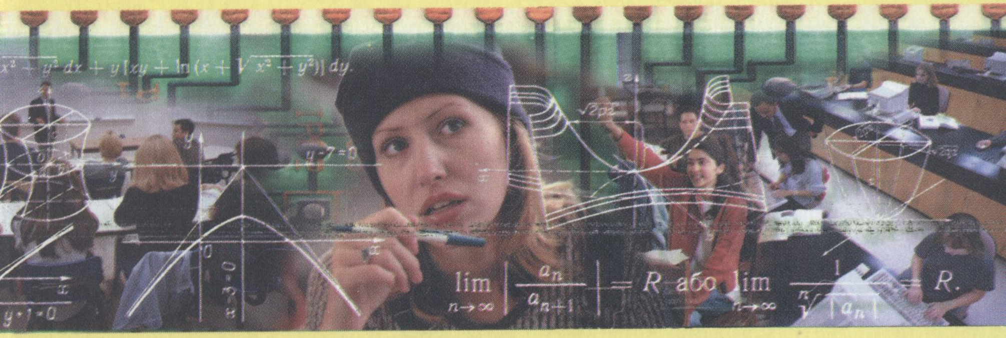
ВИЩА ШКОЛА

В. П. Дубовик, І. І. Юрик

ВИЩА МАТЕМАТИКА

III Частина

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В. П. Дубовик, І. І. Юрик

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

III

ЧАСТИНА

2-ге видання

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Харків
"Веста"
2008

ББК 22.11я73
Д79

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(Лист № 1.4/18-Г-1475.1 від 06.09.07)

Рецензенти: *Л. Ф. Баранник*, д-р фіз.-мат. наук, проф.; *В. О. Марченко*, канд. фіз.-мат. наук (Полтавський пед. ін-т); *В. Б. Рудницький*, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Хмельницький технолог. ін-т).

Дубовик В. П., Юрик І. І.
Д79 Вища математика: Навч. посібн. — У трьох частинах. Ч. 3. — 2-ге вид. — Х.: Веста, 2008. — 232 с.: іл.

ISBN 978-966-08-3056-1 (повне зібрання)

ISBN 978-966-08-3059-2 (частина 3).

У третій частині посібника розглянуто звичайні диференціальні рівняння, ряди, кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.
Теоретичний матеріал відповідає навчальній програмі з курсу вищої математики і супроводжується достатньою кількістю прикладів і задач. Особливу увагу приділено прикладній і практичній спрямованості курсу.
Для студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.11я73

ISBN 978-966-08-3056-1
ISBN 978-966-08-3059-2

Частина третя

Глава 8

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними (термін «диференціальне рівняння» введений у 1576 р. Лейбніцем).

Диференціальне рівняння називається *звичайним,* якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і *диференціальним рівнянням у частинних похідних,* якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

§ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші. Геометричний зміст диференціального рівняння

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y')=0, \tag{1}$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Рівняння (1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Диференціальне рівняння (1), нерозв'язне відносно похідної y', називають неявним диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі. Ми, в основному, розглядатимемо саме такі рівняння.

Рівняння (2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \text{ або } -f(x,\ y)\,dx+dy=0.$$

Помноживши останнє рівняння на деяку функцію $Q\,(x,\ y)\neq 0$, дістанемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0, \tag{3}$$

де $P\,(x,\ y)$ і $Q\,(x,\ y)$ — відомі функції. Рівняння (3) зручне тим, що змінні x та y в ньому рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію другої. Приклади диференціальних рівнянь виду (1), (2) і (3):

$$xy'+y^2-1=0;\quad y'=2x-y;\quad (x-3y)\,dx+xydy=0.$$

Знаходження невідомої функції, що входить в деференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. (Якщо не виникатиме напорозумінь, замість терміну «диференціальне рівняння» іноді використовуватимемо термін «рівняння».)

Розв'язком диференціального рівняння (2) на деякому інтервалі $(a;\ b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y=\varphi\,(x)$, яка при підстановці в рівняння (2) обертає його в тотожність по x на $(a;\ b)$, тобто

$$\forall\ x\in(a;\ b):\varphi'(x)\equiv f(x,\ \varphi(x)).$$

Наприклад, функція $y=x\ln x$, $x\in(0;\ +\infty)$, є розв'язком рівняння $xy'-x-y=0$. Дійсно, підставляючи цю функцію та її похідну $y'=\ln x+1$ в дане рівняння, дістаємо тотожність

$$x(\ln x+1)-x-x\ln x\equiv 0;\quad x\in(0;\ +\infty).$$

Неважко переконатися, що розв'язком даного рівняння є також функція $y=x\ln x+Cx$, де C — довільна стала. Надаючи C довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв'язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв'язків.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (2) має розв'язок, дає така теорема Коші [26].

Теорема 1 *(про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція $f\,(x,\ y)$ і її частинна похідна $f'_y\,(x,\ y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0;\ y_0)\in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y=\varphi\,(x)$ рівняння (2), який задовольняє умову*

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0,\ \textit{тобто}\ \varphi\,(x_0)=y_0. \tag{4}$$

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2).

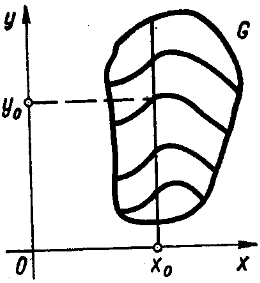


Рис. 8.1

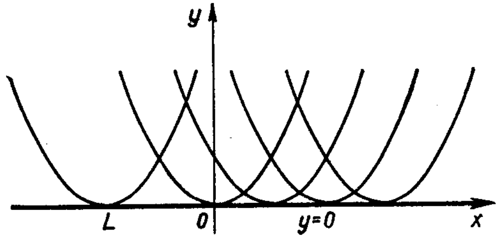


Рис. 8.2

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0; y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0, не виходячи при цьому з області G, то діставатимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (2) має безліч різних розв'язків (рис. 8.1).

Умову (4), згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) = y_0. \tag{5}$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову (5), називається *задачею Коші*. З погляду геометрії розв'язати задачу Коші — це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, $f(x, y)$ або $f'_y(x, y)$ в цих точках розривні), називаються *особливими*. Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком*.

Графік особливого розв'язку називають *особливою інтегральною кривою*. Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної.

Нехай задано рівняння

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{6}$$

де x, y — змінні декартові координати, а C — параметр. Це рівняння визначає сім'ю кривих, які залежать від одного параметра, або, як часто кажуть, *однопараметричну сім'ю кривих*.

Лінія L називається *обвідною однопараметричної сім'ї кривих* (6), якщо вона в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих і якщо в різних точках вона дотикається до різних кривих (рис. 8.2).

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Приклади

1. Рівняння $y' = 2x$ має безліч розв'язків $y = x^2 + C$ (рис. 8.3) — це сім'я парабол. Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші на всій площині Oxy. Це означає, що через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

2. Рівняння $y' = \frac{y}{x}$ має безліч розв'язків $y = Cx$ (рис. 8.4) — це сім'я прямих, що проходять через точку (0; 0). Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші, якщо $x \neq 0$. Тому через кожну точку, яка не лежить на осі Oy, проходить єдина інтегральна крива (пряма). Точка (0; 0) — особлива, через неї проходить безліч інтегральних кривих. Особливими будуть також точки $(0; y_0)$, де $y_0 \neq 0$. Через ці точки не проходить жодної інтегральної кривої.

3. Рівняння $y' = \sqrt{y}$ має сім'ю інтегральних кривих, парабол, $y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2$. Крім того, очевидно, що це рівняння має також розв'язок $y \equiv 0$. Цей розв'язок особливий, бо функція $f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ при $y \equiv 0$ розривна. Пряма $y = 0$ дотикається до сім'ї парабол і є її обвідною (рис. 8.2).

Розглянуті приклади показують, що диференціальне рівняння може мати нескінченну множину розв'язків або сім'ю інтегральних кривих. За певних умов з цієї сім'ї можна виділити єдину криву, яка проходить через задану точку. У зв'язку з цим дамо означення частинного розв'язку диференціального рівняння.

Нехай права частина диференціального рівняння (2) задовольняє в області G умови теореми Коші.

Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C, називається *загальним розв'язком* рівняння (2) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0; y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (2) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом рівняння.*

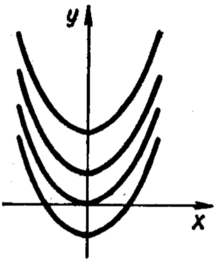


Рис. 8.3

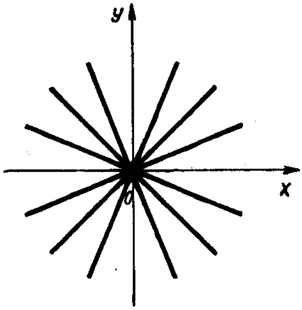


Рис. 8.4

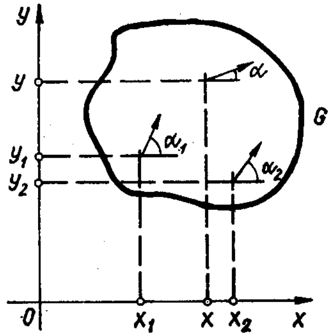


Рис. 8.5

Дамо геометричне тлумачення рівнянню (2). Нехай G — множина точок площини Oxy, в яких задані і неперервні функції $f(x, y)$ і $f'(x, y)$ і нехай точка $M_1(x_1; y_1) \in G$. Підставивши координати точки M_1 в праву частину рівняння (2), знайдемо значення похідної в цій точці:

$$y'|_{M_1} = f(x_1, y_1).$$

Якщо через точку M_1 проходить інтегральна крива рівняння (2), то з геометричного змісту похідної маємо $y'|_{M_1} = \operatorname{tg} \alpha_1$, де α_1 — кут між дотичною до інтегральної кривої в точці M_1 і додатним напрямом осі Ox. Тому точці $M_1(x_1; y_1)$ рівняння (2) ставить у відповідність значення кута

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}(y'|_{M_1}) = \operatorname{arctg} f(x_1; y_1).$$

Аналогічно точці $M_2(x_2; y_2)$ рівняння (2) ставить у відповідність напрям

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} f(x_2; y_2).$$

Отже, кожній точці $M(x; y) \in G$ диференціальне рівняння (2) ставить у відповідність значення кута

$$\alpha = \operatorname{arctg} f(x, y),$$

тому рівняння (2) геометрично задає так зване *поле напрямів*. На рис. 8.5 це поле зображено стрілками (іноді поле напрямів зображають маленькими відрізками). Кожній точці $M(x; y) \in G$ відповідає певна стрілка з кутовим коефіцієнтом $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$. Зрозуміло, що практично ми можемо побудувати лише кілька стрілок, але можна уявити, що стрілки проведені в кожній точці області G.

Розглянемо тепер інтегральну криву рівняння (2). Оскільки напрям дотичної до інтегральної кривої в даній точці збігається з напрямом поля в цій точці, то геометрично задачу інтегрування диференціального рівняння можна тлумачити так: знайти такі криві, напрям дотичних до яких збігається з напрямом поля у відповідних точках.

Таким чином, з погляду геометрії рівняння $y' = f(x, y)$ визначає на площині поле напрямів, а розв'язок цього рівняння — інтегральну криву, яка в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів.

Знаючи поле напрямів диференціального рівняння, можна наближено побудувати його інтегральні криві. Для того щоб полегшити побудову поля напрямів, користуються методом ізоклін. *Ізокліною* називається крива на площині Oxy, в кожній точці якої дотичні до інтегральних кривих мають один і той самий напрям. Отже, усі інтегральні криві, які перетинають ізокліну, в точках перетину нахилені до осі Ox під одним і тим самим кутом. Звідси походить і назва «ізокліна» — лінія однакового нахилу.

Очевидно, для диференціального рівняння (2) рівняння ізокліни, яка відповідає кутовому коефіцієнту $y' = a = \text{const}$, має вигляд

$$f(x, y) = a.$$

Різним значенням a відповідають на площині Oxy різні ізокліни. При цьому напрям кожної ізокліни визначається кутом $\alpha = \operatorname{arctg} a$.

Приклад

Знайти поле напрямів диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$ і інтегральну криву, яка проходить через точку $O(0; 0)$.

○ Ізоклінами тут буде сім'я концентричних кіл $x^2 + y^2 = a$, $a \geqslant 0$. При $a = \frac{1}{2}$, наприклад, ізокліною є коло $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, напрям поля цієї ізокліни визначається кутом $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 26°$. Якщо $a = 1$, маємо ізокліну $x^2 + y^2 = 1$, напрям поля якої визначається кутом $\operatorname{arctg} 1 = 45°$ і т. д. При $a = 0$ дістанемо $x^2 + y^2 = 0$. Цьому рівнянню відповідає єдина точка $O(0; 0)$, тобто ізокліна містить лише одну точку. Напрям поля в цій точці збігається з додатним напрямом осі Ox. Щоб зобразити інтегральну криву, через початкову точку $O(0; 0)$ проводимо криву, яка б в кожній своїй точці мала напрям поля, тобто дотикалась до відповідної стрілки. ●

Переходимо тепер до розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що диференціальне рівняння *інтегрується в квадратурах* (або *зводиться до квадратур*). Зрозуміло, що далеко не всяке диференціальне рівняння, яке інтегрується в квадратурах, має розв'язок, який виражається через елементарні функції. Більше того, дуже часто диференціальне рівняння не можна проінтегрувати не тільки в елементарних функціях, а й у квадратурах. Проте існують окремі типи диференціальних рівнянь, для яких це можливо.

Розглянемо такі рівняння. На жаль, клас інтегровних в квадратурах диференціальних рівнянь надзвичайно вузький.

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\,\varphi(y), \tag{7}$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Права частина рівняння (7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (7) та $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx. \tag{8}$$

Диференціальне рівняння виду (8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Оскільки рівняння (8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Таким чином, рівняння (7) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0. \tag{9}$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)\,f_2(x)$. Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (7) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (9).

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$(x + xy^2)\,dx - (y + yx^2)\,dy = 0.$$

○ Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1 + y^2)\,dx - y(1 + x^2)\,dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1 + x^2)(1 + y^2) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx - \frac{y}{1+y^2}\,dy = 0 \text{ або } \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{2y\,dy}{1+y^2}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\ln(1+x^2) = \ln(1+y^2) + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, \quad C \neq 0. \; \bullet$$

2. Розв'язати рівняння

$$(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2 - x^2y)\,dy = 0.$$

○ Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x+1)\,dx + x^2(1-y)\,dy = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $x^2y^2 \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x+1}{x^2}\,dx + \frac{1-y}{y^2}\,dy = 0,$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int \frac{x+1}{x^2}\,dx + \int \frac{1-y}{y^2}\,dy = C, \quad C \in R,$$

або

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right) dy = C,$$

звідки

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C,$$

або

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C.$$

Рівняння $xy = 0$ має розв'язки $x = 0$ і $y = 0$, тому прямі $x = 0$ та $y = 0$ є інтегральними кривими даного рівняння. Вони не утворюються із загального інтеграла ні при якому значенні C. Отже, розв'язки $x = 0$ та $y = 0$ є особливими і їх слід виписувати додатково до загального інтеграла. ●

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $(1 + x^2)\,dy + y\,dx = 0$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

○ Відокремимо змінні і проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1+x^2} = 0; \quad \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{1+x^2} = C;$$

$$\ln|y| + \operatorname{arctg} x = C.$$

Дістали загальний інтеграл. Використовуючи початкову умову, знайдемо сталу C:

$$\ln 1 + \operatorname{arctg} 0 = C, \text{ звідки } C = 0.$$

Підставивши знайдену сталу в загальний інтеграл, дістанемо шуканий частинний розв'язок:

$$\ln |y| + \operatorname{arctg} x = 0, \text{ звідки } y = e^{-\operatorname{arctg} x}. \ \bullet$$

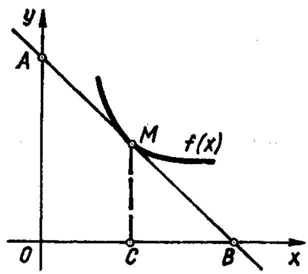


Рис. 8.6

4. Знайти криву, яка проходить через точку (1; 2), коли відомо, що у кожній точці кривої відрізок дотичної, який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

○ Нехай $M(x;\ y)$ — довільна точка шуканої кривої $y = f(x)$. Запишемо рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці M:

$$Y - y = y'(X - x),$$

де $(X;\ Y)$ — довільна точка дотичної (рис. 8.6).

Оскільки за умовою $AM = MB$, то $OC = CB$, звідки $OB = 2OC$, тобто абсциса X точки B дорівнює подвоєній абсцисі x точки C. У точці B дотична перетинає вісь Ox, тому з рівняння дотичної при $y = 0$ дістанемо абсцису X точки B:

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

Дістаємо рівняння $x - \dfrac{y}{y'} = 2x.$

Відокремивши змінні і проінтегрувавши це рівняння, матимемо загальний розв'язок $y = \dfrac{C}{x}$. За умовою $y(1) = 2$, звідки $C = 2$, тому $y = \dfrac{2}{x}$ — рівняння шуканої кривої. ●

Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(ax + by + c), \tag{10}$$

де $a,\ b,\ c$ — задані числа, і покажемо, що заміною

$$u = ax + by + c \tag{11}$$

рівняння (10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Справді, диференціюючи рівність (11) по x, дістанемо $\dfrac{du}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$, тому згідно з (10) маємо рівняння $\dfrac{du}{dx} = a + bf(u)$, у якому при $a + bf(u) \neq 0$ відокремлюються змінні:

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx.$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи u на $ax + by + c$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (10).

Якщо $a + bf(x) = 0$, або, що те ж саме, $\dfrac{du}{dx} = 0$, то, згідно з рівністю (11), рівняння (10) може мати розв'язки $ax + by + c = C$.

Приклад
Розв'язати рівняння $y' = (x + y)^2$.
○ Покладемо $u = x + y$, тоді

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, \text{ або } \frac{du}{dx} = 1 + u^2,$$

звідки $\dfrac{du}{1 + u^2} = dx$.

Інтегруючи це рівняння, знаходимо $\operatorname{arctg} u = x + C$, тобто $\operatorname{arctg}(x + y) = x + C$ — загальний інтеграл заданого рівняння. Інших розв'язків це рівняння не має, бо $1 + u^2 \neq 0$. ●

1.3. Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру* відносно змінних x та y, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Наприклад, функція $f(x, y) = x^2 - 5xy$ — однорідна функція другого виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty) = t^2(x^2 - 5xy) = t^2 f(x, y);$$

функція $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{\sqrt{xy}}$ — однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx) - (ty)}{\sqrt{(tx)(ty)}} = \frac{t(2x - y)}{t\sqrt{xy}} = \frac{2x - y}{\sqrt{xy}} = t^0 f(x, y).$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{12}$$

називається *однорідним,* якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Очевидно, рівняння виду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{13}$$

буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = ux, \tag{14}$$

де u — невідома функція: $u = u(x)$.

Якщо функція (14) є розв'язком диференціального рівняння (12) і

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \text{ то } u + x\frac{du}{dx} = f(x, ux). \tag{15}$$

За умовою $f(x, y)$ — однорідна функція нульового виміру, тобто $f(tx, ty) \equiv f(x, y)$. Поклавши в цій тотожності $y = ux$ і $t = \frac{1}{x}$, дістанемо $f(x, ux) = f(1, u)$, тому рівняння (15) набирає вигляду

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u). \qquad (16)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо $f(1, u) - u \neq 0$, то, відокремлюючи змінні, дістаємо рівняння

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x};$$

проінтегрувавши, знайдемо

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C.$$

Підставимо після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$ і дістанемо інтеграл рівняння (12). Якщо $f(1, u) - u = 0$, то рівняння (16) запишеться у вигляді

$$x\frac{du}{dx} = 0.$$

У цьому випадку рівняння (12) і (13) можуть мати ще розв'язки $y = Cx$ $(x \neq 0)$ та $x = 0$ $(y \neq 0)$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

○ Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Застосувавши підстановку $y = ux$, дістанемо загальний інтеграл даного рівняння:

$$xu' + u = \frac{1 + u^2}{2}; \quad xu' = \frac{1 + u^2}{2} - u;$$

$$xu' = \frac{(u-1)^2}{2}; \quad x\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2};$$

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|; \quad -\frac{2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln|Cx|;$$

$$\frac{2x}{x-y} = \ln|Cx|; \quad Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}.$$

При відокремленні змінних ми ділили на x і на $(u-1)^2$, що можливо при $x \neq 0$ та $u \neq 1$. Точки, в яких $x=0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому пряма $x=0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

Нехай $u=1$, тобто $y=x$. Функція $y=x$ перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв'язком. Цей розв'язок є особливим і його слід вказувати додатково до знайденого інтеграла. ●

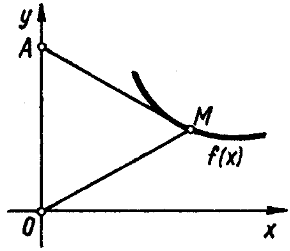


Рис. 8.7

2. Знайти криву, яка проходить через точку (1; 0), якщо відомо, що трикутник, утворений віссю Oy, дотичною до кривої в довільній її точці і радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений, причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy.

○ Нехай $y=f(x)$ — шукана крива. Проведемо дотичну MA в довільній точці $M(x; y)$ кривої до перетину з віссю Oy (рис. 8.7).

За умовою $OM=OA$. Відрізок $OM=\sqrt{x^2+y^2}$, а відрізок OA знайдемо як ординату Y точки A з рівняння дотичної

$$Y-y=y'(X-x);$$

при $X=0$ маємо $OA=Y=y-y'x$. Дістали рівняння $\sqrt{x^2+y^2}=y-y'x$, звідки $y'=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Це однорідне рівняння. Поклавши $y=ux$, дістанемо загальний інтеграл:

$$u'x+u=u-\sqrt{1+u^2}; \quad \frac{du}{dx}x=-\sqrt{1+u^2};$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}; \quad \ln|u+\sqrt{1+u^2}|=-\ln|x|+\ln|C|;$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x}; \quad y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

Використавши початкову умову $y(1)=0$, знайдемо $C=1$. Отже, рівняння шуканої кривої має вигляд $y+\sqrt{x^2+y^2}=1$. ●

Розглянемо тепер рівняння, які можна звести до однорідних. Нехай маємо рівняння виду

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{17}$$

де a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — задані сталі.

Якщо $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0$, то підстановкою $z=a_1x+b_1y+c_1$ рівняння (17) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $\Delta \neq 0$, то можна зробити таку заміну змінних $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, що в лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться рівності

$$a_ix+b_iy+c_i=a_iu+b_iv, \quad i=1,\ 2.$$

Після такої заміни рівняння буде однорідним.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$.

○ Для цього рівняння $\Delta = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$, тому, поклавши $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, дістанемо

$$dx = du, \ dy = dv; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du};$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}.$$

Сталі α і β доберемо так, щоб

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0; \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $\alpha = 1$, $\beta = -1$, тому заміною змінних $x = u + 1$, $y = v - 1$ задане рівняння зводиться до однорідного:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u + v}.$$

За допомогою підстановки $v = uz$ знаходимо загальний інтеграл цього рівняння: $(v - u)^3 = C(u + v)$, $C > 0$. Звідси, враховуючи, що $u = x - 1$, $v = y + 1$, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння

$$(y - x + 2)^3 = C(x + y). \quad \bullet$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)\,y = f(x), \tag{18}$$

де $p(x)$ і $f(x)$ — задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Є кілька методів інтегрування рівняння (18). Один з них (метод Бернуллі) полягає в тому, що розв'язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y = uv, \tag{19}$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ — невідомі функції x, причому одна з цих функцій довільна (але не рівна тотожно нулю).

Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (18), дістанемо

$$u'v + u(v' + p(x)\,v) = f(x).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, доберемо її так, щоб

$$v' + p(x)\,v = 0; \tag{20}$$

тоді

$$u'v = f(x). \tag{21}$$

Розв'яжемо ці рівняння. Відокремлюючи в рівнянні (20) змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \quad \frac{dv}{v} = -p(x)\,dx;$$

$$\ln|v| = -\int p(x)\,dx + \ln|C_1|; \quad v = C_1 e^{-\int p(x)dx}, \quad C_1 \neq 0.$$

Візьмемо за v який-небудь частинний розв'язок рівняння (20), наприклад

$$v = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \tag{22}$$

Знаючи функцію v, з рівняння (21) знаходимо функцію u:

$$du = f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx;$$

$$u = \int f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{23}$$

Підставляючи функції (22) і (23) в (19), знаходимо загальний розв'язок рівняння (18)

$$y = uv = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\,dx + C\right).$$

Приклади

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}.$$

○ Це лінійне рівняння виду (18), в якому

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Маємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x}; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Доберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$; тоді $u'v = \frac{\sin 2x}{x}$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо

$$u'\frac{1}{x} = \frac{\sin 2x}{x}; \quad du = \sin 2x dx; \quad u = -\frac{\cos 2x}{2} + C,$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(C - \frac{1}{2}\cos 2x\right). \bullet$$

2. Знайти розв'язок рівняння $y' + 2yx = 2x$, який задовольняє умову $y(0) = 2$.

○ Поклавши $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, матимемо:

$$u'v + uv' + 2uvx = 2x; \quad u'v + u(v' + 2vx) = 2x;$$

$$v' + 2vx = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -2vx; \quad \frac{dv}{v} = -2xdx; \quad v = e^{-x^2};$$

$$u'e^{-x^2} = 2x; \quad \frac{du}{dx} = 2xe^{x^2}; \quad u = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C.$$

Загальний розв'язок даного рівняння

$$y = uv = Ce^{-x^2} + 1.$$

Знайдемо значення сталої C, при якому частинний розв'язок задовольняє задану початкову умову:

$$2 = Ce^0 + 1, \text{ звідки } C = 1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = e^{-x^2} + 1$. ●

1.5. Рівняння, які зводяться до лінійних. Рівняння Бернуллі та Ріккаті

Розглянемо класи рівнянь, які за допомогою певних перетворень можна звести до лінійних.

1°. *Рівняння виду*

$$y' = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)}, \tag{24}$$

де $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ — задані функції, $R(y) \neq 0$, можна звести до лінійних, якщо x вважати функцією, а y — аргументом: $x = x(y)$; тоді з рівностей (24) і $y'_x x'_y = 1$ (п. 2.5, гл. 5) дістанемо лінійне рівняння відносно x:

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)x = f(y), \text{ де } \varphi(y) = -\frac{P(y)}{R(y)}, \; f(y) = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $x = u(y)v(y)$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(2xy + y^3)dy - dx = 0$.

○ Оскільки

$$y' = \frac{1}{2xy + y^3},$$

то маємо рівняння виду (24). Якщо x вважати функцією y, то відносно x це рівняння стає лінійним:

$$x' - 2yx = y^3.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$x = uv;\quad u'v + uv' - 2uvy = y^3;$$

$$u'v + u(v' - 2vy) = y^3;\quad v' - 2vy = 0;\quad \frac{dv}{v} = 2ydy;$$

$$\ln|v| = y^2 + \ln|C|;\quad v = e^{y^2};\quad \frac{du}{dy}e^{y^2} = y^3;\quad du = y^3e^{-y^2}dy;$$

$$u = \int y^3e^{-y^2}dy = \frac{1}{2}\int y^2e^{-y^2}dy^2 = -\frac{1}{2}e^{-y^2}(1 + y^2) + C;$$

$$x = uv = Ce^{y^2} - \frac{1}{2}(1 + y^2). \bullet$$

2°. *Рівняння виду*

$$f'_y(y)\,y' + p(x)f(y) = q(x), \tag{25}$$

де f, p, q — задані функції, заміною $z = f(y)$ зводиться до лінійного відносно змінної z:

$$z' + p(x)z = q(x). \tag{26}$$

Справді, якщо $z = f(y)$, де $y = y(x)$ — невідома функція, то

$$\frac{dz}{dy} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = f'_y(y)\,y',$$

тому рівняння (25) набирає вигляду (26).

3°. *Рівнянням Бернуллі* називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},\quad \alpha \in R,\ \alpha \neq 0;\ 1. \tag{27}$$

(Рівняння (27) запропонував у 1695 р. Якоб Бернуллі, а в 1697 р. його брат Йоганн Бернуллі це рівняння розв'язав.)

Очевидно, при $\alpha = 0$ це рівняння — лінійне, а при $\alpha = 1$ — з відокремлюваними змінними. Припускаючи $y \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поділимо рівняння (27) на y^{α}, тоді матимемо рівняння виду (25):

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Таким чином, заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння. Слід зазначити, що при $\alpha > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(x^2 \ln y - x)y' - y = 0$.

○ Перетворимо рівняння:

$$y' = \frac{y}{x^2 \ln y - x},$$

звідки $yx' + x = x^2 \ln y$, або

$$x' + \frac{x}{y} = \frac{x^2}{y} \ln y.$$

Маємо рівняння Бернуллі відносно змінної $x = x(y)$. Знайдемо його розв'язки:

$$x = uv; \quad u'v + uv' + \frac{uv}{y} = u^2v^2 \frac{\ln y}{y};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{y}\right) = u^2v^2 \frac{\ln y}{y}; \quad \frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = 0; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}; \quad v = \frac{1}{y};$$

$$\frac{du}{dy}\frac{1}{y} = u^2 \frac{1}{y^2} \frac{\ln y}{y}; \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln y}{y^2} dy;$$

$$u = \frac{y}{1 + \ln y - Cy}; \quad x = uv = \frac{1}{1 + \ln y - Cy}. \bullet$$

4°. *Рівняння виду*

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \tag{28}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — задані функції, називається *рівнянням Ріккаті.*

Якщо p, q, r — сталі числа, то це рівняння інтегрується відокремленням змінних:

$$\int \frac{dy}{r - py - qy^2} = x + C.$$

Коли $q(x) \equiv 0$, рівняння (28) стає лінійним, а у випадку $r(x) \equiv 0$ — рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (28) не інтегрується у квадратурах. Проте якщо відомий його один частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$, то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

Приклад

Розв'язати в квадратурах рівняння $y' + 2y(y - x) = 1$.

○ Задане рівняння є рівнянням Ріккаті. Неважко пересвідчитись, що функція $y = x$ — розв'язок цього рівняння, тому заміна $y = x + z$ зводить його до рівняння Бернуллі:

$$1 + z' + 2(x + z)(x + z - x) = 1$$

або

$$z' + 2zx = -2z^2.$$

Далі маємо

$$z = uv; \quad u'v + uv' + 2uvx = -2u^2v^2;$$

$$u'v + u(v' + 2vx) = -2u^2v^2;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2vx; \quad \frac{dv}{v} = -2xdx; \quad v = e^{-x^2};$$

$$\frac{du}{dx} e^{-x^2} = -2u^2 e^{-2x^2}; \quad -\frac{du}{u^2} = 2e^{-x^2}dx;$$

$$u = \left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1}; \quad z = uv = e^{-x^2}\left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1};$$

отже, розв'язком даного рівняння є:

$$y = x; \quad y = x + z = x + e^{-x^2}\left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1}. \quad \bullet$$

1.6. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник

Рівняння виду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{29}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (29) має вигляд $u(x, y) = C$, де C — довільна стала. Для того щоб рівняння (29) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{30}$$

З'ясуємо методику інтегрування рівнянь в повних диференціалах. Якщо для рівняння (29) умова (30) виконується, то невідома функція $u(x, y)$ задовольняє рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \tag{31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{32}$$

Інтегруючи рівність (31) по x, визначимо функцію $u(x, y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$u(x, y) = \int P(x, y)\,dx = F(x, y) + \varphi(y), \tag{33}$$

де $F(x, y)$ — первісна функції $P(x, y)$ по x. Диференціюючи рівність (33) по y і враховуючи (32), дістаємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y).$$

Інший спосіб розв'язування рівняння в повних диференціалах наводиться в п. 3.9 (гл. 10).

Приклад

Розв'язати рівняння

$$(3y^2 + 2xy + 2x)\,dx + (6xy + x^2 + 3)\,dy = 0.$$

○ У даному випадку

$$P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x, \quad Q(x, y) = 6xy + x^2 + 3,$$

Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + 2x,$$

то ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3. \tag{34}$$

Інтегруючи, наприклад, перше з рівнянь (34) по x (вважаючи y сталою), маємо

$$u(x, y) = 3xy^2 + x^2y + x^2 + \varphi(y), \tag{35}$$

де $\varphi(y)$ — довільна диференційовна функція y.

Диференціюючи рівність (35) по y, згідно з другим рівнянням (34), дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + \frac{d\varphi}{dy} = 6xy + x^2 + 3,$$

тобто $\frac{d\varphi}{dy} = 3$, звідки $\varphi(y) = 3y + C_1$, тому

$$u(x, y) = 3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y + C_1.$$

Отже, загальний інтеграл заданого рівняння виражається рівністю

$$3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y = C. \bullet$$

Таким чином, рівняння в повних диференціалах інтегрується досить просто. У зв'язку з цим виникає питання, а чи не можна множенням на певний множник $\mu(x, y)$ довільне рівняння в диференціальній формі (3) звести до рівняння в повних диференціалах? Виявляється, що за певних умов це цілком можливо.

Функція $\mu(x, y)$ називається *інтегрувальним множником* рівняння (29), якщо після домножування на неї цього рівняння воно стає рівнянням у повних диференціалах. Можна довести, що всяке диференціальне рівняння першого порядку, яке задовольняє умовам теореми Коші, має безліч інтегрувальних множників.

Розглянемо методи знаходження інтегрувальних множників $\mu(x, y)$. Загального методу знаходження функцій $\mu(x, y)$ немає. Їх можна знайти лише в деяких окремих випадках. Складемо рівняння для інтегрувальних множників. Якщо $\mu = \mu(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (29), то рівняння $P\mu dx + Q\mu dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах. Тому, згідно з умовою (30), маємо

$$\frac{\partial (P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial (Q\mu)}{\partial x},$$

тобто

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

звідки

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

або

$$P\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (36)$$

Отже, щоб дістати інтегрувальний множник, треба знайти який-небудь частинний розв'язок рівняння (36). Це рівняння є диференціальним рівнянням з частинними похідними відносно невідомої функції $\mu(x, y)$. У загальному випадку задача знаходження $\mu(x, y)$ з рівняння (36) значно складніша, ніж розв'язування самого рівняння (29).

Розглянемо два випадки, коли рівняння (36) спрощується і інтегрувальний множник рівняння (29) можна знайти. Припустимо, що рівняння (29) має інтегрувальний множник, який залежить лише від x, тобто $\mu = \mu(x)$; тоді в рівнянні (36) $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=0$ і для знаходження μ матимемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right), \qquad (37)$$

з якого однією квадратурою визначається $\ln\mu$, а потім і μ. Зрозуміло, що рівняння (37) має зміст лише в тому випадку, коли вираз $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ не залежить від y, а залежить лише від x.

Аналогічно якщо вираз $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ залежить лише від y і не залежить від x, то інтегрувальний множник є функцією однієї змінної y і його знаходять з рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (38)$$

Про інші способи побудови інтегрувального множника можна довідатись з [35].

Приклад

Розв'язати рівняння $(x^2y^2-1)\,dx+2x^3y\,dy=0$.

○ Маємо

$$P(x, y)=x^2y^2-1, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y;$$

$$Q(x, y)=2x^3y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y.$$

Оскільки рівність (30) не виконується, то задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Проте $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{-4x^2y}{2x^3y}=-\frac{2}{x}$, тому рівняння має інтегрувальний множник, який залежить лише від x. Складаємо рівняння (37) і розв'язуємо його:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{2}{x}; \quad \ln\mu = -2\ln|x| + \ln|C|; \quad \mu = \frac{C}{x^2}, \quad C \neq 0.$$

Візьмемо інтегрувальним множником функцію $\mu = \frac{1}{x^2}$ і помножимо обидві частини заданого рівняння на цей множник. Дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx + 2xydy = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння (див. попередній приклад), знайдемо, що загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$xy^2 + \frac{1}{x} = C. \; ●$$

1.7. Диференціальні рівняння, нерозв'язувані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро

Нехай маємо рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{39}$$

яке важко або неможливо розв'язати відносно похідної y'.

Розглянемо деякі інтегровні в квадратурах класи таких рівнянь.

1°. Нехай *рівняння* (39) *залежить лише від* y':

$$F(y') = 0. \tag{40}$$

Якщо алгебраїчне рівняння $F(x) = 0$ має хоча б один дійсний корінь $x = k$, то рівняння (40) має загальний інтеграл

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0, \tag{41}$$

де C = довільна стала.

Справді, оскільки рівняння $y' = k$ інтегрується: $y = kx + C$, то, підставивши $k = \frac{y-C}{x}$ в (40), матимемо рівність (41). Можна показати, що рівняння (40) особливих розв'язків не має.

Приклад

Розв'язати рівняння $y'^3 + y'^2 + y' - 3 = 0$.

○ Оскільки алгебраїчне рівняння $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ має дійсний корінь $x = 1$, то, згідно з (41), загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-C}{x}\right) - 3 = 0. \; ●$$

2°. Нехай *рівняння* (39) *не залежить від* x:

$$F(y, y') = 0. \tag{42}$$

Якщо ввести параметр t, то рівняння (42) можна замінити двома рівняннями:

$$y=\varphi(t),\quad y'=\psi(t),\quad t\in[t_0;\,t_1],$$

такими, що

$$F(\varphi(t),\,\psi(t))\equiv 0,\quad t\in[t_0;\,t_1].$$

Тоді

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt,$$

звідки

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt+C.$$

Таким чином, шукані інтегральні криві визначаються параметричними рівняннями

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt+C,\quad y=\varphi(t).$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y^{\frac{2}{3}}+(y')^{\frac{2}{3}}=1$.

○ Нехай $y=\cos^3 t$, $y'=\sin^3 t$. Далі маємо

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{-3\cos^2 t\sin t dt}{\sin^3 t}=-3\operatorname{ctg}^2 t dt,$$

$$x=-3\int\operatorname{ctg}^2 t dt=3t+3\operatorname{ctg} t+C.$$

Отже, параметричні рівняння шуканих інтегральних кривих мають вигляд

$$x=3t+3\operatorname{ctg} t+C,\quad y=\cos^3 t.\ \bullet$$

Зокрема, якщо рівняння (42) можна розв'язати відносно y: $y=\varphi(y')$, то за параметр зручно взяти y'. Справді, якщо $y'=t$, то $y=\varphi(t)$, тому

$$dx=\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}.$$

Отже,

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}+C,\quad y=\varphi(t)$$

— параметричні рівняння інтегральних кривих.

Приклад

Розв'язати рівняння $y\sqrt{y'-1}=2-y'$.

○ Розв'яжемо рівняння відносно y і покладемо $y'=t$:

$$y=\frac{2-t}{\sqrt{t-1}}.$$

Далі дістанемо

$$dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{dt}{2(t-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{t-1}} + C.$$

Знаходимо параметричні рівняння інтегральних кривих:

$$x = \frac{1}{\sqrt{t-1}} + C, \quad y = \frac{2-t}{\sqrt{t-1}}.$$

Параметр t тут легко виключити. Для цього з першого рівняння визначимо

$$t = 1 + \frac{1}{(x-C)^2}$$

і підставимо в друге рівняння. Знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = x - C - \frac{1}{x-C}. \bullet$$

3°. Нехай *рівняння* (39) *не залежить від* y:

$$F(x, y') = 0. \tag{43}$$

Як і в попередньому випадку, можна ввести параметр і замінити рівняння (43) двома рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad t \in [t_0; t_1],$$

такими, що

$$F(\varphi(t), \quad \psi(t)) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1].$$

Тоді дістанемо

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Отже, інтегральні криві визначаються параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C.$$

Зокрема, якщо рівняння (43) легко розв'язується відносно x: $x = \varphi(y')$, то за параметр беруть $y' = t$. Тоді $dy = t\varphi'(t)\,dt$, звідки

$$y = \int t\varphi'(t)\,dt + C.$$

4°. Рівняння виду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{44}$$

де φ, ψ — відомі функції, називається *рівнянням Лагранжа*.

Зокрема, якщо $\varphi(y') \equiv y'$, то рівняння (44) набирає вигляду

$$y = xy' + \psi(y') \tag{45}$$

і називається *рівнянням Клеро*.

Введемо параметр $t = y'$, тоді рівняння (44) запишеться так:

$$y = x\varphi(t) + \psi(t). \tag{46}$$

Диференціюючи (46) по x, дістанемо

$$t = \varphi(t) + (x\varphi'(t) + \psi'(t))\frac{dt}{dx}, \tag{47}$$

або

$$t - \varphi(t) = (x\varphi'(t) + \psi'(t))\frac{dt}{dx},$$

звідки

$$(t - \varphi(t))\frac{dx}{dt} = x\varphi'(t) + \psi'(t). \tag{48}$$

Рівняння (48) є лінійним відносно невідомої функції $x = x(t)$. Розв'язуючи його, знайдемо загальний розв'язок $x = x(t, C)$, який разом з рівнянням (46) визначить шукані інтегральні криві.

Переходячи до рівняння (48), ми ділили обидві частини рівняння (47) на $\frac{dt}{dx}$. При цьому можуть загубитись розв'язки, для яких $\frac{dt}{dx} = 0$, тобто $t = \text{const}$. Вважаючи t сталою, бачимо, що рівняння (47) задовольняється лише в тому випадку, коли t є коренем рівняння $t - \varphi(t) = 0$. Отже, якщо рівняння $t - \varphi(t) = 0$ має дійсні корені $t = t_i$, то знайдені вище розв'язки рівняння (44) треба доповнити розв'язками $y = x\varphi(t_i) + \psi(t_i)$. Якщо ці розв'язки не утворюються з загального ні за яких значень довільної сталої, то вони є особливими розв'язками.

Розглянемо рівняння Клеро. Поклавши $y' = t$, дістанемо

$$y = xt + \psi(t). \tag{49}$$

Диференціюючи рівність (49) по x, маємо

$$t = t + x\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx} \text{ або } (x + \psi'(t))\frac{dt}{dx} = 0.$$

Якщо $\frac{dt}{dx} = 0$, то $t = C$, тому з (49) маємо загальний розв'язок рівняння (45):

$$y = Cx + \psi(C). \tag{50}$$

Якщо $x + \psi'(t) = 0$, то дістаємо частинний розв'язок у параметричній формі:

$$x = -\psi'(t), \quad y = xt + \psi(t). \tag{51}$$

Можна довести, що рівняння (51) — особливий розв'язок рівняння Клеро, а саме, рівняння обвідної сім'ї прямих (50).

Приклад

Розв'язати рівняння $y = xy' - y'^2$.

○ Маємо рівняння Клеро. Загальний розв'язок, згідно з (50), має вигляд $y = Cx - C^2$.

Особливий розв'язок заданого рівняння дістанемо з (51): $y = xt - t^2$, $x = 2t$, звідки $y = \frac{x^2}{4}$. Це рівняння обвідної сім'ї прямих $y = Cx - C^2$. ●

1.8. Наближене розв'язування диференціальних рівнянь методом Ейлера

Ми розглянули деякі класи диференціальних рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Є ще кілька малопоширених типів рівнянь, які можна розв'язати. Проте більшість рівнянь не інтегруються в квадратурах. Такі рівняння розв'язують наближеними методами. Ознайомимось з найпростішим із них — методом Ейлера.

Нехай треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x, y)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Припустимо, що права частина даного рівняння задовольняє умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку. Тоді на деякому відрізку $[x_0; b]$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє дану початкову умову (рис. 8.8).

Розіб'ємо відрізок $[x_0; b]$ точками $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ на n рівних частин. Нехай $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $i = 1, 2, \dots, n$. Позначимо через y_i наближені значення розв'язку в точках x_i і проведемо через точки x_i прямі, паралельні осі Oy, і послідовно виконаємо такі однотипні операції. Підставимо значення x_0 та y_0 у праву частину даного рівняння і обчислимо кутовий коефіцієнт $y' = f(x_0, y_0)$ дотичної до інтегральної кривої в точці $(x_0; y_0)$. Для знаходження наближеного значення y_1 шуканого розв'язку замінимо на проміжку $(x_0; x_1)$ інтегральну криву відрізком її дотичної в точці $(x_0; y_0)$. При цьому дістаємо $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$, звідки $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x$.

Підставляючи значення x_1 та y_1 в праву частину даного рівняння, обчислимо кутовий коефіцієнт $y' = f(x_1, y_1)$ дотичної до інтегральної кривої в точці $(x_1; y_1)$. Замінивши на відрізку $[x_1; x_2]$ інтегральну криву відрізком дотичної, знаходимо наближене значення розв'язку y_2 в точці x_2: $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$, звідки $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x$ тощо. Таким чином, наближено інтегральна крива побудована у вигляді ламаної лінії, яку називають *ламаною Ейлера*, а метод її побудови — методом Ейлера. Наближені значення y_i розв'язку в точках x_i обчислюють за формулою $y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x$, яка є

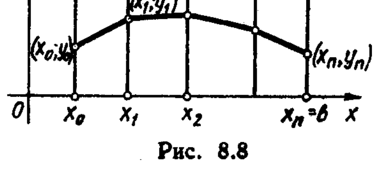


Рис. 8.8

основною розрахунковою формулою методу Ейлера. Точність цієї формули тим вища, чим менша різниця Δx.

Існують і інші наближені методи розв'язку задачі Коші [35].

