}7]$, знайдемо третє наближення кореня:

$$x_3 = 0{,}636 - \frac{(0{,}7 - 0{,}636)(-0{,}109)}{0{,}043 - (-0{,}109)} = 0{,}677.$$

Далі знаходимо $f(0{,}68) = -0{,}07 < 0$, $f(0{,}69) = 0{,}08 > 0$, тому $x_0 \in (0{,}68;\ 0{,}69)$ і з точністю до 0,01 дістаємо наближене значення кореня $x_0 \approx 0{,}68$. ●

3. *Метод дотичних (метод Ньютона).* Нехай $f(a) < 0$,

$$f(b) > 0, \quad \forall x \in (a;\ b): f'(x) > 0,\ f''(x) > 0.$$

Ці умови означають, що функція на кінцях відрізка $[a;\ b]$ набуває значень, протилежних за знаком, зростає і вгнута (рис. 5.48).

Запишемо рівняння дотичної, що проходить через точку $B$ і знайдемо точку $x_1$ перетину цієї дотичної з віссю $Ox$:

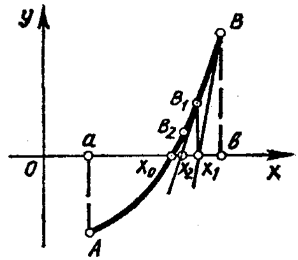


Рис. 5.48

$$y - f(b) = f'(b)(x - b); \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{81}$$

Число $x_1$ вважають першим наближеним кореня $x_0$. Проводячи після цього дотичну в точці $B_1$ $(x_1;\ f(x_1))$ аналогічно знаходимо друге наближення кореня $x_2$.

Застосовуючи метод дотичних достатню кількість разів, можна наближено обчислити корінь з довільною точністю.

Зазначимо, що коли провести дотичну в точці $A$ (рис. 5.49), то точка $x_1$ не наближається до кореня $x_0$, а віддаляється від нього. Тому дотичну слід проводити через ту точку, в якій функція і друга похідна мають однакові знаки.

4. *Комбінований метод* (рис. 5.50). Застосовуючи на відрізку $[a, b]$ одночасно метод хорд і метод дотичних, знаходимо дві точки $x_1$ та $\bar{x}_1$, що лежать по різні боки від кореня $x_0$, тому $x_0 \in (x_1;\ \bar{x}_1)$. Далі знову застосовуємо метод хорд і метод дотичних, але тепер на відрізку $[x_1;\ \bar{x}_1]$ і т. д.

Продовжуємо процес доти, доки не виконуватиметься нерівність $|x_n - \bar{x}_n| < \varepsilon$, де $\varepsilon$ — задана точність обчислень.

### 7.2. Інтерполяція функцій. Чисельне диференціювання

Нехай при вивченні деякого явища виявилось, що існує функціональна залежність між змінними величинами $x$ та $y$. Функція $y = f(x)$ залишається нам невідомою, але внаслідок експерименту встановлено значення цієї функції $y_0, y_1, \ldots, y_n$ при відповідних значеннях аргументу $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Задача полягає в тому, щоб знайти просту функцію, наприклад многочлен, який наближено зображував би функцію $y = f(x)$.

Сформулюємо цю задачу точніше.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задані значення функції $y = f(x)$

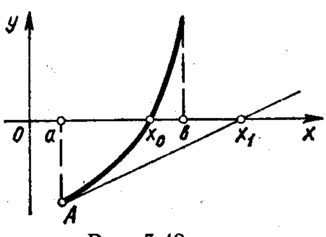


Рис. 5.49

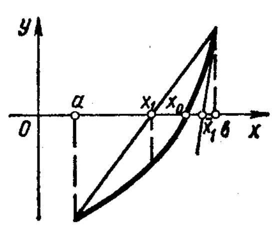


Рис. 5.50

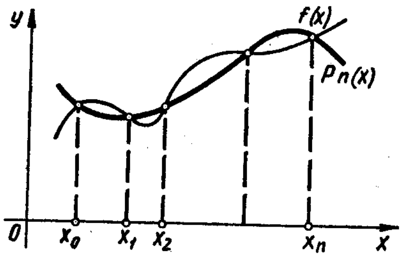


Рис. 5.51

в точках $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \ldots, f(x_n) = y_n.$$

Треба знайти многочлен $n$-го степеня

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n+1}x + a_n, \tag{82}$$

значення якого в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ збігаються із значеннями функції $f(x)$, тобто (рис. 5.51)

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ця задача називається *задачею інтерполяції*, многочлен (82) — *інтерполяційним многочленом*, а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — *вузлами інтерполяції*. Вважаючи інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ наближеним аналітичним виразом для функції $y = f(x)$, тобто $f(x) \approx P_n(x)$, ми можемо знаходити наближені значення функції $f(x)$ в точках $x$, що лежать між вузлами.

Можна показати [5], що задача інтерполяції має єдиний розв'язок, причому інтерполяційний многочлен має вигляд

$$P_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}y_1 + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}y_n. \tag{83}$$

Формула (83) називається *інтерполяційною формулою (або інтерполяційним многочленом) Лагранжа*. Зокрема, вона застосовується в *задачі чисельного диференціювання*. Ця задача полягає в тому, щоб за відомою таблицею значень невідомої функції $f(x)$ знайти значення $f'(x)$. Її наближено можна розв'язати так: за формулою (83) замінити функцію $f(x)$ інтерполяційним многочленом і знайти похідну від нього.

***Приклад***

У точках $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ відомі значення функції $y = f(x)$ : $y_0 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 8$. Обчислити наближене значення $f'(4)$.

○ Маємо

$$f(x) \approx P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2=\frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)}\cdot 2+\frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)}\cdot 1+$$

$$+\frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)}\cdot 8=x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2},$$

тоді $f'(x)\approx 2x-\frac{9}{2}$, $f'(4)\approx 2\cdot 4-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$. ●

### 7.3. Диференціал довжини дуги

Нехай крива $L$ (рис. 5.52) є графіком функції $y=f(x)$, заданої на деякому відрізку $[a;\ b]$. Визначимо довжину дуги кривої. Візьмемо на кривій $L$ точки $M_0$, $M_1$, $M_2$, ..., $M_{n-1}$, $M_n$ і сполучимо їх відрізками. Дістанемо ламану лінію $M_0M_1M_2...M_{n-1}M_n$, яка вписана в дугу $L$. Позначимо периметр цієї ламаної через $P_n$.

Якщо існує і не залежить від способу вписування ламаної скінченна границя периметра цієї ламаної, коли найбільший її відрізок прямує до нуля, то крива $L$ називається *спрямною,* а величина цієї границі називається *довжиною дуги* і позначається

$$l=\lim_{\max M_iM_{i+1}\to 0} P_n.$$

Зафіксуємо на кривій (рис. 5.53) точку $M_0(x_0;\ y_0)$, а точку $M(x;\ y)$ вважатимемо змінною. Тоді довжина $l$ дуги $\smile{M_0M}$ залежить від положення точки $M$ і тому є деякою функцією $l(x)$ абсциси цієї точки: $\smile{M_0M}=l(x)$.

Задачу знаходження функції $l(x)$ ми розглянемо у гл. 7, а тут знайдемо похідну $l'(x)$ цієї функції.

Надамо $x$ приросту $\Delta x$. Тоді дуга $l$ матиме приріст $\Delta l=\smile{MM_1}$. Позначимо через $MM_1$ хорду, що стягує цю дугу.

Вважатимемо, що функція $y=f(x)$ та її перша похідна $f'(x)$ неперервні на $[a;\ b]$. Тоді в кожній точці кривої $L$ можна провести дотичну. Такі криві називають *гладкими.* Приймемо без доведення такий геометричний факт: *довжини нескінченно малої гладкої дуги*

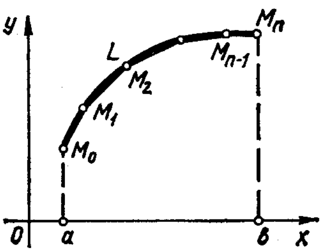


Рис. 5.52

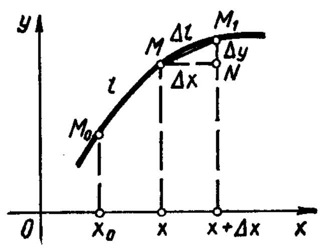


Рис. 5.53

*і хорди, що стягує цю дугу, є еквівалентними нескінченно малими величинами* [12], тоді

$$l'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\breve{MM_1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{MM_1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Для диференціала дуги маємо

$$dl = l'(x)\,dx = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx, \tag{84}$$

або

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

З останнього виразу випливає геометричний зміст диференціала дуги (рис. 5.54): $dl = MT$, тобто диференціал дуги дорівнює довжині відповідного відрізка дотичної до кривої в початковій її точці.

Зауважимо, що формула (84) справедлива лише тоді, коли $\Delta x > 0$, а якщо $\Delta x < 0$, то $dl = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Тому в загальному випадку

$$|dl| = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{85}$$

Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$, тому

$$|dl| = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt. \tag{86}$$

### 7.4. Кривина плоскої лінії

Однією з особливостей плоскої кривої лінії є її відхилення від прямої, тобто викривлення лінії. Ступінь відхилення кривої від прямої або міру викривлення лінії встановлює її кривина.

Розглянемо довільну гладку криву $L$. Кут $\alpha$ між дотичними до $L$ в точках $A$ та $B$ називається *кутом суміжності дуги* $\breve{AB}$ (рис. 5.55).

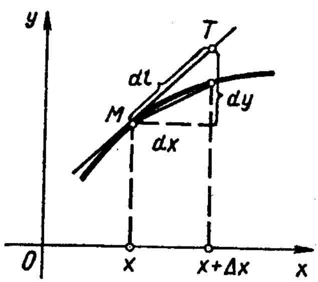


Рис. 5.54

Кут суміжності дає деяке уявлення про викривлення лінії. Наприклад, якщо дуги однакової довжини, то більше викривлена та, у якої кут суміжності більший (рис. 5.56). Але якщо дуги різні, то один і той самий кут суміжності може бути у дуг з різним викривленням (рис. 5.57). Тому для характеристики викривлення лінії кут суміжності дуги розраховують на одиницю її довжини.

Відношення кута суміжності дуги до

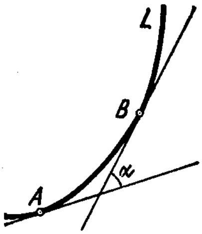



Рис. 5.55

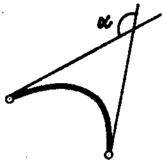



Рис. 5.56

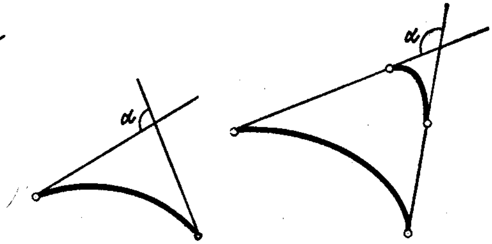



Рис. 5.57

її довжини називається *середньою кривиною* і позначається

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\breve{AB}}.$$

У цій формулі $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, тому середня кривина завжди невід'ємна.

*Кривиною $K$ кривої в точці $A$* називається границя (скінченна чи нескінченна) середньої кривини при прямуванні кінцевої точки $B$ до початкової точки $A$:

$$K = \lim_{B \to A} K_{\text{ср}} = \lim_{B \to A} \frac{\alpha}{\breve{AB}}.$$

*Радіусом $R$ кривини* в точці $A$ називається величина, обернена до кривини:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Таким чином, $0 \leqslant K \leqslant \infty$.

Точка $C$, що лежить на нормалі до кривої $L$ в точці $A$ на відстані $CA = R = \frac{1}{K}$ від $A$ в бік вгнутості $L$, називається *центром кривини кривої* в точці $A$ (рис. 5.58), а коло з радіусом $R$ і центром $C$ називається *колом кривини*.

Геометричне місце $\gamma$ центрів $C$ кривини плоскої кривої $L$ називається її *еволютою*. Сама крива $L$ відносно своєї еволюти називається *евольвентою* або *розгорткою* (від evolvo — розгортати).

Виведемо формулу для обчислення кривини. Нехай лінія $L$ задана функцією $y = f(x)$, що має неперервну другу похідну.

Проведемо дотичні до кривої в точках $A(x; f(x))$ та $B(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$ і позначимо через $\alpha$ та $\alpha + \Delta\alpha$ кути нахилу цих дотичних до осі $Ox$ (рис. 5.59), а довжину дуги $\breve{AB}$ — через $\Delta l$. Тоді за означенням кривина в точці $A$ дорівнює

$$K = \lim_{B \to A} \frac{\Delta\alpha}{\breve{AB}} = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dl} \right| = \left| \frac{\alpha'_x}{l'_x} \right| = \frac{|\alpha'_x|}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

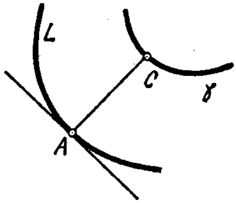



Рис. 5.58

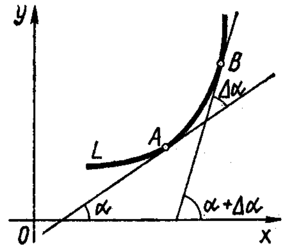



Рис. 5.59

Оскільки $y' = \operatorname{tg}\alpha$, то $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, тому $\alpha'_x = \frac{y''}{1+(y')^2}$, отже,

$$K = \left| \frac{y''}{1+(y')^2} \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \right| = \left| \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \right|. \tag{87}$$

За формулою (87) кривина лінії в деякій точці визначається як функція абсциси цієї точки. Якщо рівняння лінії задано в параметричній формі:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

то згідно з формулами (87) і (42)

$$K = \left| \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{((x'_t)^2 + (y'_t)^2)^{3/2}} \right|. \tag{88}$$

*Приклад*

Знайти кривину: а) прямої лінії $y = ax + b$ у будь-якій точці; б) параболи $y = x^2$ у її вершині; а) кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ в довільній його точці.

○ а) $y' = a$, $y'' = 0$, тому за формулою (87) $K = 0$.

Таким чином, пряма є лінія нульової кривини. Це цілком узгоджується з нашим безпосереднім уявленням про пряму як невикривлену лінію.

б) $y' = 2x$, $y'' = 2$, $K = \left| \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}} \right|$,

зокрема, кривина параболи у її вершині $K = 2$.

в) $x'_t = -R\sin t$, $y'_t = R\cos t$,

$x''_{tt} = -R\cos t$, $y''_{tt} = -R\sin t$,

тому за формулою (88) знаходимо

$$K = \left| \frac{(-R\sin t)(-R\sin t) - R\cos t(-R\cos t)}{[(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2]^{3/2}} \right| = \frac{1}{R}.$$

Такий самий результат дістаємо з означення:

$$K = \lim_{B\to A} \frac{\alpha}{\breve{AB}} = \lim_{B\to A} \frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R}.$$

Отже, кривина кола в довільній його точці є величиною сталою і оберненою до радіуса кола. Це також цілком зрозуміло геометрично (рис. 5.60): із збільшенням

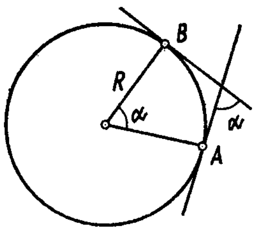



Рис. 5.60

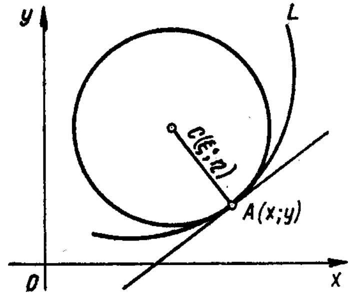



Рис. 5.61

радіуса кола його викривлення зменшується. Коли радіус кола стає нескінченно великим, то кривина останнього стає нескінченно малою, тобто коло «перетворюється» на пряму лінію. ●

Наведемо ще деякі факти, пов'язані з кривиною. Координати $\xi$ та $\eta$ центра кривини $C(\xi;\ \eta)$ кривої $y = f(x)$ в точці $A(x;\ y)$ знаходять за формулами [24]:

$$\xi = x - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \tag{89}$$

Практичне значення їх полягає в тому, що вони дають змогу будувати кола кривини для довільної точки $A(x;\ y)$ заданої кривої.

Поблизу точки $A$ дана лінія $L$ прилягає до свого кола кривини щільніше, ніж до дотичної (рис. 5.61). Зокрема, малу дугу кривої, що містить точку $A$, можна замінити дугою кола кривини в цій точці з меншою помилкою, ніж при заміні її відрізком дотичної (п. 7.3).

Знаючи рівняння $y = f(x)$ кривої $L$, за формулами (89) можна знайти координати центра кривини залежно від абсциси $x$, тобто можна дістати параметричні рівняння еволюти $\gamma : \xi = \xi(x),\ \eta = \eta(x)$.

***Приклад***

Знайти рівняння еволюти параболи $y = \dfrac{x^2}{2}$.

○ Підставляючи значення похідних $y' = x$, $y'' = 1$ заданої функції у формули (89), дістанемо параметричні рівняння еволюти

$$\xi = -x^3, \quad \eta = \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

Виключивши з цих рівнянь параметр $x$, дістанемо

$$\xi^2 = \frac{8}{27}(\eta - 1)^3.$$

Отже, еволютою параболи $y = \dfrac{x^2}{2}$ є напівкубічна парабола (рис. 5.62). ●

Сформулюємо *основні властивості еволюти та евольвенти* [24].

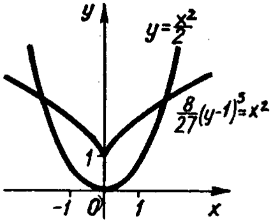



Рис. 5.62

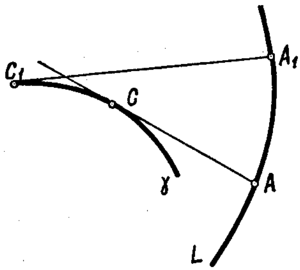



Рис. 5.63

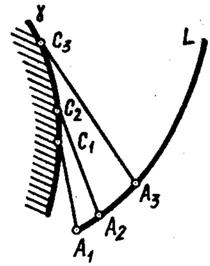



Рис. 5.64

1°. *Якщо A — довільна точка евольвенти L, а C — відповідна точки еволюти γ, то пряма AC — є нормаллю до евольвенти L в точці A і дотичною до еволюти γ в точці C* (рис. 5.63).

2°. *Якщо точка A рухається по евольвенті, то зміна радіуса кривини дорівнює довжині дуги еволюти між відповідними центрами кривини* (рис. 5.63):

$$A_1C_1 - AC = \overset{\smile}{CC_1}.$$

З цих властивостей випливає, що евольвента утворюється внаслідок розгортання (змотування) натягнутої нитки з контура (звідси термін «розгортка»), що має форму еволюти (рис. 5.64). Ця операція розгортання нитки рівнозначна коченню без ковзання прямої лінії по даній еволюті γ; кожна точка такої прямої опише певну евольвенту.

Звідси зрозуміло, що задана еволюта γ має безліч евольвент L. У той самий час кожна задана лінія L, що розглядається як евольвента, має лише одну еволюту γ. Особливо важливе значення мають евольвенти для теорії механізмів. Зокрема, профілі переважної більшості зубців у зубчастих колесах окреслені з боків дугами евольвенти кола, а евольвентне зачеплення зубчастих коліс є одним з найпоширеніших і найнадійніших.

## 7.5. Вектор-функція скалярного аргументу. Дотична пряма і нормальна площина до кривої в просторі. Застосування у механіці

Відомо, що лінія в просторі може бути задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_1;\ t_2]. \tag{90}$$

Кожному значенню параметра $t_0 \in [t_1;\ t_2]$ відповідає певна точка $M\ (x\ (t_0);\ y\ (t_0);\ z\ (t_0))$ простору. При зміні параметра $t$ точка $M$ описує в просторі деяку лінію $L$. Параметр $t$ часто зручно тлумачити як час.

***Приклади***

1. Рівняння $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$ — параметричні рівняння прямої в просторі.

2. Якщо точка $M$ рівномірно рухається по твірній кругового циліндра із швидкістю $v$, а сам циліндр рівномірно обертається навколо своєї осі із швидкістю $\omega$, то внаслідок накладання цих рухів точка $M$ описує криву, яка називається гвинтовою лінією (гл. 4).

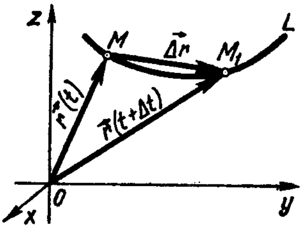


Рис. 5.65

Нехай задана крива (90). Кожній точці $M(x;\ y;\ z)$ цієї кривої відповідає її радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Отже, кожному значенню $t \in [t_1;\ t_2]$ відповідає (рис. 5.65) вектор

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \qquad (91)$$

Цей вектор називається *вектор-функцією скалярного аргументу*, а рівняння (91) — *векторним рівнянням кривої у просторі*. Лінія $L$, яку описує кінець вектора $\vec{r}(t)$, називається *годографом вектор-функції* $\vec{r}(t)$.

Якщо радіус-вектор рухомої точки є функція часу, то годографом цієї функції є траєкторія руху. Рівняння (91) тоді називають *рівнянням руху точки*.

Оскільки задання вектор-функції (91) рівнозначне заданню трьох скалярних функцій (90), то багато відомих нам понять для скалярних функцій можна перенести і на вектор-функції. Зупинимось на деяких із цих понять.

Вектор $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ називається *границею вектор-функції* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ при $t \to t_0$, якщо

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0,\ \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0,\ \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0.$$

При цьому записують

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0.$$

Вектор-функція $\vec{r}(t)$ неперервна в точці $t_0$, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Нехай $L$ — годограф (рис. 5.65) вектор-функції $\vec{r}(t)$. Двом значенням $t$ і $t + \Delta t$ аргументу відповідають два значення $\vec{r}(t)$ і $\vec{r}(t + \Delta t)$ вектор-функції і відповідні їм радіус-вектори $\overrightarrow{OM}$ та $\overrightarrow{OM_1}$. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ називається приростом вектор-функції $\vec{r}(t)$ в точці $t$.

*Похідна* $\vec{r}'(t)$ *вектор-функції* в точці $t$ визначається рівністю

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Виразимо цю похідну через її проекції:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j} - z(t)\vec{k}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{k} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Отже, похідну вектор-фукції (91) знаходять за формулою

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}. \tag{92}$$

Основні властивості похідної (гл. 4, § 2) переносяться на вектор-функції. Але зауважимо, що, диференціюючи векторний добуток $\vec{r}_1 \times \times \vec{r}_2$, треба слідкувати за порядком множників (гл. 2, п. 5.1): $(\vec{r}_1 \times \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}'$. Крім того, властивості, зв'язані з нерівностями, на вектор-функції не поширюються, оскільки вектори не можна сполучати знаками нерівності.

З'ясуємо напрям вектора (92). Вектор $\Delta\vec{r}$ напрямлено по січній $MM_1$ (рис. 5.65). Вектор $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ коленіарний вектору $\Delta\vec{r}$ і так само напрямлений по січній $MM_1$. Оскільки при $\Delta t \to 0$ січна, повертаючись навколо точки $M$, переходить у дотичну, то вектор $\vec{r}'(t)$ напрямлений по дотичній до кривої $L$ в точці $M$.

Користуючись цим, напишемо рівняння дотичної до кривої, заданої рівняннями (90) у точці $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, яка відповідає параметру $t = t_0$:

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0).$$

Канонічне рівняння цієї дотичної запишеться у вигляді (гл. 3, п. 5.1)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Оскільки напрямний вектор $\vec{s} = (m;\ n;\ p)$ дотичної колінеарний вектору $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$, то проекції векторів $\vec{s}$ і $\vec{r}'(t_0)$ пропорційні:

$$m = \lambda x'(t_0), \quad n = \lambda y'(t_0), \quad p = \lambda z'(t_0),$$

де $\lambda$ — коефіцієнт пропорційності. Тоді рівняння дотичної до просторової кривої (90) матимуть вигляд

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{93}$$

Як і у випадку плоскої кривої, пряма, що перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику, називається нормаллю до просторової кривої в даній точці. Але на відміну від плоскої, до просторової кривої можна провести безліч нормалей. Всі ці нормалі лежать в одній площині, яка перпендикулярна до дотичної прямої. Цю площину називають *нормальною площиною*. Використовуючи перпендикулярність нормальної площини і дотичної, дістаємо (гл. 3, п. 4.1) *рівняння нормальної площини*

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \tag{94}$$

Якщо під $t$ розуміти час, то $\vec{r}'(t)$ означає миттєву швидкість $\vec{v}$ точки в момент часу $t$ і ця швидкість напрямлена по дотичній до траєкторії руху в бік зростання часу $t$. Вважаючи $\vec{v}$ функцією від $t$: $\vec{v} = \vec{v}(t)$, дістанемо $\vec{v}'(t) = \vec{\omega}(t)$ — прискорення руху. Але $\vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$, тому $\vec{\omega}(t) = \vec{r}''(t) = \vec{v}'(t)$.

***Приклад***

Знайти рівняння дотичної прямої і нормальної площини до гвинтової лінії $x = \sqrt{2}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t,\ z = \frac{8t}{\pi}$ у точці $M_0$, яка відповідає параметру $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

○ Знаходимо координати точки $M_0\ (x_0;\ y_0;\ y_0)$:

$$x_0 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1,\ y_0 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1,\ z_0 = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = 2,$$

а також значення похідних при $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x'(t) = -\sqrt{2}\sin t,\ x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$y'(t) = \sqrt{2}\cos t,\quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$z'(t) = \frac{8}{\pi};\quad z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{\pi}.$$

За формулою (93) дістаємо рівняння дотичної прямої

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{8/\pi},$$

а за формулою (94) — рівняння нормальної площини:

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+\frac{8}{\pi}(z-2)=0,$$

або

$$\pi x-\pi y-8z+16=0. \bullet$$

Розглянемо тепер диференціал і кривину просторової кривої. Оскільки для достатньо малого значення $\Delta t$ довжина вектора $\Delta\vec{r}$ мало відрізняється від довжини $\Delta l$ дуги $\smile{MM_1}$, тобто

$$\lim_{\Delta l\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta l}\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right|=1,\quad \text{то } |d\vec{r}|=|dl|.$$

Звідси випливає формула для диференціала дуги кривої в просторі

$$|dl|=|d\vec{r}|=|d(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})|=$$

$$=|dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Отже,

$$|dl|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \tag{95}$$

Для кривої (90) маємо

$$|dl|=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt. \tag{96}$$

Формули (95) і (96) аналогічні формулам (85) і (86). Кривину кривої, заданої векторним рівнянням (91), знаходять за формулою

$$K=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}. \tag{97}$$

***Приклад***

Обчислити кривину гвинтової лінії

$$\vec{r}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+(bt)\vec{k}$$

у довільній точці.

○ Знаходимо похідні

$$\vec{r}'(t)=-(a\sin t)\vec{i}+(a\cos t)\vec{j}+b\vec{k};$$

$$\vec{r}''(t)=-(a\cos t)\vec{i}-(a\sin t)\vec{j}.$$

Обчислюємо модулі векторного добутку $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ та вектора $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t)\vec{i} - (ab\cos t)\vec{j} + a^2\vec{k};$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{(ab\sin t)^2 + (ab\cos t)^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

За формулою (97) маємо

$$K = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Таким чином, гвинтова лінія має сталу кривину. ●

Розглянемо деякі застосування вектор-функції та її похідних у механіці.

Якщо закон руху матеріальної точки задано функцією $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то швидкість руху точки $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, а її прискорення $\vec{\omega}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$, де $t$ — час.

Якщо за параметр $t$ взяти довжину $l$ дуги кривої $L$ (рис. 5.65), тобто покласти у формулі (92) $t = l$, то похідна $\vec{\tau} = \vec{\tau}(l) = \vec{r}'(l)$ напрямлена по дотичній до $L$ і, як зазначалося, $|\vec{\tau}| = 1$. Тоді $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, $(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})' = 2\vec{\tau}' \cdot \vec{\tau} = 0$, звідки випливає, що вектор $\vec{n} = \vec{\tau}'$ перпендикулярний до вектора $\vec{\tau}$.

Використовуючи вектори $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dl}$ і $\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dl}$, знайдемо з рівняння (92) прискорення точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = v\vec{\tau}, \text{ де } v = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)| = \frac{dl}{dt};$$

$$\vec{\omega} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \omega\vec{\tau} + v^2\vec{n}, \text{ де } \omega = |\vec{\omega}(t)| = \frac{dv}{dt}.$$

Отже, $\vec{\omega} = \omega\vec{\tau} + v^2\vec{n}$.

Це широко відома в механіці формула, яка дає розклад вектора прискорення на тангенціальну (тобто напрямлену по дотичній) і нормальну (тобто перпендикулярну до дотичної) складові.

### Завдання для самоконтролю

1. Що називається проміжком ізоляції кореня? Як його знайти?
2. Які умови того, що інтервал $(a; b)$ є проміжком ізоляції?

3. Охарактеризуйте основні методи наближеного розв'язування рівнянь: метод проб, хорд, дотичних, комбінований метод.

4. У чому суть задачі інтерполяції?

5. Записати інтерполяційні многочлени Лагранжа при $n$, що дорівнює 1, 2, 3.

6. Як визначається довжина дуги?

7. Вивести формулу для диференціала довжини дуги. Який його геометричний зміст.

8. Що називається кривиною лінії? Радіусом кривини? Центром кривини? Колом кривини? Еволютою? Евольвентою?

9. Вивести формулу для обчислення кривини лінії $y = f(x)$.

10. Як знайти центр кривини?

11. Що називається вектор-функцією та її годографом?

12. У чому полягає механічний зміст вектор-функції?

13. Як знайти вектор-функції?

14. Вивести рівняння дотичної прямої і нормальної площини до просторової кривої.

15. Як знайти диференціал просторової кривої? Навести приклад.

16. Як знайти кривину просторової кривої?

17. Обчислити з точністю до 0,001 корінь рівняння $\sin x + x - 1 = 0$.

18. Відомі значення функції $y(x)$: $y_1 = 4$ при $x_1 = 0$; $y_2 = 6$ при $x_2 = 1$; $y_3 = 10$ при $x_3 = 2$. Написати многочлен Лагранжа для цієї функції.

19. Знайти кривину кривої $y = x^3 + x^2 + 5$ у точці $A$ (0; —5).

20. Знайти радіус кривини кривої $y = \operatorname{ch} x$ у довільній точці.

21. Знайти центр кривини кривої $x = t^2$, $y = 2t^3$ у точці $A$ (1; —2).

22. Знайти рівняння еволюти еліпса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

23. Знайти рівняння дотичної до кривої $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ у точці (3; 9; 27).

24. Знайти кривину кривої $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + 4t\vec{k}$ при $t = 0$.

*Відповіді.* 17. $0{,}5110 < x_0 < 0{,}5111$; 18. $y = x^2 + x + 4$; 19. 2; 20. $\operatorname{ch}^2 x$; 21. $(-3;\ -10/3)$; 22. $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$, $y = -\dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$; 23. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-9}{6} = \dfrac{z-27}{27}$; 24. 1.

# Глава 6

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

## § 1. ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

### 1.1. Функція багатьох змінних. Означення та символіка

Нехай задано множину $D$ упорядкованих пар чисел $(x, y)$. Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число $z$, то кажуть, що на множині $D$ визначено функцію $z$ від двох змінних $x$ і $y$ і записують $z = f(x, y)$.

Наведемо такі приклади: а) площу $S$ прямокутника із сторонами $a$ та $b$ знаходять за формулою $S = ab$. Кожній парі значень $a$ і $b$

відповідає єдине значення площі, тобто $S$ — функція двох змінних: $S = f(a, b)$;

б) за законом Ома електрорушійна сила $E$, сила струму $I$ та опір $R$ замкнутого електричного кола пов'язані співвідношенням $E = IR$. Тут $E$ є функцією змінних $I$ та $R$: $E = f(I, R)$.

Змінну $z$ називають залежною змінною (функцією), а змінні $x$ та $y$ — незалежними змінними (аргументами).

Множину пар $(x, y)$ значень $x$ та $y$, для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення цієї функції* і позначають $D(f)$ або $D$.

Множину значень $z$ позначають $E(f)$ або $E$.

