Л. І. ДЮЖЕНКОВА
Т. В. НОСАЛЬ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

- Елементи алгебри і геометрії
- Математичний аналіз
- Основи теорії ймовірностей

Л. І. ДЮЖЕНКОВА
Т. В. НОСАЛЬ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

Допущено Міністерством народної освіти УРСР як навчальний посібник для студентів педагогічних інститутів із спеціальності 03.02.00 «Праця»

Київ
«Вища школа»
1991

ББК 22.11я73
Д95
УДК 51(076.5)

Посібник складається з трьох частин: елементи алгебри і геометрії, математичний аналіз, основи теорії ймовірностей. Виклад навчального матеріалу побудовано за такою схемою: наводиться необхідний теоретичний матеріал, подаються приклади розв'язування типових задач, в кінці пропонуються вправи для самостійного розв'язування. Практикум містить чимало задач прикладного характеру. Розглядаються варіанти розв'язувань деяких задач розрахункового характеру з використанням ЕОМ.

Для студентів педагогічних інститутів із спеціальності 03.02.00 «Праця».

Пособие состоит из трех частей: элементы алгебры и геометрии, математический анализ, основы теории вероятностей. Изложение учебного материала построено по такой схеме: приводится необходимый теоретический материал, даются примеры решения типовых задач, в конце предлагаются упражнения для самостоятельного решения. Практикум содержит значительное количество задач прикладного характера. Рассматриваются варианты решений некоторых задач расчетного характера с использованием ЭВМ.

Для студентов педагогических институтов по специальности 03.02.00 «Труд».

Рецензенти: кандидати фіз.-мат. наук, доценти *Ю. Л. Кишакевич* (Дрогобицький державний педінститут), *В. Й. Горбайчук* (Луцький державний педінститут)

Редакція літератури з математики і фізики
Редактор *Л. П. Оніщенко*

Д $\frac{1602010000-263}{М211(04)-91}$ 59 — 91

ISBN 5-11-002281-X

ПЕРЕДМОВА

Посібник має на меті допомогти майбутнім учителям краще засвоїти програмний теоретичний матеріал, оволодіти різними математичними методами, навчитися вільно застосовувати їх на практиці. Завдання, що запропоновані для самостійного опрацювання, доступні кожному студенту. Однак є також вправи підвищеної складності. При розв'язуванні деяких вправ застосовуються наближені методи і формули, що, безперечно, стане в нагоді вчителю праці.

У посібник включено значну кількість задач прикладного характеру, особливо таких, що тісно пов'язані із спеціальними курсами («Електротехніка», «Опір матеріалів», «Теоретична механіка» та ін.). Розв'язування таких задач допомагає встановити тісний зв'язок курсу вищої математики з предметами спеціальних курсів, сприяє підвищенню зацікавленості студентів в оволодінні математичним апаратом, розвитку інтуїції та математичної культури.

При розгляді чисельних методів включено розрахункові задачі, розв'язування яких потребує використання ЕОМ. Пропонуються програми реалізації конкретних чисельних методів, складені для ПМК (прог амовані мікрокалькулятори) типу «Электроника МК-61» та на мові Бейсік для ПЕОМ (персональні електронно-обчислювальні машини) типу «Ямаха», ДОК, КУОТ «Корвет».

Навчальний матеріал у посібнику викладено в трьох частинах. Частини поділено на розділи і параграфи. Спочатку у кожному розділі коротко сформульовано питання, що розглядаються в цьому розділі, вказано, які труднощі можуть виникати при опрацюванні матеріалу і на що слід звернути особливу увагу. У кожному параграфі наводиться в стислій формі необхідний для розв'язування вправ теоретичний матеріал, потім подаються приклади розв'язування типових задач, а наприкінці пропонуються вправи для самостійного опрацювання. Значна кількість задач розв'язується різними способами і доцільність цих способів порівнюється.

Для зручності записів використовуються символи $\forall$ (кожен, для будь-якого) та $\exists$ (існує). Початок розв'язування прикладів відмічено знаком ▲, а кінець — знаком ▼. Відповіді до вправ для самостійного розв'язування подаються в кінці вправи.

Перша частина практикуму написана канд. фіз.-мат. наук Т. В. Носаль, друга і третя частини — канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. І. Дюженковою.

ЧАСТИНА I
ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ І ГЕОМЕТРІЇ

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ВЕКТОРИ

У цьому розділі даються поняття визначника, різні способи його обчислення, методи розв'язування систем лінійних рівнянь. Крім того, розділ містить важливі відомості з аналітичної геометрії та векторної алгебри, розглянуто практичне застосування та фізичний зміст цих відомостей.

§ 1.1. Визначники, їх обчислення. Системи лінійних рівнянь з трьома невідомими. Правило Крамера

Нехай маємо числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Таблиця, яка має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

зветься *матрицею другого порядку*, числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — її *елементами*, причому перший індекс у записі числа вказує на номер рядка, в якому стоїть цей елемент, а другий — на номер стовпця.

Число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називається *визначником матриці* (1) або *визначником другого порядку* і позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Цілком аналогічно, розглядаючи таблицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) — деякі числа, маємо *матрицю третього порядку*, визначник якої позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

У цьому випадку число Δ знаходять за формулою

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (3)$$

Визначник третього порядку можна виразити через визначники другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Основні властивості визначника

1. Величина визначника не зміниться, якщо рядки та стовпці його поміняти місцями, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки або два стовпці, то знак визначника змінюється на протилежний.

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) помножити на те саме число, то значення визначника також помножиться на те саме число. Звідси зрозуміло, що спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

4. Якщо визначник містить два пропорційних рядки (стовпці), то значення його дорівнює нулю. Отже, якщо елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

5. Величина визначника не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на те саме число.

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad (5)$$

де $a_{11}, \ldots, a_{33}$ — коефіцієнти при невідомих, b_1, b_2, b_3 — вільні члени. Назвемо визначником системи (5) число Δ, яке має вигляд (2) і обчислюється за правилом (3) або (4).

Тоді, знайшовши визначники

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

розв'язок системи (5) запишемо у вигляді

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (6)$$

Система (5) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник Δ системи відмінний від нуля. Тоді в цьому разі формули (6) називають *формулами Крамера*. Якщо $\Delta = 0$, а Δ_x, Δ_y, Δ_z відмінні від нуля, то система (5) розв'язку не має. Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то (5) має безліч розв'язків.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

▲ а) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-8) = 10 + 32 = 42.$

б) $\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 0 \cdot (-8) + 0 \cdot (-3) \times$
$\times 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-8) - (-3) \cdot 0 \cdot (-4) - 0 \cdot 7 \cdot 6 = -48 +$
$+ 48 = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & 3 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 9, \\ x - 2y + z = -2, \\ 3x + 2y + 2z = 7. \end{cases}$

▲ а) Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 27 = -13,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 21 = -3.$$

Отже, $x = \frac{13}{5}$, $y = \frac{3}{5}$.

б) Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

Отже, $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$. ▼

Вправи

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 26; б) 1; в) —22; г) 68; д) 0; е) $2(ad - bc)$.

2. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ x + y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x + 8y + z = 2, \\ 3x - 2y + 6z = -7, \\ 2x + y - z = -5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ 4x - y + z = 11; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + y + z = 6; \end{cases}$ є) $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ x + 2y + z = 4, \\ x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

Відповідь: а) $x = -1$; $y = 2$; б) $x = 2$, $y = 1$; в) $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$; г) невизначена, частинний розв'язок $y = 7 - 3x$, $z = 18 - 7x$; д) $x = y = z = 1$; е) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; є) $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$; ж) $x = \frac{28}{11}$, $y = \frac{10}{11}$, $z = -\frac{4}{11}$.

§ 1.2. Системи однорідних лінійних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Система двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

має розв'язки

$$x_1 = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_2 = -k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_3 = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

де k — довільне число.

Система трьох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

має ненульові розв'язки, якщо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Справедливе і обернене твердження.

Крім формул Крамера при розв'язуванні систем n лінійних рівнянь з n невідомими використовують також метод Гаусса. Нехай маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2}$$

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Поділимо обидві частини першого рівняння системи на a_{11} і, помноживши одержане рівняння спочатку на a_{21}, а потім на a_{31}, віднімемо відповідно від другого і третього рівнянь системи. Дістанемо

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}\right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}\right) x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21},$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31}\right) x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31}\right) x_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{31}.$$

Введемо позначення

$$a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot a_{21} = \bar{a}_{22}, \quad a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} = \bar{a}_{23},$$

$$b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21} = \bar{b}_2,$$

$$a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} = \bar{a}_{32}, \quad a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31} = \bar{a}_{33},$$

$$b_3 - \frac{a_1}{a_{11}} a_{31} = \bar{b}_3.$$

Дістанемо систему

$$\begin{cases} \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 = \bar{b}_2, \\ \bar{a}_{32}x_2 + \bar{a}_{33}x_3 = \bar{b}_3. \end{cases} \tag{3}$$

Нехай $\bar{a}_{22} \neq 0$, тоді, поділивши обидві частини першого рівняння системи (3) на $\bar{a}_{22}$ та віднявши одержане рівняння, помножене на $\bar{a}_{32}$, від другого рівняння системи (3), матимемо

$$\left(\bar{a}_{33} - \frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}} \bar{a}_{32}\right) x_3 = \bar{b}_3 - \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} \bar{a}_{32}.$$

Позначивши $\bar{a}_{33} - \frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}} \bar{a}_{32} = a'_{33}$, $\bar{b}_3 - \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} \bar{a}_{32} = b'_3$, дістанемо

$$a'_{33}x_3 = b'_3.$$

У результаті зазначених операцій система рівнянь (2) набирає вигляду

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \qquad x_2 + \frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}} x_3 = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}, \\ \qquad\qquad x_3 = \frac{b'_3}{a'_{33}}. \end{cases} \tag{4}$$

Визначення невідомих, починаючи з останнього, зрозуміле. Якщо ж $a_{11} = 0$, то серед коефіцієнтів при x_1 (a_{21} або a_{31}) існує хоча б один відмінний від нуля. Рівняння, з коефіцієнтом відмінним від нуля при x_1, вважатимемо першим.

Назвемо таблицю, що складена з коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи, *розширеною матрицею* системи. Ця матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

ПРИКЛАДИ

1. Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

▲ Помножимо спочатку перше рівняння системи на -1 і додамо до другого, а потім помножимо перше рівняння системи на -2 і додамо до третього рівняння. Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ \quad\; x_2 + x_3 = 1, \\ -5x_2 - 7x_3 = -9. \end{cases}$$

Тепер помножимо друге рівняння на 5 і додамо до третього рівняння, матимемо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ \quad\; x_2 + x_3 = 1, \\ \quad\; -2x_3 = -4. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $x_3 = 2$. З другого рівняння знаходимо $x_2 = -1$, тоді з першого рівняння $x_1 = 1$. ▼

2. Розв'язати систему однорідних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

▲ Оскільки визначник системи $\Delta = 86 \neq 0$, то система має тільки нульові розв'язки. ▼

3. Розв'язати систему однорідних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

▲ Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, система має розв'язки, відмінні від нульових. Розглянемо систему перших двох рівнянь (третє є їх наслідком):

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, дістаємо $x_2 = 2x_1$, $x_3 = -3x_1$. Надаючи довільних значень x_1, знайдемо відповідні значення x_2 і x_3. Тобто система рівнянь має безліч розв'язків. ▼

Вправи

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - \ \ x_3 = 2, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 - \ \ x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1{,}2, \\ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 0{,}3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1{,}5. \end{cases}$

Відповідь: а) система розв'язків не має; б) $x_1 = \frac{5}{7}$, $x_2 = -\frac{1}{14}$, $x_3 = 0$; в) $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}3$, $x_3 = 0{,}5$.

2. Розв'язати системи однорідних лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - \ \ 8x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 \qquad\quad = 0, \\ 7x_1 - 9x_2 + 11x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

Відповідь: а) $x_2 = 0$, $x_3 = -x_1$; б) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; в) $x_2 = -11{,}5x_1$, $x_3 = -7{,}5x_1$.

§ 1.3. Системи координат на прямій, на площині, в просторі. Поділ відрізка

Система координат — це сукупність умов, за допомогою яких визначається положення точки на прямій, на площині, в просторі.

Координатою точки M на прямій зветься відстань OM, що вимірюється масштабною одиницею, взятою з знаком «+», якщо напрям від точки O до точки M збігається з додатним напрямом на прямій, і з знаком «—», якщо ці напрями протилежні. Відстань між точками $A(x_1)$ і $B(x_2)$ на прямій визначається таким чином:

$$d = |x_2 - x_1|. \qquad (1)$$

Система координат на площині зветься *прямокутною декартовою* (рис. 1, *а*), якщо осі Ox і Oy взаємно перпендикулярні і мають однакові масштабні одиниці. Якщо спроектуємо точку M на осі Ox і Oy, то M має на осі Ox координату x (абсцису), а на осі Oy координату y (ординату).

Відстань від точки $M_1(x_1; y_1)$ до точки $M_2(x_2; y_2)$ знайдемо за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

Цілком аналогічно у просторі, проектуючи точку M на взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy і Oz, що мають однакові масштабні одиниці, маємо відповідно абсцису, ординату та аплікату точки M (рис. 1, *б*). Відстань між точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ визначається за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3)$$

Якщо відрізок M_1M_2 поділяється точкою M у відношенні t, то координати точки $M(x; y; z)$ так виражаються через координати точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}, \quad z = \frac{z_1 + tz_2}{1+t}. \qquad (4)$$

Зрозуміло, що коли M — середина відрізка M_1M_2, то її координати

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (5)$$

Для системи n матеріальних точок, в яких зосереджено маси $m_1, \ldots, m_n$, координати точки M — центра маси,

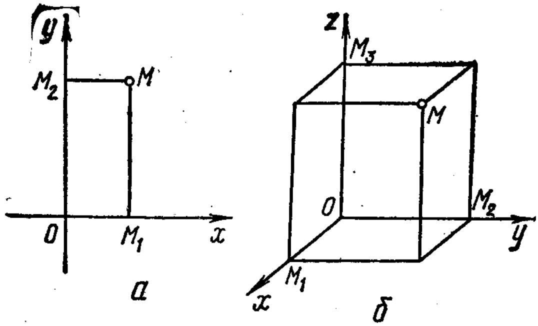

Рис. 1

визначаються таким чином:

$$x = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + \cdots + m_n},$$

$$z = \frac{m_1z_1 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \qquad (6)$$

де $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ — координати точок $M_1, \ldots, M_n$. Аналогічні формули маємо для систем матеріальних точок на прямій і на площині.

ПРИКЛАДИ

1. На осі Ox знайти точку P, відстань від якої до точки $K(0; \sqrt{15})$ дорівнює $4\sqrt{2}$.

▲ Оскільки точка P лежить на осі Ox, то її ордината дорівнює нулю, отже, за формулою (2) маємо

$$4\sqrt{2} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-\sqrt{15})^2}.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрата. Дістанемо $x^2 = 49$, $x_1 = 7$, $x_2 = -7$. Отже, маємо дві точки $P_1(7; 0)$ і $P_2(-7; 0)$. ▼

2. Побудувати в прямокутній декартовій системі координат точки, задані своїми координатами: $M(3; -1; 4)$, $N(-4; 5; 0)$.

▲ Для побудови точки M відкладаємо в додатному напрямі осі Ox (абсциса точки M додатна) відрізок OM_1, довжина якого 3 одиниці (рис. 2). Від точки M_1 відкладаємо паралельно осі Oy у від'ємному її напрямі (ордината точки M від'ємна) відрізок M_1M', довжина якого 1 одиниця. Від точки M' відкладаємо паралельні осі Oz в додатному її напрямі відрізок $M'M$, довжина якого 4 одиниці. Точка M — шукана.