1.9. Деякі застосування диференціальних рівнянь першого порядку

Як уже говорилося, в різних сферах людської діяльності характер задач, які зводяться до диференціальних рівнянь, та методику розв'язування їх можна схематично описати так. Відбувається деякий процес, наприклад, фізичний, хімічний, біологічний. Нас цікавить певна функціональна характеристика даного процесу, тобто залежність від часу, температури тіла, яке охолоджується, або кількості речовини, яка утворюється в результаті хімічної реакції, або кількості бактерій, які вирощуються за певних умов. Якщо повна інформація про хід цього процесу є достатньою, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю буде диференціальне рівняння, одним із розв'язків якого і є шукана функціональна залежність.

Таким чином, перший етап розв'язування задач з практичним змістом закінчується складанням диференціального рівняння для шуканої функції. Це творча і найважча частина розв'язку, тому що не існує універсального методу складання диференціальних рівнянь. Кожна задача потребує індивідуального підходу, який грунтується на знанні відповідних законів (фізичних, хімічних, біологічних) і вмінні перекладати задачу на умову математики. Математична зрілість інженера характеризується в основному тим, наскільки правильно він може математично формулювати практичні задачі, які пов'язані з його спеціальністю.

Якщо задача зведена до диференціального рівняння, методи розв'язування якого відомі, то другий етап розв'язку, тобто інтегрування рівняння, не викликає утруднень.

Розглянемо кілька конкретних прикладів.

Приклади

1. *(Про розмноження бактерій.)* У сприятливих для розмноження умовах знаходиться деяка кількість N_0 бактерій. Знайти залежність збільшення числа бактерій від часу, якщо швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості.

○ Позначимо через $N(t)$ кількість бактерій в момент часу t. Тоді $\frac{dN}{dt}$ — швидкість розмноження за умовою

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad k > 0.$$

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій та умов, в яких вони знаходяться. Його визначають експериментально. Інтегруючи знайдене рівняння, дістаємо його загальний розв'язок: $N = Ce^{kt}$. З умови $N(0) = N_0$ знаходимо $C = N_0$, тому

$$N = N_0 e^{kt}. \ ●$$

2. *(Про радіоактивний розпад.)* Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Вказати закон зміни маси речовини від часу, якщо при $t = 0$ маса речовини дорівнювала m_0.

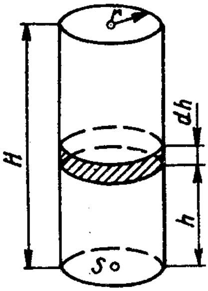


Рис. 8.9

○ Нехай $m = m(t)$ — маса речовини в момент часу t. За умовою

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad k > 0, \quad m(0) = m_0,$$

де k — коефіцієнт пропорційності. Знак мінус береться тому, що з часом кількість речовини зменшується. Розв'язуючи знайдене рівняння, дістаємо, що $m = m_0 e^{-kt}$. ●

3. *(Про охолодження тіла.)* Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища.

○ Відомо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює T_1 $(T_0 > T_1)$. Знайти залежність температури тіла від часу.

○ Нехай в момент часу t температура T тіла дорівнює $T(t)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \quad k > 0; \quad T(0) = T_0$$

(знак мінус вказує на зменшення температури). Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$T = T_1 + Ce^{-kt}; \quad T = T_1 + (T_0 - T_1)\, e^{-kt}. \; ●$$

4. *(Про витікання рідини з циліндра.)* Циліндричний резервуар, у дні якого є отвір, заповнено рідиною Знайти час t_0, за який рідина витече з резервуару, якщо висота стовпа рідини дорівнює H, радіус циліндра — r, площа отвору — S.

○ Скористаємось законом Торічеллі, згідно з яким для малих отворів швидкість витікання рідини знаходять за формулою $v = \sqrt{2gh}$, де h — висота стовпа рідини над отвором, g — прискорення сили тяжіння.

Нехай у момент часу t висота рідини дорівнювала h і за час dt зменшилась на dh. Вважаючи, що протягом часу dt швидкість витікання була сталою і дорівнювала $\sqrt{2gh}$, знайдемо об'єм dv рідини, яка витікла за час dt: $dv = Svdt = S\sqrt{2gh}dt$ (рис. 8.9).

З іншого боку, рівень рідини понизився на dh, тому $dv = -\pi r^2 dh$. Прирівнюючи елементарні об'єми, дістаємо диференціальне рівняння

$$S\sqrt{2gh}\, dt = -\pi r^2 dh,$$

звідки

$$dt = -\frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Інтегруючи, маємо

$$t = -\frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{h} + C.$$

З умови $h(0) = H$ знаходимо сталу $C = \dfrac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{H}$, тому

$$t = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Ця формула виражає залежність часу t від висоти стовпа рідини h. Поклавши $h = 0$, знайдемо час, за який витече вся рідина:

$$t_0 = \frac{2\pi r^2 \sqrt{H}}{S\sqrt{2g}} = \frac{\pi r^2}{S}\sqrt{\frac{2H}{g}}. \bullet$$

7. *(Про хімічну реакцію.)* Внаслідок хімічної реакції між речовинами A та B масами a та b утворюється третя речовина C. Встановити залежність маси цієї речовини від часу, якщо швидкість реакції пропорційна добутку реагуючих мас.

○ Нехай $x = x(t)$ — кількість речовини C, яка утворилась за час t після початку реакції. Тоді $\frac{dx}{dt}$ — швидкість утворення речовини C (швидкість реакції). За умовою

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \quad x(0) = 0,$$

де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо:

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = kdt; \quad \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)\frac{dx}{a-b} = kdt;$$

$$\ln|x-a| - \ln|x-b| = k(a-b)t + \ln|C|;$$

$$\frac{x-a}{x-b} = Ce^{k(a-b)t}.$$

З початкової умови $C = \frac{a}{b}$, тому $\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{k(a-b)t}$, звідки

$$x(t) = ab\frac{1 - e^{k(a-b)t}}{b - ae^{k(a-b)t}}. \bullet$$

8. *(Про розчин солі.)* У резервуарі знаходиться a літрів водяного розчину солі, причому в розчині міститься b кілограмів солі. У деякий момент часу вмикається пристрій, який неперервно подає в резервуар m літрів чистої води за секунду і одночасно забирає в нього щосекунди n літрів розчину ($m > n$). При цьому рідина неперервно перемішується. Як змінюється з часом кількість солі в резервуарі?

○ Як відомо, концентрацією c даної речовини називається її кількість, яка міститься в одиниці об'єму. Якщо концентрація рівномірна, то кількість речовини в об'ємі v дорівнює cv.

Нехай $x = x(t)$ — кількість солі, яка залишилася в розчині після того, як пристрій працював t секунд. Кількість суміші в резервуарі в цей момент буде $a + (m - n)t$, тому концентрація

$$c = \frac{x}{a + (m-n)t}.$$

За час dt з резервуару витікає ndt літрів розчину, який містить $ncdt$ кілограмів солі. Тому зміна dx кількості солі в резервуарі характеризується рівнянням

$$-dx = ncdt, \text{ або } -dx = \frac{nxdt}{a + (m-n)t}.$$

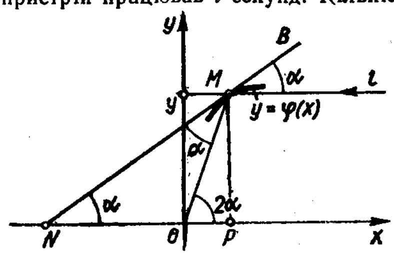


Рис. 8.10

Це і є шукане диференціальне рівняння. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістанемо

$$x(t) = C(a + (m - n)t)^{\frac{n}{n-m}}.$$

Сталу C визначимо з початкової умови $x(0) = b$:

$$b = Ca^{\frac{n}{n-m}}, \quad C = ba^{\frac{n}{m-n}}.$$

Отже, кількість солі в резервуарі змінюється за законом

$$x(t) = ba^{\frac{n}{m-n}}(a + (m - n)t)^{\frac{n}{n-m}}. \bullet$$

7. *(Про силу струму.)* Треба знайти залежність сили струму i від часу k в контурі, який має електрорушійну силу $\mathscr{E}$, опір R та індуктивність L, де $\mathscr{E}$, R, L — сталі.

○ Згідно з законом Ома, маємо

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E}.$$

Розв'язуючи це лінійне рівняння заміною $i = uv$, дістанемо загальний розв'язок

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathscr{E}}{R},$$

де C — довільна стала. При $t = 0$ маємо $i(0) = 0$, тому $C = -\frac{\mathscr{E}}{R}$. Отже,

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Звідки видно, що сила струму при $t \to +\infty$ наближається до свого стаціонарного значення $i_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$. ●

8. *(Про форму дзеркала.)* Знайти форму дзеркала, яке збирає в одну точку пучок променів, які падають на нього паралельно, коли відомо, що форма його поверхні є поверхнею обертання.

○ Виберемо прямокутну систему координат так, щоб промені були паралельні осі Ox, а точкою, в якій збираються відбиті промені, була точка $O(0; 0)$ (рис. 8.10). Нехай $y = \varphi(x)$ — рівняння осьового перерізу дзеркала площиною Oxy; $M(x; y)$ — точка падіння променя l на дзеркало; N — точка перетину дотичної BM з віссю Ox. Тоді за законом відбивання $\angle NMO = \angle BMl = \alpha$, тому $\angle MOP = 2\alpha$. Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = y'$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2y'}{1-(y')^2}$, то крива $y = \varphi(x)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{2y'}{1 - y'^2} = \frac{y}{x}.$$

Розв'язуючи його відносно y', дістанемо два однорідних рівняння:

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \text{ і } y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

За допомогою $y = ux$ знаходимо розв'язок першого рівняння:

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

Це рівняння в площині Oxy визначає сім'ю парабол, симетричних відносно осі Ox, фокуси яких знаходяться в точці O.

Оскільки форма поверхні дзеркала є поверхнею обертання, то, фіксуючи сталу C і обертаючи параболу навколо осі, дістаємо шукану поверхню у вигляді параболоїда обертання:

$$y^2 + z^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right). \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
3. Сформулювати теорему Коші про існування та єдиність розв'язку рівняння першого порядку.
4. Дати означення загального і частинного розв'язків диференціального рівняння першого порядку. У чому полягає геометричний зміст цих понять?
5. Що таке особливий розв'язок диференціального рівняння? Який його геометричний зміст?
6. У чому полягає геометричний зміст рівняння

$$y' = f(x, y)?$$

7. Дати означення рівняння з відокремлюваними змінними. Як воно розв'язується?
8. Дати означення і описати інтегрування однорідного рівняння першого порядку.
9. Дати означення лінійного рівняння першого порядку та викласти метод його інтегрування.
10. Навести рівняння, звідні до лінійних, та викласти методи їх інтегрування.
11. Дати означення рівняння Бернуллі. Як воно розв'язується?
12. Дати означення рівняння Ріккаті. Як його розв'язати, коли відомо частинний розв'язок?
13. Що називається рівнянням в повних диференціалах? Як воно розв'язується?
14. Що називається інтегрувальним множником? Описати найпростіші випадки, коли він легко знаходиться.
15. Як інтегруються рівняння $F(y') = 0$, $F(x, y') = 0$, $F(y, y') = 0$, нерозв'язні відносно похідних?
16. Яке рівняння називається рівнянням Лагранжа і як воно інтегрується?
17. Яке рівняння називається рівнянням Клеро і як воно інтегрується?
18. Описати метод Ейлера наближеного інтегрування рівняння $y' = f(x, y)$.
19. Розв'язати рівняння:

а) $(y^2 - xy^2)\,dx + (x^2 + yx^2)\,dy = 0$; б) $(y - x)\,dx + (x + y)\,dy = 0$; в) $(x - x^3)\,y' + (2x^2 - 1)\,y = x^3$; г) $y' + xy = x^3y^3$; д) $y^2(1 + y'^2) = 1$; е) $y = 2xy' - y'^2$.

20. Знайти криву, яка проходить через точку (4; 2), якщо довжина піддотичної в кожній її точці дорівнює подвоєній абсцисі цієї точки.
21. Знайти криву, піднормаль якої у кожній точці є середнє арифметичне координат цієї точки.
22. Через який час температура тіла знизиться до 30 °С, якщо температура повітря 20 °С і тіло за 20 хв охолоджується від 100 до 60 °С?

23. За який час витече вода через отвір площею 0,5 см^2 на дні конічної лійки висотою 10 см і кутом при вершині 60°?

Вказівка. Швидкість v витікання води з отвору, що знаходиться на відстані h від поверхні, знаходиться за формулою $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, де g — прискорення сили тяжіння.

Відповіді. 19. а) $\frac{x+y}{xy} + \ln\frac{x}{y} = C$; б) $y^2 + 2xy - x^2 = C$; в) $y = x + Cx\sqrt{1-x^2}$; г) $y^2(x^2+1+Ce^{x^2}) = 1$; д) $(x-C)^2 + y^2 = 1$, $y = \pm 1$; е) $x = \frac{C}{t^2} + \frac{2}{3}t$, $y = \frac{2C}{t} + \frac{t^2}{3}$, $t \neq 0$; $y \equiv 0$. 20. $y = \sqrt{x}$. 21. $(x-y)^2(x+2y) = C$. 22. 60 хв. 23. 12,5 с.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1. Основні поняття і означення. Задача Коші

Розглянемо диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння*. Зокрема, диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{52}$$

де x — незалежна змінна; $y = y(x)$ — невідома функція; F — відома функція.

У рівняння n-го порядку (52) похідна n-го порядку $y^{(n)}$ має справді входити, тоді як наявність у ньому решти змінних, тобто x, y, .., y^{n-1}, необов'язкова.

Рівняння (52), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається *неявним диференціальним рівнянням.*

Нормальним або *явним диференціальним рівнянням* n-го порядку називається рівняння (52), розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{53}$$

Розглядатимемо в основному саме такі рівняння.

Розв'язком рівняння (53) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається n разів неперервно диференційовна на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність по $x \in (a; b)$, тобто

$$\forall x \in (a; b): \varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Графік розв'язку диференціального рівняння (52) або (53) називається його *інтегральною кривою.*

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, як і для рівнянь першого порядку, розглядається *задача Коші або задача з початковими умовами.* Для рівняння (53) ця задача ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння (53) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, $x \in (a; b)$, який при $x = x_0 \in (a; b)$ задовольняє такі умови:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

або

$$y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{54}$$

де $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — довільні наперед задані дійсні числа.

Умови (54) називають *початковими умовами рівняння* (53). Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{55}$$

початкові умови при $x = x_0$ мають вигляд

$$y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_0'. \tag{56}$$

Існування і єдиність розв'язку задачі Коші визначаються такою теоремою Коші.

Теорема 2. *Якщо функція $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ і її частинні похідні по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області $G \subset R_{n+1}$, то для всякої точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (53), який задовольняє початкові умови (54).*

Приймемо дану теорему без доведення. Слід звернути увагу на те, що в цій теоремі мова йде про єдиність розв'язку в $(n+1)$-вимірному просторі: інакше кажучи, єдиність розв'язку рівняння (53) з умовами (54) на відміну від диференціального рівняння першого порядку не означає, що через задану точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (53). Так, для рівняння (55) єдиність розв'язку з умовами (56) означає, що через точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (55) з кутовим коефіцієнтом дотичної в цій точці, який дорівнює $\operatorname{tg} \alpha = y_0'$ (рис. 8.11). Проте через цю точку можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної.

Нарешті, зупинимось на поняттях загального та частинного розв'язку рівняння (53). Як ми вже бачили, загальний розв'язок рівняння першого порядку знаходиться за допомогою операції інтегрування і містить одну довільну сталу. В загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому загальний розв'язок рівняння (53) містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{57}$$

Якщо загальний розв'язок знаходиться в неявній формі:

$$\Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{58}$$

то його називають *загальним інтегралом рівняння* (53).

Частинний розв'язок або *частинний інтеграл* знаходять із загального, якщо у співвідношенні (57) або (58) кожній довільній сталій C_1, C_2, ..., C_n надати конкретного числового значення. З погляду геометрії загальним розв'язком рівняння (53) є *n-параметрична сім'я інтегральних кривих,* залежних від n параметрів C_1, C_2, ..., C_n, а частинний розв'язок — окрема крива з цієї сім'ї.

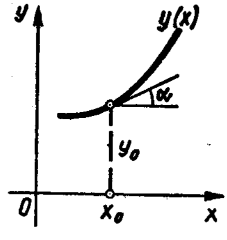


Рис. 8.11

Зауважимо, що не кожний розв'язок рівняння (53), який містить n довільних сталих, є загальним розв'язком. Розв'язок (57) диференціального рівняння (53), який містить n довільних сталих, називається *загальним розв'язком,* якщо можна знайти такі єдині сталі $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, ..., $C_n = C_{n0}$, що частинний розв'язок $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0})$ задовольняє початкові умови (54).

Таким чином, розв'язати (проінтегрувати) диференціальне рівняння n-го порядку — це означає: 1) знайти його загальний розв'язок; 2) із загального розв'язку виділити частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови, якщо такі умови задані.

2.2. Диференціальні рівняння n-го порядку, які інтегруються в квадратурах

Рівняння n-го порядку інтегруються в квадратурах дуже рідко. Розглянемо деякі класи таких рівнянь.

1°. *Рівняння виду*

$$y^{(n)} = f(x), \tag{59}$$

де $f(x)$ — задана неперервна функція, інтегрується в квадратурах.

Справді, записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = f(x) \text{ або } d(y^{(n-1)}) = f(x)\,dx$$

та інтегруючи, дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1,$$

де C_1 — стала інтегрування.

Аналогічно знайдемо

$$d(y^{(n-2)}) = \left(\int f(x)\,dx + C_1\right)dx,$$

звідки

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2;$$

$$d(y^{(n-3)}) = \left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2\right)dx,$$

$$y^{(n-3)} = \int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

2*

де C_1, C_2, C_3 — сталі інтегрування. Продовжуючи далі, після n інтегрувань знайдемо загальний розв'язок рівняння (59):

$$y = \int \left(\dots \int \left(\int f(x)\,dx \right) dx \right) \dots \Big) dx +$$

$$+ \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_n.$$

Приклади

1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} = \cos 2x$.

○ Послідовно дістанемо

$$y''' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1;$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) dx + C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2 \right) dx + C_3 = -\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \right) dx + C_4 =$$

$$= \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4. \ ●$$

2. Матеріальна точка маси m падає вертикально під дією сили земного тяжіння. Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент часу точка мала швидкість v_0. Падіння вважати вільним, тобто опором середовища знехтувати.

○ Нехай $S = S(t)$ — шлях, який пройшла точка за час t; $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d^2S}{dt^2} = w$ — відповідно швидкість і прискорення руху. На тіло діє сила $P = mg$, де g — прискорення вільного падіння. Тоді за другим законом Ньютона

$$mw = P \text{ або } \frac{d^2S}{dt^2} = g.$$

Маємо диференціальне рівняння виду (59) відносно невідомої функції $S(t)$. Згідно з умовою задачі початкові умови мають вигляд

$$S(0) = 0, \ \frac{dS(0)}{dt} = v(0) = v_0.$$

Послідовно інтегруючи, дістанемо

$$\frac{dS}{dt} = gt + C_1, \ S = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Скориставшись початковими умовами, знаходимо $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$. Таким чином, дістаємо відомі з фізики формули для швидкості і шляху при вільному падінні тіла:

$$v = gt + v_0, \ S = \frac{gt^2}{2} + v_0 t. \ ●$$

2°. Розглянемо *рівняння виду*

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \qquad (60)$$

Якщо задане рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то маємо вже розглянутий випадок 1°. Припустимо, що рівняння (60) можна розв'язати відносно x:

$$x = f(y^{(n)}). \qquad (61)$$

Якщо покласти $y^{(n)} = t$, то рівняння (61) набере вигляду $x = f(t)$, звідки $dx = f'(t)\,dt$. Підставляючи значення $y^{(n)}$ і dx у тотожність $d(y^{(n-1)}) = y^{(n)}\,dx$, дістаємо

$$d(y^{(n-1)}) = tf'(t)\,dt, \quad y^{(n-1)} = \int tf'(t)\,dt + C_1. \qquad (62)$$

Інтегруючи рівняння (62) тим самим методом, що й рівняння (59), і враховуючи щоразу, що $dx = f'(t)\,dt$, дістанемо розв'язок рівняння (60) в параметричній формі.

Приклад
Розв'язати рівняння $(y'')^3 + 3y'' - x = 0$.
○ Маємо

$$y'' = t, \quad x = t^3 + 3t, \quad dx = (3t^2 + 3)\,dt;$$

$$y' = \int t(3t^2 + 3)\,dt + C_1 = \frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1;$$

$$dy = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1\right)dx = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1\right)(3t^2 + 3)\,dt =$$

$$= 3\left(\frac{3}{4}t^6 + \frac{9}{4}t^4 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^2 + C_1\right)dt;$$

$$y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^3 + 3C_1t + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 + 3t, \quad y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^3 + 3C_1t + C_2. \quad ●$$

2.3. Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є *метод пониження порядку*. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку.

1°. Нехай задано *диференціальне рівняння виду*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (63)$$

яке не містить явно шуканої функції. Порядок такого рівняння можна понизити, якщо за нову невідому функцію $z = z(x)$ взяти найнижчу із похідних даного рівняння, тобто покласти $y^{(k)} = z$; тоді $y^{k+1} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, тому дістаємо рівняння

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Таким чином, порядок рівняння понижується на k одиниць. Окремим випадком рівняння (63) є рівняння

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0,$$

яке за допомогою нової змінної $z = y^{(n-1)}$, $z' = y^{(n)}$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$F(x, z, z') = 0.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = z(x, C_1)$ виду (59), яке інтегрується в квадратурах.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' = e^{2x}$.

○ Покладемо $z = y'$, тоді $z' = y''$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z = z(x)$:

$$z' + 3z = e^{2x}.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо $z(x) = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, тоді $y' = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, звідки

$$y = -\frac{C_1}{3} e^{-3x} + \frac{2}{5} e^{2x} + C_2. \; ●$$

2. Тіло маси m падає вертикально з деякої висоти без початкової швидкості. При падінні тіло зазнає опору повітря, пропорційного квадрату швидкості тіла. Знайти закон руху тіла.

○ Нехай $S = S(t)$ — шлях, пройдений тілом за час t від початку руху, $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d^2S}{dt^2} = w$ — швидкість і прискорення руху. На тіло діють сили: $P = mg$ — вага тіла (в напрямі руху) і $F = kv^2 = k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$ — опір повітря (проти напряму руху). За другим законом Ньютона маємо: $mw = P - F$ або $m\frac{d^2S}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$, де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності.

Маємо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно невідомої функції $S(t)$. Згідно з умовою задачі дістаємо такі початкові умови:

$$S(0) = 0, \; \frac{dS(0)}{dt} = v(0) = 0.$$

Покладемо $\frac{dS}{dt} = v$, тоді $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ і дістаємо рівняння

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \text{ або } \frac{m}{k}\frac{dv}{dt} = a^2 - v^2,$$

де $a^2 = \frac{mg}{k}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt, \quad \frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v} = kt + C_1.$$

Оскільки $v(0) = 0$, то $C_1 = 0$; тому $\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{2akt}{m}$, звідки

$$v = a\frac{e^{\frac{akt}{m}} - e^{-\frac{akt}{m}}}{e^{\frac{akt}{m}} + e^{-\frac{akt}{m}}} = a\,\mathrm{th}\,\frac{akt}{m} = a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t.$$

Таким чином, для визначення невідомої функції $S(t)$ маємо рівняння

$$\frac{dS}{dt} = a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$S = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t + C_2.$$

Оскільки $S(0) = 0$, то $C_2 = 0$; тому шуканий закон руху має вигляд

$$S(t) = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t. \bullet$$

2°. Розглянемо *диференціальне рівняння виду*

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{64}$$

яке не містить явно незалежної змінної x.

Рівняння (64) допускають пониження порядку на одиницю. Справді, покладемо $y' = z$, де (на відміну від попереднього випадку) новою невідомою z є функція від $y : z = z(y)$, тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z = z'_y z,$$

тобто порядок другої похідної понизився на одиницю. Аналогічно дістаємо

$$y''' = \frac{d}{dx}(z'_y z) = \frac{d}{dy}(z'_y z)\frac{dy}{dx} = z(z''_{yy}z + (z'_y)^2)$$

тощо. Методом індукції можна довести, що порядок усіх наступних похідних також понижується на одиницю.

Таким чином, від рівняння (64) n-го порядку приходимо до рівняння

$$F(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

$(n - 1)$-го порядку.

Окремим випадком рівняння (64) є рівняння

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{65}$$

яке підстановкою $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dy} z$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку:

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy} z\right) = 0.$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

○ Маємо рівняння виду (65). Поклавши

$$y' = z, \quad y'' = \frac{dz}{dy} z,$$

дістанемо

$$yz \frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0 \text{ або } z\left(y \frac{dz}{dy} - 2z\right) = 0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$z = 0, \quad y \frac{dz}{dy} - 2z = 0.$$

З першого маємо $y' = 0$, звідки $y = C$. У другому рівнянні відокремлюються змінні:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dy}{y}; \quad \ln|z| = 2\ln|y| + \ln|C_1|, \quad z = C_1 y^2, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки $z = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx, \quad -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2.$$

Замінивши C_1 на $-C_1$, C_2 на $-C_2$, знайдемо другий розв'язок даного рівняння:

$$y = \frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Отже, задане рівняння має розв'язки

$$y = C \text{ та } y = \frac{1}{C_1 x + C_2}. \quad ●$$

2. *Задача про другу космічну швидкість.* Знайти найменшу швидкість, з якою потрібно кинути тіло вертикально вгору, щоб воно не повернулось на Землю. Опором повітря знехтувати.

○ Позначимо через M і m відповідно масу Землі і масу тіла. Згідно закону тяжіння Ньютона, сила F притягання, що діє на тіло, дорівнює $F = k\frac{Mm}{r^2}$, де r — відстань між центром Землі і центром маси тіла; k — гравітаційна стала.

Враховуючи, що на тіло діють лише сила інерції і сила тяжіння, запишемо диференціальне рівняння руху тіла:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{Mm}{r^2} \text{ або } \frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}.$$

Знак мінус беремо тому, що з часом швидкість руху зменшується, а це означає, що прискорення від'ємне.

Знайдене диференціальне рівняння не містить аргументу t, тобто це рівняння виду (65). Розв'яжемо його з початковими умовами: $r = R$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ при $t = 0$, де R — радіус Землі; v_0 — швидкість кидання.

Покладемо $\frac{dr}{dt} = v(r) = v$, тоді

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v,$$

де v — швидкість руху тіла.

Підставляючи ці величини в рівняння, дістаємо

$$v\frac{dv}{dr} = -k\frac{M}{r^2}.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок цього рівняння:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{kM}{r} + C_1.$$

Згідно з початковими умовами на поверхні Землі $v(R) = v_0$, тому

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}.$$

Підставивши знайдене значення C_1 в загальний розв'язок, дістанемо $\frac{v^2}{2} = \frac{kM}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right)$, звідки

$$\frac{kM}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right) > 0.$$

За умовою задачі вихід тіла із гравітаційного поля Землі означає, що $r \to \infty$ при $t \to \infty$. Оскільки $\frac{kM}{r} \to 0$ при $r \to \infty$, то одержана нерівність виконуватиметься для довільного r лише у випадку, коли

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geqslant 0 \text{ або } v_0^2 \geqslant \frac{2kM}{R}.$$

Із закону тяжіння випливає, що прискорення вільного падіння дорівнює

$$g(r) = \frac{F}{m} = \frac{kM}{r^2}.$$

На поверхні Землі $r = R$, тому

$$g = g(R) = \frac{kM}{R^2}.$$

Отже, швидкість кидання повинна задовольняти нерівність

$$v_0^2 \geqslant \frac{2kM}{R} = 2gR \text{ або } v_0 \geqslant \sqrt{2gR}.$$

Оскільки $g = 981$ см/с^2, $R = 63 \cdot 10^7$ см, то найменша швидкість кидання, яка забезпечить вихід тіла із гравітаційного поля Землі (друга космічна швидкість), дорівнює $v_0 = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \cdot 10^5$ см/с $= 11{,}2$ км/с. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням n-го порядку? Як визначити порядок диференціального рівняння?
2. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку?
3. Сформулюйте задачу Коші і теорему про існування та єдиність розв'язку для рівняння $y'' = f(x, y, y')$.
4. Що називається загальним розв'язком рівняння n-го порядку? Як знайти його окремий розв'язок?
5. Як інтегруються рівняння $y^{(n)} = f(x)$ та $F(x, y^{(n)}) = 0$?
6. У чому суть методу пониження порядку диференціального рівняння?
7. Як звести до рівнянь першого порядку рівняння $f(x, y', y'') = 0$ та $f(y, y', y'') = 0$?
8. Розв'язати рівняння:

а) $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$;

б) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$; в) $y''' = (y'')^2$; г) $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Відповіді. 8. а) $y = -\dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{5}{16}x^2 + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{5}{4}$; б) $y = -x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2$; в) $y = (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2 x + C_3$; г) $(x + C_1)(y - 1) = C_2$.

§ 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Основні означення і поняття

Рівняння виду

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = \varphi(x), \tag{66}$$

де $b_0(x)$, $b_1(x)$, ..., $b_n(x)$, $\varphi(x)$ — задані функції, називається *лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.*

Термін «лінійне рівняння» пов'язаний з тим, що рівняння (66) містить невідому функцію $y = y(x)$ і всі її похідні лише в першому степені.

Функції $b_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, називаються *коефіцієнтами даного рівняння*, а функція $\varphi(x)$ — його вільним членом. Якщо вільний член $\varphi(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (66) називається *однорідним*, якщо $\varphi(x) \not\equiv 0$, то рівняння (66) називається *неоднорідним*. Коефіцієнт $b_0(x) \not\equiv 0$ в своїй області визначення, бо в противному разі рівняння (66) не було б рівнянням n-го порядку. Поділивши дане рівняння на $b_0(x)$, дістанемо

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \qquad (67)$$

де

$$a_i(x) = \frac{b_i(x)}{b_0(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{b_0(x)}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння виду (66) завжди можна ввести до виду (67). У зв'язку з цим ми надалі розглядатимемо лише такі рівняння.

Якщо в деякому інтервалі $(a; b)$ (скінченному чи нескінченному) коефіцієнти $a_i(x)$ і вільний член $f(x)$ — це неперервні функції, то рівняння (67) при будь-яких початкових умовах

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad x_0 \in (a; b), \qquad (68)$$

має єдиний розв'язок, який задовольняє ці умови.

Справді, записавши рівняння (67) у вигляді $y^{(n)} = f(x) - a_1(x) \times \times y^{(n-1)} - \ldots - a_n(x)y$, бачимо, що воно задовольняє всі умови теореми 2. Можна довести, що розв'язок рівняння (67), який задовольняє умови (68), існує і єдиний на всьому інтервалі $(a; b)$ (для рівняння (66) умови теореми 2 можуть не виконуватись в тих точках, де $b_0(x) = 0$).

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти і вільний член рівняння (67) на деякому інтервалі $(a; b)$ є неперервними функціями.

3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (69)$$

і встановимо деякі властивості його розв'язків.

Очевидно, одним з розв'язків рівняння (69) є $y \equiv 0$. Цей розв'язок називають *нульовим* або *тривіальним*. Надалі під задачею розв'язання однорідного диференціального рівняння розумітимемо задачу відшукання його нетривіальних розв'язків.

Теорема 1. *Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (69), то розв'язком цього рівняння є також функція*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{70}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

○ Підставивши функцію (70) в рівняння (69), матимемо:

$$\begin{aligned} &C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + a_1(x)(C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)) + \\ &+ a_2(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = \\ &= C_1 [y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x)] + \\ &+ C_2 [y_2''(x) + a_1(x) y_2''(x) + a_2(x) y_2(x)]. \end{aligned}$$

Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (69), то вирази в квадратних дужках тотожно дорівнюють нулю, а це означає, що функція (70) є розв'язком рівняння (69). ●

Функція (70) містить дві довільні сталі і є розв'язком рівняння (69), тому природно виникає запитання: чи не є розв'язок (70) загальним розв'язком рівняння (69)? Щоб відповісти на це запитання, введемо поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій.

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними на проміжку* $(a; b)$, якщо тотожність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0, \tag{71}$$

де α_1, α_2 — дійсні числа, справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Якщо хоча б одне з чисел α_1 чи α_2 відмінне від нуля і виконується тотожність (71), то функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно залежними на проміжку* $(a; b)$.

Неважко переконатись, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ тоді і тільки тоді лінійно залежні на проміжку $(a; b)$, коли існує таке стале число λ, що для всіх $x \in (a; b)$ виконується рівність

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda, \quad \text{тобто} \quad y_1(x) = \lambda y_2(x).$$

Інакше кажучи, дві функції тоді і тільки тоді лінійно залежні, коли вони пропорціональні. Наприклад, нехай $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 2x$, $y_3(x) = x^2$, тоді функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні, а $y_1(x)$ і $y_3(x)$ — лінійно незалежні:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{2} = \text{const}; \quad \frac{y_1(x)}{y_3(x)} = \frac{1}{x} \neq \text{const}.$$

Якщо $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ — функції від x, то визначник

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

називається визначником Вронського або вронскіаном цих функцій і позначається символом $W(y_1, y_2)$ або $W(x)$.

Теорема 2. *Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — диференційовні і лінійно залежні на проміжку $(a; b)$, то визначник Вронського на цьому проміжку тотожно дорівнює нулю.*

○ Нехай, наприклад, в тотожності (71) $\alpha_1 \neq 0$, тоді $y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$; тому

$$\forall x \in (a; b):\ W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0. \quad \bullet$$

Теорема 3. *Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (69) на проміжку $(a; b)$, то визначник Вронського цих функцій в жодній точці даного проміжку не дорівнює нулю.*

○ Доведемо теорему методом від супротивного. Припустимо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $W(x_0) = 0$.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = 0, \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \tag{72}$$

де λ_1, λ_2 — невідомі числа, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (69). Оскільки визначник системи (72) $W(x_0) = 0$, то вона має ненульовий розв'язок. Позначимо його через α_1, α_2 (серед чисел α_1, α_2 хоча б одне число відмінне від нуля) і введемо функцію

$$Y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Ця функція за теоремою 1 є розв'язком рівняння (69), причому, згідно з системою (72), задовольняє початкові умови

$$Y(x_0) = 0,\ Y'(x_0) = 0. \tag{73}$$

Проте функцією, яка задовольняє і рівняння (69), і початкові умови (73), є також функція $y(x) \equiv 0$. Оскільки для диференціального рівняння (69) виконуються всі умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку, то розв'язки $Y(x)$ та $y \equiv 0$ збігаються, тобто

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0.$$

Ця рівність означає, що розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежні на проміжку $(a; b)$. Дійшли суперечності. Отже,

$$\forall x \in (a; b):\ W(x) \neq 0. \quad \bullet$$

З теорем 2 і 3 випливає такий критерій лінійної незалежності розв'язків диференціального рівняння: для того щоб розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (69) були лінійно незалежними на заданому проміжку, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці даного проміжку.

Тепер ми можемо дати відповідь на поставлене раніше запитання. Встановимо умови, за яких функція (70) буде загальним розв'язком рівняння (69).

Теорема 4. *(Про структуру загального розв'язку однорідного рівняння.) Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — два лінійно незалежні на проміжку $(a; b)$ розв'язки рівняння (69), то функція*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{74}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі, є його загальним розв'язком.

○ Згідно з теоремою 2 функція (74) є розв'язком рівняння (69) за будь-яких значень сталих C_1 і C_2. Щоб довести, що цей розв'язок загальний, покажемо що з нього можна виділити такий єдиний частинний розв'язок, який задовольняє довільно задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \tag{75}$$

де $x_0 \in (a; b)$.

Підставивши початкові умови (75) в рівність (74), дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

в якій C_1 та C_2 — невідомі числа. Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$. Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — лінійно незалежні функції, то згідно з теоремою 2 $W(x_0) \neq 0$, тому дана система має єдиний розв'язок $C_1 = C_{10}$ і $C_2 = C_{20}$. Розв'язок $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x)$ і є тим частинним розв'язком рівняння (69), який задовольняє початкові умови (75). ●

Як уже говорилося, далеко не всяке диференціальне рівняння другого порядку розв'язується в квадратурах. Те саме стосується лінійного рівняння (69) із змінними коефіцієнтами $a_1(x)$ і $a_2(x)$. Проте якщо відомий один частинний розв'язок рівняння (69), то можна знайти і загальний його розв'язок.

Теорема 5. *Якщо відомий який-небудь частинний ненульовий розв'язок рівняння (69), то це рівняння розв'язується в квадратурах.*

○ Нехай $y_1 = y_1(x)$ — ненульовий розв'язок рівняння (69). Покладемо $y = y_1 z$, де z — невідома функція від x, тоді $y' = y_1' z + y_1 z'$, $y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$. Підставляючи значення y, y' та y'' в рівняння (69), дістанемо

$$\{y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1\} z + (2y_1' + a_1(x) y_1) z' + y_1 z'' = 0.$$

Оскільки y_1 — розв'язок рівняння (69), то вираз у фігурних дужках дорівнює нулю, тому останнє рівняння набирає вигляду

$$(2y_1' + a_1(x) y_1) z' + y_1 z'' = 0.$$

Покладемо $z' = u(x)$, де u — нова невідома функція від x. Приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u' y_1 + (2y_1' + a_1(x) y_1) u = 0.$$

Маємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1' + a_1(x) y_1}{y_1}, \quad u = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x) dx}.$$

Оскільки $z' = u$ та $y = y_1 z$, то

$$y = C_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x) dx} dx + C_2 y_1,$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. ●

Приклади

1. Довести, що функції $y_1 = e^{2x}$ і $y_2 = e^{-2x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння $y'' - 4y = 0$. Знайти загальний розв'язок цього рівняння.

○ Підставляючи функції y_1 та y_2 в задане рівняння, впевнюємося, що кожна з них обертає рівняння на тотожність, отже є його розв'язком. Оскільки $\frac{y_1}{y_2} = e^{4x} \neq$ $\neq \text{const}$, то функції y_1 та y_2 — лінійно незалежні. Тоді, згідно з теоремою 3, загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. ●

2. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$, яке має частинний розв'язок $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

○ Згідно з теоремою 5 покладемо $y = y_1 z$, тоді матимемо рівняння $z' \left(2y_1' + \frac{2}{x} y_1\right) + y_1 z'' = 0$. Підставимо замість y_1 його значення і розв'яжемо відносно функції z:

$$z' \left(2 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{2 \sin x}{x^2}\right) + \frac{\sin x}{x} z'' = 0;$$

$$2z' \cos x + z'' \sin x = 0; \quad 2z' \cos x + \frac{d}{dx}(z') \sin x = 0;$$

$$\frac{dz'}{z'} = -2 \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad z' = \frac{C_1}{\sin^2 x}, \quad z = C_2 - C_1 \operatorname{ctg} x.$$

Отже, $y = y_1 z = \frac{\sin x}{x} (C_2 - C_1 \operatorname{ctg} x)$. ●

3.3. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку

Розглянемо тепер неоднорідне лінійне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (76)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ — задані і неперервні на $(a; b)$ функції.

Лінійне однорідне рівняння

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \qquad (77)$$

ліва частина якого збігається з лівою частиною неоднорідного рівняння (76), надалі називатимемо відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема *(про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння). Загальним розв'язком рівняння* (76) *є сума його довільного частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* (77).

○ Нехай $y^*(x)$ — частинний розв'язок рівняння (76), а $\bar{y}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ — загальний розв'язок рівняння (77). Переконаємось, що функція

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) \qquad (78)$$

— розв'язок рівняння (76). Підставляючи функцію (78) в рівняння (76), дістанемо

$$y^{*''}(x) + \bar{y}''(x) + a_1(x)(y^{*'}(x) + \bar{y}'(x)) + a_2(x)(y^*(x) + \bar{y}(x)) =$$
$$= \{y^{*''}(x) + a_1(x)y^{*'}(x) + a_2(x)y^*(x)\} +$$
$$+ [\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_2(x)\bar{y}(x)] = f(x).$$

Оскільки вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, а у фігурних — функції $f(x)$, то функція (78) є розв'язком рівняння (76).

Покажемо тепер, що функція (78) — загальний розв'язок рівняння (76). Для цього доведемо, що з розв'язку (78) можна дістати розв'язок рівняння (76), який задовольняє задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \qquad (79)$$

де $x_0 \in (a; b)$.

Підставивши умови (79) у функцію (78), дістанемо систему рівнянь

$$C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0);$$
$$C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = y_0' + y^{*'}(x_0),$$

де C_1, C_2 — невідомі.

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$ для функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ в точці x_0. Оскільки ці функції лінійно незалежні, то $W(x_0) \neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок $C_1 = C_{10}$ і $C_2 = C_{20}$. Таким чином, дістали розв'язок $y = C_{10}y_1(x) + C_{20}y_2(x) + y^*(x)$ рівняння (76), який задовольняє початкові умови (79). ●

З теореми випливає, що для знаходження загального розв'язку рівняння (76) потрібно знайти який-небудь його частинний розв'язок, а також загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Обидві ці задачі є складними. Проте якщо відомий загальний розв'язок однорідного рівняння (77), то частинний розв'язок рівняння (76) можна знайти, скориставшись так званим методом варіації довільних сталих, який належить Лагранжу.

3.4. Метод варіації довільних сталих

Нехай

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{80}$$

— загальний розв'язок однорідного рівняння (77), відповідного рівнянню (76). Замінимо у формулі (80) сталі C_1 і C_2 невідомими функціями $C_1(x)$, $C_2(x)$ і підберемо ці функції так, щоб функція

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{81}$$

була розв'язком рівняння (76). Знайдемо похідну

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Накладемо на $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову, щоб

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0. \tag{82}$$

З урахуванням умови (82) похідна y' набере вигляду

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Знайдемо другу похідну

$$y'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + $$
$$+ C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Підставивши значення y, y', y'' в рівняння (76), дістанемо

$$C_1(x)[y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x)] +$$
$$+ C_2(x)[y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x)] +$$
$$+ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$, $y_2(x)$ — розв'язки однорідного рівняння (77), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, а тому

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \tag{83}$$

Таким чином, функція (81) буде тоді частинним розв'язком рівняння (76), коли функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольнятимуть систему рівнянь (82) і (83):

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0; \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{84}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x)$ для лінійно незалежних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (77), тому $W(x) \neq 0$. Тоді система (84) має єдиний розв'язок $C_1' = \varphi(x)$ та $C_2' = \psi(x)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — деякі функції від x. Інтегруючи ці функції, знаходимо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, а потім за формулою (81) складаємо частинний розв'язок рівняння (76).

При знаходженні частинних розв'язків може стати корисною наступна теорема.

Теорема (про накладання розв'язків). *Якщо права частина рівняння $y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x)$ дорівнює сумі двох функцій: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівнянь*

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f_1(x) \quad \text{та} \quad y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f_2(x),$$

то функція $y = y_1(x) + y_2(x)$ буде розв'язком даного рівняння.

○ Дійсно,

$$y_1''(x) + y_2''(x) + a_1(x)\,(y_1'(x) + y_2'(x)) + a_2(x)\,(y_1(x) + y_2(x)) =$$
$$= y_1''(x) + a_1(x)\, y_1'(x) + a_2(x)\, y_1(x) + y_2''(x) + a_1(x)\, y_2'(x) +$$
$$+ a_2(x)\, y_2(x) = f_1(x) + f_2(x) \equiv f(x). \; ●$$

Це означає, що коли можна знайти розв'язки рівнянь, правими частинами яких є окремі доданки заданої правої частини, то можна дуже просто — у вигляді суми розв'язків — знайти розв'язок даного рівняння.

Приклади

1. Рівняння $y'' + 4y = x$ має частинний розв'язок $y_1 = \frac{x}{4}$, рівняння $y'' + 4x = e^x$ — розв'язок $y_2 = \frac{e^x}{5}$. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4x = x + e^x.$$

○ Згідно з теоремою шуканий розв'язок має вигляд

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x}{4} + \frac{e^x}{5}. \; ●$$

2. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}, \quad \text{якщо} \quad \bar{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

○ Запишемо частинний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y = C_1(x)\sin 2x + C_2(x)\cos 2x.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему рівнянь виду (84):

$$\begin{cases} C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = 0; \\ 2C_1'\cos 2x - 2C_2'\sin 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $C_1' = \frac{1}{2}$, $C_2' = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$. Інтегруючи, дістаємо

$$C_1 = \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}, \quad C_2 = -\int \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\,dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|.$$

Запишемо частинний розв'язок даного рівняння:

$$y^* = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|.$$

Отже,

$$y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|$$

— загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

Таким самим буде результат, якщо під час інтегрування C_1' та C_2' ввести довільні сталі $\overline{C}_1$ та $\overline{C}_2$:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \overline{C}_1, \quad C_2 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \overline{C}_2;$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + \overline{C}_1\right)\sin 2x + \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \overline{C}_2\right)\cos 2x =$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \overline{C}_1\sin 2x + \overline{C}_2\cos 2x. \text{ ●}$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку?
2. Що називається лінійним однорідним рівнянням другого порядку?
3. Що називається визначником Вронського для функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$? Сформулювати і довести властивості визначника $W(y_1, y_2)$.
4. Сформулювати і довести теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку.
5. Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку, якщо відомий його частинний розв'язок?
6. Сформулювати і довести теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.
7. У чому полягає метод варіації довільних сталих?
8. Довести, що функція $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння $y'' - 4y = 0$.