Оскільки кожній упорядкованій парі чисел $(x, y)$ відповідає в прямокутній системі координат $Oxy$ єдина точка $M(x; y)$ площини, що те саме, точка двомірного простору $R_2$, і, навпаки, кожній точці $M(x; y)$ площини відповідає єдина упорядкована пара чисел $(x, y)$, то функцію $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in D$, можна розглядати як функцію точки $M$ і замість $z = f(x, y)$ писати $z = f(M)$. Областю визначення $D \subset R_2$ функції у цьому випадку є деяка множина точок площини $Oxy$. Зокрема, областю визначення функції може бути вся площина, або частина площини, обмежена певними лініями.

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0, y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z|_{M_0}$.

Лінію, що обмежує область $D$, називають *межею області визначення*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Функція двох змінних, як і функція однієї змінної, може бути задана різними способами. Ми користуватимемося, як правило, аналітичним способом, коли функція задається за допомогою формули. Областю визначення такої функції вважається множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст.

***Приклад***

Знайти область визначення $D$ та множину $E$ значень функцій:

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$; в) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x}}$.

○ а) Вираз $x^2 + y^2$ існує і невід'ємний для будь-яких значень $x$ та $y$. Тому областю визначення $D$ функції $z = x^2 + y^2$ є вся площина $Oxy$, а множиною значень — проміжок $E = [0; +\infty)$.

б) Область $D$ даної функції — множина тих точок $(x; y)$, для яких вираз $\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ має зміст, тобто множина точок, для яких $4 - x^2 - 4y^2 \geqslant 0$.

Щоб зобразити область $D$ геометрично, знайдемо її межу $4 - x^2 - 4y^2 = 0$, або $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Це рівняння визначає в площині $Oxy$ еліпс з півосями $a = 2$ та $b = 1$. Даний еліпс ділить всю площину на дві частини. Для точок однієї з цих частин $4 - x^2 - 4y^2 > 0$, а для другої $4 - x^2 - 4y^2 < 0$.

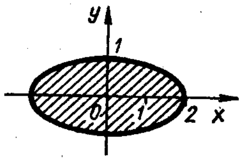



Рис. 6.1

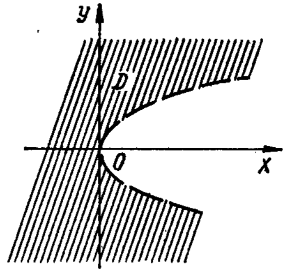



Рис. 6.2

Щоб виявити, яка з частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умову $4 - x^2 - 4y^2 \geqslant 0$, достатньо перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки, яка не лежить на еліпсі. Наприклад, точка $O(0; 0)$ належить області $D$, тому що $4 - 0^2 - 4 \cdot 0^2 = 4 > 0$.

Отже, внутрішніми точками області $D$ даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс також належить області, тому що для точок еліпса $4 - x^2 - 4y^2 = 0$. Це замкнена область (рис. 6.1). Множина значень заданої функції — відрізок $E = [0; 2]$.

в) Область визначення $D$ цієї функції визначається з нерівності $y^2 - x > 0$. Межа області (парабола $y^2 = x$) не належить їй, тобто це відкрита область (рис. 6.2). Множина значень заданої функції — інтервал $E = (0; +\infty)$.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. Дійсно, нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D$. Кожній точці $(x; y) \in D$ відповідає певне значення функції $z = f(x, y)$.

*Графіком функції* $z = f(x, y)$ в прямокутній системі $Oxyz$ називають геометричне місце точок $M(x; y; f(x, y))$, проекції яких $(x; y)$ належать області $D$. Це геометричне місце точок утворює в тривимірному просторі $R_3$ певну поверхню (рис. 6.3), проекцією якої на площину $Oxy$ є множина $D$.

В аналітичній геометрії уже розглядались поверхні, які є графіками функцій двох змінних. Нагадаємо деякі з них.

Верхня частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ є графіком функції $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а нижня її частина — графіком функції $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (рис. 3.65).

Еліптичний параболоїд є графіком функції $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (рис. 3.70).

Гіперболічний параболоїд є графіком функції $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (рис. 3.71).

Побудова графіків функцій двох змінних часто пов'язана із значними труднощами. Тому для зображення функцій двох змінних користуються методом перерізів (гл. 3, § 7), який полягає у тому, що поверхню $z = f(x, y)$ перетинають площинами $x = x_0$ та $y = y_0$ і за графіками кривих $z = f(x_0, y)$ та $z = f(y_0, x)$ визначають графік функції $z = f(x, y)$ (рис. 6.4).

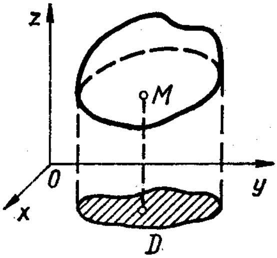



Рис. 6.3

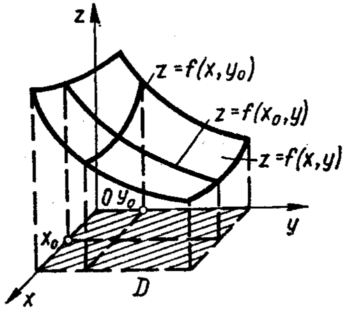



Рис. 6.4

Можна фіксувати не $x$ чи $y$, а саму функцію $z$, тобто перетинати дану поверхню площинами $z = c$, де $c$ — довільне число, взяте з множини $E(f)$ значень даної функції. При цьому одержимо криву $f(x, y) = c$, яку називають *лінією рівня (або ізокривою) функції*. (Термін «лінія рівня» запозичений з картографії. Там лінії рівня — це лінії, на яких висота точок земної поверхні над рівнем моря стала.) Інакше кажучи, лінія рівня на площині $Oxy$ — це проекція кривої, яка утворюється при перетині поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = c$. Будуючи лінії рівня для різних значень $c$, можна дістати певне уявлення про графік функції двох змінних (рис. 6.5.).

***Приклад***

Знайти лінії рівня і побудувати графік функції

$$z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}.$$

○ Лінії рівня $z = c$ знайдемо з рівняння $\frac{1}{x^2 + 2y^2} = c$, де $c > 0$. Маємо

$$x^2 + 2y^2 = \frac{1}{c}, \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2c}}\right)^2} = 1,$$

тобто лініями рівня даної функції є еліпси з півосями $a = \sqrt{\frac{1}{c}}$ та $b = \sqrt{\frac{1}{2c}}$ (рис. 6.6).

Ми розглянули поняття функції двох змінних. Узагальнимо його на випадок трьох і більшого числа незалежних змінних.

Нехай $D$ — деяка множина упорядкованих трійок $(x, y, z)$ дійсних чисел, тобто точок $M(x; y; z)$ тривимірного простору $R_3$.

Якщо кожній точці $(x; y; z) \in D$ за певним законом відповідає єдине число $u$, то кажуть, що на множині $D$ визначено функцію $u$ від трьох змінних $x$, $y$ і $z$, і записують $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$.

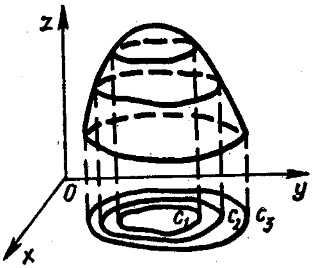



Рис. 6.5

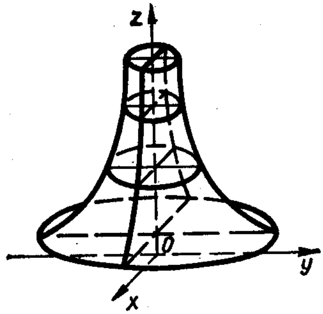



Рис. 6.6

При цьому змінна $u$ називається залежною змінною (функцією), $x$, $y$, $z$ — незалежними змінними (аргументами), множина $D \subset \subset R_3$ — областю визначення функції.

Область визначення функції трьох змінних можна геометрично зобразити у вигляді деякої частини тривимірного простору. Але саму функцію $u = f(x, y, z)$ геометрично зобразити вже не можна, тому що наш простір тривимірний і четверту координатну вісь для значень $u$ зобразити неможливо.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називають множину всіх точок $(x; y; z) \in D(f)$, для яких задана функція набуває одне й те саме значення $c \in E(f)$:

$$f(x, y, z) = c \qquad (\textit{ізоповерхні}).$$

***Приклади***

1. Областю визначення функції

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

є куля одиничного радіуса з центром у початку координат. Це замкнена область, тому що їй належать точки сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — межі області.

2. Поверхні рівня функції $u = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$ визначаються рівнянням $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{c} = 0$, де $c > 0$.

Це сім'я конусів з вершиною в точці $O(0; 0; 0)$.

Лінії і поверхні рівня часто зустрічаються на практиці. Наприклад, сполучивши на карті поверхні Землі точки з однаковою середньодобовою температурою або з однаковим середньодобовим тиском, дістанемо відповідно ізотерми та ізобари, які є важливими даними для прогнозу погоди.

Якщо число $n$ незалежних змінних більше трьох, то їх частіше позначають однією буквою, але з різними індексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Функцію $u$ від цих незалежних змінних можна визначити так. Нехай задано множину $D$ упорядкованих систем $(x_1, x_2, ...; x_n)$ з $n$ чисел $(n \in N)$, або, що те саме, множину точок $M$ $(x_1; x_2; ...; x_n)$ $n$-вимірного простору $R_n$.

Якщо кожній точці $(x_1; x_2; ...; x_n) \in D$ за певним законом відповідає єдине число $u$, то кажуть, що на множині $D$ визначено функцію $u$ від $n$ змінних: $x_1, x_2, ..., x_n$ і записують

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n), \text{ або } u = f(M), \ M \in R_n.$$

Область визначення $D$ цієї функції у випадку $n \geqslant 4$ геометрично зобразити не можна.

Надалі розглядатимемо лише функції двох змінних, тому що результати для функцій двох змінних легко по аналогії узагальнити на випадок більшого числа змінних. Крім того, для функції двох змінних можна дати геометричні ілюстрації.

### 1.2. Границя функції багатьох змінних

Введемо поняття $\delta$-околу заданої точки $M_0$ $(x_0; y_0)$ і поняття збіжної послідовності точок площини.

Множина всіх точок $M$ $(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $\rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, де $\rho(M; M_0)$ — відстань від точки $M$ до $M_0$, називається $\delta$-околом точки $M_0$ $(x_0; y_0)$.

Іншими словами, *$\delta$-окіл точки* $M_0$ — це всі внутрішні точки круга з центром $M_0$ радіуса $\delta$ (рис. 6.7).

Розглянемо послідовність точок $M_1$ $(x_1; y_1)$, $M_2$ $(x_2; y_2)$, ..., $M_n$ $(x_n; y_n)$, яку позначимо символом $\{M_n\}$. Послідовність точок $\{M_n\}$ називається *збіжною до точки* $M_0$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M; M_0) < \varepsilon$. При цьому точку $M_0$ називають границею послідовності $\{M_n\}$ і записують так:

$$\lim_{n \to \infty} M_n = M_0 \text{ або } M_n \to M_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Якщо $M_n$ $(x_n; y_n) \to M_0$ $(x_0; y_0)$ при $n \to \infty$, то, очевидно, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Тепер розглянемо границю функції двох змінних. Її означення аналогічне означенню границі функції однієї змінної (п. 3.4, гл. 4). Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій області $D$ і точка $M_0$ $(x_0; y_0) \in D$ або $M_0$ $(x_0; y_0) \notin D$, але має таку властивість, що в довільному $\delta$-околі цієї точки міститься хоча б одна точка множини $D$, відмінна від $M_0$. Число $A$ називається *границею функції* $z = f(M)$ *в точці* $M_0$, якщо для довільної, збіжної до $M_0$ послідовності точок $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ $(M_n \in D, \ M_n \neq M_0)$, відповідна послідовність значень функції

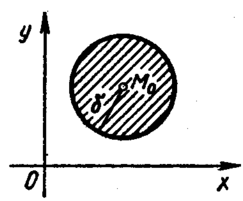


Рис. 6.7

$f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_n)$, ... збігається до числа $A$. При цьому пишуть: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$.

Наведене означення границі функції називають *означенням за Гейне або означенням «на мові послідовностей»*.

Дамо еквівалентне означення границі функції за Коші або означення «на мові $\varepsilon - \delta$». Число $A$ називається *границею функції* $z = f(M)$ *в точці* $M_0$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M; M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Користуючись означенням границі функції двох змінних, можна перенести основні теореми про границі для функції однієї змінної (гл. 4, п. 3.7) на функції двох змінних. Наприклад, правильне таке твердження.

**Теорема.** *Нехай функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені на одній і тій самій множині $D$ і мають в точці $M_0$ границі $B$ і $C$. Тоді функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M)g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$, $g(M) \neq 0$, мають в точці $M_0$ границі, які відповідно дорівнюють $B \pm C$, $B \cdot C$, $\frac{B}{C}$, $C \neq 0$.*

Функція $z = f(M)$ називається *нескінченно малою в точці* $M_0$ (або при $M \to M_0$), якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = 0$. Якщо функція $z = f(M)$ має в точці $M$ границю, яка дорівнює $A$, то функція $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою в точці $M_0$, тому що $\lim\limits_{M\to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M\to M_0} (f(M) - A) = 0$. Звідси випливає, що функція $f(M)$ в околі точки $M_0$ відрізняється від границі $A$ на нескінченно малу функцію.

***Приклад***

Знайти границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

○ а) Якщо $M(x; y) \to M_0(0; 0)$, то $\rho(M; M_0) = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, тому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{(\sqrt{\rho^2+1}-1)(\sqrt{\rho^2+1}+1)} = 2.$$

б) Нехай $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Візьмемо дві послідовності точок: $\{M_n\} = \left\{\left(0; \frac{1}{n}\right)\right\} \to 0$ і $\{P_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}; 0\right)\right\} \to 0$ при $n \to \infty$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0-\frac{1}{n^2}}{0+\frac{1}{n^2}} = -1; \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}+0} = 1.$$

Таким чином, двом різним, збіжним до точки (0; 0), послідовностям точок відповідають дві послідовності значень функції, які мають різні границі. Отже, дана функція в точці (0; 0) границі не має. ●

Означення границі функції $n$ змінних при $n > 2$ аналогічне означенням границі при $n = 2$, якщо в $n$-вимірному просторі ввести таке поняття δ-околу: *δ-околом точки* $M_0$ $(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$ називається множина всіх точок $M$ $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, координати яких задовольняють нерівності

$$\rho(M;\ M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta.$$

Зокрема, в тривимірному просторі $R_3$ δ-околом точки $M_0$ $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ є множина всіх внутрішніх точок $M$ $(x;\ y;\ z)$ кулі з центром у точці $M_0$ радіуса δ.

## 1.3. Неперервність функції багатьох змінних

Поняття неперервної функції багатьох змінних вводиться за допомогою поняття границі.

Нехай функція $z = f(M)$ визначена на множині $D$, точка $M_0 \in D$ і довільний δ-окіл точки $M_0$ містить точки множини $D$.

Функція $z = f(M)$ називається *неперервною в точці* $M_0$, якщо

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \tag{1}$$

У випадку функції двох змінних рівність (1) означає, що коли точка $M$ $(x;\ y)$, залишаючись в області визначення $D$ функції $z = f(x, y)$, наближається до точки $M_0$ $(x_0;\ y_0)$, то відповідна апліката $f(M)$ поверхні, яка є графіком заданої функції, прямує до аплікати $f(M_0)$ (рис. 6.8).

Точки, в яких функція неперервна, називаються *точками неперервності*, а точки, в яких неперервність порушується — *точками розриву* цієї функції.

Наприклад, функція

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x + y}, & x + y \neq 0; \\ 1, & x + y = 0 \end{cases}$$

розривна в точці (0; 0), оскільки $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не існує; функція

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2y, & x \in R \setminus \{1\},\ y \in R \setminus \{2\}; \\ 1, & x = 1, \qquad y = 2 \end{cases}$$

розривна в точці (1; 2), оскільки $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x, y) = 5$, а $f(1, 2) = 1$.

Умові (1) неперервності можна надати іншого вигляду. Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Величини $\Delta x$,

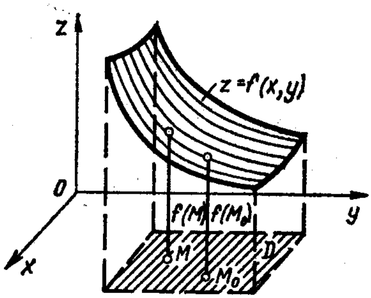


Рис. 6.8

$\Delta y$ називають *приростами аргументів* $x$ і $y$, а $\Delta z$ — *повним приростом функції* $f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$. З рівності (1) дістаємо:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0. \qquad (2)$$

Рівність (2) дає ще одне означення неперервності.

Функція $f(x, y)$ називається *неперервною в точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо повний приріст її в цій точці прямує до нуля, коли прирости її аргументів $x$ та $y$ прямують до нуля.

Функція $f(x, y)$ називається *неперервною на множині* $D$, якщо вона неперервна в кожній точці $(x; y)$ цієї множини.

Наприклад, функція $z = x^2 + y^2$ неперервна на всій площині $Oxy$, оскільки повний приріст цієї функції в довільній точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) = \\ = 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

і

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Використовуючи поняття неперервності функції кількох змінних і відповідні теореми про границі, можна довести, що арифметичні операції над неперервними функціями і побудова складеної функції з неперервних функцій приводять до неперервних функцій. (Подібна теорема для функції однієї змінної наведена у п. 5.2, гл. 4).

Наведемо *основні властивості функції* $z = f(x, y)$, *неперервної в замкненій і обмеженій області*. Ці властивості аналогічні властивостям неперервної на відрізку функції однієї змінної (гл. 4, п. 5.3). Попередньо уточнимо ряд понять для множин точок площини, про які говорилось в п. 1.1.

Множина $D$ точок площини називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити неперервною лінією, яка цілком належить множині $D$. Наприклад, круг — зв'язна множина, а множина, що складається з двох кругів, які не мають спільних точок, не є зв'язною.

Точка $M$ називається *внутрішньою точкою множини* $D$, якщо існує $\delta$-окіл цієї точки, який цілком міститься у множині $D$.

Множину $D$ називають *відкритою,* якщо кожна її точка внутрішня.

*Областю* (або *відкритою областю)* називають зв'язну відкриту множину точок.

Точку $M$ називають *межовою точкою множини $D$*, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать $D$, так і точки, що не належать множині $D$. Множину всіх межових точок області називають *межею області*.

Область разом з її межею називається *замкненою.* Якщо існує круг скінченного радіуса, який цілком містить область, то вона називається *обмеженою.*

Замкнена область, в якій визначена функція двох змінних, є аналогом відрізка для функції однієї змінної.

Тепер сформулюємо *властивості неперервних функцій двох змінних в замкненій обмеженій області.*

$1^0$. *Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число $c > 0$, що для всіх точок області виконується нерівність $|f(M)| < c$.*

$2^0$. *Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого і найменшого значень.*

$3^0$. *Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області $D$ і $f(M_1) < c < f(M_2)$, де $M_1$, $M_2 \in D$, то існує точка $M_0(x_0; y_0)$, в якій $f(M_0) = c$. Зокрема, якщо $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то в області $D$ існує точка $M_0$, в якій $f(M_0) = 0$.*

**Завдання для самоконтролю**

1. Що називається функцією двох змінних?
2. Що називається областю визначення функції і який її геометричний зміст?
3. Що являє собою графік функції $z = f(x, y)$? У чому полягає метод перерізів?
4. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$? Навести приклад.
5. Дати означення функції трьох змінних, $n$ змінних.
6. Що називається границею функції $z = f(M)$ при $M \to M_0$?
7. Що називається поверхнями рівня функції $u = f(x, y, z)$?
8. Дати означення неперервної функції двох змінних в точці і на множині точок.
9. Що називається замкненою обмеженою областю?
10. Сформулювати властивості функції $z = f(x, y)$, неперервної в замкненій обмеженій області.
11. Знайти область визначення $D$ функції

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

12. Переконатися, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} = \frac{1}{2}.$$

13. Довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

14. Дослідити на неперервність функції

а) $z = 2x^2 + 3y$;  б) $z = \frac{x^2 + 2y - 1}{x^2 + y^2}$;  в) $z = \frac{x + y - 1}{y^2 - 2x}$.

*Відповіді.* 11. $D$ — множина точок, що містяться між колами $x^2 + y^2 = 1$ та $x^2 + y^2 = 4$, причому внутрішнє коло в область $D$ входить, а зовнішнє — ні. 13. *Вказівка.* Якщо $M(x; y) \to O(0; 0)$ по різних прямих $y = kx$, то функція $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ прямує до різних значень. 14. а) Функція неперервна на всій площині $Oxy$; б) функція не визначена і, значить, розривна в точці $O(0; 0)$; в) точки розриву знаходяться на параболі $y^2 = 2x$.

## § 2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

### 2.1. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$. Надамо змінній $x$ приросту $\Delta x$, залишаючи змінну $y$ незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y)$ належала заданому околу.

Величина

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

називається *частинним приростом функції* $f(x, y)$ *по змінній* $x$.

Аналогічно вводиться *частинний приріст* $\Delta_y z$ *функції по змінній* $y$:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною функції* $f(x, y)$ *в точці* $M(x; y)$ *по змінній* $x$ *і позначається* одним із таких символів:

$$z'_x,\ f'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x};$$

$f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x|_{M_0}$ — частинні похідні по $x$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно *частинна похідна функції* $f(x, y)$ *по* $y$ визначається як границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів:

$$z'_y,\ f'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної $z'_x$ обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної $x$, вважаючи змінну $y$ сталою, а при знаходженні похідної $z'_y$ сталою вважається змінна $x$. Тому частинні похідні знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

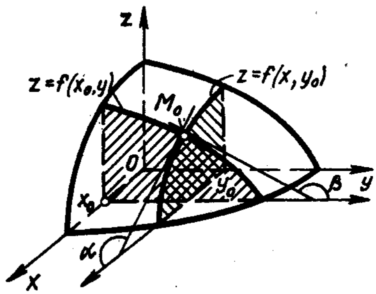


Рис. 6.9

Частинна похідна $z'_x$ (або $z'_y$) характеризує швидкість зміни функції в напрямі осі $Ox$ (або $Oy$).

З'ясуємо геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних. Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня (рис. 6.9). Графіком функції $z = f(x, y_0)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, дістанемо, що $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, де $\alpha$ — кут між віссю $Ox$ і дотичною, проведеною до кривої $z = f(x, y_0)$ в точці $M_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$. Аналогічно $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $n$ змінних можна знайти $n$ частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

де

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i},$$

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, треба взяти звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по змінній $x_i$, вважаючи решту змінних сталими.

***Приклад***

Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^2 + y^3 - 2xy^2 + 5x - 1$; б) $u = x^2 z + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

○ Маємо:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y^2 + 5$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 4xy$;

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz + \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x^2$. ●

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області $D$ і має частинні похідні $z'_x$, $z'_y$ в усіх точках $(x; y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області $D$. Тому має сенс питання про існування частинних похідних від цих функцій по якій-небудь змінній в точці $(x;\ y) \in D$.

Якщо існує частинна похідна по $x$ від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ по змінній* $x$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або $f''_{xx}$.

Таким чином, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{або} \quad f''_{xx} = (f'_x)'_x.$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ по змінній $y$, то цю похідну називають *мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$* і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або $f''_{xy}$.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{або} \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y.$$

Для функції двох змінних $f(x, y)$ можна розглядати чотири похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають *частинними похідними третього порядку функції $f(x, y)$*, їх вісім:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Природно поставити запитання: чи залежить результат диференціювання від порядку диференціювання? Інакше кажучи, чи будуть рівними між собою мішані похідні, якщо вони взяті по одних і тих самих змінних, одне й те саме число разів, але в різному порядку? Наприклад, чи дорівнюють одна одній похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{або} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}?$$

У загальному випадку відповідь на це запитання негативна.

Проте справедлива теорема [27], яку вперше довів К. Г. Шварц.

***Теорема*** *(про мішані похідні). Якщо функція $f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $f'_x$, $f'_y$, $f''_{xy}$, $f''_{yx}$ в деякому околі точки $M_0$*

$(x_0; y_0)$, *причому похідні* $f''_{xy}$ *та* $f''_{yx}$ *неперервні в точці* $M_0$, *то в цій точці*

$$f''_{xy}\big|_{M_0} = f''_{yx}\big|_{M_0}.$$

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

***Приклади***

1. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = x^3 - x^2y + y^2.$$

○ Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x. \; ●$$

2. Нехай

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Переконатись, що

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

○ Знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

оскільки

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial^2 f(0, y)}{\partial x \partial y} = -1,$$

зокрема $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = -1.$

Аналогічно обчислюємо $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = 1$. Отже, для даної функції $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$, тобто результат диференціювання залежить від порядку диференціювання. Це пов'язано з тим, що похідні $f''_{xy}$ і $f''_{yx}$ в точці (0; 0) розривні. ●

## 2.2. Диференційовність функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$. Виберемо прирости $\Delta x$ і $\Delta y$ так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$

належала розглядуваному околу і знайдемо повний приріст функції в точці $M(x;\ y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

Функція $f(x,\ y)$ називається *диференційовною в точці* $M$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{3}$$

де $A$ та $B$ — дійсні числа, які не залежать від $\Delta x$ та $\Delta y$, $\alpha = \alpha(\Delta x,\ \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x,\ \Delta y)$ — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Відомо (гл. 5, п. 1.4) що коли функція однієї змінної диференційовна в деякій точці, то вона в цій точці неперервна і має похідну. Перенесемо ці властивості на функції двох змінних.

***Теорема 1*** *(неперервність диференційовної функції). Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M$, то вона неперервна в цій точці.*

○ Якщо функція диференційовна в точці $M$, то з рівності (3) випливає, що $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Це означає, що функція неперервна в точці $M$. ●

***Теорема 2*** *(існування частинних похідних диференційовної функції). Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M(x;\ y)$, то вона має в цій точці похідні $f'_x = f'_x(x,\ y)$ та $f'_y = f'_y(x,\ y)$* і

$$\Delta z = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

○ Оскільки $f(x,\ y)$ диференційовна в точці $M(x;\ y)$, то справджується рівність (3). Поклавши в ній $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, дістанемо

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x,\ 0)\,\Delta x.$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на $\Delta x$ і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x,\ 0)) = A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x,\ 0) = A.$$

Отже, в точці $M$ існує частинна похідна $f'_x(x,\ y) = A$. Ааналогічно доводиться, що в точці $M$ існує частинна похідна $f'_y(x,\ y) = B$. ●

Твердження, обернені до теорем 1 і 2, взагалі кажучи, неправильні, тобто із неперервності функції $f(x,\ y)$ або існування її частинних похідних ще не випливає диференційовність. Наприклад, функція $f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ неперервна в точці $(0;\ 0)$, але не диференційовна в цій точці. Справді, границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x,\ 0) - f(0,\ 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

не існує, тому не існує й похідної $f'_x(0, 0)$. Аналогічно впевнюємося, що не існує також похідної $f'_y(0, 0)$. Оскільки задана функція в точці $(0; 0)$ не має частинних похідних, то вона в цій точці не диференційовна.

Більше того, відомі приклади функцій [11], які є неперервними в деяких точках і мають в них частинні похідні, але не є в цих точках диференційовними.

**Теорема 3** *(достатні умови диференційовності). Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки $M$ і ці похідні неперервні в точці $M$, то функція $f(x, y)$ диференційовна в точці $M$.*

○ Надамо змінним $x$ і $y$ приростів $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ таких, щоб точка $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ належала даному околу точки $M$. Повний приріст функції

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

запишемо у вигляді

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \tag{4}$$

Вираз у перших квадратних дужках рівності (4) можна розглядати як приріст функції однієї змінної $x$, а в других — як приріст функції змінної $y$. Оскільки дана функція має частинні похідні, то за теоремою Лагранжа дістанемо:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \\ = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Похідні $f'_x$ та $f'_y$ неперервні в точці $M$, тому

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y).$$

Звідси випливає, що

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Підставляючи ці вирази у рівність (4), знаходимо

$$\Delta z = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

а це й означає, що функція $f(x, y)$ диференційовна в точці $M$. ●

З теорем 2 і 3 випливає такий наслідок: *щоб функція $f(x, y)$ була диференційовною в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб вона мала в цій точці неперервні частинні похідні.*

Зазначимо, що для функції $f(x)$ однієї змінної існування похідної $f'(x)$ в точці $x$ є необхідною і достатньою умовою її диференційовності в цій точці.

**2.3. Повний диференціал функції та його застосування до обчислення функцій і похибок. Диференціали вищих порядків**

Нагадаємо, що коли функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M$, то її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

*Повним диференціалом* $dz$ диференційовної в точці $M$ функції $z = f/M$ називається лінійна відносно $\Delta x$ та $\Delta y$ частина повного приросту цієї функції в точці $M$, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{5}$$

Диференціалами незалежних змінних $x$ та $y$ назвемо прирости цих змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді з урахуванням теореми 2 рівність (5) можна записати так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{6}$$

Аналогічна формула має місце для диференційовної функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz. \tag{7}$$

З формул (6) і (7) може здатися, що повний диференціал $du$ існуватиме в кожній точці, в якій існують частинні похідні. Але це не так. Згідно з означенням, повний диференціал можна розглядати лише стосовно диференційовної функції.

Покажемо, що різниця між повним приростом $\Delta z$ і диференціалом $dz$ при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ є нескінченно мала величина вищого порядку, ніж величина $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Дійсно, з формул (3) і (5) маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{\alpha \Delta x}{\rho} + \frac{\beta \Delta y}{\rho}\right) = 0,$$

оскільки функції $\alpha$, $\beta$ — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, а $\frac{\Delta x}{\rho}$ та $\frac{\Delta y}{\rho}$ — обмежені функції:

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}} \leqslant 1, \quad \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1.$$

Отже, різниця $\Delta z - dz$ — нескінченно мала величина вищого порядку, ніж $\rho$. Тому повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційовної функції. При цьому виконується наближена рівність $\Delta z \approx dz$ або

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \qquad (8)$$

Ця рівність тим точніша, чим менша величина $\rho$. Рівність (8) широко використовується в наближених обчисленнях, оскільки диференціал функції обчислюється простіше, ніж її повний приріст.

Покажемо, як за допомогою диференціала можна оцінити похибку в обчисленнях.

Нехай задана диференційовна функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, незалежні змінні якої виміряні з точністю $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Потрібно знайти похибку, з якою обчислюється $u$.

Природно вважати, що ця похибка дорівнює величині

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для малих значень $\Delta x_i$ маємо

$$\Delta u \approx du = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n,$$

звідки

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |\Delta x_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|.$$

Якщо через $|\Delta^* x_i|$ позначити максимальну абсолютну похибку змінної $x_i$, то можна дістати значення максимальної абсолютної похибки $|\Delta^* u|$ функції $u$:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta^* x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |\Delta^* x_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta^* x_n|. \qquad (9)$$

Щоб оцінити максимальну відносну похибку функції $u$, поділимо обидві частини рівності (9) на $|u| = |f(x_1, x_2, ..., x_n)|$:

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\Delta^* u}{u}\right| = \left|\frac{f'_{x_1}}{f}\right| |\Delta^* x_1| + \left|\frac{f'_{x_2}}{f}\right| |\Delta^* x_2| + \left|\frac{f'_{x_n}}{f}\right| |\Delta^* x_n|.$$

Оскільки $\frac{f'_{x_i}}{f} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln|f|)$, то

$$|\delta^* u| = \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\ln|f|)\right||\Delta^* x_i| + \left|\frac{\partial}{\partial x_2}(\ln|f|)\right||\Delta^* x_2| + \cdots$$

$$\cdots + \left|\frac{\partial}{\partial x_n}(\ln|f|)\right||\Delta^* x_n|$$

або

$$|\delta^* u| = |\Delta^* \ln|f||, \tag{10}$$

тобто максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці її логарифма.

***Приклади***

1. Знайти повний диференціал функції

$$z = x^3 y^2.$$

○ Частинні похідні заданої функції $z'_x = 3x^2y^2$ і $z'_y = 2x^3y$ є неперервними функціями на всій площині $Oxy$. Тому диференціал цієї функції на всій площині дорівнює

$$dz = 3x^2y^2dx + 2x^2ydy. \ \bullet$$

2. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right).$$

○ Розглянемо функцію $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ і застосуємо до неї формулу (6), поклавши $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{y}{y^2+(x-y)^2}\Delta x - \frac{x}{y^2+(x-y)^2}\Delta y;$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2-0,03}{1+0,02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + \frac{1}{1+(2-1)^2}(-0,03) -$$

$$- \frac{2}{1+(2-1)^2}\,0,02.$$

Маємо

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 = 0,75. \ \bullet$$

3. Період коливання маятника дорівнює $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де $l$ — довжина маятника, $g$ — прискорення вільного падіння. Розв'язуючи цю рівність відносно $g$, дістанемо $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Цією формулою користуються для обчислення $g$ в різних точках земної поверхні, вимірюючи в цих точках величини $l$ і $T$. Нехай в результаті вимірювань дістали $l = 50 \pm 0,01$ см, $T = 1,4196 \pm 0,0001$ с.