На цьому ж рисунку аналогічно виконуємо побудову точки N (—4; 5; 0). ▼

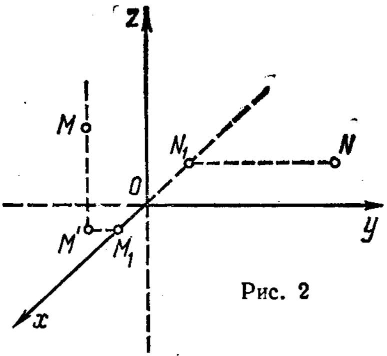

Рис. 2

3. Задано вершини трикутника A (—5; —1; 6); B (8; 1; —9). Знайти вершину C, якщо середина сторони AC лежить на осі Oy, а середина BC — на площині xOz.

▲ Нехай $(x;\ y;\ z)$ — координати вершини C. Оскільки середина сторони AC лежить на осі Oy, то її абсциса і апліката дорівнюють нулю. Звідси, користуючись рівностями (5), маємо $0 = \frac{x-5}{2}$, $0 = \frac{z+6}{2}$. Отже, $x = 5$, $z = -6$.

Оскільки середина сторони BC лежить на площині xOz, то її ордината дорівнює нулю. Отже, $0 = \frac{1+y}{2}$, тоді $y = -1$. Таким чином, точка C (5; —1; —6) — шукана. ▼

4. Трикутник ABC задано вершинами A (3; 12), B (6; 8), C (—3; 4). Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

▲ Згідно з властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника, маємо

$$\frac{DB}{AB} = \frac{CD}{AC} = t,$$

де точкою D позначено перетин бісектриси кута A із стороною BC.

Очевидно, що $AC = \sqrt{(3+3)^2 + (12-4)^2} = 10$, $AB = \sqrt{(3-6)^2 + (12-8)^2} = 5$, тоді $t = 2$ і, користуючись рівностями (4), маємо

$$x_D = \frac{-3+2\cdot 6}{3} = 3,\quad y_D = \frac{4+2\cdot 8}{3} = \frac{20}{3}.$$

Отже, знайшли точку $D\left(3;\ \frac{20}{3}\right)$. Тоді

$$AD = \sqrt{(3-3)^2 + \left(12-\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{256}{9}. \ ▼$$

Вправи

1. Знайти координати точки X, симетричної точці K (2) відносно точки L (—6).

Відповідь: X (—14).

2. На осі Oy знайти точку L, відстань від якої до точки P (—2; 0) дорівнює $\sqrt{85}$.

Відповідь: (0; 9), (0; —9).

3. Кінці однорідного стержня знаходяться в точках M (4; —6) і N (—1; 8). Визначити координати центра ваги цього стержня.

Відповідь: $\left(\frac{3}{2};\ 1\right)$.

4. Середини сторін трикутника ABC знаходяться в точках P (0; 0), L (3; 0), M (0; 4). Знайти координати його вершин.

Відповідь: (3; —4), (—3; 4), (3; 4).

5. Знайти координати центра ваги трикутника, вершини якого знаходяться в точках A (7; 9), B (3; —2), C (—5; 6).

Відповідь: $\left(\frac{5}{3};\ \frac{13}{3}\right)$.

6. Дано точку Q (3; 1), через яку проведено коло, що дотикається до обох координатних осей. Визначити центр і радіус цього кола.

Відповідь: $O_1\,(4+\sqrt{6};\ 4+\sqrt{6})$, $R_1 = 4+\sqrt{6}$; $O_2\,(4-\sqrt{6};\ 4-\sqrt{6})$, $R_2 = 4-\sqrt{6}$.

7. Задано вершини трикутника A (—2; 5), B (4; —4), C (6; 8). Визначити довжину його медіани, проведеної з вершини A.

Відповідь: $\sqrt{58}$.

8. Відрізок, обмежений точками M (—4; 8) і N (6; —2), розділено на три рівні частини. Визначити координати точок поділу.

Відповідь: $\left(-\frac{2}{3};\ \frac{14}{3}\right)$, $\left(\frac{8}{3};\ \frac{4}{3}\right)$.

9. Задано вершини трикутника A (0; 0), B (11; 0), C (0; $\sqrt{23}$). Визначити точку перетину бісектриси його внутрішнього кута при вершині C з стороною AB.

Відповідь: $\left(\frac{11}{3};\ 0\right)$.

10. Однорідна пластинка має форму квадрата з стороною, що дорівнює 8. У ній зроблено квадратний отвір, прямі розрізу проходять через центр квадрата, осі координат напрямлені по ребрах пластинки. Визначити центр ваги цієї пластинки.

Відповідь: $\left(\frac{10}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

11. Однорідна пластинка має форму прямокутника з сторонами, що дорівнюють l та m. У ній зроблено прямокутний отвір, прямі розрізу проходять через центр, осі координат напрямлені по ребрах пластинки. Визначити центр ваги цієї пластинки.

Відповідь: $\left(\frac{5}{12};\ \frac{5}{12}\right)$.

§ 1.4. Полярна система координат. Перехід від полярних координат до декартових і від декартових до полярних

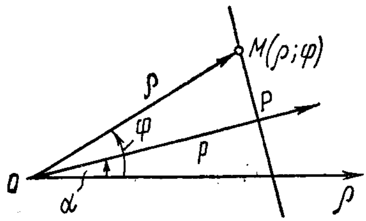

Рис. 3

Полярна система координат визначається наявністю точки O (полюса) і полярної осі з початком у точці O. Положення точки M у полярній системі координат визначається довжиною радіуса-вектора ρ і полярним кутом φ, утвореним радіусом-вектором з полярною віссю (рис. 3). Числа ρ і φ називають *координатами* точки M і записують $M(\rho;\ \varphi)$. Відстань між двома точками $M_1(\rho_1;\ \varphi_1)$ і $M_2(\rho_2;\ \varphi_2)$ визначається за формулою

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}. \qquad (1)$$

Формули переходу від полярних до декартових координат мають вигляд

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi. \qquad (2)$$

Формули переходу від декартових до полярних координат записуються таким чином:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \qquad (3)$$

ПРИКЛАДИ

1. Знайти: а) прямокутні декартові координати точки $N\left(2;\ \frac{2\pi}{3}\right)$, якщо полюс збігається з початком координат, а полярна вісь з віссю абсцис; б) полярні координати точки $F(1;\ -1)$, якщо початок прямокутної системи координат збігається з полюсом, а вісь абсцис з полярною віссю.

▲ а) Згідно з формулою (2), маємо

$$x=2\cos\frac{2\pi}{3}=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1;$$

$$y=2\sin\frac{2\pi}{3}=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

Таким чином, $N(-1;\ \sqrt{3})$.

б) Згідно з формулою (3), маємо

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{-1}{1}=-1.$$

За знаками x і y визначаємо, що точка F розміщена в четвертому квадранті, отже, $\varphi=\frac{7\pi}{4}$. Таким чином, $F\left(\sqrt{2};\ \frac{7\pi}{4}\right)$. ▼

2. У полярній системі координат задано протилежні вершини квадрата: $A\left(2\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$ і $C\left(\sqrt{2};\ -\frac{\pi}{4}\right)$. Визначити площу квадрата.

▲ Знайдемо діагональ AC:

$$AC=\sqrt{8+2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$
$$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Тоді площа квадрата

$$S=\frac{1}{2}AC^2=9\ \text{кв. од.}\ ▼$$

Вправи

1. Побудувати точки за їх полярними координатами: $A\left(4;\ \frac{\pi}{4}\right)$; $B\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$; $C\left(1;\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Знайти точки, симетричні точкам $A\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(4;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(7;\ \frac{2\pi}{3}\right)$ відносно полюса.

Відповідь: $A'\left(2;\ \frac{4\pi}{3}\right)$, $B'\left(4;\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $C'\left(7;\ \frac{5\pi}{3}\right)$.

3. Знайти відстань між двома точками: а) $A\left(2;\ \frac{4\pi}{3}\right)$ і $C\left(1;\ \frac{7\pi}{6}\right)$; б) $B\left(7;\ \frac{4\pi}{3}\right)$ і $D\left(3;\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

Відповідь: а) $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{79}$.

4. Знайти сторони прямокутника і його площу, якщо вершини знаходяться в точках $A\left(0;\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\ (8;\ \pi)$.

Відповідь: $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC=\sqrt{\frac{113}{2}}$, $S=\frac{\sqrt{113}}{2}\sqrt{2}$ кв. од.

§ 1.5. Лінійні операції над векторами. Координати вектора. Довжина вектора. Скалярний добуток двох векторів

Будемо називати *вектором* напрямлений прямолінійний відрізок. Довжину відрізка, який зображує вектор, називають *модулем* або *довжиною вектора*. Якщо модуль вектора дорівнює нулю, то вектор буде *нульовим* і напрям його невизначений.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають *колінеарними*. Якщо ж до цього вони мають однаковий напрям, то їх називають *співнапрямленими*. Колінеарні вектори, що мають протилежні напрями, називають *протилежно напрямленими*. Вектори, що лежать в одній або в паралельних площинах, називають *компланарними*. Якщо вектори співнапрямлені і мають однакові модулі, то такі вектори називають *рівними*. Якщо вектори мають однакові модулі, але протилежно напрямлені, то їх називають *протилежними*.

Сумою n векторів, розміщених послідовно (тобто кінець першого вектора є початком другого), називають вектор, який сполучає початок першого вектор-доданка з кінцем останнього вектор-доданка. Якщо два вектори мають спільний початок, то для знаходження суми таких двох векторів необхідно побудувати на них паралелограм. Вектор, який збігається з діагоналлю побудованого паралелограма, що має спільний початок із заданими векторами, буде сумою цих векторів. Це правило додавання двох неколінеарних векторів називають *правилом паралелограма*.

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, який треба додати до вектора $\vec{b}$, щоб дістати вектор $\vec{a}$, отже, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, якщо $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Неважко зрозуміти, що для того, щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, досить до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число (скаляр) t називають такий вектор $\vec{b}$, модуль якого дорівнює $|\vec{a}|\,|t|$ і який колінеарний з вектором $\vec{a}$ і однаково напрямлений з ним при $t>0$ та протилежно напрямлений при $t<0$ і є нуль-вектором при $t=0$.

Розділити вектор $\vec{a}$ на дійсне число $t \neq 0$ означає помножити вектор $\vec{a}$ на число $\frac{1}{t}$, тобто

$$\frac{\vec{a}}{t} = \vec{a} \cdot \frac{1}{t}.$$

Одиничним вектором вектора (або *ортом вектора*) називають вектор, довжина якого дорівнює 1 і який співнапрямлений з даним вектором. Очевидно, щоб знайти одиничний вектор заданого вектора, потрібно поділити вектор на його довжину.

Якщо маємо вектор у системі координат, то це означає, що задано його координати, тобто алгебраїчні проекції вектора на відповідні осі координат. Нехай маємо прямокутну декартову систему координат у просторі. Координати вектора $\vec{a}$ позначимо через x, y, z. Тоді будемо записувати $\vec{a} = (x,\ y,\ z)$. Очевидно, що

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — одиничні вектори, взяті відповідно за осями координат. Зауважимо, що трійка векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворює координатний базис, якщо вектор $\vec{i}$ належить осі Ox, вектор $\vec{j}$ — осі Oy, вектор $\vec{k}$ — осі Oz. Кожен з векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ має напрям, що збігається з додатним напрямом відповідної осі, якій він належить. Подання вектора $\vec{a}$ у вигляді (1) є розкладом вектора $\vec{a}$ за координатним базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати x, y, z, то його модуль визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{2}$$

тоді орт вектора $\vec{a}$ позначимо через $\vec{a}_0$ і, отже,

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right). \tag{3}$$

Якщо маємо дві точки $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то координати вектора $\vec{AB}$ записуємо в такий спосіб

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1). \tag{4}$$

Нехай задано вектори $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, ..., $\vec{a}_n = (x_n, y_n, z_n)$. Тоді в координатній формі маємо

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n = (x_1 + \cdots + x_n, y_1 + \cdots + y_n, z_1 + \cdots + z_n),$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \cdots - \vec{a}_n = (x_1 - \cdots - x_n, y_1 - \cdots - y_n, z_1 - \cdots - z_n), \quad (5)$$

$$\vec{a} = \lambda\vec{a}_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні. Усе вище сказане має місце для координатної прямої та площини.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число $(\vec{a}, \vec{b})$, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, і записують

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \quad (6)$$

або

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a},$$

де $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ — проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

Скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{a})$ називають *скалярним квадратом* вектора $\vec{a}$, він дорівнює квадрату модуля вектора $\vec{a}$:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Якщо вектори задано своїми координатами, тобто $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (7)$$

Очевидно, що

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}, \quad \text{або}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (8)$$

Напрямними кутами вектора $\vec{a}$ називають кути, які він утворює з координатними осями, а косинуси напрямних кутів називають *напрямними косинусами* і записують

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{9}$$
$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

де

$$\vec{a} = (x, y, z), \quad \vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Якщо під дією сили $\vec{F}$ точка переміщується з положення B в положення C, то виконана при цьому робота A чисельно буде визначатися скалярним добутком вектора сили $\vec{F}$ і вектора переміщення $\vec{BC}$, отже,

$$A = (\vec{F}, \vec{BC}) = |\vec{F}|\,|\vec{BC}|\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{BC}}). \tag{10}$$

ПРИКЛАДИ

1. Визначити початок вектора $\vec{a} = (3, -4, -2)$, якщо його кінець знаходиться в точці $(3; -4; 3)$.

▲ Згідно з формулою (4), маємо

$$x_1 = 3 - 3 = 0, \quad y_1 = -4 + 4 = 0, \quad z_1 = 3 + 2 = 5.$$

Отже, початок вектора $\vec{a}$ знаходиться в точці $(0; 0; 5)$. ▼

2. Вектор $\vec{c}$ задано координатами своїх кінців $M(4; 2; -1)$ і $N(0; 3; 1)$. Знайти проекції вектора $\vec{c}$ на осі координат і його напрямні косинуси.

▲ Зрозуміло, що проекціями вектора $\vec{c}$ на осі координат є координати вектора $\vec{c}$, тобто $c_x = 0 - 4 = -4$; $c_y = 3 - 2 = 1$, $c_z = 1 + 1 = 2$.

Тоді $|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{21}$, і напрямні косинуси визначаємо за формулами (9):

$$\cos(\widehat{\vec{c}, \vec{i}}) = -\frac{4}{\sqrt{21}}, \quad \cos(\widehat{\vec{c}, \vec{j}}) = \frac{1}{\sqrt{21}},$$
$$\cos(\widehat{\vec{c}, \vec{k}}) = \frac{2}{\sqrt{21}}. \ ▼$$

3. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 9$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ становить 30°.

▲ Використовуючи властивість скалярного квадрата вектора, дістаємо

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2 =$$

$$= \vec{a}^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + \vec{b}^2 =$$

$$= 49 + 2\cdot 7\cdot 9\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 81 = 130 + 63\sqrt{3},$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{130 + 63\sqrt{3}}. \ ▼$$

4. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини.

▲ Нехай AN, BL, CM — медіани трикутника ABC нехай AN і BL перетинаються в точці O. Тоді $2\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{OC} = l\vec{OA}$, $2\vec{OL} = \vec{OA} + \vec{OC} = m\vec{OB}$ (бо $\vec{ON} \parallel \vec{OA}$, $\vec{OL} \parallel \vec{OB}$). Звідси $\vec{OB} - \vec{OA} = l\vec{OA} - m\vec{OB}$. Грирівнюючи коефіцієнти при $\vec{OB}$ та $\vec{OA}$, дістаємо $l = -1$, $m = -1$. Отже, $2\vec{ON} = -\vec{OA}$, $2\vec{OL} = -\vec{OB}$, тоді $2|\vec{ON}| = |\vec{OA}|$, $2|\vec{OL}| = |\vec{OB}|$, або $O\ : ON = OB : OL = 2 : 1$. Оскільки $\vec{OB} + \vec{OC} = l\vec{OA} = -\vec{OA}$, то $\vec{OA} + \vec{OB} = -\vec{OC}$. За умовою $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$, $2\vec{OM} = -\vec{OC}$, тому $|\vec{OC}| = 2|\vec{OM}|$, або $OC : OM = 2 : 1$ і, отже, точки C, O і M належать одній прямій. З цього випливає, що медіана CM також проходить через точку O і ділиться нею у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. ▼

5. На точку діють три сили: $\vec{F}_1 = (3, 2, 6)$, $\vec{F}_2 = (1, -3, 2)$ і $\vec{F}_3 = (-5, 2, 7)$. Знайти величину і напрям рівнодійної сили та роботу, яка виконується при переміщенні точки, що рухається прямолінійно, з положення $K(0; 2; 4)$ в положення $M(7; 8; 9)$.