Вказівка. Перевірити виконання умов теореми 3.

9. Довести, що функція $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{3}{2} x \cos x$ є загальним розв'язком рівняння

$$y'' + y = 3 \sin x.$$

Вказівка. Перевірити виконання умов теореми 5.

10. Задано рівняння $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$. Переконатись, що функція $y = x$ є частинним розв'язком цього рівняння, і знайти його загальний розв'язок.

11. Задано рівняння $y'' - y = x$. Пересвідчитись, що функція $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі, є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння, і методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок даного рівняння.

Відповіді. 10. $y = C_1 x + C_2 \left(\frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \pm 1\right)$. 11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - x$.

§ 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Як уже зазначалося, основною задачею в диференціальних рівняннях є знаходження їхнього загального розв'язку. Ця задача найповніше вивчена для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

4.1. Лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{85}$$

де p, q — дійсні числа.

Ейлер запропонував шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \tag{86}$$

де k — стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Підставивши функцію (86) в рівняння (85), дістанемо

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{87}$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (87), то функція (86) буде розв'язком рівняння (85). Квадратне рівняння (87) називається *характеристичним рівнянням диференціального рівняння* (85).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2. Можливі три випадки:

I. k_1 і k_2 — дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);

II. k_1 і k_2 — комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$);

III. k_1 і k_2 — дійсні і рівні числа ($k_1 = k_2$);

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$. У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (85) є функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, тому що при $k_1 \neq k_2$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}.$$

Згідно з теоремою 4 (п. 3.2) загальний розв'язок рівняння (85) знаходять за формулою

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{88}$$

II. *Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:*

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i.$$

Підставивши значення k_1 та k_2 у формулу (86), знайдемо розв'язки

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

маємо

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);$$

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Зауважимо, що коли функція $z(x) = u(x) + iv(x)$ є розв'язком рівняння (85), то розв'язками будуть також функції $u(x)$ та $v(x)$. Дійсно, підставивши функцію $z(x)$ в рівняння (85), дістанемо:

$$u'' + v''i + p(u' + v'i) + q(u + vi) \equiv 0,$$

або

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Остання тотожність можлива, коли вирази в дужках дорівнюють нулю (гл. 7, п. 1.4). Це означає, що функції u та v — розв'язки рівняння (85). Згідно з цим зауваженням частинними розв'язками рівняння (85) є функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = \operatorname{tg}\beta x \neq \text{const},$$

тому загальний розв'язок рівняння (85) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x). \tag{89}$$

III. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:* $k_1 = k_2 = k$. За формулою (86) дістанемо один з розв'язків:

$$y = e^{kx}.$$

Другий розв'язок шукатимемо у вигляді $y_2 = ue^{kx}$, де u — невідома функція від x. Знайшовши y_2' і y_2'' та підставивши їх у рівняння (85), дістанемо

$$(u'' + 2u'k + uk^2)e^{kx} + p(u' + uk)e^{kx} + que^{kx} = 0,$$

або

$$u'' + (2k + p)u' + (k^2 + pk + q)u = 0.$$

Оскільки k — корінь рівняння (87), то $k^2 + pk + q = 0$ і за теоремою Вієта $2k = -p$, тому $2k + p = 0$ і $u'' = 0$, звідки $u = C_1x + C_2$, де C_1, C_2 — довільні сталі. Поклавши $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ (нас цікавить який-небудь розв'язок $u(x) \neq 0$), знайдемо другий частинний розв'язок рівняння (85):

$$y_2 = xe^{kx}.$$

Розв'язки y_1 та y_2 — лінійно незалежні, тому загальний розв'язок рівняння (85) має вигляд

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2x). \tag{90}$$

Приклади

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

○ Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ і знайдемо його корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. За формулою (88) шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}. \quad ●$$

2. Розв'язати рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$ має комплексні корені $k_{1,2} = -2 \pm 3i$. Загальний розв'язок дістанемо за формулою (89):

$$y = e^{-2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x). \quad ●$$

3. Знайти розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

○ Знайдемо спочатку загальний розв'язок. Характеристичне рівняння $k^2 + 6k + 9 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = -3$. За формулою (90) маємо загальний розв'язок $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$.

Скористаємось початковими умовами. Оскільки

$$y' = -3e^{-3x}(C_1 + C_2x) + C_2e^{-3x}, \text{ то } \begin{cases} C_1 = 0; \\ -3C_1 + C_2 = 2, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0$, $C_2 = 2$.

Знаходимо шуканий розв'язок: $y = 2xe^{-3x}$. ●

4.2. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння із спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{91}$$

де p, q — задані дійсні числа, $f(x) \not\equiv 0$ — задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b).

Згідно з теоремою п. 3.3, загальний розв'язок такого рівняння являє собою суму частинного розв'язку рівняння (91) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходити вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (91) можна знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих (п. 3.4). Проте для рівнянь із спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

I. Нехай права частина в рівнянні (91) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{92}$$

де α — дійсне число, $P_n(x)$ — могочлен степеня n.

Можливі такі випадки:

а) число α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{93}$$

Тоді диференціальне рівняння (91) має частинний розв'язок виду

$$y^* = Q_n(x) e^{\alpha x} = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n) e^{\alpha x}, \tag{94}$$

де A_0, A_1, ..., A_n — невизначені коефіцієнти.

Справді, підставляючи функцію (94) в рівняння (91), після скорочення на $e^{\alpha x}$ дістанемо

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) \equiv P_n(x), \tag{95}$$

де $Q_n''(x)$ — многочлен степеня $n - 2$, $Q_n'(x)$ — многочлен степеня $n - 1$, а $Q_n(x)$ і $P_n(x)$ — многочлени степеня n. Таким чином, зліва і справа в тотожності (95) стоять могочлени степеня n. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях n, дістанемо систему $n + 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначимо $n + 1$ невідомих коефіцієнтів A_i многочлена $Q_n(x)$.

Не зупиняючись далі на доведеннях (див. [24]), вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв'язок рівняння (91), залежно від виду правої частини $f(x)$ цього рівняння;

б) якщо число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння (93), тобто є простим коренем цього рівняння, то частинний розв'язок рівняння (91) треба шукати у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)\,e^{\alpha x}; \tag{96}$$

в) якщо число α є двократним коренем рівняння (93), то частинний розв'язок рівняння (91) шукають у вигляді

$$y^* = x^2Q_n(x)\,e^{\alpha x}. \tag{97}$$

Об'єднаємо випадки а) — в): якщо права частина рівняння (91) має вигляд (92), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ — многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r — число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α. Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо $r = 0$.

II. Нехай права частина в рівнянні (91) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x), \tag{98}$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, $R_m(x)$ — многочлен степеня m; α та β — дійсні числа. (Функція (92) є окремим випадком функції (98) і утворюється з неї при $\beta = 0$).

Частинний розв'язок рівняння (91) треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x), \tag{99}$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ — многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s — найвищий степінь многочленів $R_m(x)$ та $P_n(x)$, тобто $s = \max(n, m)$; r — число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (91) має вигляд

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x, \tag{100}$$

де A, B — відомі дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r(a\cos\beta x + b\sin\beta x), \tag{101}$$

де a, b — невідомі коефіцієнти; r — число коренів характеристичного рівняння (93), які дорівнюють βi.

Зауваження. 1. Шукані многочлени $Q_n(x)$ у формулах (94), (96) і (97) мають бути повними, тобто містити всі степені x від 0 до n, незалежно від того, чи повним є заданий многочлен $P_n(x)$. Те саме стосується многочленів $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ у формулі (99), причому невизначені коефіцієнти при одних і тих же степенях x у цих многочленах повинні бути, взагалі кажучи, різними.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо права частина рівняння (91) є сумою декількох різних за структурою функцій виду (92) або (98), то для відшукання частинного розв'язку потрібно використати теорему про накладання розв'язків (п. 3.4).

З а у в а ж е н н я 3. Використаний метод підбору окремого частинного розв'язку рівняння (91) можна застосовувати лише для певних диференціальних рівнянь, а саме для лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами і з спеціальною правою частиною виду (92) або (98). В інших випадках частинний розв'язок треба шукати методом варіації довільних сталих.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y}(x) = e^x (C_1 + C_2 x)$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x) e^{0 \cdot x}$, причому $\alpha = 0$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то за формулою (94) частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_1(x) e^{0 \cdot x}$, тобто $y^* = A + Bx$, де A і B — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*\prime} = B$, $y^{*\prime\prime} = 0$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$-2B + A + Bx = 2x + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} B = 2; \\ -2B + A = 3, \end{cases}$$

звідки $B = 2$, $A = 7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^* = 7 + 2x$, тому

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x) = e^x (C_1 + C_2 x) + 2x + 7$$

шуканий загальний розв'язок. ●

2. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_0(x) e^{3x}$, причому $\alpha = 3$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = Q_0(x) e^{3x}, \text{ тобто } y^* = Ae^{3x},$$

де A — невідомий коефіцієнт.

Знайшовши похідні $(y^*)' = 3Ae^{3x}$, $(y^*)'' = 9Ae^{3x}$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 8e^{3x},$$

звідки $A = 4$, тому $y^* = 4e^{3x}$ — частинный розв'язок даного рівняння, а $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 4e^{3x}$ — його загальний розв'язок. ●

3. Розв'язати рівняння

$$y'' + 9y = (54x^2 + 1) e^{3x}.$$

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 3i$, тому $\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Права частина даного рівняння має вигляд $P_2(x)e^{3x}$. Оскільки $\alpha = 3$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_2(x)e^{3x}$, тобто

$$y^* = (A + Bx + Cx^2)e^{3x},$$

де A, B, C — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y^*)'$ та $(y^*)''$ і підставивши їх в дане рівняння, дістанемо після зведення подібних членів і скорочення на e^{3x}:

$$18Cx^2 + (18B + 12C)x + (18A + 6B + 2C) = 54x^2 + 1.$$

Звідси

$$\begin{cases} 18C = 54; \\ 18B + 12C = 0; \\ 18A + 6B + 2C = 1, \end{cases}$$

$$A = \frac{7}{18}, \ B = -2, \ C = 3,$$

отже, $y^* = \left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18}\right)e^{3x}$ — частинний розв'язок даного рівняння, а $y =$ $= C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18}\right)e^{3x}$ — загальний розв'язок. ●

4. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' - 3y = (x + 2)e^{3x}$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k - 3 = 0$ має корені $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{3x}$, причому $\alpha = 3 = k_2$, $\alpha \neq k_1$, тобто $\alpha = 3$ є простим коренем характеристичного рівняння, то згідно з формулою (96) частинний розв'язок треба шукати у вигляді $y^* = xQ_1(x)e^{3x}$, а саме:

$$y^* = x(A + Bx)e^{3x},$$

де A, B — невідомі коефіцієнти.

Знайшовши $(y^*)'$ та $(y^*)''$ і підставивши y^*, $(y^*)'$ і $(y^*)''$ в дане рівняння, після спрощень знаходимо

$$8Bx + 2B + 4A = x + 2.$$

Далі маємо

$$\begin{cases} 8B = 1; \\ 2B + 4A = 2, \quad B = \frac{1}{8}, \quad A = \frac{7}{16}; \end{cases}$$

$y^* = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x}$ — частинний розв'язок даного рівняння; $y = C_1e^{-x} +$ $+ \left(C_2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x}$ — загальний розв'язок. ●

5. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 5\sin 2x$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 2i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$. Права частина даного рівняння $f(x) = 5\sin 2x = 5\sin 2x + 0 \cdot \cos 2x$ є функцією виду (100), де $A = 0$, $B = 5$, $\beta = 2$. Крім того, число $\beta i = 2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою (101) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = x(a\cos 2x + b\sin 2x),$$

де a, b — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y^*)'$ та $(y^*)''$ і підставивши $(y^*)''$ та y^* в дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$-4a\sin 2x + 4b\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в лівій і правій частині цієї рівності, знаходимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5; \\ 4b = 0, \end{cases}$$

звідки $a = -\dfrac{5}{4}$, $b = 0$. Отже $y^* = -\dfrac{5}{4}x\cos 2x$ — частинний розв'язок даного рівняння, а $y = \bar{y} + y^* = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x - \dfrac{5}{4}x\cos 2x$ — загальний розв'язок. ●

6. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 3e^x + 2x + 3$, який задовольняє початковим умовам: $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = e^x(C_1 + C_2x)$. Права частина рівняння є сумою двох різних за структурою функцій $f_1(x) = 3e^x$ та $f_2(x) = 2x + 3$, тому за теоремою про накладання розв'язків частинний розв'язок даного рівняння дорівнює $y^* = y_1^* + y_2^*$, де y_1^* та y_2^* — частинні розв'язки рівнянь $y'' - 2y' + y = 3e^x$ та $y'' - 2y' + y = 2x + 3$ відповідно.

Частинний розв'язок першого з цих рівнянь шукаємо у вигляді $y_1^* = x^2Ae^x$, оскільки $r = 2$ (число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\alpha = 1$, дорівнює 2). Підставивши y_1^*, $(y_1^*)'$, $(y_1^*)''$ в перше рівняння, після спрощень знайдемо $2A = 3$, тому

$$y_1^* = \frac{3}{2}x^2e^x.$$

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді $y_2^* = A + Bx$, звідки $y_2^* = 2x + 7$ (див. приклад 1). Отже,

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = e^x\left(C_1 + C_2x + \frac{3}{2}x^2\right) + 2x + 7$$

— загальний розв'язок даного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови. Продиференціюємо загальний розв'язок:

$$y' = e^x\left(C_1 + C_2 + C_2x + 3x + \frac{3}{2}x^2\right) + 2.$$

Підставивши в загальний розв'язок і його похідну початкові умови $x = 0$, $y = 3$, $y' = -1$, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 7 = 3; \\ C_1 + C_2 + 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = -4$, $C_2 = 1$. Отже,

$$y = e^x\left(\frac{3}{2}x^2 + x - 4\right) + 2x + 7$$

— шуканий розв'язок. ●

7: Розв'язати рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

○ Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm i$, тому $\bar{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Права частина рівняння $f(x) = \operatorname{tg} x$ не є функцією спеціального виду (92) або (98), тому частинний розв'язок даного рівняння методом підбору шукати не можна.

Знайдемо цей розв'язок методом Лагранжа. Складемо систему виду (84) і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0; \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

$$C_1' = \sin x, \quad C_2' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$C_1 = \int \sin x dx = -\cos x + \bar{C}_1;$$

$$C_2 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = -\ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \sin x + \bar{C}_2,$$

де $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ — довільні сталі. При $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ дістанемо частинний розв'язок:

$$y^* = -\sin x \cos x + \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|\right) \cos x,$$

тоді

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

— загальний розв'язок даного рівняння. ●

4.3. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

Застосуємо методи знаходження розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь вищих порядків. Не зупиняючись детально на теорії (див. [26]), сформулюємо необхідні твердження і розглянемо приклади.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{102}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сталі дійсні числа.

Характеристичним для рівняння (102) називається алгебраїчне рівняння n-го степеня виду

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{103}$$

де k — невідоме дійсне чи комплексне число.

Як відомо (гл. 7, п. 1.5), рівняння (103) має n коренів. Позначимо ці корені через $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Теорема. *Кожному простому кореню k рівняння* (103) *відповідає частинний розв'язок* e^{kx} *рівняння* (102), *а кожному кореню k кратності $m > 1$ відповідає m частинних розв'язків виду* e^{kx}, xe^{kx}, ..., $x^{m-1}e^{kx}$.

Кожній парі $\alpha \pm \beta i$ простих комплексно-спряжених коренів рівняння (103) *відповідає два частинних розв'язки* $e^{\alpha x} \sin \beta x$ та $e^{\alpha x} \cos \beta x$ *рівняння* (102), *а кожній парі $\alpha \pm \beta i$ комплексно-спряжених коренів кратності $p > 1$ відповідає $2p$ частинних розв'язків виду*

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ \ldots \ , x^{p-1}e^{\alpha x} \sin \beta x;$$
$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ \ldots \ , x^{p-1}e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

Загальна сума кратностей всіх коренів рівняння (103) дорівнює n, тому кількість всіх частинних розв'язків рівняння (102), складених згідно з цією теоремою, дорівнює n, тобто збігається з порядком рівняння (102). Позначимо ці частинні розв'язки через $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Можна показати, що знайдені частинні розв'язки є лінійно незалежними, і загальний розв'язок рівняння (102) знаходиться за формулою

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n. \tag{104}$$

Нехай тепер задано неоднорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{105}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сталі дійсні числа, $f(x) \not\equiv 0$ — неперервна на деякому проміжку функція.

Як і для рівнянь другого порядку, загальним розв'язком рівняння (105) є функція

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

де $\bar{y}(x)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (102), а $y^*(x)$ — частинний розв'язок рівняння (105).

Побудову загального розв'язку $\bar{y}(x)$ рівняння (102) з'ясовано. Проаналізуємо знаходження частинного розв'язку $y^*(x)$. Якщо права частина $f(x)$ рівняння (105) є функцією спеціального виду (98), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати за формулою (99). Якщо права частина $f(x)$ не є функцією виду (98), то для знаходження $y^*(x)$ застосовують метод варіації довільних сталих. Стосовно рівняння (105) суть цього методу така.

Нехай функція (104) є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (102). Знаходимо частинний розв'язок рівняння (105) за тією ж формулою (104), вважаючи, що величини $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — функції від x, тобто покладемо

$$y^*(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n, \tag{106}$$

де $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ — невідомі функції.

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо похідні $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, а потім інтегруванням і самі функції $C_i(x)$. Якщо взяти всі сталі інтегрування рівними нулю і підставити функції $C_i(x)$ в рівність (106), то матимемо частинний розв'язок рівняння (105); якщо у рівність (106) підставити функції $C_i(x) + \overline{C}_i$, де $\overline{C}_i$ — довільні сталі, то зразу дістанемо загальний розв'язок.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$.

○ Характеристичне рівняння $k^5 + 4k^3 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 2i$, $k_5 = -2i$. Згідно з теоремою маємо частинні розв'язки: $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = \cos 2x$, $y_5 = \sin 2x$. Загальний розв'язок даного рівняння знаходимо за формулою (104):

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x. \bullet$$

2. Знайти розв'язок рівняння $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$.

○ Маємо неоднорідне лінійне рівняння третього порядку. Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 + k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x$. Правою частиною даного рівняння є функція виду (100), де $A = B = 4$, $\beta = 1$. Оскільки число $1 \cdot i = i$ не є коренем характеристичного рівняння ($r = 0$), то окремий розв'язок шукаємо у вигляді (101):

$$y^* = a \cos x + b \sin x,$$

де a, b — невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ і підставивши їх у дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$2a \cos x + 2b \sin x = 4 \cos x + 4 \sin x,$$

звідки $a = b = 2$, тому $y^* = 2 \cos x + 2 \sin x$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння, а

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x + 2(\sin x + \cos x)$$

— загальний розв'язок. Продиференціювавши його двічі, знайдемо

$$y' = (C_2 + C_3(1 + x))e^x + 2(-\sin x + \cos x);$$

$$y'' = (C_2 + C_3(2 + x))e^x - 2(\cos x + \sin x).$$

Скориставшись початковими умовами $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 2, \\ C_2 + C_3 + 2 = 2, \\ C_2 + 2C_3 - 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 1$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = 1 + (x - 1) e^x + 2 (\cos x + \sin x). \quad \bullet$$

3. *Задача про биття вала.* Для швидкого обертання тонкого і довгого вала характерне, як показує досвід, таке явище: при збільшенні кутової швидкості ω вона досягає такого значення $\omega = \omega_1$, при якому вал не зберігає прямолінійної форми, а починає, як кажуть, бити; якщо і далі збільшувати швидкість $\omega > \omega_1$, то биття спочатку припиняється, а потім знову виникає при $\omega = \omega_2 > \omega_1$ тощо. Швидкості ω_1, ω_2, ... називають критичними швидкостями обертання вала. Обчислити ці швидкості.

○ Відомо [7], що величина y прогину вала, закріпленого в точках $x = 0$ і $x = l$, задовольняє рівняння

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P\omega^2}{g} y,$$

де E — коефіцієнт пружності; I — момент інерції поперечного перерізу вала; P — вага одиниці довжини вала і g — прискорення сили тяжіння.

Поклавши

$$q = \sqrt[4]{\frac{P\omega^2}{gEI}},$$

дістанемо рівняння

$$y^{IV} - q^4 y = 0.$$

Його характеристичне рівняння $k^4 - q^4 = 0$ має корені $\pm q$, $\pm qi$, тому загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \cos qx + C_4 \sin qx.$$

На кінцях вал закріплено, тому маємо початкові умови

$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

які приводять до системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0; \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0; \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \cos ql + C_4 \sin ql = 0; \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \cos ql - C_4 \sin ql = 0. \end{cases}$$

Розв'язок $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ цієї системи відповідає випадку, коли вал зберігає прямолінійну форму: $y = 0$.

Знайдемо тепер ті значення q, для яких система рівнянь має ненульові розв'язки. З перших двох рівнянь маємо $C_1 = -C_2$, $C_3 = 0$. Підставляючи ці значення в останні два рівняння, дістаємо $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 \sin ql = 0$. Оскільки $C_4 \neq 0$, то $\sin ql = 0$, звідки

$$q = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in N.$$

Скориставшись значенням q, знайдемо шукані критичні швидкості:

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{P}}, \quad n \in N. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами?

2. Яке рівняння називається характеристичним? Як його знаходять?

3. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння: дійсні і різні? рівні? комплексні?

4. У чому полягає метод підбору частинного розв'язку диференціального рівняння з правою частиною виду

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\sin\beta x + R_m(x)\cos\beta x),$$

де $P_n(x)$, $R_m(x)$ — многочлени; α, β — дійсні числа?

Розглянути випадки і навести приклади, якщо:

а) $f(x) = Ae^{\alpha x}$; б) $f(x) = A\sin\beta x + B\cos\beta x$; в) $f(x) = P_n(x)$; г) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$; д) $f(x) = P_n(x)\sin\beta x + R_m(x)\cos\beta x$; е) $f(x) = e^{\alpha x}(A\sin\beta x + B\cos\beta x)$.

5. Для яких диференціальних рівнянь застосовний метод підбору?

6. Як знаходиться загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами?

7. Як знайти частинний і загальний розв'язки неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами?

8. Знайти загальні розв'язки однорідних рівнянь:

а) $y'' - 7y' + 6y = 0$; б) $y'' + 4y' + 29y = 0$; в) $y'' + 2y' + y = 0$; г) $y^{IV} - 13y'' + 360 = y$; д) $y^{V} + 9y''' = 0$.

9. Знайти загальні розв'язки неоднорідних рівнянь:

а) $y'' - 2y' + y = x^3$; б) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$; в) $y'' + 4y = x\sin 2x$; г) $y'' - 2y = \frac{2}{x^3}(x^2 - 1)$; д) $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

10. Знайти частинні розв'язки рівнянь, які задовольняють задані початкові умови:

а) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; б) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$; в) $y''' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$; г) $y''' - y' = -3x^2 + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Відповіді. 8. а) $y = C_1e^x + C_2e^{6x}$; б) $y = e^{-2x}(C_1\sin 5x + C_2\cos 5x)$; в) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x)$; г) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$; д) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\sin 3x + C_5\cos 3x$. 9. а) $y = (C_1 + C_2x)e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$; б) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - e^{-x} - \frac{x}{2}\cos x$; в) $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{8}\right)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{x}{16}\right)\sin 2x$; г) $y = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{x}$; д) $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x - x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$. 10. а) $y = xe^{5x}$; б) $y = \frac{1}{8}(e^x + 22e^{3x} + e^{5x})$; в) $y = 1 + \cos x$; г) $y = e^x + x^3$.

§ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку широко використовують при вивченні явищ, пов'язаних з різноманітними коливаннями.

Нехай у деякому середовищі вздовж осі Ox рухається матеріальна точка масою m. Припустимо, що на цю точку діють такі сили: сила $f_1 = -ax$ ($a > 0$ — коефіцієнт відновлення), яка намагається повернути точку до початку координат; сила опору середовища $f_2 = -bx$ ($b > 0$ — коефіцієнт опору); зовнішня сила $f_3 = f(x)$, напрям якої збігається з напрямом осі Ox.

Задача полягає в тому, щоб знайти закон $x = x(t)$, за яким рухається точка. Скориставшись другим законом Ньютона, запишемо диференціальне рівняння руху

$$mx'' = -bx' - ax + f(t)$$

або

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = \varphi(t), \tag{107}$$

де

$$2h = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{a}{m}, \quad \varphi(t) = \frac{f(t)}{m}.$$

Якщо $\varphi(t) \not\equiv 0$, то диференціальне рівняння (107) називають *рівнянням вимушених коливань*, а при $\varphi(t) \equiv 0$ — *рівнянням вільних коливань*.

Зауважимо, що рівняння виду (107) описують механічні коливання вантажу на пружній ресорі (коливання залізничних вагонів, автомобілів тощо), малі коливання математичного чи фізичного маятника, вертикальні та бортові коливання корабля, електричні, звукові та багато інших коливань.

5.1. Вільні гармонічні коливання

Розглянемо рівняння вільних коливань

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = 0 \tag{108}$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $k^2 + 2hk + \omega^2 = 0$ має два корені: $k_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$. Можливі три випадки.

1°. *Коефіцієнт опору більший за коефіцієнт відновлення:* $h > \omega$, тоді загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд

$$x = C_1 e^{-(h-\sqrt{h^2-\omega^2})t} + C_2 e^{-(h+\sqrt{h^2-\omega^2})t}.$$

Графік його за певних початкових умов показано на рис. 8.12, з якого видно, що ніяких коливань не відбувається, $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, тобто матеріальна точка прямує до рівноваги. Такий рух називають аперіодичним затухаючим рухом.

Пояснити це можна тим, що вплив сили опору, яка гальмує рух, настільки переважає вплив сили відновлення, яка викликає рух, що рух затухає раніше, ніж матеріальна точка перейде положення рівноваги.

2°. *Коефіцієнт опору дорівнює коефіцієнту відновлення:* $h = \omega$, тоді загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд (рис. 8.13)

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t).$$

Такий рух також називається аперіодичним. Він не відрізняється від попереднього в тому розумінні, що $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

3°. *Коефіцієнт опору менший від коефіцієнта відновлення:* $h < \omega$, тоді загальний розв'язок рівняння (108) має вигляд

$$x = e^{-ht}(C_1 \sin\sqrt{\omega^2 - h^2}\,t + C_2 \cos\sqrt{\omega^2 - h^2}\,t). \qquad (109)$$

Поклавши

$$C_1 = A\cos\varphi_0, \quad C_2 = A\sin\varphi_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega^2 - h^2},$$

перетворимо розв'язок (109) до вигляду

$$x = Ae^{-ht}\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (110)$$

Тепер уже точка справді здійснює коливання — так звані затухаючі гармонічні коливання. Величина A називається початковою амплітудою, $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ — частотою, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ — періодом, а φ_0 — початковою фазою затухаючих гармонічних коливань.

Якщо коефіцієнт опору $h = 0$, то

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (111)$$

тобто матеріальна точка виконує звичайні гармонічні коливання.

У випадку, коли $h \neq 0$, амплітуда коливань дорівнює Ae^{-ht} і, на відміну від звичайних гармонічних коливань, не є сталою величиною: $Ae^{-ht} \to 0$ при $t \to +\infty$. Отже, точка прямує до рівноваги, але не монотонно, як в попередніх випадках, а коливаючись навколо положення рівноваги з поступово затухаючими амплітудами.

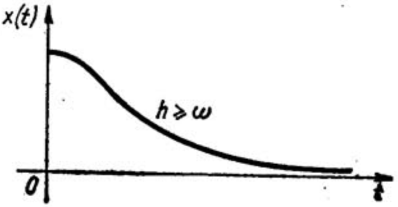


Рис. 8.12

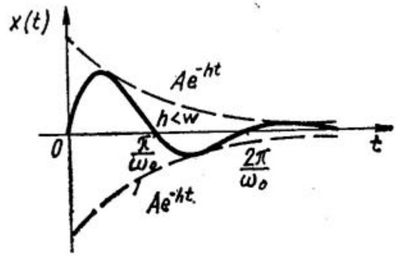


Рис. 8.13

Схематичний графік затухаючого гармонічного коливання (при $\varphi_0 = 0$) зображено на рис. 8.13.

Значення сталих C_1 і C_2 у формулі (109) або A і φ_0 у формулі (110) визначаються з початкових умов — початкового відхилення точки і її швидкості.

5.2. Вимушені коливання. Резонанс

Нехай в рівнянні (107) зовнішня сила $\varphi(t) \neq 0$, тоді рух точки описуватиметься лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок цього рівняння в квадратурах можна знайти методом варіації довільних сталих.

Розглянемо випадок, коли рух відбувається в середовищі без опору і на коливальну систему діє періодична зовнішня сила $\varphi(t) = H \times \sin \omega_1 t$, тоді рівняння (107) набирає вигляду

$$x'' + \omega^2 x = H \sin \omega_1 t. \tag{112}$$

Загальним розв'язком цього рівняння є сума загального розв'язку $\bar{x}(t)$ відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв'язку $x^*(t)$ рівняння (112).

З формули (111) випливає, що загальний розв'язок $\bar{x}(t) = A \times \sin(\omega t + \varphi_0)$. Щоб знайти частинний розв'язок $x^*(t)$, розглянемо два випадки.

1°. *Нерезонансний випадок:* припустимо, що $\omega \neq \omega_1$, тобто частота зовнішньої сили відмінна від частоти вільних коливань. Оскільки число $i\omega_1$ не збігається з коренями $\pm i\omega$ характеристичного рівняння $k^2 + \omega^2 = 0$, то згідно з формулою (101) частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$x^*(t) = a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t.$$

Знайшовши коефіцієнти a та b відомим способом (п. 4.2), дістанемо

$$x^*(t) = \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t,$$

тоді загальний розв'язок рівняння (112) має вигляд

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{H}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t.$$

Таким чином, частинний розв'язок $x^*(t)$ визначає коливання точки, зумовлене зовнішньою силою, загальний розв'язок $\bar{x}(t)$ — вільні коливання, а загальний розв'язок $x(t)$ — коливальний рух, що утворюється внаслідок складання двох коливань з різними частотами ω і ω_1. У випадку, коли ω та ω_1 близькі за величиною, матеріальна точка виконує коливання з великою сталою амплітудою.

3*

2^0. *Резонансний випадок:* нехай тепер $\omega = \omega_1$, тобто частота зовнішньої сили дорівнює частоті вільних коливань. Оскільки $i\omega_1$ збігається з коренем $i\omega$ характеристичного рівняння, частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$x^*(t) = t(a\cos\omega t + b\sin\omega t).$$

Знаходячи коефіцієнти a та b, дістанемо розв'язок $x^*(t) = -\frac{Ht}{2\omega} \times \cos\omega t$, тому загальний розв'язок рівняння (112) має вигляд

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{Ht}{2\omega}\cos\omega t.$$

З цієї формули випливає, що, як і в попередньому випадку, маємо коливальний рух, який утворюється внаслідок складання двох коливань, але з однаковими частотами. Другий доданок загального розв'язку показує, що амплітуда коливань необмежено зростає при необмеженому зростанні часу t, тобто матеріальна точка через деякий час виконуватиме коливання з дуже великою амплітудою, навіть якщо амплітуда H зовнішньої сили зовсім мала. Це явище називається резонансом. Отже, резонанс при коливальному русі настає у тому випадку, коли частота вільних коливань збігається з частотою зовнішньої сили. Резонанс відіграє важливу роль у техніці і фізиці. Кожне пружне тіло (наприклад, будь-яка споруда) має свою певну власну частоту коливань, яка залежить лише від властивостей тіла. Уявімо, що це тіло під дією зовнішньої сили виводиться із стану рівноваги. Якщо настає явище резонансу, то дія сили, яка б мала вона не була, може призвести до руйнування коливальної системи. Тому при проектуванні різноманітних споруд (будівель, машин, мостів, літаків, кораблів тощо) особливу увагу звертають на розрахунки міцності споруди, пов'язані з резонансом. Резонансом пояснюється добре відоме з досвіду явище, коли невелике «розкачування» пружного тіла (скажімо, моста) викликає його руйнування.

Завдання для самоконтролю

1. Нехай математичний маятник довжиною l і вагою $P = mg$, відхилений від вертикального положення на кут φ, вільно коливається в середовищі без опору. Довести, що для малих кутів φ диференціальне рівняння руху маятника має вигляд

$$lm\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg\varphi = 0.$$

2. Електричне коло складається з генератора змінної електрорушійної сили $E(t)$, резистора з опором R катушки індуктивності з самоіндукцією L і конденсатора з ємністю C. Довести, що диференціальне рівняння коливання заряду q на конденсаторі має вигляд

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E(t)}{L}.$$

3. Коливання корабля навколо поздовжньої осі називається бортовою качкою. Рівняння малих коливань має вигляд

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Pa\varphi = 0,$$

де I — момент інерції; P — вага корабля; a — відстань від поздовжньої осі до центра судна; φ — кут відхилення корабля від горизонтального положення.

Нехай $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = 0$. Довести, що амплітуда коливань корабля дорівнює φ_0.

4. Нехай коливання точки в середовищі з опором описується рівнянням

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = \sin t.$$

Довести, що закон руху має вигляд

$$x = \frac{1}{\sqrt{4h^2+(\omega^2-1)^2}}\sin\left(t - \frac{2h}{\omega^2-1}\right).$$

§ 6. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У багатьох науково-технічних задачах буває потрібно знайти не одну, а зразу кілька невідомих функцій, які пов'язані між собою кількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь утворює систему диференціальних рівнянь.

Приклади

1. Нехай матеріальна точка маси m має криволінійну траєкторію руху в просторі. Потрібно визначити закон руху точки, тобто залежність координат x, y, z від часу t, коли на неї діє сила $\vec{F}$.

Коли

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x;\ y;\ z)$$

—радіус-вектор рухомої точки, то її швидкість і прискорення знаходяться за формулами (гл. 5, п. 7.5):

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) = (x';\ y';\ z'),\quad \vec{w} = \vec{r}''(t) = (x'';\ y'';\ z'').$$

Сила $\vec{F}$, під дією якої рухається точка, взагалі кажучи, є функцією часу, координат точки і проекцій швидкості на осі координат: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}')$. Тому згідно з другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\vec{r}'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}').$$

Це векторне рівняння еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'),\\ my'' = F_y(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'),\\ mz'' = F_z(t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'). \end{cases}$$

Наведені диференціальні рівняння утворюють систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку відносно трьох невідомих функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

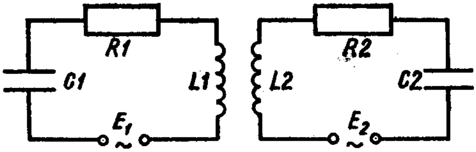


Рис. 8.14

2. Розглянемо два електричних контури. Припустимо, що ці контури знаходяться в електромагнітному зв'язку: зміна струму в одному контурі індукує електрорушійну силу в другому (рис. 8.14).

З фізики відомо, що за певних умов індукована напруга в першому контурі дорівнює $-a\frac{di_2}{dt}$, а в другому $-a\frac{di_1}{dt}$, де a — коефіцієнт взаємної індуктивності, $i_1 = i_1(t)$, $i_2 = i_2(t)$ — сила струму відповідно в першому і другому контурах. Якщо в обох контурах відсутня зовнішня електрорушійна сила, то зміна струму в контурах регулюватиметься диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} L_1 i_1' + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_0^t i_1 dt + a i_2' = 0; \\ L_2 i_2' + R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int_0^t i_2 dt + a i_1' = 0, \end{cases}$$

або, після диференціювання по t,

$$\begin{cases} L_1 i_1'' + R_1 i_1' + \dfrac{1}{C_1} i_1 + a i_2'' = 0; \\ L_2 i_2'' + R_2 i_2' + \dfrac{1}{C_2} i_2 + a i_1'' = 0. \end{cases}$$

Дістали систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами відносно двох невідомих функцій $i_1(t)$ та $i_2(t)$.

Розглянемо деякі найпростіші системи диференціальних рівнянь. У цьому параграфі незалежну змінну позначатимемо буквою t, а невідомі функції — через $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, або (якщо їх не більше трьох) через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

6.1. Нормальні системи рівнянь

Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \tag{113}$$

або

$$x_k' = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Іншими словами, якщо в лівій частині рівнянь системи (80) стоять похідні першого порядку, а праві частини рівнянь зовсім не містять похідних, то така система називається нормальною. Розв'язком системи (113) називається сукупність функцій $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, які задовольняють кожному з рівнянь цієї системи.

Важливість вивчення саме нормальної системи випливає з того, що до неї в багатьох випадках зводяться системи і рівняння вищих порядків. Наприклад, система другого порядку

$$\begin{cases} x'' = 2x' + y' - x + y; \\ y'' = y' + x \end{cases}$$

введенням нових змінних $x' = u$, $y' = v$, $x'' = u'$, $y'' = v'$ зводиться до нормальної системи

$$\begin{cases} x' = u; \\ y' = v; \\ u' = 2u + v - x + y; \\ v' = v + x. \end{cases}$$

Таким самим способом — введенням нових змінних — всяке диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, зводиться до еквівалентної нормальної системи n рівнянь першого порядку.

Справді, нехай задано рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Покладемо

$$y = x_1, \; y' = x_2, \; \dots, \; y^{(n-1)} = x_n,$$

тоді

$$y' = x_1' = x_2, \; y'' = x_2' = x_3, \; \dots, \; y^{(n-1)} = x_{n-1}' = x_n, \; y^{(n)} = x_n'.$$

Дістали нормальну систему

$$x_i' = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

еквівалентну заданому рівнянню.

Покажемо, що можливий і зворотний перехід: нормальну систему рівнянь можна замінити одним рівнянням, порядок якого дорівнює числу рівнянь системи. Нехай задана нормальна система (113). Продиференціюємо по t будь-яке, наприклад, перше рівняння:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Підставивши в цю рівність значення похідних $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ з системи (113), дістанемо

$$x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Аналогічно знаходимо похідні до n-го порядку включно:

$$x_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = F_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{114}$$

Якщо з перших $n-1$ рівнянь системи (114) знайти (коли це можливо) змінні

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_2(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}), \\ x_3 &= \varphi_3(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}) \end{aligned} \tag{115}$$

і підставити їхні значення в останнє рівняння, то одержимо рівняння n-го порядку відносно змінної x_1:

$$x_1^{(n)} = \Phi(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}). \tag{116}$$

Нехай

$$x_1 = \psi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{117}$$

(де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі) — розв'язок рівняння (116). Продиференціювавши його $n-1$ разів і підставивши значення похідних $x_1', x_1'', \ldots, x_1^{(n-1)}$ в рівняння (115), дістанемо

$$\begin{cases} x_2 = \psi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ x_3 = \psi_3(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \tag{118}$$

Можна довести, що сукупність функцій (117), (118) буде загальним розв'язком системи (114).

Для нормальної системи (114) справджується теорема Коші про існування і єдиність розв'язку: *якщо в деякій області G функції $f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, системи (114) неперервні разом з усіма своїми похідними $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, то для будь-якої точки $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in G$* існує єдиний розв'язок $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, який задовольняє початкові умови:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \; x_2(t_0) = x_{20}, \; \ldots, \; x_n(t_0) = x_{n0}.$$

Для інтегрування системи (114) можна застосувати метод, за допомогою якого ця система була зведена до рівняння (116). Цей метод називають *методом виключення змінної*.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y; \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

○ Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = -7x' + y'.$$

Підставимо в це рівняння значення похідної y' із другого рівняння системи:

$$x'' = -7x' + (-2x - 5y).$$

Знайшовши з першого рівняння значення $y = x' + 7x$ і підставивши його в знайдене рівняння, дістанемо

$$x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Маємо лінійне однорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Інтегруючи його, одержуємо

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Оскільки $y = x' + 7x$, то

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) +$$
$$+ 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t).$$

Отже, загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$
$$y = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t). \; \bullet$$

6.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нехай задана нормальна система лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Для зручності обмежимося трьома рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_3z; \\ \dfrac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_3z; \\ \dfrac{dz}{dt} = c_1x + c_2y + c_3z, \end{cases} \tag{119}$$

де a_i, b_i, c_i — сталі. Цю систему методом виключення змінних завжди можна звести до одного лінійного однорідного рівняння третього порядку із сталими коефіцієнтами. Розглянемо ще один метод розв'язування системи (119).

Шукатимемо окремі розв'язки системи у вигляді

$$x = \alpha e^{kt} \quad y = \beta e^{kt}, \ z = \gamma e^{kt}, \tag{120}$$

де α, β, γ, k — невизначені сталі, які треба знайти.

Підставивши функції (120) в систему (119) і скоротивши на множник $e^{kt} \neq 0$, дістанемо

$$\begin{cases} k\alpha = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma; \\ k\beta = b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma; \\ k\gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (a_1 - k)\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0; \\ b_1\alpha + (b_2 - k)\beta + b_3\gamma = 0; \\ c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{121}$$

Дістали алгебраїчну однорідну систему лінійних рівнянь. Щоб ця система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю (гл. 1, п. 3.5):

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - k & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0. \tag{122}$$

Розкривши визначник, дістанемо алгебраїчне рівняння третього степеня відносно k, яке називається характеристичним рівнянням системи (119).

Розглянемо випадок, коли рівняння (122) має три дійсні різні корені k_1, k_2, k_3. Для кожного з цих коренів запишемо систему (121) і визначимо невідомі α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3.

Можна довести, що загальний розв'язок системи (119) має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1e^{k_1t} + C_2\alpha_2e^{k_2t} + C_3\alpha_3e^{k_3t}; \\ y = C_1\beta_1e^{k_1t} + C_2\beta_2e^{k_2t} + C_3\beta_3e^{k_3t}; \\ z = C_1\gamma_1e^{k_1t} + C_2\gamma_2e^{k_2t} + C_3\gamma_3e^{k_3t}. \end{cases} \tag{123}$$

Випадки, коли рівняння (122) має кратні або комплексні корені, складніші, і ми їх не розглядатимемо. У зв'язку з цим зауважимо, що характеристичне рівняння (122) системи (119) збігається з характеристичним рівнянням диференціального рівняння третього порядку, до якого зводиться система (119). Таким чином, якщо відомі корені рівняння (122), то завжди можна знайти загальний розв'язок рівняння третього порядку, до якого зводиться система (119), а потім і загальний розв'язок самої системи (119).

Отже, незалежно від структури коренів характеристичного рівняння, систему (119) завжди можна розв'язати, якщо тільки відомі ці корені.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається нормальною системою диференціальних рівнянь?
2. У чому полягає метод виключення змінних?
3. Що називається характеристичним рівнянням нормальної системи лінійних рівнянь із сталими коефіцієнтами?
4. Розв'язати системи:

а) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t; \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Відповідь. 4. а) $x = \cos t - \sin t$, $y = \cos t$; б) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$, $y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t$; в) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

Глава 9

РЯДИ

Ряди досить широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь тощо.

Найпростіший ряд — суму членів нескінченної геометричної прогресії — вперше ввели вчені Стародавньої Греції, зокрема Архімед застосував такий ряд до обчислення площі параболічного сегмента.

Систематично рядами почали користуватись, починаючи з 17 ст., проте теорія рядів була створена лише в 19 ст. на основі поняття границі в роботах К. Гаусса, О. Коші та багатьох інших учених.

§ 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття та означення. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд

Нехай задано послідовність дійсних чисел

$$\{u_n\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}.$$

Рядом називають вираз

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (1)$$

Цьому виразу ми не приписуємо ніякого числа, тому що нескінченне число додавань виконати не можна. Для кожного $n \in N$ покладемо

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Число u_n називається n-м членом, а число S_n — n-ю частинною сумою ряду (1).

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається *сумою ряду* (1), а ряд називається *збіжним*. Символічно це записується так:

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд (1) називається *розбіжним*.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n;$

б) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1};$

в) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)};$

г) $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0;$

д) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

○ а) Розглянемо частинну суму $S_n = 1+1+\dots+1 = n$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, то ряд а) розбіжний.

б) Випишемо послідовність частинних сум:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \dots,\ S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0.$$

Ця послідовність границі не має, тому ряд б) розбіжний.

в) Знайдемо суму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{n(n+1)} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$, то ряд в) збіжний і сума його $S = 1$.

г) Це геометрична прогресія з першим членом a і знаменником q. Точніше було б сказати — ряд, складений з членів геометричної прогресії. Проте для стислості ряд г) далі називаємо геометричною прогресією. При $q \neq 1$ маємо

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} =$$

$$= \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{q^n}{1-q};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},\ \text{якщо}\ |q|<1;\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty,\ \text{якщо}\ |q|>1.$$

Отже, при $|q|<1$ ряд г) збіжний, а при $|q|>1$ — розбіжний. Якщо $q=1$, то матимемо $a+a+\dots+a+\dots$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} an = \infty$, тобто ряд розбіжний. Якщо $q=-1$, то матимемо ряд $a-a+a-a+\dots$; $S_n = a$ при непарному n і $S_n = 0$ при парному n, тобто $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує, тому ряд розбіжний.