Потрібно знайти прискорення вільного падіння $g$ і максимальну абсолютну та відносну похибки знайденого значення $g$, вважаючи, що $\pi = 3,1416 \pm 0,0001$,

○ Маємо

$$\ln g = \ln 4 + 2\ln\pi + \ln l + 2\ln T,$$

$$\Delta^* T = 0{,}0001, \quad \Delta^* l = 0{,}01, \quad \Delta^*\pi = 0{,}0001.$$

Знайдемо наближене значення прискорення:

$$g = \frac{4 \cdot (3{,}1416)^2 \cdot 50}{(1{,}4196)^2} = 979{,}5 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

За формулами (9) і (10) дістанемо максимальне значення відносної і абсолютної похибок:

$$|\delta^* g| = |\Delta^* \ln |g|| = \frac{2|\Delta^*\pi|}{\pi} + \frac{|\Delta^* l|}{l} + \frac{2|\Delta^* T|}{T} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}0001}{3{,}1416} + \frac{0{,}01}{50} + \frac{2 \cdot 0{,}0001}{1{,}4196} \approx 0{,}0004 = 0{,}04\ \%,$$

$$\Delta^* g| = |\delta^* g| g = 0{,}0004 \cdot 979{,}5 \approx 0{,}4 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Отже,

$$g = 979{,}5 \pm 0{,}4 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}. \ ●$$

Введемо поняття *диференціала вищого порядку*. Нехай $z = f(x, y)$ функція незалежних змінних $x$, $y$. Повний диференціал цієї функції, знайдений за формулою (5), називають ще диференціалом першого порядку. *Диференціал другого порядку* визначають за формулою

$$d^2 z = d(dz).$$

Тоді, якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dy,$$

звідки

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{11}$$

Символічно це записують так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Аналогічно можна дістати формулу для *диференціала третього порядку*:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можна дістати формулу для диференціала $n$-го порядку:

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z. \qquad (12)$$

Зазначимо, що формула (12) справедлива лише для випадку, коли змінні $x$ і $y$ функції $z = f(x, y)$ є незалежними змінними.

***Приклад***

Знайти $d^2 z$, якщо $z = e^{x^2+y^2}$.

○ Послідовно дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2).$$

За формулою (11) маємо

$$d^2 z = 2e^{x^2+y^2}\left[(1+2x^2)\,dx^2 + 4xy\,dx\,dy + (1+2y^2)\,dy^2\right]. \bullet$$

### 2.4. Похідна складеної функції. Повна похідна. Інваріантність форми повного диференціала

Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних $x$ та $y$, кожна з яких, в свою чергу, є функцією незалежної змінної $t$:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

тоді функція $f(x(t), y(t))$ є складеною функцією змінної $t$.

***Теорема.*** *Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовні в точці $t$, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційовна в точці $t$. Похідну цієї функції знаходять за формулою*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (13)$$

○ За умовою теореми

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де $\alpha \to 0$ та $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Поділимо $\Delta z$ на $\Delta t$ і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\alpha\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\beta\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\cdot\frac{dx}{dt} + 0\cdot\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \bullet$$

Аналогічно знаходять похідну, якщо число проміжних змінних більше двох. Наприклад, якщо $u = f(x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (14)$$

Зокрема, якщо $u = f(x, y, z)$, а $y = y(x)$, $z = z(x)$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

а оскільки $\frac{dx}{dx} = 1$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \qquad (15)$$

Цю формулу називають *формулою для обчислення повної похідної* $\left(\text{на відміну від частинної похідної } \frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

***Приклади***

1. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 - 3xy$, де $x = 2t$, $y = t^2$.

○ За формулою (13) дістанемо

$$\frac{dz}{dt} = (2x - 3y)\,2 - 3x2t = (4t - 3t^2)\,2 - 12t^2 = 8t - 18t^2.$$

Результат буде такий самий, коли попередньо підставити замість $x$ та $y$ їхні значення, а потім знайти звичайну похідну по $t$:

$$z = 4t^2 - 6t^3, \quad \frac{dz}{dt} = 8t - 18t^2. \; ●$$

2. Нехай $u = x^2 - xy + z^2$, де $y = 2x$, $z = x^3$.

○ За формулою (15) маємо:

$$\frac{du}{dx} = 2x - y - x2 + 3z^2 3x^2 = -2x + 9x^8.$$

Інший спосіб:

$$u = x^2 - 2x^2 + x^9 = -x^2 + x^9,$$

$$\frac{du}{dx} = -2x + 9x^8. \; ●$$

Розглянемо загальніший випадок. Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних $x$ та $y$, які, в свою чергу, залежать від змінних $u$, $v$: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, тоді функція $z = f(x(u, v), y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних $u$ та $v$, а змінні $x$ та $y$ — проміжні.

Аналогічно попередній теоремі доводиться таке твердження.

*Якщо функції $x\ (u,\ v)$ та $y\ (u,\ v)$ диференційовні в точці $M_1\ (u;\ v)$, а функція $z = f\ (x,\ y)$ диференційовна в точці $M_2\ (x\ (u,\ v);\ y\ (u,\ v))$, то складена функція $f\ (x\ (u,\ v),\ y\ (u,\ v))$ диференційовна в точці $M_1\ (u;\ v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами:*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (16)$$

Формули (16) можна узагальнити на випадок більшого числа змінних. Якщо $u = f\ (x,\ y,\ z)$, де

$$x = x\,(s_1,\ s_2,\ s_3),\quad y = y\,(s_1,\ s_2,\ s_3),\quad z = z\,(s_1,\ s_2,\ s_3),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial s_i} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s_i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s_i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_i},\quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

***Приклад***

Знайти $z'_u$ і $z'_v$, якщо $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

○ За формулами (16) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \ln y\ \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} v = \frac{u}{v^2}\,(1 + 2 \ln (uv)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \ln y \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y} u = \frac{u^2}{v^3}\,(1 - 2 \ln uv). \ \bullet$$

Знайдемо диференціал складеної функції. Скориставшись формулами (16), дістанемо

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Отже, диференціал функції $z = f\ (x,\ y)$, де $x = x\ (u,\ v)$, $y = y\ (u,\ v)$, визначається формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \qquad (17)$$

де

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,\quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Порівнявши формули (17) і (6), дійдемо висновку, що повний диференціал функції $z = f\ (x,\ y)$ має інваріантну (незмінну) форму незалежно від того, чи є $x$ та $y$ незалежними змінними, чи диференційовними функціями змінних $u$ та $v$. Проте формули (6) і (17) однакові лише за формою, а по суті різні, бо в формулі (6) $dx$ і $dy$ — диференціали незалежних змінних, а в формулі (17) $dx$ і $dy$ — повні диференціали функцій $x = x(u, v)$ та $y = y(u, v)$.

Диференціали вищих порядків властивості інваріантності не мають. Наприклад, якщо $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y. \quad (18)$$

Формула (18) відрізняється від формули (11), тому що для складеної функції диференціали $d^2x$ та $d^2y$ можуть і не дорівнювати нулю. Отже, для складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, формула (11) невірна.

### 2.5. Диференціювання неявної функції

Нехай задано рівняння

$$F(x, y) = 0, \quad (19)$$

де $F(x, y)$ — функція двох змінних.

Нагадаємо, що коли кожному значенню $x$ з деякої множини $D$ відповідає єдине значення $y$, яке разом з $x$ задовольняє рівняння (19), то кажуть, що це рівняння задає на множині $D$ неявну функцію $y = \varphi(x)$.

Таким чином, для неявної функції $y = \varphi(x)$, $x \in D$, заданої рівнянням (19), має місце тотожність

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in D.$$

Які ж умови має задовольняти функція $F(x, y)$, щоб рівняння (19) визначало неявну функцію і при тому єдину? Відповідь на це запитання дає така теорема існування неявної функції [27].

***Теорема.*** *Нехай функція $F(x, y)$ і її похідні $F'_x(x_0, y_0)$ та $F'_y(x, y)$ визначені та неперервні в якому-небудь околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$; тоді існує окіл точки $M_0$, в якому рівняння $F(x, y) = 0$ визначає єдину неявну функцію $y = \varphi(x)$, неперервну та диференційовну в околі точки $x_0$ і таку, що $\varphi(x_0) = y_0$.*

Знайдемо похідну неявної функції. Нехай ліва частина рівняння (19) задовольняє зазначені в теоремі умови, тоді це рівняння задає неявну функцію $y = y(x)$, для якої на деякій множині точок $x$ має місце тотожність $F(x, y(x)) \equiv 0$. Оскільки похідна функції, що тотожно дорівнює нулю, також дорівнює нулю, то повна похідна $\frac{dF}{dx} = 0$. Але за формулою (15) маємо $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, тому

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \text{ звідки}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \qquad (20)$$

За цією формулою знаходять похідну неявної функції однієї змінної. Нагадаємо, що похідну функції, заданої рівнянням (19), можна знаходити й іншим способом (гл. 4, п. 2.9).

***Приклад***

Знайти похідну $\frac{dy}{\partial x}$ функції $y$, заданої рівнянням

$$e^y - e^x + 2xy = 0.$$

○ Тут $F(x, y) = e^y - e^x + 2xy$, $F'_x = -e^x + 2y$, $F'_y = e^y + 2x$, отже за формулою (20) маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + 2y}{e^y + 2x} = \frac{e^x - 2y}{e^y + 2x}. \; ●$$

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (21)$$

Якщо кожній парі чисел $x$ та $y$ з деякої множини відповідає єдине значення $z$, яке разом з $x$ та $y$ задовольняє рівняння (21), то це рівняння задає неявну функцію $z = \varphi(x, y)$.

Справджується така теорема існування.

***Теорема.*** *Нехай функція $F(x, y, z)$ і її похідні $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ та $F'_z(x, y, z)$ визначені і неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, причому $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді існує окіл точки $M_0$, в якому рівняння (21) визначає єдину функцію $z = \varphi(x, y)$, неперервну і диференційовну в околі точки $(x_0; y_0)$ і таку, що $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.*

Знайдемо частинні похідні $z'_x$ і $z'_y$ неявної функції $z$ від $x$ та $y$, заданої рівнянням (21).

Коли визначаємо $z'_x$ (або $z'_y$), то змінну $y$ (або $x$) вважаємо сталою, тому за формулою (20)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \qquad (22)$$

Аналогічно знаходять похідні неявної функції $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка задається рівнянням $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad F'_y \neq 0.$$

*Приклад*

Знайти повний диференціал функції $z = \varphi(x, y)$, якщо

$$e^z - x^2y + z + 6 = 0.$$

○ Тут $F(x, y, z) = e^z - x^2y + z + 6$, $F'_x = -2xy$, $F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 1$.

Скориставшись формулами (22) і (6), дістанемо

$$z'_x = \frac{2xy}{e^z + 1}, \quad z'_y = \frac{x^2}{e^z + 1}; \quad dz = \frac{2xydx + x^2dy}{e^z + 1}. \ ●$$

**Завдання для самоконтролю**

1. Дати означення частинної похідної функції двох змінних по одній з них. З'ясувати її геометричний зміст?
2. Як визначають частинні похідні другого і третього порядку від функції двох змінних?
3. Сформулювати теорему про рівність других мішаних похідних.
4. Дати означення диференційовності функції $z = f(x, y)$.
5. Довести теорему про неперервність диференційовної функції.
6. Довести теорему про існування частинних похідних диференційовної функції.
7. Вивести достатні умови диференційовності функції двох змінних.
8. Дати означення повного диференціала функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження. Узагальнити цю формулу для функції $n$ змінних.
9. Як застосовується повний диференціал функції для наближеного обчислення її значень?
10. Вивести формули для максимальних абсолютної і відносної похибок функції двох змінних.
11. Як визначають диференціал $n$-го порядку?
12. Вивести формули для знаходження диференціала $d^3z$, якщо $z = f(x, y)$ — функція двох незалежних змінних. Записати формулу для знаходження диференціала $n$-го порядку цієї функції.
13. Як знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = f(x(t), y(t))$?
14. Що називається повною похідною?
15. Написати формулу для знаходження похідних $z'_x$ і $z'_y$, якщо $z = f(u, v, t)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $t = t(x, y)$.
16. У чому полягає інваріантність форми диференціала першого порядку? Чому цієї властивості не мають диференціали вищих порядків?
17. Сформулювати теореми існування неявних функцій однієї і двох змінних і вивести правила диференціювання цих функцій.
18. Знайти частинні похідні $z'_x$ та $z'_y$ в точці $M_0(1; 1)$, якщо $z = x^3 + y^3 - xy$.
19. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ задовольняє рівняння: $xz'_x + yz'_y = 2$.
20. Показати, що функція $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $2xz'_x + 2yz'_y = z$.
21. Маємо $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Переконатись, що $z''_{xy} = z''_{yx}$. В якому випадку ця рівність порушується?

**22.** Обчислити наближено за допомогою повного диференціала число $a = 1{,}04^{2{,}03}$.

**23.** Показати, що для функції $z = x^3 + y^2 + 3xy$ диференціал третього порядку $d^3z = 6\ (dx^3 + dy^3)$.

**24.** Нехай $z = u + v^2$, де $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln (x + y)$. Показати, що $z'_x - z'_y = 2x - \cos y$.

**25.** Нехай $u = \dfrac{e^{2x}(y - z)}{5}$, де $y = 2\sin x$, $z = \cos x$.

Показати, що повна похідна $\dfrac{du}{dx} = e^{2x} \sin x$.

**26.** Довести, що частинні похідні $z'_x$ і $z'_y$ неявної функції $z(x, y)$, яка задана рівнянням $z^2 + \dfrac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, задовольняють умову $x^2 z'_x + \dfrac{1}{y} z'_y = \dfrac{1}{z}$.

**Відповіді.** 18. $z'_x(1, 1) = z'_y(1, 1) = 2$. **22.** $a \approx 1{,}08$.

## § 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

### 3.1. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних

Нехай задано поверхню

$$F(x, y, z) = 0. \tag{23}$$

Точка $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці $M_0$, причому не всі частинні похідні в точці $M_0$ дорівнюють нулю, тобто

$$(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0.$$

Розглянемо довільну криву $L$, яка проходить через точку $M_0$, лежить на поверхні (23) і задається рівнянням

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

де точці $M_0$ відповідає параметр $t_0$.

Оскільки крива лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівняння (23):

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \tag{24}$$

Диференціюючи рівність (24), маємо

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \tag{25}$$

Ця рівність показує, що вектори (рис. 6.10)

$$\vec{n} = \{F'_x(M_0);\ F'_y(M_0);\ F'_z(M_0)\},\ \vec{s} = \{x'(t_0);\ y'(t_0);\ z'(t_0)\}$$

ортогональні, причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої $L$ у точці $M_0$ (гл. 5, п. 7.5).

Крім того, з рівності (25) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку $M_0$ і лежать на поверхні (23), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається *дотичною площиною до поверхні в точці* $M_0$.

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки ця площина проходить через точку $M_0$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, то її рівняння має вигляд (гл. 3, п. 4.1):

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \qquad (26)$$

*Нормаллю до поверхні в точці* $M_0$ називають пряму, що проходить через точку $M_0$ перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку $M_0$ і має напрямний вектор $\vec{n}$, то канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд (гл. 3, п. 3.1):

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (27)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z=f(x, y)$, то, поклавши $F(x, y, z)=f(x, y)-z=0$, дістанемо

$$F'_x(M_0)=f'_x(x_0, y_0),\ F'_y(M_0)=f'_x(x_0, y_0),\ F'_z(M_0)=-1,$$

тоді рівняння (26) і (27) наберуть вигляду

$$f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0; \qquad (28)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (29)$$

З'ясуємо геометричний зміст повного диференціала функції $z=f(x, y)$. Якщо в формулі (28) покласти $x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$, то ця формула запишеться у вигляді

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Права частина цієї рівності є повним диференціалом функції $z=f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$, тому $z-z_0=dz$.

Таким чином, повний диференціал функції двох змінних у точці $(x_0; y_0)$ дорівнює приросту аплікати точки на дотичній площині до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$, якщо від точки $(x_0; y_0)$ перейти до точки $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ (рис. 6.11).

*Зауваження 1.* Ми розглянули випадок, коли функція (19) диференційовна в точці $M_0$ і $(F'_x(M_0))^2+(F'_y(M_0))^2+(F'_z(M_0))^2\neq 0$.

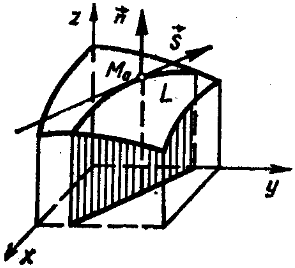



Рис. 6.10

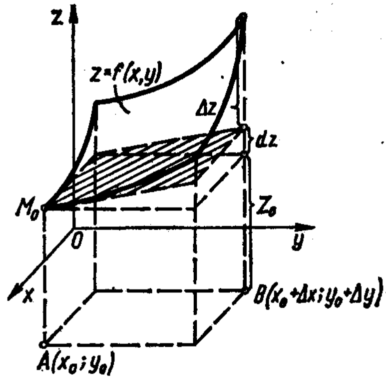



Рис. 6.11

Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають *особливою*), то дотична та нормаль в такій точці можуть не існувати.

*Зауваження* 2. Якщо поверхня (23) є поверхнею рівня для деякої функції $u = u(x, y, z)$, тобто $F(x, y, z) = u(x, y, z) - c = 0$, то вектор

$$\vec{n} = \{F'_x;\ F'_y;\ F'_z\} = \{u'_x;\ u'_y;\ u'_z\}$$

буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні рівня.

*Приклади*

1. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до еліпсоїда $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в точці $M_0(1;\ 2;\ 3)$.

○ Скористаємось рівняннями (26) і (27). Маємо

$$F(x, y, t) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 15;\ F'_x = 4x;\ F'_y = 2y;$$

$$F'_z = 2z;\ F'_x(M_0) = 4;\ F'_y(M_0) = 4,\ F'_z(M_0) = 6.$$

Отже, шукані рівняння нормалі та дотичної площини мають вигляд

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \text{ або } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3};$$

$$4(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \text{ або } 2x + 2y + 3z - 15 = 0. \ ●$$

2. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1;\ -2;\ 5)$.

○ Скористаємося формулами (28) та (29). Маємо

$$f(x, y) = x^2 + y^2;\ f'_x(x, y) = 2x;$$

$$f'_y(x, y) = 2y;\ f'_x(1,\ -2) = 2;\ f'_y(1,\ -2) = -4.$$

Звідси $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ — рівняння нормалі, $2x - 4y - z - 5 = 0$ — рівняння дотичної площини. ●

### 3.2. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт

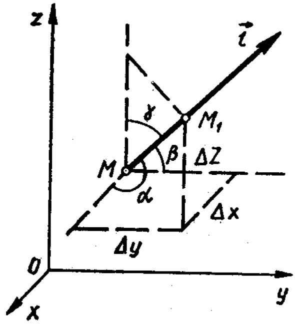


Рис. 6.12

Область простору, кожній точці $M$ якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u$ $(M)$, називають *скалярним полем*. Інакше кажучи, скалярне поле — це скалярна функція $u$ $(M)$ разом з областю її визначення.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Для того щоб задати скалярне поле, досить задати скалярну функцію $u$ $(M)$ точки $M$ і область її визначення.

Якщо функція $u$ $(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають *стаціонарним*, а скалярне поле, яке змінюється з часом,— *нестаціонарним*. Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Якщо в просторі ввести прямокутну систему координат $Oxy$, то точка $M$ в цій системі матиме певні координати $(x;\ y;\ z)$ і скалярне поле $u$ стане функцією цих координат:

$$u = u(M) = u(x, y, z).$$

Якщо скалярна функція $u$ $(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад $x$ і $y$, то відповідне скалярне поле $u$ $(x,\ y)$ називають *плоским;* якщо ж функція $u$ $(M)$ залежить від трьох змінних: $x$, $y$ і $z$, то скалярне поле $u$ $(x,\ y,\ z)$ називають *просторовим*.

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові — за допомогою поверхонь рівня (п. 1.1).

Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u$ $(x,\ y,\ z)$. Візьмемо в ньому точку $M$ $(x;\ y;\ z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис. 6.12).

На векторі $\vec{l}$ на відстані $\Delta l$ від його початку візьмемо точку $M_1$ $(x + \Delta x;\ y + \Delta y;\ z + \Delta z)$.
Тоді

$$\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Обчислимо тепер приріст $\Delta_l u$ функції $u$ $(x,\ y,\ z)$ при переході від точки $M$ до точки $M_1$ в напрямі вектора $\vec{l}$:

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то цю границю називають *похідною функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$* і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція $u(x, y, z)$ диференційовна в точці $M$. Тоді її повний приріст в цій точці можна записати так:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ — нескінченно малі функції при $\Delta l \to 0$.

Оскільки

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha,\ \Delta y = \Delta l \cos\beta,\ \Delta z = \Delta l \cos\gamma,$$

то

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma.$$

Перейшовши до границі при $\Delta l \to 0$, дістанемо формулу для обчислення похідної за напрямом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (30)$$

З формули (30) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо $\vec{l}$ збігається з одним із ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ або $\vec{k}$, то похідна за напрямом $\vec{l}$ збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подібно до того як частинні похідні $u'_x$, $u'_y$, $u'_z$ характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ показує швидкість зміни скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$.

Абсолютна величина похідної $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ відповідає значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $u(x, y, z)$ в напрямі $\vec{l}$ (зростання чи спадання).

Очевидно, що похідна за напрямом $\vec{l_1} = -\vec{l}$, який протилежний напряму $\vec{l}$, дорівнює похідній за напрямом $\vec{l}$, взятій з протилежним знаком.

Справді, при змінні напряму на протилежний кути $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ зміняться на $\pi$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha + \pi) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta + \pi) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma + \pi) = -\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напряму на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на характер зміни поля. Якщо, наприклад, в напрямі $\vec{l}$ поле зростає, то в напрямі $\vec{l_1} = -\vec{l}$ воно спадає, і навпаки.

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x, y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ цілком визначається кутом $\alpha = (\widehat{\vec{l}, Ox})$. Тому, поклавши в формулі (30) $\gamma = \frac{\pi}{2}$ та $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

***Приклад***

Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1; 2; -1)$ за напрямом від точки $A$ до точки $B(2; 4; -3)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі.

○ Знаходимо вектор $\vec{l} = \vec{AB}$ і його напрямні косинуси (гл. 2, п. 3.1):

$$\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Тепер обчислимо значення частинних похідних у точці $A$ і скористаємось формулою (30):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = (2x - 2z)\,|_A = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 2y\,|_A = 4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = -2x\,|_A = -2; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} - 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то задана функція в даному напрямі зростає. ●

Нехай задано поле $u = u(x, y, z)$ і точку $M(x; y; z)$. У якому напрямі $\vec{l}$ похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення і дається на основі поняття градієнта поля.

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають grad $u$. Отже,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{31}$$

Зв'язок між градієнтом і похідною в даній точці за довільним напрямом показує така теорема.

***Теорема.*** *Похідна функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{пр}_{\vec{l}}\operatorname{grad} u. \tag{32}$$

○ Нехай $\varphi$ — кут між градієнтом (31) і одиничним вектором $\vec{l^0} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ (рис. 6.13), тоді з властивостей скалярного добутку (гл. 2, п. 4.3) дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= (\operatorname{grad} u)\vec{l^0} = |\operatorname{grad} u|\cdot|\vec{l^0}|\cos\varphi =$$

$$= |\operatorname{grad} u|\cdot\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{l}}\operatorname{grad} u. \quad ●$$

Зазначимо деякі *властивості градієнта.*

1°. *Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, причому*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}. \tag{33}$$

Справді, з формули (32) випливає, що похідна за напрямом досягає максимального значення (33), якщо $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$, тобто якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта.

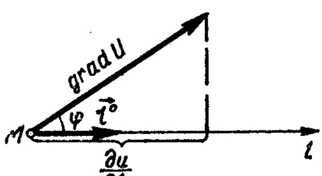


Рис. 6.13

Таким чином, *швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта.* Зрозуміло, що у напрямі, протилежному до напряму градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

2°. *Похідна за напрямом вектора, пер-*

*пендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.* Інакше кажучи, швидкість зміни поля у напрямі, перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю, тобто скалярне поле залишається сталим.

Справді, за формулою (32) $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3°. *Вектор-градієнт у кожній точці поля $u(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.* Це твердження випливає з того, що напрямний вектор нормалі до поверхні рівня $u = u(M_0)$, яка проходить через точку $M_0$, має координати (п. 3.1)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}.$$

4°. *Справедливі рівності:*

$$\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v;$$

$$\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u, \quad C = \text{const};$$

$$\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u;$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2};$$

$$\operatorname{grad} f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u.$$

○ Доведемо, наприклад, третю рівність. Маємо:

$$\operatorname{grad}(uv) = \frac{\partial}{\partial x}(uv)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(uv)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} u\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} v + \frac{\partial v}{\partial z} u\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right) u = v \operatorname{grad} u +$$

$$+ u \operatorname{grad} v.$$

Решта рівностей доводяться аналогічно. ●

**Приклади**

1. Знайти значення і напрям градієнта функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці $M_0(0;\ 1;\ 2)$.

○ Знайдемо частинні похідні в точці $M_0$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (2x - 2yz)\,|_{M_0} = -4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2y - 2xz)\,|_{M_0} = 2; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2z - 2xy)\,|_{M_0} = 4.$$

За формулою (81) маємо

$$\operatorname{grad} u\,|_{M_0} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Отже,

$$|\operatorname{grad} u|_{M_0} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = 6; \quad \cos\alpha = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{1}{3},$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{3}. \ \bullet$$

**2.** Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = x^y - z$ в точці $M_0$ (1; 2; 3).

○ Маємо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = yx^{y-1}|_{M_0} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = x^y \ln x|_{M_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -1; \quad \operatorname{grad} u|_{M_0} = 2\vec{i} - \vec{k}.$$

Найбільшу швидкість зростання поля знаходимо за формулою (33)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |2\vec{i} - \vec{k}| = \sqrt{5}. \ \bullet$$

## 3.3. Формула Тейлора для функції двох змінних

Як відомо (гл. 5, п. 5.4), якщо функція однієї змінної $F(t)$ має на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то справджується формула Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}, \quad (34)$$

$$0 < \theta < 1, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Нехай $t - t_0 = \Delta t = dt$, $F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0)$, тоді

$$F^{(i)}(t_0)(t - t_0)^i = F^{(i)}(t_0)(\Delta t)^i = F^{(i)}(t_0)\,dt^i = d^i F(t_0), \quad i \in N,$$

тому формулу (34) можна записати у вигляді

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{d^2F(t_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nF(t_0)}{n!} +$$

$$+ \frac{d^{n+1}F(t_0 + \theta\Delta t)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (35)$$

В аналогічному вигляді формулу Тейлора можна дістати і для функції багатьох змінних. Розглянемо функцію двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ в області $D$ має неперервні частинні похідні до $n+1$-го порядку включно. Візьмемо дві точки $M_0(x_0; y_0)$ та $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ такі, щоб відрізок $M_0M_1$ належав області $D$.

Введемо нову змінну $t$:

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{36}$$

При $t = 0$ за цими формулами дістанемо координати точки $M_0$, а при $t = 1$ — координати точки $M_1$. Якщо $t$ змінюватиметься на відрізку $[0;\ 1]$, то точка $M\ (x_0 + t\Delta x;\ y_0 + t\Delta y)$ опише весь відрізок $M_0M_1$. Тоді вздовж цього відрізка функція буде функцією однієї змінної $t$:

$$f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x;\ y_0 + t\Delta y) = F(t). \tag{37}$$

Запишемо формулу (35) для функції (37) при $t = 0$, $\Delta t = 1$:

$$\Delta F(0) = dF(0) + \frac{d^2F(0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nF(0)}{n!} + \frac{d^{n+1}F(\theta)}{(n+1)!}. \tag{38}$$

Обчислимо диференціали, що входять у формулу (38). З рівностей (36) і (37) маємо

$$dF(t) = df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy = f'_x(x, y)\,\Delta x dt + {}$$
$$+ f'_y(x, y)\,\Delta y dt.$$

Оскільки $dt = \Delta t = 1$, то

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y = df(x_0, y_0). \tag{39}$$

Аналогічно

$$d^2F(t) = d^2f(x, y) = f''_{xx}(x, y)\,dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)\,dxdy + f''_{yy}(x, y)\,dy^2,$$

$$d^2F(0) = \left(\frac{d}{dx}\,\Delta x + \frac{d}{dy}\,\Delta y\right)^2 f(x_0, y_0) = d^2f(x_0, y_0). \tag{40}$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо

$$\begin{gathered} d^3F(0) + d^3f(x_0, y_0), \ \ldots, \ d^nF(0) = d^nf(x_0, y_0), \\ d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y). \end{gathered} \tag{41}$$

Крім того, приріст

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = f(M_1) - f(M_0) = \Delta f(x_0, y_0). \tag{42}$$

Підставивши вирази (39—42) у формулу (36), дістанемо

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1}, \tag{43}$$

$$R_{n+1} = \frac{d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{44}$$

Формулу (43) називають *формулою Тейлора для функції двох змінних з залишковим членом* $R_{n+1}$ *у формі Лагранжа*. Цю формулу

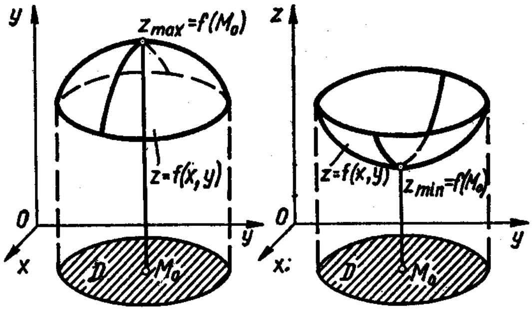


Рис. 6.14

використовують для наближених обчислень. Для різних значень $n$ з формули (43) можна дістати рівності для наближеного обчислення значень функції $f(x, y)$. Абсолютну похибку цих наближених рівностей оцінюють через залишковий член (44).

Формула Тейлора (43) для функції двох змінних нагадує формулу Тейлора (35) для функції однієї змінної. Але насправді, якщо розкрити вирази для диференціалів у формулі (43), то дістанемо складнішу формулу, ніж для функції однієї змінної. Наприклад, при $n = 1$ формула (43) має вигляд:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) = f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2]. \tag{45}$$

### 3.4. Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D$, а точка $M_0(x_0;\ y_0) \in D$. Якщо існує окіл точки $M_0$, який належить області $D$ і для всіх відмінних від $M_0$ точок $M$ цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$, то точку $M_0$ називають *точкою локального максимуму (мінімуму) функції* $f(x, y)$, а число $f(M_0)$ — *локальним максимумом (мінімумом)* цієї функції (рис. 6.14). Точки максимуму та мінімуму функції називають її *точками екстремуму*.

Це означення можна перефразувати так. Покладемо $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, тоді

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) = \Delta f(x_0,\ y_0).$$

Якщо приріст функції $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ $(\Delta f(x_0, y_0) > 0)$ при всіх достатньо малих за абсолютною величиною приростах $\Delta x$ і $\Delta y$, то функція $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ досягає локального максимуму $z_{\max} = f(x_0, y_0)$ (локального мінімуму $z_{\min} = f(x_0, y_0)$). Інакше кажучи, в околі екстремальної точки прирости функції мають один і той самий знак.

***Теорема 1** (необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $(x_0;\ y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних $x$ та $y$ дорівнюють нулю або не існують.*

○ Нехай $(x_0; y_0)$ — точка екстремуму. Тоді функція $f(x, y_0)$ буде функцією однієї змінної. Ця функція має екстремум у точці $x = x_0$, тому її похідна $f'_x(x_0, y_0)$ дорівнює нулю або не існує (гл. 5, п. 6.2).

Аналогічно, розглянувши функцію $f(x_0, y)$, дістанемо, що $f'_y(x_0, y_0)$ дорівнює нулю або не існує. ●

Подібна теорема справедлива для функції $n$ змінних. Точку $(x_0; y_0)$, в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x, y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x = f'_y = 0$, називають *стаціонарною точкою функції* $f(x, y)$.

Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками*.

Таким чином, якщо функція в якій-небудь точці досягає екстремуму, то це може статися лише в критичній точці. Проте не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 1 встановлює лише необхідні, але не достатні умови екстремуму. Наприклад, частинні похідні функції $z = x^2 - y^2$ (рис. 3.71) дорівнюють нулю в точці (0; 0). Але ця функція у вказаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки (0; 0) вона набуває як додатних (при $|x| > |y|$), так і від'ємних (при $|x| < |y|$) значень.

Слід зазначити, що в задачах з практичним змістом, як правило, відомо, що функція має екстремум. Якщо така функція має лише одну критичну точку, то ця точка і буде точкою екстремуму.

***Приклад***

Відкритий прямокутний басейн повинен мати об'єм $V$. Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

○ Нехай $x$ — довжина, $y$ — ширина, $z$ — висота басейну, тоді $V = xyz$, звідки $z = \dfrac{V}{xy}$.

Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну, визначається формулою

$$S = xy + 2yz + 2xz$$

або

$$S = S(x, y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Треба знайти мінімум функції $S(x, y)$, якщо $x > 0$, $y > 0$. Знайдемо стаціонарні точки функції $S(x, y)$. Маємо

$$S'_x(x, y) = y - \frac{2V}{x^2}, \quad S'_y(x, y) = x - \frac{2V}{y^2};$$

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0; \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0; \end{cases} \quad x = y = \sqrt[3]{2V}.$$

Отже, функція $S(x, y)$ має тільки одну стаціонарну точку $M(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V})$, яка і є її точкою мінімуму, бо, згідно з умовою задачі, мінімум функції $S(x, y)$ існує. Обчисливши відповідне значення $z$, дістанемо

$$z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}.$$

Таким чином, басейн повинен мати висоту, рівну $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, і квадратну основу із стороною, рівною $\sqrt[3]{2V}$. ●

**Теорема 2** *(достатні умови екстремуму). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$ і деякому її околі функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Якщо*

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

*то функція $f(x, y)$ має в точці $M_0$ екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точці $M_0$ функція $f(x, y)$ екстремуму не має.*

○ Запишемо формулу Тейлора (45) для функції $f(x, y)$ в околі стаціонарної точки $M_0$. Враховуючи, що $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, дістанемо:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2], \quad 0 < \theta < 1.$$

У випадку мінімуму для довільних достатньо малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ права частина цієї рівності повинна бути додатною, а у випадку максимуму — від'ємною.

Внаслідок неперервності других частинних похідних для цього достатньо, щоб диференціал другого порядку в точці $M_0$

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, x_0)\Delta y^2$$

зберігав знак для малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$.

Введемо такі позначення: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, тоді $\Delta(x_0, y_0) = AC - B^2$.

Нехай $\varphi$ — кут між відрізком $M_0M = \rho$, де $M$ — точка з координатами $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і віссю $Ox$; тоді $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, тому при $A \neq 0$ маємо

$$d^2 f(M_0) = A\rho^2\cos^2\varphi + 2B\rho^2\sin\varphi\cos\varphi + C\rho^2\sin^2\varphi =$$
$$= \frac{\rho^2}{A}[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi] =$$
$$= \frac{\rho^2}{A}[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + \Delta(x_0, y_0)\sin^2\varphi].$$

Розглянемо тепер п'ять можливих випадків.

1) Нехай $\Delta(x_0, y_0) > 0$ і $A < 0$, тоді $d^2f(M_0) < 0$, тому при досить малих значеннях $\rho$ приріст $\Delta f(x_0, y_0) < 0$, тобто функція $f(x, y)$ має в точці $M_0$ максимум.

2) Аналогічно доводимо, що коли $\Delta(x_0, y_0) > 0$ і $A > 0$, то функція $f(x, y)$ в точці $M_0$ має мінімум.

3) Нехай $\Delta(x_0, y_0) < 0$ і $A > 0$. Якщо з точки $M_0$ рухатись вздовж променя $\varphi = 0$, то $d^2f(M_0) = \rho^2 A > 0$. Якщо взяти $\varphi = \varphi_1$ таким, щоб $A\cos\varphi_1 + B\sin\varphi_1 = 0$ або $\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{B}{A}$, то

$$d^2f(M_0) = \frac{\rho^2}{A}\Delta(x_0, y_0)\sin^2\varphi_1 < 0.$$

Отже, при малих значеннях $\rho$ приріст $\Delta f(x_0, y_0)$ в околі точки $M_0$ не зберігає знак, тому ця точка не є точкою екстремуму функції $f(x, y)$.

4) Аналогічно встановлюємо, що коли $\Delta(x_0, y_0) < 0$ і $A < 0$, то функція $f(x, y)$ в точці $M_0$ також не має екстремуму.

5) Нехай $\Delta(x_0, y_0) = AC - B^2 < 0$ і $A = 0$, тоді $B \neq 0$ і

$$d^2f(M_0) = \rho^2 \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi).$$

При досить малих кутах $\varphi$ знак величини $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ збігається із знаком $B$, тому знак величини $d^2f(M_0)$ залежатиме від знака множника $\sin\varphi$. Але знак величини $\sin\varphi$ змінюється при $\varphi > 0$ і $\varphi < 0$, бо $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$. Отже, в достатньо малому околі точки $M_0$ знак $\Delta f(x_0, y_0)$ не зберігається, тобто функція $f(x, y)$ в цій точці екстремуму не має. ●

*Зауваження.* З доведення теореми 2 випливають так звані *другі достатні умови екстремуму:* функція $f(x, y)$ має мінімум в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо диференціал другого порядку в цій точці $d^2f(M_0) > 0$, і максимум — якщо $d^2f(M_0) < 0$.

Можна довести, що другі достатні умови екстремуму справедливі для функцій довільного числа змінних.

На основі теорем 1 і 2 дістанемо правило дослідження диференційовних функцій двох змінних на екстремум. Щоб знайти екстремум диференційовної функції $z = f(x, y)$, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0; \end{cases}$$

2) у кожній стаціонарній точці $(x_0; y_0)$ обчислити вираз

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2;$$

якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то $(x_0; y_0)$ — точка екстремуму функції, причому точка максимуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$; якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка $(x_0; y_0)$ не є точкою екстремуму функції;

3) обчислити значення функції $f(x, y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

*Приклад*

Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

○ Знаходимо частинні похідні

$$z'_x = 4(x^3 - x + y), \quad z'_y = 4(y^3 + x - y).$$

Стаціонарні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, знайдемо $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$.

Підставляючи $y = -x$ в перше рівняння, дістанемо $x^3 - 2x = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, тоді

$$y_1 = 0, \; y_2 = -\sqrt{2}, \quad y_3 = \sqrt{2}.$$

Отже, функція має три стаціонарні точки:

$$M_1(0; 0), \quad M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), \; M_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

Знайдемо величину $\Delta(x, y)$. Оскільки

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4, \; f''_{xy}(x, y) = 4, \; f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4,$$

то

$$\Delta(x, y) = 16(9x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2).$$

Обчислимо величину $\Delta(x, y)$ в кожній стаціонарній точці:

$$\Delta(M_1) = 0, \; \Delta(M_2) = \Delta(M_3) = 384 > 0, \quad f''_{xx}(M_2) = f''_{xx}(M_3) = 20 > 0.$$

Таким чином, точки $M_2$ та $M_3$ — точки мінімуму. В цих точках $z_{\min} = -8$.

У точці $M_1$ значення $\Delta(M_1) = 0$, тому теорему 2 застосувати не можна. Переконаємось, що в цій точці екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ в околі точки $M_1$. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Отже, в околі точки $M_1$ значення $z$ можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка $M_1$ не є екстремальною. Відзначимо, що інших екстремумів задана функція не має, оскільки точки, в яких похідні $z'_x$ і $z'_y$ не існують, відсутні.

## 3.5. Найбільше та найменше значення функції

Відомо, що функція $z = f(x, y)$ задана і неперервна в замкненій та обмеженій області $D$, досягає в цій області найбільшого і найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області $D$, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, і обчислити значення функції в цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області $D$. Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної (гл. 5, п. 6.3). Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше і найменше значення.

Зазначимо, що загального методу знаходження найбільшого та найменшого значень для довільної неперервної функції в замкненій та обмеженій області $D$ немає.

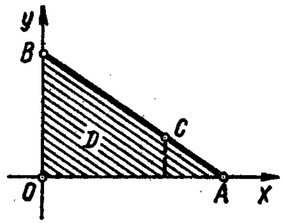


Рис. 6.15

*Приклади*

1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y(2 - x - y)$ в замкненій області $D$, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ (рис. 6.15).

○ Знаходимо стаціонарні точки. Маємо

$$z'_x = xy(4 - 3x - 2y), \quad z'_y = x^2(2 - x - 2y).$$

Прирівнюючи похідні до нуля і скорочуючи їх на $xy$ та $x^2$ (всередині трикутника $OAB$ $x \neq 0$, $y \neq 0$), дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0; \\ 2 - x - 2y = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $y = 1/2$.

Стаціонарна точка $M(1; 1/2)$ належить області $D$, тому обчислюємо значення $z(M) = 1/4$.

Рівняннями сторін $OB$ та $OA$ трикутника є $x = 0$ та $y = 0$, тому значення функції $z = 0$ в усіх точках відрізків $OB$ і $OA$, зокрема $z(0) = z(A) = z(B) = 0$.

Знайдемо стаціонарні точки на стороні $AB$ трикутника $OAB$. Рівняння цієї сторони $y = 6 - x$, тому $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$.

Далі дістанемо

$$z'_x = -48x + 12x^2 = 0,$$

звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Оскільки $y = 6 - x$, то $y_1 = 6$, $y_2 = 2$.

Знаходимо точки $B(0; 6)$ і $C(4; 2)$ і обчислюємо значення $z(C) = -128$.

Порівнюючи значення заданої функції в точках $A$, $B$, $C$, $O$, $M$, знаходимо найбільше та найменше значення:

$$\max_{(x,y)\in D} z = \frac{1}{4}, \quad \min_{(x,y)\in D} z = -128. \ \bullet$$

2. (*Задача про екстракцію оцтової кислоти з розбавленого бензолом водяного розчину*). Загальний об'єм бензолу $V$ ділиться на три частини: $V_1$, $V_2$, $V_3$ для трьох послідовних екстрагувань кислоти з водяного шару. За яких умов відбудеться максимальне вилучення кислоти при екстракції?

○ Екстракція (від лат. extraho — витягую, вилучаю) — це розділення суміші речовин за допомогою розчинника, в якому складові частини суміші розчиняються неоднаково. Її застосовують для одержання чистих речовин в хімічній, а найчастіше в харчовій (головним чином у цукровій) промисловості.

Нехай $x_0$ — початкова концентрація оцтової кислоти в об'ємі $a$ водяного шару. Вважатимемо, що при перемішуванні об'єм не змінюється і після кожної екстракції справджується закон розподілу $y = kx$, тобто $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $y_3 = kx_3$, де $x$ — концентрація кислоти у водяному розчині; $k$ — коефіцієнт розподілу; $y$ — концентрація кислоти в бензолі, а індекси 1, 2, 3 показують порядковий номер екстракції.

З матеріального балансу для першої екстракції дістанемо

$$ax_0 = V_1 y_1 + ax_1 = V_1 k x_1 + ax_1,$$

звідки

$$x_1 = \frac{ax_0}{a + V_1 k};$$

аналогічно для другої і третьої екстракцій відповідно маємо

$$x_2 = \frac{ax_1}{a + V_2 k} = \frac{a^2 x_0}{(a + V_1 k)(a + V_2 k)};$$

$$x_3 = \frac{ax_2}{a + V_3 k} = \frac{a^3 x_0}{(a + V_1 k)(a + V_2 k)(a + V_3 k)}.$$

Вилучення кислоти для заданої кількості бензолу максимальне при мінімальному значенні $x_3$. Оскільки $a^3 x_0$ — стала величина, то $x_3$ буде мінімальним, якщо знаменник $u(V_1, V_2, V_3) = (a + V_1 k)(a + V_2 k)(a + V_3 k)$ буде максимальним за умови, що $V_1 + V_2 + V_3 = V$.

Виключивши змінну $V_3$, дістанемо задачу на знаходження екстремуму функції двох змінних:

$$u(V_1, V_2) = (a + V_1 k)(a + V_2 k)(a + Vk - V_1 k - V_2 k).$$

Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial V_1} = k(a + V_2 k)[(a + Vk - V_1 k - V_2 k) - (a + V_1 k)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial V_2} = k(a + V_1 k)[a + Vk - V_1 k - V_2 k) - (a + V_2 k)],$$

то із системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial V_1} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial V_2} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} k^2 (a + V_2 k)(V - 2V_1 - V_2) = 0, \\ k^2 (a + V_1 k)(V - V_1 - 2V_2) = 0 \end{cases}$$

маємо $V_1 = V_2 = \frac{V}{3}$, тобто функція $u(V_1, V_2)$ має тільки одну стаціонарну точку $\left(\frac{V}{3}; \frac{V}{3}\right)$, яка і є її точкою максимуму, бо згідно з умовою задачі максимум функції $u(V_1, V_2)$ існує. Обчисливши значення $V_3 = V - V_1 - V_2 = \frac{V}{3}$, бачимо, що $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V}{3}$. За таких умов відбудеться максимальне вилучення оцтової кислоти.

Можна показати, що знайдений результат є загальним: для максимального вилучення речовин при екстракції треба користуватись рівними кількостями розчинника у вигляді окремих порцій незалежно від того, на скільки частин розділена загальна кількість розчинника $V$. ●

### 3.6. Умовний екстремум

Нехай в області $D$ задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію $L$, яка визначається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить в цій області.

Задача полягає в тому, щоб на лінії $L$ знайти таку точку $M(x; y)$, в якій значення функції $f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках лінії $L$. Такі точки $M$ називають *точками умовного екстремуму функції* $f(x, y)$ на лінії $L$. На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області $D$ (чи $\delta$-околу точки $M$), а лише в точках, які лежать на лінії $L$.

Назва «умовний екстремум» пов'язана з тим, що змінні $x$ та $y$ мають додаткову умову: $\varphi(x, y) = 0$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається *рівнянням зв'язку;* якщо це рівняння можна розв'язати відносно однієї змінної, наприклад $y$: $y = \psi(x)$, то, підставляючи замість $y$ значення $\psi(x)$ у функцію $z = f(x, y)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$. Оскільки додаткова умова врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної (гл. 5, п. 6.2).

Проте не завжди можна розв'язати рівняння зв'язку відносно $y$ чи $x$. Тоді розв'язують поставлену задачу так.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, де $y = \psi(x)$, як складену функцію (гл. 4, п. 2.4). З необхідної умови екстремуму випливає, що в точках екстремуму

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (46)$$

У цьому випадку $\frac{dy}{dx}$ означає похідну неявної функції $y$, заданої рівняннями зв'язку $\varphi(x, y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}, \text{ тому } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) = 0,$$

тобто

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}.$$

Позначивши останні відношення через $(-\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ (знак мінус взято для зручності, а саме число $\lambda$ може мати довільний знак), знайдемо, що в точці умовного екстремуму виконуються умови

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda, \text{ тобто } f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0.$$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму мають задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ звелось до знаходження звичайного екстремуму функції

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \tag{48}$$

Функція (48) називається *функцією Лагранжа*, а число $\lambda$ — *множником Лагранжа.*

Умови (47) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. З теореми 2 (п. 3.4) випливає, що характер умовного екстремуму (достатні умови) можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо в стаціонарній точці $d^2F > 0$ ($d^2F < 0$), то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

Для функції $u = f(x, y, z)$ з рівняннями зв'язку $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$ функція Лагранжа записується у вигляді

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2(x, y, z).$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0; \\ \varphi_2(x, y, z) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

а достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала $d^2\Phi$.

Розглянутий метод можна поширити на дослідження умовного екстремуму функції довільного числа змінних.

*Приклад*

Знайти найбільше значення функції $z = xy$, якщо $x$ та $y$ додатні і задовольняють рівняння зв'язку

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

⊙ Складаємо функцію Лагранжа (48):

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right).$$

Користуючись системою (47), знаходимо стаціонарні точки цієї функції:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0; \\ y + \lambda \frac{x}{4} = 0; \\ x + \lambda y = 0; \\ x > 0, \quad y > 0, \end{cases}$$

звідки $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -2$. Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(2;\ 1;\ -2)$. Щоб визначити характер умовного екстремуму в цій точці, знайдемо за допомогою формули (18) другий диференціал функції Лагранжа при $\lambda = -2$:

$$d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dxdy - 2dy^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)d^2x + (x - 2y)\,d^2y.$$

Знайшовши з рівняння зв'язку $dy\,(2;\ 1) = -\frac{1}{2}dx$, дістанемо

$$d^2F(M) = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) - 2\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = -2dx^2 < 0,$$

тому точка $(2;\ 1)$ є точкою умовного максимуму функції $z = xy$. При цьому $z_{max} = 2$.

Цей результат легко перевірити, знайшовши звичайний екстремум функції:

$$z = x\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}. \ \bullet$$

## Завдання для самоконтролю

1. Вивести рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$.
2. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних.
3. Що називається скалярним полем? Дати приклади.
4. Вивести формулу для похідної за напрямом.
5. У чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?
6. Дати означення градієнта скалярного поля. Довести теорему про зв'язок градієнта і похідної за напрямом.
7. Сформулювати і довести властивості градієнта.

**8.** Написати формулу Тейлора для функції двох змінних, користуючись диференціалами вищих порядків. Розкрити зміст формули при $n = 0, 1, 2$.

**9.** Дати визначення точки локального екстремуму.

**10.** Сформулювати і довести теорему про необхідні умови локального екстремуму функції кількох змінних.

**11.** Сформулювати і довести теорему про достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.

**12.** Дати означення і описати спосіб знаходження умовного екстремуму.

**13.** У якому випадку задачу на умовний екстремум можна звести до задачі на звичайний екстремум?

**14.** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі в точці (1; 2; 1) до однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$.

**15.** Знайти похідну функції $u = y^2z - 2xyz + z^2$ в точці (3; 1; 1) за напрямом вектора, який утворює з координатними осями кути $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

**16.** Знайти похідну функції $z = \ln (x^2 + y^2)$ в точці $M$ (3; 4) за напрямом градієнта функції в цій точці.

**17.** Знайти екстремуми функції $z = x^3y^2 (1 - x - y)$.

**18.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x + y$ в крузі $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

**19.** Знайти умовний екстремум функції $z = xy$, якщо $y + x^2 - 3 = 0$. Розв'язати задачу двома способами: за допомогою функції Лагранжа і як задачу на звичайний екстремум функції однієї змінної.

*Відповіді.* **14.** $x + 4y - 4z - 5 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{4}$. **15.** $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{5 + 4\sqrt{2}}{2}$. **16.** $\frac{2}{5}$. **17.** $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}$. **18.** $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. *Вказівка.* При знаходженні стаціонарних точок на межі області скористатись параметричними рівняннями кола. **19.** $z_{\max} = 2$, $z_{\min} = -2$.

## Глава 7

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Інтеграл — одне з центральних понять математичного аналізу і всієї математики. Воно виникло у зв'язку з двома основними задачами: 1) про відновлення функції по заданій її похідній; 2) про обчислення площі, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю $Ox$ (подібні задачі дістаємо при обчисленні багатьох інших величин, наприклад роботи, яку виконує сила протягом деякого часу, тощо). Термін «інтеграл» ввів Я. Бернуллі у 1690 р. Цікаво, що в історії математики цей термін пов'язують з двома латинськими словами: integro — відновляти та integer — цілий.

Вказані дві задачі приводять до двох пов'язаних між собою видів інтегралів: невизначеного і визначеного. Вивчення властивостей і обчислення цих інтегралів і складають основну задачу інтегрального числення.

Елементи інтегрального числення закладено у працях математиків Стародавньої Греції. Основні поняття і початки теорії інтегрального числення, насамперед зв'язок його з диференціальним численням, а також застосування їх до розв'язування практичних задач, розроблені в кінці 17 ст. Ньютоном і Лейбніцем. Далі історичний розвиток інтегрального числення пов'язаний з іменами Л. Ейлера, О. Коші, Б. Рімана та інших вчених.

## § 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Одне з можливих фізичних трактувань цієї задачі — визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за час руху. З практичної точки зору природною є обернена задача, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Більш формально, остання задача є знаходженням функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$. Розв'язується ця задача за допомогою невизначеного інтеграла.

### 1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, якщо $F(x)$ диференційовна на $\langle a;\ b\rangle$ і $F'(x) = f(x)$, $x \in \langle a;\ b\rangle$.

Наприклад: 1) первісною функції $f(x) = x^2$, $x \in R$ є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ $\left(\text{справді, } F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2,\quad x \in R\right)$; очевидно, що первісними будуть також функції $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$ і взагалі $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де $C$ — довільна стала, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2,\quad x \in R$;

2) функція $f(x) = \cos x$, $x \in R$ має первісну функцію $F(x) = \sin x + C$, бо $F'(x) = (\sin x + C)' = \cos x$, $x \in R$.

Розглянуті приклади показують, що задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно. Інакше кажучи, якщо для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, то ця первісна не одна. Виникає запитання: як знайти всі первісні даної функції, якщо відома хоча б одна з них? Відповідь дає така теорема.

***Теорема.*** *Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляд $F(x) + C$.*

○ Нехай $\Phi(x)$ — деяка інша, крім $F(x)$, первісна функції $f(x)$, тобто $\Phi'(x) = f(x)$, $x \in \langle a;\ b\rangle$. Маємо

$$\forall x \in \langle a;\ b\rangle : [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

а це означає (гл. 5, п. 5.2, прикл. 4), що $\Phi(x) - F(x) = C$. Отже, $\Phi(x) = F(x) + C$. ●

З цієї теореми випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, а $C$ — довільна стала, визначає всю сукупність первісних заданої функції.

Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і $C$ — довільна стала, то вираз $F(x) + C$ називається *невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)\,dx$. Таким чином, символ $\int f(x)\,dx$ означає множину всіх первісних функції $f(x)$.

Знак $\int$, який ввів Лейбніц, називається *інтегралом*, $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, $f(x)$ — підінтегральною функцією, $x$ — змінною інтегрування. Отже, за означенням,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ якщо } F'(x) = f(x), \quad x \in \langle a;\ b\rangle. \tag{1}$$

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегруванням цієї функції.

З погляду геометрії невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається *інтегральною кривою* і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі уздовж осі $Oy$ (рис. 7.1). Щоб з цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0)$ в якій-небудь точці $x_0 \in \langle a;\ b\rangle$.

З рівностей (1) випливають такі *властивості невизначеного інтеграла*.

1°. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Інакше кажучи, знаки похідної і невизначеного інтеграла взаємно знищуються. Це природно, бо операції диференціювання та інтегрування — взаємно обернені. Внаслідок цього правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням. Наприклад,

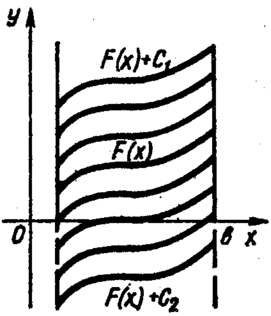


Рис. 7.1

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C,$$

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2} + C\right)' = \sin 2x;$$

$$\int e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} + C, \ (3e^{\frac{x}{3}} + C)' = e^{\frac{x}{3}};$$

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C, \ \left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right)' = 2^x.$$

**2°.** *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:*

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

**3°.** *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx.$$

**4°.** *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:*

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

**5°.** *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Властивості 4° і 5° перевіряються диференціюванням на основі властивості 1°. Властивість 5° справедлива для довільного скінченного числа доданків.

**6°.** *Якщо*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

*і* $u = \varphi(x)$ *— довільна функція, що має неперервну похідну, то*

$$\int f(u)\,du = F(u) + C. \tag{2}$$

○ Внаслідок інваріантності форми першого диференціала (гл. 5, п. 3.2) і властивості 2° маємо

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du;$$

$$\int f(u)\,du = \int dF(u) = F(u) + C. \quad ●$$

Ця властивість (її називають інваріантністю формули інтегрування) дуже важлива. Вона означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну. Таким чином, кількість інтегралів, які обчислюються (або, як кажуть, «беруться»), необмежено збільшується. Наприклад, $\int x^2dx = \frac{x^3}{2} + C$, оскільки $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

Користуючись інваріантністю цієї формули, одержимо формулу $\int u^2du = \frac{u^3}{2} + C$, де $u = \varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема:

$$\int (\sin^2 x)\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

тобто

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C,$$

тобто

$$\int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C;$$

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

тобто

$$\int \ln^2 x \frac{dx}{x} = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Природно, виникає запитання: чи для всякої функції існує невизначений інтеграл? Негативну відповідь на це запитання дає такий приклад: нехай

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Покажемо, що функція $f(x)$ на проміжку $(-1;\ 1)$ не має первісної. Припустимо протилежне. Нехай існує така функція $F(x)$, що $\forall x \in (-1;\ 1)$: $F'(x) = f(x)$. Тоді з теореми Лагранжа на відрізку $[0;\ x]$, $0 < x < 1$, випливає, що

$$\exists c \in (0;\ x) : F(x) - F(0) = F'(c)\, x = f(c)\, x = x \Rightarrow F'_+(0) = 1$$

($F'_+(0)$ — права похідна функції $F(x)$ в точці $x = 0$). Але $F'_+(0) = F'(0) = 0$. Одержане протиріччя означає, що задана функція первісної не має.

Цей приклад показує, що потрібна теорема, яка б гарантувала існування невизначеного інтеграла.

В п. 2.4 буде доведено, що всяка неперервна на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ функція має на цьому проміжку первісну. У зв'язку з цим надалі вважатимемо, що підінтегральна функція розглядається лише на тих проміжках, де вона неперервна.

## 1.2. Таблиця основних інтегралів

Частина формул таблиці основних інтегралів безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, оберненої до операції диференціювання, таблиці похідних і формули (2). Справедливість інших формул можна перевірити диференціюванням.

Інтеграли цієї таблиці називаються табличними. Їх треба знати напам'ять з двох причин. По-перше, мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести (перетворити) шуканий інтеграл до табличного. Отже, табличний інтеграл треба вміти розпізнавати. По-друге, як зазначено в кінці попереднього пункту, внаслідок інваріантності кожен табличний інтеграл «породжує» безліч інтегралів, що легко обчислюються на основі табличного.

Нехай $u = u(x)$ — довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$; тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
3. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C.$
4. $\int e^{u} du = e^{u} + C.$
5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
6. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$
7. $\int \cos u du = \sin u + C.$
8. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$
9. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$
10. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
12. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$
13. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
14. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$
15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln|u+\sqrt{u^2+A}| + C.$

19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$

20. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{u^2+A}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \frac{A}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+A}| + C.$

### 1.3. Основні методи інтегрування

Операція інтегрування значно складніша, ніж операція диференціювання. У диференціальному численні таблиця похідних і правила диференціювання функцій дають змогу знайти похідну довільної диференційовної функції. В інтегральному численні таких простих і універсальних правил інтегрування не існує. Відсутнє, наприклад, загальне правило інтегрування добутку двох функцій, навіть якщо первісні кожної з них відомі. Те саме стосується частки двох функцій і складеної функції. Інтегрування вимагає, так би мовити, індивідуального підходу до кожної підінтегральної функції.

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

**1°.** *Метод безпосереднього інтегрування.* Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають безпосереднім інтегруванням.

***Приклад***

Знайти інтеграли:

а) $\int\left(2x+\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

в) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

○ а) $\int\left(2x+\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = 2\int x\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{1}{3}}dx = 2\left(\frac{x^2}{2}+\right.$

$\left.+C_1\right) + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_2 + 3\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C_3\right) = x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} +$

$+ (2C_1+C_2+3C_3) = x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$

При кожному інтегруванні утворюються проміжні довільні сталі: $C_1$, $C_2$, $C_3$. Але в підсумку записують лише одну загальну сталу $C$ тому, що коли $C_1$, $C_2$, $C_3$ — довільні сталі, то $2C_1 + C_2 + 3C_3 = C$ також є довільною сталою. Тому надалі стала $C$ означатиме суму всіх проміжних сталих;

б) $\int \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) dx =$
$= \int (1 + \sin x)\, dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C;$

в) $\int \mathrm{ctg}^2\, x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx - \int dx = -\mathrm{ctg}\, x - x + C;$

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}\, x -$
$- \mathrm{ctg}\, x + C.$ ●

2°. *Метод підстановки (заміни змінної).* Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він грунтується на такій теоремі.

***Теорема.*** *Нехай $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a; b\rangle$, тобто*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \quad x \in \langle a;\ b\rangle,$$

*і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку $\langle\alpha; \beta\rangle$, причому множина значень цієї функції є проміжок $\langle a; b\rangle$. Тоді справедлива формула*

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in \langle\alpha;\ \beta\rangle. \tag{3}$$

○ Справді, згідно з правилом диференціювання складеної функції, маємо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$$

і формула (3) випливає з властивості 1° п. 1.1. ●

Доведена теорема застосовується, як правило, одним із таких двох способів:

1) Інтеграл $\int g(x)\, dx$ записують у вигляді

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx,$$

у якому для функції $f$ відома первісна $F$; тоді за формулою (3)

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Практично зручнішим є такий запис:

$$\int g(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)\, dx = du \end{matrix} \right| = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \tag{4}$$

2) Інтеграл $\int g(x)\,dx$ зображають у вигляді

$$\int g(x)\,dx = \int g(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt,$$

де функція $x = \psi(t)$ має обернену функцію $t = \psi^{-1}(x)$ і для функції $g(\psi)\,\psi'$ відома первісна $G$, тоді

$$\int g(x)\,dx = \int g(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt = G(t) + C = G(\psi^{-1}(x)) + C. \qquad (5)$$

Зазначимо, що формули (4) і (5) відрізняються «проміжними» інтегралами:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \quad \text{і} \quad \int g(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt.$$

У першому з цих інтегралів і формулі (4) йдеться про *«введення функції під знак диференціала»*: $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x) = du$, а в другому і формулі (5) — про *«виведення функції з-під знака диференціала»*: $dx = d\psi(t) = \psi'(t)\,dt$.

Спільним у формулах (4) і (5) є зворотний перехід у результаті інтегрування від змінних $u$ і $t$ до змінної $x$. Інакше кажучи, після обчислення невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно від введеної змінної інтегрування перейти до заданої.

Таким чином, при інтегруванні заміною змінної виконуються підстановки двох видів: $u = \varphi(x)$ і $x = \psi(t)$. Ці підстановки підбирають так, щоб одержані після перетворень нові інтеграли у формулах (4) і (5) були табличними, або зводились до відомих. Загальних методів підбору підстановок не існує. Вміння правильно визначити підстановку набувається практикою.

Розглянемо приклади на застосування формул (4) і (5), з найпростішими з них ми уже зустрічались в п. 1.1.

***Приклади***

1. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3 + 5\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{e^x - 1}$.

○ а) Маємо $\displaystyle\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x}\,dx = \left| \begin{aligned} u &= 2\ln x + 3 \\ du &= 2\frac{dx}{x} \\ \frac{du}{2} &= \frac{dx}{x} \end{aligned} \right| = \frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{1}{8} \times$

$\displaystyle\times\, u^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C.$

При достатньому вмінні диференціювати і знанні таблиць інтегралів змінну $u$ у формулі (4) можна не вводити (але мати її на увазі).

б) $\int \frac{\sqrt[3]{3+5\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{5}\int (3+5\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{3}} d(3+5\operatorname{ctg} x) = -\frac{3}{20} \times$
$\times (3+5\operatorname{ctg} x)^{\frac{4}{3}} + C.$

в) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1}dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}dx}{(e^{\frac{x}{2}})^2 - 1} = 2\int \frac{d(e^{\frac{x}{2}})}{(e^{\frac{x}{2}})^2 - 1} = \ln\left|\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1}\right| +$
$+ C.$ ●

2. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x^3}{x-1}dx$; б) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

○ а) Маємо $\int \frac{x^3}{x-1}dx = \left|\begin{matrix} u = x - 1 \\ du = dx \\ x = u + 1 \end{matrix}\right| = \int \frac{(u+1)^3}{u}du =$
$= \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 1}{u}du = \int \left(u^2 + 3u + 3 + \frac{1}{u}\right)du = \frac{u^3}{3} + \frac{3}{2}u^2 + 3u +$
$+ \ln|u| + C = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + \ln|x-1| + C.$

б) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{matrix}\right| = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt = a^2 \times$
$\times \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \times$
$\times \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}\right) +$
$+ C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x^2+a} + x \\ dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} + 1\right)dx \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{\sqrt{x^2+a}+x} = \frac{dt}{t} \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| +$
$+ C = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$
(тут ми застосували підстановку Ейлера, див. п. 1.7). ●

У прикладах б) і в) виведено формули 21 і 18 таблиці інтегралів.