▲ Оскільки рівнодійна трьох сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, то за формулою із (5) маємо $\vec{F} = (-1, 1, 15)$. Тоді, користуючись формулою (2), знайдемо величину рівнодійної

$$|\vec{F}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 15^2} = \sqrt{227}.$$

Напрямні косинуси рівнодійної відповідно дорівнюватимуть:

$$\cos(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{Ox}}) = -\frac{1}{\sqrt{227}}, \quad \cos(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{Oy}}) = \frac{1}{\sqrt{227}},$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{OZ}}) = \frac{15}{\sqrt{227}}.$$

Оскільки $\overrightarrow{KM} = (7, 6, 5)$, то, згідно з формулою (10), робота

$$A = (\vec{F}, \overrightarrow{KM}) = (-1)\cdot 7 + 1\cdot 6 + 15\cdot 5 = 74. \ \blacktriangledown$$

Вправи

1. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо дано, що $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 10$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$.

Відповідь: $\sqrt{91}$.

2. Знайти кут між векторами $\vec{a} = 4\vec{k} - 2\vec{l}$ і $\vec{b} = 3\vec{k} + \vec{l}$, якщо $|\vec{k}| = |\vec{l}| = 1$, а кут між $\vec{k}$ і $\vec{l}$ дорівнює 60°.

Відповідь: $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 43{,}897°$.

3. Довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

4. Довести, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

5. Знайти кут, утворений бісектрисами кутів xOy і yOz.

Відповідь: 60°.

6. Знайти величину рівнодійної чотирьох сил $\vec{F}_1 = (1, 3, 1)$, $\vec{F}_2 = (-4, 2, -1)$, $\vec{F}_3 = (2, 2, -1)$, $\vec{F}_4 = (-3, -7, 4)$, її напрям та роботу, що виконується під дією рівнодійної при переміщенні точки з положення $A(-1; 2; -3)$ в положення $B(0; 1; -2)$.

Відповідь: $|\vec{F}| = 5$, $\cos(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{Ox}}) = -\frac{4}{5}$, $\cos(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{Oy}}) = 0$, $\cos(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{Oz}}) = \frac{3}{5}$, $A = 1$.

7. Знайти вектори, колінеарні до бісектрис внутрішніх кутів трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$.

Відповідь: $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$, $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

§ 1.6. Векторний добуток двох векторів. Площа трикутника. Мішаний добуток трьох векторів. Об'єм тетраедра

Векторним добутком $[\vec{a}, \vec{b}]$ $(\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0})$ є такий вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, утворює з ними праву трійку векторів і модуль якого визначається за формулою

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \tag{1}$$

Зауважимо, що $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, а модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто площа трикутника ABC, у якого $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, може бути визначена таким чином:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\,|[\vec{a}, \vec{b}]|. \tag{2}$$

У координатній формі векторний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ можна записати у вигляді

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \tag{3}$$

Якщо $\vec{F}$ є вектор сили, прикладеної до деякої точки B, а вектор $\overrightarrow{AB}$ напрямлений з точки A в точку B, то векторний добуток $[\overrightarrow{AB}, \vec{F}]$ буде моментом $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки A.

Мішаним або *скалярно-векторним добутком* трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, скалярно помножений на вектор $\vec{c}$, тобто

$$[\vec{a}, \vec{b}]\,\vec{c} \quad \text{або} \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

Чисельно мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Якщо вектори компланарні, їх мішаний добуток дорівнює нулю. Для мішаного добутку справедливі рівності

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}.$$

У координатній формі мішаний добуток векторів $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}=(x_3, y_3, z_3)$ має вигляд

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Якщо маємо тетраедр, заданий вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$, то його об'єм визначається за формулою

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{matrix}\right\|. \tag{5}$$

ПРИКЛАДИ

1. Трикутник задано вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

▲ Знаходимо вектори $\vec{AB}=(4, -5, 0)$ и $\vec{AC}=(0, 4, -3)$, тоді, згідно з формулами (2) і (3), дістанемо

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2}\ \text{кв. од.}$$

Крім того, $S=\frac{AC\cdot h}{2}$, тобто $h=\frac{2S}{AC}$. Отже, знаходячи $AC=\sqrt{16+9}=5$, маємо

$$h=\frac{2\cdot 25}{2\cdot 5}=5\ \text{лін. од.}\ ▼$$

2. До точки $A(4; 2; -3)$ прикладено дві сили $\vec{F}_1=(-1, 3, -1)$ і $\vec{F}_2=(3, -1, 10)$. Знайти момент рівнодійної цих сил, його величину та напрямні косинуси відносно точк $B(2; 4; 0)$.

▲ Знайдемо рівнодійну заданих сил $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=(2, 2, 9)$ і вектор $\vec{AB}=(-2, 2, 3)$. Згідно з сказаним вище, момент сили знаходимо за формулою

$$\vec{M} = [\vec{AB}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = (12,\ 24,\ -8)$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2} = 28.$$

Напрямні косинуси **вектора** моменти сили відповідно дорівнюватимуть

$$\cos(\widehat{\vec{M}, \vec{Ox}}) = \frac{12}{28}, \quad \cos(\widehat{\vec{M}, \vec{Oy}}) = \frac{24}{28},$$

$$\cos(\widehat{\vec{M}, \vec{Oz}}) = -\frac{8}{28},$$

$$\cos(\widehat{\vec{M}, \vec{Ox}}) \approx 0{,}4285, \quad \cos(\widehat{\vec{M}, \vec{Oy}}) \approx 0{,}8571,$$

$$\cos(\widehat{\vec{M}, \vec{Oz}}) \approx -0{,}2857. \ \blacktriangledown$$

3. Три вершини тетраедра знаходяться у точках A (2; 1; —1), B (3; 0; 1), C (2; —1, 3). Знайти координати четвертої вершини D, яка належить осі Oy, якщо об'єм тетраедра дорівнює 3 куб. од.

▲ Оскільки D належить осі Oy, то її координати (0; y; 0), тоді, згідно з формулою (5), маємо

$$3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{або} \quad 18 = |-4y + 2|.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістанемо $y_1 = -4$; $y_2 = 5$, отже D_1 (0; —4; 0), D_2 (0; 5; 0). ▼

Вправи

1. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Довести, що $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, обчислити:

а) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; б) $|[(\vec{a} + 2\vec{b}), (2\vec{a} + \vec{b})]|$.

Відповідь: а) 75; б) 675.

3. Знайти площу паралелограма, три вершини якого знаходяться в точках A (2; 1; 3), B (0; 1; —1); C (—2; —1; —1).

Відповідь: 12 кв. од.

4. Знайти момент сили $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ відносно точки M (1; 0; —1), якщо P (2; 1; 2) — точка прикладання сили $\vec{F}$.

Відповідь: $-2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

5. Довести, що момент сили відносно точки не зміниться, якщо точку прикладання сили переміщати вздовж прямої, по якій діє сила.

6. Довести, що вектори $\vec{k}, \vec{m}, \vec{l}$, які задовольняють умову $[\vec{k}, \vec{m}] + [\vec{m}, \vec{l}] + [\vec{l}, \vec{k}] = 0$, компланарні.

7. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Відповідь: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 6$.

8. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами в точках A (0; 0; 0), B (—1; 0; —2), C (2; —1; 0), D (1; 4; 1).

Відповідь: $\frac{17}{6}$ куб. од.

9. Довести, що $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{0}$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$ і $\vec{a} \perp \vec{c}$.

10. Об'єм трикутної піраміди дорівнює 9 куб. од. Три її вершини знаходяться в точках A (4; —1; 2), B (5; 1; 4) і C (3; 2; —1). Знайти координати четвертої вершини D, якщо вона знаходиться на осі Oz.

Відповідь: D (0; 0; 3).

РОЗДІЛ 2. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У шкільному курсі математики розглядаються деякі рівняння прямої на площині (загальне та з кутовим коефіцієнтом). У цьому розділі поширюється поняття прямої на площині і, крім того, розглядаються еліпс, гіпербола, парабола, задані своїми канонічними рівняннями.

§ 2.1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку або дві задані точки. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими

Нехай на площині в прямокутній декартовій системі координат маємо пряму l, тоді:

а) якщо пряма проходить через фіксовану точку M_0 (x_0; y_0) і паралельна деякому заданому вектору $\vec{s} = (m, n)$, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \qquad (1)$$

б) якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \qquad (2)$$

в) якщо пряма відтинає на осях координат відрізки a (на осі Ox) і b (на осі Oy), то рівняння прямої записується так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (3)$$

Пучком прямих називають множину прямих, які проходять через деяку точку — центр пучка. Рівняння пучка прямих з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ записується у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (4)$$

де k — кутовий коефіцієнт прямої пучка, який дорівнює тангенсу кута α (кут нахилу прямої до осі Ox), тобто

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (5)$$

Якщо k фіксоване, то (4) — рівняння прямої, що проходить через точку M_0 з заданим кутовим коефіцієнтом k. Якщо ж пряма відтинає на осі Oy відрізок, що дорівнює b |, то рівняння прямої має вигляд

$$y = kx + b. \qquad (6)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 мають напрямними відповідно вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$, то кутом між прямими l_1 і l_2 буде кут між векторами $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$, отже,

$$\cos(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}) = \cos(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2}) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} =$$

$$= \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \qquad (7)$$

(знаки «+» або «—» визначають кожен з суміжних кутів, утворених в результаті перетину прямих). Умовою паралельності l_1 і l_2 з напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ є $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, а умовою перпендикулярності є рівність $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$. Якщо k_1 і k_2 — кутові коефіцієнти l_1 і l_2, то кут α між ними знаходиться за формулою

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (8)$$

(два знаки відповідають двом різним положенням однієї прямої відносно іншої).

ПРИКЛАДИ

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(4; 3)$ паралельно прямій $y = 3x - 2$.

▲ З умови паралельності прямих кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює кутовому коефіцієнту заданої прямої, тобто дорівнює 3. Отже, використавши рівняння (4) і підставивши в нього $k = 3$, $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, дістанемо рівняння шуканої прямої:

$$3x - y - 9 = 0.$$

Цю ж задачу можна розв'язати інакше.

Рівняння шуканої прямої запишемо так, щоб воно відрізнялося від рівняння даної прямої тільки вільним членом (той факт, що рівняння двох паралельних прямих завжди можна зобразити в такому вигляді, що вони будуть відрізнятися тільки вільними членами, пропонуємо довести самостійно):

$$3x - y + C = 0, \tag{9}$$

де C — невідомий вільний член. Надаючи C різних дійсних значень, дістаємо множину прямих, паралельних даній. Щоб з цієї множини прямих вибрати шукану, використаємо умову належності точки P шуканій прямій. Для цього підставимо у рівняння (9) координати точки P. Маємо

$$3 \cdot 4 - 3 + C = 0,$$

звідки $C = -9$. Отже, маємо рівняння $3x - y - 9 = 0$. ▼

2. Знайти площу трикутника, утвореного прямою $4x - 3y - 12 = 0$ з осями координат.

▲ Подамо рівняння заданої прямої у вигляді (3), для цього перенесемо вільний член у праву частину і поділимо обидві частини рівняння на 12. Дістанемо

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Таким чином, відрізки, які відтинає пряма на осях координат, дорівнюють 3 і 4. Отже, площа трикутника, утвореного заданою прямою з осями координат, визначається за формулою

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ кв. од.}$$ ▼

3. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M_0(3; 3)$ під кутом 45° до прямої $3x + 4y + 6 = 0$.

▲ Визначимо кутові коефіцієнти шуканих прямих a і b (рис. 4). Для цього позначимо через k_1 і k_2 відповідно кутові коефіцієнти прямих a і b, а через k кутовий коефіцієнт заданої прямої, який дорівнює $-\frac{3}{4}$.

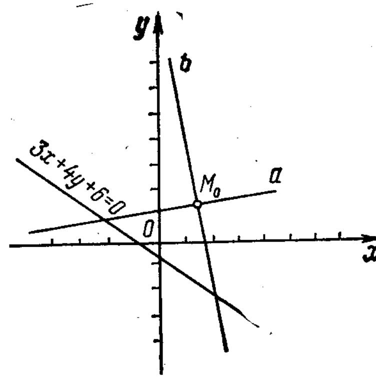

Рис. 4

Оскільки пряма a утворює з заданою прямою кут 45°, дістанемо

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k_1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) k_1}$$

(в чисельнику дробу ми віднімаємо кутовий коефіцієнт заданої прямої тому, що її треба повернути проти годинникової стрілки до збіжності з прямою a). Тобто маємо

$$1 = \frac{k_1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4} k_1}, \quad \text{звідки} \quad k_1 = \frac{1}{7}.$$

Аналогічно знаходимо $k_2 = -7$. Тоді рівняння прямих a і b можна записати відповідно у вигляді

$$7y - x - 18 = 0, \qquad y + 7x - 24 = 0. \ \blacktriangledown$$

Часто на практиці користуються полярним рівнянням прямої (див. рис. 3). У полярній системі координат проводимо нормаль до прямої з полюса. Нехай P — точка перетину її з прямою, $OP = p$, кут між полярною віссю та нормаллю дорівнює α, тоді полярне рівняння прямої має вигляд

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Вправи

1. Скласти рівняння прямої: а) що проходить через точки A (2; 1) і B (—2; 12); б) через точку F (4; —1), паралельно бісектрисі першого і третього координатних кутів; в) що проходить через початок координат і утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{3}$; г) що проходить через точку M (—2; —2), перпендикулярно до прямої $x - 4y - 28 = 0$; д) яка відтинає на осях координат відрізки $a = -\frac{1}{2}$, $b = 8$.

Відповідь: а) $11x + 4y - 26 = 0$; б) $x - y - 5 = 0$; в) $y = \sqrt{3}x$; г) $4x + 7y + 22 = 0$; д) $16x - y + 8 = 0$.

2. На прямолінійній ділянці берега річки, яку можна прийняти за вісь Ox, треба побудувати насосну станцію для забезпечення водою двох селищ K $(-1;\ 3)$ і N $(2;\ 9)$. Виберіть місце для будівництва станції з таким розрахунком, щоб загальна довжина труб від неї до селищ була найменшою.

Відповідь: $\left(-\frac{1}{4};\ 0\right)$.

3. Знайти рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано дві його вершини A $(3;\ -1)$ і B $(5;\ 7)$ і точку N $(4;\ -1)$ перетину його висот.

Відповідь: $4x - y - 13 = 0$; $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$.

4. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано його вершину A $(1;\ -2)$ і рівняння двох медіан: $x - 2y + 3 = 0$, $x + 3y - 2 = 0$.

Вказівка. Треба встановити, що вершина A не належить жодній з медіан, далі знайти точку перетину медіан — точку O. На прямій, що проходить через точки A і O, побудувати відрізок $OD = OA$. Потім визначити координати точки D, знаючи точку O — середину відрізка AD та один з його кінців — точку A. Оскільки $BDCO$ — паралелограм, скласти рівняння прямих DB і DC, обчислити координати точок B і C, а потім, знаючи координати всіх вершин трикутника, записати рівняння усіх його сторін.

Відповідь: $x + 8y + 15 = 0$; $11x - 2y - 15 = 0$; $7x - 34y - ? = 0$.

5. Промінь світла, напрямлений по прямій $y = 7x + 12$, відобразився від осі абсцис. Знайти рівняння відображеного променя і точку перетину променя з віссю.