Таким чином, геометрична прогресія збіжна при $|q|<1$ і розбіжна при $|q|\geq 1$.

д) Цей ряд називається *гармонічним*. Покажемо, що він розбіжний.

Відомо (гл. 4, п. 4.2), що $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, $n\in N$, звідси

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1;\quad \frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n};\quad \frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n,$$

тобто,

$$1>\ln 2-\ln 1;$$

$$\frac{1}{2}>\ln 3-\ln 2;$$

$$\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} > \ln (n+1) - \ln n.$$

Додаючи почленно ліві і праві частини нерівностей, дістанемо $S_n > \ln (n+1)$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \ln (n+1) = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Отже, гармонічний ряд розбіжний. ●

1.2. Найпростіші властивості числових рядів

Розглянемо деякі властивості збіжних рядів.

1°. *Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також збіжний і сума його дорівнює CS* ($C = \text{const}$). *Іншими словами, збіжний ряд можна множити почленно на одне і те саме число.*

○ Нехай
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

$$\sigma_n = Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n = C\sum_{k=1}^{n} u_k = CS_n$$

— частинні суми даних рядів. За умовою $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} CS_n = CS$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ збіжний і сума його дорівнює CS. ●

2°. *Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і мають суми відповідно S та σ, то збіжними є також ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ і суми їх дорівнюють $S \pm \sigma$.*

○ Нехай

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, \quad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$$

— частинні суми відповідних рядів.

Оскільки $\overline{S}_n = S_n \pm \sigma_n$ і за умовою $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = S \pm \sigma$. ●

3°. *На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.*

○ Нехай S_n — частинна сума ряду (1), C_m — сума m відкинутих членів (число членів n взяте таким великим, що всі відкинуті члени містяться в S_n), σ_{n-m} — сума членів ряду, які містяться в S_n і не містяться в C_m, тоді $S_n = C_m + \sigma_{n-m}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = C_m + \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-m}$. Згідно із знайденою рівністю, границі в лівій і правій частинах одночасно існують або не існують, тобто ряд (1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) ряд без m його членів. ●

Розглянемо ряд (1) і покладемо

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Величину r_n називають n-м залишком ряду (1), її можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду (1) після відкидання перших n його членів.

Якщо ряд збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $r_n = S - S_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Справедливе і більш загальне твердження.

4°. *Ряд (1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок.*

Ця властивість є наслідком властивості 3°

5°. (*Необхідна умова збіжності ряду.*) *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *збіжний, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

○ Нехай S — сума заданого ряду, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, де $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k$. Проте $u_n = S_n - S_{n-1}$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ●

Умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ є тільки необхідною для збіжності ряду, але не достатньою. Це означає, що існують розбіжні ряди, для яких ця умова виконується.

6°. (*Достатня умова розбіжності ряду.*) *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *розбіжний.*

Дійсно, якби даний ряд був збіжний, то за властивістю 5° його загальний член прямував би до нуля при $n \to \infty$, що суперечить умові.

Приклади

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$.

○ а) Тут виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

проте ряд розбіжний. Дійсно,

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

тобто $S_n > \sqrt{n}$, звідки $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Отже, ряд а) розбіжний.

б) Тут виконується достатня умова розбіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0,$$

тому ряд б) розбіжний.

в) Ряд збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2}$.

Таким чином, якщо $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ніякого висновку про збіжність чи розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ зробити не можна.

Потрібне додаткове дослідження, яке виконується за допомогою достатніх умов збіжності ряду. Якщо ж $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

1.3. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше користуються такими достатніми умовами (ознаками) збіжності, як ознаки порівняння, ознаки Д'Аламбера і Коші та інтегральна ознака Коші.

Теорема 1 *(ознаки порівняння). Нехай задано два ряди з невід'ємними членами*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad u_n \geqslant 0, \tag{2}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \quad v_n \geqslant 0, \tag{3}$$

і для всіх n виконується нерівність

$$u_n \leqslant v_n. \tag{4}$$

Тоді, якщо ряд (3) збіжний, то збіжний і ряд (2). Якщо ряд (2) розбіжний, то розбіжний і ряд (3).

○ Нехай ряд (3) збіжний і

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

— частинні суми рядів (2) і (3).

Оскільки ряд (3) збіжний, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ його частинних сум. Члени ряду (3) невід'ємні, тому $\sigma_n \leqslant \sigma$. Але тоді з нерівності (4) випливає, що $S_n \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma$, тобто послідовність $\{S_n\}$ частинних сум ряду (2) обмежена зверху. Крім того, члени ряду (2) невід'ємні, тому частинні суми не спадають. Тоді за теоремою 4 (гл. 4, п. 3.7) послідовність $\{S_n\}$ має границю, тобто ряд (2) збіжний. Якщо ж ряд (2) розбіжний, то ряд (3) також розбіжний, бо коли б ряд (3) був збіжний, то за тільки що доведеним ряд (2) теж був би збіжним, а це суперечить умові. ●

Зауваження 1. Ознаки порівняння можна застосовувати і тоді, коли нерівність (4) виконується не для всіх членів рядів (2) і (3), а починаючи з деякого номера N. Це випливає з властивості 3°.

Зауваження 2. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно знати, які ряди збіжні і які розбіжні.

Для порівняння часто користуються рядами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geqslant 1; \end{cases}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{збіжний при } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний при } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$

Перший з цих рядів, як відомо, називається геометричною прогресією. Другий з рядів називається *рядом Діріхле, або узагальненим гармонічним рядом.* Його ми дослідимо пізніше. Зокрема, при $\alpha = 1$ дістанемо гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який, як відомо, розбіжний.

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

○ Застосовуємо ознаки порівняння.

а) Оскільки $\frac{1}{n \cdot 3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$, $n = 1, 2, \ldots,$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{3} < 1$, то ряд а) теж збіжний.

б) Оскільки $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ і ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \cdots$ розбіжний як гармонічний, то ряд б) також розбіжний. ●

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{5}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \tag{6}$$

причому існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = a \, (a \neq 0, \ a \neq \infty),$$

то ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

○ Нехай $\lim \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ (візьмемо $\varepsilon < a$) знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $\left| \frac{u_n}{v_n} - a \right| < \varepsilon$, звідки

$$(a - \varepsilon) v_n < u_n < (a + \varepsilon) v_n. \tag{7}$$

Якщо ряд (5) збіжний, то з нерівності (7) і теореми 1 випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a - \varepsilon) v_n$ також збіжний. Тоді, згідно з властивістю 1°, ряд (6) збіжний.

Якщо ряд (5) розбіжний, то з нерівності (7), теореми 1 і властивості 1° випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (a + \varepsilon) v_n$ і ряду (6). Аналогічно, якщо ряд (6) збіжний (розбіжний), то збіжним (розбіжним) буде і ряд (5). ●

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}$.

○ Застосуємо граничну ознаку порівняння.

а) Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{3} \neq 0$ і гармонічний ряд розбіжний, то ряд а) також розбіжний.

б) Порівняємо цей ряд із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (це ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, де $\alpha = 2 > 1\Big)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^3} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3} = 2 \neq 0.$$

Отже, даний ряд збіжний. ●

Теорема 3 *(ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{8}$$

існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{n_n} = l$, *то:*

1) ряд збіжний при $l < 1$;

2) ряд розбіжний при $l > 1$.

○ 1) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon,$$

або

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \tag{9}$$

Оскільки $l < 1$, то $\varepsilon > 0$ можна вибрати так, щоб число $q = l + \varepsilon < 1$. Тоді з правої частини нерівності (9) дістанемо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \quad u_{n+1} < qu_n, \quad n > N.$$

Надаючи n значень $N+1$, $N+2$, ..., з останньої нерівності маємо

$$u_{N+2} < u_{N+1}q;$$
$$u_{N+3} < u_{N+2}q < u_{N+1}q^2;$$
$$u_{N+4} < u_{N+3}q < u_{N+1}q^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

тобто члени ряду

$$u_{N+2} + u_{N+3} + u_{N+4} + \cdots \tag{10}$$

менші відповідних членів ряду

$$u_{N+1}q + u_{N+1}q^2 + u_{N+1}q^3 + \cdots.$$

Цей ряд збіжний як геометрична прогресія із знаменником q $(0 < q < 1)$, тому за ознакою порівняння ряд (10) також збіжний. Ряд (8) утворюється з ряду (10), якщо до останнього приєднати $N+1$ член u_1, u_2, ..., u_{N+1}. Тому за властивістю 3° (п. 1.2) ряд (8) збіжний.

2) Нехай $l > 1$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $l - \varepsilon > 1$, тоді з лівої частини нерівності (9) випливає, що $u_{n+1} > u_n$, $n > N$, тобто члени ряду зростають із зростанням їхнього номера. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ і ряд (8) розбіжний (властивість 6°). ●

Зауваження 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд (8) розбіжний, бо існує номер N такий, що $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ при $n > N$.

Зауваження 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ряд треба дослідити за допомогою інших ознак.

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

○ Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$,

заданий ряд збіжний.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{n! \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$,

отже, ряд розбіжний.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n (n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$
$= e > 1$;

ряд розбіжний. ●

Теорема 4 *(ознака Коші). Якщо для ряду (8) з додатними членами існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.*

○ Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$, такий, що

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < \varepsilon, \quad n > N,$$

або

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon, \quad n > N. \tag{11}$$

Припустимо, що $l < 1$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ так, щоб $l + \varepsilon = q < 1$, тоді з нерівності (11) маємо

$$\sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon = q \text{ або } u_n < q^n, \quad n > N.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{n} q^n$ збіжний як геометрична прогресія із знаменником q $(0 < q < 1)$, то з нерівностей $u_n < q^n$ за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ збіжний. Тоді збіжним буде і ряд (8), який утворюється з ряду $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ приєднанням до нього N членів: $u_1, u_2, \ldots, u_N$.

Нехай $l > 1$. Візьмемо число $\varepsilon > 0$ так, щоб число $l - \varepsilon = p > 1$, тоді з нерівності (11) випливає, що $\sqrt[n]{u_n} > l - \varepsilon = p > 1$, або $u_n > 1$, $n > N$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Отже, ряд розбіжний (властивість 6°). ●

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{3n}$.

○ Застосуємо ознаку Коші.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n+1} = 4 > 1,$

тобто заданий ряд розбіжний.

б) $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \frac{\pi}{3n} = 0 < 1,$

тобто заданий ряд збіжний. ●

***Теорема 5** (інтегральна ознака Коші). Нехай задано ряд*

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \tag{12}$$

члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1; +\infty)$. Тоді ряд (12) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

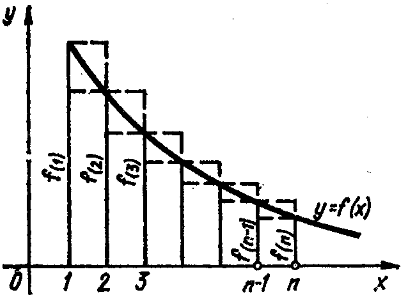


Рис. 9.1

○ Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену кривою $y = f(x)$ і прямими $x = 1$, $x = n$, $y = 0$ (рис. 9.1). Площа її дорівнює інтегралу $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$.

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчаті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки [1; 2], [2; 3], ..., $[n-1; n]$, а висоти дорівнюють $f(1), f(2), \ldots, f(n-1), f(n)$, тоді

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)<I_n<f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$$

або

$$S_n-f(1)<I_n<S_n-f(n),$$

звідки

$$S_n<f(1)+I_n, \tag{13}$$

$$S_n>f(n)+I_n, \tag{14}$$

де S_n — частинна сума ряду (12).

Нехай інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний. Це означає, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = I$.

Оскільки $f(x) > 0$, то послідовності $\{S_n\}$ та $\{I_n\}$ зростають із зростанням n і послідовність $\{I_n\}$ обмежена зверху своєю границею: $I_n < I$. З нерівності (13) випливає, що $S_n < f(1) + I$, тобто послідовність $\{S_n\}$ обмежена.

Таким чином, монотонно зростаюча послідовність $\{S_n\}$ обмежена зверху, а тому має границю (гл. 4, п. 3.7). Отже, ряд (12) збіжний.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ розбіжний, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$ і з нерівності (14) випливає, що ряд (12) теж розбіжний. ●

Приклад

Дослідити на збіжність ряди (див. п. 1.3):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

○ Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

а) Візьмемо функцію $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$, $x \in [1; +\infty)$, тоді матимемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3} = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots .$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+3} = \lim_{b\to+\infty} \ln(x^2+3)\Big|_1^b = \infty.$$

Цей інтеграл розбіжний, тому і даний ряд розбіжний.

б) Візьмемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1; +\infty)$, $\alpha > 1$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Невласний інтеграл збіжний при $\alpha > 1$, тому заданий ряд при $\alpha > 1$ теж збіжний.

Розбіжність ряду при $\alpha < 1$ випливає з того, що в цьому разі $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$. Гармонічний ряд розбіжний, тому за ознакою порівняння заданий ряд, при $\alpha < 1$ теж розбіжний. Таким чином, узагальнений гармонічний ряд збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \leqslant 1$. ●

1.4. Ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца

У попередньому пункті ми розглянули ряди з додатними членами. Ряди з недодатними членами можна досліджувати аналогічно, оскільки від знакододатних вони відрізняються множником —1, який на збіжність ряду не впливає.

Розглянемо тепер ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots , \quad (15)$$

де $u_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою такої достатньої ознаки.

Теорема 1 (ознака Лейбніца). Ряд (15) збіжний, якщо:

1) $u_{n+1} < u_n$, $n = 1, 2, \ldots;$ (16)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$ (17)

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

○ Розглянемо частинну суму з парним числом членів:

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} =$$
$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

З умови (16) випливає, що кожна різниця в дужках додатна, тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ зростає із зростанням n. Крім того,

$$S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}] < u_1,$$

тобто послідовність обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim S_{2n} = S$, тоді $S \leqslant u_1$.

Обчислимо границю сум з непарним індексом. Враховуючи умову (17), маємо

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

З рівностей

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$$

випливає, що ряд (15) збіжний і сума його $S \leqslant u_1$. ●

Зазначимо, що до рядів, знаки яких строго чергуються, належить також ряд

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \cdots + (-1)^n u_n + \cdots, \quad u_n > 0. \quad (18)$$

Якщо для такого ряду виконуються умови 1) і 2), то він збіжний, його сума S від'ємна і задовольняє нерівність $|S| \leqslant u_1$.

Таким чином, для рядів (15) і (18) ознака Лейбніца формулюється так: якщо модуль n-го члена ряду (15) чи (18) із зростанням n спадає і прямує до нуля, то ряд збіжний, причому модуль його суми не перевищує модуля першого члена.

Ряди (15) і (18), для яких виконується ознака Лейбніца, називаються рядами *лейбніцевого типу.*

Наслідок. *Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (15) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто*

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Інакше кажучи, модуль n-го залишку r_n збіжного ряду (15) не перевищує модуля $(n+1)$-го члена цього ряду, тобто

$$|r_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Дійсно, залишок збіжного ряду (15)

$$r_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots$$

— це збіжний ряд, члени якого строго чергуються. За доведеним абсолютна величина його суми не перевищує абсолютної величини першого члена, тобто $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад

Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3} = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{12^3} - \frac{1}{16^3} + \cdots$$

збіжний і знайти його суму з точністю до 0,001.

○ Очевидно, всі три умови ознаки Лейбніца виконуються: 1) знаки членів даного ряду строго чергуються; 2) модулі його членів монотонно спадають; 3) n-й член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, ряд збіжний і має певну суму S.

Для того щоб обчислити цю суму з точністю до 0,001, треба взяти стільки його членів, щоб перший з наступних членів був за модулем менший від 0,001. Тоді весь залишок ряду, починаючи з цього члена, буде менший від 0,001. У даному разі маємо

$$\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} > 0{,}001; \quad \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512} > 0{,}001;$$

$$\frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728} < 0{,}001,$$

тобто, щоб знайти суму даного ряду з точністю до 0,001, досить залишити перші два члени ряду, а решту відкинути. Таким чином,

$$S \approx S_2 = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} = \frac{1}{64} - \frac{1}{512} \approx 0{,}015. \ \bullet$$

1.5. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжності

Ряд називається *знакозмінним*, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. (Зрозуміло, що розглядається випадок, коли ряд містить нескінченну кількість додатних членів і нескінченну кількість від'ємних членів.)

Розглянуті в попередньому пункті ряди, в яких знаки чергуються, є, очевидно, окремим випадком знакозмінних рядів.

Візьмемо довільний знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{19}$$

де числа u_i можуть мати довільний знак. Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів ряду (19):

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots. \tag{20}$$

Для знакозмінних рядів справедлива така ознака збіжності.

Теорема. *Якщо ряд (20) збіжний, то збіжний і ряд (19).*

○ Покладемо

$$|u_n| + u_n = 2p_n, \quad |u_n| - u_n = 2q_n,$$

тоді $0 \leqslant p_n \leqslant |u_n|$, $0 \leqslant q_n \leqslant |u_n|$ для довільного $n \in N$.

За умовою ряд (20) збіжний, тому з останніх нерівностей і ознаки порівняння випливає, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ також збіжні. Оскільки $u_n = p_n - q_n$, то, згідно з властивістю 2^0 (п. 1.2), ряд (19) теж збіжний. ●

Ця теорема показує, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності знакододатних рядів.

Приклад

Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{\sin\alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \cdots + \frac{\sin n\alpha}{n^3} + \cdots,$$

де α — довільне дійсне число.

○ Складемо ряд з модулів членів заданого ряду

$$\frac{|\sin\alpha|}{1^3} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^3} + \cdots + \frac{|\sin n\alpha|}{n^3} + \cdots.$$

Оскільки $\frac{|\sin n\alpha|}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ збіжний як узагальнений гармонічний (п. 1.3), то за ознакою порівняння ряд з модулів збіжний, тому збіжний і заданий ряд. ●

Зауважимо, що доведена теорема дає лише достатню умову збіжності і не є необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду, оскільки існують знакозмінні ряди, які є збіжними, а ряди, утворені з модулів їхніх членів, розбіжні. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ збіжний за ознакою Лейбніца, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, утворений з модулів його членів, розбіжний. У зв'язку з цим всі збіжні ряди можна розділити на абсолютно збіжні і умовно збіжні.

Знакозмінний ряд (19) називають *абсолютно збіжним*, якщо ряд (20), утворений з модулів його членів, є збіжним.

Якщо ж ряд (19) збіжний, а ряд (20), утворений з модулів його членів, розбіжний, то ряд (19) називають *умовно збіжним*. Так, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — умовно збіжним.

Зазначимо, що розмежування рядів на абсолютно і умовно збіжні є досить істотним. Справа в тому, що абсолютно збіжні ряди мають цілу низку важливих властивостей скінченних сум, тоді як умовно збіжні ряди таких властивостей не мають. Наприклад, абсолютно збіжні мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Умовно збіжні ряди переставної властивості не мають, тому що від перестановки їхніх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитись розбіжний ряд.

1.6. Поняття про числові ряди з комплексними членами

Нехай $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ — послідовність комплексних чисел (гл. 7, п. 1.4). Комплексне число $a + ib = c$ називають скінченною границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що $|z_n - c| < \varepsilon$ для всіх $n > N$ і записують $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

Послідовність, яка має скінченну границю, називають збіжною, а послідовність, яка не має скінченної границі — розбіжною. Зв'язок між границею послідовності комплексних чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ та границями послідовностей дійсних чисел $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ встановлює така теорема: *для того щоб послідовність $\{z_n\}$ мала скінченну границю $c = a + ib$, необхідно і достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ мали скінченні границі, які дорівнюють відповідно a та b.*

Вираз виду

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{21}$$

де $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ — комплексні числа, називають числовим рядом з комплексними членами.

Суми $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, ..., $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ називають частинними сумами ряду (21).

Ряд (21) називають збіжним, якщо збіжна послідовність $\{S_n\}$ і розбіжним, якщо ця послідовність розбіжна.

Введемо тепер ряди з дійсними членами:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{22}$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{23}$$

і побудуємо їхні частинні суми

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n;$$

тоді $S_n = X_n + iY_n$ і справджується така теорема.

Теорема 1. *Для того щоб ряд (21) був збіжним до числа $S = X + iY$, необхідно і достатньо, щоб ряди (22) і (23) були збіжними відповідно до чисел X і Y.*

При дослідженні на збіжність рядів з комплексними членами користуються також такою достатньою ознакою збіжності.

Теорема 2. *Якщо ряд, утворений з модулів членів ряду (21)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots,$$

де $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, *збіжний, то збіжний, причому абсолютно, і ряд (21).*

Приклад

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i(-1)^n}{n} \right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+in}{2n^2+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3} \right)^n$.

○ а) Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Перший з них є збіжним як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$, а другий збігається за ознакою Лейбніца. Отже, за теоремою 1 даний ряд збіжний.

б) Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}.$$

За допомогою, наприклад, інтегральної ознаки Коші можна переконатись, що перший з цих рядів збіжний, а другий розбіжний. Отже, за теоремою 1 даний ряд розбіжний.

в) Скористаємось теоремою 2. Складемо ряд з модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{2-i}{3} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2-i}{3} \right|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n.$$

Цей ряд збіжний, бо є геометричною прогресією, у якої знаменник $q = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

Завдання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом? Що називається загальним членом ряду? Навести приклади.

2. Який ряд називається збіжним? Що називається його сумою? Який ряд називається розбіжним? Навести приклади.

3. Сформулювати і довести необхідну ознаку збіжності ряду. У чому полягає найпростіша достатня ознака розбіжності? Навести приклади.

4. Сформулювати і довести такі достатні ознаки збіжності: ознаки порівняння, граничну ознаку порівняння; ознаки Д'Аламбера і Коші; інтегральну ознаку Коші. Для яких рядів застосовні ці ознаки?

5. Сформулювати і довести ознаку Лейбніца. Для якого ряду застосовна ця ознака?

6. Чому не можна досліджувати за ознакою Лейбніца на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots ?$$

7. У чому полягає наслідок із ознаки Лейбніца?

8. Сформулювати і довести достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

9. Який ряд називається абсолютно збіжним? Який ряд називається умовно збіжним? Навести приклади.

10. Який ряд називається рядом з комплексними членами? Сформулювати ознаки збіжності такого ряду.

11. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+3}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$;

ж) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{(n+1)!}$.

12. Довести, що дані ряди збіжні, і обчислити їхню суму з точністю до 0,01:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

13. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 5n}{n^2}$.

14. Дослідити на збіжність ряди з комплексними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i \sin n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2+i)\, i}{4}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{3n^2+1}$.

Відповіді. 11. а), г), д) — розбіжні; інші — збіжні. 12. а) 0,31; б) 0,62. 13. а) — умовно збіжний, б), в) — абсолютно збіжні. 14. а) — розбіжний, б) — абсолютно збіжний, в) — умовно збіжний.

§ 2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1. Функціональні ряди. Поняття рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса

Перейдемо тепер до вивчення функціональних рядів, тобто рядів, членами яких є не числа, а функції, визначені на деякій множині E:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \qquad (24)$$

Якщо взяти довільне число $x_0 \in E$ і в ряді (24) покласти $x = x_0$, то дістанемо числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0). \qquad (25)$$

Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо ряд (25) є збіжним, то точка x_0 називається *точкою збіжності функціонального ряду (24)*. Якщо ж ряд (25) є розбіжним, то точка x_0 називається *точкою розбіжності ряду (24)*.

Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається *областю його збіжності*. Область збіжності функціонального ряду може або збігатися з множиною E, на якій визначені члени ряду, або становити деяку частину цієї множини.

Частинна сума функціонального ряду є функцією від x і визначається за аналогією з числовими рядами:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

У кожній точці x, яка належить області збіжності ряду (24), існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, яку називають сумою ряду (24) і пишуть

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots .$$

Функція $S(x)$ визначена в області збіжності функціонального ряду. Якщо функціональний ряд (24) збіжний до функції $S(x)$, то різниця $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ називається n-м залишком ряду:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots .$$

Зрозуміло, що для всіх значень x з області збіжності ряду

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Відомо, що сума скінченного числа неперервних функцій є функцією неперервною. Крім того, суму скінченного числа функцій можна почленно диференціювати та інтегрувати. Виявляється, що ці властивості не завжди виконуються для сум нескінченного числа функцій,

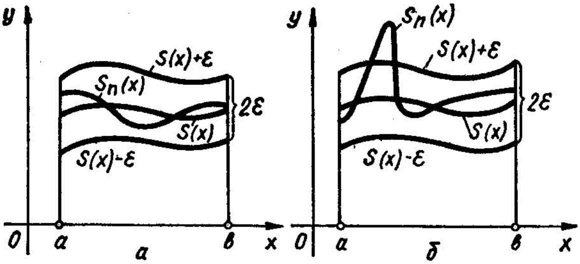


Рис. 9.2

тобто для функціональних рядів. Проте ці властивості зберігаються для так званих рівномірно збіжних рядів.

Функціональний ряд (24) називається *рівномірно збіжним на множині* D, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Розглянемо поняття рівномірної і нерівномірної збіжності функціонального ряду з погляду геометрії.

Нехай $S_n(x)$ — це n-а частинна сума, а $S(x)$ — сума ряду (24). Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і побудуємо криві $S(x)$, $S(x) + \varepsilon$ і $S(x) - \varepsilon$ (рис. 9.2). Останні дві криві утворюють смугу шириною 2ε. Якщо ряд (24) рівномірно збіжний на проміжку $(a; b)$ до функції $S(x)$, то можна знайти номер $N = N(\varepsilon)$, починаючи з якого для всіх $n > N$ графіки частинних сум $S_n(x)$ розмістяться на всьому проміжку $(a; b)$ всередині смуги 2ε (рис. 9.2, *а*).

Практично це означає, що суму $S(x)$ на проміжку $(a; b)$ можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією самою частинною сумою $S_n(x)$:

$$S(x) \approx S_n(x), \quad x \in (a; b).$$

Якщо ряд нерівномірно збіжний на проміжку $(a; b)$, то такого номера не існує: графіки частинних сум $S_n(x)$ виходять за межі смуги 2ε (рис. 9.2, *б*). При цьому збільшення числа доданків в сумах $S_n(x)$ не забезпечує введення їхніх графіків в смугу 2ε. Це означає, що для різних значень $x \in (a; b)$ обчислення суми $S(x)$ за допомогою певної частинної суми $S_n(x)$ з однією й тією самою точністю неможливе. Таке обчислення можна виконати (бо ряд збіжний і $r_n(x) \to 0$), але для різних значень x треба буде брати різні частинні суми, тобто різне число членів n в сумах $S_n(x)$.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають ряд важливих властивостей. Сформулюємо деякі з них без доведення.

1°. *Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функція, неперервна на цьому проміжку.*

2⁰. *Якщо на відрізку* $[a;\ b]$ *функціональний ряд* (24) *рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на* $[a;\ b]$, *то його можна почленно інтегрувати в межах* $(\alpha;\ \beta)$, *де* $(\alpha,\ \beta) \subset [a;\ b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)\,dx.$$

3⁰. *Якщо функціональний ряд* (24) *збіжний на відрізку* $[a;\ b]$, *а його члени мають неперервні похідні* $u_n'(x)$, $x \in [a;\ b]$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, *причому ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *рівномірно збіжний на* $[a;\ b]$, *то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто*

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a;\ b].$$

Таким чином, всі збіжні функціональні ряди поділяються за характером збіжності на рівномірно збіжні і нерівномірно збіжні. Рівномірно збіжні ряди мають ряд властивостей, які дають змогу ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях. У цьому полягає практична перевага рівномірно збіжних рядів перед нерівномірно збіжними.

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність користуються такою достатньою умовою рівномірної збіжності.

Теорема *(ознака Вейєрштрасса). Функціональний ряд (24) абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку* $[a;\ b]$, *якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{26}$$

такий, що

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \quad \forall x \in [a;\ b], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

○ З умови (27) і ознаки порівняння випливає, що ряд (24) є абсолютно збіжним у довільній точці $x \in [a;\ b]$. З абсолютної збіжності ряду (24) дістанемо абсолютну збіжність його залишку. Маємо

$$|r_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots| \leqslant$$

$$\leqslant |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \leqslant a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots = R_n.$$

Але залишок ряду (26) $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує незалежний від x номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що $R_n < \varepsilon$ при $n > N$. Тоді для всіх $n > N$ і $x \in [a;\ b]$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$. ●

Приклади

1. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots.$$

○ Кожен член ряду визначений на множині $R \setminus 0$. На цій множині ряд є геометричною прогресією із знаменником $q=\frac{1}{x}$, тому при $|q|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$ або $|x|>1$ заданий ряд збіжний. Отже, $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ — область збіжності цього ряду. ●

2. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+\cdots+\frac{\sin nx}{n!}+\cdots.$$

○ Скористаємось ознакою Вейєрштрасса. Оскільки при $-\infty<x<+\infty$ і $n \in N$

$$\left|\frac{\sin nx}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!} \quad \text{і ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

збіжний (за ознакою Д'Аламбера), то заданий функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі. ●

3. Знайти суму ряду

$$x+2x^2+\cdots+nx^n+\cdots, \quad |x|<\frac{1}{2}.$$

○ Оскільки при $|x|<\frac{1}{2}$ і $n \in N$ виконується нерівність $|nx^n|<\frac{n}{2^n}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ збіжний, то за ознакою Вейєрштрасса ряд $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ рівномірно збіжний при $|x|<\frac{1}{2}$. Цей ряд утворюється почленним диференціюванням геометричної прогресії

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}, \quad |x|<\frac{1}{2}.$$

За властивістю 3° рівномірно збіжних рядів маємо

$$\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad |x|<\frac{1}{2},$$

або

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<\frac{1}{2},$$

звідки

$$x(1+2x+3x^2+4x^3+)\cdots=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x|<\frac{1}{2}. \; ●$$

2.2. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду

Степеневим рядом, називається функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (28)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами ряду.*

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$, де x_0 — дійсне число, називають функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (29)$$

Ряд (29) заміною змінної $x - x_0 = t$ зводиться до ряду вигляду (28), тому надалі розглядатимемо лише степеневі ряди вигляду (28).

Всякий степеневий ряд вигляду (28) збіжний в точці $x = 0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніші відомості про область збіжності ряду (28) дістанемо з наступної, дуже важливої в теорії рядів теореми.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд* (28) *збіжний при* $x = x_0 \neq 0$, *то він абсолютно збіжний для всіх значень* x, *що задовольняють нерівність* $|x| < |x_0|$.

Якщо при $x = x_1$ *ряд* (28) *розбіжний, то він розбіжний всюди, де* $|x| > |x_1|$.

○ Оскільки за умовою ряд (28) збіжний в точці x_0, то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, отже, $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_n x_0^n\}$ обмежена, тобто існує таке число M, що

$$|a_n x_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_0|$ величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, маємо

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant Mq^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тобто модуль кожного члена ряду (28) не перевищує відповідного члена збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою порівняння при $|x| < |x_0|$ ряд (28) абсолютно збіжний.

Нехай тепер ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ розбіжний, при $x = x_1$. Тоді ряд (28) буде розбіжним і для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$. Справді, якби припустити, що він збіжний в якій-небудь точці x, що задовольняє цю нерівність, то за доведеним він був би збіжним і в точці x_1, бо $|x_1| < |x|$. А це суперечить тому, що в точці x_1 ряд розбіжний. ●

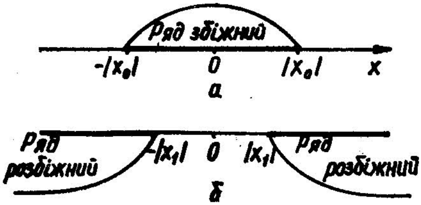


Рис. 9.3

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Дійсно, якщо x_0 — точка збіжності ряду (28), то весь інтервал $(-|x_0|; |x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 9.3, *а*). Якщо x_1 — точка розбіжності ряду (28), то вся нескінченна напівпряма $(-\infty; -|x_1|)$ зліва від точки $-|x_1|$ і вся нескінченна напівпряма $(|x_1|; +\infty)$ справа від точки $|x_1|$ (рис. 9.3, *б*) складається з точок розбіжності цього ряду.

Отже, для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки: 1) ряд (28) збіжний лише в точці $x = 0$; 2) ряд (28) збіжний при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$; 3) існує таке скінченне число $R \in (0; +\infty)$, що при $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ — розбіжний (рис. 9.4).

Число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду, а інтервал $(-R; R)$ — *інтервалом збіжності*.

Вкажемо спосіб визначення радіуса збіжності степеневого ряду. Складемо ряд із модулів членів ряду (28):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|.$$

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = L|x| \neq 0,\ x \neq 0.$$

Згідно з ознакою Д'Аламбера, ряд (28) є абсолютно збіжним при $L|x| < 1$, або $|x| < \frac{1}{L}$, і розбіжним при $L|x| > 1$, або $|x| > \frac{1}{L}$. Отже, інтервал $\left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (28), а число

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{30}$$

— його радіусом збіжності.

Рис. 9.4

Аналогічно скориставшись ознакою Коші, можна встановити, що

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}. \quad (31)$$

Зауваження 1. Неважко переконатись, що коли

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \quad \text{або} \quad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0,$$

то ряд (28) є абсолютно збіжним на всій числовій осі. У цьому разі вважають $R = +\infty$. Якщо ж $L = \infty$, то $R = 0$, і степеневий ряд має лише одну точку збіжності $x = 0$.

Зауваження 2. Питання про збіжність ряду при $x = \pm R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 3. Радіус збіжності ряду (29) визначається за тими самими формулами (30) і (31), що і ряду (28).

Інтервал збіжності ряду (29) знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Зауваження 4. На практиці інтервал збіжності степеневого ряду часто знаходять за ознакою Д'Аламбера або ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів заданого ряду.

Приклад

Знайти область збіжності рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

○ Скористаємося формулою (30).

а) $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$

Отже, даний ряд абсолютно збіжний на всій числовій осі.

б) $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{e} \times$
$\times 0 = 0,$

тобто даний ряд збіжний лише в точці $x = 0$.

$$\text{в) } R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{2n+3}{2n+1} = 1,$$

отже, $(-1; 1)$ інтервал збіжності даного ряду. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = -1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

який є збіжним за ознакою Лейбніца. При $x = 1$ дістаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

який є розбіжним за ознакою порівняння з гармонічним рядом. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-1; 1)$.

г) Скористаємось ознакою Д'Аламбера. Для даного ряду маємо

$$|u_n| = \frac{|x+3|^n}{n^2}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x+3|^{n+1}}{(n+1)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|^{n+1} n^2}{(n+1)^2 |x+3|^n} =$$

$$= |x+3| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x+3|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд буде абсолютно збіжним, якщо $|x+3| < 1$, звідки $-1 < x+3 < 1$, або $-4 < x < -2$. Таким чином, $(-4; -2)$ — інтервал збіжності даного ряду і $R = 1$ — його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = -4$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

який є збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x = -2$ дістаємо узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

який також збіжний ($\alpha = 2 > 1$). Отже, областю збіжності даного ряду є відрізок $[-4; -2]$. ●

2.3. Властивості степеневих рядів

1°. *Степеневий ряд*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-\rho; \rho]$, *який цілком міститься в інтервалі збіжності* $(-R; R)$.

○ За умовою $\rho < R$. Візьмемо точку $x_0 \in (\rho; R)$. За теоремою Абеля ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ збіжний. Для довільної точки $x \in [-\rho, \rho]$ виконується нерівність $|a_n x^n| < |a_n x_0^n|$, тому за ознакою Вейєрштрасса ряд (28) абсолютно і рівномірно збіжний. ●

З цієї властивості і властивостей 1°—3° функціональних рядів (п. 2.1) випливають такі твердження.

2^0. *Сума степеневого ряду* (28) *неперервна всередині його інтервалу збіжності.*

3^0. *Якщо межі інтегрування* α *та* β *лежать всередині інтервалу збіжності* $(-R;\ R)$ *ряду* (24), *то на відрізку* $[\alpha;\ \beta]$ *цей ряд можна почленно інтегрувати.*

Зокрема, якщо ряд (28) інтегрувати по відрізку $[0;\ x]$, де $|x| < R$, то в результаті дістанемо степеневий ряд, який має той самий інтервал збіжності, що і ряд (28); при цьому, якщо $S(x)$ — сума ряду (28):

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ то}$$

$$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx.$$

4^0. *Якщо ряд* (28) *має інтервал збіжності* $(-R;\ R)$, *то ряд, утворений диференціюванням ряду* (28), *має той самий інтервал збіжності* $(-R;\ R)$; *при цьому, якщо* $S(x)$ — *сума ряду* (28), *то*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R;\ R).$$

Таким чином, ряд (28) на відрізку $[0;\ x]$, $|x| < R$, можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно раз в будь-якій точці $x \in (-R;\ R)$. При цьому інтервалом збіжності кожного ряду є той самий інтервал $(-R;\ R)$.

Сформульовані властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад

Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

○ Позначимо суму даного ряду через $S(x)$, тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$. Знайшовши суму прогресії, дістанемо

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0;\ x] \subset (-1;\ 1)$, маємо

$$\int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x (1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots)\,dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

звідки

$$x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}x,\quad |x|<1.\ \bullet$$

2.4. Ряд Тейлора

Досі ми вивчали властивості суми заданого степеневого ряду. Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд.

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{32}$$

в інтервалі $(x_0-R;\ x_0+R)$. У цьому разі кажуть, що функція $f(x)$ розкладена в степеневий ряд в околі точки x_0 або за степенями $x-x_0$. Знайдемо коефіцієнти ряду (32). Для цього, згідно з властивістю 4^0 (п. 2.3), послідовно диференціюватимемо ряд (32) і підставлятимемо в знайдені похідні значення $x=x_0$:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+$$
$$+a_4(x-x_0)^4+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,\ f(x_0)=a_0;$$
$$f'(x)=1\cdot a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+$$
$$+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots,\ f'(x_0)=1\cdot a_1;$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+$$
$$+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots,\ f''(x_0)=1\cdot 2a_2;$$
$$f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)+\cdots+$$
$$+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}+\cdots,\ f'''(x_0)=1\cdot 2\cdot 3a_3;$$
$$f^{IV}(x)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4+\cdots+n(n-1)(n-2)(n-3)\times$$
$$\times(x-x_0)^{n-4}+\cdots,$$
$$f^{IV}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a_4;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1a_n+(n+1)n(n-1)\ldots$$
$$2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots,$$
$$f^{(n)}(x_0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(n-1)na_n.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots.$$

Підставивши значення цих коефіцієнтів у рівність (32), дістанемо

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots .$$

Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-$$
$$-x_0)^n+\dots \tag{33}$$

називається *рядом Тейлора функції* $f(x)$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Якщо функцію* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0-R;\ x_0+R)$ *можна розкласти в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.*

Нехай тепер $f(x)$ — довільна нескінченне число разів диференційовна функція. Складемо для неї ряд (33). Виявляється, що сума ряду (33) не завжди збігається з функцією $f(x)$. Інакше кажучи, ряд (33) може збігатися до іншої функції, а не до функції $f(x)$, для якої його формально складено. Встановимо умови, за яких сума ряду (33) збігається з функцією $f(x)$.

Теорема 2. *Для того щоб ряд Тейлора (33) збігався до функції* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0-R;\ x_0+R)$, *тобто*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots$$

необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n\to\infty$ *для всіх* x *з цього інтервалу:*

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in(x_0-R;\ x_0+R). \tag{34}$$

○ Відомо (гл. 5, п. 5.4), що для функції, яка має похідні всіх порядків, справедлива формула Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{35}$$

де

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1, \tag{36}$$

— залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.

Якщо позначити n-у частинну суму ряду (33) через $S_n(x)$, то формула (35) матиме вигляд

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \tag{37}$$

Нехай $f(x)$ — сума ряду (33), тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$

тоді з формули (37) випливає умова (34). Навпаки, якщо виконується умова (34), то з формули (37) випливає рівність $\lim S_n(x) = f(x)$. ●

Таким чином, функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови: 1) вона має похідні всіх порядків; 2) залишковий член формули Тейлора (36) прямує до нуля при $n \to 0$ і всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$.

Безпосередня перевірка цих умов нерідко виявляється непростою задачею. Доведемо теорему, яка дає досить прості достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема 3. *Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що*

$$|f^{(n)}(x)| < M, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

де $f^{(0)}(x) = f(x)$, то функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

○ Відповідно до теореми 2 досить перевірити умову (34). В силу нерівностей (38) залишковий член формули Тейлора (34) задовольняє нерівність

$$|R_n(x)| < \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{39}$$

Побудуємо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{40}$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\,M|x - x_0|^{n+1}} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то за ознакою Д'Аламбера ряд (40) збіжний на всій числовій осі.

Для збіжного ряду

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

тоді з нерівностей (39) знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R). \quad ●$$

2.5. Розкладання елементарних функцій в ряд Маклорена

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називають степеневий ряд по степенях x, який можна дістати з ряду (38) при $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots . \qquad (41)$$

З п. 2.4 випливає таке правило розкладання функції в ряд: щоб функцію $f(x)$ розкласти в ряд Маклорена, потрібно:

а) знайти похідні $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, ...;

б) обчислити значення похідних в точці $x = 0$;

в) записати ряд Маклорена (41) для даної функції і знайти інтервал його збіжності;

г) визначити інтервал $(-R; R)$, в якому залишковий член формули Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятись від інтервалу збіжності ряду (41)), то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена збігаються:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

Розглянемо ряди Маклорена деяких елементарных функцій (вони часто використовуються і тому їх варто запам'ятати):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (42)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots +$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (43)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (44)$$

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad m \in R, \quad x \in (-1; 1); \qquad (45)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1; 1); \qquad (46)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots +$$

$$+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-1;\ 1]; \tag{47}$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ x\in[-1;\ 1]. \tag{48}$$

Доведемо формули (42) — (48).

○ 1. Нехай $f(x)=e^x$. Маємо:

а) $f^{(n)}(x)=e^x$, $n\in N$; б) $f^{(n)}(0)=1$, $n=0,1,2,\ldots$

в) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

отже, знайдений ряд збігається в інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$;

г) $|f^{(n)}(x)|\leqslant e^{|x|}<e^R,\quad x\in(-R;\ R)$,

тому за теоремою 3 (п. 2.4) функцію e^x можна розкласти в степеневий ряд на довільному інтервалі $(-R;\ R)\subset(-\infty;\ +\infty)$, а отже, і на всьому інтервалі $(-\infty;\ \infty)$. Формулу (42) доведено.

2. Нехай $f(x)=\sin x$. Дістанемо:

а) $$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right);$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad n\in N;$$

б) $$f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots;\\ -1, & n=3,\ 7,\ 11,\ \ldots;\\ +1, & n=1,\ 5,\ 9,\ \ldots;\end{cases}$$

в) $$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$R=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\infty.$$

г) $|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1<2,\quad x\in(-\infty;\ +\infty)$, $n=0,1,2,\ldots$, тобто формулу (43) доведено.

3. Нехай $f(x) = \cos x$. Формулу (44) можна довести так само, як і формулу (43). Проте це можна зробити значно простіше, продиференціювавши почленно ряд (43).

4. Нехай $f(x) = (1 + x)^m$, $m \in R$. Маємо:

а) $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, ..., $f^{(n)}(x) = m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)(1+x)^{m-n}$, $n \in N$;

б) $f^{(n)}(0) = m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)$, $n \in N$;

в) $$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!}x^n;$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)(n+1)!}{n!\,m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)(m-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1,$$

тобто знайдений ряд збіжний в інтервалі (—1, 1). Доведення, що на цьому інтервалі $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, опускаємо.

Ряд (45) називають *біноміальним*. Якщо $m \in N$ дістаємо відомий розклад двочлена, який називають біномом Ньютона (гл. 5, п. 5.4).

Збіжність біноміального ряду в кінцевих точках інтервалу (—1; 1) залежить від числа m.

Ряд (45) збіжний до функції $(1 + x)^m$ в таких випадках:
при $m \geqslant 0$, якщо $x \in [-1; 1]$;
при $-1 < m < 0$, якщо $x \in (-1; 1]$;
при $m \leqslant -1$, якщо $x \in (-1; 1)$.
Приймемо ці твердження без доведення.

5. Нехай $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Формулу (46) виводимо трьома способами: користуючись правилом розкладання функції в ряд; застосувавши формулу (45) і поклавши в ній $m = -1$ і $-x$ замість x; розглядаючи ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ як геометричну прогресію, перший член якої дорівнює одиниці, а знаменник $q = x$. Відомо (п. 1.1), що даний ряд збіжний при $|x| < 1$ і сума його дорівнює $(1 - x)^{-1}$.

6. Не зупиняючись на деталях, зазначимо, що коли у формулі (46) покласти $-x$ замість x, а потім $-x^2$ замість x і знайдені ряди проінтегрувати, то дістанемо розклад в степеневий ряд функції $\ln(1 + x)$ і функції $\operatorname{arctg} x$ (формули (47), (48)). ●

Ряди (42) — (48) використовуються при знаходженні степеневих рядів для інших функцій.

Приклади

1. Розкласти в ряд функцію $f(x) = x^2 \ln(1 - x^3)$.