3°. *Метод інтегрування частинами.* Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді (гл. 5, п. 3.2)

$$d(uv) = udv + vdu, \quad udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (6)$$

Формула (6) називається *формулою інтегрування частинами.* Вона дає змогу звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu$.

Як правило, підінтегральний вираз, який складає добуток $udv$, можна розбити на множники $u$ та $dv$ кількома способами. Вміння подати підінтегральну функцію через $u$ та $dv$ так, щоб інтеграл справа у формулі (6) був простішим, ніж інтеграл зліва, виробляється в процесі обчислення інтегралів.

Зазначимо, що під час знаходження функції $v$ за диференціалом $dv$ вважають, що стала $C = 0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливає. Справді, підставивши $v + C$ формулу (6), маємо:

$$\int ud(v + C) = u(v + C) - \int (v + C)\,du;$$

$$\int udv = uv + uC - \int vdu - Cu = uv - \int vdu.$$

Іноді формулу (6) доводиться застосовувати кілька разів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли виду $\int P(x)\,e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ — многочлен, а $k$ — дійсне число. У цих інтегралах за $u$ слід взяти множник $P(x)$, а за $dv$ — вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x) \times$ $\times \arccos x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, де $P(x)$ — многочлен. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)\,dx$;

3) інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$, де $\alpha$, $\beta$ — дійсні числа. Тут після двократного застосування формули (6) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

***Приклади***

1. Знайти інтеграли

а) $\int (2x + 1)\sin xdx$; б) $\int x^3 \ln xdx$; в) $\int e^x \sin 2xdx$; г) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

○ а) $\int (2x+1)\sin x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+1, & du = 2dx \\ dv = \sin x dx, & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| =$
$= -(2x+1)\cos x - \int (-\cos x)\, 2dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C;$

б) $\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, \ v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} x^4 \ln|x| - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \times$
$\times x^4 \ln|x| - \frac{1}{16} x^4 + C;$

в) $\int e^x \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \times$
$\times \int e^x \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \cos 2x dx, & v = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x -$
$- \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx,$

звідки

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx.$$

Дістали рівняння, з якого визначаємо шуканий інтеграл:

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2\cos 2x) + C;$$

г) $\int e^{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{matrix} \right| = 2\int te^t dt = \left| \begin{matrix} u = t, & du = dt \\ dv = e^t dt, & v = e^t \end{matrix} \right| = 2\,(te^t -$
$- \int e^t dt) = 2e^t (t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C.$ ●

2. Вивести рекурентну формулу для інтеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in N$, $n > 1$.

○ $I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} -\right.$
$\left. - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}\right) = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n}.$

До останнього інтеграла застосуємо формулу (6):

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n} = \int x \frac{x dx}{(x^2+a^2)^n} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{(x^2+a^2)^n}, & v = \dfrac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-n} d(x^2+a^2) = \dfrac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1},$$

отже,

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}. \tag{7}$$

Формула (7) дає змогу знайти інтеграл $I_n$ для будь-якого натурального числа $n > 1$. Обчислимо, наприклад, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

Враховуючи, що

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

послідовно дістаємо:

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$I_3 = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left(\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C. \bullet$$

Використовуючи викладені тут методи інтегрування, перейдемо до інтегрування деяких видів функцій. Для цього будуть потрібні певні відомості з алгебри.

## 1.4. Поняття про комплексні числа

*Комплексним числом* називається вираз

$$z = a + bi, \tag{8}$$

де $a$ та $b$ — дійсні числа, а символ $i$ — *уявна одиниця*, яка визначається умовою $i^2 = -1$. При цьому число $a$ називається *дійсною частиною комплексного числа* $z$ і позначається $a = \operatorname{Re} z$, а $b$ — *уявною частиною* $z$, $b = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів: reel — дійсний, imaginaire — уявний).

Вираз, що стоїть справа у формулі (8), називається *алгебраїчною формою запису комплексного числа.*

Два комплексні числа $z = a + bi$ і $\bar{z} = a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються рівними ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні частини і рівні їхні уявні частини: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + bi$ дорівнює нулю ($z = a + bi = 0$) тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$.

Комплексні числа можна зображати на площині. Якщо користуватись декартовою системою координат, то число (8) зображається точкою $M$ ($a$; $b$). Така площина умовно називається *комплексною площиною* змінної $z$, вісь $Ox$ — *дійсною віссю*, а $Oy$ — *уявною*.

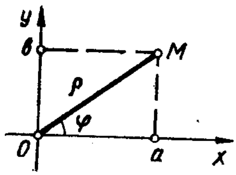



Рис. 7.2

Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ збігається з дійсним числом $a : z = a + 0 \cdot i = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних, вони зображаються точками осі $Ox$.

Комплексні числа $z = a + bi$, в яких $a = 0$, називаються *суто уявними;* такі числа зображаються точками осі $Oy$.

Полярні координати точки $M$ ($a$; $b$) на комплексній площині називаються *модулем і аргументом комплексного числа* і позначаються

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Оскільки $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$ (рис. 7.2), то з формули (8) маємо

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \tag{9}$$

Вираз, який стоїть справа у формулі (9), називається *тригонометричною формою комплексного числа* $z = a + bi$.

Модуль $|z| = \rho$ комплексного числа визначається однозначно, а аргумент $\varphi$ — з точністю до $2\pi k$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тут під Arg $z$ розуміють загальне значення аргументу; на відміну від нього, arg $z$ — головне значення аргументу, воно знаходиться на проміжку $[0; 2\pi)$ і відраховується від додатного напряму осі $Ox$ проти годинникової стрілки (іноді розглядають і від'ємні аргументи $\varphi$).

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а arg $z$ — невизначений.

Основні дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, заданими в алгебраїчній формі, визначаються такими рівностями:

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$;
2) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$;
3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$.

Таким чином, арифметичні дії над комплексними числами виконуються за звичайними правилами дій над двочленами з урахуванням того, що $i^2 = -1$.

Неважко перевірити, що коли в рівностях 1) — 4) кожне комплексне число $z$ замінити спряженим $\bar{z}$, то і результати вказаних дій заміняться спряженими числами. Звідси випливає таке твердження: якщо $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами і $P(z) = A + Bi$, то

$$P(\bar{z}) = A - Bi, \tag{10}$$

тобто якщо в многочлен замість $x$ підставити спряжені числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$, то результати цих підстановок також будуть взаємно спряженими.

Піднесення числа $z = a + bi$ до цілого натурального степеня виконується за формулою бінома Ньютона (гл. 5, п. 5.4) з урахуванням того, що для довільного числа $n \in N$ справедливі рівності

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

***Приклад***
Виконати дії:

а) $z_1 - z_2$; б) $z_1z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) $(z_1)^3$, де $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - i$.

○ а) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - i) = -2 + 4i$;
б) $z_1z_2 = (2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 11 + 10i$;
в) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{(2 + 3i)(4 + i)}{(4 - i)(4 + i)} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$;
г) $(2 + 3i)^3 = 2^3 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$. ●

Розглянемо дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Нехай $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тоді

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)i] =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отже, під час множення комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються.

Це правило поширюється на довільно скінченне число множників. Зокрема, якщо всі $n$ множників рівні, то

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Ця формула називається *формулою Муавра.*

При діленні комплексних чисел маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Отже, модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника; аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

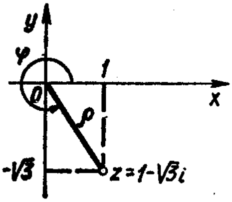


Рис. 7.3

Розглянемо добування кореня з комплексного числа. Якщо для даного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ треба знайти число $w = \sqrt[n]{z} = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, то за означенням кореня і формулою Муавра маємо

$$z = w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin\psi n) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Звідси $r^n = \rho$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Оскільки $r > 0$ і $\rho > 0$, то $r = \sqrt[n]{\rho}$, де під коренем потрібно розуміти його арифметичне значення; тому

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (11)$$

Надаючи $k$ значень $0, 1, 2, \ldots, n-1$, дістанемо $n$ різних значень кореня. Для інших значень $k$ аргументи відрізнятимуться від знайдених на число, кратне $2\pi$, тому значення кореня збігатимуться з уже знайденими.

*Приклади*

1. Знайти $(1 - \sqrt{3}i)^9$.

○ Запишемо дане число в тригонометричній формі (рис. 7.3):

$$z = 1 - \sqrt{3}i, \quad \rho = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varphi = \frac{5}{3}\pi, \quad z = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

За формулою Муавра маємо

$$z^9 = (1 - \sqrt{3}i)^9 = 2^9(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = -512. \ ●$$

2. Розв'язати рівняння $z^4 - 1 = 0$.

○ Використовуючи формулу (11), дістаємо

$$z^4 = 1, \quad 1 = \cos 0 + i\sin 0;$$

$$z = \sqrt[4]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Поклавши $k$ рівним 0, 1, 2, 3, знайдемо всі чотири корені даного рівняння:

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1; \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$

$$z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1; \quad z_4 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i. \ ●$$

Відомо, що показникову функцію з уявним показником можна виразити через тригонометричні функції за формулою

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (12)$$

яка була відкрита Ейлером в 1743 р. (див. гл. 9).

З формул (12) і (9) випливає, що всяке комплексне число можна записати в показниковій формі: $z = \rho e^{i\varphi}$.

*Приклад*

Записати в показниковій формі числа:

а) $z = 1$; б) $z = -1$; в $z = 3i$; г) $z = 1 - i$; д) $z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$; є) $z = \sqrt[6]{1+i}$.

○ а) $1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^{0\cdot i}$;

б) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}$;

в) $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$;

г) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{7}{4}\pi i}$;

д) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^6 = e^{2\pi i}$;

є) $\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}k\right)i}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$. ●

Формула Ейлера дає змогу з'ясувати причини того зв'язку, який існує між гіперболічними і тригонометричними функціями (гл. 5, п. 2.4).

Справді, з формули (12) маємо

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-xi} = \cos x - i\sin x,$$

звідки

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \operatorname{ch} xi, \quad \sin x = \frac{1}{i}\operatorname{sh} xi.$$

Підставивши замість $x$ значення $xi$, дістанемо

$$\cos xi = \operatorname{ch} x, \quad \sin xi = i\operatorname{sh} x.$$

Ці формули дають змогу переходити від довільного співвідношення між тригонометричними функціями до відповідного співвідношення між гіперболічними функціями і навпаки. Подібні перетворення застосовуються при інтегруванні.

*Приклад*

Виразити $\cos^2 x$, $\cos^3 x$ та $\cos^4 x$ через косинуси кратних дуг.

○ Маємо

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2xi} + 2 + e^{-2xi}}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2};$$

$$\cos^3 x = \frac{e^{3xi} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3xi}}{8} = \frac{1}{4}\,\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x;$$

$$\cos^4 x = \frac{e^{4xi} + 4e^{2xi} + 6 + 4e^{-2xi} + e^{-4xi}}{16} =$$

$$= \frac{1}{16}\left[(e^{4xi} + e^{-4xi}) + 4\,(e^{2xi} + e^{-2xi}) + 6\right] = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}. \ \bullet$$

## 1.5. Деякі відомості про раціональні функції

Як відомо (гл. 5, п. 2.4), *многочленом (поліномом* або *цілою раціональною функцією)* називається функція

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{13}$$

де $n$ — натуральне число, яке називається степенем многочлена; $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ — коефіцієнти многочлена, дійсні або комплексні числа; незалежна змінна $x$ також може бути як дійсною, так і комплексною.

Далі розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Коренем многочлена (13) називається таке числове значення змінної $x = x_1$ (дійсне або комплексне), при якому многочлен перетворюється в нуль, тобто таке, що $P_n(x_1) = 0$.

***Теорема 1*** *(теорема Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на різницю $x - a$ дорівнює $P_n(a)$.*

○ При діленні многочлена $n$-го степеня на двочлен $x - a$ першого степеня дістанемо деякий многочлен $P_{n-1}(x)$ $(n - 1)$-го степеня і остачу $R$ — певне дійсне число. Тому

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - a) + R. \tag{14}$$

Ця тотожність справедлива для всіх $x \neq a$ (ділення на $x - a$ при $x = a$ неможливе). Якщо в рівності (14) перейти до границі при $x \to a$, то дістанемо $P_n(a) = R$. ●

Якщо $x_1$ — корінь многочлена, то згідно з теоремою Безу $R = P_n(x_1) = 0$, тому

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - x_1). \tag{15}$$

Підкреслимо, що рівність (15) має місце лише за умови, що $x_1$ — корінь многочлена $P_n(x)$. У зв'язку з цим виникає запитання: чи всякий многочлен має корені? Позитивну відповідь на це запитання дає таке твердження.

***Теорема 2*** *(основна теорема алгебри). Всякий многочлен степеня $n > 0$ має хоча б один корінь, дійсний або комплексний.*

Приймемо цю теорему без доведення.

З теореми 2 випливає, що многочлен (13) завжди можна записати у вигляді (15). Неважко помітити (наприклад, з процедури ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ «в стовпчик»), що старший коефіцієнт многочлена $P_{n-1}(x)$, тобто коефіцієнт при $x^{n-1}$, дорівнює $a_0$.

Якщо степінь многочлена $P_{n-1}(x)$ не дорівнює нулю, тобто $P_{n-1}(x) \neq a_0$, то до цього многочлена знову можна застосувати теорему 2. Нехай $x_2$ — корінь многочлена $P_{n-1}(x)$, тоді

$$P_{n-1}(x) = P_{n-2}(x)(x - x_2), \tag{16}$$

де $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n-2)$-го степеня із старшим коефіцієнтом $a_0$.

З рівностей (15) і (16) дістанемо, що

$$P_n(x) = P_{n-2}(x)(x - x_1)(x - x_2).$$

Продовжуючи цей процес, приходимо до такого твердження.

***Теорема 3.*** *Всякий многочлен $n$-го степеня можна подати у вигляді*

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ \ldots\ (x - x_n), \tag{17}$$

*де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корені многочлена, $a_0$ — коефіцієнт многочлена при $x^n$.*

Вираз (17) називається *розкладом многочлена на лінійні множники*. Наприклад,

$$x^3 + x^2 + 9x + 9 = (x + 1)(x - 3i)(x + 3i);$$

$$5x^4 - 40x^3 + 115x^2 - 140x + 60 =$$

$$= 5(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

Для перевірки цих тотожностей достатньо перемножити їхні праві частини.

Множники $x - x_i$ у формулі (17) називаються *лінійними множниками*. Якщо деякі з лінійних множників однакові, то їх можна об'єднати і тоді формула (17) матиме вигляд

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}(x - x_r)^{k_r}, \tag{18}$$

де $r$ — число різних коренів і $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

У цьому випадку корінь $x_1$ називається *коренем кратності $k_1$* або *$k_1$-кратним коренем*, $x_2$-коренем кратності $k_2$ і т. д. Корінь кратності одиниця називається *простим коренем*.

Нехай тепер число $\alpha + \beta i$ — комплексний корінь многочлена (13), тобто $P_n(\alpha + \beta i) = 0$, тоді з рівності (10) випливає, що спряжене число $\alpha - \beta i$ також є коренем многочлена (13). Перемноживши лінійні множники, що відповідають цим кореням, дістанемо

$$[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)] = [(x-\alpha)-\beta i][(x-\alpha)+\beta i] =$$

$$= (x-\alpha)^2-(\beta i)^2 = x^2-2x\alpha+\alpha^2+\beta^2 = x^2+px+q,$$

де $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2+\beta^2$ — дійсні числа.

Таким чином, добуток лінійних множників, що відповідають взаємно спряженим комплексним кореням, можна замінити квадратним тричленом з дійсними коефіцієнтами і з від'ємним дискримінантом.

Об'єднуючи у формулі (18) множники із взаємно спряженими коренями, дістанемо

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots$$

$$\ldots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \tag{19}$$

де $k_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$ — кратності дійсних коренів; $l_j$ ($j = 1, 2, \ldots, s$) — кратності комплексно спряжених коренів; $k_1+k_2+\ldots+k_m+2(l_1+l_2+\ldots+l_s) = n$ — сталі; $a_0$, $x_i$, $p_j$, $q_j$ — дійсні числа, причому $p_j^2-4q_j<0$.

Отже, всякий многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні та квадратні (з комплексними коренями) множники з дійсними коефіцієнтами.

*Зауваження 1.* Якщо многочлен $P_n(x)$ тотожно дорівнює нулю, тобто дорівнює нулю при довільних значеннях $x$, $P_n(x) \equiv 0$, то всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Дійсно, якби $a_0 \neq 0$, то $P_n(x)$ мав $n$ коренів; якби $a_0 = 0$ і $a_1 \neq 0$, то $P_n(x)$ мав би $n-1$ корінь і т. д. В умові сказано, що $P_n(x)$ має безліч коренів, бо $\forall x \in R : P_n(x) = 0$.

*Зауваження 2.* Якщо многочлени тотожно дорівнюють один одному, то рівні їхні степені і рівні між собою коефіцієнти при однакових степенях $x$.

Дійсно, різниця даних многочленів тотожно дорівнює нулю, тому з попереднього зауваження випливає, що всі коефіцієнти цієї різниці — нулі, тобто коефіцієнти даних многочленів однакові. Наприклад, якщо $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \equiv 5x^3-3x^2+4$, то $a=0$, $b=5$, $c=-3$, $d=0$, $e=4$.

Відношення двох $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ многочленів $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ називається *раціональною функцією або раціональним дробом* ($P_m(x) \not\equiv 0$, $Q_n(x) \not\equiv 0$).

Раціональний дріб називається *правильним,* якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m<n$; в іншому випадку ($m \geqslant n$) раціональний дріб називається *неправильним.*

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}, \tag{20}$$

де $W_k(x)$ і $R_p(x)$ — многочлени $k$-го і $p$-го степеня, причому $p < n$, тобто дріб $\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ — правильний. Наприклад,

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$$

*Елементарними раціональними дробами* називаються правильні раціональні дроби таких чотирьох видів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n \geqslant 2,$$

де $A$, $a$, $M$, $N$, $p$, $q$ — дійсні числа, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

***Теорема 4.*** *Нехай знаменник правильного раціонального дробу розкладено на множники за формулою (19):*

$$Q_n(x) = a_0(x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \ldots (x^2+lx+s)^\nu,$$

*тоді цей дріб можна подати у вигляді*

$$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \cdots +$$

$$+ \frac{L_1x+F_1}{x^2+lx+s} + \frac{L_2x+F_2}{(x^2+lx+s)^2} + \cdots + \frac{L_\nu x+F_\nu}{(x^2+lx+s)^\nu}, \tag{21}$$

де $A_1, \ldots, A_\alpha$; $B_1, \ldots, B_\beta$; $M_1, N_1, \ldots, M_\mu, N_\mu$; $L_1, F_1, \ldots, L_\nu, F_\nu$ — деякі дійсні числа [12].

Вираз (21) називається *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби.*

Для знаходження чисел $A_1, \ldots, F_\nu$ можна скористатись *методом порівнювання коефіцієнтів.* Суть його така. Помножимо обидві частини рівності (21) на $Q_n(x)$, внаслідок чого дістанемо два тотожно рівні многочлени: відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, \ldots, F_\nu$. Прирівнюючи їхні коефіцієнти при однакових степенях $x$ (зауваження 2), дістанемо систему лінійних рівнянь, з якої визначимо невідомі $A_1, \ldots, F_\nu$.

*Приклад*

Виразити через елементарні дроби дріб $\dfrac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.

○ За формулою (9) маємо

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $x(x^2+1)^2$, дістанемо тотожність

$$x^4+2x^3+5x^2-1\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+c)(x^2+1)x+(Dx+E)x=$$
$$=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у правій і лівій частинах, дістанемо систему рівнянь

$$A+B=1,\quad C=2,\quad 2A+B+D=5,\quad C+E=0,\quad A=-1,$$

розв'язуючи яку, знайдемо $A=-1$, $B=2$, $C=2$, $D=5$, $E=-2$. Отже,

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x+2}{x^2+1}+\frac{5x-2}{(x^2+1)^2}. \; ●$$

Крім методу порівняння коефіцієнтів, користуються також *методом окремих значень аргументу*. Нехай після множення обох частин рівності (21) дістаємо два тотожно рівні многочлени, один з яких — відомий, а другий з невідомими коефіцієнтами. Надаючи змінній конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначимо шукані коефіцієнти. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній $x$ надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$. Іноді зручно скористатись комбінованим методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначати, надаючи $x$ значення дійсних коренів знаменника, а інші — визначати методом порівняння.

*Приклади*

1. Виразити через елементарні дроби дріб

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}.$$

○ Маємо

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2},$$

$$2x-1\equiv A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1).$$

Якщо в цій тотожності покласти $x=0$, то $-1=A(-1)\cdot(-2)$, звідки $A=-\frac{1}{2}$; якщо $x=1$, то $1=-B$ або $B=-1$; якщо $x=2$, то $3=2C$ або $C=\frac{3}{2}$.

6*

Отже,

$$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{2x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2(x-2)}. \bullet$$

2. Виразити через елементарні дроби дріб

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}.$$

○ Маємо

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$x^2+1\equiv Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2\equiv(A+C)x^2+(A-B)x-A.$$

Якщо $x=0$, то $1=-B$ або $B=-1$; коли $x=1$, то $2=C$ або $C=2$. Прирівнюючи коефіцієнти при $x^2$, дістанемо $1=A+C$, звідки $A=-1$, бо $C=2$; отже,

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}. \bullet$$

### 1.6. Інтегрування раціональних функцій

Раціональні функції складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

Нехай треба знайти

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx.$$

Враховуючи рівність (20), цей інтеграл можна подати як суму інтеграла від многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx=\int W_k(x)\,dx+\int\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}\,dx.$$

Інтеграл від многочлена знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться за допомогою формули (21) до інтегралів від елементарних дробів.

Розглянемо ці інтеграли:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}\,dx=A\int(x-a)^{-n}\,d(x-a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$

III. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{matrix}x=t-\frac{p}{2}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}dt=$

$$=\int\frac{Mt+N-M\frac{p}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt=M\int\frac{tdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Перший інтеграл знаходиться безпосередньо:

$$\int \frac{tdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+q-\frac{p^2}{4}\right|+C,$$

а другий є табличним (формула 19 табл.), оскільки за умовою $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Зауважимо, що підстановка $x = t - \frac{p}{2}$ «підказана» тим, що квадратний тричлен у знаменнику можна записати у вигляді

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

У загальнішому випадку маємо

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right),$$

де $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$. Знак плюс чи мінус береться залежно від того, якими будуть корені знаменника: комплексними чи дійсними. Звідси випливає, що інтеграли виду $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ обчислюються підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$.

IV. Інтеграл виду

$$I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx, \quad p^2-4q<0, \quad n \geqslant 2$$

підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$ зводиться до двох інтегралів:

$$I_n = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Перший з цих інтегралів обчислюється безпосередньо, а другий — за рекурентною формулою (7).

Отже, встановлено, що інтегрування довільної раціональної функції зводиться до інтегрування многочлена і скінченного числа елементарних дробів, інтеграли від яких виражаються через раціональні функції, логарифми і арктангенси. Інакше кажучи, будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

*Приклади*

1. Знайти інтеграл $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}\,dx$.

○ $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}\,dx = \left| \begin{matrix} x = t-2 \\ dx = dt \\ t = x+2 \end{matrix} \right| = \int \frac{2(t-2)+3}{(t-2)^2+4(t-2)+9}\,dt =$

$= \int \frac{2t-1}{t^2+5}\,dt = \int \frac{2t\,dt}{t^2+5} - \int \frac{dt}{t^2+5} = \ln(t^2+5) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} =$

$= \ln(x^2+4x+9) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$ ●

2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^4+2x^3+5x^2+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

○ Оскільки розклад підінтегральної функції на елементарні дроби вже відомий п. 1.5), то

$$I = \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+1} + \frac{5x-2}{(x^2+1)^2} \right) dx =$$

$$= -\ln|x| + \ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x - \frac{5}{2(x^2+1)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Для обчислення останнього інтеграла застосуємо формулу (7):

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Отже,

$$I = -\ln|x| + \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \frac{5}{2(x^2+1)} - \frac{x}{x^2+1} + C.$$ ●

3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx$.

○ Під знаком інтеграла маємо неправильний дріб, тому спочатку виділимо його цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^5+2 & x^3-1 \\ \cline{2-2} x^5-x^2 & x^2 \\ \hline x^2+2 & \end{array}.$$

Звідси

$$\frac{x^5+2}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2+2}{x^3-1}.$$

Розклавши правильний дріб на елементарні, маємо

$$\frac{x^2+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1};$$

$$x^2+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) =$$
$$= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C).$$

Скористаємось комбінованим методом знаходження коефіцієнтів $A$, $B$ і $C$. Якщо $x = 1$, то $3 = 3A$ або $A = 1$; $A + B = 1$, звідки $B = 0$; $A - C = 2$, тому $C = -1$.

Далі дістанемо

$$I = \int \left(x^2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \int \frac{dx}{x^2+x+1};$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \left| \begin{array}{c} x = t - \frac{1}{2} \\ dx = dt \\ t = x + \frac{1}{2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Отже,

$$I = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \bullet$$

## 1.7. Інтегрування деяких ірраціональних і трансцендентних функцій

Насамперед зауважимо, що інтеграли від ірраціональних та трансцендентних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Нехай $R(u, v, \ldots, s)$ — раціональна функція від змінних $u, v, \ldots$ $\ldots, s$, тобто така функція, в якій над зазначеними змінними та дійсними числами виконується скінченна кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

Наприклад, раціональною відносно змінних $u$ і $v$ є функція

$$R(u, v) = \frac{3u^2 + 2v - 1}{u^2 - 3v^2}.$$

Якщо змінні $u$ та $v$, в свою чергу, є функціями від $x$: $u = u(x)$ і $v = v(x)$, то функція $R(u(x), v(x))$ є раціональною відносно функцій $u(x)$ і $v(x)$.

Наприклад, функція

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{6\sqrt[3]{x-1}}{x^2+5}$$

є раціональною функцією від $\sqrt[3]{x-1}$, $\sqrt{x}$ і $x$:

$$f(x) = R(\sqrt[3]{x-1}, \sqrt{x}, x).$$

Розглянемо тепер інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що в ряді випадків вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій (або, як кажуть, раціоналізуються).

**1.** *Інтеграли виду*

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$$

*раціоналізуються підстановкою*

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де $k$ — спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Дійсно, якщо

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \text{ то } x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a}, \; dx = \frac{kt^{k-1}(ad-bc)}{(ct^k-a)^2}dt,$$

тобто, $x$ та $dx$ виражаються через раціональні функції від $t$.

Оскільки, крім того, кожний степінь дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$ виразиться через цілий степінь $t$, то підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від $t$.

*Приклад*

Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

○ а) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \left|\begin{array}{c} x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array}\right| = \int \frac{6t^5dt}{t^2+t^3} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C;$$

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}} = \left|\begin{array}{l} 2x+1 = t^6 \\ x = \frac{t^6-1}{2} \\ dx = 3t^5dt \\ t = \sqrt[6]{2x+1} \end{array}\right| = \int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2}{t-1}dt =$$

$$= 3\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1| + C;$$

в) $\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \\ x-1 = \frac{2}{t^3-1} \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)^2 t}{4} \frac{(-6t^2)}{(t^3-1)^2}\, dt =$

$= -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + C = -\frac{3}{8} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{4}{3}} + C.$ ●

2. *Інтегрування диференціальних біномів.* Вираз виду $x^m (a + + bx^n)^p$, де $m$, $n$, $p$ — сталі раціональні числа, а $a$ і $b$ — довільні сталі числа, називається *диференціальним біномом.* Справедлива така *теорема Чебишева.*

***Теорема.*** *Інтеграл від диференціального бінома*

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx$$

*виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:*

1) $p$ *— ціле число (додатне, від'ємне чи* 0) *і виконано підстановку* $x = t^s$, *де* $s$ *— найменший спільний знаменник дробів* $m$ і $n$;

2) $\frac{m+1}{n}$ *— ціле число (додатне, від'ємне чи* 0) *і виконано підстановку* $a + bx^n = t^r$, *де* $r$ *— знаменник дробу* $p$;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ *— ціле число (додатне, від'ємне чи* 0) *і виконано підстановку* $ax^{-n} + b = t^r$, *де* $r$ *— знаменник дробу* $p$.

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається [12].

***Приклад***

Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$

○ Оскільки в інтегралі

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\, dx;$$

$$m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{3};\quad \frac{m+n}{n} = 2 \in Z,$$

то застосовний другий випадок теореми Чебишева.

Маємо

$$I = \left| \begin{array}{c} t^3 = 1 + x^{\frac{1}{4}} \\ x = (t^3 - 1)^4 \\ dx = 12t^2 (t^3 - 1)^3 \, dt \end{array} \right| = 12 \int (t^6 - t^3) \, dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3 (1 + \sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C. \quad \bullet$$

3. *Інтеграли виду* $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ *раціоналізуються підстановкою* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $(-\pi < x < \pi)$, *яка називається універсальною.* Дійсно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{2}{1 + t^2} dt,$$

тому

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt = \int R_1(t)\, dt,$$

де $R_1(t)$ — раціональна функція від $t$.

***Приклад***

Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$.

$$\circ \int \frac{dx}{\sin x + 1} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \\ dx = \frac{2}{1 + t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1 + t^2)\left(\frac{2t}{1 + t^2} + 1\right)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(1 + t)^2} = -\frac{2}{1 + t} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \quad \bullet$$

Зауважимо, що універсальна підстановка завжди раціоналізує інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Проте на практиці вона часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками. Наведемо деякі з них.

а) $\int R(\sin x)\cos x dx$ раціоналізується підстановкою $\sin x = t$;

б) $\int R(\cos x)\sin x dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x = t$;

в) $\int R(\mathrm{tg}\, x)\, dx$ раціоналізується підстановкою $\mathrm{tg}\, x = t$;

г) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x = t$, якщо функція $R$ непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ або підстановкою $\sin x = t$, якщо функція $R$ непарна відносно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

або підстановкою $\mathrm{tg}\, x = t$, якщо функція $R$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x);$$

д) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходиться підстановкою $\sin x = t$, якщо $n$ — ціле додатне непарне число, або підстановкою $\cos x = t$, якщо $m$ — ціле додатне непарне число, а також за допомогою формули пониження степеня

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

якщо $m$ та $n$ — цілі додатні парні числа; коли ж $m$ і $n$ — цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $\mathrm{tg}\, x = t$; така сама підстановка використовується у випадку, коли $m$ і $n$ — цілі непарні і від'ємні;

е) інтеграли $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx \times dx$ обчислюються за допомогою відомих формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

***Приклад***

Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$; б) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$; в) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

○ а) Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, то скористаємось підстановкою $\cos x = t$. Звідси

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2, \ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1, \ dt = -\sin x dx.$$

Маємо

$$\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}\,dx = -\int \frac{(2-t^2)\,dt}{2t^2-1} = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int dt -$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right| + C;$$

б) $\int \sin^4 x\cos^5 x dx = \int \sin^4 x\cos^4 x\cos x dx = \int \sin^4 x\,(1-\sin^2 x)^2\cos x dx =$

$$= \left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx\end{matrix}\right| = \int t^4(1-t^2)^2\,dt = \int (t^4-2t^6+t^8)\,dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 +$$

$$+C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C;$$

в) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx = \int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\times$$

$$\times d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C. \quad ●$$

**4.** *Інтеграл виду* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ *за допомогою підстановки* $x = t - \frac{b}{2a}$ *зводиться до одного з таких інтегралів:*

а) $\int R(t, \sqrt{t^2+m^2})\,dt$; б) $\int R(t, \sqrt{t^2-m^2})\,dt$;

в) $\int R(t, \sqrt{m^2-t^2})\,dt$,

де $m \in R$. Неважко переконатись, що за допомогою підстановок а) $t = m\,\mathrm{tg}\,z$, б) $t = \frac{m}{\sin z}$, в) $t = m\sin z$ відповідні інтеграли зво дяться до інтеграла $\int R(\sin z, \cos z)\,dz$.