Відповідь: $y = 7x - 12$, $\left(-\frac{12}{7};\ 0\right)$.

6. Знайти гострий кут між прямими $y = 3x - 26$, $y = -7x + 84$.

Відповідь: 26,56°.

7. Скласти полярне рівняння прямої, якщо задано відрізок c, який пряма відтинає на полярній осі, рахуючи від полюсу, та полярний кут α нормалі прямої, причому $c = 2$, $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$.

Відповідь: $\rho \cos(\varphi - \alpha) = c \cos\alpha$, $\rho \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = -1$.

§ 2.2. Загальне рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду. Відхилення і відстань точки від прямої

Загальне рівняння прямої має вигляд

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

(A, B, C — сталі коефіцієнти, $A^2 + B^2 \neq 0$, A і B — координати нормального вектора прямої). Рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0;\ y_0)$, записується таким чином:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

Нормальне рівняння прямої має вигляд

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (3)$$

де α — кут між нормаллю до прямої та додатним напрямом осі Ox, p — довжина відрізка нормалі, проведеної з початку координат до прямої, x і y — координати біжучої точки прямої. У нормальному рівнянні прямої вільний член завжди від'ємний, а сума квадратів коефіцієнтів при x і y дорівнює одиниці.

Щоб звести рівняння (1) до вигляду (3), необхідно обидві частини (1) помножити на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак якого вибираємо протилежним знаку вільного члена (1). Тоді *зведене загальне рівняння* матиме вигляд

$$\pm\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0. \qquad (4)$$

Відхиленням точки M_0 від прямої l називається додатне число $\delta = d$, якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від прямої l, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо вони лежать по різні боки від l. Щоб знайти δ, потрібно в нормальне рівняння прямої l підставити координати точки M_0. Отже,

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p \quad \text{або} \quad \delta = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (5)$$

Число $d = |\delta|$ називається *відстанню* точки M_0 від прямої l.

Розглядаючи рівняння (1), ми визначили нормальний вектор $\vec{n} = (A, B)$ прямої l. У той же час, використовуючи вимогу ортогональності векторів, можна визначити і напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l, тобто $\vec{s} = (B, -A)$.

ПРИКЛАДИ

1. Загальне рівняння прямої $7x - 2y + 1 = 0$ подати як рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях; в) у нормальному вигляді.

▲ а) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд (6), § 2.1. Отже, задане рівняння перепишемо у вигляді

$$y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}.$$

б) У відрізках на осях рівняння прямої має вигляд (3), § 2.1. Отже, перенесемо вільний член даного рівняння у праву частину і одержане рівняння перепишемо у вигляді

$$\frac{x}{-\frac{1}{7}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1.$$

в) Щоб звести задане рівняння до нормального вигляду, необхідно обидві частини рівняння помножити на нормуючий множник, вибираючи для нього знак, протилежний до знака вільного члена в загальному рівнянні прямої. Отже, для наведеного прикладу маємо нормуючий множник

$$M=-\frac{1}{\sqrt{49+4}}=-\frac{1}{\sqrt{53}}.$$

Тоді шукане нормальне рівняння прямої, заданої загальним рівнянням, матиме вигляд

$$-\frac{7}{\sqrt{53}}x+\frac{2}{\sqrt{53}}y-\frac{1}{\sqrt{53}}=0. \ ▼$$

2. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими

$$2x+y-4=0 \quad \text{і} \quad 3x+y+7=0.$$

▲ Розв'яжемо спочатку цю задачу в загальному вигляді.

Бісектриси кутів, утворених заданими прямими, є множини точок, рівновіддалених від цих прямих. Якщо рівняння заданих прямих записати у вигляді

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{і} \quad A_2x+B_2y+C_2=0 \quad \left(\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\right),$$

то для будь-якої точки $N(x_0;\ y_0)$, що належить одній із бісектрис, маємо

$$\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x_0+B_2y_0+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Оскільки N — довільна точка бісектриси, то позначимо її координати через x і y, тобто $N(x;\ y)$.

Ураховуючи, що вирази, які стоять в останній рівності під знаком абсолютної величини, можуть мати різні знаки, дістаємо для однієї бісектриси рівняння

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

а для іншої

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Замінивши A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 їх значеннями з рівнянь заданих прямих, дістанемо

$$\frac{2x+y-4}{\sqrt{4+1}}=\pm\frac{3x+y+7}{\sqrt{9+1}}.$$

Тоді рівняння однієї з бісектрис матиме вигляд

$$(2\sqrt{2}+3)x+(\sqrt{2}+1)y+7-4\sqrt{2}=0.$$

Рівняння іншої бісектриси аналогічно запишеться у вигляді

$$(2\sqrt{2}-3)x+(\sqrt{2}-1)y-(7+4\sqrt{2})=0. \ \blacktriangledown$$

3. Провести через задану точку $A(2;\ -3)$ пряму, відстань якої від точки $M(-4;\ -1)$ дорівнює 4 одиниці масштабу.

▲ Рівняння шуканої прямої, що проходить через точку A, запишеться у вигляді

$$y+3=k(x-2) \quad \text{або} \quad kx-y-(2k+3)=0.$$

Звівши його до нормального вигляду, дістанемо

$$\frac{kx-y-(2k+3)}{\pm\sqrt{1+k^2}}=0.$$

Використовуючи формулу (5), знайдемо відстань від точки M до прямої:

$$4=\left|\frac{-6k-2}{\sqrt{1+k^2}}\right| \quad \text{або} \quad 5k^2+6k-3=0.$$

Визначаючи k з останнього рівняння, дістаємо

$$k_1=\frac{-3+2\sqrt{6}}{5}, \quad k_2=\frac{-3-2\sqrt{6}}{5}.$$

Підставляючи значення k_1 і k_2 у знайдене рівняння прямої, дістаємо дві прямі, що задовольняють умову задачі:

$$y=\frac{-3+2\sqrt{6}}{5}x-\frac{4\sqrt{6}-21}{5},$$

$$y=\frac{-3-2\sqrt{6}}{5}x-\frac{21+4\sqrt{6}}{5}. \ \blacktriangledown$$

Вправи

1. Знайти напрямний вектор прямих: а) $7x + 9y + 11 = 0$; б) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{6}$; в) $y = -4x + 1$; г) $x = 2t + 1$, $y = 3t + 8$.

Відповідь: а) (9, —7); б) (2, 6); в) (1, —4); г) (2, 3).

2. Загальне рівняння прямої $4x - 3y + 9 = 0$ подати як рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях; в) у нормальному вигляді.

Відповідь: а) $y = \frac{4}{3}x + 3$; б) $\frac{x}{-\frac{9}{4}} + \frac{y}{3} = 1$; в) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{9}{5} = 0$.

3 Побудувати прямі: а) $x - 3y + 6 = 0$; б) $3y + 8 = 0$.

4. Визначити відстань від точки M (2; 1) до прямої $x - 2y + 4 = 0$ та довести, що задана пряма перетинає відрізок MN, якщо N (0; 3).

Відповідь: $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

5. Знайти висоту, проведену з вершини B трикутника ABC, якщо його сторони AB, BC, CA відповідно задано рівняннями: $2x + 3y - 6 = 0$, $5x - 6y - 15 = 0$, $7x - 3y + 6 = 0$.

Відповідь: $\frac{27\sqrt{58}}{58}$.

6. На осі Ox знайти точку, яка лежить на однаковій відстані від початку координат і від прямої $5x - 12y - 24 = 0$.

Відповідь: (—3; 0), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$.

7. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x - y + 1 = 0$ і $2x - 1 = 0$.

Відповідь: $(2 - \sqrt{2})\,x - 2y + 2 + \sqrt{2} = 0$, $(2 + \sqrt{2})\,x - 2y + 2 - \sqrt{2} = 0$.

8. Знайти пряму, що проходить через точку перетину прямих $y - x - 1 = 0$ і $y - 3x + 3 = 0$, паралельно осі Oy.

Відповідь: $x - 2 = 0$.

§ 2.3. Криві другого порядку та їх канонічні рівняння

Еліпсом є множина точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок (фокусів) є величина стала і дорівнює $2a$. Позначимо відстань між фокусами F_1 і F_2 через $2c$. Віднесемо еліпс до прямокутної декартової системи координат (рис. 5), позначаючи біжучу точку еліпса як M $(x;\ y)$, відрізок A_1A_2 — великою віссю, довжина якої $2a$, відрізок B_1B_2 — малою віссю, довжина якої $2b$. Тоді рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = a^2 - c^2). \tag{1}$$

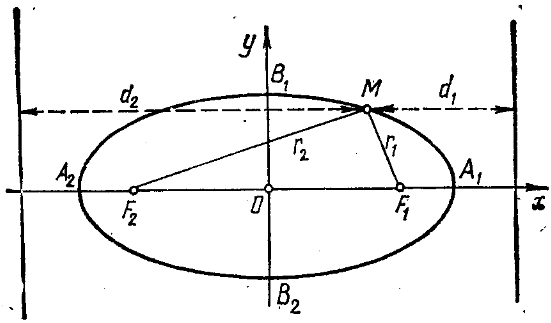

Рис. 5

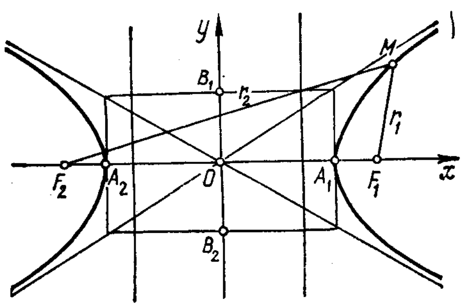

Рис. 6

Це рівняння називають *канонічним рівнянням еліпса.*

Ексцентриситетом еліпса назвемо величину $e = \frac{c}{a}$, яка менша за одиницю.

Фокальні радіуси $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ довільної точки $M(x;\ y)$ визначаються за формулами

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex.$$

Прямі, перпенд кулярні до фокальної осі F_1F_2 і симетричні відносно центра еліпса на відстані $\frac{a}{e}$ від нього, називаються *директрисами еліпса.* Їх рівняння

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

Відношення фокальних радіусів до відстаней точки від відповідних директрис дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{2}$$

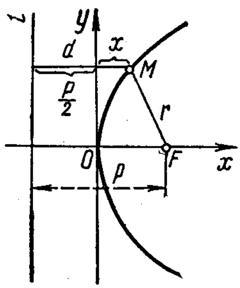

Рис. 7

Гіперболою є множина точок площини, різниця відстаней яких від двох фіксованих точок (фокусів гіперболи) є величина стала і дорівнює $2a$. Віднесемо гіперболу до прямокутної декартової системи координат (рис. 6). Позначимо фокальну відстань F_1F_2 через $2c$, відрізок A_1A_2 — дійсною віссю гіперболи, довжина якої $2a$, відрізок B_1B_2 — уявною віссю гіперболи, довжина якої $2b$. Тоді рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = c^2 - a^2). \tag{3}$$

Якщо уявна вісь має довжину $2a$ і збігається з віссю Ox, а дійсна вісь, довжина якої $2b$, збігається з віссю Oy, то маємо рівняння гіперболи, спряженої до гіперболи (3):

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Ексцентриситетом гіперболи е назвемо величину $\mathrm{e} = \frac{c}{a}$, яка більша за одиницю.

Директрисами гіперболи є дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі F_1F_2, які знаходяться на відстані $\frac{a}{\mathrm{e}}$ від початку координат, а їх рівняння відповідно для гіпербол (3) і (4) мають вигляд

$$x = \pm\frac{a}{\mathrm{e}}, \quad y = \pm\frac{b}{\mathrm{e}}.$$

Для гіперболи має місце відношення (2).

Параболою є множина точок площини, відстань яких від фіксованої точки площини (фокуса) дорівнює відстані від фіксованої прямої (директриси). Якщо розмістити параболу в прямокутній декартовій системі координат так, як це показано на рис. 7 (вісь Ox проходить через фокус F, перпендикулярно до директриси l, а вісь Oy поділяє відрізок осі Ox між фокусом і директрисою навпіл), то рівняння параболи

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

де p — відстань фокуса від директриси.

Фокальний радіус довільної точки M $(x;\ y)$ параболи визначається рівнянням

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

На рис. 7 точка O — вершина параболи, вісь Ox — вісь симетрії. Тоді, згідно з означенням параболи, $\frac{r}{d} = 1$ і, зрозуміло, *ексцентриситет параболи* $e = \frac{r}{d} = 1$. Крім параболи (5), існують параболи, канонічні рівняння яких мають вигляд

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py.$$

Полярне рівняння, загальне для еліпса, однієї вітки гіперболи та параболи, при умові, що ρ, φ — полярні координати біжучої точки кривої, p — фокальний параметр, е — ексцентриситет, а полюс знаходиться в фокусі і полярна вісь напрямлена по осі лінії в бік, протилежний до найближчої до цього фокуса директриси, має вигляд

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \tag{6}$$

$\left(\text{для еліпса і гіперболи } p = \frac{b^2}{a},\ \text{для параболи } p = p\right).$

ПРИКЛАДИ

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо: а) відстань між фокусами дорівнює 18, а велика піввісь дорівнює 12; б) мала піввісь $b = 6$, $e = \frac{1}{4}$.

▲ а) Маємо $2c = 18$, $a = 12$. Тоді, оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $b^2 = 144 - 81 = 63$. Отже, рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{63} = 1.$$

б) Маємо $b = 6$, $e = \frac{1}{4}$, отже, $c = \frac{1}{4}a$. Тоді з співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ дістанемо $a^2 = 38{,}4$. Отже, рівняння еліпса запишеться у вигляді

$$\frac{x^2}{38{,}4} + \frac{y^2}{36} = 1. \ ▼$$

2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в фокусах рівносторонньої гіперболи $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $Q\ (2;\ 2)$.

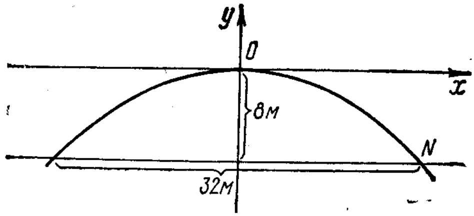

Рис. 8

▲ З рівняння гіперболи знаходимо $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 12$, $c = 2\sqrt{3}$, тоді координати фокусів гіперболи будуть $F_1(2\sqrt{3};\ 0)$ і $F_2(-2\sqrt{3};\ 0)$. Згідно з умовою, з цих точках знаходяться фокуси еліпса, тоді відстань між фокусами еліпса така ж, як і відстань між фокусами гіперболи. Нехай a' — велика, а b' — мала півосі еліпса,тоді $c' = c = \sqrt{a'^2 - b'^2}$, тобто $a'^2 - b'^2 = 12$. З умови належності точки Q еліпсу дістаємо $4b'^2 + 4a'^2 = a'^2b'^2$. Отже, маємо систему рівнянь для визначення a' і b':

$$\begin{cases} 4b'^2 + 4a'^2 = a'^2b'^2, \\ a'^2 - b'^2 = 12, \end{cases}$$

звідки $a'^2 \approx 17{,}21$, $b'^2 \approx 5{,}21$ і рівняння еліпса матиме вигляд

$$\frac{x^2}{17{,}21} + \frac{y^2}{5{,}21} = 1. \ ▼$$

· **3.** На правій вітці гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в два рази менша за її відстань від лівого фокуса.

▲ Для правої вітки гіперболи фокальні радіуси-вектори визначаються таким чином: $r_1 = ex - a$, $r_2 = ex + a$. Отже, маємо рівняння $ex + a = 2(ex - a)$, звідки $x = \frac{3a}{e}$. Оскільки $a = 5$, $b = \sqrt{11}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{6}{5}$, то $x = 15 : \frac{6}{5} = 12{,}5$. З рівняння гіперболи $y = \pm\frac{\sqrt{11}}{5} \times \sqrt{x^2 - 25} = \pm\frac{\sqrt{11}}{5}\sqrt{131{,}25} \approx \pm 7{,}599$. Отже, умові задачі відповідають дві точки $P_1(12{,}5;\ 7{,}599)$ і $P_2(12{,}5;\ -7{,}599)$. ▼

4. Мостова арка має форму параболи. Знайти фокальний параметр цієї параболи, якщо проліт арки дорівнює 32 м, а висота 8 м.