○ Поклавши у формулі (47) $-x^3$ замість x, маємо

$$\ln(1-x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \dots - \frac{x^{3n}}{n} - \dots, \quad x \in [-1;\ 1);$$

$$x^2 \ln(1-x^3) = -x^5 - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{11}}{3} - \dots - \frac{x^{3n+2}}{n} - \dots, \quad x \in [-1;\ -1). \ ●$$

2. Розкласти в ряд по степенях x функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

○ Поклавши у формулі (45) $-x^2$ замість x, при $m = -\frac{1}{2}$ дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \dots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5 \dots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \dots 2n} x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1;\ -1). \ ●$$

3. Розкласти в ряд по степенях x функцію $f(x) = \arcsin x$.

○ Інтегруючи знайдений в попередньому прикладі ряд в межах від 0 до x, $|x| < 1$, дістанемо

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3 \dots (2n-1)}{2\cdot 4 \dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad x \in (-1;\ 1).$$

Можна довести, що ця рівність справедлива і в точках $x = \pm 1$. ●

2.6. Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів

1°. *Наближені обчислення значень функцій.* Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R;\ R)$ і $x_0 \in (-R;\ R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене — частинній сумі $S_n(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $r_n(x_0)$. Для рядів лейбніцевого типу

$$|r_n(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + u_{n+3}(x_0) + \dots| < |u_{n+1}(x_0)|.$$

Для знакозмінних і знакододатних рядів величину $r_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$|r_n(x_0)| \leqslant |u_{n+1}(x_0)| + |u_{n+2}(x_0)| + |u_{n+3}(x_0)| + \dots <$$

$$< a_1 + a_2 + a_3 + \dots = S,$$

де $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — певний знакододатний збіжний ряд, сума якого S легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія), і для якого

$$|u_{n+1}(x_0)| \leqslant a_1, \ |u_{n+2}(x_0)| \leqslant a_2, \ |u_{n+3}(x_0)| \leqslant a_3, \ \dots .$$

Приклад
Обчислити з точністю до 0,001:
а) значення $\sin 18°$; б) число е.

○ а) Скориставшись формулою (43) при $x = 18°$ або $x = \frac{\pi}{10}$ маємо

$$\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} + \dots .$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{\pi}{10} > 0{,}001, \quad \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} > 0{,}001, \quad \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} < 0{,}001,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\sin 18° \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0{,}309.$$

б) Підставивши в ряд (42) $x = 1$, знайдемо знакододатний ряд

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots .$$

Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n} .$$

Залишається підібрати найменше натуральне число n, щоб виконувалась нерівність $\frac{1}{n!\,n} < 0{,}001$.

Неважко обчислити, що ця нерівність виконується при $n \geqslant 6$, тому з точністю до 0,001 маємо

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2{,}717. \bullet$$

2°. *Наближене обчислення визначених інтегралів.* Нехай потрібно знайти інтеграл $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, який або не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислень. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, що рівномірно збігається на деякому відрізку, то для обчислення заданого інтеграла можна скористатись властивістю про почленне інтегрування цього ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

Приклад

Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx.$

○ Формула Ньютона — Лейбніца тут не застосовна, тому що первісна від e^{-x^2} в елементарних функціях не виражається.

Скориставшись рядом (42), маємо

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots .$$

Цей ряд рівномірно збіжний на всій числовій осі, тому його можна почленно інтегрувати на будь-якому скінченному сегменті, зокрема на відрізку $\left[0; \frac{1}{3}\right]$:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 3^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 3^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 3^6} + \ldots .$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{1}{3} > 0{,}001, \quad \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 3^3} = \frac{1}{81} > 0{,}001, \quad \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0{,}001,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0{,}321.$$

Як уже зазначалось, первісна $F(x)$ для функції $f(x) = e^{-x^2}$ не є елементарною функцією. Проте її легко знайти у вигляді степеневого ряду, проінтегрувавши ряд для функції e^{-x^2} в межах від 0 до x:

$$F(x) = \int\limits_0^x e^{-x^2}dx = \int\limits_0^x \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \bullet$$

3^0. *Наближене інтегрування диференціальних рівнянь.* Якщо інтегрування диференціального рівняння не зводиться до квадратур, то для наближеного інтегрування можна скористатись рядом Тейлора.

Нехай треба знайти частинний розв'язок $y(x)$ рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{49}$$

який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Припустимо, що шуканий розв'язок рівняння (49) в околі точки x_0, в якій задані початкові умови, можна розкласти в ряд

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots . \tag{50}$$

Нам треба знайти $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \ldots$. Значення $y(x_0) = y_0$ задано початковою умовою. Щоб знайти похідну $y'(x_0) = y_0'$, в рівнянні (49) треба покласти $x = x_0$, $y = y_0$.

Похідну $y''(x_0) = y_0''$ знаходимо диференціюванням рівняння (49) по x:

$$y'' = f_1(x, y, y'), \tag{51}$$

поклавши в цьому рівнянні $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$.

Продиференціювавши рівняння (51) і поклавши $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$, дістанемо $y'''(x_0) = y_0'''$ і т. д. Процес або обривається на деякому коефіцієнті, або завершується знаходженням загального закону побудови коефіцієнтів.

Зауваження 1. За формулою (50) можна знаходити наближений розв'язок рівняння будь-якого порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Зауваження 2. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді ряду Тейлора (50), а також яка похибка цього розв'язку, ми не розглядаємо.

Приклад

Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розкладу в ряд розв'язку рівняння

а) $y'' = xy' + y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

б) $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = -1$,

○ а) Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Тут $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0 \cdot 1 + 0 = 0.$
Послідовно диференціюючи дане рівняння, дістанемо

$$y''' = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \quad y'''(0) = 2;$$
$$y^{\mathrm{IV}} = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''', \quad y^{\mathrm{IV}}(0) = 0;$$
$$y^{\mathrm{V}} = 3y''' + y''' + xy^{\mathrm{IV}} = 4y''' + xy^{\mathrm{IV}}, \quad y^{\mathrm{V}}(0) = 8.$$

Підставляючи знайдені похідні в ряд Маклорена, дістаємо шуканий розв'язок

$$y(x) \approx \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

б) Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \cdots.$$

Маємо

$$y(1) = -1,\ y'(1) = 1^2 + (-1)^3 = 0; \quad y'' = 2x + 3y^2y',\ y''(1) = 2;$$
$$y''' = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2y'',\ y'''(1) = 8.$$

Отже,

$$y(x) \approx -1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 = -1 + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3. \quad ●$$

2.7. Рівняння і функції Бесселя

Рівняння Бесселя має вигляд

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}. \qquad (52)$$

До цього рівняння зводиться багато задач математичної фізики, небесної механіки тощо.

Шукатимемо розв'язок рівняння (52) у вигляді ряду

$$y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \qquad (53)$$

Диференціюючи ряд (53) двічі і підставляючи значення y та y' в (52), дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p}((k+p)^2 + x^2 - \nu^2) = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях x, дістаємо систему рівнянь

$$x^p : a_0(p^2 - \nu^2) = 0;$$
$$x^{p+1} : a_1((p+1)^2 - \nu^2) = 0;$$

$$x^{p+2}: a_2((p+2)^2 - \nu^2) + a_0 = 0; \tag{54}$$
$$x^{p+3}: a_3((p+3)^2 - \nu^2) + a_1 = 0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x^{p+k}: a_k((p+k)^2 - \nu^2) + a_{k-2} = 0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Вважатимемо, що $a_0 \neq 0$, тоді з першого рівняння (54) дістанемо, що $p = \pm \nu$.

Нехай $p = \nu \geqslant 0$, тоді з другого рівняння (54) знаходимо, що $a_1 = 0$, тому і всі коефіцієнти з непарними індексами дорівнюють нулю: $a_{2k+1} = 0$. Далі

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)};$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{(\nu+4)^2 - \nu^2} = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)\cdot 1\cdot 2}; \tag{55}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!\,(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}.$$

При $p = -\nu$ так само знаходимо

$$a_{2k+1} = 0,\quad a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!\,(-\nu+1)(-\nu+2)\dots(-\nu+k)}. \tag{56}$$

З формул (53) і (55) дістанемо розв'язок рівняння (52) при $p = \nu$:

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k!\,(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}. \tag{57}$$

Введемо гамма-функцію Ейлера (гл. 7, п. 4.2)

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad (p > 0).$$

Відомо, що функція $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ і для цілих значень $p > 0$ маємо $\Gamma(p+1) = p!$. Для від'ємних p функція $\Gamma(p)$ визначається інакше, але властивість $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ зберігається.

Якщо взяти довільну сталу

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)},$$

то розв'язок (57) запишеться так:

$$y = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{58}$$

Коли $p = -\nu$, $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$, то з (53) і (56) аналогічно дістанемо ще один розв'язок рівняння (52):

$$y = J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{59}$$

Функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ називаються *функціями Бесселя першого роду порядку* ν і $-\nu$ відповідно. Ряд (58) збіжний при $x \in (-\infty; +\infty)$, а ряд (59) $\forall x \neq 0$. Якщо ν не ціле число, то функції $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні, тому що їхні ряди починаються з різних степенів x. Загальний розв'язок рівняння (52) у цьому разі має вигляд

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Коли ν — ціле число, то $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$, тобто функції (58) і (59) лінійно залежні.

Другий частинний розв'язок у цьому випадку шукають у вигляді

$$K_\nu(x) = J_\nu(x)\ln x + x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (52), визначають коефіцієнти b_k.

Функція $K_\nu(x)$ з визначеними коефіцієнтами b_k помножена на деяку сталу, називається *функцією Бесселя другого роду ν-го порядку*.

Загальний розв'язок рівняння (52) матиме вигляд

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 K_\nu(x).$$

Приклад

Розв'язати рівняння Бесселя при $\nu = 0: y'' + \dfrac{y'}{x} + y = 0$.

○ З формули (57) знайдемо один частинний розв'язок:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Другий частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Можна показати, що

$$K_0(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \ldots .$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$J = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x). \ \bullet$$

2.8. Поняття про степеневі ряди в комплексній області. Формули Ейлера

Ряд виду

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots +$$
$$+ a_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad (60)$$

де $z = x + iy$ — комплексна змінна, $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — сталі комплексні числа, називається *степеневим рядом в комплексній області.*

При $z_0 = 0$ з ряду (60) дістанемо ряд за степенями z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (61)$$

Збіжність рядів (60) та (61) відповідно в точках $z = z_0$ та $z = 0$ очевидна. Під час дослідження цих рядів на збіжність в інших точках комплексної площини користуються теоремою Абеля. Сформулюємо її.

Теорема. *Якщо ряд* (61) *збіжний в точці* $z = z_0 \neq 0$, *то він абсолютно збіжний і при всіх значеннях* z, *для яких* $|z| < |z_0|$.

Якщо ряд (61) *розбіжний в точці* $z = z_1$, *то він розбіжний і при всіх значеннях* z, *для яких* $|z| > |z_1|$.

Доведення цієї теореми таке саме, як і для степеневих рядів в дійсній області (п. 2.2). Розглянемо геометричне тлумачення теореми Абеля для ряду (61). Оскільки для змінної $z = x + iy$ значення $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то нерівність $|z| < |z_0|$, або $x^2 + y^2 < |z_0|^2$, у комплексній площині означає сукупність точок z, які містяться всередині круга радіуса $|z_0|$ з центром у початку координат (рис. 9.5).

Аналогічно нерівність $|z| > |z_1|$ геометрично означає сукупність точок z комплексної площини, які лежать поза кругом радіуса $|z_1|$ з центром у початку координат. Отже, якщо z_0 — точка збіжності ряду (61), то цей ряд буде абсолютно збіжним у всіх внутрішніх точках круга $|z| < |z_0|$. Якщо z_1 — точка розбіжності ряду (61), то цей ряд буде розбіжним у всіх точках, поза кругом $|z| > |z_1|$.

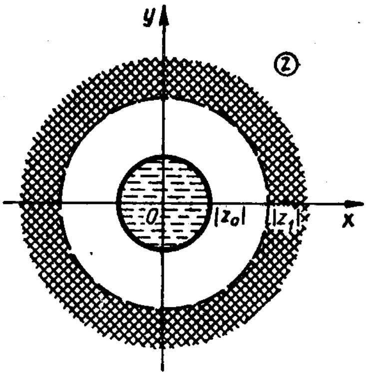


Рис. 9.5

З теореми Абеля випливає існування такого числа R, що для всіх $|z| < R$ степеневий ряд (61) збіжний, а при $|z| > R$ розбіжний.

Круг радіуса R, де $0 < R < +\infty$, з центром у початку координат, всередині якого степеневий ряд (61) абсолютно збіжний, а зовні якого розбіжний, навивають *кругом збіжності цього ряду*, а число R — *радіусом збіжності*. Якщо ряд (61) збіжний лише в точці $z = 0$, то вважають $R = 0$, а якщо ряд (61) збіжний в усій площині, то $R = +\infty$.

Круг збіжності ряду (60) матиме центр в точці $z = z_0$. Радіус збіжності рядів (60) і (61) можна знаходити так само, як і для рядів з дійсними числами (п. 2.2). На межі круга збіжності, тобто в точках z, де $|z| = R$, залежно від конкретних випадків ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Всередині круга збіжності ряд (61) має властивості, аналогічні властивостям степеневих рядів дійсної змінної.

Сума степеневого ряду в крузі його збіжності є деякою *комплексною функцією комплексної змінної* z; такі функції називаються *аналітичними*.

Приклад

Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2}$.

○ Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}(n+1)^2}{|z|^n (n+2)^2} = |z|,$$

то за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний у крузі $|z| < 1$.

При $|z| = 1$ маємо збіжний ряд, оскільки ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots,$$

є збіжним (узагальнений гармонічний ряд, в якому $\alpha = 2 > 1$). Отже, областю збіжності заданого ряду є значення z, для яких $|z| \leqslant 1$. ●

За допомогою рядів в комплексній області узагальнимо поняття показникової та тригонометричних функцій на випадок комплексної змінної та доведемо формули Ейлера, які уже зустрічались в п. 1.4 (гл. 7).

Розглянемо розклад в степеневий ряд функції e^x (п. 2.5):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (62)$$

Якщо дійсну змінну x замінити комплексною змінною z, матимемо ряд

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots. \quad (63)$$

Оскільки

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

то ряд (63) є абсолютно збіжним на всій комплексній площині. Позначимо його суму через e^z. Отже, за означенням для довільного комплексного числа

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < \infty. \tag{64}$$

Сума ряду (64) є *комплексною функцією комплексної змінної z.*

Аналогічно визначаються тригонометричні функції

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad |z| < \infty; \tag{65}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad |z| < +\infty. \tag{66}$$

Між показниковою функцією e^z і тригонометричними функціями $\sin z$ і $\cos z$ існує простий зв'язок. Підставимо в ряд (64) значення iz замість z і згрупуємо окремо доданки, які містять множник i і які цього множника не містять:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} +$$

$$+ \cdots = 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right).$$

Порівнюючи ряди в дужках з рядами (65) і (66), дістаємо

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{67}$$

Аналогічно, підставляючи в ряд (64) замість z значення $-iz$, дістаємо

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{68}$$

Формули (67) і (68) називаються *формулами Ейлера.* Якщо почленно додати (відняти) рівності (67) і (68), то матимемо іншу форму запису формул Ейлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Який ряд називається функціональним? Що називається областю його збіжності?
2. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним? Дати геометричне тлумачення рівномірної та нерівномірної збіжності.
3. Сформулювати і пояснити властивості рівномірно збіжних рядів.
4. Сформулювати і довести ознаку Вейєрштрасса.
5. Який ряд називається степеневим? Сформулювати і довести теорему Абеля.

6. Навести приклади степеневих рядів, радіус збіжності яких: 1) $R = 0$; 2) $R = +\infty$; 3) $0 < R < +\infty$.

7. Сформулювати і пояснити властивості степеневих рядів.

8. Що називається рядом Тейлора для функції $f(x)$? Як знайти коефіцієнти ряду Тейлора?

9. Сформулювати і довести теорему про необхідні і достатні умови, за яких сума ряду Тейлора функції $f(x)$ збігається з цією функцією.

10. Який ряд називається рядом Маклорена. Розкласти в ряд Маклорена функції: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1 + x)^m$, $\ln(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$.

11. Як наближено обчислити значення функції за допомогою степеневого ряду? Вказати способи оцінки залишку ряду. Навести приклади.

12. У чому полягає метод інтегрування функцій за допомогою рядів? Навести приклади.

13. У чому полягає метод інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів? Навести приклади.

14. Що називається степеневим рядом комплексної змінної?

15. Сформулювати теорему Абеля для степеневого ряду комплексної змінної z і довести формули Ейлера.

16. Дати визначення функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексної змінної z і довести формули Ейлера.

17. Знайти область збіжності ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$$

18. Довести, що ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^n}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ рівномірно збіжні на всій числовій осі.

19. Довести, що радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{n}\right)^n n!\, x^{2n}$ дорівнює $R = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$.

20. Знайти область збіжності ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3n+1}.$$

21. Показати, що

$$1)\ \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} 2^n + 1\right) \frac{x^n}{n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2};\ +\frac{1}{2}\right).$$

$$2)\ \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty;\ +\infty).$$

22. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,0001.

23. Обчислити з точністю до 0,001:

$$\text{а) } \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx; \quad \text{б) } \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \text{в) } \int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

24. Знайти чотири відмінні від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння:

а) $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0{,}5$; б) $y'' = (y')^2 + xy$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

25. Розв'язати рівняння Бесселя $y'' + y'\frac{1}{x} + y = 0$.

26. Знайти круг і радіус збіжності ряду

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$.

Відповіді. 17. а) $(0; +\infty)$; б) $(e^{-1}; e)$. 20. а) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; б) $[1; 3)$. 22. $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}0658$. 23. а) 0,409; б) 0,098; в) 0,333. 24. а) $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots$; б) $y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{8} + \cdots$. 26. а) $|z| < 1$, $R = 1$; б) $|z-i| < \sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$.

§ 3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Гармонічні коливання

У природі і техніці дуже поширені процеси, які через певні проміжки часу повторюються. Такі процеси називаються періодичними. Прикладами періодичних процесів можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи в теорії пружності, акустиці, радіотехніці, електротехніці тощо.

Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається *періодичною* (гл. 4, п. 2.8) з періодом $T > 0$, якщо вона визначена на всій числовій осі і для неї виконується рівність $f(x+T) = f(x)$, $x \in R$.

Періодична функція $x = f(t)$ зображає періодичний рух, або коливання точки, що має в момент часу t координату x.

Найпростішим коливанням є просте гармонічне коливання, яке, як відомо (гл. 4, п. 2.8), задається функцією

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0), \quad t \geqslant 0, \tag{69}$$

де a — амплітуда коливання; ω — циклічна частота; φ_0 — початкова фаза. Основним періодом функції (69) є $T = \frac{2\pi}{\omega}$; тобто одне повне коливання відбувається за проміжок часу $\frac{2\pi}{\omega}$.

Функція (69) (та її графік) називається *простою гармонікою.*

Просту гармоніку зображає також функція

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \tag{70}$$

Дійсно,

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right) = a\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$a = \sqrt{A^2+B^2}, \quad \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi_0, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi_0.$$

Коливання, утворені внаслідок накладання кількох простих гармонік, називають *складними гармонічними коливаннями*. Наприклад, функція

$$\varphi(t) = a_1\sin(t+\varphi_1) + a_2\sin(2t+\varphi_2) + \cdots + a_n\sin(nt+\varphi_n)$$

задає складне гармонічне коливання і є результатом накладання n простих гармонік. Перша з цих гармонік має період 2π, друга — $\frac{2\pi}{2}$, третя — $\frac{2\pi}{3}$ і т. д., n-а $\frac{2\pi}{n}$, тому загальний період T функції $\varphi(t)$ дорівнює 2π.

Графік складного гармонічного коливання, яке складається з кількох простих гармонік, може значно відрізнятися від графіків цих гармонік.

Приклад

На рис. 9.6 суцільною лінією показано графік функції

$$S(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5},$$

яка є сумою трьох простих гармонік (штрихові лінії 1, 2, 3): а) $\sin x$; б) $\frac{\sin 3x}{3}$; в) $\frac{\sin 5x}{5}$.

Таким чином, накладанням простих гармонік можна дістати різноманітні періодичні коливання, які зовсім не схожі на прості гармонічні коливання.

Природно, постає обернена задача: чи не можна періодичний рух, заданий деякою періодичною функцією, подати як суму простих гар-

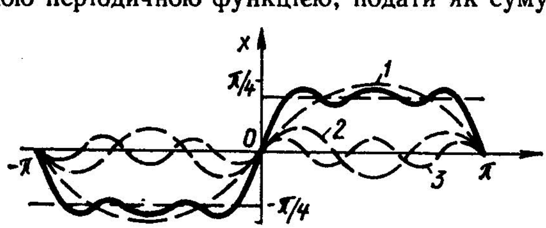


Рис. 9.6

монік? Виявляється, що цього взагалі кажучи, зробити не можна, якщо обмежитися скінченною сумою простих гармонік. Якщо ж ввести нескінченні суми простих гармонік, тобто тригонометричні ряди, то практично кожну періодичну функцію можна розкласти на прості гармоніки.

3.2. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є

Ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots +$$

$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (71)$$

називається *тригонометричним рядом*, а дійсні числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — його коефіцієнтами. Вільний член в сумі (71) для зручності записують у вигляді $\frac{a_0}{2}$.

Припустимо, що ряд (71) на відрізку $[-\pi; \pi]$ рівномірно збіжний до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (72)$$

Оскільки члени ряду (71) є неперервними функціями, то його сума $f(x)$ є також неперервною функцією (п. 2.1). Проінтегрувавши почленно ряд (72) на відрізку $[-\pi; \pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx \right),$$

звідки

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = a_0\pi, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad (73)$$

оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0.$$

Помножимо обидві частини рівності (72) на $\cos kx$ і проінтегруємо одержаний ряд почленно на відрізку $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx \right). \quad (74)$$

Проте

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0, \quad k \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx = 0,$$

тому з рівності (74) при $k = n$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{75}$$

Аналогічно, помноживши рівність (72) на $\sin kx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi; \pi]$, знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{76}$$

Нехай $f(x)$ — інтегровна функція на відрізку $[-\pi; \pi]$. Числа a_0, a_n, b_n, які визначаються формулами (73), (75), (76), називаються *коефіцієнтами Фур'є функції* $f(x)$. Тригонометричний ряд (71), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають *рядом Фур'є* цієї функції і записують

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{77}$$

Знак відповідності $\sim$ означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi; \pi]$ функції $f(x)$ поставлено у відповідність її ряд Фур'є.

Аналогічне явище спостерігалось і для рядів Тейлора (п. 2.4). Доведений вище результат можна тепер сформулювати так.

Теорема 1. *Якщо функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi; \pi]$ у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду (76), то цей тригонометричний ряд единий і є рядом Фур'є для функції $f(x)$.*

З'ясуємо умови, за яких знак відповідності у формулі (77) можна замінити знаком рівності, тобто, за яких ряд Фур'є функції є збіжним і має своєю сумою саме функцію $f(x)$.

Теорема 2 *(достатня умова подання функції через її ряд Фур'є). Нехай періодична функція $f(x)$ з періодом 2π є кусково-монотонна і обмежена на відрізку $[-\pi; \pi]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ є збіжним на всій числовій осі. Сума $S(x)$ знайденого ряду дорівнює значенню функції*

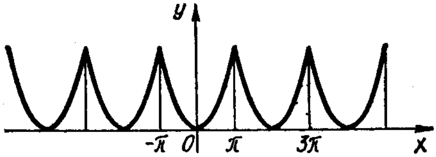


Рис. 9.7

$f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$; якщо x_0 — точка розриву функції $f(x)$, то

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

тобто сума ряду Фур'є в точці x_0 дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції $f(x)$ в цій точці; в кінцевих точках відрізка $[-\pi; \pi]$ сума ряду Фур'є набуває значень

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Приймемо цю теорему без доведення.

Зауваження 1. Якщо ряд Фур'є збігається до функції $S(x)$, то ця функція 2π-періодична, бо такими є всі члени ряду (72). Тому, якщо ряд (72) збіжний до функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$, то він збігатиметься до цієї самої функції на всій числовій осі $(-\infty; +\infty)$; при цьому $f(x + 2\pi) = f(x)$. Отже, функцію, задану на відрізку $[-\pi; \pi]$ та періодично продовжену на всю числову пряму, можна подати через суму ряду Фур'є.

Зауваження 2. При періодичному продовженні функції $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$ на всю числову вісь знайдена функція буде або неперервною в точках $\pm(2n - 1)\pi$, $n \in N$, або розривною в цих точках.

Неперервність можлива лише, якщо $f(\pi) = f(-\pi)$ (рис. 9.7). У цьому разі сума ряду Фур'є дорівнює $S(\pm(2n - 1)\pi) = f(\pi) = f(-\pi)$. Якщо ж $f(\pi) \neq f(-\pi)$, то ми можемо залишити без зміни значення функції на проміжку $(-\pi; \pi]$ і періодично з періодом 2π продовжити її на всю числову вісь.

При цьому в точках $\pm(2n - 1)\pi$, $n \in N$, можуть виникнути точки розриву першого роду (рис. 9.8), в яких сума ряду Фур'є дорівнює $S(\pm(2n - 1)\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi))$.

Зауваження 3. Для довільної інтегровної 2π-періодичної функції $\varphi(x)$ виконується рівність (рис. 9.9)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx$$

для будь-якого числа $a \in (-\infty; +\infty)$. У зв'язку з цим коефіцієнти ря-

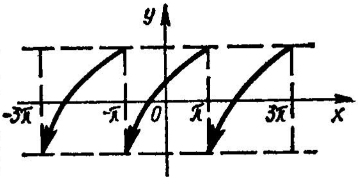


Рис. 9.8

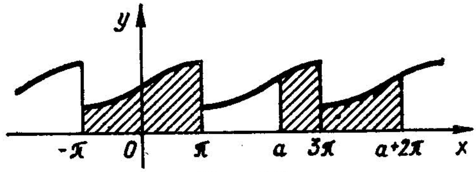


Рис. 9.9

ду Фур'є можна знайти, обчислюючи інтеграли (73), (75), (76) по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду, тобто

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

У випадку, коли 2π-періодична функція задана на проміжку $[0; 2\pi]$, ці формули спрощують задачу знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є.

Зауваження 4. Умови, які накладаються на функцію $f(x)$ при розкладі її в ряд Фур'є, значно простіші, ніж при розкладі її в степеневий ряд. Дійсно, якщо функція розкладається в ряд Тейлора, то вона на всьому інтервалі збіжності є не тільки неперервною, а й скільки завгодно разів диференційовною. Для розкладу функції в ряд Фур'є у цьому зовсім немає потреби. Згідно з теоремою 2, достатньо, щоб лише функція була неперервною або навіть мала на відрізку скінченне число точок розриву першого роду.

З цього випливає, що клас функцій, які можна подати рядом Фур'є значно ширший, ніж клас функцій, які можна подати рядом Тейлора.

Зауваження 5. Якщо функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, то частинні суми $S_n(x)$ цього ряду (по аналогії з многочленами Тейлора їх називають *многочленами Фур'є*) дають змогу знайти наближення цієї функції

$$f(x) \approx S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Похибка цієї формули зменшується зі збільшенням числа n. Проте оцінити цю похибку набагато складніше, ніж для многочленів Тейлора, і ми цим займатися не будемо.

Приклади

1. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію:

а) $f(x) = \pi + x, \quad x \in (-\pi; \pi]$ (рис. 9.10);

б) $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ (рис. 9.11).

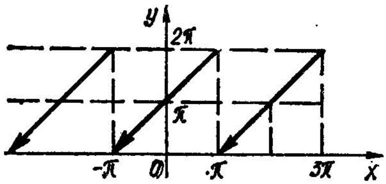


Рис. 9.10

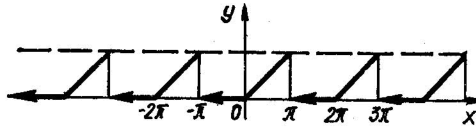


Рис. 9.11

○ Задані функції кусково-монотонні на проміжку $(-\pi; \pi]$, тому їх можна зобразити рядом Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є.

а) Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{(\pi + x)^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)\cos nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x + \pi & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x+\pi}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)\sin nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x + \pi & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x+\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx\right) = -\frac{1}{\pi}\,\frac{2\pi(-1)^n}{n} = \frac{2}{n}\,(-1)^{n+1}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (72), дістанемо

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Ця рівність справедлива для всіх точок неперервності заданої функції, тобто при $x \neq \pm(2n - 1)\pi$, $n \in N$. У точках $\pm(2n - 1)\pi$ сума ряду Фур'є дорівнює π (півсума односторонніх границь в цих точках).

Зазначимо, що задана періодична функція $f(x)$ збігається з функцією $y = \pi + x$ лише на проміжку $(-\pi; \pi]$, а зовні проміжку $(-\pi; \pi]$ ці функції різні.

б) Знаходимо коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} x dx\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx dx\right) = \frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx dx\right) = -\frac{x \cos nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є заданої функції має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $\varphi(x)$ при всіх $x \neq \pm(2n-1)\pi$, $n \in N$. У точках $x = \pm(2n-1)\pi$ сума ряду дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Зауважимо, що якби

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi, \end{cases}$$

то знайдений у цьому прикладі ряд Фур'є був би збіжним до $\varphi_1(x)$ на всій числовій осі. ●

3.3. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Нехай функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi; \pi]$ рядом Фур'є. Покажемо, що обчислення коефіцієнтів цього ряду спрощується, якщо функція $f(x)$ є парною, або непарною.

Якщо функція $f(x)$ парна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{78}$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \tag{79}$$

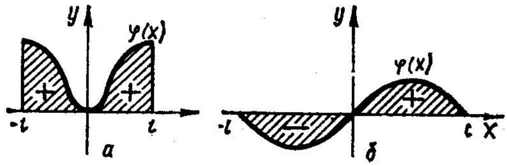


Рис. 9.12

Якщо функція $f(x)$ непарна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{80}$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \tag{81}$$

○ Для доведення формул (78) — (81) зазначимо спочатку, що коли функція $\varphi(x)$ інтегровна на відрізку $[-l; l]$, то (гл. 7, п. 2.5)

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\, dx = 2 \int_0^{l} \varphi(x)\, dx, \tag{82}$$

якщо $\varphi(x)$ парна (рис. 9.12, *а*) і

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\, dx = 0, \tag{83}$$

якщо $\varphi(x)$ непарна (рис. 9.12, *б*).

З формул (82) і (83) дістаємо формули (79) і (81). ●

Зазначимо, що ряди (78) і (80) відображають характер функції $f(x)$ Ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси (парні функції), а ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси (непарні функції).

Приклад

Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичні функції

а) $f(x) = |x|, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (рис. 9.13);

б) $\varphi(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0; \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$ (рис. 9.14).

○ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розкладені в ряди Фур'є.

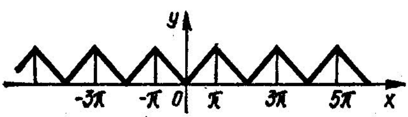


Рис. 9.13

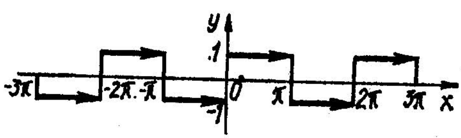


Рис. 9.14

а) Оскільки функція $f(x)$ парна, то, користуючись формулами (78) і (79), дістанемо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi;$$

$$a = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

Ця рівність виконується на всій числовій осі, тому що задана функція неперервна для всіх дійсних значень x.

б) Функція $\varphi(x)$ непарна, тому, згідно з формулами (80) і (81), маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^\pi = -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1);$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right). \quad (84)$$

Ця рівність справедлива у всіх точках $x \in (-\infty; +\infty)$, крім точок розриву. В точках розриву $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ сума знайденого ряду дорівнює нулю. ●

3.4. Ряд Фур'є для $2l$-періодичної функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$ має період $2l$ (l-довільне додатне число) і є на відрізку $[-l; l]$ кусково-монотонною. Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x = \frac{lt}{\pi}$ і розглянемо функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$.

Ця функція визначена на відрізку $[-\pi; \pi]$ і кусково-монотонна на ньому.

Розкладемо функцію $\varphi(t)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ в ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \quad (85)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt. \tag{86}$$

Повернемось до змінної x. При $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$ формули (85) і (86) набирають вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \tag{87}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx. \tag{88}$$

Ряд (87) і є рядом Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $2l$. Коефіцієнти цього ряду знаходять за формулами (88). Зауважимо, що всі теореми, які справджуються для рядів Фур'є 2π-періодичних функцій, зберігаються і для рядів Фур'є $2l$-періодичних функцій. Зокрема, справедливими залишаються достатні умови для розкладу функції в ряд Фур'є (п. 3.2), зауваження про можливість обчислювати коефіцієнти ряду Фур'є, інтегруючи її по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду (п. 3.2), а також особливості рядів Фур'є для парних і непарних функцій (п. 3.3).

Приклад

Зобразити рядом Фур'є функцію (рис. 9.15)

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \ f(x+2) = f(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

○ Ця функція неперервна на всій числовій осі, парна і має період $2l = 2$, тому її можна подати через ряд Фур'є вигляду (87). Враховуючи, що задана функція парна і $l = 1$, згідно з формулами (87) і (88), маємо

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\, dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx =$$

$$= 2 \int_0^1 x^2 \cos \pi n x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos \pi n x dx \\ du = 2x dx & v = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{matrix} \right| =$$

$$= 2 \left(\frac{x^2}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x dx \right) = -\frac{4}{\pi n} \int_0^1 x \sin \pi n x dx =$$

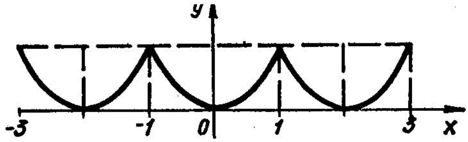


Рис. 9.15

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin \pi nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{\pi n} \cos \pi nx \end{vmatrix} = -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{\pi n} \cos \pi nx \Big|_0^1 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi nx dx\right) = \frac{4x}{\pi^2 n^2} \cos \pi nx \Big|_0^1 = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}; \quad b_n = 0;$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi nx = \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 4\pi x}{4^2} - \ldots\right),$$

$$(-\infty < x < +\infty). \quad \bullet$$

3.5. Ряди Фур'є для функцій заданих на відрізку [0; l] або на відрізку [a; b]

Нехай треба розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ задану на відрізку $[0; l]$. Ми можемо довільним способом продовжити функцію $f(x)$ на відрізок $[-l; 0]$, але так, щоб утворена на відрізку $[-l; l]$ нова функція збігалась з функцією $f(x)$ при $x \in [0; l]$ і була кусково-монотонною (покладемо, наприклад, $F(x) = 0$ при $x \in [-l; 0)$ і $F(x) = f(x)$ при $x \in [0; l]$).

Розклавши функцію $F(x)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-l; l]$, дістанемо шуканий ряд функції $f(x)$ при $x \in [0; l]$. Зокрема, функцію $f(x)$ можна продовжити парним способом на відрізок $[-l; 0]$ (рис. 9.16). Тоді графік функції $F(x)$, $x \in [-l; l]$ буде симетричним відносно осі Oy, а її

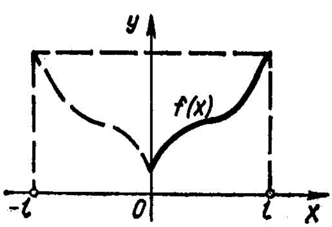


Рис. 9,16

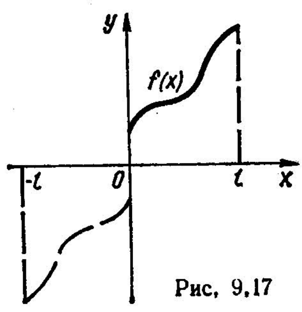


Рис. 9,17

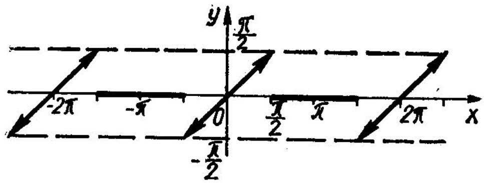


Рис. 9.18

ряд Фур'є міститиме лише косинуси. Якщо ж $f(x)$ продовжити на відрізок $[-l;\ 0]$ непарним способом (рис. 9.17), то графік функції $F(x)$, $x \in [-l;\ l]$ буде симетричним відносно точки $x = 0$, а її ряд Фур'є міститиме лише синуси.

Таким чином, якщо функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;\ l]$ можна розкласти в ряд Фур'є, то таких рядів існує безліч. Особливо важливими для застосування є розклади функції $f(x)$ в ряд синусів і ряд косинусів.

Коли функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;\ b]$, де $a < b$, $0 < |a|$, $b| < \infty$, то задача подання такої функції через ряд Фур'є зводиться до розглянутої вище.

Приклад

Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

○ Продовжимо функцію $f(x)$ непарним способом на проміжок $[-\pi;\ 0)$, а потім знайдену функцію продовжимо періодично на всю числову вісь (рис. 9.18).

Користуючись формулами (80) і (81), маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\sin nx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\pi}{2}\sin 2x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\pi}{4}\sin 4x + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\pi}{6}\sin 6x + \cdots\right)$$

Ця рівність справедлива у всіх точках $x \in [0;\ \pi]$, крім точки $x = \dfrac{\pi}{2}$, в якій сума ряду дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$, а значення функції $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Ряд є збіжним на всій числовій осі до 2π-періодичної функції

$$F(x)=\begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};\\ 0, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi;\\ \frac{\pi}{4}, & x=\pm\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Зокрема, якщо в ряді Фур'є покласти $x=\frac{\pi}{2}$, дістанемо відомий ряд

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right),$$

або $$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots. \bullet$$

3.6. Комплексна форма ряду Фур'е

Нехай

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx);$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx; \tag{89}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Застосувавши формули Ейлера (п. 2.7), дістанемо

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}, \tag{90}$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}. \tag{91}$$

З формул (89) і (91) маємо

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}dx. \tag{92}$$

Зокрема,

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}, \tag{93}$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx+i\sin nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{inx}dx. \tag{94}$$

Враховуючи формули (90) і (93), запишемо ряд (89) у вигляді

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}),$$

або

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \qquad (95)$$

Коефіцієнти цього ряду, згідно з формулами (92) і (94), можна записати у вигляді

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (96)$$

Рівність (95) називають *комплексною формою ряду Фур'є,* а числа c_n, знайдені за формулою (96) — *комплексними коефіцієнтами Фур'є.*

Аналогічно можна знайти комплексну форму ряду Фур'є на відрізку $[-l; l]$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}};$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{-i\pi nx}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (97)$$

Члени цього ряду $c_n e^{\frac{i\pi xn}{l}}$ називають *гармоніками*, коефіцієнти c_n — *комплексними амплітудами гармонік*, а числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $(n = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — *хвильовими числами функції*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\alpha_n x}.$$

Сукупність хвильових чисел називається *спектром*. Якщо ці числа відкладати на числовій осі, то дістанемо дискретну множину точок. Відповідний цій множині спектр називають *дискретним спектром.*

Приклад

Написати ряд Фур'є в комплексній формі для функції $f(x)$ з періодом $2l = 2$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0; \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

○ За формулами (97) маємо

$$c_n = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-i\pi nx}dx = -\left.\frac{e^{-i\pi nx}}{2i\pi n}\right|_0^1 = -\frac{e^{-i\pi n}-1}{2i\pi n} =$$

$$= \frac{e^{-i\pi n}-1}{2\pi n}\,i = \frac{\cos(-\pi n) + i\sin(-\pi n) - 1}{2\pi n}\,i = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}\,i.$$

Оскільки задана функція кусково-монотонна, то у всіх точках неперервності цієї функції справедлива рівність

$$f(x) = i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{2\pi n}e^{i\pi nx} = i\left(\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi} + \frac{e^{-i\pi x}}{\pi}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{e^{3i\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi}\right) + \left(\frac{e^{5i\pi x}}{5\pi} + \frac{e^{-5i\pi x}}{5\pi}\right) + \cdots\right). \; ●$$

3.7. Ряд Фур'є за ортогональною системою функцій

Нехай на відрізку $[a;\, b]$ задано нескінченну систему функцій

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots . \tag{98}$$

Якщо для довільних $n \neq k$

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0, \tag{99}$$

а для $n = k$

$$\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \lambda_n, \quad 0 < \lambda_n < \infty,\ n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{100}$$

то система функцій (98) називається *ортогональною на відрізку* $[a;\, b]$.

Приклади

1. Система функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

ортогональна на відрізку $[-\pi;\, \pi]$.

2. Система функцій

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$$

ортогональна на відрізку $[0;\, \pi]$.

3. Система функцій

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{\pi nx}{l},\ \sin\frac{\pi nx}{l},\ \ldots$$

ортогональна на відрізку $[-l;\, l]$.

4. Системи функцій

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \ldots;$$

$$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots$$

ортогональні на відрізку $[0;\ l]$.

5. Система функцій

$$\sin nx,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx$$

ортогональна на відрізку $[0;\ \pi]$.

Рекомендуємо читачеві упевнитись в цьому самостійно, обчисливши для кожної з наведених систем інтеграли (99) і (100).

6. Не варто думати, що властивість ортогональності мають лише системи тригонометричних функцій.

Побудуємо систему $\{P_n(x)\}$ ортогональних многочленів. Розглянемо систему функцій

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{101}$$

Перші дві функції ортогональні на відрізку $[-1;\ 1]$:

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

тому покладемо $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Проте x^2 вже не ортогональний 1, тому що

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Отже, $P_2(x) \neq x^2$; візьмемо $P_2(x)$ як лінійну комбінацію перших трьох функцій системи (101) $1,\ x,\ x^2$, тобто покладемо $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Підберемо коефіцієнти $a,\ b,\ c$ так, щоб многочлен $P_2(x)$ був ортогональним до многочленів $P_0(x)$ і $P_1(x)$, тобто

$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_0(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_1(x)\,dx = 0,$$

або

$$\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\,x dx = 0,$$

звідки

$$\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}a + 2c = 0, \quad a = -3c;$$

$$\left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}b = 0, \quad b = 0.$$

Отже, $P_2(x) = -3cx^2 + c = c\,(1 - 3x^2)$, де c — довільна стала.

Підбирають її, як правило, так, щоб $P_2(1) = 1$:

$$c\,(1 - 3 \cdot 1^2) = 1, \quad c = -\frac{1}{2}, \text{ тому } P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

Многочлен $P_3(x)$ шукатимемо як лінійну комбінацію перших чотирьох функцій системи (101): $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Із системи рівнянь

$$\int_{-1}^{1} P_3(x) P_0(x)\,dx = 0; \quad \int_{-1}^{1} P_3(x) P_1(x)\,dx = 0;$$

$$\int_{-1}^{1} P_3(x) P_2(x)\,dx = 0; \quad P_3(1) = 1$$

знаходимо, що

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Аналогічно будуємо

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3); \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

і т. д. Ці многочлени ортогональні на відрізку $[-1; 1]$. Вони називаються многочленами Лежандра і широко використовуються в математиці і фізиці [13].

Послідовність дій ортогоналізації, подібну до тієї, яку ми виконали над системою функцій (101) на відрізку $[-1; 1]$, можна повторити для довільної системи лінійно незалежних функцій на довільному інтервалі, якщо інтеграли від квадратів цих функцій на взятому інтервалі є збіжними.

Нехай функція $f(x)$ розкладається в ряд за функціями ортогональної системи (98)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{102}$$

Вважатимемо ряд (102) рівномірно збіжним на відрізку $[a; b]$. Визначимо коефіцієнти c_n. Помножимо обидві частини рівності (101) на $\varphi_n(x)$ і результат почленно проінтегруємо. Враховуючи рівності (99) і (100), дістанемо

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx,$$

звідки

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}. \tag{103}$$

Ряд (102) називаються *рядом Фур'є функції* $f(x)$ *за системою ортогональних функцій* (98), а коефіцієнти c_n цього ряду, обчислені за формулами (103) — *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$ за системою функцій (98).

Ряди Фур'є за системами ортогональних функцій (їх називають ще *узагальненими рядами Фур'є*) використовуються при розв'язуванні багатьох практичних задач, зокрема задач математичної фізики.

Завдання для самоконтролю

1. Який ряд називається тригонометричним? У чому полягає задача про зображення функції рядом Фур'є?
2. Вивести формули для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$.
3. Сформулювати достатні умови для зображення функції рядом Фур'є.
4. Вказати особливості рядів Фур'є для парних і непарних функцій і вивести відповідні формули.
5. Написати ряд Фур'є і вивести формули для його коефіцієнтів, якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l; l]$.
6. Як можна розкласти в ряд Фур'є функцію, задану на відрізку $[0; \pi]$ або $[0; l]$?
7. Записати ряд Фур'є в комплексній формі. Вивести формули для коефіцієнтів цього ряду.
8. Яка система функцій називається ортогональною? Навести приклади.
9. У чому полягає задача про зображення функції рядом за ортогональною системою? Як знайти коефіцієнти цього ряду?
10. Зобразити рядом Фур'є 2π-періодичні функції:

а) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in (-\pi; 0); \\ 1, & x \in [0; \pi]; \end{cases}$

б) $f(x) = 2x - 3, \quad x \in [-\pi; \pi)$.