Наприклад, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left|\begin{matrix} x=\sin z \\ dx=\cos z dz\end{matrix}\right| = \int \frac{\cos z dz}{\cos^3 z} = \mathrm{tg}\,z + C =$

$$= \frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Необхідно зазначити, що інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ виражаються через раціональні функції також за допомогою так званих *підстановок Ейлера:*

1) якщо $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$;

2) якщо $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;

3) якщо $b^2-4ac>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$,

де $\alpha$ — корінь тричлена $ax^2+bx+c$ [24].

Першу підстановку ми використали при розв'язуванні прикладу 2 б), п. 1.3. Покажемо на прикладі застосування другої підстановки.

***Приклад***

Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

Скориставшись другою підстановкою Ейлера, дістанемо

$$I = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1-x-x^2} = xt - 1 \\ 1 - x - x^2 = x^2t^2 - 2xt + 1 \\ x = \frac{1+2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{-2dt}{1+(t+1)^2} =$$

$$= -2\operatorname{arctg}(t+1) + C = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x-x^2}+x+1}{x} + C. \ \bullet$$

5. *Інтеграл виду* $\int R(e^x)\,dx$ *раціоналізується підстановкою* $t = e^x$.

Дійсно, оскільки $x = \ln t$, то $dx = \frac{dt}{t}$ і

$$\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{t}.$$

***Приклад***

Знайти інтеграл $I = \int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3}\,dx$.

$$\bigcirc\ I = \left| \begin{array}{c} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{2t^2 - t - 3}{t(t+1)(t-3)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3}\right)dt = \ln|t| +$$

$$+ \ln|t-3| + C = \ln e^x + \ln|e^x - 3| + C = x + \ln|e^x - 3| + C. \ \bullet$$

## 1.8. Інтеграли, що «не беруться»

Як видно було з диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить нас із класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування — операцію, обернену до диференціювання. Інтегрування елементарної функції не завжди знову приводить до елементарної функції. Подібне спостерігається й для інших взаємно обернених операцій: сума довільних натуральних чисел є завжди число натуральне, а різниця — ні; добуток двох цілих чисел завжди є цілим числом, а частка — ні і т. п. Строго доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або «не беруться».

Наприклад, доведено, що «не беруться» такі інтеграли:

$\int e^{-x^2}dx$ — *інтеграл Пуассона;*

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ — *інтеграли Френеля;*

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — *інтегральний логарифм;*

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ — *інтегральний косинус;*

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ — *інтегральний синус;*

$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$, $|k| < 1$ — *еліптичний інтеграл;*

$\int x^{\alpha} \sin x dx$, $\int x^{\alpha} \cos x dx$, $\int x^{\alpha} e^x dx$ $(\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots)$

та ряд інших інтегралів.

Вказані інтеграли хоча й існують, але не є елементарними функціями В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями. Неелементарні (або так звані спеціальні) функції розширюють множину елементарних функцій.

Зрозуміло, що інтеграл, який не обчислювався в класі елементарних функцій, може виявитись таким, що обчислюється в розширеному класі функцій.

Таким чином, інтегрування в порівнянні з диференціюванням — операція набагато складніша. Тому треба твердо володіти основними методами інтегрування і чітко знати види функцій, інтеграли від яких цими методами знаходяться. Крім того, виявляється, що треба розрізняти також інтеграли, які «не беруться». Тому в інженерній практиці широко користуються довідниками, в яких містяться докладні таблиці інтегралів, що виражаються через елементарні і неелементарні функції [2, 19].

### Завдання для самоконтролю

1. Що називається первісною даної функції? Навести приклади.
2. Сформулювати і довести теорему про загальний вигляд первісної даної функції.
3. Що називається невизначеним інтегралом від даної функції? інтегральною кривою?
4. Сформулювати теорему про існування первісної.
5. Сформулювати і довести основні властивості невизначеного інтеграла.
6. У чому суть інваріантності формули інтегрування? Навести приклади.
7. Написати і перевірити диференціюванням таблицю інтегралів.
8. У чому полягають методи безпосереднього інтегрування, частинами і заміни змінної? Навести приклади.

9. Нехай $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, $n \in N$, $n > 1$. Вивести рекурентну формулу для обчислення цього інтеграла. Записати в явному вигляді значення $I_1$, $I_2$, $I_3$.

10. Що називається комплексним числом? Як записуються комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формі?

11. Що називається модулем і аргументом комплексного числа? Як вони знаходяться і який їхній геометричний зміст?

12. Як визначаються дії над комплексними числами в алебраїчній та тригонометричній формах?

13. Написати і довести формулу Муавра. Навести приклад.

14. Вивести формулу для добування кореня з комплексного числа.

15. Записати формулу Ейлера. В чому полягає зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями?

16. Сформулювати і довести теорему Безу.

17. Довести теорему про розклад многочлена на лінійні множники.

18. Записати розклад многочлена на лінійні множники і квадратні тричлени з дійсними коефіцієнтами.

19. Який раціональний дріб називається правильним?

20. Які раціональні дроби називаються елементарними?

21. Записати розклад правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

22. Як інтегруються елементарні дроби?

23. В чому полягає метод інтегрування раціонального дробу?

24. Навести приклади інтегрування ірраціональних функцій.

25. Як раціоналізується інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$? Чому підстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ називається універсальною?

26. Як обчислюються інтеграли $\int \sin^n x \cos^m x dx$?

27. Як обчислюються інтеграли $\int \sin ax \cos bx dx$?

28. У якому випадку кажуть, що невизначений інтеграл не є елементарною функцією? Навести приклади.

29. Обчислити безпосереднім інтегруванням:

1) $\int (2x^3 - x + 3)\,dx$; 2) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$;

3) $\int (x^2 + 3x + 5)^{10} (2x + 3)\,dx$; 4) $\int e^{4\cos x} \sin x dx$;

5) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$; 6) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;

7) $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x}$; 8) $\int \frac{e^x dx}{5 + 4e^x}$;

9) $\int \frac{dx}{a^2x^2 - b^2}$; 10) $\int \frac{\cos x dx}{4 + \sin^2 x}$.

30. Знайти методом підстановки:

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$; 2) $\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx$;

3) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; 6) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$;

7) $\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$; 8) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$;

9) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$; 10) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{4/3} x}dx$.

**31.** Проінтегрувати частинами:

1) $\int \arcsin x dx$; 2) $\int x^2 \ln x dx$;

3) $\int x \operatorname{arctg} x dx$; 4) $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$;

5) $\int \sin(\ln x)\,dx$; 6) $\int e^{2x}\cos x dx$.

**32.** Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$;

3) $\int \sin^4 x dx$; 4) $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;

5) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$; 6) $\int \cos 2x \sin 4x dx$.

*Відповіді.* **29.** 1) $\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}+3x+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C$;
3) $\frac{1}{11}(x^2+3x+5)^{11}+C$; 4) $-\frac{1}{4}e^{4\cos x}+C$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$;
6) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$; 7) $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$; 8) $\frac{1}{4}\ln(5+4e^x)+C$;
9) $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|+C$; 10) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$.

**30.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; 2) $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1|+C$;
3) $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$; 4) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$;
5) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$; 6) $\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$; 7) $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$;
8) $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$; 9) $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C$;

10) $3(\cos x)^{-\frac{1}{3}}+\frac{3}{5}(\cos x)^{\frac{5}{3}}+C$.

**31.** 1) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 2) $\frac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\frac{1}{3}\right)+C$;

3) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; 4) $(x+1)^2\sin x+2(x+1)\cos x+C$;

5) $\frac{x}{2}(\sin(\ln|x|)-\cos(\ln|x|))+C$; 6) $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$.

32. 1) $\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\ln|x+2|+C$;

2) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{x-1}{2x(x-2)}+C$; 3) $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$;

4) $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+\ln|\sin x|+C$; 5) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

6) $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$.

## § 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

### 2.1. Задачі, що приводять до визначеного інтеграла

1°. *Задача про площу криволінійної трапеції.* Нехай на відрізку $[a; b]$ задано функцію $y=f(x)\geqslant 0$. Фігура $aABb$ (рис. 7.4), обмежена графіком даної функції і відрізками прямих $y=0$, $x=a$, $x=b$, називається *криволінійною трапецією.* Обчислити площу $S$ цієї трапеції.

○ Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ за допомогою точок $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на $n$ частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$. На кожному з цих відрізків візьмемо довільну точку $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ і обчислимо значення $f(\xi_i)$. Тоді добуток $f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, дорівнює площі прямокутника з основою $\Delta x_i$ і висотою $f(\xi_i)$, а сума цих добутків — площі ступінчатої фігури і наближено дорівнює площі криволінійної трапеції:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Із зменшенням усіх величин $\Delta x_i$ точність цієї формули збільшується, тому природно за площу криволінійної трапеції вважати границю площ ступінчатих фігур за умови, що максимальна довжина частинних відрізків прямує до нуля:

$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \quad ● \qquad (22)$$

2°. *Задача про роботу змінної сили.* Нехай на матеріальну точку діє сила $F$, яка стала за напрямом і неперервно змінюється за величиною, і нехай під дією цієї сили точка перемістилася вздовж осі $Ox$ з точки $a$ в точку $b$ $(a<b)$. Обчислити роботу $A$ цієї сили на відрізку $[a; b]$.

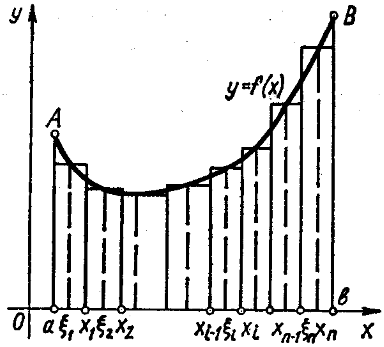



Рис. 7.4

○ У кожній точці $x \in [a; b]$ діє сила $F$, яка за умовою є неперервною функцією від $x$: $F = F(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_n = b$ на $n$ частинних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Припустимо, що кожний з частинних відрізків такий малий, що силу $F(x)$ на ньому можна вважати сталою і рівною значенню функції $F(x)$ в деякій довільно вибраній точці $x = \xi_i \in \in [x_{i-1}; x_i] : F = F(\xi_i)$. Робота, виконана цією силою на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$; дорівнює добутку $F(\xi_i)\,\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Насправді, на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ сила $F(x)$ змінюється, тому вираз $F(\xi_i)\,\Delta x_i$ дає лише наближене значення роботи на цьому відрізку.

Оскільки робота на відрізку $[a; b]$ дорівнює сумі робіт на всіх частинних відрізках, то

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші довжини $\Delta x_i$. Тому природно за роботу сили $F(x)$ на шляху $[a; b]$ вважати границю одержаної суми:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i. \quad \bullet \tag{23}$$

$3^0$. *Задача про пройдений шлях.* Нехай точка рухається по прямій з швидкістю $v = v(t)$, де $v$ — неперервна функція часу $t$. Треба визначити шлях $s$, який пройде точка за проміжок часу $[a; b]$ від моменту $t = a$ до моменту $t = b$ $(a < b)$.

○ Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = = b$ на $n$ частинних проміжків часу $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Припустимо, що відрізок $[t_{i-1}, t_i]$ такий малий, що швидкість $v(t)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ змінюється мало. Тоді її можна вважати на цьому відрізку сталою і рівною, наприклад, $v(\xi_i)$, де $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Це означає, що рух точки на проміжку $[t_{i-1}, t_i]$ вважається рівномірним, тому шлях, пройдений точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, дорівнює добутку $v(\xi_i)\,\Delta t_i$, а шлях, пройдений за час $[a; b]$, виражається наближеною формулою

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\,\Delta t_i.$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші величини $\Delta t_i$. Тому природно за шлях $s$ вважати границю знайденої суми:

$$s = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\,\Delta t_i. \quad \bullet \tag{24}$$

**4°**. *Задача про масу неоднорідного стержня.* Нехай маємо прямолінійний стержень, який лежить на осі $Ox$ в межах відрізка $[a; b]$. Треба знайти масу $m$ цього стержня, якщо його густина $\gamma$ є деякою неперервною функцією від $x$: $\gamma = \gamma(x)$.

○ Розіб'ємо стержень на $n$ довільних частин $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Якщо відрізок $[x_{i-1}, x_i]$ достатньо малий, то функція $\gamma(x)$ на ньому змінюється мало, тому маса частини стержня $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, яка відповідає цьому відрізку, наближено дорівнює добутку $\gamma(\xi_i)\,\Delta x_i$, де $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, а маса всього стержня

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Точне значення маси знайдемо як границю цієї суми, коли

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i)\,\Delta x_i. \quad \bullet \tag{25}$$

Усі розглянуті задачі привели нас до однієї й тієї самої математичної операції — знаходження границі певного виду сум. Проте границі (22) — (25) не зовсім звичайні. Справді, суми під знаком границі залежать не тільки від заданої функції, а й від точок розбиття $x_i$, $t_i$ і від точок $\xi_i$. Число точок прямує до нескінченності, коли довжина максимального частинного відрізка прямує до нуля. Інакше кажучи, у кожному випадку, тобто для кожної заданої функції, йдеться про знаходження границі суми нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

До такої самої математичної операції над функціями приводять багато інших задач, тому виникає потреба всебічного вивчення цієї операції, незалежно від конкретного змісту тієї чи іншої задачі.

## 2.2. Означення та умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, $a < b$. Розіб'ємо цей відрізок на $n$ довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$ позначимо через $\tau$ і назвемо $\tau$-розбиттям відрізка $[a, b]$.

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, візьмемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ і побудуємо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{26}$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1}; x_i]$.

Сума (26) називається *інтегральною сумою функції* $f(x)$, яка відповідає $\tau$-розбиттю відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки і даному вибору проміжних точок $\xi_i$.

Геометричний зміст інтегральної суми: якщо $f(x) \geqslant 0$, то число $\sigma_n$ дорівнює площі ступінчатої фігури (рис. 7.4), тобто сумі площ $n$ прямокутників з основами $\Delta x_i$ і висотами $f(\xi_i)$.

Позначимо через $\lambda$ довжину найбільшого частинного відрізка $\tau$-розбиття і назвемо його *діаметром цього розбиття:*

$$\lambda = \lambda(\tau) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i.$$

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (26) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від $\tau$-розбиття, ні від вибору точок $\xi_i$, то ця границя називається *визначеним інтегралом функції* $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Отже, згідно з означенням,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{27}$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається *інтегровною на відрізку* $[a; b]$. Числа $a$ і $b$ називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межею інтегрування;* функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією;* $f(x)\,dx$ — *підінтегральним виразом;* $x$ — *змінною інтегрування;* $[a; b]$ — *проміжком інтегрування.*

Повертаючись до задач п. 2.1 на основі рівностей (22) — (27), можна сказати, що:

1) площа $S$ криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geqslant 0$, дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{28}$$

У цьому полягає *геометричний зміст визначеного інтеграла:* визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції;

2) робота $A$ змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізку $[a; b]$, дорівнює визначеному інтегралу від сили:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx; \qquad (29)$$

3) шлях $s$, пройдений точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$s = \int_a^b v(t)\,dt. \qquad (30)$$

Ця формула характеризує *фізичний зміст визначеного інтеграла;*

4) маса $m$ неоднорідного стержня на відрізку $[a; b]$ дорівнює визначеному інтегралу від густини $\gamma(x)$:

$$m = \int_a^b \gamma(x)\,dx. \qquad (31)$$

В означенні визначеного інтеграла функція $f$ не обов'язково неперервна і невід'ємна на $[a; b]$. Це означення не підтверджує також існування визначеного інтеграла для будь-якої функції $f$, визначеної на $[a; b]$. Воно лише говорить про те, що коли границя інтегральної суми існує для заданої на $[a; b]$ функції $f$ і при довільному розбитті $\tau$ відрізка $[a; b]$ і довільному виборі точок $\xi_i$ вона одна і та сама, то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f$ на відрізку $[a; b]$.

Слід також мати на увазі, що коли кажуть, що функція $f$ інтегровна на $[a; b]$, то розуміють, що існує скінченна границя (27), і ця границя не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки $[x_{i-1}; x_i]$, ні від вибору проміжних точок $\xi_i$ в кожному з них.

Сформулюємо умови інтегровності функції [12].

***Теорема 1*** *(необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Слід зазначити, що обернене твердження неправильне: існують функції, які обмежені на відрізку, але не інтегровні на ньому.

Прикладом такої функції є функція Діріхле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне.} \end{cases}$$

Ця функція на відрізку $[0; 1]$ є обмеженою: $|D(x)| \leqslant 1$, але не інтегровною. Справді, якщо на кожному частинному відрізку за проміжні точки $\xi_i$ взяти раціональні числа, то з формули (26) випливає, що сума $\sigma_n = 1$, а якщо $\xi_i$ — ірраціональні числа, то $\sigma_n = 0$. Це означає, що величина границі інтегральної суми, побудованої для функції $D(x)$, залежить від вибору точок $\xi_i$. Тому функція Діріхле не інтегровна на $[0; 1]$.

**Теорема 2** *(достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.*

Умова неперервності функції є достатньою умовою її інтегровності. Однак це не означає, що визначений інтеграл існує лише для неперервних функцій. Клас інтегральних функцій значно ширший. Так, існує визначений інтеграл від кусково-неперервних функцій, тобто функцій, які мають скінченне число точок розриву першого роду. Це стверджує така теорема.

**Теорема 3.** *Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a; b]$ і неперервна в ньому скрізь, крім скінченного числа точок, то вона інтегровна на цьому відрізку.*

Більше того, справедлива така теорема [9].

**Теорема 4.** *Всяка обмежена і монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.*

Ця теорема значно розширює клас інтегровних функцій, оскільки монотонна функція може мати не лише скінченну, а й нескінченну кількість точок розриву першого роду.

Надалі, як правило, розглядатимемо лише неперервні функції.

### 2.3. Властивості визначеного інтеграла

$1^0$. *Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz \quad \text{тощо.}$$

Інтегральна сума (26), а отже, і її границя (27) не залежать від того, якою буквою позначено агрумент функції $f$. Це й означає, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ введений для випадку, коли $a < b$. Узагальнимо поняття інтеграла на випадки, коли $a = b$ і $a > b$.

$2^0$. *Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{32}$$

$3^0$. *Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{33}$$

Властивості $2^0$ і $3^0$ приймають за означенням. Відзначимо, що ці означення повністю виправдовує наведена далі формула Ньютона — Лейбніца (п. 2.4).

$4^0$. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на максимальному з відрізків $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то справедлива рівність*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{34}$$

*(адитивність визначеного інтеграла).*

⊙ Припустимо спочатку, що $a < c < b$. Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки, то розіб'ємо $[a; b]$ так, щоб точка $c$ була точкою розбиття. Якщо, наприклад, $c = x_m$, то інтегральну суму можна розбити на дві суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо формулу (34).

Інше розміщення точок $a$, $b$, $c$ зводиться до вже розглянутого. Якщо, наприклад, $a < b < c$, то за формулами (34) і (33) маємо

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \ \bullet$$

На рис. 7.5 показано геометрично цю властивість для випадку, коли $f(x) > 0$ і $a < c < b$: площа трапеції $aABb$ дорівнює сумі площ трапеції $aACc$ і $cCBb$.

*З а у в а ж е н н я.* Нехай $f(x)$ — знакозмінна неперервна функція на відрізку $[a; b]$, де $a < b$, наприклад, $\forall x \in [a; \alpha] \cup [\beta; b]$: $f(x) \leqslant 0$ і $\forall x \in (\alpha; \beta)$: $f(x) > 0$ (рис. 7.6).

Скориставшись адитивністю та геометричним змістом інтеграла, дістанемо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3,$$

де $S_1$, $S_2$, $S_3$ — площі відповідних криволінійних трапецій.

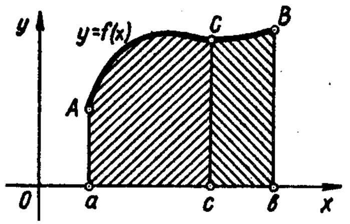



Рис. 7.5

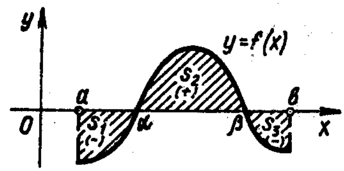



Рис. 7.6

Отже, в загальному випадку, з погляду геометрії визначений інтеграл (27) при $a < b$ дорівнює алгебраїчній сумі площ відповідних криволінійних трапецій, причому площі трапецій, розміщених над віссю $Ox$, мають знак плюс, а нижче осі $Ox$ — знак мінус. Якщо $a > b$, то все формулюється навпаки.

Зазначимо, що площа заштрихованої на рис. 7.6 фігури виражається інтегралом

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3.$$

**5°.** *Сталий множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:*

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{35}$$

○ Дійсно,

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Cf(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= C\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = C\int_a^b f(x)\,dx. \quad ●$$

**6°.** *Визначений інтеграл від суми інтегровних функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{36}$$

○ Для довільного τ-розбиття маємо

$$\sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) + g(\xi_i))\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Звідси, переходячи до границі при $\lambda = \lambda(\tau) \to 0$, дістанемо формулу (36). Ця властивість має місце для довільного скінченного числа доданків.

Властивості $5^0$ і $6^0$ називаються *лінійністю визначеного інтеграла.*

$7^0$. *Якщо всюди на відрізку* $[a; b]$ *маємо* $f(x) \geqslant 0$ $(a < b)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \tag{37}$$

(збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

○ Оскільки

$$f(\xi_i) \geqslant 0,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

то будь-яка інтегральна сума і її границя при $\lambda \to 0$ теж невід'ємна. ●

$8^0$. *Якщо всюди на відрізку* $[a; b]$ *маємо* $f(x) \leqslant g(x)$ $(a < b)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \tag{38}$$

(*монотонність визначеного інтеграла*).

○ Оскільки $g(x) \geqslant f(x)$, то з нерівності (37) маємо

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0.$$

Використовуючи властивість $4^0$, дістаємо нерівність (38). ●

Якщо $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$, то властивість $8^0$ можна зобразити геометрично (рис. 7.7): площа криволінійної трапеції $aA_1B_1b$ не менша площі криволінійної трапеції $aA_2B_2b$.

$9^0$. *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a; b]$ $(a < b)$, *то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{39}$$

○ Застосовуючи формулу (38) до нерівності

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

дістаємо

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

звідки й випливає нерівність (39). ●

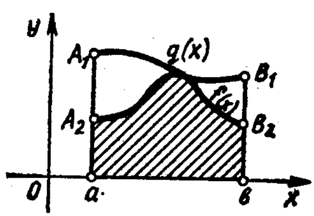


Рис. 7.7

**10°.** *Якщо* $\forall x \in [a;\ b] : |f(x)| \leqslant C$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant C(b-a). \tag{40}$$

○ Скориставшись формулами (39) та (35), дістанемо

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant C\int_a^b dx.$$

Звідси й одержуємо нерівність (40), оскільки

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a. \quad \bullet \tag{41}$$

**11°.** *Якщо* $m$ і $M$ — *відповідно найменше і найбільше значення функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;\ b]$ $(a < b)$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a) \tag{42}$$

*(оцінки інтеграла по області).*

○ За умовою $\forall x \in [a;\ b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

тому з властивості 7° маємо

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

Застосовуючи до крайніх інтегралів формули (35) і (41), дістаємо нерівність (42). ●

Якщо $f(x) \geqslant 0$, то властивість 11° ілюструється геометрично (рис. 7.8): площа криволінійної трапеції $aABb$ не менша площі прямокутника $aA_1B_1b$ і не більша площі прямокутника $aA_2B_2b$.

**12°.** *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;\ b]$, *то на цьому відрізку знайдеться така точка* $c$, *що*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \tag{43}$$

*(теорема про середнє значення функції).*

○ Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку, то вона досягає свого найбільшого значення $M$ і найменшого значення $m$. Тоді з оцінок (42) дістанемо (якщо $a < b$)

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Покладемо

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всі проміжні значення відрізка $[m; M]$ (п. 5.3, гл. 4). Отже, існує точка $c \in [a; b]$ така, що $f(c) = \mu$, або

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{44}$$

звідки й випливає дана властивість.

Для випадку, коли $a > b$, приводимо ті самі міркування для інтеграла $\int_b^a f(x)\,dx$, а потім, переставивши границі, приходимо до попередньої формули. ●

Рівність (44) називається формулою середнього значення, а величина $f(c)$ — *середнім значенням функції* на відрізку $[a; b]$.

Теорема про середнє значення при $f(x) \geqslant 0$ має такий геометричний зміст (рис. 7.9): значення визначеного інтеграла дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b - a$.

Термін «середнє значення функції» добре узгоджується з такими фізичними поняттями, як середня швидкість, середня густина, середня потужність тощо. Якщо, наприклад, у формулі (44) інтеграл означає пройдений шлях за проміжок часу $[a; b]$ (п. 2.2), то середнє значення $f(c)$ означає середню швидкість, тобто сталу швидкість, при якій точка, рухаючись рівномірно, за той же проміжок часу пройшла б той самий шлях, що і при нерівномірному русі із швидкістю $f(t)$.

**13°.** ***Якщо змінити значення інтегровної функції в скінченному числі точок, то інтегровність її не порушиться, а значення інтеграла при цьому не зміниться.***

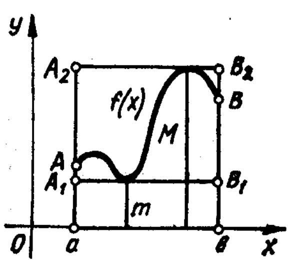



Рис. 7.8

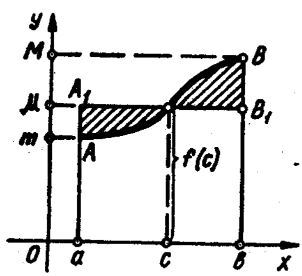



Рис. 7.9

Ця властивість дає змогу говорити про інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ навіть тоді, коли функція $f(x)$ не визначена в скінченному числі точок відрізка $[a;\ b]$. При цьому в цих точках функції можна надати цілком довільних значень і величина інтеграла не зміниться.

### 2.4. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона — Лейбніца

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a;\ b]$, тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a;\ x] \subset [a;\ b]$, тобто для довільного $x \in [a;\ b]$ існує інтеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$. (Оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, то ми позначили її через $t$, щоб не плутати з верхньою межею $x$.) Заданий інтеграл, очевидно, є функцією від $x$. Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{45}$$

і назвемо *інтегралом із змінною верхньою межею.*

Геометрично (рис. 7.10) при $f(x) \geqslant 0$ функція $\Phi(x)$ дорівнює площі заштрихованої криволінійно трапеції. Розглянемо основну властивість функції $\Phi(x)$.

***Теорема 1.*** *Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:*

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x). \tag{46}$$

○ Надамо аргументу $x$ функції (45) приросту $\Delta x$, тоді, враховуючи аддитивність інтеграла, дістанемо

$$\Phi(x+\Delta x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt =$$
$$= \Phi(x) + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

звідки

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Застосовуючи до цього інтеграла теорему про середнє значення, знайдемо, що

$$\Delta\Phi = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\,\Delta x,$$

де точка $c$ знаходиться між $x$ і $x + \Delta x$. Отже,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} =$$

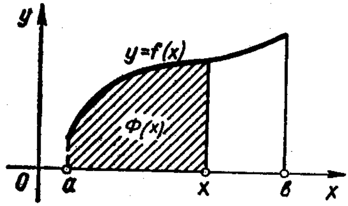



Рис. 7.10

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ і $c \to x$, тому з неперервності функції $f$ маємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x). \bullet$$

З доведеної теореми випливає важливий наслідок:

*Для всякої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція. При цьому однією з первісних функцій є визначений інтеграл (45).*

○ Справді, оскільки функція $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$, є первісною функції $f(x)$, то, згідно з формулою (46), функція $\Phi(x)$ є первісною. Але будь-яка інша первісна $F(x)$ функції $f(x)$ може відрізнятися від $\Phi(x)$ лише на сталу $C$: $\Phi(x) = F(x) + C$, $x \in [a; b]$, тому

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a; b]. \bullet \tag{47}$$

Теорема 1 розкриває глибокий зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами. Крім того, вона дає змогу встановити простий метод обчислення визначених інтегралів, минаючи громіздкі операції підсумовування і перехід до границі. Цей метод грунтується на такій теоремі.

***Теорема 2.*** *Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{48}$$

Ця формула називається *формулою Ньютона — Лейбніца.*

○ Нехай $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$. Оскільки інтеграл (45) є також первісною, то згідно з формулою (47) маємо

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Поклавши в цій рівності $x = a$, з формули (32) дістанемо

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0, \quad \text{звідки} \quad C = -F(a),$$

тому

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Зокрема, при $x = b$ дістаємо формулу (48). ●

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символами $F(x)|_a^b$, або $[F(x)]_a^b$, тому формула Ньютона — Лейбніца записується ще й так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b; \quad \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

Формула Ньютона — Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених для верхньої і нижньої меж інтегрування.

Зазначимо, що формула (48) сама по собі не розв'язує ні задачі знаходження первісної, ні задачі обчислення границі інтегральних сум. Її цінність полягає в тому, що вона встановлює зв'язок між цими задачами.

Формула Ньютона — Лейбніца значно розширює область застосування визначеного інтеграла, тому що дає загальний метод для розв'язування різноманітних практичних задач. Безпосередні ж обчислення визначеного інтеграла за формулою (27) не дозволили створити такого методу. Ще геніальний давньогрецький мислитель Архімед розв'язав задачу знаходження площі параболічного сегмента методом, що нагадує обчислення границь інтегральних сум. Потім протягом декількох століть математики таким самим способом розв'язали багато окремих задач, але лише в 17 ст. Ньютон і Лейбніц показали, що обчислення визначеного інтеграла від довільної неперервної функції зводиться до відшукання її первісної. Наприклад,

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4};$$

$$\int_0^\pi (2x - \sin x)\,dx = (x^2 + \cos x)\,|_0^\pi =$$

$$= (\pi^2 + \cos\pi) - (0^2 + \cos 0) = \pi^2 - 2;$$

$$\int_0^1 \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \int_0^1 \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{\pi^2}{16}\right).$$

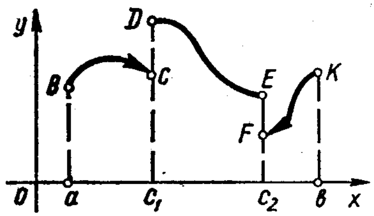


Рис. 7.11

*Зауваження* 1. Теорема 3 (п. 2.2) стверджує існування визначеного інтеграла від кусково-неперервної функції, яка має скінченне число точок розриву першого роду. Обчислення інтеграла від такої функції можна провести на основі властивостей інтеграла $4^0$ і $13^0$ (п. 2.3).

На рис. 7.11 зображено графік кусково-неперервної функції, заданої на відрізку $[a; b]$. Вона інтегровна на $[a; b]$ і

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx.$$

***Приклади***

1. Нехай $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$ Обчислити $\int_0^2 f(x)\,dx$.

○ Маємо $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 dx = e^x\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 = e.$ ●

2. Обчислити

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}.$$

○ Підінтегральна функція $f(x)$ не визначена в точці $x = \frac{\pi}{2}$. Розіб'ємо відрізок $[0, \pi]$ на два: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ і $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. На першому відрізку довизначимо неперервно функцію $f(x)$: нехай $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\left(\text{оскільки } f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1\right)$, тоді

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

На другому відрізку покладемо $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \left(\text{оскільки } f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = -1\right)$ і знову дістанемо інтеграл від неперервної функції $f(x) = -1;\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1)\, dx = -x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, $I = I_1 + I_2 = 0$. ●

*Зауваження* 2. Обчислення визначеного інтеграла від кусочно-неперервної функції можна проводити безпосередньо також за допомогою формули, аналогічної формулі (48). Для цього дамо розширене означення первісної.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо:

1) $F(x)$ неперервна на $[a; b]$;

2) $F'(x) = f(x)$ в точках неперервності $f(x)$.

Очевидно, для неперервної функції це означення первісної збігається із загальноприйнятим. Крім того, справедливе таке твердження:

Кусочно-неперервна на відрізку $[a; b]$ функція має первісну на цьому відрізку в розумінні розширеного означення; однією з первісних є функція $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ і справедлива формула Ньютона — Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Наприклад, $\int_{-1}^{2} \operatorname{sign} x dx = |x| \Big|_{-1}^{2} = 1$, оскільки за розширеним означенням функція $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $[-1; 2]$ має первісну $F(x) = |x|$.