▲ Виберемо систему координат так, щоб вершина параболи збігалася з початком координат, тоді рівняння параболи буде мати вигляд $x^2 = -2py$ (рис. 8). Точка N, яка належить параболі, має координати (16; —8). Тоді $256 = -2p \times \times (-8)$, звідки $p = 16$. ▼

5. Встановити, які криві визначають рівняння:

$$\text{а) } \rho = \frac{2}{3 - \cos\varphi}; \quad \text{б) } \rho = \frac{3}{2 - 6\cos\varphi}; \quad \text{в) } \rho = \frac{1}{2 - 2\cos\varphi}.$$

▲ Перетворюючи задані рівняння у відповідності до рівняння (6), маємо:

$$\text{а) } \rho = \frac{1}{3\left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi\right)}, \quad \rho = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}\cos\varphi}, \text{ отже, } e = $$

$$= \frac{1}{3} \text{ і крива — еліпс;}$$

$$\text{б) } \rho = \frac{\frac{3}{2}}{1 - 3\cos\varphi}, \quad e = 3 \text{ і крива — гіпербола;}$$

$$\text{в) } \rho = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\varphi}, \quad e = 1, \text{ крива — парабола. } ▼$$

Вправи

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо: а) $a = 3$, $b = 7$; б) $a = 15$, $e = \frac{1}{5}$; в) $a - b = 2{,}2$, $c = 4\sqrt{2}$.

Відповідь: а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$; б) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{216} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.

2. Визначити ексцентриситет траєкторії руху штучного супутника Землі, якщо його максимальне віддалення від поверхні Землі 947 км, мінімальне 228 км, а радіус Землі дорівнює 6371 км.

Відповідь: $e \approx 0{,}517$.

3. Скласти рівняння гіперболи, якщо: а) дійсна піввісь дорівнює 8, $e = \frac{3}{2}$; б) $e = \sqrt{2}$ і гіпербола проходить через точку $B\,(3;\ \sqrt{5})$.

Відповідь: а) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1$; б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$.

4. Визначити траєкторію руху точки $L\,(x;\ y)$, яка при цьому залишається вдвічі ближчою до прямої $x = 1$, ніж до точки $K\ (4;\ 0)$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

5. Парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через точку M_0 (2; —1), а її вершина збігається з початком координат. Скласти її рівняння.

Відповідь: $y^2 = \frac{1}{2}x$.

6. Скласти рівняння гіперболи, якщо $2c = 8$, а відстань між директрисами дорівнює 4.

Відповідь: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$.

7. Диск, кинутий спортсменом під гострим кутом до горизонту, впав на відстані 52 м від початкового положення. Визначити параметр параболічної траєкторії, яку описав диск, якщо найбільша висота, якої він досяг, дорівнює 10 м.

Відповідь: $\frac{25}{13}$.

8. Записати в прямокутній декартовій системі координат канонічні рівняння кривих:

а) $\rho = \frac{9}{4 - \sqrt{7}\cos\varphi}$; б) $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$;

в) $\rho = \frac{2}{3 - 3\cos\varphi}$.

Відповідь: а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; в) парабола з параметром $p = \frac{2}{3}$, тобто $y^2 = \frac{4}{3}x$.

РОЗДІЛ 3. ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Особливу увагу при вивченні цього розділу слід звернути на взаємне розміщення прямої та площини, знаходження відстаней від точки до площини, а також на задачі по складанню рівнянь поверхонь другого порядку.

§ 3.1. Площина

Нехай у тривимірному евклідовому просторі маємо площину, що проходить через задану точку M_0 (x_0; y_0; z_0) і перпендикулярна до деякого вектора $\vec{N} = (A, B, C)$. Якщо M (x; y; z) — біжуча точка цієї площини, то рівняння вказаної площини має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Позначаючи $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D, дістанемо *загальне рівняння площини:*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2)$$

Дослідимо це рівняння.

1. $A = 0$, маємо $By + Cz + D = 0$ — площина паралельна осі Ox.

2. $B = 0$, маємо $Ax + Cz + D = 0$ — площина паралельна осі Oy.

3. $C = 0$, маємо $Ax + By + D = 0$ — площина паралельна осі Oz.

4. $D = 0$, маємо $Ax + By + Cz = 0$ — площина проходить через початок координат.

5. $A = D = 0$, маємо $By + Cz = 0$ — площина проходить через вісь Ox.

6. $B = D = 0$, маємо $Ax + Cz = 0$ — площина проходить через вісь Oy.

7. $C = D = 0$, маємо $Ax + By = 0$ — площина проходить через вісь Oz.

8. $A = B = 0$, маємо $Cz + D = 0$ — площина перпендикулярна до осі Oz.

9. $A = C = 0$, маємо $By + D = 0$ — площина перпендикулярна до осі Oy.

10. $B = C = 0$, маємо $Ax + D = 0$ — площина перпендикулярна до осі Ox.

11. $A = B = D = 0$, $C \neq 0$, маємо $Cz = 0$ — площина, яка збігається з координатною площиною xOy.

12. $A = C = D = 0$, $B \neq 0$, маємо $By = 0$ — площина, яка збігається з координатною площиною xOz.

13. $B = C = D = 0$, $A \neq 0$, маємо $Ax = 0$ — площина, яка збігається з координатною площиною yOz.

Якщо вільний член D загального рівняння площини відмінний від нуля, то, поділивши всі члени цього рівняння на $-D$ і позначаючи $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$, дістанемо рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{3}$$

(a, b, c — відрізки, які відтинає площина від відповідних осей Ox, Oy, Oz).

Нехай площину в просторі задано трьома точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не лежать на одній прямій. Нехай точка $M(x; y; z)$ — довільна точка цієї площини. З умови компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ дістаємо рівняння площини, що проходить через три задані точки, а саме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Нехай дві площини задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кут між ними можна визначити, використовуючи скалярний добуток векторів, бо кутом між заданими площинами буде кут між їх нормальними векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Тоді кут φ між $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ знайдемо за формулою

$$\cos\varphi = \pm \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}, \qquad (5)$$

або у координатному вигляді

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (6)$$

Якщо площини перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = 0$, і умовою перпендикулярності двох площин є співвідношення

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (7)$$

Якщо площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні. Отже, умовою паралельності двох площин буде співвідношення

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (8)$$

Нехай задано площину. Опустимо з початку координат перпендикуляр на цю площину. Позначимо довжину відрізка цього перпендикуляра, який міститься між початком координат та точкою перетину перпендикуляра з площиною, через p, а кути, які утворює вектор напрямку цього перпендикуляра з осями координат Ox, Oy, Oz, позначимо відповідно α, β, γ. Тоді рівняння площини, довільна точка якої має координати x, y, z, записується у вигляді

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (9)$$

Це рівняння називають *нормальним рівнянням площини*, а косинуси кутів α, β, γ — *напрямними косинусами*. Зауважимо, що нормальне рівняння площини має такі властивості: вільний член завжди повинен бути від'ємним (саме число p, як довжина відрізка, є додатне), а сума квадратів коефіцієнтів при невідомих x, y, z дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (10)$$

Щоб звести загальне рівняння (2) площини до нормального вигляду (9), треба помножити всі члени рівняння (2) на нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (11)$$

у якому знак перед дробом беремо протилежним до знака вільного члена D з рівняння (2).

Нехай у просторі маємо площину, яку задано нормальним рівнянням (9). Якщо M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка простору, яка не належить площині, то *відхиленням* δ точки M_0 від площини буде результат підстановки координат цієї точки $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ у ліву частину нормального рівняння площини, тобто

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (12)$$

Відхиленням точки M_0 від площини є число $\delta = d$, якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від площини, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по різні боки від неї. Число d — відстань точки M_0 від площини. Отже, $d = |\delta|$. Тому відстань точки M_0 від площини знаходять за формулою

$$d = \left|\pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (13)$$

Сукупність площин, які проходять через одну й ту саму пряму, називають *пучком площини*. Рівняння пучка площин має вигляд

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (14)$$

(загальну пряму для всіх площин пучка називають *віссю пучка*).

В'язкою площин з центром у точці A називають сукупність всіх площин простору, що проходять через точку A. Рівняння в'язки площин з центром у точці $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (15)$$

ПРИКЛАДИ

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки K (3; 2; —1) і P (—2; 3; 4).
▲ Рівняння площини, яка паралельна осі Ox, має вигляд $By + Cz + D = 0$. Оскільки площині належать точки K і P, дістаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2B - C + D = 0, \\ 3B + 4C + D = 0. \end{cases}$$

Виразимо невідомі B і D цієї системи через C. Віднімаючи від першого рівняння друге, дістанемо $-B - 5C = 0$, тобто $B = -5C$, тоді $D = 11C$. Надаючи C довільного значення, наприклад 1, маємо $B = -5$, $D = 11$. Підставляючи одержані значення B, C і D у рівняння площини, маємо $5y - z - 11 = 0$. ▼

2. Визначити відстань від точки M_0 (3; 5; —2) до площини $x + y - z + 2 = 0$.
▲ Згідно з правилом знаходження відстані від точки до площини, знайдемо нормальне рівняння заданої площини. Визначаємо нормуючий множник

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отже, нормальне рівняння площини має вигляд

$$-\frac{x + y - z + 2}{\sqrt{3}} = 0.$$

Тоді, підставляючи в нормальне рівняння площини координати точки M_0 і беручи вираз по модулю, знайдемо відстань від точки M_0 до площини:

$$d = \left| \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - 1(-2) + 2}{-\sqrt{3}} \right| = 4\sqrt{3}. \ ▼$$

3. Обчислити відстань між паралельними площинами $8x - 2y + z + 16 = 0$ і $8x - 2y + z - 7 = 0$.
▲ Оскільки вільні члени у рівняннях площин мають різні знаки, то площини знаходяться по різні боки від початку координат. У такому разі відстань між ними d буде дорівнювати сумі p_1 і p_2 у відповідних нормальних рівняннях цих площин. Якщо б вільні члени мали однакові знаки, тобто площини лежали по один бік від початку координат, то відстань d між ними дорівнювала б модулю різниці p_1 і p_2. Таким чином, знаходимо p_1 і p_2, для цього запису-

ємо рівняння обох площин у нормальному вигляді:

$$\frac{8x-2y+z+16}{-\sqrt{69}}=0, \quad \frac{8x-2y+z-7}{\sqrt{69}}=0.$$

Тоді $p_1=\frac{16}{\sqrt{69}}$, а $p_2=\frac{7}{\sqrt{69}}$. Отже,

$$d=\frac{16}{\sqrt{69}}+\frac{7}{\sqrt{69}}=\frac{23}{\sqrt{69}}=\frac{\sqrt{69}}{3}.$$

Можна було б вибрати точку на одній з площин і знаходити відстань від неї до другої площини. ▼

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $F(2;\ 3;\ 7)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.

▲ Запишемо умову того, що пряма відтинає на координатних осях рівні відрізки: $|a|=|b|=|c|$ (див. формулу (3)). Крім того, F належить площині, отже, $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+$ $+\frac{7}{c}=1$. Тоді розв'язування задачі зводиться до розв'язування системи рівнянь

$$\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{7}{c}=1,\\ |a|=|b|=|c|.\end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістаємо такі рівняння площин:

$$x+y+z-12=0, \quad x-y-z+8=0,$$
$$x-y+z+8=0, \quad x-y+z-6=0,$$
$$x+y-z+2=0. \ ▼$$

5. Через точку $P(2;\ -1;\ 3)$ провести площину, паралельну площині $3x-y+10z-1=0$.

▲ Рівняння в'язки площин, що проходять через задану точку P, має вигляд

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0.$$

Із умови паралельності двох площин маємо

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{(-1)}=\frac{C}{10}=k.$$

Тоді, замінивши в рівнянні в'язки коефіцієнти A, B, C величинами, їм пропорційними, дістанемо

$$3k(x-2)-k(y+1)+10k(z-3)=0$$

або

$$3x - y + 10z - 37 = 0. \blacktriangledown$$

6. Знайти гострий кут між двома площинами: $2x - y + z - 11 = 0$ і $4x - y + 17z + 1 = 0$.

▲ Згідно з формулою (6), для знаходження кута між площинами необхідно знати координати нормальних векторів площин. Отже, враховуючи це, дістаємо $\vec{N}_1 = (2, -1, 1)$, $\vec{N}_2 = (4, -1, 17)$. Тоді

$$\cos\varphi = \left|\frac{8+1+17}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{306}}\right| \approx 0{,}6068, \text{ звідки } \varphi = 52{,}6423^\circ. \blacktriangledown$$

7. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму, яка є перетином площин $2x - 3y + z - 2 = 0$ і $x + y - 4z - 1 = 0$ і відтинає від координатного кута xOy трикутник, площа якого 3 кв. од.

▲ Рівняння пучка площин, що проходять через лінію перетину двох заданих площин, згідно з формулою (14), має вигляд

$$2x - 3y + z - 2 + \lambda(x + y - 4z - 1) = 0.$$

Знайдемо значення λ, при якому матимемо шукану площину. Перепишемо рівняння пучка площин у відрізках на осях:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{2+\lambda}{\lambda-3}} + \frac{z}{\frac{2+\lambda}{1-4\lambda}} = 1.$$

Тоді, згідно з формулою (3), маємо $a = 1$, $b = \frac{2+\lambda}{\lambda-3}$. Трикутник, який відтинається від кута xOy, — прямокутний з катетами $|a|$ і $|b|$, тому площа його, згідно з умовою задачі, дорівнює 3 кв. од. Отже, маємо рівняння $3 = \frac{1}{2}\left|\frac{2+\lambda}{\lambda-3}\right|$. Останнє співвідношення рівносильне сукупності таких двох рівнянь: $2 + \lambda = 6(\lambda - 3)$, $2 + \lambda = -6(\lambda - 3)$. Розв'язуючи ці рівняння, маємо $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \frac{16}{7}$. Підставляючи значення λ в рівняння пучка площин, дістанемо рівняння шуканих площин: $6x + y - 15z - 6 = 0$ і $30x - 5y - 57z - 30 = 0$. ▼

Вправи

1. Знайти рівняння площини, яка: а) паралельна осі Oy і проходить через точки M (2; —1; 2) і N (4; 3; 7); б) проходить через точку F (2; —1; —1) і перпендикулярна до площин $2x + y + 3z - 2 = 0$ і

$x - y - z + 2 = 0$; в) проходить через точку P (1; —2; 4) і відтинає на осях координат рівні відрізки; г) проходить через лінію перетину площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ і через початок координат.

Відповідь: а) $5x - 2z - 6 = 0$; б) $4x + 5y - z - 4 = 0$; в) $x + y + z - 3 = 0$, $x - y - z + 1 = 0$, $x - y + z - 7 = 0$, $x + y - z + 4 = 0$; г) $(A_1D_2 - A_2D_1)\,x + (B_1D_2 - B_2D_1)\,y + (C_1D_2 - C_2D_1)\,z = 0$.

2. Звести до нормального вигляду рівняння площин: а) $2x + y - 7z + 1 = 0$; б) $4x - y + 17z = 0$.

Відповідь: а) $0{,}272x + 0{,}136y - 0{,}952z + 0{,}136 = 0$; б) $0{,}228x - 0{,}057y + 0{,}971z = 0$.

3. Знайти гострий кут між площинами $7x + y - 10z = 0$ і $x + y + z + 1 = 0$.

Відповідь: $\varphi = 84{,}59°$.

4. Знайти прямі перетину площини $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ з координатними площинами.

Відповідь: $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + 4z - 1 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 4z - 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

5. Обчислити відстань між паралельними площинами $2x - 3y + 11z - 1 = 0$ і $2x - 3y + 11z + 8 = 0$.