11. Розкласти в ряд за косинусами функцію

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in (0; \pi].$$

12. Розкласти в ряди Фур'є за синусами і за косинусами функцію $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$, задану на півперіоді $(0; 2]$.
13. Зобразити комплексною формою ряду Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ e^{-x}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

14. Довести, що система функцій

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{3\pi x}{l}, \sin\frac{3\pi x}{l}, \ldots$$

ортогональна на відрізку $[-l; l]$.

Відповіді. 10. а) $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; б) $f(x) = -3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$. 11. $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. 12. $f(x) =$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{2}, \qquad f(x) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^3} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi n x}{2}. \qquad \text{13. } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{2\pi} \quad \frac{1-in}{1+n^2} e^{inx}.$$

§ 4. ІНТЕГРАЛ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

В п. 3.2 було показано, що всяку кусково-монотонну функцію, визначену на довільному скінченному проміжку, можна розкласти в ряд Фур'є, тобто зобразити нескінченною сумою простих гармонік. Чи не можна дістати такий самий розклад на гармоніки чи подібний до нього для неперіодичних функцій, заданих на нескінченному проміжку $(-\infty; +\infty)$? Виявляється, що це можна зробити за допомогою інтеграла Фур'є.

4.1. Інтеграл Фур'є

Нехай неперіодична кусково-монотонна функція $f(x)$ задана на нескінченному проміжку $(-\infty; +\infty)$, *абсолютно інтегровна* на ньому, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = Q < \infty. \tag{104}$$

Тоді на довільному скінченному проміжку $(-l; l)$ цю функцію можна розкласти в ряд Фур'є (87). Підставляючи в цей ряд значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n, з формул (89) дістанемо

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} (f(t) \cos \alpha_n t \cos \alpha_n x +$$

$$+ f(t) \sin \alpha_n t \sin \alpha_n x)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_n (t - x)\, dt, \tag{105}$$

де $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$ — хвильові числа функції $f(x)$. Позначимо

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{l} = \Delta\alpha_n.$$

Тоді формула (105) набере вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_n (t - x)\, dt \right] \Delta\alpha_n. \tag{106}$$

Перейдемо у цій формулі до границі при $l \to +\infty$. Оскільки $f(x)$ не залежить від l, то

$$\lim_{l \to +\infty} f(x) = f(x).$$

З умови (104) випливає, що перший доданок у правій частині формули (106) прямує до нуля при $l \to +\infty$:

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\,dt \leqslant \lim_{l\to+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)|\,dt < \lim_{l\to+\infty} \frac{Q}{2l} = 0.$$

Вираз у квадратних дужках формули (106) при довільному фіксованому l є функція від α_n:

$$\int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_n (t - x)\,dt = \varphi(\alpha_n),$$

тому

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_n (t - x)\,dt \right) \Delta\alpha_n =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{l\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n)\,\Delta\alpha_n.$$

Знайдена сума нагадує інтегральну суму для функції $\varphi(\alpha)$, де $\alpha \in (0; +\infty)$. При досить великих значеннях l величина $\Delta\alpha_n = \frac{\pi}{l}$ стає дуже малою, а спектр хвильових чисел — дуже щільним. Якщо $l \to +\infty$, то $\Delta\alpha_n \to 0$, тобто хвильові числа α_n набувають всіх можливих значень від 0 до $+\infty$; дискретний спектр хвильових чисел стає неперервним, тому природно сподіватись, що

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n)\,\Delta\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \varphi(\alpha)\,d\alpha$$

або

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t - x)\,dt \right) d\alpha. \tag{107}$$

Знайдений інтеграл називається *інтегралом Фур'є для функції* $f(x)$. Фурьє дістав його у 1811 р.

Точного доведення цієї формули ми не наводимо. Зазначимо лише, що формула (107) справедлива для всіх точок x, в яких функція $f(x)$ неперервна. Якщо ж x_0 — точка розриву, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t - x_0)\,dt \right) d\alpha = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Отже, коли функція $f(x)$ визначена і абсолютно інтегровна на числовій осі і кусково-монотонна на довільному скінченному проміжку, то для неї існує інтеграл Фур'є. У точках неперервності функції $f(x)$ виконується рівність (107), а в точках розриву даної функції інтеграл Фур'є дорівнює середньому арифметичному її односторонніх границь.

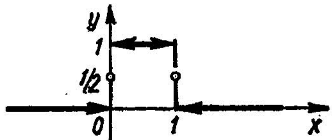


Рис. 9.19

Запишемо інтеграл Фур'є в іншому вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t - \alpha x)\,dt\right)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt\right)\times$$

$$\times\cos\alpha x d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x d\alpha. \tag{108}$$

Введемо позначення

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt, \tag{109}$$

тоді

$$f(x) = \int_0^{\infty}(A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha. \tag{110}$$

Інтеграл Фур'є у формулі (110) подібний до ряду Фур'є: знак суми ряду Фур'є замінено знаком інтеграла, коефіцієнти a_n та b_n ряду замінено функціями $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$. По аналогії з рядом Фур'є кажуть, що формула (110) дає розклад функції $f(x)$ на гармоніки з частотами α, що неперервно змінюються від 0 до $+\infty$. Закон зміни амплітуд залежить від α і визначається формулами (109).

Приклад

Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0{,}5, & x = 0, \quad x = 1; \\ 0, & x < 0, \quad x > 1. \end{cases}$$

○ Ця функція кусково-монотонна на будь-якому скінченному відрізку $[-l;\ l]$, оскільки складається з трьох неперервних частин (рис. 9.19):

$$f(x) = 0, \quad -\infty < x < 0; \quad f(x) = 1, \quad 0 < x < 1; \quad f(x) = 0, \quad 1 < x < +\infty.$$

Вона також абсолютно інтегровна на всій числовій осі:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} 0\cdot dx = 1 < \infty.$$

Отже, таку функцію в точках її неперервності можна подати через інтеграл Фур'є.
Згідно з формулою (107) маємо

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^1\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha(t-x)}{\alpha}\Big|_0^1 d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha(1-x)+\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}d\alpha.$$

У точках розриву $x=0$ та $x=1$ інтеграл Фур'є дорівнює

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, знайдений інтеграл Фур'є зображає дану функцію на всій числовій осі. Зокрема, якщо $x=0$, то дістанемо

$$f(0)=\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha,$$

звідки

$$\int_0^\infty\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Ми обчислили інтеграл, який за формулою Ньютона — Лейбніца не обчислюється, оскільки первісна від функції $\frac{\sin x}{x}$ не виражається через елементарні функції (гл. 7, п. 1.8).

4.2. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій

Припустимо, що функція $f(x)$ парна, тоді функція $f(t)\cos\alpha t$ також парна, а функція $f(t)\sin\alpha t$ непарна. Тому формула (108) набере вигляду

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{111}$$

Аналогічно, якщо $f(x)$ непарна функція, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{112}$$

Скориставшись виразами (109), запишемо інтеграли (111) і (112) у вигляді:

$$f(x)=\int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha; \tag{113}$$

$$f(x)=\int_0^\infty B(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{114}$$

Таким чином, якщо $f(x)$ парна функція, то вона зображається інтегралом Фур'є вигляду (111) або (112). Якщо ж $f(x)$ непарна функція, то її зображення інтегралом Фур'є має вигляд (112) або (114).

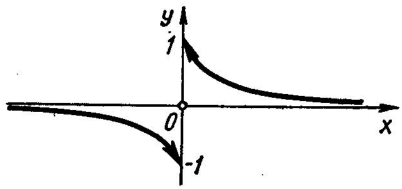


Рис. 9.20

Коли функція $f(x)$ задана лише на проміжку $(0; +\infty)$, то її можна продовжити на проміжок $(-\infty; +\infty)$ різними способами, зокрема парним або непарним. Це означає, що таку функцію можна зобразити різними інтегралами Фур'є, зокрема інтегралами (111) або (112).

Зазначимо, що інтеграли Фур'є (113) і (114) аналогічні відповідним рядам Фур'є (78) і (80) для парних і непарних функцій.

Приклад

Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x < +\infty; \\ -e^{x}, & -\infty < x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

○ Ця функція задана на всій осі і кусково-монотонна на довільному скінченному відрізку $[-l; l]$, оскільки складається з двох неперервних частин і має один розрив першого роду при $x = 0$ (рис. 9.20).

Переконаємось, що $f(x)$ абсолютно інтегровна:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} e^{x}\Big|_a^0 - \lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b = 2 < \infty.$$

Отже, задану функцію можна зобразити інтегралом Фур'є. Оскільки ця функція непарна, то за формулою (112) маємо

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-t}\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,dt,$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int^{\infty} e^{-t}\sin\alpha t\,dt = \alpha - \alpha^2\int_0^{\infty} e^{-t}\sin\alpha t\,dt; \quad \int_0^{\infty} e^{-t}\sin\alpha t\,dt = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Таким чином,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha,\quad x\in(-\infty;+\infty).\ \bullet$$

4.3. Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Перетворення Фур'є.

Нехай функція $f(x)$ зображується інтегралом Фур'є за формулою (110). Скориставшись формулами Ейлера, дістанемо

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(A(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}+B(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}((A(\alpha)-iB(\alpha))\,e^{i\alpha x}+(A(\alpha)+iB(\alpha))\,e^{-i\alpha x})\,d\alpha. \quad (115)$$

Введемо позначення $F(\alpha)=(A(\alpha)+iB(\alpha))\,\pi$. Згідно з формулами (109) дістанемо

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\alpha t-i\sin\alpha t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}dt. \quad (116)$$

Аналогічно

$$\pi(A(\alpha)+iB(\alpha))=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}dt=F(-\alpha), \quad (117)$$

Враховуючи формули (116) і (117), запишемо інтеграл (115) у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}(F(\alpha)\,e^{i\alpha x}+F(-\alpha)\,e^{-i\alpha x})\,d\alpha. \quad (118)$$

Перетворимо інтеграл від другого доданку, виконавши заміну змінної $\alpha=-\beta$:

$$\int_0^{+\infty}F(-\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha=-\int_0^{-\infty}F(\beta)\,e^{i\beta x}d\beta=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}F(\beta)\,e^{i\beta x}d\beta=\int_{-\infty}^{0}F(\alpha)\,e^{i\alpha x}d\alpha,$$

тоді формула (118) набере вигляду

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,e^{i\alpha x}d\alpha. \quad (119)$$

З формул (116) і (119) випливає, що

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}dt\right) e^{i\alpha x}d\alpha. \qquad (120)$$

Права частина формули (120) називається інтегралом Фур'є в комплексній формі для функції $f(x)$.

Функція $F(\alpha)$, яка визначається формулою (116), називається *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$; в свою чергу, функція $f(x)$, зображена формулою (119), називається *оберненим перетворенням Фур'є для функції* $F(\alpha)$.

Якщо функція $f(x)$ парна (або задана на проміжку $(0; +\infty)$ і продовжена на всю числову вісь парним способом), то з формул (111) маємо

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} F_C(\alpha)\cos\alpha x d\alpha,$$

де

$$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt.$$

Аналогічно для непарної функції (або при непарному продовженні) з формули (112) дістанемо

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} F_S(\alpha)\sin\alpha x d\alpha, \quad \text{де} \quad F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt.$$

Функції $F_C(\alpha)$ і $F_S(\alpha)$ називаються відповідно *косинус-перетворенням* і *синус-перетворенням Фур'є для функції* $f(x)$.

Функції $F(\alpha)$, $F_C(\alpha)$, $F_S(\alpha)$ називають також *спектральною щільністю функції* $f(x)$. Теорія перетворень Фур'є широко використовується для розв'язування багатьох практичних задач. Існують таблиці перетворень Фур'є, в яких наведено відповідні пари функцій $f(x)$ і $F(\alpha)$.

Приклад

Зобразити інтегралом Фур'є в комплексній формі функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}, & 0<x<\infty; \\ 0, & -\infty<x<0; \\ 0{,}5, & x=0. \end{cases}$$

○ За формулою (116) знайдемо перетворення Фур'є заданої функції

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-i\alpha t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+i\alpha)}dt=\frac{1}{1+i\alpha}.$$

Комплексна форма (120) інтеграла Фур'є у даному разі має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + i\alpha} d\alpha. \bullet$$

Завдання для самоконтролю

1. Що називається інтегралом Фур'є?
2. Назвати достатні умови для зображення функції інтегралом Фур'є.
3. Записати інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій.
4. Чим схожі інтеграл Фур'є і ряд Фур'є? У чому їх суттєва відмінність?
5. Записати інтеграл Фур'є в комплексній формі.
6. Що називається перетворенням Фур'є? Оберненим перетворенням Фур'є?
7. Що називається косинус- і синус-перетворенням Фур'є?
8. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$
9. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1]; \\ 0, & x \in (1; +\infty), \end{cases}$ продовживши її на проміжок $(-\infty; 0)$ парним способом.
10. Знайти спектральну щільність перетворення Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

Відповіді. 8. $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\cos \alpha x}{1 - \alpha^2} \cos \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha x}{1 - \alpha^2} \left(\sin \frac{\pi\alpha}{2} - \alpha \right) \right) d\alpha,$ $x \neq 0,$ $x \neq \frac{\pi}{2}$. 9. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha \cos x\alpha}{\alpha} d\alpha,$ $x \neq 0,$ $x \neq 1$. 10. $F(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2\alpha}$.

Глава 10

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Узагальнимо на функції декількох змінних основні ідеї і методи інтегрального числення функцій однієї змінної (гл. 7).

§ 1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

1°. *Задача про об'єм циліндричного тіла.* Нехай маємо тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geqslant 0$, знизу — замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків — циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz (рис. 10.1) Таке тіло називають *циліндричним*.

Обчислимо його об'єм V. Для цього довільним способом розіб'ємо область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній області D_i виберемо довільну точку P_i $(\xi_i; \eta_i)$, знайдемо значення функції в цій точці $f(\xi_i, \eta_i)$ і обчислимо добуток $f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Цей добуток дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з твірними, паралельними осі Oz, основою D_i і висотою $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Усього таких стовпчиків є n, і сума їхніх об'ємів

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \tag{1}$$

наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла $V \approx V_n$. Це наближення тим точніше, чим більше число n і чим менші розміри областей D_i. Назвемо діаметром $d(G)$ замкненої обмеженої області G найбільшу відстань між двома точками межі цієї області. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей $D_i : \lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(D_i)$. Тоді природно об'єм даного тіла визначити як границю суми (1) при $\lambda \to 0$:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} V_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \tag{2}$$

2°. *Задача про масу пластини.* Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є область D (рис. 10.2). В області D задана неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини в точці $(x; y)$. Знайдемо масу m пластини. Для цього довільним способом розіб'ємо область D на частини D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

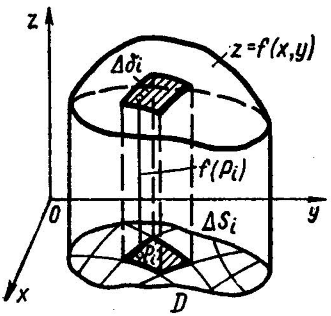


Рис. 10.1

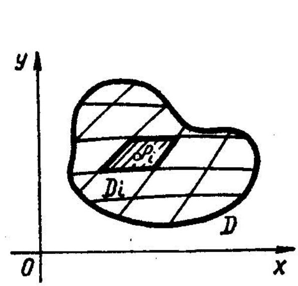


Рис. 10.2

У кожній області D_i візьмемо яку-небудь точку P_i (ξ_i, η_i) і знайдемо густину в цій точці:

$$\gamma(P_i) = \gamma(\xi_i, \eta_i).$$

Якщо розміри області D_i достатньо малі, то густина в кожній точці $(x; y) \in D_i$ мало відрізнятиметься від значення $\gamma(P_i)$. Тоді добуток $\gamma(P_i)\, \Delta S_i$ наближено визначає масу тієї частини пластини, яка займає область D_i, а сума

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i \tag{3}$$

є наближеним значенням маси m всієї пластини. Точне значення маси дістанемо як границю суми (3) при $\lambda \to 0$:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} m_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i. \tag{4}$$

Таким чином, різні за змістом задачі ми звели до знаходження границь (2) і (4) одного й того самого виду. Можна навести ще ряд задач з фізики і техніки, розв'язання яких приводить до обчислення подібних границь. У зв'язку з цим виникає потреба у вивченні властивостей цих границь, незалежно від змісту тієї чи іншої задачі. Кожна така границя називається подвійним інтегралом. Дамо точні означення.

1.2. Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$. Вважатимемо, що межа області D складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких визначається функцією виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$.

Розіб'ємо область D на n частини D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній області D_i візьмемо довільну точку P_i $(\xi_i; \eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i, \tag{5}$$

яку назвемо *інтегральною сумою для функції* $z = f(x, y)$ по області D. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ — найбільший з діаметрів областей D_i.

Якщо інтегральна сума (5) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частині області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом* і позначається одним із таких символів:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS \quad \text{або} \quad \iint\limits_D f(x, y)\, dx dy.$$

Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i, \qquad (6)$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається *інтегровною в області* D; D — *областю інтегрування;* x, y — *змінними інтегрування;* dS (або $dxdy$) — *елементом площі.*

Звернемося до задач п. 1.1. Якщо границі в рівностях (2) і (4) існують, то з цих рівностей і формули (6) дістаємо формули для обчислення об'єму циліндричного тіла

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \qquad (7)$$

та маси пластинки

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy. \qquad (8)$$

Якщо у формулі (7) покласти $f(x, y) \equiv 1$, $(x; y) \in D$, то дістанемо формулу для обчислення площі S області D:

$$S = \iint\limits_D dxdy. \qquad (9)$$

Рівності (7) і (8) розглядають відповідно як геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла, якщо підінтегральна функція невід'ємна в області D.

Теорема *(достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.*

Є ще й інші умови існування подвійного інтеграла, але надалі ми вважатимемо, що підінтегральна функція $f(x, y)$ в області інтегрування D є неперервною.

Порівнюючи означення подвійного інтеграла (6) та означення визначеного інтеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i,$$

бачимо, що конструктивно ці означення цілком аналогічні: в обох випадках розглядається деяка функція f, але в першому випадку це функція однієї змінної, визначена на одновимірній області — відрізку $[a; b] \subset R_1$, а в другому — це функція двох змінних, визначена у двовимірній області $D \subset R_2$. В обох випадках область визначення розбивається на частини, в кожній з яких береться довільна точка і в ній знаходиться значення функції. Після цього знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області визначення. У випадку однієї змінної такою мірою була довжина Δx_i відрізка $[x_i; x_{i+1}]$, а у випадку двох змінних — площа ΔS_i області $D_i \subset D$. Наступні кроки знову однакові: утворюються інтегральні суми і знаходяться їхні границі, коли міра частин області визначення прямує до нуля. Пізніше ми побачимо, що за цією самою схемою будується і потрійний інтеграл, тільки мірою області там є об'єм.

У зв'язку з цим, *властивості подвійного інтеграла* аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла. Сформулюємо ці властивості. (Рекомендуємо читачеві повторити матеріал п. 2.3 гл. 7, довести ці властивості самостійно і дати їм геометричну інтерпретацію.)

1°. *Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:*

$$\iint_D Cf(x, y)\,dxdy = C\iint_D f(x, y)\,dxdy, \quad C = \text{const}.$$

2°. *Подвійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від цих функцій:*

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]\,dxdy = \iint_D f(x, y)\,dxdy \pm \iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

Ця властивість має місце для суми довільного скінченного числа функцій.

3°. *Якщо в області D функція $f(x, y) \geqslant 0$, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \geqslant 0.$$

4°. *Якщо функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ визначені в одній і тій самій області D і $f(x, y) \geqslant g(x, y)$,*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy \geqslant \iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

5°. *(Адитивність подвійного інтеграла.) Якщо область інтегрування функції $f(x, y)$ розбити на області D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dxdy.$$

Ця властивість називається *адитивністю подвійного інтеграла* і справедлива для довільного скінченного числа областей, які складають область D і не мають спільних внутрішніх точок.

6°. *(Оцінка подвійного інтеграла). Якщо функція неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то*

$$mS \leqslant \iint_D f(x, y)\,dxdy \leqslant MS,$$

де m і M — відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D.

7°. *(Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка $(x_0; y_0)$, що*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = f(x_0, y_0) S.$$

Величину

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

називають *середнім значенням функції* $f(x, y)$ в області D.

1.3. Обчислення подвійного інтеграла

Обчислення подвійного інтеграла за формулою (6) як границі інтегральної суми, так само як і у випадку визначеного інтеграла, пов'язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла — двох звичайних визначених інтегралів.

Покажемо, як це робиться. Припустимо, що при $(x; y) \in D$ функція $f(x, y) \geqslant 0$. Тоді, згідно з формулою (7), подвійний інтеграл виражає об'єм циліндричного тіла (рис. 10.3) з основою D, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$. Обчислимо цей об'єм за допомогою методу паралельних перерізів (гл. 7, п. 3.3):

$$V = \int_a^b S(x)\, dx, \tag{9'}$$

де $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x = a$ та $x = b$ — рівняння площин, які обмежують дане тіло. Перед тим, як обчислювати площу зробимо певні припущення відносно області D.

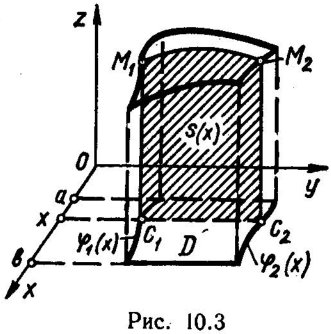


Рис. 10.3

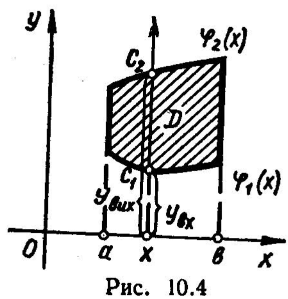


Рис. 10.4

Припустимо спочатку, що область інтегрування D обмежена двома неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ і двома прямими $x = a$ та $x = b$, причому $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для всіх $x \in (a; b)$ (рис. 10.4).

Проведемо через точку $(x; 0)$, де $x \in (a; b)$, пряму, паралельну осі Oy. Ця пряма перетинає криві $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ в точках c_1 і c_2, які називатимемо відповідно точкою входу в область D і точкою виходу з області D. Ординати цих точок позначимо відповідно $y_{\text{вх}}$ та $y_{\text{вих}}$, тоді $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$, $y_{\text{вих}} = \varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається *правильною в напрямі осі* Oy. Інакше кажучи, область D називається правильною в напрямі осі Oy, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy, перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

Знайдемо тепер площу $S(x)$. Для цього проведемо через точку $(x; 0; 0)$ площину, перпендикулярну осі Ox (рис. 10.3). У перерізі цієї площини і циліндричного тіла утворюється трапеція $c_1M_1M_2c_2$. Апліката $z = f(x, y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише y, причому y змінюється в межах від $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$ до $y_{\text{вих}} = \varphi_2(x)$. Площа $S(x)$ трапеції $c_1M_1M_2c_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x) = \int_{y_{\text{вх}}}^{y_{\text{вих}}} z\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Підставивши знайдене значення $S(x)$ у формулу (9′) і враховуючи формулу (7), дістанемо

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

або в зручнішій формі

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{10}$$

Це і є шукана формула для обчислення подвійного інтеграла. Праву частину формули (10) називають *повторним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області D. У повторному інтегралі (10) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x. Інтеграл по змінній y називають внутрішнім, а по змінній x — зовнішнім. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла (в межах від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$) одержуємо певну функцію від однієї змінної x. Інтегруючи цю функцію в межах від a до b, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число — значення подвійного інтеграла.

Зауваження 1. Наведені геометричні міркування при одержанні формули (10) можливі у випадку, коли $f(x, y) \geqslant 0$, $(x; y) \in D$.

Проте формула (10) залишається справедливою і в загальному випадку. Строге доведення цієї формули ми опускаємо.

Зауваження 2. Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ і двома прямими $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, причому $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ для всіх $y \in (c; d)$, тобто якщо область D *правильна в напрямі осі* Ox (рис. 10.5), то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (11)$$

Тут внутрішнім є інтеграл по змінній x. Обчислюючи його в межах від $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, дістанемо значення подвійного інтеграла.

Зауваження 3. Якщо область D правильна в обох напрямах, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (10), так і за формулою (11). Результати матимемо однакові.

Зауваження 4. Якщо область D не є правильною ні в напрямі осі Ox, ні в напрямі осі Oy (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше, ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі Ox чи Oy. Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних областях і додаючи результати (властивість адитивності), знаходимо шуканий подвійний інтеграл по області D. Для випадку, зображеного на рис. 10.6 $\left(\text{область } D \text{ обмежена еліпсами } x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ і прямою } x = \frac{3}{4}\right)$, при інтегруванні в напрямі осі Oy маємо

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x, y)\,dxdy.$$

У напрямі осі Ox тут потрібно було б обчислити повторні інтеграли по семи областях.

Зауваження 5. Повторні інтеграли в правих частинах формули (10) і (11) називаються *інтегралами з різним порядком інтегрування.* Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно від формули (10) перейти до формули (11), або навпаки.

У кожному конкретному випадку, залежно від виду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 6. Правильну в напрямі осі Oy область D коротко позначатимемо так:

$$D = \{\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

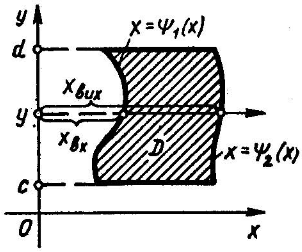


Рис. 10.5

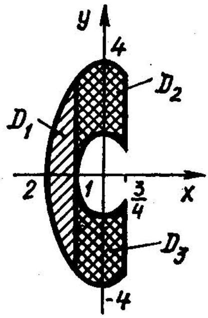


Рис. 10.6

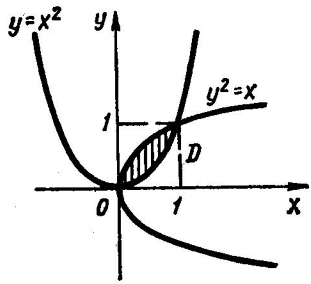


Рис. 10.7

Аналогічно

$$D=\{\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

— область правильна в напрямі осі Ox.

Приклади

1. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена параболами $y=x^2$, $x=y^2$;

б) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, якщо область D міститься в першій чверті і обмежена лініями $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$;

в) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$, якщо область D обмежена прямими $y=x$, $y=0$, $x=1$.

○ а) Область інтегрування D зображено на рис. 10.7. Ця область правильна у напрямі як осі Oy, так і осі Ox. Для обчислення даного інтеграла можна користуватись як формулою (10), так і формулою (11), бо функція $f(x, y)=x+2y$ неперервна в усій площині Oxy і, зокрема, в області D.

Область D правильна в напрямі осі Oy, тобто

$$D=\{x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant 1\},$$

тому за формулою (10) маємо

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+2y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 (xy+y^2)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1 (x^{\frac{3}{2}}+x-x^3-x^4)\,dx=\frac{9}{20}\,.$$

б) Область інтегрування D зображено на рис. 10.8. Оскільки функція $f(x, y)=xy^2$ неперервна в даній області, то для обчислення заданого подвійного інтеграла можна скористатися як формулою (10), так і формулою (11).

Область правильна в напрямі осі Oy, тобто

$$D=\{x\leqslant y\leqslant 2-x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1\},$$

тоді за формулою (10) маємо

$$\iint_D xy^2dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2} xy^2dy=\int_0^1 x\left.\frac{y^3}{3}\right|_x^{2-x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 (x(2-x^2)^3-x^4)\,dx=-\frac{1}{6}\int_0^1 (2-x^2)^3\,d(2-x^2)-\frac{1}{3}\int_0^1 x^4dx=\frac{67}{120}.$$

Обчислимо цей інтеграл іншим способом, користуючись формулою (11). Область D є правильною в напрямі осі Ox, але її треба розбивати на дві частини D_1 і D_2, оскільки лінія OAB, на якій містяться точки виходу з області, задається двома різними рівняннями. Маємо

$$D_1=\{0\leqslant x\leqslant y,\ 0\leqslant y\leqslant 1\};$$

$$D_2=\{0\leqslant x\leqslant\sqrt{2-y},\ 1\leqslant y\leqslant 2\};$$

$$\iint_D xy^2dxdy=\iint_{D_1} xy^2dxdy+\iint_{D_2} xy^2dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y xy^2dx+\int_1^2 dy\int_x^{\sqrt{2-y}} xy^2dx=\int_0^1 y^2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^y dy+$$

$$+\int_1^2 y^2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{2-y}}dy=\int_0^1\frac{y^4}{2}dy+\int_1^2\frac{(2-y)\,y^2}{2}dy=\frac{1}{10}+\frac{11}{24}=\frac{67}{120}.$$

Очевидно, при обчисленні цього інтеграла вигідніше користуватися формулою (10).

в) Область інтегрування D зображено на рис. 10.9. Ця область правильна в обох напрямах, але обчислити даний інтеграл можна лише за формулою (10).

Якби ми застосували формулу (11), то нам треба було б обчислювати інтеграл $\int e^{\frac{y}{x}}dx$, який, як відомо (гл. 7, п. 1.8), в елементарних функціях не обчислюється. Отже,

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}dydx=\int_0^1 dx\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy=\int_0^1 xe^{\frac{y}{x}}\Big|_0^x dx=\int_0^1 x(e-1)\,dx=\frac{e-1}{2}.\ \bullet$$

2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{e^y} f(x,y)\,dx.$$

○ Тут потрібно перейти від повторного інтеграла виду (11) до інтеграла виду (10).

Область інтегрування D обмежена лініями: $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=e^y$ або $y=\ln x$ (рис. 10.10). Якщо внутрішнє інтегрування провести по y, а зовнішнє —

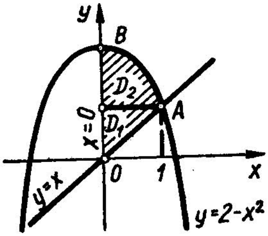


Рис. 10.8

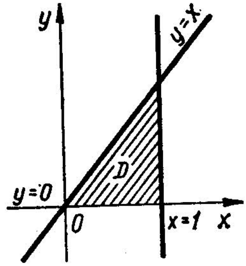


Рис. 10.9

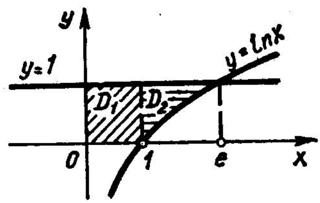


Рис. 10.10

по x, то задану область D треба розглядати як правильну в напрямі осі Oy. Оскільки лінія, на якій містяться точки входу в область, задана двома різними рівняннями, то дану область треба розбити на дві частини D_1 і D_2. Маємо

$$D_1 = \{0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\};$$

$$D_2 = \{\ln x \leqslant y \leqslant 1,\ 1 \leqslant x \leqslant e\};$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y)\, dy. \; \bullet$$

1.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D, тоді існує інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Припустимо, що за допомогою формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{12}$$

ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та v. Вважатимемо, що з формул (12) однозначно можна визначити u та v:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{13}$$

Згідно з формулами (13), кожній точці $M(x;\ y) \in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u;\ v)$ на координатній площині з прямокутними координатами u і v. Нехай множина всіх точок $M^*(u;\ v)$ утворює обмежену замкнену область D^*. Формули (12) називаються *формулами перетворення координат*, а формули (13) — *формулами оберненого перетворення*.

Справедлива така теорема.

Теорема. *Якщо перетворення (13) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (12) мають в області D^* неперервні частинні похідні* *першого порядку і відмінний від нуля визначник*

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в області D, то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|\,dudv. \tag{15}$$

Функціональний визначник (14) називається *визначником Якобі* або *якобіаном.*

Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (12), ми маємо елемент площі $dxdy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|J(u, v)|\,dudv$ в координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*.

Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за відомими формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Оскільки

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho, \quad |J(\rho, \varphi)| = \rho,$$

то формула (15) набирає вигляду

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi, \tag{16}$$

де область D задана в декартовій системі координат Oxy, а D^* — відповідна їй область в полярній системі координат.

Зауваження 1. У багатьох випадках формулу (16) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області D містить суму $x^2 + y^2$, оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2.$$

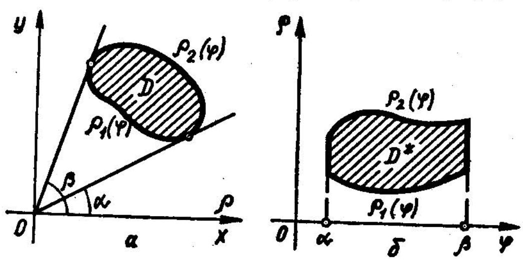


Рис. 10.11

Зауваження 2. Якщо область D (рис. 10.11, *а*) обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β ($\alpha < \beta$) і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leqslant \rho_2(\varphi)$), то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\varphi)$,

$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ (рис. 10.11, *б*). Тому формулу (16) можна записати у вигляді

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \tag{17}$$

Зауваження 3. Якщо область D охоплює початок координат, тобто точка O (0; 0) є внутрішньою точкою області D, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho, \tag{18}$$

де $\rho(\varphi)$ — полярне рівняння межі області D.

Приклади

1. Обчислити інтеграл $\iint_D (6x - 3y)\,dxdy$, якщо область D — паралелограм, обмежений прямими $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$ (рис. 10.12).

○ Безпосереднє обчислення цього інтеграла надто громіздке, тому що як в напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy область D треба спочатку розбити на три області, а потім обчислювати три подвійних інтеграли.

Виконаємо таку заміну змінних: $x + y = u$, $2x - y = v$, тоді прямі $x + y = 1$ та $x + y = 2$ в системі Oxy переходять в прямі $u = 1$ та $u = 2$ в системі O_1uv (рис. 10.13), а прямі $2x - y = 1$ та $2x - y = 3$ відповідно в прямі $v = 1$ та $v = 3$. Таким чином, область D (паралелограм) переходить у системі O_1uv в прямокутник D^*. Далі маємо

$$\begin{cases} x + y = u; \\ 2x - y = v; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(u + v); \\ y = \dfrac{1}{3}(2u - v); \end{cases}$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}, \quad |J(u, v)| = \frac{1}{3}.$$

За формулою (15)

$$\iint_D (6x - 3y)\,dxdy = \iint_{D^*} \left(6 \cdot \frac{1}{3}(u + v) - 3 \cdot \frac{1}{3}(2u - v)\right)\frac{1}{3}\,dudv =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 3v\,dv = 4. \quad ●$$

2. Обчислити $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$, якщо D — круг радіуса $R = 2$ з центром у початку координат.

○ Оскільки межа області D в полярних координатах задається рівнянням $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4$ або $\rho = 2$, то за формулою (18) маємо

$$\iint\limits_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\, d(4-\rho^2) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2(4-\rho^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^2 d\varphi = \frac{16\pi}{3}. \ ●$$

3. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо область D обмежена колами $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ (рис. 10.14).

○ Знайдемо рівняння межі області D в полярних координатах: $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi$, звідси $\rho = 2 \cos \varphi$ — полярне рівняння малого кола; аналогічно знаходимо, що $\rho = 4 \cos \varphi$ — полярне рівняння великого кола. Якщо кут φ змінюватиметься в межах від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то змінна ρ матиме межі від $2 \cos \varphi$ до $4 \cos \varphi$. Отже, за формулою (17) маємо

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{56}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{56}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{56}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{224}{9}. \ ●$$

1.5. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії

1°. *Площа плоскої фігури.* Якщо в площині Oxy задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D, то площа S цієї фігури знаходиться, як відомо (п. 1.2), за формулою (9):

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

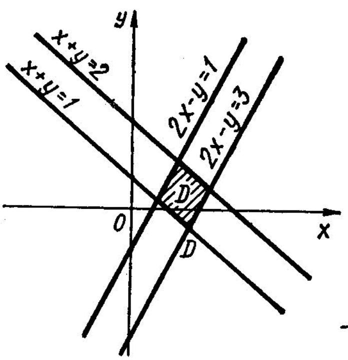


Рис. 10.12

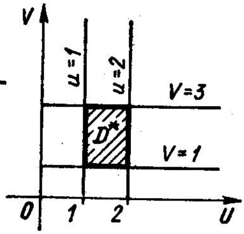


Рис. 10.13

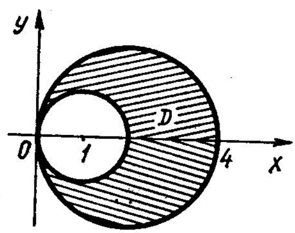


Рис. 10.14

2°. *Об'єм тіла.* Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy, а зверху — поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна та невід'ємна в області D, знаходиться за формулою (7) (п. 1.2):

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

3°. *Площа поверхні.* Якщо поверхня σ, задана рівнянням

$$z = f(x, y), \tag{19}$$

проектується на площину Oxy в область D (рис. 10.15) і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q поверхні σ знаходять за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}\, dxdy. \tag{20}$$

○ Виведемо цю формулу. Розіб'ємо довільним способом область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині D_i візьмемо точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$; на поверхні σ їй відповідатиме точка $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$, де $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$. Через точку M_i проведемо дотичну площину Π_i (гл. 6, п. 2.1):

$$f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) - (z - \zeta_i) = 0.$$

На площині Π_i виділимо ту її частину, яка проектується на площину Oxy в область D_i. Позначимо цю частину дотичної площини через σ_i, а її площу — через $\Delta\sigma_i$. Складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \tag{21}$$

Границю Q суми (21), коли найбільший з діаметрів областей D_i прямує до нуля, назвемо *площею поверхні* (19), тобто за означенням покладемо

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \tag{23}$$

Обчислимо цю границю. Оскільки область σ_i, яка має площу $\Delta\sigma_i$, проектується в область D_i з площею ΔS_i, то $\Delta S_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$, де γ_i — кут між площинами Π_i та Oxy (рис. 10.15), тому $\Delta\sigma_i = \dfrac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i}$.

Але гострий кут γ_i дорівнює куту між віссю Oz і нормаллю $\vec{n}$ до дотичної площини, тобто куту між векторами $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ та $\vec{n} =$

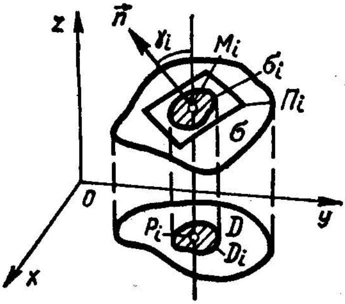


Рис. 10.15

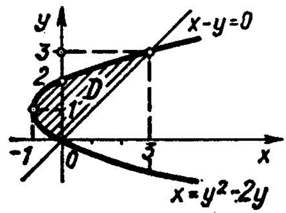


Рис. 10.16

$= \{-f'_x(\xi_i, \eta_i); -f'_y(\xi_i, \eta_i); 1\}$. За формулою (36) (гл. 2)

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i) + 1}}.$$

Отже,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i) + 1}\Delta S_i.$$

Підставляючи значення $\Delta\sigma_i$ в (23), дістаємо

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i) + 1}\Delta S_i.$$

Під знаком границі маємо інтегральну суму, складену для неперервної в області D функції $\sqrt{f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y) + 1}$. Ця функція інтегровна в області D, тому границя у формулі (23) існує і дорівнює подвійному інтегралу (20). ●

Приклади

1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = y^2 - 2y$, $x - y = 0$ (рис. 10.16).
○ Знайдемо ординату точок перетину даних ліній. Із системи

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y; \\ x - y = 0 \end{cases}$$

маємо $y = y^2 - 2y$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$.

За формулою (9) знаходимо

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dy \int_{y^2-2y}^{y} dx = \int_0^3 (y - y^2 + 2y)\, dy = \int_0^3 (3y - y^2)\, dy = 4{,}5. ●$$

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $y = x^2$ та площинами $z = 0$, $z = 2 - y$ (рис. 10.17, *a*).

6 Вища математика, ч. 3

○ Областю D тут є параболічний сегмент (рис. 10.17, *б*), тому $D = \{x^2 \leqslant y \leqslant 2; -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$. За формулою (7) маємо

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dx = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} (2 - y)\, dy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2} dx =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2\right) dx = \frac{32\sqrt{2}}{15}. \bullet$$

3. Знайти частину площі конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (рис. 10.18, *а*).

○ Із рівняння конуса маємо

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Областю D тут є круг $x^2 + y^2 - 2x = 0$ або $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (рис. 10.18, *б*). За формулою (20) маємо

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}S = \sqrt{2}\pi,$$

де $S = \pi$ — площа круга радіуса 1. Дійсно, перейшовши до полярної системи координат (див. п. 1.4, приклад 3), маємо

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi;$$

$$dxdy = \rho d\rho d\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

тоді

$$Q = \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho d\varphi = \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi = 2\sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = \pi\sqrt{2}. \bullet$$

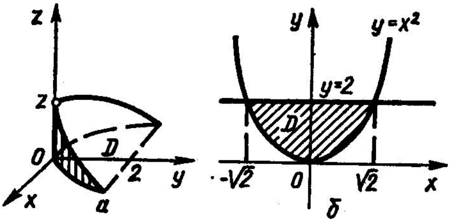


Рис. 10.17

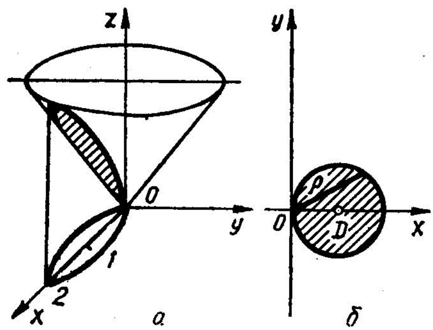


Рис. 10.18

1.6. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.

1^0. *Маса пластини.* Нехай на площині Oxy маємо матеріальну пластину, яка має форму обмеженої замкненої області D, в кожній точці якої густина визначається неперервною функцією $\gamma = \gamma(x, y)$. Як відомо (п. 1.2), маса такої пластини визначається за формулою (8):

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\, dxdy.$$

2^0. *Центр маси пластини. Статичні моменти.* Нехай матеріальна пластина в площині Oxy має форму області D; густина пластини в точці $M(x; y)$ дорівнює $\gamma(x, y)$, де $\gamma(x, y)$ — неперервна функція в області D. Розіб'ємо область D на частини D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, виберемо в кожній з них довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і наближено вважатимемо, що маса m_i частини D_i дорівнює $\gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i$, де ΔS_i — площа області D_i. Коли вважати, що кожна з цих мас зосереджена в точці $P_i(\xi_i; \eta_i) \in D$, то пластину можна розглядати як систему цих матеріальних точок. Тоді координати x_c та y_c центра маси пластини наближено визначатимуться рівностями

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i}; \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i}.$$

Щоб знайти точні значення координат, перейдемо в цих формулах до границі при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(D_i) \to 0$. Тоді інтегральні суми перейдуть у подвійні інтеграли і координати центра маси пластини визначатимуться формулами

$$x_c = \frac{\iint_D x\gamma(x, y)\, dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dxdy}; \quad y_c = \frac{\iint_D y\gamma(x, y)\, dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dxdy}. \qquad (24)$$

Величини

$$M_y = \iint_D x\gamma(x, y)\, dxdy; \quad M_x = \iint_D y\gamma(x, y)\, dxdy \qquad (25)$$

називаються *статичними моментами пластини* відносно осі Oy та Ox.

Враховуючи формули (8), (24) і (25), координати центра мас можна записати у вигляді

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

6*

Якщо пластина однорідна, тобто має сталу густину γ_0, то в формулах (8), (24) і (25) слід покласти $\gamma(x, y) = \gamma_0$.

3°. *Моменти інерції пластини.* Відомо, що момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї і тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Нехай матеріальна пластина має форму області D у площині Oxy, а неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$ визначає густину в кожній точці цієї пластини. Розіб'ємо область D на частини D_i, площі яких дорівнюють ΔS_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, і виберемо в кожній з цих частин довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$. Замінимо пластину системою матеріальних точок з масами $m_i = \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Якщо пластину розглядати як систему цих матеріальних точок, то моменти інерції пластини відносно осі Oy та відносно Ox наближено визначатимуться за формулами

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i; \quad I_x \approx \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Перейшовши до границі в кожній із сум при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(D_i) \to 0$, дістанемо точні формули для обчислення моментів інерції розглядуваної пластини відносно координатних осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x, y)\, dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x, y)\, dxdy. \tag{26}$$

Знайдемо момент інерції I_0 пластини відносно початку координат. Враховуючи, що момент інерції матеріальної точки $(x; y)$ з масою m відносно початку координат дорівнює $m(x^2 + y^2)$, аналогічно дістаємо, що

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y)\, dxdy. \tag{27}$$

Приклади

1. Знайти масу пластини D, обмеженої лініями $y = 0$, $x + y = 2$, $y = x^2$, якщо густина пластини в кожній точці $(x; y)$ дорівнює $\gamma(x, y) = y^2 x$ (рис. 10.19).

○ Оскільки $D = \{\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2 - y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, то за формулою (8) маємо

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy^2 dx = \int_0^1 y^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2 y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) dy = \int_0^1 \left(2y^2 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{y^4}{2}\right) dy = \frac{17}{120}. \ ●$$

2. Знайти центр маси однорідної пластини $(\gamma = 1)$, обмеженої кривою $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ та віссю Ox (рис. 10.20).