### 2.5. Методи обчислення визначених інтегралів

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко користуються методом заміни змінної (або методом підстановки) і методом інтегрування частинами.

***Теорема 1.*** *Нехай виконуються умови:*

*1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;*

*2) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$;*

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і $\forall t \in (\alpha; \beta)$: $a < \varphi(t) < b$.

*Тоді справджується рівність*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{49}$$

○ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то вона має первісну. Позначимо її через $F(x)$, $x \in [a; b]$, тоді з теореми про заміну змінної в невизначеному інтегралі випливає, що функція $F(\varphi(t))$ буде первісною функції $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Застосувавши формулу Ньютона — Лейбніца, маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a); \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad \bullet$$

Формула (49) називається *формулою заміни змінної (*або *підстановки) у визначеному інтегралі*.

*Зауваження* 1. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної $t$ повернутися до змінної $x$, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа $\alpha$ знаходиться як розв'язок рівняння $a = \varphi(t)$ відносно невідомого $t$, а верхня межа $\beta$ — з рівняння $b = \varphi(t)$.

Якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар $\alpha$ і $\beta$, які задовольняють умови теореми 1. В цьому випадку можна взяти будь-яку з таких пар.

*Зауваження 2*. Часто замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = \psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. Проте тут слід мати на увазі, що функція $x = x(t)$, обернена до функції $\psi(t)$, має, як і раніше, задовольняти всі умови теореми 1. Зокрема, функція $x(t)$ в межах інтегрування має бути означеною неперервно диференційовною функцією $t$ і при зміні $t$ від $\alpha$ до $\beta$ змінна $x(t)$ має змінюватися від $a$ до $b$.

Найзручніше виконувати заміну монотонно диференційовними функціями. Такі функції гарантують однозначність як прямої, так і оберненої функцій.

***Приклади***

1. Обчислити інтеграл $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

○ Нехай $x = a \sin t$. Переконуємось, що ця функція задовольняє всі умови теореми 1, причому якщо $x = 0$, то $0 = a \sin t$, звідки $t = 0$; якщо $x = a$, то $a = a \sin t$, звідки $t = \frac{\pi}{2}$. Отже, $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$. (Ця функція не є монотонною, тому існують й інші пари розв'язків, які задовольняють умови теореми 1 і можуть бути межами: $\alpha = 2\pi$, $\beta = \frac{5\pi}{2}$; $\alpha = -2\pi$, $\beta = -\frac{3\pi}{2}$ тощо.)

Далі маємо

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \ \bullet$$

2. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx.$$

○ Нехай $\sqrt{e^x - 1} = t$, звідки $\alpha = \sqrt{e^0 - 1} = 0$, $\beta = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2$. Отже, якщо $x$ змінюється від 0 до $\ln 5$, то нова змінна $t$ змінюється від 0 до 2. Функція $x = \ln (t^2 + 1)$, обернена до функції $t = \sqrt{e^x - 1}$, на відрізку [0; 2] є монотонною і неперервною разом з похідною $x' = \frac{2t}{t^2 + 1}$ на цьому відрізку. Маємо

$$I = \int_0^2 \frac{(t^2 + 1\ \ t \cdot 2t dt}{(t^2 + 4)(t^2 + 1)} = 2\int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} =$$

$$= 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right) dt = 2\left(t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \pi. \ \bullet$$

3. Чи можна обчислити підстановкою $x = \sin t$ інтеграл

$$\int_0^2 x \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx.$$

○ Ні, тому що змінні $t$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ відповідає змінна $x$ не на відрізку [0; 2], а на відрізку [—1; 1] ($|\sin x| \leqslant 1$). ●

4. Довести, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx,$$

коли $f(x)$ — парна функція;

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \text{ коли } f(x) \text{ — непарна функція.}$$

○ Маємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

У першому інтегралі виконаємо підстановку $x = -t$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx.$$

Далі дістаємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\,dx.$$

Якщо функція парна, то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$, а якщо непарна, то $f(-x) + f(x) = 0$. ●

Знайдені формули дуже корисні. Можна, наприклад, зразу, не виконуючи обчислень, сказати, що

$$\int_{-a}^{a} x^3 \cos x\,dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \cos^4 x\,dx = 0;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^5 \sin^2 x\,dx = 0 \quad \text{тощо.}$$

***Теорема 2.*** *Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a; b]$ неперервні похідні, то справедлива формула*

$$\int_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_{a}^{b} v\,du. \tag{50}$$

○ Оскільки функція $uv$ є первісною функції $(uv)' = u'v + uv'$, то за формулою Ньютона — Лейбніца дістанемо

$$\int_{a}^{b} (u'v + uv')\,dx = uv\Big|_a^b.$$

Скориставшись лінійністю визначеного інтеграла (п. 2.4), дістаємо формулу (50). ●

Формула (50) називається *формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла.*

7*

Всі зауваження відносно формули (6) інтегрування частинами невизначеного інтеграла переносяться і на формулу (50).

*Приклади*

Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ .

○ а) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, & dv = x\,dx \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = \frac{1}{2}x^2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}x^2\ln x\,\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x\,dx =$

$= \frac{1}{4}(e^2 + 1)$;

б) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = x\,dx \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx, & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 -$

$-\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \int\limits_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - (x - \operatorname{arctg} x)\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x}, \quad x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix}\right| = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = \left|\begin{matrix} u = t, & dv = \sin t\,dt \\ du = dt, & v = -\cos t \end{matrix}\right| =$

$= 2\left(-t\cos t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt\right) = 2$;

г) $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \sin^{n-1} x, \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx, \end{matrix}\right.$

$\left.\begin{matrix} dv = \sin x\,dx \\ v = -\cos x \end{matrix}\right| = -\sin^{n-1} x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx = (n-1)\,\times$

$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$

Отже, $I_n = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n$, звідки

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Дістали рекурентну формулу, за якою інтеграл $I_n$ послідовно зводиться до інтеграла

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0\, dx = \frac{\pi}{2},$$

або до інтеграла

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

**Наприклад,**

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3};$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}.$$

Методом індукції можна довести, що

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

(Символ $n!!$ означає добуток натуральних чисел, які не перевищують $n$ і однієї з ним парності.)

Так,

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256};$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{128}{315}. \quad ●$$

## 2.6. Невласні інтеграли

В п. 2.2 ми ввели визначений інтеграл як границю інтегральних сум, передбачаючи при цьому, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція на цьому відрізку обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на $n$ частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невласного інтеграла — інтеграла від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

1°. *Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).*

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{51}$$

її називають *невласним інтегралом першого роду* і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{52}$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{53}$$

У цьому випадку інтеграл (52) називають *збіжним*, а підінтегральну функцію $f(x)$ — *інтегровною на проміжку* $[a; +\infty)$.

Якщо ж границя (51) не існує або нескінченна, то інтеграл (52) називається також невласним, але *розбіжним*, а функція $f(x)$ — *неінтегровною на* $[a; +\infty)$.

Аналогічно інтегралу (53) означається невласний інтеграл на проміжку $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{54}$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{55}$$

де $c$ — довільне дійсне число. Отже, інтеграл зліва у формулі (55) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа. Можна довести, що інтеграл, визначений формулою (55), не залежить від вибору числа $c$.

З наведених означень видно, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею означеного інтеграла із змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a; +\infty)$ і коли інтеграл (53) збігається, то природно вважати, що він виражає площу необмеженої області (рис. 7.12).

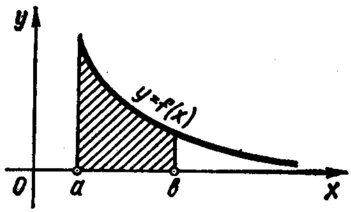



Рис. 7.12

*Приклад*

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos 2x dx$;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x dx$; г) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in R$.

○ а) За формулою (53) маємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже інтеграл а) збігається.

б) $$\int_{-\infty}^{0} \cos 2x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \cos 2x dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{\sin 2x}{2}\Big|_a^0 = \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} (\sin 0 - \sin 2a) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \sin 2a.$$

Оскільки ця границя не існує при $a \to -\infty$, то інтеграл б) розбіжний.

в) $$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b\to+\infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (e^b - e^0) = +\infty.$$

Отже інтеграл в) розбіжний.

г) Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty,$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to +\infty} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже інтеграл г) є збіжним при $\alpha > 1$ і розбіжним при $\alpha \leqslant 1$. ●

У розглянутих прикладах обчислення невласного інтеграла грунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Наводимо без доведення деякі ознаки збіжності.

***Теорема 1.*** *Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і задовольняють умову $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, то із збіжності інтеграла*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx \tag{56}$$

*випливає збіжність інтеграла*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \tag{57}$$

*а із розбіжності інтеграла (57) випливає розбіжність інтеграла (56).*

Наведена теорема має простий геометричний зміст (рис. 7.13); якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області є також скінченне число; якщо площа меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.

***Приклад***

Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^6+5}}$; $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin x + \ln x}{\sqrt{x}}\, dx$.

○ а) Оскільки $\forall x \in [1; +\infty)$:

$$0 < \frac{x}{\sqrt{x^6+5}} < \frac{1}{x^2}$$

і інтеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається, то за теоремою 1 заданий інтеграл також збігається.

б) Цей інтеграл розбігається, бо $\forall x \in [2, +\infty)$:

$$\frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

і інтеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбігається. ●

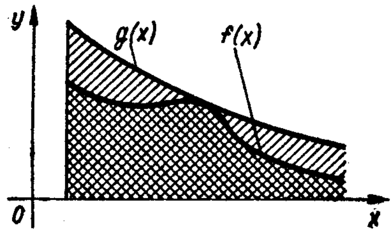



Рис. 7.13

*Теорема 2. Якщо існує границя*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty, \quad (f(x) > 0,\ g(x) > 0),$$

*то інтеграли (56) і (57) або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.*

Ця ознака іноді виявляється зручнішою, ніж теорема 1, бо не потребує перевірки нерівності $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

*Приклад*

Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1}\, dx.$$

○ Оскільки інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається і

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1,$$

то заданий інтеграл також збігається. ●

В теоремах 1 і 2 розглядались невласні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива така теорема.

**Теорема 3.** Якщо інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$.

*Приклад*

Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+3\sin x}{x^3}\, dx$.

○ Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оскільки

$$\left|\frac{1+3\sin x}{x^3}\right| \leqslant \frac{4}{x^3} \text{ і } \int_1^{\infty} \frac{4}{x^3}\,dx = 2,$$

то заданий інтеграл збігається. ●

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не випливає, взагалі кажучи, збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Ця обставина виправдовує такі означення.

Якщо разом з інтегралом $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається й інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називають *абсолютно збіжним*, а функцію $f(x)$ — *абсолютно інтегровною на проміжку* $[a; +\infty)$.

Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називають *умовно (або неабсолютно) збіжним*.

Тепер теорему 3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збіжність інтеграла. Якщо ж невласний інтеграл збігається умовно, то застосовують більш глибокі ознаки збіжності [11].

***Приклад***
Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{b^2+x^2}\,dx \quad (a;\ b \neq 0).$$

○ Оскільки

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{1}{b} \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}\Big|_0^a = \frac{\pi}{2b} \text{ і } 0 \leqslant \left|\frac{\sin ax}{b^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{b^2+x^2},$$

то за теоремою 3 інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin ax}{b^2+x^2}\right| dx$ збігається. Отже, збігається, причому абсолютно, і заданий інтеграл, а функція $f(x) = \frac{\sin ax}{b^2+x^2}$ на проміжку $[0; +\infty)$ є абсолютно інтегровною. ●

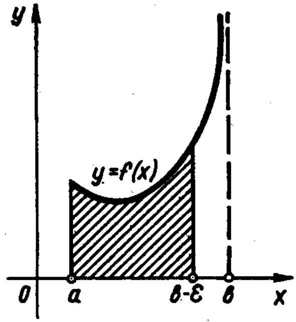


Рис. 7.14

2°. *Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).*

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$. Точку $x = b$ назвемо *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$ (рис. 7.14). Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b - \varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$; тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{58}$$

її називають *невласним інтегралом другого роду* і позначають так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{59}$$

Отже, за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{60}$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (59) існує або збігається. Якщо ж границя (58) нескінченна або не існує, то інтеграл (59) також називають невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо $x = a$ — особлива точка (рис. 7.15), то невласний інтеграл визначається так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c_0 \in (a; b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int\limits_a^{c_0} f(x)\,dx$ і $\int\limits_{c_0}^{b} f(x)\,dx$ за означенням покладають (рис. 7.16).

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{c_0} f(x)\,dx + \int\limits_{c_0}^{b} f(x)\,dx.$$

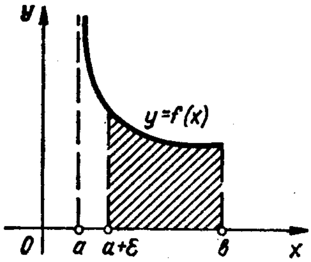



Рис. 7.15

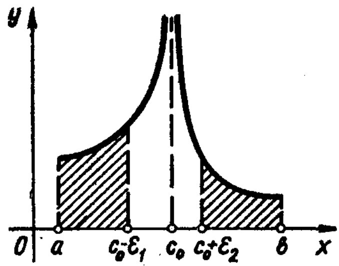



Рис. 7.16

Нарешті, якщо $a$ та $b$ — особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_c^b f(x)\,dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

де $c$ — довільна точка інтервалу $(a;\ b)$.

*Приклад*

Обчислити невласні інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

○ а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$

$\displaystyle = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Отже, інтеграл а) збіжний.

б) Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1; \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to +0} \ln x\,\Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon = +\infty.$$

**Таким чином, інтеграл б) збігається при $0 < \alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geqslant 1$.** ●

Сформулюємо тепер ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

***Теорема 4.*** *Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a; b)$, мають особливу точку $x = b$ і задовольняють умову $0 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.*

***Приклад***

Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 5x^4}$.

○ Заданий інтеграл збігається, бо

$$\forall x \in (0;\ 1] : 0 < \frac{1}{\sqrt{x} + 5x^4} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

і збігається інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. ●

***Теорема 5.*** *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a; b)$ неперервні, додатні і мають особливість в точці $x = b$, тоді якщо існує границя*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

*то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ і $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.*

***Приклад***

Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

○ Функції $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ та $g(x) = \frac{1}{x}$ мають особливість в точці $x = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, і інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ розбігається, то заданий інтеграл також розбігається. ●

*Теорема 6.* *Якщо $x = b$ — особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ також збігається.*

*Приклад*

Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$.

○ Заданий інтеграл збігається, тому що $\left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ і збігається інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$. ●

## 2.7. Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай треба обчислити визначений інтеграл $I = \int_a^b f(x)\,dx$, де $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$ функція. Якщо можна знайти первісну $F(x)$ від функції $f(x)$, то цей інтеграл обчислюється за формулою Ньютона — Лейбніца: $I = F(b) - F(a)$. Якщо ж первісна не є елементарною функцією, або функція $f(x)$ задана графіком чи таблицею, то формулою Ньютона — Лейбніца скористатись вже не можна. Тоді визначений інтеграл обчислюють наближено. Наближено обчислюють визначений інтеграл і тоді, коли первісна функція $F(x)$ хоч і є елементарною, але точні її значення $F(b)$ і $F(a)$ дістати не просто.

Наближені методи обчислення визначеного інтеграла здебільшого грунтуються на геометричному змісті визначеного інтеграла: якщо $f(x) \geqslant 0$, то інтеграл $I$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Ідея наближеного обчислення інтеграла полягає в тому, що задана крива $y = f(x)$ замінюється новою лінією, «близькою» до заданої. Тоді шукана площа наближено дорівнює площі фігури, обмеженої зверху цією лінією.

**1°.** *Формули прямокутників.* Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ від неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$. Поділимо відрізок $[a; b]$ на $n$ рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

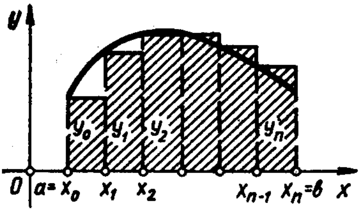



Рис. 7.17

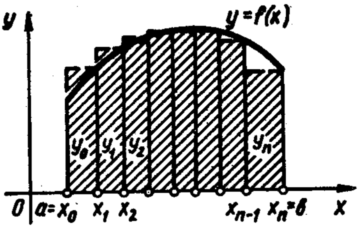



Рис. 7.18

і знайдемо значення функції $f(x)$ в цих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \ \ldots, \ f(x_n) = y_n.$$

Замінимо задану криволінійну трапецію (рис. 7.17) ступінчатою фігурою, що складається з $n$ прямокутників. Основи цих прямокутників однакові і дорівнюють $\frac{b-a}{n}$, а висоти збігаються із значеннями $y_i$ в початкових точках частинних інтервалів. Площа ступінчатої фігури і буде наближеним значенням визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k). \quad (61)$$

Якщо висоти прямокутників є значення $y_i$ в кінцевих точках частинних інтервалів (рис. 7.18), то

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \quad (62)$$

Можна довести, що похибка наближеної формули зменшиться, якщо висотами прямокутників взяти значення функції в точках $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ (середини відрізків $[x_{k-1}, x_k]$), (рис. 7.19); тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right). \quad (63)$$

Формули (61) — (63) називаються *формулами прямокутників*.

2°. *Формула трапецій*. Замінимо криву $f(x)$ не ступінчатою лінією, як у попередньому випадку, а ламаною (рис. 7.20), сполучивши сусідні точки $(x_i, y_i)$. Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнюватиме сумі площ прямокутних трапецій, обмежених зверху відрізками цієї ламаної.

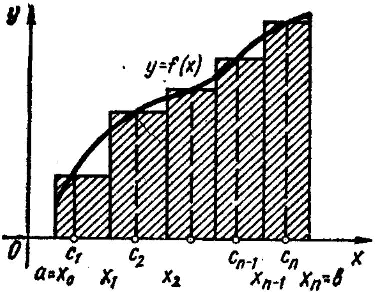



Рис. 7.19

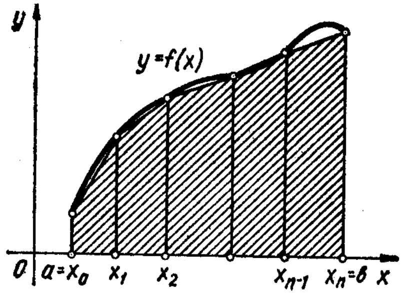



Рис. 7.20

Площа $k$-ї трапеції дорівнює $\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$, де $y_{k-1}$ і $y_k$ — основи трапеції, а $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ — її висота. Тому

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right). \tag{64}$$

Формула (64) називається *формулою трапецій*.

3°. *Формула Сімпсона*. Під час виведення формули трапеції криву, яка є графіком функцій $y = f(x)$, замінювали ламаною лінією. Щоб дістати точніший результат, замінимо цю криву іншою кривою, наприклад параболою.

Покажемо спочатку, що через три різні точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$, які не лежать на одній прямій, можна провести лише одну параболу $y = ax^2 + bx + c$.

Справді, підставляючи в рівняння параболи координати заданих точок, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3, \end{cases} \tag{65}$$

визначник якої

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) \neq 0,$$

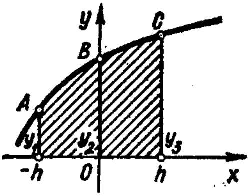



Рис. 7.21

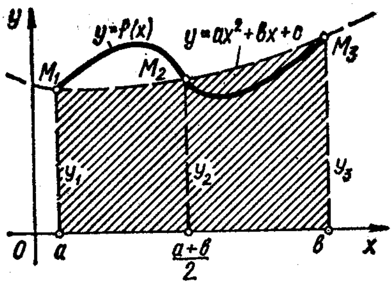



Рис. 7.22

оскільки числа $x_1$, $x_2$, $x_3$ за умовою різні. Отже, ця система має єдиний розв'язок (п. 3.2, гл. 1), тобто коефіцієнти $a$, $b$ і $c$ параболи визначаються однозначно.

Зокрема, розв'язуючи систему (65) для точок $A(-h;\ y_1)$, $B(0;\ y_2)$, $C(h;\ y_3)$, дістанемо

$$a = \frac{y_1 + y_3 - 2y_2}{2h^2}, \quad b = \frac{y_3 - y_1}{2h}, \quad c = y_2.$$

Знайдемо площу $S$ криволінійної трапеції, обмеженої параболою, яка проходить через точки $A$, $B$, $C$, і прямими $x = -h$, $x = h$ і $y = 0$ (рис. 7.21):

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_1 + y_3 - 2y_2 + 6y_2) = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3). \tag{66}$$

Розглянемо тепер криволінійну трапецію $aM_1M_2M_3b$, обмежену кривою $y = f(x)$ (рис. 7.22). Якщо через точки $M_1$, $M_2$ і $M_3$ цієї кривої провести параболу $y = ax^2 + bx + c$, то за формулою (66)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3). \tag{67}$$

Однак, якщо відрізок $[a;\ b]$ досить значний, то формула (67) даватиме велику похибку. Щоб збільшити точність, розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ на парне число $2n$ однакових частин, а криволінійну трапецію — на $n$ частинних криволінійних трапецій.

Застосовуючи до кожної з цих трапецій формулу (67), дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2);$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_2 + 4y_3 + y_4);$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Додамо почленно ці наближені рівності:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{m=0}^{n-2} f(x_{2m+2}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\right]. \quad (68)$$

Ця формула називається *формулою парабол* або *формулою Сімпсона*. Формули (61), (62), (63), (64) і (68) називаються *квадратурними*.

Різницю між лівою і правою частиною квадратурної формули називають її *залишковим членом* і позначають через $R_n(f)$. Абсолютна похибка $|R_n(f)|$ квадратурної формули, очевидно, залежить від числа $n$ — кількості частинних відрізків, на які розбивається відрізок інтегрування $[a; b]$. Наведемо формули, які дозволяють, по-перше, оцінювати абсолютні похибки квадратурних формул, якщо задано $n$, і, по-друге, визначати число $n$ так, щоб обчислити заданий інтеграл з наперед заданою точністю [5].

Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ неперервну похідну $f'(x)$ і $\forall x \in [a; b]: |f'(x)| \leqslant M_1$, то абсолютна похибка наближених рівностей (61) — (64) оцінюється формулою

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_1 (b-a)^2}{4n}.$$

Для функцій $f(x)$, які мають другу неперервну похідну і $\forall x \in [a; b]: |f''(x)| \leqslant M_2$, виконується нерівність

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_2\, b-a)^3}{12n^2},$$

яка справедлива для формул прямокутників і трапецій.

Абсолютна похибка в наближеній рівності (68) оцінюється формулою

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_3 (b-a)^3}{81n^2}.$$

Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ четверту неперервну похідну і $\forall x \in [a; b] : |f^{IV}(x)| \leqslant M_4$, то для формули Сімпсона справедлива оцінка:

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_4 (b-a)^5}{2880 n^4}.$$

*Приклади*

1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$.

○ Це інтеграл від біноміального диференціала, який в елементарних функціях не обчислюється. Обчислимо його наближено. Розіб'ємо відрізок [0; 1] на 10 рівних частин точками $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, ..., $x_9 = 09$, $x_{10} = 1$.

Знайдемо значення функції $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ в цих точках:

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 1{,}00005, \quad f(x_2) = 1{,}00080,$$

$$f(x_3) = 1{,}00404, \quad f(x_4) = 1{,}01272, \quad f(x_5) = 1{,}03278,$$

$$f(x_6) = 1{,}06283, \quad f(x_7) = 1{,}11360, \quad f(x_8) = 1{,}18727,$$

$$f(x_9) = 1{,}28690, \quad f(x_{10}) = 1{,}41421.$$

За формулою прямокутників (61) маємо

$$I \approx \frac{1}{10}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_9)) = 1{,}06990.$$

Оскільки $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4}}$ і $M_1 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f'(x) = \sqrt{2}$, то залишковий член формули прямокутників

$$|R_{10}(f)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 10} = 0{,}03536.$$

Отже, $I = 1{,}06990 \pm 0{,}03536$.

За формулою трапецій (64) дістанемо

$$I \approx \frac{1}{20}(f(x_0) + f(x_{10}) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_9)) = 1{,}09061.$$

Оскільки $f''(x) = \frac{2x^2(x^4 + 3)}{\sqrt{(1 + x^4)^3}}$ і $M_2 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f''(x) = 2\sqrt{2}$, то залишковий член формули трапецій

$$|R_{10}(f)| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{12 \cdot 10^2} \approx 0{,}00236.$$

Отже, $I = 1{,}09061 \pm 0{,}00236$.

За формулою Сімпсона $(2n = 10)$

$$I = \frac{1}{30}(f(x_0) + f(x_{10}) + 2f(x_2) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_8) + 4f(x_1) +$$

$$+ 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_9)) = 1{,}08949.$$

Оскільки $f^{IV}(x) = \frac{12(1 - 14x^4 + 5x^8)}{\sqrt{(1+x^4)^7}}$ і $M_4 = \max\limits_{0<x<1} |f^{IV}(x)| \leqslant 15\sqrt{2}$, то залишковий член формули Сімпсона

$$|R_5(f)| \leqslant \frac{15\sqrt{2}}{2880 \cdot 5^4} < 0{,}000012.$$

Таким чином, $I = 1{,}08949 \pm 0{,}00002$, тобто формула Сімпсона значно точніша формули прямокутників і формули трапецій. ●

**2.** На скільки частин треба розбити відрізок [1; 2], щоб за формулою прямокутників обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ з точністю до 0,001?

Оскільки для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ маємо $0 < f''(x) = \frac{2}{x^3} \leqslant 2$, якщо $x \in [1; 2]$, то

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Якщо взяти $n = 12$, то $R_{12} = \frac{1}{864} > 0{,}001$; якщо $n = 13$, то $R_{13} < \frac{1}{6 \cdot 169} =$

$$= \frac{1}{1014} < 0{,}001.$$

Отже, щоб за формулою прямокутників обчислити заданий інтеграл з точністю до 0,001, достатньо відрізок [1; 2] розбити на 13 рівних частин. ●

## Завдання для самоконтролю

1. У чому полягає задача про площу криволінійної трапеції; роботу сили; шлях; масу?
2. Що називається визначеним інтегралом? Виразити за допомогою визначеного інтеграла поняття, названі в попередньому запитанні.
3. Сформулювати теорему про існування визначеного інтеграла.
4. Сформулювати і довести властивість:

$$\int\limits_a^b (C_1 f(x) + C_2 \varphi(x))\,dx = C_1 \int\limits_a^b f(x)\,dx + C_2 \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

5. Сформулювати і довести властивості адитивності і збереження знака визначеного інтеграла.
6. Сформулювати, довести і геометрично проілюструвати теорему про оцінку інтеграла.
7. Сформулювати, довести і геометрично проілюструвати теорему про середнє значення.
8. Сформулювати і довести теорему про похідну від інтеграла із змінною верхньою межею.
9. Записати і довести формулу Ньютона — Лейбніца.
10. У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі?
11. У чому полягає метод заміни змінної у визначеному інтегралі?
12. Що називається невласним інтегралом першого роду? Навести приклад.
13. Що називається невласним інтегралом другого роду? Навести приклад.
14. Сформулювати ознаки збіжності невласних інтегралів.
15. Вивести формули прямокутників, трапецій і парабол для наближеного обчислення визначених інтегралів.

**16.** Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$; б) $\int\limits_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$; в) $\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln x dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; д) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

**17.** Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; в) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin xdx$; г) $\int\limits_0^1 \ln xdx$.

**18.** Знайти наближене значення $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0{,}69315$ за формулами прямокутників, трапецій і Сімпсона ($n = 10$).

*Відповіді.* **16.** а) $1-\frac{2}{e}$; б) $\frac{464\sqrt{2}}{15}$; в) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$; г) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; д) $\frac{\pi}{4}+$ $+\frac{1}{2}$. **17.** а) 1; б) $\frac{\pi}{4}$; в) розбіжний; г) $-1$.

## § 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Існує дві основні схеми застосування визначеного інтеграла.

Перша схема, або так званий *метод інтегральних сум*, базується на означенні визначеного інтеграла. Шукана величина спочатку наближено зображається у вигляді інтегральної суми, а потім точно виражається через границю цієї суми або через визначений інтеграл. Цим методом ми користувалися для розв'язування задач п. 2.1.

Друга схема, або так званий *метод диференціала*, полягає в тому, що спочатку складається диференціал шуканої величини, а сама шукана величина знаходиться інтегруванням цього диференціала у відповідних межах. Особливо широко метод диференціала застосовується в диференціальних рівняннях (гл. 8).

Розглянемо застосування визначеного інтеграла до розв'язування деяких геометричних і фізичних задач.

### 3.1. Обчислення площ плоских фігур

Як уже зазначалось (п. 2.2), якщо на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geqslant 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 7.4), знаходять за формулою

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{69}$$

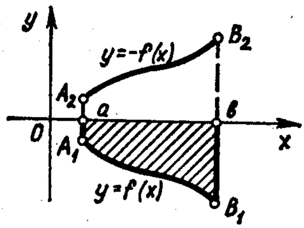



Рис. 7.23

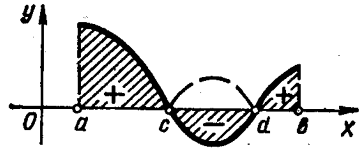



Рис. 7.24

Часто буває, що фігура, площу якої треба знайти, не є криволінійною трапецією. Якщо $f(x) \leqslant 0$ на $[a;\ b]$, то фігура $aA_1B_1b$ лежить під віссю $Ox$ (рис. 7.23). Площа цієї фігури дорівнює площі криволінійної трапеції $aA_2B_2b$, яка обмежена зверху кривою $-f(x) \geqslant 0$; тоді за формулою (69) маємо

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{70}$$

Формули (69) і (70) можна об'єднати в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{71}$$

Ця формула залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ скінченне число разів змінює знак (рис. 7.24):

$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Якщо треба обчислити площу фігури $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 7.25), то за формулою (69)

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx, \tag{72}$$

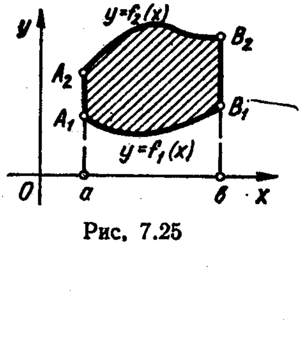



Рис. 7.25

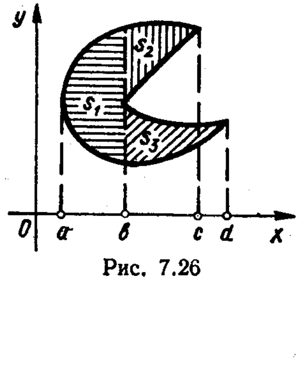



Рис. 7.26

тобто площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$ та $x = b$ за умови, що $f_2(x) \geqslant f_1(x)$, знаходять за формулою (72).

Якщо плоска фігура має складнішу форму (рис. 7.26), то прямими, паралельними осі $Oy$, її треба розбити на скінченну суму (різницю) криволінійних трапецій. Тоді площа фігури дорівнюватиме алгебраїчній сумі площ утворених трапецій.

Розглянемо випадок, коли криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \end{cases}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$. Тоді якщо $x(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ є монотонною, причому $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції досить в інтегралі (69) зробити заміну змінної $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$. Дістанемо формулу

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt. \tag{73}$$

Тепер розглянемо плоску фігуру $OAB$, обмежену кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ (рис. 7.27). Таку фігуру називають *криволінійним сектором.*

Обчислимо площу $S$ сектора $OAB$. Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \cdots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

на відрізки $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$ і на кожному з них візьмемо довільну точку $\xi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$. Елемент $\Delta S_i$ площі, обмеженої кривою $\rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \varphi_{i-1}$ та $\varphi = \varphi_i$, наближено дорівнює площі кругового сектора, обмеженого тими самими променями і дугою кола радіуса $\rho(\xi_i)$:

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i, \quad \Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Сума $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i$ дорівнює площі ступінчатого сектора і є інтегральною сумою для функції $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$, тоді природно вважати, що

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Отже, площа криволінійного сектора обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (74)$$

*Приклади*

1. Знайти площу фігури, обмеженої прямою $y = x$ і параболою $y = 2 - x^2$ (рис. 7.28).

○ Знайдемо абсциси точок перетину даних ліній. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ y = x, \end{cases}$$

дістанемо $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Це і є межі інтегрування.