Відповідь: $\dfrac{9}{\sqrt{134}}$.

6. Обчислити об'єм куба, дві грані якого належать площинам $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ і $2x - 3y + 6z + 28 = 0$.

Відповідь: 216 куб. од.

7. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки M (2; —1; 15) і від площини $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Відповідь: M_1 (0; 0; 18), M_2 (0; 0; 12).

§ 3.2. Пряма лінія в просторі

Якщо в просторі в прямокутній декартовій системі координат маємо пряму l, що проходить через задану точку M $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і паралельна деякому вектору $\vec{s} = (m;\ n;\ p)$, який зветься напрямним вектором цієї прямої, то канонічне рівняння прямої l має вигляд

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{1}$$

(x, y, z — координати довільної точки M прямої l).

Прирівнюючи кожне з відношень в рівняннях (1) до параметра t, дістанемо параметричні рівняння прямої l:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{2}$$

Якщо пряма l проходить через дві задані на ній точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то вектор M_1M_2* можемо прийняти за напрямний вектор прямої l, тоді, враховуючи рівняння (1) прямої, дістаємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки M_1 і M_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3}$$

Розглянемо випадок, коли пряму l задано перетином двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(очевидно, ці площини непаралельні, отже, вектори-нормалі $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ неколінеарні і їхні координати непропорційні).

Щоб записати рівняння прямої l, яку задано системою (4), у канонічному вигляді, необхідно знати напрямний вектор прямої і певну точку на ній. Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l запишемо у вигляді

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{5}$$

Надавши якійсь змінній із системи (4), наприклад змінній z, певного значення z_0, розв'яжемо одержану систему і знайдемо $x_0 = f(z_0)$, $y_0 = \varphi(z_0)$. Отже, ми знайшли на l певну точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Кутом між прямими l_1 і l_2 у просторі називається кут θ між їхніми напрямними векторами. Якщо l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

то

$$\cos\theta = \pm \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{6}$$

Умовою паралельності прямих у просторі є співвідношення

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{7}$$

Умовою перпендикулярності прямих у просторі є

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \tag{8}$$

Умовою перетину прямих l_1 і l_2 у просторі є

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Якщо ж рівність (9) не виконується, то прямі мимобіжні

ПРИКЛАДИ

1. Скласти канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x+3y-z+2=0, \\ x-2y+1=0. \end{cases}$$

▲ Покладемо $z=0$, тоді, розв'язуючи систему, дістаємо $x_0=-1$, $y_0=0$. Отже, ми знайшли одну з точок прямої — точку M_0 $(-1; 0; 0)$. Знаходимо напрямний вектор $\vec{s}$ шуканої прямої як векторний добуток нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ площин, перетином яких є ця пряма. Оскільки $\vec{N}_1=(2, 3, -1)$ і $\vec{N}_2=(1, -2, 0)$, то $\vec{s}=[\vec{N}_1, \vec{N}_2]=(2, -1, -7)$.

Отже, канонічне рівняння шуканої прямої має вигляд

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-7}. \ ▼$$

2. Знайти гострий кут між двома прямими:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4} \text{ і } \frac{x}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-8}{-1}.$$

▲ Маємо $l_1=2$, $m_1=3$, $n_1=4$, $l_2=2$, $m_2=5$, $n_2=-1$, тоді, користуючись формулою (6), дістаємо

$$\cos\theta=\pm\frac{4+15+(-4)}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{30}}\approx\pm 0{,}508.$$

За умовою нам потрібен лише гострий кут між прямими. Отже, $\cos\theta=0{,}508$, звідки $\theta\approx 59{,}432862°$. ▼

3. Через точку M $(1; -2; 3)$ провести пряму, яка паралельна прямій

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{-3}.$$

▲ Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку M. За формулою (1) маємо

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y+2}{m}=\frac{z-3}{n}.$$

Згідно з умовою (7), за напрямний вектор шуканої прямої можна взяти напрямний вектор заданої прямої. Тоді рівняння шуканої прямої буде мати вигляд

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-3}. \blacktriangledown$$

4. У рівнянні прямої l, що має вигляд $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{m}$, визначити параметр m так, щоб пряма l перетинала пряму l_1, рівняння якої $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{4}$.

▲ Для знаходження параметра m використаємо умову (9) перетину двох прямих. З рівняння прямої l маємо точку M_0 (1; 0; 4), яка належить l, а з рівняння прямої l_1 маємо точку M_1 (4; —1; 4), яка належить l_1, аналогічно напрямними векторами l і l_2 відповідно будуть $\vec{s}=(2, -3, m)$ і $\vec{s_1}=(2, 3, 4)$. Тоді маємо

$$\begin{vmatrix} 1-4 & 0+1 & 4-4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & m \end{vmatrix}=0,$$

звідки $7m+28=0$, тобто $m=-4$.

5. Довести перпендикулярність прямих l_1 і l_2, заданих відповідно рівняннями

$$x=2t-1,\ y=3t-2,\ z=2t+1 \text{ і } \begin{cases} 2x+3y+2z+8=0, \\ x-y-z-9=0. \end{cases}$$

▲ Рівняння прямих l_1 і l_2 запишемо у канонічному вигляді

$$l_1: \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{2},$$

$$l_2: \quad \frac{x-4}{-1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-1}{-5}.$$

Перевіряємо умову перпендикулярності (8) прямих l_1 і l_2. Маємо $2(-1)+3\cdot 4+2(-5)=0$. Отже, l_1 і l_2 перпендикулярні.

6. Скласти рівняння руху точки M (x; y; z), яка, маючи початкове положення M_0 (2; —1; —2), рухається прямолінійно і рівномірно в напрямі вектора $\vec{s}=(-2, 3, 6)$ із швидкістю $v=35$.

▲ Рівняння руху точки M (x; y; z) має вигляд $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$, де x_0, y_0, z_0 — координати точки M_0, через яку проходить пряма, а l, m, n — координати вектора напряму руху, які повинні задовольняти умову $v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. Оскільки даний вектор напряму $\vec{s}$ має координати (—2, 3, 6) і його модуль дорівнює 7, то, для того щоб виконувалась умова $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 35$, необхідно, щоб вектор напряму руху $\vec{p} = 5\vec{s}$. Тоді $\vec{p} = (-10,\ 15,\ 30)$. Отже, рівняння руху запишеться у вигляді $x = 2 - 10t$, $y = -1 + 15t$, $z = -2 + 30t$. ▼

Вправи

1. Складати канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z}{2}$.

2. Довести, що пряма $\begin{cases} 2x + 5y - z + 3 = 0, \\ 8x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ перетинає вісь Oz.

3. Знайти співвідношення, яким повинні задовольняти коефіцієнти рівнянь прямої

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

щоб ця пряма: а) була паралельною осі Oy; б) перетинала вісь Ox; в) збігалася з віссю Oz.

Відповідь: а) $B_1 = B_2 = 0$ і хоч одне з чисел D_1 або D_2 відмінне від 0; б) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$; в) $C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0$.

4. Рух точки M (x; y; z) задано рівнянням $x = 2 + t$, $y = 2t - 1$, $z = 3t + 3$. Визначити відстань d, яку проходить ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 15$.

Відповідь: $15\sqrt{14}$.

5. З'ясувати розташування прямих, а якщо вони перетинаються, то знайти координати точки перетину:

а) $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{10} = \dfrac{z+12}{7}$ і $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - 4z + 5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$ і $\dfrac{x-21}{7} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z-4}{2}$;

в) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-8}{7}$ і $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-8}{4}$.

Відповідь: а) паралельні; б) перпендикулярні; в) перетинаються в точці $\left(\dfrac{1}{3};\ -2;\ \dfrac{38}{8}\right)$.

6. Знайти гострий кут між прямими $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-4}$ і $\dfrac{x}{21} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{1}$.

Відповідь: $\varphi \approx 65{,}7341°$.

7. Через точку $L\,(5;\ 2;\ -1)$ провести пряму, яка паралельна: а) осі Ox; б) прямій $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

Відповідь: а) $\begin{cases} y-2=0, \\ z+1=0; \end{cases}$ б) $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A\,(2;\ 5;\ -5)$ перетинає вісь Ox під прямим кутом.

Відповідь: $\frac{x-2}{0} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+5}{5}$.

9. Скласти рівняння променя, який виходить з точки $A\,(0;\ 1;\ -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ і перетинає цю пряму.

Відповідь: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$.

10. Трикутник ABC задано вершинами $A\,(3;\ -1;\ -1)$, $B\,(1;\ 2;\ -7)$ і $C\,(-5;\ 14;\ -3)$. Скласти параметричне рівняння бісектриси внутрішнього кута B цього трикутника.

Відповідь: $x = 1 - t$, $y = 2 + 3t$; $z = -7 + 8t$.

§ 3.3. Взаємне розміщення прямої і площини

Пряма у просторі може перетинати задану площину, бути до неї паралельною або лежати в ній.

Нехай пряма l, задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

перетинає площину, задану загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Записавши рівняння прямої l у параметричному вигляді

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

і підставивши у рівняння площини замість x, y, z їх значення з параметричного рівняння прямої, знайдемо значення параметра t, яке відповідає шуканій точці перетину. Отже, маємо

$$A\,(x_0 + lt) + B\,(y_0 + mt) + C\,(z_0 + nt) + D = 0.$$

Тоді

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Таким чином, координати точки перетину прямої l з площиною матимуть вигляд

$$x = x_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot l,$$

$$y = y_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot m,$$

$$z = z_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot n.$$

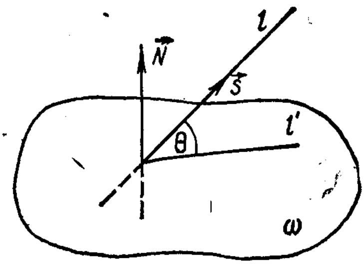

Рис. 9

Кутом між прямою і площиною в просторі будемо називати кут θ між прямою l і її проекцією l' на площину (рис. 9). Якщо пряму l задано канонічним рівнянням

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

а площину — загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то

$$\sin\theta = \pm \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (1)$$

Якщо пряма l паралельна площині, то $\theta = 0$. Отже,

$$Al + Bm + Cn = 0. \quad (2)$$

Якщо ж пряма l перпендикулярна до площини, то

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \quad (3)$$

($\vec{s} \parallel \vec{N}$, де $\vec{s} = (m, n, p)$, $\vec{N} = (A, B, C)$).

Розглянемо випадок, коли пряма лежить у площині. Якщо пряма l: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ лежить у площині $Ax + By + Cz + D = 0$, то вона має з площиною спільну точку і паралельна їй. Отже, нехай точка M_0 (x_0; y_0; z_0) прямої l лежить на площині, тоді

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Оскільки пряма l паралельна площині, то

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Таким чином, справедливість виконання умов

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0, \end{cases}$$

виражає умову належності прямої l до площини. Рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

при умові, що

$$Al+Bm+Cn=0,$$

є рівнянням площини, яка проходить через пряму l.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ з площиною $3x+y-z-8=0$.

▲ Параметричне рівняння даної прямої має вигляд

$$x=2t+1, \quad y=-t-2, \quad z=3t+1.$$

Підставляючи значення x, y, z з цих рівнянь в рівняння площини, дістаємо

$$3(2t+1)+(t-2)-(3t+1)-8=0.$$

Звідси $t=4$. Підставляючи знайдене значення t у параметричне рівняння прямої, дістаємо координати точки перетину прямої з площиною:

$$x=9, \quad y=-6, \quad z=13. \ ▼$$

2. Через точку $A(-1;\ 2;\ 0)$ провести пряму, паралельну прямій m, що задана рівнянням $\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{-3}$.

▲ Якщо шукана пряма паралельна заданій, то за її напрямний вектор можна вибрати напрямний вектор заданої прямої, тобто $\vec{s}_1=(1,\ 0,\ -3)$. Тоді, згідно з рівнянням (1), § 3.2, одержуємо рівняння шуканої прямої: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{-3}$. ▼

3. Через точку $A(-3;\ -1;\ 1)$ провести пряму, перпендикулярну до площини α, яку задано рівнянням $2x-y+z-1=0$.

▲ Якщо пряма, рівняння якої треба знайти, перпендикулярна до площини α, то вона паралельна її нормальному вектору $\vec{N}=(2,\ -1,\ 1)$, який можна взяти за напрямний вектор шуканої прямої. Тоді рівняння шуканої прямої матиме вигляд

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}. \ ▼$$

4. Через точку A (1; 0; —3) провести площину, перпендикулярну до прямої, заданої рівнянням

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{0}.$$

▲ Якщо площина перпендикулярна до прямої, то вона перпендикулярна до її напрямного вектора $\vec{s}=(2, -3, 0)$, який можемо вибрати за нормальний вектор площини. Тоді рівняння шуканої площини має вигляд

$$2(x-1)-3(y-0)+0(z+3)=0,$$

тобто

$$2x-3y-2=0. \ ▼$$

5. Через точку $A(-3;\ 1;\ -1)$ і пряму $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{-1}$ провести площину α.

▲ Перевіримо, чи належить точка A прямій. Оскільки $\frac{-3+1}{-1}\neq\frac{1+2}{3}\neq\frac{-1+2}{-1}$, то точка A не належить заданій прямій. Задана пряма проходить через точку M_0 (—1; 2; —2), тому, вибираючи на площині α довільну точку M (x; y; z) і розглядаючи три компланарні вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{AM_0}$ і $\vec{s}$ — напрямний вектор заданої прямої, дістаємо з умови компланарності векторів рівняння шуканої площини:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{AM_0}, \vec{s})=0,$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0, \quad 2x+3y+7z+10=0. \ ▼$$

6. Через дві прямі, задані відповідно рівняннями

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}, \quad \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1},$$

провести площину α.

▲ Спочатку дослідимо взаємне розташування заданих прямих, для цього використаємо умову перетину двох прямих (див. (9), § 3.2):

$$\begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Бачимо, що визначник дорівнює нулю. Отже, прямі перетинаються. Виберемо на шуканій площині α довільну точку M $(x;\ y;\ z)$ і розглянемо три компланарні вектори $\overrightarrow{M_0M}$ (M_0 (1; 7; 5) — відома точка на одній з заданих прямих), $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ (напрямні вектори заданих прямих). З умови їх компланарності дістаємо рівняння шуканої площини α:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-7 & z-5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 9x + 10y - 7z - 44 = 0. \ \blacktriangledown$$

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі l_1 і l_2, задані відповідно рівняннями

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-2}{4}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{4}.$$

▲ Очевидно, що вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ збігаються. Отже, прямі l_1 і l_2 паралельні. Візьмемо на площині довільну точку M $(x;\ y;\ z)$ і розглянемо три компланарні вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{s}_1$, де M_1 і M_2 — відомі точки на відповідних прямих l_1 і l_2. Розглядувані вектори записуються у вигляді $\overrightarrow{M_1M} = (x-1,\ y+7,\ z-2)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1,\ 9,\ -7)$, $\vec{s}_1 = (1,\ 3,\ 4)$. Отже, за умовою компланарності цих векторів маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+7 & z-2 \\ -1 & 9 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, рівняння шуканої площини має вигляд

$$57(x-1) - 3(y+7) - 12(z-2) = 0$$

або

$$19x - y - 4z - 18 = 0. \ \blacktriangledown$$

8. Знайти точку N, симетричну точці M (2; 1; —3) відносно прямої l, заданої рівнянням

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}.$$

▲ Рівняння площини, що проектує точку M на пряму l, має вигляд

$$A(x-2)+B(y-1)+$$
$$+C(z+3)=0.$$

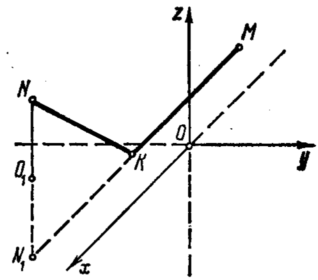

Рис. 10

Ця площина перпендикулярна до прямої, тому за умовою перпендикулярності прямої і площини за нормальний вектор площини приймаємо напрямний вектор прямої l. Отже, рівняння площини набуває вигляду

$$3x-2y+z-1=0.$$

Знайдемо точку перетину прямої l і знайденої площини (див. приклад 1). Дістаємо, що точка O перетину прямої l з площиною має координати $\left(\frac{31}{14}; \frac{20}{7}; \frac{1}{14}\right)$. Оскільки точка N є одним з кінців відрізка, для якого точка O є серединою, то за відомими формулами поділу відрізка у заданому відношенні дістаємо

$$x_N=2x_O-x_M, \quad y_N=2y_O-y_M, \quad z_N=2z_O-z_M,$$
$$x_N=\frac{17}{7}, \quad y_N=\frac{33}{7}, \quad z_N=\frac{22}{7},$$
$$N\left(\frac{17}{7}; \frac{33}{7}; \frac{22}{7}\right). \ ▼$$

9. На площині xOy знайти точку K, сума відстаней якої до точок M (—6; 3; 8) і N (9; —12; 7) була б найменшою.