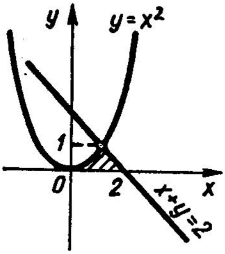


Рис. 10.19

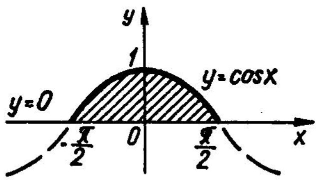


Рис. 10.20

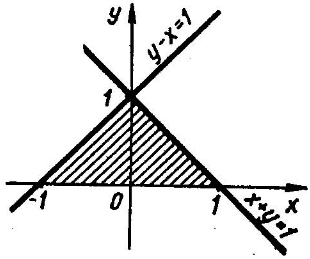


Рис. 10.21

○ Внаслідок симетрії пластини відносно осі Oy маємо $x_c = 0$. Для знаходження y_c скористаємось другою з формул (24). В даному разі $D = \left\{0 \leqslant y \leqslant \cos x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, тому маємо

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)\, dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} ydy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{4};$$

$$m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\pi}{8}.$$

Отже, центр маси даної пластини міститься в точці $\left(0; \frac{\pi}{8}\right)$. ●

3. Знайти момент інерції I_x пластини D, обмеженої прямими $y = 0$, $x + y = 1$, $y - x = 1$, якщо густина в кожній точці пластини дорівнює ординаті цієї точки (рис. 10.21).

○ Оскільки $D = \{y - 1 \leqslant x \leqslant 1 - y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $\gamma(x, y) = y$, то за першою з формул (26) маємо

$$I_x = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} y^3 dy = \int_0^1 (2y^3 - 2y^4)\, dy = 0{,}1. \ ●$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати задачу про об'єм циліндричного тіла.
2. У чому суть задачі про масу пластини?
3. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D?
4. Сформулювати достатню умову існування подвійного інтеграла.
5. Перерахувати властивості подвійного інтеграла.

6. Яка область D називається правильною в напрямі осі Oy? Вивести формулу для обчислення подвійного інтеграла по такій області.

7. Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по області D у випадку, коли ця область правильна в напрямі осі Ox.

8. Сформулювати теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.

9. Чому дорівнює якобіан у полярних координатах?

10. Як обчислюється подвійний інтеграл у полярних координатах за допомогою повторного?

11. Вивести формули для обчислення об'єму циліндричного тіла, площі плоскої фігури та площі поверхні.

12. Вивести формули для обчислення маси, статичних моментів та моментів інерції пластини.

13. Обчислити інтеграли:

$$\text{а)}\ \int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx; \qquad \text{б)}\ \int_{0}^{1} dy \int_{y-1}^{2y} xydxdy.$$

14. Змінити порядок інтегрування в інтегралах:

$$\text{а)}\ \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dx; \qquad \text{б)}\ \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

15. Обчислити подвійні інтеграли, перейшовши до полярних координат:

$$\text{а)}\ \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dy; \qquad \text{б)}\ \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,dx.$$

16. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=0,\ y=x,\ x^2+y^2=2x$.

17. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=3x,\ z=\sqrt{9-x^2-y^2},$ $z=0$.

18. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z=x^2+y^2$, яка вирізається циліндром $x^2+y^2=1$.

19. Знайти координати центра маси верхньої половини однорідного круга x^2+ $+y^2=9$.

20. Обчислити момент інерції пластини, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, відносно: а) осі Oy; б) початку координат.

Відповіді. 13. а) 50.4; б) $\dfrac{11}{24}$. 14. а) $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)\,dx$; б) $\displaystyle\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dx$. 15. а) $\dfrac{\pi}{6}$; б) 2π. 16. $\dfrac{\pi}{4}+$ $+\dfrac{1}{2}$. 17. $6(3\pi-4)$. 18. $\dfrac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$. 19. $x_c=0$; $y_c=\dfrac{4}{\pi}$. 20. а) 6π; б) $\dfrac{39}{2}\pi$.

§ 2. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

У попередньому параграфі ми розглянули поняття подвійного інтеграла від функції двох змінних. Визначимо інтеграл від функції трьох змінних — так званий потрійний інтеграл.

2.1. Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості

Схема побудови потрійного інтеграла така сама, як і звичайного визначеного інтеграла та подвійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в обмеженій замкненій області $G \subset R_3$. Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i, $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i, \tag{28}$$

яка називається *інтегральною сумою для функції* $f(x, y, z)$ по області G. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$ — найбільший з діаметрів областей G_i.

Якщо інтегральна сума (28) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини G_i, ні від вибору в них точок P_i, то ця границя називається *потрійним інтегралом* і позначається одним із таких символів:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV, \quad \text{або} \quad \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz.$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i, \tag{29}$$

де $f(x, y, z)$ — функція, інтегровна в області G; G — *область інтегрування*; x, y і z — *змінні інтегрування*; dV (або $dxdydz$) — *елемент об'єму*.

Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ в точці $(x; y; z) \in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z)\,dxdydz. \tag{30}$$

Формула (30) аналогічна формулі (8) і може розглядатись як *механічний зміст потрійного інтеграла*, коли підінтегральна функція невід'ємна в області G. Якщо всюди в області покласти $f(x, y, z) \equiv 1$, то з формули (29) випливає формула для обчислення об'єму V тіла G:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz. \tag{31}$$

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії подвійного інтеграла, тому в більшості випадків ми обмежимося лише формулюваннями тверджень і короткими поясненнями.

Теорема *(достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, то вона в цій області інтегровна.*

Властивості потрійних інтегралів.

1°. *Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла:*

$$\iiint\limits_G Cf(x, y, z)\,dV = C\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV.$$

2°. *Потрійний інтеграл від суми кількох інтегровних функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:*

$$\iiint\limits_G (f(x, y, z) \pm \varphi(x, y, z))\,dV = \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV + \iiint\limits_G \varphi(x, y, z)\,dV.$$

3°. *Якщо в області інтегрування $f(x, y, z) \geqslant 0$, то*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV \geqslant 0.$$

4°. *Якщо функції $f(x, y, z)$ та $\varphi(x, y, z)$ визначені в одній і тій самій області G і $f(x, y, z) \geqslant \varphi(x, y, z)$, то*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV \geqslant \iiint\limits_G \varphi(x, y, z)\,dV.$$

5°. *(Адитивність потрійного інтеграла.) Якщо область інтегрування G функції $f(x, y, z)$ розбити на частини G_1 і G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_{G_1} f(x, y, z)\,dV + \iiint\limits_{G_2} f(x, y, z)\,dV.$$

6°. *(Оцінка потрійного інтеграла.) Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то*

$$mV \leqslant \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV \leqslant MV,$$

де m і M — відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y, z)$ в області G.

7^0. *(Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то в цій області існує така точка $(x_0; y_0; z_0)$, що*

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV = f(x_0, y_0, z_0)\,V.$$

Величина

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V}\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV$$

називається *середнім значенням функції* $f(x, y, z)$ в області G.

2.2. Обчислення потрійного інтеграла

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо.

Нехай область D обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Позначимо проекцію області G на площину Oxy через D (рис. 10.22) і вважатимемо, що функції $z_1(x, y)$ і $z_2(x, y)$ неперервні в D. Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається правильною у напрямі осі Oz. Припустимо, що кожна пряма, яка проходить через кожну внутрішню точку $(x; y; 0) \in D$ паралельно осі Oz, перетинає межу області G у точках M і N. Точку M назвемо точкою входу в область G, а точку N — точкою виходу з області G, а їхні аплікати позначимо відповідно через $z_{вх}$ і $z_{вих}$. Тоді $z_{вх} = z_1(x, y)$, $z_{вих} = z_2(x, y)$ і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x, y, z)$ має місце формула

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{32}$$

Зміст формули (32) такий. Щоб обчислити потрійний інтеграл, треба спочатку обчислити інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz = I(x, y)$ по змінній z, вважаючи x та y сталими. Нижньою межею цього інтеграла є апліката точки M входу $z_{вх} = z_1(x, y)$, а верхньою — апліката $z_{вих} = z_2(x, y)$ точки виходу N. Внаслідок інтегрування дістанемо функцію $I(x, y)$ від змінних x та y.

Якщо область D, наприклад, обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(a \leqslant b)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ — неперервні функції, тобто

$$G = \{z_1(x, y) \leqslant z \leqslant y_2(x, y),\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\quad a \leqslant x \leqslant b\},$$

то, переходячи від подвійного інтеграла $\iint\limits_D I(x, y)\,dxdy$ до повтор-

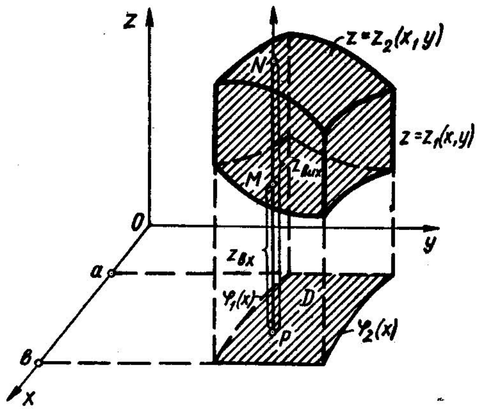


Рис. 10.22

ного (п. 1.3), дістанемо формулу

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dV =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \times$$

$$\times f(x, y, z)\,dz, \qquad (33)$$

яка зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів. Порядок інтегрування може бути й іншим, тобто змінні x, y і z у правій частині формули (33) за певних умов можна міняти місцями.

Якщо, наприклад, область G правильна в напрямі осі Ox:

$$G = \{x_1(y, z) \leqslant x \leqslant x_2(y, z),\ \psi_1(y) \leqslant z \leqslant \psi_2(y),\quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

де $x_1(y, z)$, $x_2(y, z)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ — неперервні функції, то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx.$$

Зокрема, якщо областю інтегрування є паралелепіпед:

$$G = \{a \leqslant x \leqslant b,\quad c \leqslant y \leqslant d,\quad k \leqslant z \leqslant l\},$$

то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x, y, z)\,dz. \qquad (34)$$

У цьому разі інтегрування виконується в будь-якому порядку, оскільки область G правильна у напрямі всіх трьох координатних осей Ox, Oy, Oz.

Приклади

1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x + y + z)\,dxdydz$ по області G обмеженій площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

○ Оскільки область інтегрування G — паралелепіпед: $G = \{0 \leqslant x \leqslant 1,$ $0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, то за формулою (34) маємо

$$\iiint\limits_G (x + y + z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x + y + z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy = \int_0^1 dx \times$$

$$\times \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (x+1)\, dx = \frac{3}{2}. \bullet$$

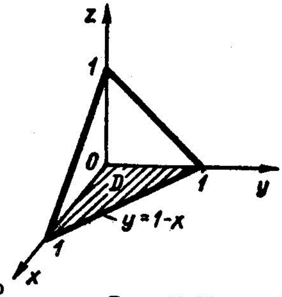


Рис. 10.23

2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G z dxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ (рис. 10.23).

○ Область G проектується на площину Oxy в трикутник $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$.

Оскільки $z_{вх} = 0$, а $z_{вих} = 1 - x - y$, то за формулою (33) маємо

$$\iiint\limits_G z dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, d(1 - x - y) = \frac{1}{6}\int_0^1 (1 - x)^3\, dx =$$

$$= -\frac{1}{24}(1-x)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}. \bullet$$

2.3. Заміна змінної в потрійному інтегралі

Заміну змінної в потрійному інтегралі виконують за таким правилом: якщо обмежена замкнена область G взаємно однозначно відображається на область G^* за допомогою неперервно диференційовних функцій $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, якобіан J в області G^* не дорівнює нулю:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

і $f(x, y, z)$ — неперервна в G, то справедлива формула

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \times$$

$$\times |J|\, dudvdw. \quad (35)$$

На практиці найуживанішими є циліндричні та сферичні координати. При переході від прямокутних координат x, y, z до циліндрич-

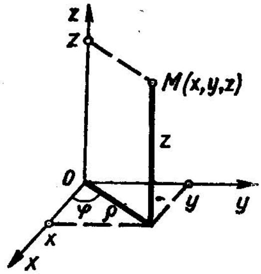


Рис. 10.24

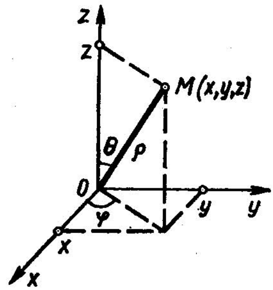


Рис. 10.25

них ρ, φ, z (рис. 10.24), пов'язаних з x, y, z співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z,$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty,$$

якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

З формули (35) дістаємо потрійний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (36)$$

Назва «циліндричні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = \text{const}$ є циліндр, прямолінійні твірні якого паралельні осі Oz.

При переході від прямокутних координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ (рис. 10.25), які пов'язані з x, y, z формулами (гл. 2, п. 2.5)

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi;\ \ y = \rho\sin\theta\sin\varphi;\ \ z = \rho\cos\theta;$$

$$0 \leqslant \rho < +\infty;\ \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi;\ \ 0 \leqslant \theta < \pi,$$

якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

З формули (35) знаходимо потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho \sin\theta \cos\varphi,\ \rho \sin\theta \sin\varphi,\ \rho\cos\theta) \times$$
$$\times\ \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (37)$$

Назва «сферичні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = \text{const}$ є сферою. При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область G^*, як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G, користуючись геометричним змістом нових координат. При цьому рівняння поверхонь $z_1(x, y)$ та $z_2(x, y)$, які обмежують область G, записують в нових координатах.

Зокрема, якщо область G обмежена циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = R^2$ та площинами $z = a$, $z = b$, $a < b$, то всі межі інтегрування в циліндричній системі координат сталі:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_a^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz$$

і не змінюються при зміні порядку інтегрування. Те саме буде у сферичних координатах у випадку, коли G — куля: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, або кульове кільце. Наприклад, якщо G — кульове кільце з внутрішньою сферою $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, то рівняння цієї сфери в сферичних координатах має вигляд

$$(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\theta)^2 = r^2,$$

або

$$(\rho\sin\theta)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (\rho\cos\theta)^2 = r^2,$$

звідки $\rho = r$. Аналогічно $\rho = R$ — рівняння зовнішньої сфери, тому

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_r^R f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2 d\rho.$$

У випадку, коли G — куля ($x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$), в цій формулі слід покласти $r = 0$. Інших яких-небудь загальних рекомендацій, коли варто переходити до тієї чи іншої системи координат, дати неможливо. Це залежить і від області інтегрування, і від підінтегральної функції. Іноді треба написати інтеграл в різних системах координат і лише після цього вирішити, в якій з них обчислення буде найпростішим.

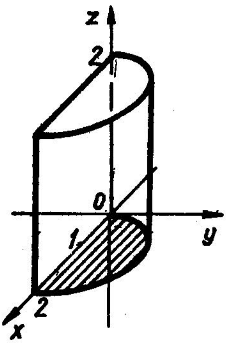


Рис. 10.26

Приклади

1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, якщо область G обмежена площинами $y=0$, $z=0$, $z=2$ і циліндром $x^2+y^2=2x$ (рис. 10.26).

○ Введемо циліндричні координати

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\quad z=z.$$

Оскільки в циліндричній системі координат $x^2+y^2=\rho^2$, а рівняння кола $x^2+y^2=2x$, яке лежить в основі циліндра, має вигляд $\rho=2\cos\varphi$, то за формулою (36) маємо

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{G^*} z\rho^2 d\rho d\varphi dz,$$

де

$$G^*=\left\{0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant z\leqslant 2\right\}.$$

Тому

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\int\limits_0^2 zdz=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{16}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{32}{9}.\ ●$$

2. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\quad \text{де}\quad G — \text{куля } x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

○ Перейдемо до сферичних координат:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta.$$

Оскільки підінтегральна функція $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$ і $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta<\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, то за формулою (37) дістаємо

$$\iiint\limits_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^1\rho^3 d\rho=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Bigg|_0^{\pi}d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}2d\varphi=\pi.\ ●$$

2.4. Деякі застосування потрійного інтеграла

1. *Обчислення об'ємів.* Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G, що має об'єм V, то згідно з формулою (31)

$$V=\iiint\limits_G dxdydz. \tag{38}$$

32.астосування в механіці. Нехай G — обмежена замкнена область простору R_3, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ — неперервна функція в області G, тоді:

а) маса цього тіла

$$m = \iiint\limits_G \gamma \, dV; \tag{39}$$

б) моменти інерції I_x, I_y, I_z тіла відносно координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно дорівнюють

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\,\gamma\, dV; \tag{40}$$

$$I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\,\gamma\, dV; \qquad I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,\gamma\, dV.$$

Моменти інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma dV; \; I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\gamma dV; \tag{41}$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_G x^2 dV.$$

Момент інерції тіла відносно початку координат

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\,\gamma dV; \tag{42}$$

в) статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma dV, \; M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma dV, \; M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma dV; \tag{43}$$

г) координати x_c, y_c, z_c центра маси тіла визначаються за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G x\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV};$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G y\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV}; \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_G z\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV}. \tag{44}$$

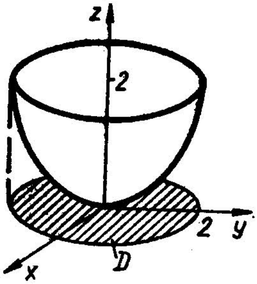


Рис. 10.27

Доведення формули (38), як уже зазначалось, випливає з означення потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_G dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i = \lim_{\lambda\to 0} V = V.$$

Доведення формул (39) — (44) аналогічні доведенням відповідних формул для матеріальної пластини (п. 1.5). Пропонуємо читачеві виконати їх самостійно.

Приклади

1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$ (рис. 10.27).

○ Дане тіло обмежено знизу параболоїдом $2z = x^2 + y^2$, зверху площиною $z = 2$ і проектується в круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$ площини Oxy. Використовуючи циліндричні координати, знаходимо рівняння параболоїда $z = \frac{\rho^2}{2}$. За формулою (38) маємо

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2/2}^{2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = 4\pi. \ ●$$

2. Знайти центр маси однорідної півкулі G, обмеженої поверхнями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

○ Координати $x_c = y_c = 0$, тому що півкуля симетрична відносно осі Oz. За третьою з формул (44) при $\gamma(x, y, z) = 1$ маємо

$$z_c = \frac{\iiint\limits_G z dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz} = \frac{\iiint\limits_G z dxdydz}{\frac{2}{3}\pi R^3} =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{3}{2\pi R^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R.$$

При обчисленні інтеграла в чисельнику ми скористалися сферичними координатами. Значення інтеграла в знаменнику записали не обчислюючи, як об'єм півкулі. Отже, центр маси даної півкулі розміщено в точці $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{8}R\right)$. ●

З а в д а н н я д л я с а м о к о н т р о л ю

1. Дати означення потрійного інтеграла.
2. Сформулювати достатню умову існування потрійного інтеграла.
3. Сформулювати властивості потрійного інтеграла.
4. Як обчислюється потрійний інтеграл в прямокутних координатах?
5. Як обчислюється потрійний інтеграл в циліндричних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в циліндричних координатах сталі.
6. Як обчислюється потрійний інтеграл в сферичних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в сферичних координатах сталі.
7. Вивести формулу для знаходження об'єму тіла за допомогою потрійного інтеграла.

8. Вивести формулу для знаходження маси тіла.
9. Вивести формули для знаходження моментів інерції тіла.
10. Вивести формули для знаходження координат центра маси тіла.
11. Обчислити потрійні інтеграли:

а) $\iiint\limits_G x^2y^2z\,dxdydz$, де область G обмежена площинами $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $z = 5$;

б) $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $z = 2$, $x^2 + y^2 = 2z$;

в) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$, де область G обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.
13. Знайти масу куба, ребро якого дорівнює 1, якщо густина його в точці $(x;\ y;\ z)$ дорівнює $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.
14. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого площинами $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$.
15. Обчислити момент інерції відносно осі Oz однорідної піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Відповіді. 11. а) $242\frac{2}{3}$; б) $\frac{16\pi}{3}$; в) $\frac{1}{10}\pi$. 12. $\frac{1}{6}\pi$. 13. $\frac{3}{2}a^4$. 14. $\left(1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$. 15. 27.

§ 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива. Такі інтеграли називаються криволінійними. Розрізняють два види криволінійних інтегралів: криволінійні інтеграли першого роду і криволінійні інтеграли другого роду.

3.1. Поняття криволінійного інтеграла першого роду (по довжині дуги)

Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB (рис. 10.28) і на цій кривій визначено обмежену функцію $f(x, y)$. (Неперервна крива $x = x(t)$, $y = y(t)$ називається *гладкою* на відрізку $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають на цьому відрізку неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$, які одночасно не дорівнюють нулю. Якщо неперервна крива складається із скінченного числа гладких кривих, її називають *кусково-гладкою*.) Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ виберемо

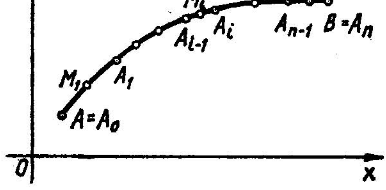


Рис. 10.28

яку-небудь точку M_i $(\xi_i;\ \eta_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta l_i, \tag{45}$$

де Δl_i — довжина дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$. Сума (45) називається *інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по кривій AB*. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$ — найбільша з довжин окремих дуг $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$.

Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральні суми (45) мають скінченну границю, яка не залежить від розбиття кривої AB і вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду (або криволінійним інтегралом по довжині дуги)* від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначають $\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl$.

Таким чином, за означенням

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta l_i. \tag{46}$$

Якщо границя (46) існує, то функція $f(x, y)$ називається *інтегровною на кривій AB*, сама крива AB — *контуром інтегрування*, A — початковою, а B — кінцевою точками інтегрування.

Зведемо криволінійний інтеграл першого роду до визначеного інтеграла. Для цього на кривій AB приймемо за параметр довжину дуги l, яка відраховується від точки A до довільної точки кривої AB. Тоді рівняння кривої AB можна записати у параметричній формі: $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, де L — довжина кривої AB. При цьому функція $f(x, y)$ визначена на кривій AB, перетворюється у складену функцію однієї змінної — параметра l:

$$f(x, y) = f(x(l),\ y(l)), \quad 0 \leqslant l \leqslant L.$$

Позначимо через l_i значення параметра l, яке відповідає точці A_i, а через τ_i — яке відповідає точці M_i, тоді сума (45) матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i),\ y(\tau_i))\,\Delta l_i, \tag{47}$$

де $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$, $l_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant l_i$. Сума (47) є інтегральною сумою для визначеного інтеграла від функції $f(x(l), y(l))$ на відрізку $[0; L]$. Оскільки суми (45) і (47) рівні між собою, то рівні і відповідні їм інтеграли:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_{0}^{L} f(x(l),\ y(l))\,dl. \tag{48}$$

Формула (48) не тільки зводить криволінійний інтеграл до звичайного, але й доводить існування криволінійного інтеграла для функції $f(x, y)$, яка неперервна на кривій AB. Крім того, з формули (48) випливає, що властивості криволінійного інтеграла першого роду аналогічні властивостям визначеного інтеграла (гл. 7), тому ми навіть не будемо їх формулювати. Зауважимо лише, що за означенням криволінійного інтеграла Δl_i — довжина дуги, тому завжди $\Delta l_i > 0$. У визначеному ж інтегралі

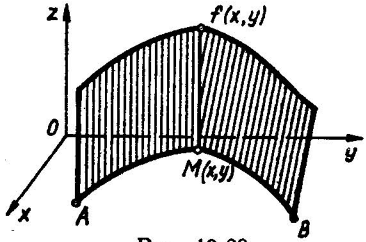


Рис. 10.29

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \tag{49}$$

величина Δx_i може бути як додатною, так і від'ємною. У зв'язку з цим

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \text{але} \quad \int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{BA} f(x, y)\,dl,$$

тобто межі інтегрування в криволінійному інтегралі першого роду завжди треба брати від меншої до більшої.

Розглянемо *фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду.* Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу m з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, то

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\,\Delta l_i = \int_{AB} \gamma(x, y)\,dl,$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

Криволінійний інтеграл першого роду має також і *геометричний зміст.*

Якщо визначений інтеграл (49) при $f(x) \geqslant 0$ визначає площу криволінійної трапеції, то криволінійний інтеграл (46) при $f(x, y) \geqslant 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x, y)$ і паралельні осі Oz, а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy (рис. 10.29). Зокрема, якщо AB — не крива, а відрізок $[a; b]$, $(a < b)$, що лежить на осі Ox, то $f(x, y) = f(x, 0) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$, і формула (46) перетворюється у формулу (49) — циліндрична поверхня «вирівнюється» і стає криволінійною трапецією, тобто криволінійний інтеграл першого роду стає звичайним визначеним інтегралом.

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то площа циліндричної поверхні чисельно дорівнюватиме довжині дуги AB, тому довжину L дуги AB можна знайти за формулою

$$L = \int\limits_{AB} dl.$$

3.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Формула (48), яка зводить криволінійний інтеграл до звичайного, є не зовсім зручною для обчислення, бо не завжди можна легко знайти рівняння кривої AB у вигляді $x = x(l)$, $y = y(l)$, де l — довжина дуги. Спростимо цю формулу.

Нехай крива AB задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, причому значення α відповідає точці A, а значення β — точці B. Вважатимемо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ разом з похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, а функція $f(x, y)$ неперервна вздовж кривої AB. Для довільної точки $M(x(t); y(t))$ довжину дуги l кривої AM можна розглядати як функцію параметра t: $l = l(t)$, тоді

$$l = \int\limits_{0}^{t} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}\, d\tau.$$

Звідси, згідно з правилом диференціювання визначеного інтеграла по верхній межі, маємо

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Виконуючи заміну змінної $l = l(t)$ у правій частині формули (48), маємо

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{0}^{L} f(x(l), y(l))\, dl =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \qquad (50)$$

Зокрема, якщо крива AB в декартових координатах задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, де функція $y(x)$ неперервна разом із своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a; b]$, то формула (50) набирає вигляду

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \qquad (51)$$

Якщо крива AB задається рівнянням $x = x(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ і функції $x(y)$ і $x'(y)$ неперервні на відрізку $[c; d]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{c}^{d} f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)}\, dy. \qquad (52)$$

Досі ми вважали, що криволінійний інтеграл першого роду розглядається для плоскої кривої AB. Знайдені результати легко перенести на випадок просторових кривих.

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна на просторовій кривій AB, яку задано рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ та $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl$ і справджується формула

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt \qquad (53)$$

Приклади

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} (x - y)\, dl$, де AB — відрізок прямої $y = \frac{3}{4} x$ від точки $A(0; 0)$ до точки $B(4; 3)$.

○ Скористаємось формулою (51). Оскільки $y = \frac{3}{4} x$, а $y' = \frac{3}{4}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, то

$$\int\limits_{AB} (x - y)\, dl = \int\limits_{0}^{4} \left(x - \frac{3}{4} x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dx = \frac{5}{16} \int\limits_{0}^{4} x dx = \frac{5}{2}. \; ●$$

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, dl$, де L — дуга кривої $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

○ Оскільки $x'(t) = \cos t - t \sin t$, $y'(t) = \sin t + t \cos t$, $z'(t) = 1$, $dl = \sqrt{t^2 + 2}\, dt$, то за формулою (53)

$$\int\limits_{L} (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, dl = \int\limits_{0}^{2\pi} (2t - \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2}) \sqrt{t^2 + 2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} t \sqrt{t^2 + 2}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} (t^2 + 2)^{\frac{1}{2}}\, d(t^2 + 2) = \frac{2\sqrt{2}}{3} ((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1). \; ●$$

3.3. Застосування криволінійного інтеграла першого роду

1. *Застосування в геометрії.* Нехай у площині Oxy задано кусково-гладку криву AB замкнену чи незамкнену і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x, y)$, тоді:

а) площу P циліндричної поверхні, визначеної функцією $z = f(x, y)$, знаходять за формулою

$$P = \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl; \qquad (54)$$

б) довжину L кривої AB визначають за формулою

$$L = \int_{AB} dl. \tag{55}$$

2. *Застосування в механіці.* Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, тоді:

а) маса кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int_L \gamma(x, y)\, dl; \tag{56}$$

б) координати x_c, y_c центра маси кривої L знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{\int_L x\gamma(x, y)\, dl}{\int_L \gamma(x, y)\, dl} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int_L y\gamma(x, y)\, dl}{\int_L \gamma(x, y)\, dl} = \frac{M_x}{m}, \tag{57}$$

де M_x, M_y — статичні моменти кривої L відносно осей Ox і Oy;

в) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат відповідно дорівнюють

$$I_x = \int_L y^2\gamma(x, y)\, dl; \quad I_y = \int_L x^2\gamma(x, y)\, dl; \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\gamma(x, y)\, dl. \tag{58}$$

У випадку, коли крива однорідна, тобто має сталу густину γ_0, у формулах (56) — (58) слід вважати $\gamma(x, y) = \gamma_0$. Наприклад, треба знайти момент інерції I_x відносно осі Ox однорідної ($\gamma_0 = 1$) дуги кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, яка міститься в першій чверті.

Скориставшись першою з формул (58), матимемо

$$I_x = \int_L y^2 dl = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = 2\pi.$$

Формули (54), (55) випливають з геометричного змісту криволінійного інтеграла першого роду (п. 3.1).

Формули (56) — (58) можна довести тим самим методом, яким були знайдені відповідні формули для матеріальної пластини (п. 1.6).

Формули (55) — (58) можна записати і для випадку, коли підінтегральна функція розглядається на просторовій кривій.

3.4. Поняття криволінійного інтеграла другого роду (по координатах). Фізичний зміст

Криволінійний інтеграл другого роду визначається майже так само, як інтеграл першого роду. Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB (рис. 10.30) і на цій кривій визначено обмежену функцію $P(x, y)$. На відміну від інтегралів першого роду вважатимемо криву напрямною лінією, у якої точки A та B є відповідно початковою та кінцевою точками. Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \tag{59}$$

де Δx_i — проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox.

Відмінність сум (45) і (59) очевидна.

Якщо при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i \to 0$ інтегральні суми (59) мають скінченну границю, яка не залежить ні від розбиття кривої $АБ$, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом від функції $P(x, y)$ по координаті x* вздовж кривої AB і позначають $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$.

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i. \tag{60}$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x, y)$ по координаті y:

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i, \tag{61}$$

де Δy_i — проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A}$ на вісь Oy (рис. 10.30). Суму

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$$

називають *криволінійним інтегралом по координатах* або *криволінійним інтегралом другого роду від функцій P і Q по кривій AB* і позначають символом

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ іноді позначатимемо через P і Q, а криволінійний інтеграл записуватимемо у вигляді $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$.

Для того щоб дати *фізичну інтерпретацію криволінійного інтеграла другого роду*, розглянемо задачу про роботу змінної сили на криво-

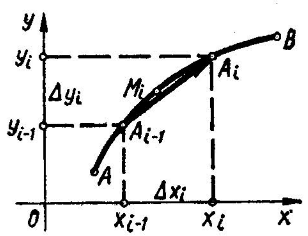


Рис. 10.30

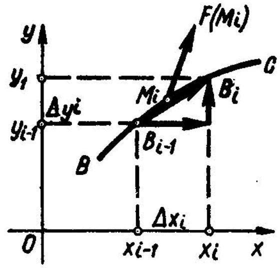


Рис. 10.31

лінійному шляху. Нехай матеріальна точка M (x; y) під дією змінної сили $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ — проекції сили на осі Ox та Oy, рухається на площині Oxy вздовж кривої BC. Треба обчислити роботу A сили $\vec{F}$ при переміщенні точки M з точки B в точку C (рис. 10.31).

Розіб'ємо криву BC точками $B = B_0, B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i, \ldots, B_n = C$ на n частин і на кожній окремій дузі $\smile{B_{i-1}B_i}$ візьмемо довільну точку M_i (ξ_i; η_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. На цю точку діє сила $\vec{F}(M_i) = P(M_i)\vec{i} + Q(M_i)\vec{j}$. Роботу ΔA_i, яку виконує ця сила при переміщенні точки по вектору $\overrightarrow{B_{i-1}B_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}$ можна знайти за допомогою скалярного добутку

$$\Delta A_i = \vec{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{B_{i-1}B_i} = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки по дузі $\smile{B_{i-1}B_i}$ довжиною Δl_i.

Робота сили вздовж усієї ламаної $B_0, B_1, \ldots, B_{i-1}, B_i, \ldots, B_n$ дорівнює

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Цей вираз дає наближене значення шуканої роботи A. Перейшовши до границі при $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \to 0$, знайдемо точне її значення:

$$A = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right) = \int_{BC} Pdx + Qdy. \quad (62$$

Отже, з погляду фізики криволінійний інтеграл другого роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

3.5. Обчислення та застосування криволінійного інтеграла другого роду

Зведемо криволінійний інтеграл другого роду до визначеного інтеграла. Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції $x(t)$ та $y(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ та $y'(t)$, причому точці A кривої відповідає параметр α, а точці B — параметр β. Припустимо, що функція $P(x, y)$ неперервна на кривій AB, тоді за означенням

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i. \tag{63}$$

Але, згідно з формулою Лагранжа,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) =$$
$$= x'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = x'(\tau_i)\, \Delta t_i, \quad \tau_i \in [t_{i-1};\ t_i].$$

Виберемо точку $(\xi_i; \eta_i)$ так, щоб $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$. Тоді інтегральна сума у формулі (63) набере вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))\, x'(\tau_i)\, \Delta t_i.$$

Це інтегральна сума для функції $P(x(t), y(t))\, x'(t)$ на проміжку $[\alpha; \beta]$, тому

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt. \tag{64}$$

Аналогічно доводяться формули

$$\int_{AB} Q(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt; \tag{65}$$

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt. \tag{66}$$

Зокрема, якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a; b]$, то з формули (66) дістанемо

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x)]\, dx. \tag{67}$$

Аналогічно, якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, причому функції $x(y)$ та $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c; d]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{c}^{d} [P(x(y), y)\,x'(y) + Q(x(y), y)]\,dy. \qquad (68)$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду можна поширити й на просторові криві. Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій AB, яку задано рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ і їхні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[\alpha; \beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

і справджується формула

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) +$$
$$+ Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,dt. \qquad (69)$$

Формули (64) — (69) використовуються для обчислення криволінійних інтегралів. З цих формул випливає, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла.

На відміну від криволінійного інтеграла першого роду криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму шляху інтегрування і при зміні цього напряму змінює свій знак:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy.$$

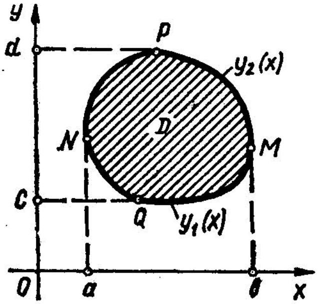


Рис. 10.32

Це пов'язано з тим, що при зміні напряму руху по кривій, змінюються знаки проекцій Δx_i і Δy_i в сумах (60) і (61).

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по замкненому контуру, тобто контуру інтегрування, в якому початкова та кінцева точки збігаються (мова йде про замкнені контури без точок самоперетину).

Для замкненого контура існує лише два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контура) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контура). Іншими словами, контур вважається додатно орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по додатно орієнтованому контуру L позначають так:

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Розглянемо два застосування криволінійного інтеграла другого роду.

1°. *Обчислення площі плоскої фігури.* Нехай на площині (рис. 10.32) задана правильна (п. 1.3) область

$$D = \{y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Межу області D, тобто криву $PNQM$, позначимо через L і вважатимемо додатно орієнтованою. Розглянемо інтеграл $-\oint y\,dx$ і зведемо його до визначених інтегралів:

$$-\oint_L y\,dx = -\left(\int_{MQN} y\,dx - \int_{NPM} y\,dx\right) = \int_{NPM} y\,dx - \int_{MQN} y\,dx =$$

$$= \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx = S,$$

де S — площа області D.

Отже, площу S правильної області D, обмеженої кривою L, знаходять за формулою

$$S = -\oint_L y\,dx. \qquad (70)$$

Аналогічно можна довести, що

$$S = \oint_L x\,dy. \qquad (71)$$

Додаючи формули (70) і (71) почленно, дістаємо ще одну формулу для обчислення площі:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx. \qquad (72)$$

2°. *Обчислення роботи.* Нехай сила $\vec{F} = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$ виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L, причому функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, неперервні на кривій L; тоді, як відомо (п. 3.4),

$$A = \int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (73)$$

Приклади

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L xydx + dy$, де L — замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$ (рис. 10.33).

○ Застосовуючи адитивність криволінійного інтеграла, маємо

$$\oint\limits_L xydx + dy = \int\limits_{OA} xydx + dy + \int\limits_{AB} xydx + dy + \int\limits_{BO} xydx + dy.$$

З рівняння $y = x^2$ лінії OA дістаємо $dy = 2xdx$, тому

$$\int\limits_{OA} xydx + dy = \int\limits_0^1 (x^3dx + 2xdx) = \frac{5}{4};$$

з рівняння $y = 1$ лінії AB дістаємо $dy = 0$, тому $\int\limits_{AB} xydx + dy = \int\limits_1^0 xdx = -\frac{1}{2}$;

з рівняння $x = 0$ лінії BO дістаємо $dx = 0$, тому $\int\limits_{BO} xydx + dy = \int\limits_1^0 dy = -1$;

$\oint\limits_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$. ●

2. Знайти площу області, обмеженої еліпсом $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

○ За формулою (72)

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\cdot dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab. \bullet$$

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (y + x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ із точки O (0; 0) в точку B (1; 1).

○ За формулою (73)

$$A = \int\limits_{OB} yxdx + (y + x)\, dy = \int\limits_0^1 (x^2dx + (x + x)\, dx) = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x)\, dx = \frac{4}{3}. \bullet$$

4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy$ від точки A (0; 0) до точки B (1; 1) по лінії: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 10.34).

○ Маємо:

а) $y = x$, $dy = dx$; $\int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x^2)\, dx = 1$;

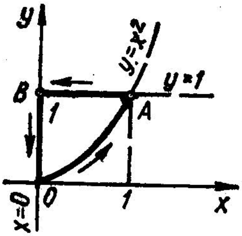


Рис. 10.33

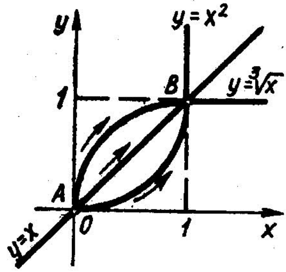


Рис. 10.34

б) $y = x^2, \ dy = 2xdx;$

$$\int_{AB} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 (x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x)\, dx = 1;$$

в) $y = \sqrt[3]{x}, \ dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx;$

$$\int_{AB} y^2dx + 2xydy = \int_0^1 \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}}\right) dx = 1. \ \bullet$$

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{AB} ydx + 2dy$ від точки A (0; 0) до точки B (1; 1) по кривих а), б), в), які задані в прикладі 4:

○ а) $\int_{AB} ydx + 2dy = \int_0^1 (x + 2)\, dx = \frac{5}{2};$

б) $\int_{AB} ydx + 2dy = \int_0^1 (x^2 + 2 \cdot 2x)\, dx = \frac{7}{3};$

в) $\int_{AB} ydx + 2dy = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{11}{4}. \ \bullet$

Зазначимо, що в прикладі 4 інтегрування по трьох різних кривих, що сполучають одні й ті самі точки, дає один і той самий результат. У прикладі 5 інтегрування по таких самих кривих дає різні результати. Причина цього з'ясована в п. 3.8.

3.6. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

Позначимо через α та β кути, які утворює з осями координат напрямна дотична до кривої AB у точці M $(x;\ y)$ (рис. 10.35). За додатний напрям дотичної беремо той, який відповідає напряму руху точки по кривій від A до B. Враховуючи геометричний зміст диференціала функції (гл. 6, п. 3.1) та диференціала дуги (гл. 5, п. 7.3), маємо

$$dx = \cos\alpha dl, \ dy = \cos\beta dl. \tag{74}$$

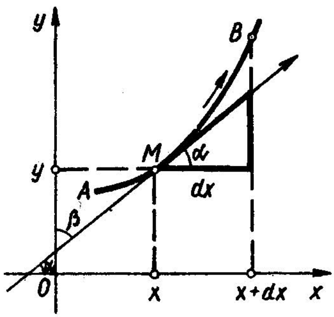


Рис. 10.35

Замінюючи в криволінійних інтегралах другого роду dx та dy їхніми значеннями (74), перетворимо ці інтеграли в криволінійні інтеграли першого роду:

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_{AB} P(x, y) \cos\alpha dl;$$

$$\int_{AB} Q(x, y)\, dx = \int_{AB} Q(x, y) \cos\beta dl;$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} P\cos\alpha dl + Q\cos\beta dl. \qquad (75)$$

Формули (75) виражають криволінійні інтеграли другого роду через криволінійні інтеграли першого роду і встановлюють зв'язок між ними. При зміні напряму руху точки по кривій формули (75) не змінюються, оскільки при цьому змінюють знак dx, dy, $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

3.7. Формула Гріна

Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області. Вона широко застосовується у математичному аналізі.

Доведемо цю формулу для правильної області, контур якої обмежений гладкими чи кусково-гладкими кривими.

Теорема. *Нехай D — деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L, і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області. Тоді справджується формула Гріна*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy. \qquad (76)$$

○ Нехай область $D = \{y_1(x) \leqslant y \leqslant y_1(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ (рис. 10.32) обмежена додатно орієнтовним контуром L — межею $MPNQM$. Покажемо, що

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L Pdx. \qquad (77)$$

Для цього зведемо подвійний інтеграл до повторного, виконаємо інтегрування по змінній y і до знайдених визначених інтегралів застосуємо формулу (67):

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dydx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int_a^b P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$=\int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]\, dx = \int_a^b P(x, y_2(x))\, dx -$$

$$-\int_a^b P(x, y_1(x))\, dx = \int_{NPM} P(x, y)\, dx - \int_{NQM} P(x, y)\, dx =$$

$$= -\int_{MPN} P(x, y)\, dx - \int_{NQM} P(x, y)\, dx = -\oint_L P dx.$$

Аналогічно, вважаючи, що область D правильна в напрямі осі Ox: $D = \{x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$, можна впевнитися, що

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \oint_L Q dy. \tag{79}$$

Якщо від рівності (79) віднімемо рівність (78), то дістанемо формулу (76). ●

Зауваження 1. Ми вважали, що область D правильна. Формула Гріна буде справедливою і для довільної області, яку можна розбити на скінченне число правильних областей. Нехай, наприклад, область D (рис. 10.36) складається з двох правильних областей: D_1 і D_2. Запишемо формулу (76) для кожної з цих областей і складемо почленно знайдені результати. Зліва матимемо подвійний інтеграл по всій області D, а справа — криволінійний інтеграл по межі цієї області, оскільки криволінійний інтеграл по допоміжній (середній) кривій береться двічі в протилежних напрямах і при додаванні взаємно знищується.

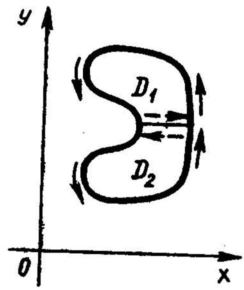


Рис. 10.36

Зауваження 2. З формули Гріна легко дістати формули для обчислення площі плоскої фігури: якщо у формулу (76) підставити $P = -y$, $Q = 0$, то дістанемо формулу (70); якщо $P = 0$, $Q = x$ — формулу (71).

Приклад

Обчислити криволінійний інтеграл $I = \oint_L (x - 2y)\, dx + (x + y)\, dy$, де L — коло: $x^2 + y^2 = R^2$,

а) безпосередньо; б) за формулою Гріна.

○ а) Скористаємось параметричними рівняннями кола:

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\quad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

Тоді $dx = -R\sin t dt$, $dy = R\cos t dt$, тому

$$I = \int_0^{2\pi} [(R\cos t - 2R\sin t)(-R\sin t) + (R\cos t + R\sin t)R\cos t]\, dt =$$

$$= R^2\int_0^{2\pi} (1+\sin^2 t)\, dt = R^2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right) dt = 3\pi R^2.$$

б) Такий самий результат дістаємо за формулою Гріна:

$$P = x - 2y,\ Q = x + y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1;$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 3\iint_D dxdy = 3\pi R^2. \bullet$$

3.8. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування

Як уже зазначалось (п. 3.5, приклади 4 і 5), значення криволінійного інтеграла може залежати від того, якою саме кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування, а може і не залежати. Якщо значення криволінійного інтеграла залишається однаковим по всіх можливих кривих, які сполучають кінцеві точки кривої інтегрування, то кажуть, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування.

З'ясуємо умови, за яких існує така незалежність. Нагадаємо, що однозв'язною називають область, межа якої складається з однієї замкненої без точок самоперетину неперервної кусково-гладкої кривої. На рис. 10.37 показано: а — однозв'язну область; б — двозв'язну область; в — тризв'язну область.