За формулою (72) знаходимо площу:

$$S = \int_{-2}^{1} ((2 - x^2) - x)\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}. \ ●$$

2. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Оскільки еліпс симетричний відносно обох координатних осей, то шукана площа дорівнює почетвереній площі фігури, яка знаходиться в першій чверті. За формулою (73)

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \ ●$$

3. Обчислити площу, обмежену «трипелюстковою розою» $\rho = a\cos 3\varphi$ (рис. 3.4).

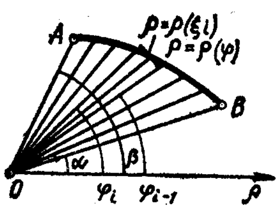



Рис. 7.27

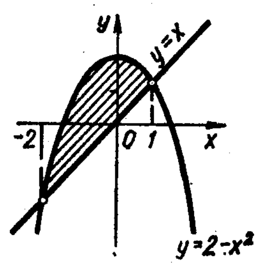



Рис. 7.28

○ Знаходимо площу півпелюстки «рози» і множимо на шість. Тому за формулою (74)

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a \cos 3\varphi)^2 \, d\varphi = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} \, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left( \varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4}. \; ●$$

### 3.2. Довжина дуги

Як відомо (п. 7.3, гл. 5), диференціал $dl$ довжини дуги гладкої кривої, заданої функцією $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, знаходять за формулою $dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Тому довжина дуги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{75}$$

Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$, тому її довжина

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{76}$$

Нехай тепер гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, в полярних координатах. Якщо в рівностях $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ параметром вважати кут $\varphi$, то

$$x'_\varphi = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi, \quad y'_\varphi = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi \text{ і } \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi} =$$
$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

тому з формули (76) знаходимо

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \tag{77}$$

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

обчислюють за формулою, аналогічною формулі (76):

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\, dt.$$

***Приклади***

1. Знайти довжину дуги параболи $y = \frac{x^2}{2}$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

○ Оскільки $y' = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то за формулою (75) одержимо

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})). \quad \bullet$$

2. Знайти довжину однієї арки циклоїди (рис. 3.6):

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

○ Скористаємося формулою (76):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a \sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. \quad \bullet$$

3. Знайти довжину кардіоїди (рис. 3.8, *б*): $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

○ Змінюючи полярний кут від 0 до $\pi$, одержимо половину шуканої довжини. Тому за формулою (77) маємо

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \quad \bullet$$

## 3.3. Об'єм тіла

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі $S$ перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад $Ox$: $S = S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 7.29).

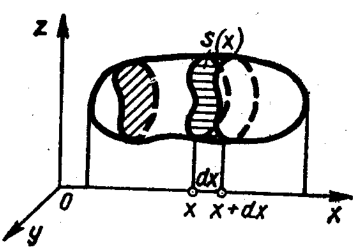



Рис. 7.29

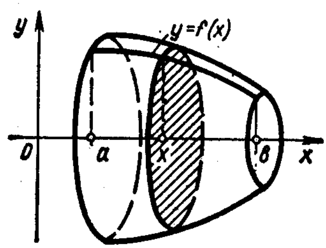



Рис. 7.30

Перетнемо тіло двома площинами, які проходять через точки $x$ та $x + dx$, перпендикулярно до осі $Ox$. Тоді утворену між перерізами фігуру можна вважати циліндром з основою $S(x)$ і висотою $dx$, тому диференціал об'єму $dV = S(x)\,dx$, і якщо $x$ змінюється від $a$ до $b$, то об'єм тіла

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{78}$$

Формула (78) називається *формулою об'єму тіла за площами паралельних перерізів.*

Розглянемо, зокрема, об'єм тіл обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі $Ox$, то утвориться просторова фігура, яка називається тілом обертання (рис. 7.30). Оскільки площа паралельного перерізу $S = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, то, згідно з формулою (78), об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі $Ox$,

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{79}$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y) \geqslant 0$ і прямими $y = c$, $y = d$, $x = 0$, то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі $Oy$, знаходять за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \tag{80}$$

***Приклади***

1. Знайти об'єм еліпсоїда (рис. 3.66)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

○ У перерізі еліпсоїда площиною, паралельною площині $Oyz$ на відстані $x$ від неї, утворюється еліпс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{або} \quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Площа такого еліпса (п. 4.1) дорівнює

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

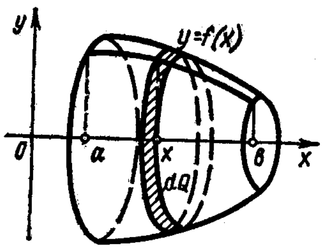



Рис. 7.31

тому за формулою (79) маємо

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Зокрема, якщо $a = b = c = R$, еліпсоїд перетворюється в кулю, і в цьому випадку

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad ●$$

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи $y = x^2$ на проміжку $1 \leqslant x \leqslant 2$ навколо: а) осі $Ox$; б) осі $Oy$.

○ За формулами (79) і (80) маємо

$$V_x = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{31\pi}{5};$$

$$V_y = \pi \int_1^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{15\pi}{2}. \quad ●$$

### 3.4. Площа поверхні обертання

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, обертається навколо осі $Ox$. Перетнемо поверхню обертання двома площинами, які проходять через точки $x$ та $x + dx$, паралельно $Oyz$. Замінимо утворену між перерізами фігуру зрізаним конусом, твірна якого дорівнює $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$, а радіуси основ дорівнюють $f(x)$ та $f(x + dx)$ (рис. 7.31). Якщо висота конуса $dx$ досить мала, то площа $dQ$ бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса, тобто маємо диференціал площі [5]

$$dQ = 2\pi f(x) \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (81)$$

*Приклад*

Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі $Ox$ параболи $y^2 = 2x$, де $0 \leqslant x \leqslant 4$.

○ Маємо

$$y = \sqrt{2x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}; \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{1 + 2x}{2x}}.$$

За формулою (81) знаходимо

$$Q = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \sqrt{\frac{1+2x}{2x}}\, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{1+2x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\pi (1+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{52\pi}{3}. \ \bullet$$

## 3.5. Обчислення роботи

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то, як відомо (п. 2.1), робота $A$, виконана з цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a; b]$, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)\, dx. \tag{82}$$

*Приклади*

1. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси $m$ підняти з поверхні Землі вертикально вверх на висоту $h$, якщо радіус Землі дорівнює $R$.

○ Згідно з законом Ньютона, сила $F$ притягання тіла Землею дорівнює

$$F = \gamma \frac{mM}{x^2},$$

де $M$ — маса Землі; $\gamma$ — гравітаційна стала; $x$ — відстань від центра тіла до центра Землі. Покладемо сталу $\gamma mM = k$, тоді $F(x) = kx^{-2}$, де $R \leqslant x \leqslant R + h$. При $x = R$ сила $F(R)$ дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто $\frac{k}{R^2} = P$, звідки $k = PR^2$, $F(x) = PR^2x^{-2}$. За формулою (82) маємо

$$A = PR^2 \int_R^{R+h} x^{-2}dx = \frac{PRh}{R+h}. \ \bullet$$

2. Яка робота виконується під час стискання гвинтової пружини на 5 см, якщо для стискання пружини на 1 см витрачається сила 4 Н. Стиск гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі.

○ Сила $F$ і стискання $x$ за умовою пропорційні: $F = kx$, де $k$ — стала. При $x = 0{,}01$ м, $F = 4$ Н, тому з рівності $4 = k \cdot 0{,}01$ знаходимо $k = 400$, отже $F(x) = 400\,x$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}05$. Тому за формулою (82) маємо

$$A = 400 \int_0^{0{,}05} xdx = 0{,}5 \text{ Дж}. \ \bullet$$

3. Нехай у циліндрі з рухомим поршнем (рис. 7.32) знаходиться деяка кількість газу. Припустимо, що цей газ розширився і пересунув поршень вправо. Яку роботу виконує при цьому газ?

○ Нехай $s_1$ і $s_2$ — початкова і кінцева відстані поршня від лівого дна циліндра; $s$ — шлях, на який перемістився поршень; $p$ — тиск газу на одиницю площі поршня; $Q$ — площа поршня. Оскільки вся сила, що діє на поршень, дорівнює $pQ$, то

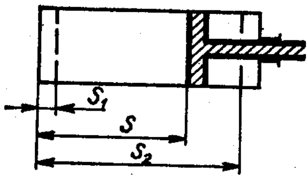



Рис. 7.32

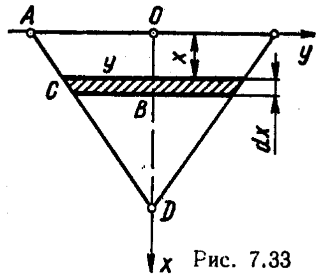



Рис. 7.33

виконана при виштовхуванні поршня робота $A$ виразиться інтегралом

$$A = \int_{s_1}^{s_2} pQds.$$

Позначаючи об'єм даної кількості газу через $V$, дістанемо, що $V = Qs$. Переходячи в інтегралі від змінної $s$ до нової змінної $V$, виразимо роботу через об'єм:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

де $V_1$ і $V_2$ — початкове і кінцеве значення об'єму $V$.

Зокрема, якщо йдеться про ізотермічний процес розширення газу, то, згідно з законом Бойля — Маріотта, $pV = C$ $(C = \text{const})$ і тоді робота

$$A = C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = C \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Якщо розглядається адіабатичний процес розширення ідеального газу, то за законом Пуассона маємо $pV^k = C$, де $k > 1$ — характерна для кожного газу стала. Звідси $p = CV^{-k}$, тому робота

$$A = C \int_{V_1}^{V_2} V^{-k} dV = \frac{C}{1-k} (V_2^{1-k} - V_1^{1-k}). \bullet$$

4. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати рідину з конічного резервуара, оберненого вершиною вниз. Радіус і висота конуса дорівнюють відповідно $R$ і $H$.

○ Вважатимемо елементарний шар рідини, що знаходиться на глибині $x$, циліндром, який має висоту $dx$ і радіус $y$ (рис. 7.33). Тоді вага $dP$ цього шару дорівнює $dP = \gamma g dV = \gamma g \pi y^2 dx$, де $\gamma$ — густина рідини, $g$ — прискорення вільного падіння, $dV$ — об'єм циліндра. З подібності трикутників $AOD$ і $CBD$ знаходимо $y$:

$$\frac{R}{y} = \frac{H}{H-x}; \quad y = \frac{R}{H}(H-x),$$

тому

$$dP = \frac{\pi \gamma g R^2}{H^2}(H-x)^2\, dx.$$

Елементарна робота, яку необхідно затратити, щоб підняти цей шар рідини на висоту $x$, дорівнює $dA = dPx = \frac{\pi\gamma g R^2}{H^2} (H - x)^2 x dx$, тому

$$A = \frac{\pi\gamma g R^2}{H^2} \int_0^H (H - x)\, x dx = \frac{\pi\gamma R^2 H^2}{12}. \bullet$$

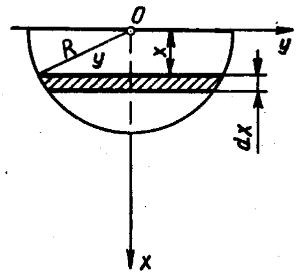


Рис. 7.34

### 3.6. Обчислення тиску рідини на вертикальну пластину

Як відомо, тиск рідини на горизонтальну площадку, занурену в рідину, визначається за законом Паскаля: тиск $P$ рідини на площадку дорівнює її площі $S$, помноженій на глибину занурення $h$, густину рідини $\gamma$ і на прискорення вільного падіння $g$:

$$P = \gamma g h S.$$

Якщо в рідину занурити не горизонтальну площадку, то її різні точки лежатимуть на різних глибинах і цією формулою користуватись не можна. Проте якщо площадка дуже мала, то всі її точки лежать на майже одній глибині, яку вважають за глибину занурення площадки. Це дає змогу знайти диференціал тиску на елементарну площадку, а потім тиск на всю поверхню.

*Приклад*

Знайти тиск рідини на вертикально занурений в рідину півкруг, діаметр якого дорівнює $2R$ і знаходиться на поверхні рідини.

○ Нехай елементарна площадка знаходиться на глибині $x$ (рис. 7.34). Вважаючи її прямокутником з основою $2y$ і висотою $dx$, знайдемо за законом Паскаля диференціал тиску:

$$dP = \gamma g x \cdot 2y dx = 2\gamma g x \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Звідси

$$P = 2\gamma g \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = -\frac{2}{3}\gamma g (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{3} R^3 g\gamma. \bullet$$

**Завдання для самоконтролю**

1. Охарактеризувати дві основні схеми застосування визначеного інтеграла до розв'язування практичних задач.
2. Як обчислити площу плоскої фігури в системі декартових координат? полярних координат? у випадку лінії, заданої параметричними рівняннями?
3. Як обчислити довжину дуги кривої в системі декартових координат? полярних координат? у випадку, коли крива задана параметричними рівняннями?
4. Способом інтегральних сум вивести формулу для обчислення об'єму тіла за площами його паралельних перерізів.
5. Вивести формули для об'ємів тіл обертання.
6. Способом інтегральних сум вивести формулу для обчислення площі поверхні обертання.

7. Знайти площі фігур, обмежених заданими лініями:

а) $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

в) $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$.

8. Знайти довжини дуг кривих:

а) $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$;

б) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \ln \pi$;

в) $\rho = a\sin\varphi$.

9. Еліпс $x^2 + 4y^2 = 4$ обертається навколо осі $Ox$. Знайти об'єм тіла обертання.

10. Фігура, обмежена однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю $Ox$, обертається навколо осі $Ox$. Знайти об'єм тіла обертання.

11. Дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ обертається навколо осі $Ox$. Знайти поверхню обертання.

12. Яку роботу треба затратити, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо силою в 1 Н вона розтягується на 1 см?

13. Знайти роботу, яку потрібно затратити, щоб викачати воду з резервуара, який має форму напівциліндра, радіус якого $R$, а висота $a$.

14. Знайти тиск води на вертикальну пластину, що має форму рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює $a$ і лежить на поверхні рідини. Більша основа трапеції дорівнює $b$, а висота $h$.

15. Знайти масу стержня довжиною 100 см, якщо лінійна густина стержня змінюється за законом $\gamma = (20x + 0{,}15x^2)$ г/см, де $x$ — відстань від одного з кінців стержня.

16. Швидкість точки змінюється за законом $v = (100 + 8t)$ м/с. Який шлях пройде точка за проміжок часу [0; 10]?

*Відповіді*. 7. а) $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41} + 20\ln\frac{4}{5}$; б) $\frac{3\pi a^2}{8}$; в) 2. 8. а) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; б) $\sqrt{2}(\pi - 1)$; в) $\pi a$. 9. $\frac{8\pi}{3}$. 10. $5\pi a^2$. 11. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$. 12. 0,08 Дж. 13. $\frac{2}{3}\gamma g a R^3$. 14. $\frac{1}{6}\gamma g h^2 (a + 2b)$. 15. 150 кг. 16. 1400 м.

## § 4. ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРІВ. ГАММА- І БЕТА-ФУНКЦІЇ

### 4.1. Інтеграли, залежні від параметрів

Розглянемо функцію $f(x, y)$ двох змінних, визначену для всіх $x \in [a; b]$ і всіх $y$ з деякої множини $Y$. Якщо при кожному фіксованому значенні $y \in Y$ функція $f(x, y)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то визначений інтеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \tag{83}$$

є функцією параметра $y$.

Крім того, від параметра може залежати не тільки підінтегральна функція, але й межі інтегрування, тобто

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx. \tag{84}$$

Інтеграли виду (83) і (84) називаються *інтегралами, залежними від параметра*. Ці інтеграли можуть бути і невласними.

Теорія інтегралів, залежних від параметрів, має не тільки теоретичне, але й практичне значення. Не маючи змоги викласти цю теорію детально, розглянемо лише неперервність, диференціювання та інтегрування інтеграла (83) по параметру [12] та наведемо приклади.

***Теорема 1.*** *Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна як функція двох змінних у прямокутнику $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то інтеграл (83) неперервний по параметру $y$ на відрізку $[c; d]$.*

***Приклад***

Довести, що інтеграл $I(y) = \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx$ неперервний по параметру $y$ для всіх $y \in R$.

○ Оскільки функція $f(x, y) = e^{xy} \sin x$ неперервна при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y < +\infty$, то заданий інтеграл, згідно з теоремою 1, неперервний по $y$ при довільному значенні $y \in R$.

До такого самого висновку можна прийти, обчисливши інтеграл. Інтегруючи частинами, дістанемо

$$I(y) = \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx = -e^{xy} \cos x \Big|_0^\pi + y \int\limits_0^\pi e^{xy} \cos x dx = e^{\pi y} + 1 - y^2 \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx.$$

Отже,

$$I(y) = e^{\pi y} + 1 - y^2 I(y), \quad I(y) = \frac{e^{\pi y} + 1}{y^2 + 1}.$$

Звідси й випливає неперервність інтеграла $I(y)$ при будь-якому дійсному значенні параметра $y$. ●

Розглянемо тепер диференціювання інтеграла по параметру.

***Теорема 2.*** *Якщо функція $f(x, y)$ і її похідна $f'_y(x, y)$ — неперервні по $x$ і $y$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то $\forall y \in [c; d]$ справедлива формула*

$$I'_y(y) = \left( \int\limits_a^b f(x, y) dx \right)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x, y) dx. \tag{85}$$

Формула (85) називається *формулою Лейбніца*. Якщо така формула допустима, то кажуть, що функцію (83) можна диференціювати по параметру під знаком інтеграла.

***Приклад***

Знайти похідну $I'_y(y)$, якщо $I(y) = \int\limits_0^\pi e^{xy} \sin x dx$.

○ Маємо $f(x, y) = e^{xy} \sin x$, $f'_y(x, y) = xe^{xy} \sin x$. Оскільки функції $f(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ неперервні для довільних значень $x$ і $y$, то має місце формула (85).

Диференціюючи підінтегральну функцію по $y$ та інтегруючи частинами, дістаємо

$$I'_y(y) = \int_0^{\pi} xe^{xy} \sin x dx = \frac{\pi e^{\pi y}(y^2+1) - 2y(e^{\pi y}+1)}{(y^2+1)^2}.$$

Пропонуємо переконатися, що таким самим буде результат, якщо спочатку обчислити інтеграл $I(y)$, а потім знайти похідну по $y$. ●

З'ясуємо умови, за яких функцію (83) можна інтегрувати по параметру $y$ під знаком інтеграла.

***Теорема 3.*** *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна по $x$ і $y$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то справедлива формула*

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

або

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \tag{86}$$

***Приклад***

Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, де $0 < a < b$.

○ Введемо в прямокутнику $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$ функцію $f(x, y) = x^y$. Умови теореми 3 дотримані, тому, згідно з формулою (86), дістанемо

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy,$$

або

$$\int_a^b \left( \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{x^y}{\ln x} \Big|_a^b \right) dx,$$

звідки

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Отже,

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln|y+1| \Big|_a^b = \ln\left| \frac{b+1}{a+1} \right|. \quad ●$$

Сформулюємо тепер аналоги теорем 1—3 для залежних від параметра невласних інтегралів. Для цього введемо поняття рівномірної збіжності невласних інтегралів.

Нехай функція $f(x, y)$ визначена і неперервна при всіх $x \in [a; +\infty)$ і всіх $y \in Y$.

Якщо $\forall\ y \in Y$ існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = I(y)$, то вона називається *невласним інтегралом, збіжним відносно параметра $y$*, і позначається так:

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx. \tag{87}$$

Інтеграл (87) називається *рівномірно збіжним відносно $y \in Y$*, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться незалежне від $y$ число $B(\varepsilon)$ таке, що при $b > B(\varepsilon)$ і $\forall\ y \in Y$ виконується нерівність

$$\left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Одна з достатніх умов рівномірної збіжності формулюється так.

**Теорема 4.** *Нехай функція $f(x, y)$ неперервна по $x$ при $x \in [a; +\infty)$. Якщо існує функція $\varphi(x, y)$, яка інтегровна по $x$ на проміжку $[a; +\infty)$ і задовольняє при $\forall\ x \in [a; +\infty)$ і $\forall\ y \in Y$ нерівності*

$$|f(x, y)| < \varphi(x, y),$$

*то інтеграл (87) збігається рівномірно відносно параметра $y$.*

Для рівномірно збіжних відносно $y$ інтегралів (87) справедливі такі теореми.

**Теорема 5.** *Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна як функція двох змінних при $a \leqslant x \leqslant +\infty$ і $c \leqslant y \leqslant d$ і інтеграл (87) збігається рівномірно відносно $y \in [c; d]$, то:*

1) *інтеграл (87) неперервний по параметру $y \in [c; d]$;*

2) *справедлива формула*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy; \tag{88}$$

3) *якщо, крім того, похідна $f'_y(x, y)$ неперервна по обох змінних при $x \in [a; +\infty]$ і $y \in [c; d]$, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ збігається рівномірно відносно $y \in [c; d]$, то $\forall\ y \in [c; d]$ виконується рівність*

$$I'_y(y) = \left( \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx. \tag{89}$$

Таким чином, при виконанні умов теореми 4 можна, зокрема, переставляти два інтеграли, з яких один має нескінченний проміжок інтегрування, а другий — скінченний. Проте в багатьох випадках доводиться переставляти інтеграли, в яких обидва проміжки інтегрування є нескінченними, тобто користуватися формулою

$$\int_{c}^{+\infty} dy \int_{a}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx = \int_{a}^{+\infty} dx \int_{c}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy. \qquad (90)$$

Обгрунтування формули (90) — справа досить складна, проте для одного класу функцій має місце таке твердження.

**Теорема 6.** *Нехай* $f\ (x,\ y)$ — *невід'ємна і неперервна по* $x \in [a,\ +\infty)$ і $y \in [c;\ +\infty)$ *функція, і нехай функція* $I\ (y) = \int_{a}^{+\infty} f\ (x,\ y)\,dx$ *неперервна по* $y \in [c;\ +\infty)$, *а функція* $I\ (x) = \int_{c}^{+\infty} f\ (x,\ y)\,dy$ *неперервна по* $x \in [a;\ +\infty)$. *Тоді якщо існує один з інтегралів (90), то існує й другий, і ці інтеграли рівні.*

***Приклади***

1. Обчислити інтеграл Пуассона $I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

○ Застосовуючи підстановку $x = ut$, де $u > 0$ — деяка стала, дістанемо

$$I = u \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2t^2} dt.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $e^{-u^2}$ і інтегруючи по параметру $u$ від 0 до $+\infty$, маємо

$$I \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du = I^2 = \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} u\,du \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2u^2} dt = \int_{0}^{+\infty} du \int_{0}^{+\infty} u e^{-u^2(1+t^2)} dt.$$

Оскільки підінтегральна функція $f\ (u,\ t)$ задовольняє умови теореми 6, то, згідно з формулою (90), дістаємо

$$I^2 = \int_{0}^{+\infty} dt \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)} u\,du = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Враховуючи, що $I > 0$, знаходимо

$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ \bullet$$

Зазначимо, що невизначений інтеграл $\int e^{-x^2} dx$ в скінченному вигляді не інтегрується (п. 1.8). Наведемо ще один такий інтеграл.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

○ Розглянемо інтеграл

$$I(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx, \text{ де } y > 0.$$

Формальне застосування формули (89) приводить до розбіжного інтеграла

$$\int\limits_0^{\infty} \cos(xy)\, dx,$$

тобто ця формула для інтеграла $I(y)$ не виконується. Тому введемо множник $e^{-kx}$ і розглянемо інтеграл

$$I(y, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx, \text{ де } k > 0, \ y \geqslant 0.$$

Для цього інтеграла формула (89) виконується, оскільки виконуються всі умови теореми 5: підінтегральна функція $f(x, y) = e^{-kx} \frac{\sin(xy)}{x}$ і її частинна похідна $f'_y(x, y) = e^{-kx} \cos(xy)$ неперервні по $x$ і $y$ при $x \geqslant 0$ і $y \geqslant 0$, а інтеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx} \cos(xy)\, dx$ збігається рівномірно відносно $y$ за теоремою 4, бо $\forall\ y \in [0, +\infty) : |e^{-kx} \cos(xy)| \leqslant e^{-kx}$ і інтеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx} dx$ збігається (п. 2.6).

Отже,

$$I'_y(y, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-kx} \cos(xy)\, dx = \frac{k}{y^2 + k^2}.$$

Інтегруючи цю рівність по $y$ в межах від 0 до $y$, дістанемо

$$I(y, k) = \operatorname{arctg} \frac{y}{k}.$$

Інтеграл $I(y)$ утворюється з $I(y, k)$ при $k \to +0$:

$$I(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx = \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2},$$

зокрема, при $y = 1$ маємо $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. ●

## 4.2. Гамма- і бета-функції

Ці функції відіграють важливу роль у різних розділах математики. Через них, зокрема, виражаються багато визначених інтегралів, для яких відповідні невизначені інтеграли в елементарних функціях не обчислюються.

*Бета-функція,* або *інтеграл Ейлера першого роду,* визначається формулою

$$B(\alpha,\ \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,\quad \alpha>0,\quad \beta>0. \tag{91}$$

Можна довести, що для всіх $\alpha\in(0,+\infty)$ і $\beta\in(0,+\infty)$ інтеграл (91) збігається. Варто зазначити, що відповідний невизначений інтеграл $\int x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx$, згідно з теоремою Чебишева (п. 1.7), виражається через елементарні функції лише в окремих випадках. Отже, бета-функція не є елементарною.

*Гамма-функцією,* або *інтегралом Ейлера другого роду,* називається інтеграл

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad \alpha>0. \tag{92}$$

Покажемо, що невласний інтеграл (92) при $\alpha>0$ збігається. Маємо

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Перший інтеграл в правій частині цієї рівності збігається, бо

$$0<\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx<\int_0^1 x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}.$$

Другий інтеграл також збігається. Справді, якщо $n$ — довільне натуральне число таке, що $n>\alpha-1$, то

$$0<\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx<\int_1^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx<+\infty,$$

в чому можна пересвідчитись, обчислюючи останній інтеграл частинами і враховуючи, що

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=0,\quad k\in N.$$

Отже, інтеграл (92) при $\alpha>0$ збігається і визначає деяку функцію, яку і називають *гамма-функцією* $\Gamma(\alpha)$.

Обчислимо значення $\Gamma(\alpha)$ при $\alpha\in N$. Якщо $\alpha=1$, то

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1. \tag{93}$$

Нехай $n+1 \in N$. Інтегруючи частинами, дістанемо

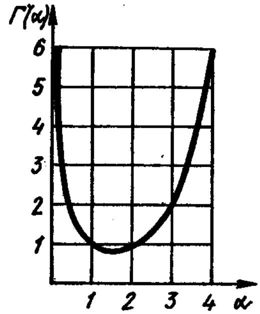


Рис. 7.35

$$\Gamma(n+1) =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}\Bigg|_0^b + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx,$$

звідки

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \tag{94}$$

З рівностей (93) і (94) випливає, що $\forall\, n \in N$:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Таким чином, гамма-функція для цілих значень $n \in N$ виражається через $n!$. Проте вона визначена і для нецілих додатних значень аргументу, тобто продовжує факторіальну функцію з дискретних значень аргументу на неперервні. Гамма-функція не є елементарною функцією. Графік цієї функції зображено на рис. 7.35. Властивості гамма-функції досить добре вивчені і значення її протабульовані в багатьох довідниках, наприклад в [19].

Наводимо без доведення формулу Стірлінга для гамма-функції:

$$\Gamma(\alpha) = \sqrt{2\pi}\,\alpha^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\alpha + \frac{\theta(\alpha)}{12}},$$

де $\alpha > 0$ і $0 < \theta(\alpha) < 1$. Якщо в цій рівності покласти $\alpha = n$ і помножити її на $n$, дістанемо

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n + \frac{\theta(n)}{12}}, \quad n \geqslant 1, \ 0 < \theta(n) < 1. \tag{95}$$

Бета- і гамма-функції пов'язані між собою співвідношенням

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \forall\, \beta > 0: \mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{96}$$

***Приклади***

1. Знайти $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

○ Згідно з формулою (96), при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ маємо

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = -\arcsin(1-2x)\,\Big|_0^1 = \pi,$$

отже, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ●

2. Обчислити інтеграл Ейлера—Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

○ Враховуючи результат попереднього прикладу, дістанемо

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ ●$$

3. Виразити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^{\alpha})^{\beta}}$ через бета-функцію і обчислити його наближено при $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$.

○ Маємо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^{\alpha})^{\beta}} = \begin{vmatrix} x = y^{\frac{1}{\alpha}} \\ dx = \dfrac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} y^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+y)^{-\beta}dy =$$

$$= \frac{1}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, \ \beta - \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \ \alpha\beta > 1.$$

Зокрема, при $\alpha = 3$ і $\beta = \frac{1}{2}$ згідно з формулою (96) дістанемо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)} \approx \frac{2{,}676 \cdot 5{,}566}{3\sqrt{\pi}} \approx 2{,}804. \ ●$$

### Завдання для самоконтролю

1. Які інтеграли називаються інтегралами, залежними від параметра?
2. Сформулювати теореми про неперервність, диференціювання та інтегрування інтеграла, залежного від параметра.
3. Дати означення гамма-функції $\Gamma(\alpha)$.
4. Довести, що $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in N$.
5. Дати означення бета-функції $B(\alpha, \beta)$. Як пов'язані між собою бета- та гамма-функції?
6. Довести, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin^{\alpha} x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}, \quad \alpha > -1.$$

*Вказівка.* Скористатись підстановкою $\sin x = \sqrt{t}$.

# СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. *Беклемышев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—М.: Наука, 1987.— 320 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.— М.: Наука, 1986.— 544 с.
3. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 151 с.
4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Наука, 1983.— 228 с.
5. *Бугров Я. С, Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1988.— 431 с.
6. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения: Кратные интегралы. Ряды.— М. : Наука, 1989.— 464 с.
7. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения.— К.: Вища шк., 1989.— 384 с.
8. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М. : Наука, 1985.— 392 с.
9. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу: В 3 ч.— К.: Вища шк., 1990— 1992.— Ч. 1.— 383 с; Ч. 2.— 366 с; Ч. 3.— 359 с.
10. *Дадаян А. А., Дударенко В. А.* Алгебра и геометрия.— Минск: Вышэйш. шк., 1989. — 288 с.
11. *Дадаян А. А., Дударенко В. А.* Математический анализ.— Минск: Вышэйш. шк., 1990.— 428 с.
12. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ: Справ. пособие.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985.— 527 с.
13. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции.— М.: Наука, 1984.— 383 с.
14. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1988.— 224 с.
15. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3 т.— М.: Высш. шк., 1988.
16. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа.— М.: Высш. шк., 1989.— 583 с.
17. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики.— М. : Наука, 1989.— 656 с.
18. *Мантуров О. В.* Курс высшей математики.— М.: Высш. шк., 1991.— 448 с.
19. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.— М.: Наука, 1984.— 831 с.

20. *Математическая* энциклопедия: В 5 т.— М.: Сов. энцикл., 1977–1985. — Т. 1–5.
21. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М.: Высш. шк., 1986.—399 с.
22. *Овчинников П. Ф., Лисицын Б. М., Михайленко В. М.* Высшая математика.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1989.— 679 с.
23. *Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Высшая математика. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987.— 552 с.
24. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 3 т. — М.: Наука, 1985. — Т. 1—3.
25. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 329 с.
26. *Федорюк М. В.* Обыкновенные диференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985. — 447 с.
27. *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика.— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1986.— 512 с.
28. *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М.* Вища математика.— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1985.— 391 с.
29. *Щипачев В. С.* Высшая математика.— М.: Высш. шк., 1991.— 479 с.
30. *Шестаков А. А., Малышева И. А., Полозков Д. П.* Курс высшей математики.— М.: Высш. шк., 1987.— 320 с.

ЗМІСТ

*Навчальне видання*

**ДУБОВИК Володимир Панасович**
**ЮРИК Іван Іванович**

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

***У трьох частинах***

*Частина друга*

*2-ге видання*

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*

Відповідальний за випуск *І Подолін*
Редактор *Є. Бондарчук*

Підписано до друку 14.01.08. Формат 60x90/16. Папір офсетний.
Гарнітура літературна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 15,0.
Наклад 3500. Зам. №1902/093.

ТОВ «Веста». Свідоцтво ДК № 2540 від 26.06.2006.
61064 м. Харків, вул. Бакуніна, 8а.

Адреса редакції: 61145, Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Віддруковано з готових діапозитивів у ТОВ «Навчальний друк»,
62300, Харківська обл., м. Дергачі, вул. Петровського, 163а.
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК № 58 від 10.06.2002 р.

## ДЛЯ НОТАТОК

# ДЛЯ НОТАТОК