▲ Точки M і N розташовані по один бік від площини xOy (рис. 10). Знайдемо точку N_1, симетричну точці N відносно площини xOy. Маємо N_1 (9; —12; —7). Пряма, що проходить через точки M і N_1, має рівняння

$$\frac{x+6}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-8}{-1}.$$

Розв'язуючи систему, що складається з рівняння площини xOy і рівняння прямої MN_1:

$$\begin{cases} \dfrac{x+6}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-1}, \\ z=0, \end{cases}$$

дістаємо координати шуканої точки K. Отже, маємо $K(2; -5; 0)$. Покажемо, що $MK+KN$ буде найменшою.

Дійсно, $MK + KN = MK + KN_1$ ($KN = KN_1$, бо точки N і N_1 симетричні відносно площини xOy, у якій лежить точка K). Але три точки M, K, N_1 належать одній прямій, тобто сума відрізків $MK + KN_1$ матиме найменшу довжину. Отже, точка K (2; —5; 0) — шукана. ▼

10. Обчислити відстань d точки M (2; —2; —3) від прямої l, заданої рівнянням

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

▲ Рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої l, має вигляд

$$2(x-2) + 3(y+2) - z - 3 = 0 \quad \text{або}$$

$$2x + 3y - z - 1 = 0.$$

Знайдемо точку перетину цієї площини із заданою прямою. Аналогічно прикладу 1 знаходимо точку $B\left(\frac{5}{7}; \frac{1}{14}; \frac{9}{14}\right)$. Тоді відстань $MB = d$ визначається таким чином:

$$d = MB = \sqrt{\left(\frac{5}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{14} - 2\right)^2 + \left(\frac{9}{14} + 3\right)^2} \approx$$

$$\approx 4{,}3734102. \ ▼$$

Вправи

1. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$ з площиною $5x - 2y + z = 0$.

Відповідь: (—3; —3; 9).

2. Знайти рівняння площини, яка проходить: а) через точку $P(-2; 1; 0)$, перпендикулярно до прямої $\frac{x-5}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{-7}$; б) через пряму $\begin{cases} x - y + 3z - 9 = 0, \\ 2x - y + z + 5 = 0, \end{cases}$ паралельно прямій $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{4}$; в) через дві паралельні прямі $\frac{x-12}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ і $\frac{x+4}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1}$; г) через пряму $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = -t + 1$, перпендикулярно до площини $2x - 7y + z - 3 = 0$.

Відповідь: а) $7x + 8y - 7z + 6 = 0$; б) $4x - 3y - 13z + 127 = 0$; в) $x - 2y - 10z - 14 = 0$; г) $3x + 2y + 8z + 9 = 0$.

3. Задано точку E (0; 2; 1). Знайти координати точки E', симетричної точці E відносно площини $x + y + z = 0$.

Відповідь: E' (—2; 0; —1).

4. Довести, що при довільному куту падіння падаючий промінь і відображений від двох взаємно перпендикулярних дзеркал паралельні один одному.

5. Знайти рівняння площин, які проектують пряму

$$\begin{cases} 2x - 3y + 22z = 0, \\ x + y - 11z + 13 = 0 \end{cases}$$

на координатні площини.

Відповідь: $4x - y + 26 = 0$, $5x - 11z + 39 = 0$, $5y - 44z + 26 = 0$.

6. Знайти відстань d точки K (12; 4; —1) від прямої

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{5}.$$

Відповідь: $d \approx 11{,}3578$.

7. Знайти відстань між двома прямими: а) $x = 2t - 1$, $y = t + 1$, $z = t$ і $x = 3t + 2$, $y = t - 1$, $z = 2t + 1$; б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ і $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

Відповідь: а) $d \approx 2{,}3093$; б) $d \approx 4{,}3864$.

§ 3.4. Поверхні обертання

Поверхнею обертання будемо називати поверхню, що утворюється при обертанні плоскої кривої навколо прямої, яка лежить у площині кривої. Криву, яка обертається, називають *твірною* поверхні обертання (або *меридіаном*), пряму, навколо якої іде обертання,— *віссю обертання*, а кола, які описують точки кривої і які належать площинам, перпендикулярним до осі обертання,— *паралелями* поверхні обертання.

Якщо у прямокутній декартовій системі координат маємо криву γ, яка лежить у площині xOz і задана системою рівнянь

$$\begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

то, для того щоб скласти рівняння поверхні обертання, утвореної обертанням кривої γ навколо осі Oz, необхідно у першому рівнянні кривої (1) зробити заміну

$$x = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad z = Z. \tag{2}$$

Дістанемо

$$F(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) = 0. \tag{3}$$

Це рівняння буде рівнянням поверхні обертання.

Сферою називають множину всіх точок простору, відстань яких від заданої точки, що називається центром, є величина стала.

Відрізок, що сполучає центр сфери з її довільною точкою називається *радіусом сфери.*

Канонічне рівняння сфери з центром у точці A $(a;\ b;\ c)$ і радіусом R матиме вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{4}$$

(x, y, z — координати довільної точки сфери).

Якщо центр сфери міститься в початку координат, то $a=b=c=0$ і рівняння (4) набирає вигляду

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{5}$$

Сферу з центром у початку координат можна дістати при обертанні кола

$$\begin{cases} x^2+z^2=R^2, \\ y=0 \end{cases}$$

навколо осі Oz. Для цього необхідно у рівнянні кола, яке обертається, зробити заміну (2). Дістанемо

$$X^2+Y^2+Z^2=R^2,$$

а це є рівняння сфери (5).

Еліпсоїдом обертання називають поверхню, утворену обертанням еліпса навколо однієї з його осей симетрії. Нехай маємо еліпс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

і будемо його обертати навколо осі Oz. Зробимо заміну (2) в рівнянні еліпса, дістанемо рівняння еліпсоїда обертання

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1. \tag{6}$$

Еліпсоїдом загального виду, або *еліпсоїдом*, називається поверхня, утворена внаслідок рівномірного стиснення еліпсоїда обертання (рис. 11) до однієї з його площини симетрії. Канонічне рівняння еліпсоїда має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{7}$$

де a, b, c — параметри еліпсоїда. Довільний переріз еліпсоїда площиною є еліпс. Точки A_1 $(-a;\ 0;\ 0)$, A_2 $(a;\ 0;\ 0)$, B_1 $(0;\ -b;\ 0)$, B_2 $(0;\ b;\ 0)$, C_1 $(0;\ 0;\ -c)$, C_2 $(0;\ 0;\ c)$ називають *вершинами* еліпсоїда, а відрізки a, b, c — його *півосями.*

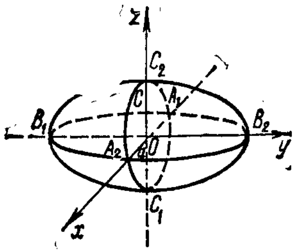

Рис. 11

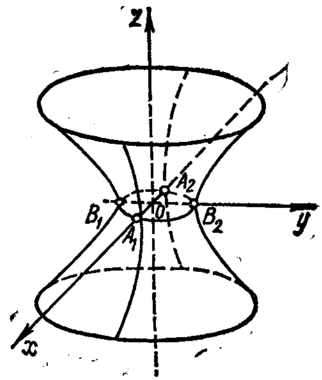

Рис. 12

Точка O, у якій перетинаються площини симетрії і осі симетрії, є центром симетрії еліпсоїда. Перерізи еліпсоїда його площинами симетрії називають *головними перерізами*. Саме за допомогою головних перерізів зображують еліпсоїд.

Поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо її уявної осі симетрії, називається *однопорожнинним гіперболоїдом обертання*. Нехай гіпербола

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

обертається навколо осі Oz. Тоді рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання має вигляд

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1. \qquad (8)$$

Якщо однопорожнинний гіперболоїд обертання рівномірно деформувати вздовж осі Oy, то дістанемо однопорожнинний гіперболоїд (рис. 12), канонічне рівняння якого має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (9)$$

Очевидно, що координатні площини є площинами його симетрії, координатні осі — осями його симетрії, точка O перетину площин та осей симетрії є центром його симетрії, або просто центром. Точки перетину однопорожнинного гіперболоїда з його осями симетрії називаються вершинами: A_1 (a; 0; 0), B_1 (0; b; 0), A_2 ($-a$; 0; 0), B_2 (0; $-b$; 0).

Вісь Oz — уявна вісь, тому однопорожнинний гіперболоїд її не перетинає. Відрізки a, b, c, які відтинає гіперболоїд на осях координат, називаються його півосями. Довжини дійсних півосей — a, b, а c — довжина уявної півосі.

Однопорожнинний гіперболоїд зображують за допомогою головних перерізів та перерізів, що їм паралельні. Головними перерізами однопорожнинного гіперболоїда (тобто перерізи його площинами симетрії) є гіперболи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

і еліпс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Двопорожнинним гіперболоїдом обертання називатимемо таку поверхню, яка утворюється обертанням гіперболи навколо її дійсної осі симетрії. Будемо обертати гіперболу

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0 \end{cases}$$

навколо осі Oz. Тоді рівняння гіперболоїда має вигляд

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1. \tag{10}$$

Після деформації осі Oy дістаємо канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{11}$$

Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох окремих порожнин, кожна з яких має форму опуклої чаші (рис. 13). У двопорожнинного гіперболоїда три площини симетрії — координатні площини, і три осі симетрії — осі координат. Точка O перетину площин симетрії та осей симетрії є центром симетрії двопорожнинного гіперболоїда.

Головними перерізами двопорожнинного гіперболоїда є гіперболи

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Вершинами двопорожнинного гіперболоїда є точки C_1 (0; 0; c) і C_2 (0; 0; $-c$), a, b — довжини уявних півосей, c — довжина дійсної півосі.

Параболоїдом обертання називають поверхню, утворену обертанням параболи навколо її осі симетрії. Будемо обертати параболу

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$$

навколо осі Oz. Тоді матимемо таке рівняння параболоїда обертання

$$\frac{X^2+Y^2}{p} = 2Z. \qquad (12)$$

Деформуючи параболоїд обертання, дістанемо канонічне рівняння *еліптичного параболоїда* (рис. 14):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p>0,\ q>0) \qquad (13)$$

(числа p і q — параметри еліптичного параболоїда).

Еліптичний параболоїд має дві площини симетрії, які збігаються з координатними площинами xOz і yOz. Віссю симетрії є вісь Oz. Головними перерізами еліптичного параболоїда є параболи

$$\begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0. \end{cases}$$

Початок координат є точкою дотику площини xOy до еліптичного параболоїда. Площини, паралельні до площини xOy, пере-

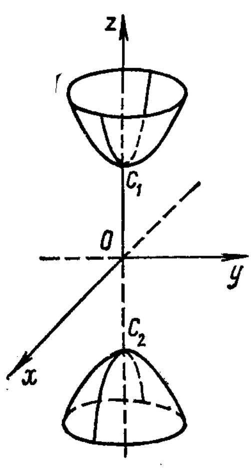

Рис. 13

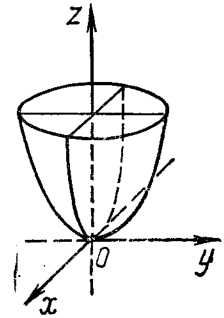

Рис. 14

тинають еліптичний параболоїд по еліпсах

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ z = k, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{2pk} + \frac{y^2}{2qk} = 1, \\ z = k \end{cases}$$

(рівняння таких площин $z = k$, $k > 0$).

Вершиною еліптичного параболоїда буде точка перетину осі симетрії Oz з еліптичним параболоїдом, тобто точка $O\,(0;\ 0;\ 0)$.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти координати центра і радіус сфери, яку задано рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

▲ Зведемо рівняння сфери до канонічного вигляду (4). Для цього виділяємо повні квадрати, які містять x, y, z. Тоді задане рівняння перепишемо у вигляді

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 8z) + 1 = 0$$

або

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 8z + 16) = 28.$$

Звідси

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 28.$$

Таким чином, центр сфери збігається з точкою $A\,(3;\ -2;\ 4)$, а радіус $R = 2\sqrt{7}$. ▼

2. Скласти рівняння дотичних площин до сфери $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 225$, якщо відомо, що вони паралельні площині $2x - 11y - 10z - 3 = 0$.

▲ З рівняння сфери бачимо, що її центр збігається з точкою $A\,(2;\ 0;\ 4)$, а радіус $R = 15$. Оскільки за умовою задачі площини, що дотикаються до даної сфери, паралельні заданій площині, то рівняння цих площин можемо записати таким чином:

$$2x - 11y - 10z + D = 0.$$

Дотична площина до сфери має з нею єдину спільну точку, відстань від якої до центра сфери дорівнює радіусу сфери. Тоді очевидно, що радіус сфери можна знайти як відстань від центра сфери до дотичної площини, отже,

$$R = \left| \frac{2x_0 - 11y_0 - 10z_0 + D}{15} \right|.$$

Тоді

$$15 = \left| \frac{2 \cdot 2 - 11 \cdot 0 - 10 \cdot 4 + D}{15} \right| \quad \text{або} \quad 225 = |-36 + D|,$$

звідки

$$-36 + D_1 = 225, \ D_1 = 261; \quad 36 - D_2 = 225, \ D_2 = -189.$$

Таким чином, рівняння шуканих дотичних площин мають вигляд

$$2x - 11y - 10z + 261 = 0, \quad 2x - 11y - 10z - 189 = 0. \ \blacktriangledown$$

3. Встановити, по якій лінії площина $x - 3 = 0$ перетинає поверхню

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{13} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Визначити її півосі та вершини.

▲ Лінія перетину заданого еліпсоїда з площиною $x - 3 = 0$ визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ x - 3 = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{6} = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Зрозуміло, що це є рівняння еліпса, що лежить у площині $x = 3$. Центр еліпса міститься в точці $A\ (3;\ 0;\ 0)$, півосі дорівнюють $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6}$. Вершинами цього еліпса будуть точки

$$A_1(3;\ 2\sqrt{2};\ 0), \quad A_2(3;\ -2\sqrt{2};\ 0),$$

$$B_1(3;\ 0;\ \sqrt{6}), \quad B_2(3;\ 0;\ -\sqrt{6}). \ \blacktriangledown$$

4. Скласти рівняння поверхні, яку дістаємо при обертанні гіперболи, що лежить у площині yOz і має центр, який збігається з початком координат, навколо уявної осі Oz, якщо ексцентриситет гіперболи дорівнює $^7/_4$ і відстань між фокусами дорівнює 14. Визначити вигляд поверхні та зобразити на рисунку.