Теорема 1. *Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій замкненій однозв'язній області D. Тоді наступні чотири умови еквівалентні тобто виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання останніх трьох:*

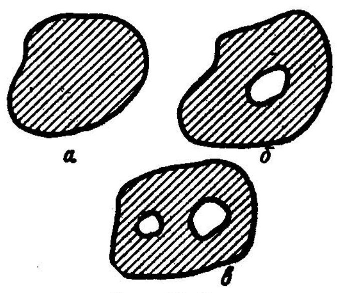


Рис. 10.37

1) *для довільної замкненої кусково-гладкої кривої, що належить області D,*

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0;$$

2) *для довільних двох точок M та N області D значення інтеграла*

$$\int_{MN} Pdx + Qdy$$

не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D;

3) *вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D. Іншими словами, існує така функція $F(x, y)$, визначена в області D, що*

$$dF = Pdx + Qdy;$$

4) *в усіх точках області D виконується рівність*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{80}$$

○ Доведемо теорему по схемі $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$, тобто покажемо, що з першої умови випливає друга, з другої — третя, з третьої — четверта, а з четвертої — знову перша. Цим еквівалентність всіх умов буде доведена.

$1 \Rightarrow 2$. Нехай MQN і MPN — дві довільні криві, які належать області D, сполучають точки M і N (рис. 10.38) і утворюють в сумі замкнену криву $L = MPNQM$. Згідно з першою умовою,

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{MPN} Pdx + Qdy + \int_{NQM} Pdx + Qdy = 0,$$

тому

$$\int_{MPN} Pdx + Qdy = -\int_{NQM} Pdx + Qdy,$$

або

$$\int_{MPN} Pdx + Qdy = \int_{MQN} Pdx + Qdy,$$

тобто друга умова виконується.

$2 \Rightarrow 3$. Нехай інтеграл $\int\limits_{MN} Pdx + Qdy$ не залежить від форми кривої, яка сполучає точки M та N, а залежить лише від точок M і N. Якщо точку M зафіксувати: $M = M(x_0; y_0)$, то цей інтеграл буде деякою функцією $F(x, y)$ координат x та y точки $N(x, y)$:

$$F(x, y) = \int_{MN} Pdx + Qdy. \tag{81}$$

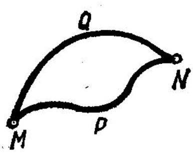


Рис. 10.38

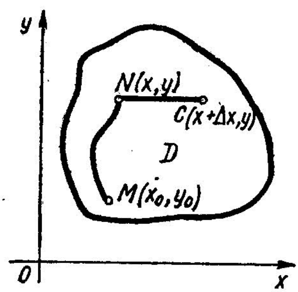


Рис. 10.39

Покажемо, що повний диференціал функції (81) збігається з підінтегральним виразом:

$$dF = Pdx + Qdy. \tag{82}$$

Для цього достатньо показати, що в кожній точці N області D існують частинні похідні, причому

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \tag{83}$$

Оскільки функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ за умовою неперервні в D, то з (83) випливатиме диференційовність функції $F(x, y)$ і рівність (82).

Доведемо, наприклад, що $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$. Приріст $\Delta_x F$ дорівнює (рис. 10.39)

$$\Delta_x F = F(x + \Delta x, y) - F(x, y) =$$

$$= \int\limits_{MC} Pdx + Qdy - \int\limits_{MN} Pdx + Qdy = \int\limits_{NC} Pdx + Qdy.$$

За другою умовою інтеграл не залежить від форми кривої, тому шлях від N до C можна вважати прямолінійним; тоді

$$\Delta_x F = \int\limits_{NC} Pdx + Qdy = \int\limits_{NC} Pdx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} Pdx.$$

Застосовуючи до останнього інтеграла теорему про середнє (гл. 7, п. 2.3), дістанемо

$$\Delta_x F = P(x + \theta\Delta x, y)\,\Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

звідки

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x, y),$$

оскільки за умовою функція $P(x, y)$ неперервна. Аналогічно доводимо, що $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. Отже, умова 3 виконується.

3 $\Rightarrow$ *4*. Нехай існує функція $F(x, y)$, $(x; y) \in D$, така, що $dF = Pdx + Qdy$, тоді $F'_x = P$, $F'_y = Q$, і за теоремою про змішані похідні $P'_y = F''_{xy} = F''_{yx} = Q'_x$, тобто дістали рівність (80).

4 $\Rightarrow$ *1*. Нехай виконується четверта умова і L — довільна замкнена кусково-гладка крива, яка належить області D і обмежує деяку область D^*. Застосовуючи до області D^* формулу Гріна (це ми можемо зробити, бо область D — однозв'язна) і враховуючи четверту умову, дістанемо

$$\iint\limits_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0. \quad \bullet$$

З а у в а ж е н н я 1. З еквівалентності умов 1—4 доведеної теореми випливає, що умови 3 і 4 є необхідними і достатніми умовами, за яких криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування. Проте для застосувань найбільш зручною, необхідною і достатньою умовою є рівність (80).

З а у в а ж е н н я 2. Аналогічна теорема справедлива для криволінійних інтегралів другого роду вздовж просторових кривих. Для її формулювання введемо поняття поверхнево-однозв'язної області.

Тривимірна область G називається поверхнево-однозв'язною, якщо на будь-який кусково-гладкий замкнений контур, який належить області G і не має точок самоперетину, можна «натягнути плівку», яка повністю належить області G. Поверхнево-однозв'язними областями є куля, еліпсоїд, многогранник і т. д., неоднозв'язною — тор («бублик»).

Теорема 2. *Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$; $R(x, y, z)$, неперервні разом зі своїми похідними першого порядку в поверхнево однозв'язній області. Тоді еквівалентні такі твердження:*

1) *для довільної замкненої кусково-гладкої кривої L, що належить області G,*

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

2) *криволінійний інтеграл*

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

не залежить від форми кривої інтегрування, яка сполучає точки A та B і лежить в області G;

3) *вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$, визначеної в області G;*

4) *в усіх точках області G виконуються рівності*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{84}$$

Приклади

1. Пояснити результати інтегрувань у прикладах 4 і 5 (п. 3.5).

○ У прикладі 4 (п. 3.5) значення криволінійного інтеграла $\int_{AB} y^2dx + 2xydy$ не залежить від форми шляху інтегрування, бо виконується рівність (80); дійсно:

$$P = y^2; \quad Q = 2xy; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y,$$

тому результати інтегрувань а), б), в) були однакові.

У прикладі 5 (п. 3.5) рівність (80) не виконується, тому значення інтеграла залежить від форми контура інтегрування. ●

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{AB} (x^2 - y^2)\, dx - 2xydy$ по довільній кривій, яка сполучає точки A (0; 0) та B (1; 1).

○ Перевіримо виконання рівності (80):

$$P = x^2 - y^2; \quad Q = -2xy; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y.$$

Отже, значення інтеграла не залежатиме від того, якою кривою сполучено точки A (0, 0) та B (1, 1).

Обчислимо інтеграл по прямій $y = x$, яка сполучає ці точки; тоді

$$\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)\, dx - 2xydy = -2\int\limits_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}. \bullet$$

3.9. Інтегрування повних диференціалів. Первісна функція

Нехай в деякій однозв'язній області D функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні, причому $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Зафіксуємо точку $M_0(x_0, y_0)$ і розглянемо функцію

$$F(x, y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy. \tag{85}$$

Тоді, згідно з п. 3.8, повний диференціал цієї функції

$$dF = Pdx + Qdy. \tag{86}$$

Проте, як і для функцій однієї змінної, існує нескінченна кількість функцій двох змінних, для яких вираз (86) є повним диференціалом; всі такі функції визначаються формулою $u(x, y) + C$, де $u(x, y)$ — яка-небудь з них, а $C = \text{const}$. Кожну з цих функцій називають *первісною* для повного диференціала (86). Оскільки функція (85) — первісна, то

$$\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy = u(x, y) + C. \tag{87}$$

Поклавши $x = x_0$, $y = y_0$, дістанемо $C = u(x_0; y_0)$, тому

$$\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

Зокрема, при $x = x_1$, $y = y_1$ маємо

$$\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} Pdx + Qdy = u(x_1, y_1) - u(x_0; y_0). \tag{88}$$

Формулу (88) називають *формулою Ньютона — Лейбніца для криволінійного інтеграла від повного диференціала.*

Розглянемо спосіб знаходження первісної. Оскільки криволінійний інтеграл (87) не залежить від форми шляху інтегрування, то для знаходження первісної $u(x, y)$ досить було б обчислити цей інтеграл по довільній лінії, яка сполучає точки M_0 та M. Проте виявляється, що найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, яка сполучає точки M_0 і M так, що сторони ламаної паралельні осям координат.

Обчислимо, наприклад, криволінійний інтеграл (87) від точки M_0 до точки M по ламаній M_0NM (рис. 10.40). На відрізку M_0N $y = y_0$, $dy = 0$, а на відрізку NM $x = \text{const}$, $dx = 0$, тому з формули (87) маємо

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C, \qquad (89)$$

де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні $y = y_0$, а другий — при сталому значенні x.

Аналогічну формулу дістаємо при інтегруванні по ламаній M_0PM (рис. 10.40):

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C. \qquad (90)$$

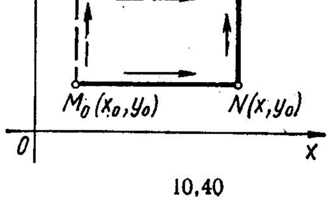
Формули (89) і (90) дають змогу знайти первісну. Початкову точку $(x_0; y_0)$ в цих формулах треба вибирати так, щоб підінтегральні вирази якомога спрощувались.

Зауваження 1. Якщо за формулою (89) або (90) знайти первісну $u(x, y)$, то за формулою Ньютона — Лейбніца (88) можна обчислити інтеграл від повного диференціала. Проте на практиці простіше виконати інтегрування по ламаній лінії, яка сполучає точки $(x_0; y_0)$ і $(x_1; y_1)$ так, що сторони ламаної паралельні осям координат.

Зауваження 2. Якщо для диференціального рівняння

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

виконується рівність (80), то таке рівняння називається *диференціальним рівнянням* у повних диференціалах. Загальний інтеграл цього рівняння $u(x, y) = C$ можна знайти за формулою (89) (гл. 8, п. 1.6).



10.40

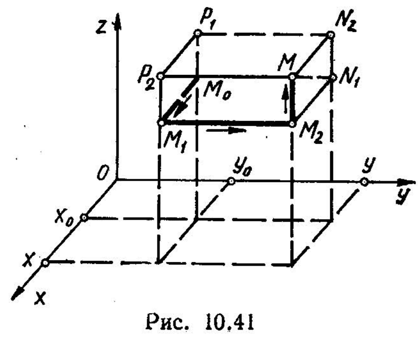


Рис. 10.41

З а у в а ж е н н я 3. Формула для знаходження функції трьох змінних по її повному диференціалу $du = Pdx + Qdy + Rdz$ має вигляд

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, y_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz. \quad (91)$$

Вона виводиться аналогічно формулі (89) при обчисленні криволінійного інтеграла $\int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz$ по ламаній $M_0M_1M_2M$ (рис. 10.41). Ще дві подібні формули можна дістати при інтегруванні по ламаних $M_0N_1N_2M$ та $M_0P_1P_2M$.

Приклади

1. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{(0;0)}^{(2;1)} (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy.$$

○ Даний інтеграл не залежить від шляху інтегрування тому, що справджується рівність (80):

$$P = x^2 + 2xy - y^2, \quad Q = x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y,$$

тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на всій площині Oxy. Виконаємо інтегрування по ламаній OAB (рис. 10.42). На відрізку OA : $y = 0$, $dy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; на відрізку AB : $x = 2$, $dx = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отже,

$$I = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (4 - 4y + y^2)\,dy = 5. \quad \bullet$$

2. Впевнитись, що вираз

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy$$

є повним диференціалом деякої функції і знайти цю функцію.

○ У даному разі функції

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$$

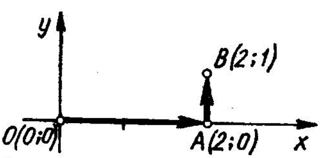


Рис. 10.42

неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ на всій площині Oxy, крім точки $O(0;\ 0)$. Оскільки рівність (80) виконується, то даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,\ y)$. Для знаходження функції

$u(x, y)$ скористаємося формулою (89), де $(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка, наприклад (1; 1) (не можна брати $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, бо в точці (0; 0) функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ не визначені):

$$u(x, y) = \int_1^x P(x, 1)\,dx + \int_1^y Q(x, y) + C =$$

$$= \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy + C =$$

$$= (\ln|x| + x)\Big|_1^x + \left(2\ln|y| + \frac{x}{y}\right)\Big|_1^y + C =$$

$$= \ln|x| + 2\ln|y| + \frac{x}{y} + C_1,$$

де $C_1 = C - 1$ — довільна стала. ●

Завдання для самоконтролю

1. Що називається криволінійним інтегралом першого роду? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?

2. Як обчислюється криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння контура інтегрування задані в параметричній формі? Довести відповідну формулу.

3. Як обчислюється криволінійний інтеграл першого роду, коли рівняння лінії інтегрування задано у вигляді $y = y(x)$ або $x = x(y)$?

4. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити площу циліндричної поверхні та знайти довжину дуги?

5. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду знайти центр маси та моменти інерції матеріальної кривої відносно осей координат?

6. Що називається криволінійним інтегралом другого роду? У чому полягає його фізичний зміст?

7. Як обчислюється криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла? Довести відповідні формули.

8. Як за допомогою криволінійного інтеграла другого роду обчислити площу плоскої фігури?

9. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?

10. У чому полягає зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду?

11. Написати і довести формулу Гріна.

12. Сформулювати і довести теорему про незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.

13. Записати формулу Ньютона — Лейбніца для криволінійного інтеграла від повного диференціала.

14. Як обчислити криволінійний інтеграл від повного диференціала?

15. Як знайти функцію $u(x, y)$ по її повному диференціалу?

16. Знайти координати центра маси однорідної ($\gamma_0 = 1$) дуги циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

17. Знайти площу, обмежену астроїдою

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

18. Яку роботу виконує сила $\vec{F} = yx\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки по відрізку AB прямої, де $A(0; 1; 2)$, $B(1; 2; 3)$?

19. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (-x^2y)\,dx + xy^2dy$ (де L — коло $x^2 + y^2 = R^2$): а) безпосередньо; б) за допомогою формули Гріна.

20. Обчислити $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

21. Довести, що вираз $(3x^2 - 2xy + y^2)\,dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції і знайти цю функцію.

Відповіді. 16. $\left(\pi;\ \frac{4}{3}a\right)$. 17. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 18. 6. 19. $\frac{1}{2}\pi R^4$. 20. $\frac{3}{2}$. 21. $x^3 - y^3 + xy^2 - x^2y + C$.

§ 4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

При розв'язуванні різних задач часто доводиться розглядати функції, визначені на деякій поверхні. Такими функціями є, наприклад, густина розподілу електричних зарядів на поверхні провідника, поверхнева густина маси, розподіленої на поверхні, швидкість рідини, що протікає через задану поверхню, освітленість поверхні тощо.

У цьому параграфі ми розглянемо інтеграли від функцій, заданих на поверхні — це так звані *поверхневі інтеграли.*

4.1. Поверхневі інтеграли першого роду

Поверхневі інтеграли першого роду є узагальненням подвійних інтегралів.

Нехай в точках деякої кусково-гладкої поверхні σ визначена обмежена функція $f(M) = f(x, y, z)$. (Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня, яка складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь, називається *кусково-гладкою.*) Розіб'ємо поверхню σ на n довільних частин σ_i без спільних внутрішніх точок (рис. 10.43); нехай $\Delta\sigma_i$ — площа, а $\operatorname{diam}(\sigma_i)$ — діаметр частини поверхні σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині σ_i виберемо довільну точку $M_i(\xi_i;\ \eta_i;\ \zeta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i;\ \zeta_i)\,\Delta\sigma_i. \tag{92}$$

Цю суму називають *інтегральною сумою для функції* $f(x, y, z)$ по поверхні σ.

Якщо при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{diam}(\sigma_i) \to 0$ інтегральні суми (92) мають скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок M_i, цю границю називають поверхневим інтегралом першого роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ і позначають $\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma$.

Таким чином, за означенням

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i\, \zeta_i)\,\Delta\sigma_i. \qquad (93)$$

У цьому разі функція $f(x, y, z)$ називається *інтегровною по поверхні* σ, а поверхня σ — *областю інтегрування.*

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ, то вона інтегровна по σ.

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай гладка поверхня σ, задана рівнянням $z = z(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D. Припустимо, що функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ, а функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D.

Внаслідок розбиття поверхні σ на частини σ_i область D розіб'ється на частини S_i, які є відповідними проекціями частин σ_i на площину Oxy (рис. 10.44). Якщо ΔS_i — площа області S_i, $\Delta\sigma_i$ — площа поверхні σ_i, то (п. 1.5)

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta S_i,$$

тому інтегральну суму (92) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \times$$

$$\times \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta S_i, \qquad (94)$$

Права частина цієї рівності є інтегральною сумою для функції

$$f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}, \quad (x;\ y) \in D,$$

тому з рівностей (93) і (94) випливає, що

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\,d\sigma = \iint_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy. \qquad (95)$$

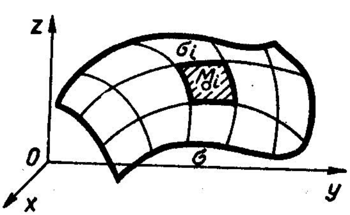


Рис. 10.43

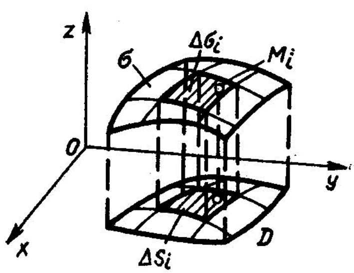


Рис. 10.44

Формула (95) виражає поверхневий інтеграл першого роду через подвійний інтеграл по проекції поверхні σ на площину Oxy.

Аналогічно можна дістати формули, що виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли по її проекціях на площини Oxz та Oyz. Якщо поверхня σ задається рівнянням $y = y(x, z)$ або $x = x(y, z)$, то

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\,d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,dxdz,$$

або

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\,d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz,$$

де D_{xz} та D_{yz} — проекції поверхні σ на координатні площини Oxz та Oyz відповідно.

Якщо у формулі (93) покласти $f(x, y, z) = 1$ на поверхні σ, то дістанемо

$$P = \iint_\sigma d\sigma, \tag{96}$$

де P — площа поверхні σ, тобто за допомогою поверхневого інтеграла першого роду можна обчислювати площі поверхонь.

Переходячи у формулі (96) до подвійного інтеграла, дістаємо відому формулу (20) (п. 1.5).

Крім того, поверхневі інтеграли першого роду застосовують при обчисленні маси, координат центра маси, моменту інерції матеріальної поверхні з відомою поверхневою густиною розподілу маси. Виведення відповідних формул по суті не відрізняється від виводу аналогічних формул для матеріальної пластинки (п. 1.6).

Якщо на кусково-гладкій поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то:

а) маса матеріальної поверхні

$$m = \iint_\sigma \gamma(x, y, z)\,d\sigma;$$

б) координати центра маси поверхні:

$$x_c = \frac{1}{m} M_{yz} = \frac{1}{m}\iint_\sigma x\gamma d\sigma; \quad y_c = \frac{1}{m} M_{xz} = \frac{1}{m}\iint_\sigma y\gamma d\sigma;$$

$$z_c = \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{1}{m}\iint_\sigma z\gamma d\sigma,$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} — статичні моменти поверхні σ відносно площин Oyz, Oxz, Oxy;

в) моменти інерції поверхні відносно осей координат і початку координат:

$$I_x = \iint_\sigma (y^2 + z^2)\,\gamma d\sigma; \quad I_y = \iint_\sigma (x^2 + z^2)\,\gamma d\sigma;$$

$$I_z = \iint_\sigma (x^2 + y^2)\,\gamma d\sigma; \quad I_0 = \iint_\sigma (x^2 + y^2 + z^2)\,\gamma d\sigma.$$

Приклад

Знайти момент інерції відносно осі Oz частини однорідної ($\gamma = 1$) поверхні $z = x^2 + y^2$ (рис. 10.27), яка відтинається площиною $z = 1$.

○ Знаходимо

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = 2y; \quad \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

Момент інерції

$$I_z = \iint_\sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Проекцією D поверхні σ на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Переходячи до полярних координат, маємо

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{8}\left(\frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{15}\right).$$

Останній інтеграл знайдено заміною змінної: $1 + 4\rho^2 = t^2$. ●

4.2. Поверхневі інтеграли другого роду

Введемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M, проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ певного напряму і розглянемо на поверхні σ довільний замкнений контур, який виходить з точки M і повертається в точку M, не перетинаючи при цьому межі поверхні σ. Переміщатимемо точку M по замкненому контуру разом з вектором $\vec{n}$ так, щоб вектор $\vec{n}$ весь час залишався нормальним до σ. При обході заданого контура ми можемо повернутися в точку M з тим самим або з протилежним напрямом нормалі.

Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контура, розміщеного на поверхні σ, який не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню називають *двосторонньою*.

Якщо при обході деякого контура напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають *односторонньою*.

Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, довільна замкнена поверхня без самоперетинів, довільна поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ — функції, неперервні в деякій області D площини Oxy.

8*

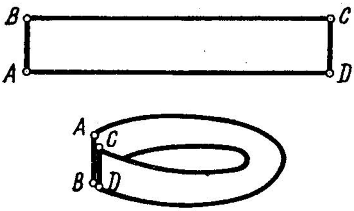


Рис. 10.45

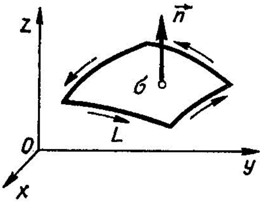


Рис. 10.46

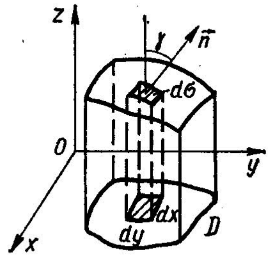


Рис. 10.47

Прикладом односторонньої поверхні є так званий *лист Мебіуса* (рис. 10.45). Модель цієї поверхні можна дістати, якщо прямокутну полоску паперу $ABCD$, перекрутивши один раз, склеїти так, щоб точка A збігалась з C, а точка B — з D.

Двосторонню поверхню називають *орієнтовною*, а вибір певної її сторони *орієнтацією поверхні*. Напрямивши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону поверхні, а напрямивши нормаль зовні поверхні — зовнішню її сторону. Надалі розглядатимемо двосторонні поверхні. Односторонні поверхні неорієнтовні.

Нехай σ — орієнтовна (сторона уже обрана) поверхня, обмежена контуром L, який не має точок самоперетину. Вважатимемо за *додатний* той напрям обходу контура L, при якому спостерігач, розміщений так, що напрям нормалі збігається з напрямом від ніг до голови при русі, залишає поверхню зліва від себе (рис. 10.46). Протилежний напрям обходу називається *від'ємним*. Якщо змінити орієнтацію поверхні на протилежну, то додатний і від'ємний напрями обходу контура L поміняються місцями.

З'ясуємо тепер поняття поверхневого інтеграла другого роду.

Нехай σ — гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $R(x, y, z)$ — обмежена функція, визначена в точках поверхні σ. Зорієнтуємо поверхню σ. Розіб'ємо її довільно на n частин. Позначимо через D_i проекцію i-ї частини поверхні σ_i на площину Oxy, а через ΔS_i — площу D_i, взяту із знаком плюс, якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ, і із знаком мінус, якщо обрана внутрішня сторона поверхні σ. Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta S_i. \tag{97}$$

Вираз (97) називається *інтегральною сумою*. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i)$ — максимальний діаметр поверхонь σ_i.

Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральні суми (97) мають скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *поверхневим інтегралом другого роду* і позначають так: $\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy$. Отже, за означенням

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta S_i. \quad (98)$$

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при зміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак ΔS_i.

Поверхню σ можна також проектувати на координатні площини Oxz та Oyz. Тоді матимемо ще два поверхневі інтеграли $\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z) \times$ $\times\, dxdz$; $\iint\limits_{\sigma} Q(x, y)\,dydz$, де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ — функції, визначені в точках поверхні σ.

Оскільки $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, $dxdz = \cos\beta d\sigma$, $dydz = \cos\alpha d\sigma$ (рис. 10.47), де $d\sigma$ — елемент площі поверхні σ, α, β, γ — кути між нормаллю до поверхні σ та осями Ox, Oy, Oz відповідно, то справедливі такі формули:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz = \iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\cos\alpha d\sigma;$$

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\,dxdz = \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\cos\beta d\sigma;$$

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\cos\gamma d\sigma.$$

На практиці найпоширенішими є поверхневі інтеграли, які об'єднують усі названі, тобто

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma. \quad (99)$$

Якщо, наприклад, вектор $F = Pi + Qj + Rk$ є швидкість рідини, то кількість Π рідини, яка протікає через поверхню σ за одиницю часу, називається *потоком вектора* F через поверхню σ і знаходиться за формулою [24]:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma.$$

В цьому полягає фізичний зміст поверхневого інтеграла другого роду. Зрозуміло, коли вектор $\vec{F}$ має іншу природу, поверхневий інтеграл має інший фізичний зміст.

Формула (99) виражає загальний поверхневий інтеграл другого роду через поверхневий інтеграл першого роду.

Поверхневі інтеграли другого роду обчислюються за допомогою подвійних інтегралів.

Нехай функція $R(x, y, z)$ неперервна в усіх точках гладкої поверхні σ, яка задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x; y)$ D_{xy}, де область D_{xy} — проекція поверхні σ на площину Oxy. Виберемо верхню сторону поверхні σ, де нормаль до поверхні утворює з віссю Oz гострий кут, тоді $\Delta S_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $z_i = z(\xi_i, \eta_i)$, то суму (91) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i. \qquad (100)$$

У правій частині рівності (100) міститься інтегральна сума для функції $R(x, y, z(x, y))$. Ця функція неперервна в області D_{xy}, тому інтегровна в ній.

Перейшовши в рівності (100) до границі при $\lambda \to 0$, дістанемо формулу

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)\,dxdy,$$

яка виражає поверхневий інтеграл другого роду по змінних x і y через подвійний. Якщо вибрати нижню сторону поверхні (нормаль до поверхні утворює з віссю Oz тупий кут), то одержаний подвійний інтеграл беруть із знаком «мінус», тому

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)\,dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy. \qquad (101)$$

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz; \qquad (102)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)\,dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz. \qquad (103)$$

У формулі (102) гладку поверхню σ задано рівнянням $x = x(y, z)$, а у формулі (103) — рівнянням $y = y(x, z)$. Знак «плюс» беремо у цих формулах тоді, коли нормаль до поверхні утворює відповідно з віссю Ox, з віссю Oy гострий кут, а знак «мінус» — коли тупий кут; D_{yz}, D_{xz}, — проекції поверхні σ на площини Oyz та Oxz відповідно.

Для обчислення загального інтеграла (99) використовують формули (101) — (103), проектуючи поверхню σ на всі три координатні площини. Таким чином,

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dxdz + R(x, y, z)\,dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz \pm$$

$$\pm \iint R(x, y, z(x, y))\,dxdy.$$

Правильність вибору знаків перед подвійними інтегралами можна перевірити за допомогою формули

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{\varphi'_x\vec{i} + \varphi'_y\vec{j} + \varphi'_z\vec{k}}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}},$$

яка визначає одиничний нормальний вектор до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$. Подвійний знак у цій формулі відповідає двом сторонам поверхні σ. З формули (99) випливає, що знак перед подвійним інтегралом збігається із знаком відповідного напрямного косинуса нормалі $\vec{n}$:

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{Ox}}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{i}; \quad \cos\beta = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{Oy}}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{j};$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{Oz}}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{k}.$$

Якщо поверхня σ неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, а інтеграл (99) — на суму інтегралів по одержаних частинах поверхні σ.

Приклади

1. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint\limits_{\sigma} xz^2dxdy + xdydz + dxdz,$$

де σ — зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена в першому октанті.

○ Нехай D_{xy}, D_{yz}, D_{xz} — проекції заданої поверхні на координатні площини. Це чверті кругів з центром у початку координат і радіусом 1; тоді

$$\iint\limits_{\sigma} xz^2dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} x(1 - x^2 - y^2)\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\cos\varphi\,(1 - \rho^2)\,d\rho = \frac{2}{15};$$

$$\iint\limits_{\sigma} xdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\,dydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{6};$$

$$\iint\limits_{\sigma} dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \frac{\pi}{4}; \quad I = \frac{2}{15} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{15} + \frac{5}{12}\pi. \ \bullet$$

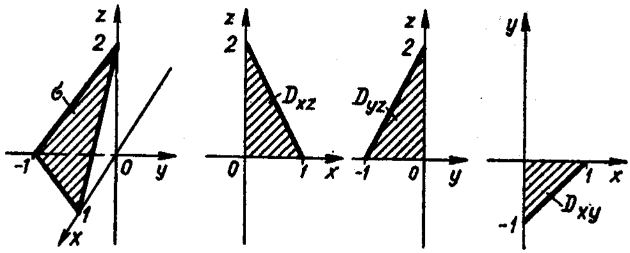


Рис. 10.48

2. Обчислити інтеграл

$$I = \iint\limits_{\sigma} \left(x - y + \frac{3}{2} z\right) dydz + xdxdz - zdxdy,$$

якщо σ — зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами (рис. 10.48).

Знайдемо проекції поверхні σ на координатні площини:

$$D_{xy} = \{x - 1 \leqslant y \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\};$$

$$D_{xz} = \{0 \leqslant z \leqslant 2 - 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\};$$

$$D_{yz} = \{0 \leqslant z \leqslant 2 - 2y,\ -1 \leqslant y \leqslant 0\}.$$

Визначимо нормальний вектор $\vec{n}^0$ до поверхні σ:

$$\varphi(x;\ y,\ z) = 2x - 2y + z - 2;$$

$$\varphi'_x = 2,\quad \varphi'_y = -2,\quad \varphi'_z = 1,\quad \vec{n}^0 = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Оскільки

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{Ox}}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{i} = \frac{2}{3} > 0,\quad \cos\beta = \cos(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{Oy}}) = \vec{n}^0 \cdot \vec{j} =$$

$$= -\frac{2}{3} < 0,\quad \cos\gamma = \cos(\vec{n}, \overrightarrow{Oz}) = \frac{1}{3} > 0,$$

то перед подвійними інтегралами у формулах (101) і (102) треба брати знак «плюс», а перед подвійним інтегралом у формулі (103) — знак «мінус». Отже,

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{2-2y} \left(\frac{1}{2}(2 - z + 2y) - y + \frac{3z}{2}\right) dz - \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2-2x} xdz +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{0} (2x - 2y - 2)\, dy = 7.$$

4.3. Формула Остроградського — Гаусса

Формула Остроградського — Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Ця формула є аналогом формули Гріна, яка, як відомо, встановлює зв'язок криволінійного інтеграла по замкненому контуру з подвійним інтегралом по плоскій області, обмеженій цим контуром.

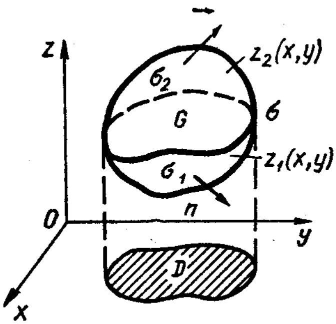


Рис. 10.49

Нехай замкнена область G обмежена замкненою поверхнею σ, причому знизу та зверху обмежена гладкими поверхнями σ_1 та σ_2, рівняння яких $z = z_1(x, y)$ та $z = z_2(x, y)$ (рис. 10.49). Припустимо, що проекцією області G на площину Oxy є область D. Нехай в області G визначено неперервну функцію $R(x, y, z)$, яка в цій області має неперервну похідну $\frac{\partial R}{\partial z}$.

Розглянемо потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_D R(x, y, z_2(x, y))\, dxdy -$$

$$- \iint\limits_D R(x, y, z_1(x, y))\, dxdy.$$

У правій частині цієї рівності перший подвійний інтеграл запишемо за допомогою поверхневого інтеграла по зовнішній стороні поверхні σ_2, а другий подвійний інтеграл — по зовнішній стороні поверхні σ_1. Враховуючи кути між нормаллю $\vec{n}$ та віссю Oz, дістаємо

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\sigma_1} R(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy. \qquad (104)$$

Аналогічно, припустивши, що функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ неперервні в області G, можна дістати формули:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz, \qquad (105)$$

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\, dxdz. \qquad (106)$$

Додавши почленно рівності (104), (105) і (106), дістанемо формулу

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_\sigma P dydz + Qdxdz + Rdxdy, \quad (107)$$

яку називають *формулою Остроградського — Гаусса.* Ця формула справедлива і для довільної області G, яку можна розбити на скінченне число областей, для яких виконуються рівності (104) — (106).

За допомогою формули Остроградського — Гаусса зручно обчислювати поверхневі інтеграли по замкнених поверхнях.

Приклад

Обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint\limits_\sigma x^2dydz + 3ydxdz - 2zxdxdy$, де σ — зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$ (рис. 10.23).

○ Скористаємось формулою (10):

$$P = x^2, \quad Q = 3y, \quad R = -2zx; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -2x;$$

$$I = \iiint\limits_G (2x + 3 - 2x)\, dxdydz = 3\iiint\limits_G dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}. \ ●$$

4.4. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами. Нехай σ — поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$, причому функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ — неперервні в області D — проекції поверхні σ на площину Oxy; L — контур, який обмежує σ, а l — проекція контура L на площину Oxy, тобто l — межа області D.

Виберемо верхню сторону поверхні σ (рис. 10.50). Якщо функція $P(x, y, z)$ неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку на поверхні σ, то справедлива формула

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\, dx = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma. \quad (108)$$

○ Перетворимо криволінійний інтеграл, який міститься у лівій частині рівності (108). Оскільки контур L лежить на поверхні σ, то координати його точок задовольняють рівняння $z = z(x, y)$, і тому значення функції $P(x, y, z)$ в точках контура L дорівнюють значенням функції $P(x, y, z(x, y))$ у відповідних точках контура l. Звідси випливає, що

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\, dx = \oint\limits_l P(x, y;\ z(x, y))\, dx.$$

Застосовуючи до знайденого інтеграла формулу Гріна, дістанемо

$$\oint\limits_{l} P(x, y, z(x, y))\, dx =$$

$$= -\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot z_y'\right) dxdy.$$

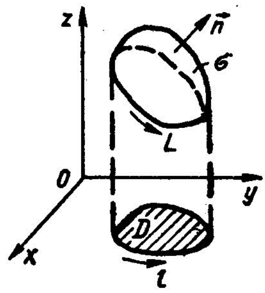


Рис. 10.50

Тут підінтегральна функція дорівнює частинній похідній по y від складеної функції $P(x, y, z(x, y))$.

Оскільки σ — верхня сторона поверхні, тобто $\cos\gamma > 0$ (γ — гострий кут між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ і віссю Oz), то нормаль має проекції $-z_x'$, $-z_y'$, 1. Але напрямні косинуси нормалі пропорційні відповідним проекціям, тому

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{-z_y'}{1} = -z_y',$$

тоді

$$-\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z_y'\right) dxdy = -\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta\right) d\sigma.$$

Отже,

$$\oint\limits_{L} P(x, y, z)\, dx = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma\right) d\sigma.$$

Аналогічно можна довести, що при відповідних умовах справедливі формули:

$$\oint\limits_{L} Q(x, y, z)\, dy = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha\right) d\sigma; \qquad (109)$$

$$\oint\limits_{L} R(x, y, z)\, dz = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta\right) d\sigma. \qquad (110)$$

Додаючи почленно рівності (108), (109) і (110), дістаємо формулу

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos\gamma\right] d\sigma,$$

яка називається *формулою Стокса*. За допомогою формули (99), яка пов'язує поверхневі інтеграли першого та другого роду, цю формулу можна записати так:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (111)$$

Формула Стокса дає змогу обчислювати криволінійні інтеграли по замкнутих контурах за допомогою поверхневих інтегралів.

Приклад

Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл $I = \oint_L x^2y^3dx + dy + zdz$, де L — коло $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, а поверхня σ — верхня сторона напівсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$, і обхід контура L здійснюється в додатному напрямі.

○ Оскільки

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2; \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

то за допомогою формули Стокса (111) дістаємо

$$I = -3\iint_\sigma x^2y^2dxdy = -3\iint_{D_{xy}} x^2y^2dxdy = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\rho = -$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\rho = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{8}. \ ●$$

З формули Стокса випливає, що коли виконуються рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad (112)$$

то криволінійний інтеграл по довільному просторовому замкненому контуру L дорівнює нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0. \qquad (113)$$

А це означає, що в даному випадку криволінійний інтеграл не залежить від форми контура інтегрування.

При виконанні умов (112) або (113) підінтегральний вираз

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$. Знайти цю функцію можна за формулою (91).

Завдання для самоконтролю

1. Що називається поверхневим інтегралом першого роду? Як обчислюється такий інтеграл?
2. Які поверхні називаються двосторонніми?
3. Що називається поверхневим інтегралом другого роду?
4. Як обчислюється поверхневий інтеграл другого роду?
5. У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду?
6. Записати і довести формулу Остроградського — Гаусса.
7. Записати і довести формулу Стокса.
8. Знайти координати центра маси однорідної напівсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$; $\gamma = 1$.
9. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} zdxdy + xdxdz + ydydz$, де σ — зовнішня сторона трикутника, утвореного в перетині площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами.
10. Обчислити за формулою Остроградського — Гаусса поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + (1 - z)\, dxdy$, де σ — зовнішня сторона повної поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.
11. Обчислити за формулою Стокса криволінійний інтеграл $\oint\limits_{L} y^2dx - x^2dy + z^2dz$, де L — замкнений контур, утворений при перетині параболоїда $1 - y = x^2 + z^2$ з координатними площинами.

Відповіді. 8. $\left(0;\, 0;\, \frac{1}{2}R\right)$. 9. $-\frac{1}{2}$. 10. $\frac{1}{3}\pi H^3$. 11. $-\frac{31}{30}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беклемышев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М. : Наука, 1987.— 320 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.— М. : Наука, 1986.— 544 с.
3. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 151 с.
4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.— М. : Наука, 1983.— 228 с.
5. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М. : Наука, 1988.— 431 с.
6. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения: Кратные интегралы. Ряды.— М. : Наука, 1989.— 464 с.
7. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения.— К. : Вища шк., 1989.— 384 с.
8. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М. : Наука, 1985.— 392 с.
9. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу: В 3 ч.— К. : Вища шк., 1990—1992.— Ч. 1.— 383 с.; Ч. 2.— 366 с.; Ч. 3.— 359 с.
10. *Дадаян А. А., Дударенко В. А.* Алгебра и геометрия.— Минск : Вышэйш. шк., 1989.— 288 с.
11. *Дадаян А. А., Дударенко В. А.* Математический анализ.— Минск : Вышэйш. шк., 1990.— 428 с.
12. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ: Справ. пособие.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1985.— 527 с.
13. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции.— М : Наука, 1984.— 383 с.
14. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.— М. : Наука, 1988.— 224 с.
15. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3 т.— М. : Высш. шк., 1988.
16. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа.— М. : Высш. шк., 1989.— 583 с.
17. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики.— М. : Наука, 1989.— 656 с.
18. *Мантуров О. В.* Курс высшей математики.— М. : Высш. шк., 1991.— 448 с.
19. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.— М. : Наука, 1984.— 831 с.
20. *Математическая* энциклопедия: В 5 т.— М. : Сов. энцикл., 1977—1985 — Т. 1.— 5.
21. *Мантуров О. В., Матвеев Н. М.* Курс высшей математики.— М. : Высш. шк., 1986.—399 с.
22. *Овчинников П. Ф., Лисицын Б. М., Михайленко В. М.* Высшая математика.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1989.— 679 с.
23. *Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Высшая математика.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1987.— 552 с.

24. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : В 3 т.— М. : Наука, 1985.— Т. 1—3.
25. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990.— 329 с.
26. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1985.— 447 с.
27. *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1986.— 512 с.
28. *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М.* Вища математика.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1985.— 391 с.
29. *Щипачев В. С.* Высшая математика.— М. : Высш. шк., 1991.— 479 с.
30. *Шестаков А. А., Малышева И. А., Полозков Д. П.* Курс высшей математики.— М. : Высш. шк., 1987.— 320 с.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Абель Нільс Хенрік (1802—1829) — норвезький математик
Александров Павло Сергійович (1896—1982) — російський математик
Аріабхатта (біля 476—550) — індійський математик, астроном
Архімед (біля 287—212 до н. е.) — грецький вчений
Безу Етьєнн (1730—1783) французький математик
Бернуллі Йоган (1667—1748) — швейцарський математик
Бернуллі Якоб (1654—1705) — швейцарський математик, родоначальник знаменитої династії вчених Бернуллі, серед яких було вісім математиків і механіків
Бессель Фрідріх Вільгельм (1784—1846) — німецький астроном математик
Боголюбов Микола Миколайович (1909—1992) — російський математик
Больцано Бернард (1781—1848) — чеський математик
Бріггс Генрі (1561—1630) — англійський математик
Бурбакі Нікола — псевдонім, під яким група математиків виступила із спробою дати систематичний виклад сучасної математики на основі аксіоматичного методу
Валліс Джон (1616—1703) — англійський математик
Вейєрштрасс Карл (1815—1897) — німецький математик
Вессель Каспар (1745—1818) — датський математик
Вівіані Вінченцо (1622—1703) — італійський математик, фізик
Вієт Франсуа (1540—1603) — французький математик
Вронський Юзеф (1776—1853) — польський математик
Галуа Еваріст (1811—1832) — французький математик
Гамільтон Уільям Роуан (1805—1865) — ірландський математик
Гаусс Карл (1777—1855) — німецький математик
Гейне Генріх Едуард (1821—1881) — німецький математик
Гільберт Давид (1862—1943) — німецький математик
Глушков Віктор Михайлович (1923—1982) — російський математик
Грін Джордж (1793—1841) — англійський математик, фізик
Д'Аламбер Жан Лерон (1717—1783) — французький математик, механік
Декарт Рене (1596—1650) — французький математик, філософ
Діріхле Лежен Петер Густав (1805—1859) — німецький математик
Евклід (біля 340—287 до н. е.) — давньогрецький математик
Ейлер Леонард (1707—1783) — швейцарський математик, механік, фізик
Ерміт Шарль (1822—1901) — французький математик
Кантор Георг (1845—1918) — німецький математик
Кардано Джероламо (1501—1576) — італійський математик
Келі Артур (1821—1895) — англійський математик
Клеро Алексіс Клод (1713—1765) — французький математик
Колмогоров Андрій Миколайович (1903—1990) — російський математик
Коші Огюстен Луї (1789—1857) — французький математик
Кравчук Михайло Пилипович (1892—1942) — український математик
Крамер Габриель (1704—1752) — швейцарський математик
Лагранж Жозеф (1736—1813) — французький математик, механік

Лебег Анрі (1875—1941) — французький математик
Лежандр Адрієн Марі (1752—1833) — французький математик
Лейбніц Вільгельм (1646—1716) — німецький математик
Леонардо да Вінчі (1452—1519) — італійський художник, скульптор, вчений
Лобачевський Микола Іванович (1792—1856) — російський математик
Лопіталь Гійом Франсуа (1661—1704) — французький математик
Митропольський Юрій Олексійович (р. н. 1917) — український математик
Мебіус Август Фердинанд (1790—1868) — німецький математик
Непер Джон (1550—1617) — шотландський математик
Ньютон Ісаак (1642—1724) — англійський математик, фізик
Остроградський Михайло Васильович (1801—1862) — російський і український математик
Паскаль Етьєн (1583—1651) — французький математик, батько Паскаля Блеза (1623—1662) — французького математика, фізика
Піфагор (біля 580—500 до н. е.) — давньогрецький математик
Ріккаті Джакопо Франческо (1676—1754) — італійський математик
Ролль Мішель (1652—1719) — французький математик
Сімпсон Томас (1710—1761) — англійський математик
Стірлінг Джеймс (1692—1770) — шотландський математик
Стокс Джорж (1819—1903) — англійський фізик, математик
Тейлор Брук (1685—1731) — англійський математик
Торрічеллі Еванджеліста (1608—1647) — італійський фізик, математик
Фалес (біля 625—548 до н. е.) — грецький вчений
Ферма П'єр (1601—1665) — французький вчений
Феррарі Людовіко (1522—1565) — італійський математик
Френель Огюстен Жан (1788—1827) — французький математик, фізик
Фур'є Жан Батист Жозеф (1768—1830) — французький математик
Чебишев Пафнутій Львович (1821—1894) — російський математик
Чжан Цан (2 ст. до н. е.) — китайський математик
Шварц Герман (1843—1921) — німецький математик
Якобі Карл (1804—1851) — німецький математик

ЗМІСТ

Навчальне видання

ДУБОВИК Володимир Панасович
ЮРИК Іван Іванович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У трьох частинах

Частина третя

2-ге видання

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Відповідальний за випуск *І Подолін*
Редактор *Є. Бондарчук*

Підписано до друку 14.01.08. Формат 60x90/16. Папір офсетний.
Гарнітура літературна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 14,0.
Наклад 3500. Зам. №1903/094.

ТОВ «Веста». Свідоцтво ДК № 2540 від 26.06.2006.
61064 м. Харків, вул. Бакуніна, 8а.

Адреса редакції: 61145, Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Віддруковано з готових діапозитивів у ТОВ «Навчальний друк»,
62300, Харківська обл., м. Дергачі, вул. Петровського, 163а.
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК № 58 від 10.06.2002 р.