▲ Для розв'язування задачі визначаємо рівняння гіперболи, що лежить у площині yOz, центр якої збігається з початком координат. Скористаємося відомостями § 2.3, а саме:

$$e = \frac{c}{a}, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Оскільки за умовою $e = 7/4$, а $2c = 14$, то $c = 7$, отже $a = 4$. Знайдемо

$$b^2 = 49 - 16, \quad b^2 = 33.$$

Отже, рівняння шуканої гіперболи з уявною віссю Oz має вигляд

$$\begin{cases} \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{33} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Обертання знайденої гіперболи за умовою проходить навколо осі Oz, тобто уявної осі. Тоді поверхня, яку дістаємо при цьому обертанні, буде однопорожнинним гіперболоїдом, рівняння якого

$$\frac{x^2 + y^2}{16} - \frac{z^2}{33} = 1, \text{ або } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{33} = 1. \ ▼$$

5. Скласти рівняння поверхні, яку дістаємо внаслідок обертання гіперболи, що лежить у площині xOy, центр якої знаходиться у початку координат, навколо дійсної осі, яка збігається з віссю Ox, якщо асимптоти цієї гіперболи задано рівняннями

$$\begin{cases} 4y \pm 3x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

а відстань між фокусами дорівнює 20. Визначити вигляд поверхні та зобразити її на рисунку.

▲ Знайдемо рівняння гіперболи, що обертається. Згідно з § 2.3, рівняння асимптот гіперболи мають вигляд $y = \pm \frac{b}{a} x$. Враховуючи умову, дістаємо

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{3}{4} a.$$

Тоді

$$\frac{9}{16} a^2 = 100 - a^2, \quad 25a^2 = 1600, \quad a^2 = 64, \quad b^2 = 36.$$

Отже, рівняння шуканої гіперболи матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Поверхня, яку дістаємо внаслідок обертання гіперболи навколо дійсної осі, буде двопорожнинним гіперболоїдом, отже, рівняння його, згідно з умовою, запишемо таким чином:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{64} = 1$$

(див. рис. 13).

6. Скласти рівняння поверхні, яку дістаємо при обертанні параболи, що лежить у площині yOz, навколо її осі симетрії, яка збігається з віссю Oy, якщо фокус параболи знаходиться у точці F (0; 3; 0) і вершина збігається з початком координат. Зобразити цю поверхню.

▲ Знаходимо рівняння параболи, що обертається. Згідно з § 2.3, маємо

$$\frac{p}{2} = 3, \quad p = 6.$$

Тоді рівняння параболи, що лежить у площині yOz, з віссю симетрії Oy матиме вигляд

$$\begin{cases} z^2 = 2py, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} z^2 = 12y, \\ x = 0. \end{cases}$$

Отже, рівняння шуканої поверхні запишемо у вигляді

$$\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{6} = 2y, \quad \text{або} \quad x^2 + z^2 = 12y.$$

Це є параболоїд обертання (див. рис. 14). ▼

Вправи

1. Знайти координати центра A і радіус R сфери, яку задано рівнянням: а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 6z + 9 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y + 25 = 0$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

Відповідь: а) A (—1; 1; 3), $R = \sqrt{2}$; б) A (4; —5; 0), $R = 4$; в) A (3; —2; 4), $R = 2\sqrt{7}$.

2. Скласти рівняння сфери, якщо відомо точки на сфері (3; 1; —3), (—2; 4; 1), (—5; 0; 0), а центр сфери належить площині $2x + y - z + 3 = 0$.

Відповідь: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 49$.

9. Знайти координати точок перетину прямої $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-\sqrt{7}}$ з сферою $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$.

Вказівка. Ця задача розв'язується за аналогією перетину прямої з площиною, тобто спочатку записуємо рівняння прямої в параметричному вигляді і підставляємо значення параметра t у рівняння сфери. Внаслідок чого дістаємо квадратне рівняння $9t^2 - 8t - 1 = 0$, звідки $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{9}$.

Відповідь: $A_1(0;\ -1;\ -\sqrt{7})$, $A_2\left(1\frac{1}{9};\ -2\frac{1}{9};\ \frac{\sqrt{7}}{9}\right)$.

4. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кола

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$$

Відповідь: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

5. Встановити, по якій лінії площина $y-3=0$ перетинає поверхню

$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{27}+\frac{z^2}{51}=1,$$

і знайти її півосі та вершини.

Відповідь: $\begin{cases}\frac{x^2}{10}+\frac{z^2}{34}=1,\\ y=3\end{cases}$ — еліпс з центром у точці $(0;\ 3;\ 0)$, $a=\sqrt{10}$, $c=\sqrt{34}$, його вершини $A_1(\sqrt{10};\ 3;\ 0)$, $A_2(-\sqrt{10};\ 3;\ 0)$, $B_1(0;\ 3;\ \sqrt{34})$, $B_2(0;\ 3;\ -\sqrt{34})$.

6. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса, який лежить у площині xOz і центр якого збігається з початком координат, навколо осі, що збігається з віссю Ox, якщо ексцентриситет еліпса $3/5$ і мала вісь дорівнює 8.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$.

7. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса, який лежить у площині yOz і центр якого збігається з початком координат, навколо осі Oz, якій належить велика вісь еліпса, якщо відстань між директрисами еліпса дорівнює 10, а ексцентриситет 0,8.

Відповідь: $\frac{x^2}{2{,}4}+\frac{y^2}{2{,}4}+\frac{z^2}{16}=1$.

8. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи, яка лежить у площині xOz і центр якої збігається з початком координат, навколо дійсної осі, що лежить на осі Oz, якщо уявна вісь гіперболи дорівнює $2\sqrt{19}$, відстань між директрисами 36.

Відповідь: $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{19}-\frac{z^2}{180}=-1$.

9. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи, яка лежить у площині yOz і центр якої збігається з початком координат, навколо уявної осі, що лежить на осі Oy, якщо дійсна вісь гіперболи дорівнює 10 і ексцентриситет її 3.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{200}+\frac{z^2}{25}=1$ — однопорожнинний гіперболоїд.

10. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи, яка лежить у площині xOy, навколо осі симетрії, що збігається з віссю Ox, якщо вершина параболи знаходиться у початку координат, вітки її напрямлені у бік додатного напряму осі Ox і, крім того, парабола проходить через точку $M_0(1;\ -2;\ 0)$.

Відповідь: $y^2+z^2=4x$ — параболоїд обертання.

§ 3.5. Циліндричні та конічні поверхні. Гіперболічний параболоїд

Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену рухом прямої, яка перетинає задану криву, залишаючись паралельною сталому вектору (рис. 15).

Пряму, рухом якої утворюється циліндрична поверхня, будемо називати *твірною*, а криву, яку твірні перетинають,— *напрямною циліндра*. У наш розгляд включатимемо лише ті циліндричні поверхні, твірні яких паралельні одній з координатних осей.

Кожне рівняння $f(x, y) = 0$ з двома змінними визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною є крива

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Розглянемо деякі циліндричні поверхні:

$x^2 + y^2 = R^2$ — *круговий циліндр*, напрямною якого є коло

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

що лежить в площині xOy, а твірні паралельні осі Oz (див. рис 15);

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — еліптичний циліндр, напрямною якого є еліпс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

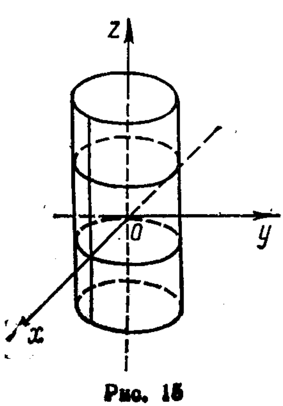

Рис. 15

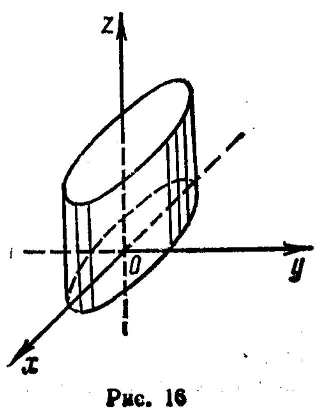

Рис. 16

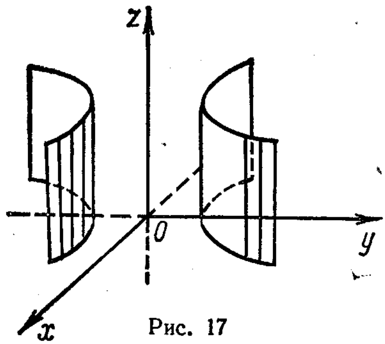

Рис. 17

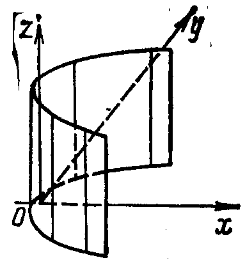

Рис. 18

що лежить в площині xOy, а твірні паралельні осі Oz (рис. 16);

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — *гіперболічний циліндр*, напрямною якого є гіпербола

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

що лежить в площині xOy, а твірні паралельні осі Oz (рис. 17);

$y^2 = 2px$ — *параболічний циліндр*, напрямною якого є парабола

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0, \end{cases}$$

що лежить в площині xOy, а твірні паралельні осі Oz (рис. 18).

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена рухом прямої, що проходить через задану точку S і перетинає задану криву.

Прямі, які утворюють конічну поверхню, називаються *твірними поверхні*. Точка, спільна для всіх твірних, називається *вершиною*, а крива, яку перетинають твірні,— *напрямною конуса* або *конічної поверхні* (рис. 19).

Однорідне рівняння другого порядку з трьома змінними, якщо воно виражає дійсну поверхню в просторі і не розкладається на лінійні множники, є рівнянням конуса з вершиною в початку координат.

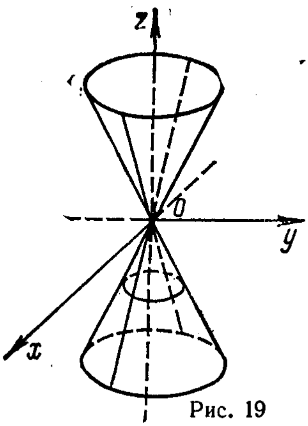

Рис. 19

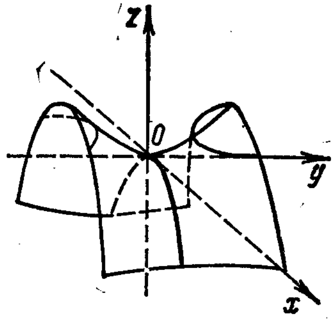

Рис. 20

Канонічне рівняння конуса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (1)$$

(у цьому випадку віссю конуса є вісь Oz).

Якщо $a=b$, то маємо *круговий конус*. Числа a, b, c — параметри конуса, геометрично a і b — довжини півосей еліпса, який дістаємо в результаті перетину конуса площинами $z=\pm c$.

Конус має три площини симетрії, які збігаються з координатними площинами, і три осі симетрії, які збігаються з осями координат. Вершина конуса є його центром симетрії.

Перерізи конуса площинами його симетрії називаються *головними перерізами*. Розглянемо їх.

Перерізи конуса площинами $x=0$ і $y=0$ є дві пари прямих, що перетинаються в початку координат:

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ x=0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=0,\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\\ x=0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\\ x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ y=0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ y=0.\end{cases}$$

Переріз конуса площиною $z = 0$ є точка:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Якщо треба зобразити конус, то знаходять головні перерізи та перерізи площинами $z = \pm c$.

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, описана параболою, яка рухається в просторі так, що її площина залишається весь час паралельною заданій площині, наприклад yOz, а вершина параболи ковзає по нерухомій параболі, розміщеній у перпендикулярній площині, наприклад xOz. При цьому напрями осей обох парабол протилежні.

Якщо маємо відповідно рівняння нерухомої і рухомої парабол

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 2q(h - z), \\ x = \pm d, \end{cases}$$

де d — відстань площини рухомої параболи від координатної площини yOz, h — відстан вершини рухомої параболи від координатної площини xOy, то канонічне рівняння гіперболічного параболоїда має вигляд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p > 0,\ q > 0). \tag{2}$$

Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Дві його взаємно перпендикулярні площини симетрії xOz і yOz перетинаються по осі симетрії, яка називається *віссю параболоїда*. Точка перетину осі параболоїда з поверхнею називається його *вершиною*. Гіперболічний параболоїд не має центра (рис. 20).

ПРИКЛАДИ

1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, якщо за напрямну взяти еліпс, сума півосей якого дорівнює 4 і відстань між фокусами також дорівнює 4. Еліпс лежить в площині yOz, центр його суміщається з початком координат, а велика вісь — з віссю Oy. Твірні циліндричної поверхні паралельні осі Ox.

▲ Для розв'язування даної задачі потрібно знайти рівняння напрямної. Напрямний вектор $\vec{s} = (1, 0, 0)$ твірної — орт осі Ox.

Складемо рівняння еліпса згідно з умовою задачі. Нехай його велика піввісь дорівнює a, мала піввісь b, півфокусна відстань c. Тоді $a + b = 4$, $2c = 4$, звідки $c = 2$. Відомо, що $b^2 = a^2 - c^2$, або $b^2 = a^2 - 4$. Підставляючи в знайдену рівність $b = 4 - a$, дістаємо $(4 - a)^2 = a^2 - 4$. Тоді $a = 2{,}5$ і $b = 1{,}5$. Отже, рівняння еліпса, заданого в площині yOz, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{6{,}25} + \dfrac{z^2}{2{,}25} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Щоб скласти рівняння циліндричної поверхні, запишемо рівняння твірної, що проходить через точку M_0 $(0;\ y_0;\ z_0)$. Маємо

$$\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}.$$

Розглянемо перетин твірної і напрямної і визначимо залежність між y_0 і z_0, тобто розв'яжемо систему рівнянь напрямної і твірної поверхонь:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{6{,}25} + \dfrac{z^2}{2{,}25} = 1, \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y - y_0}{0} = \dfrac{z - z_0}{0}; \end{cases}$$

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{z - z_0}{0}$, звідки $z = z_0$; $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - y_0}{0}$, звідки $y = y_0$.

Одержані значення y і z підставимо у перше рівняння системи: $\dfrac{y_0^2}{6{,}25} + \dfrac{z_0^2}{2{,}25} = 1$. Це рівняння і виражає шукану залежність. Будь-яку точку твірної можна розглядати як точку поверхні. Отже, визначивши y_0, z_0 із рівняння твірної через біжучі координати і підставляючи їх у знайдену рівність, дістанемо рівняння шуканої поверхні

$$\frac{y^2}{6{,}25} + \frac{z^2}{2{,}25} = 1. \ ▼$$

2. Скласти рівняння конічної поверхні, вершина якої лежить в точці M_0 $(0;\ 3;\ 5)$, а напрямною є лінія

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ z = -1. \end{cases}$$

▲ Складемо рівняння довільної твірної конічної поверхні: $\frac{x}{l}=\frac{y-3}{m}=\frac{z-5}{1}$ (l і m — довільні). Знайдемо залежність між l і m з умови перетину твірної і напрямної:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1, \\ z=-1, \\ \frac{x}{l}=\frac{y-3}{m}=\frac{z-5}{1}. \end{cases}$$

Виключаючи біжучі координати, дістаємо: $\frac{x}{l}=z-5$, $z=-1$, отже, $x=-6l$; $\frac{y-3}{m}=z-5$, $z=-1$, отже, $y=3-6m$. Знайдені значення x і y підставляємо у перше рівняння системи. Маємо

$$\frac{36l^2}{9}+\frac{(3-6m)^2}{16}=1 \text{ або } 64l^2+36m^2-36m-7=0.$$

Це рівняння виражає залежність між l і m. Біжучу точку твірної конічної поверхні можна розглядати як біжучу точку поверхні. Визначаємо l і m через змінні і підставляємо в останнє рівняння. Дістаємо

$$l=\frac{x}{z-5},\ m=\frac{y-3}{z-5}.$$

Тоді рівняння шуканої конічної поверхні матиме вигляд

$$64\left(\frac{x}{z-5}\right)^2+36\left(\frac{y-3}{z-5}\right)^2-36\left(\frac{y-3}{z-5}\right)-7=0$$

або

$$64x^2+36y^2-7z^2-36yz-36y-178z-391=0. \ ▼$$

3. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні радіуса R, віссю якої є вісь Oy.

▲ Віссю циліндричної поверхні за умовою є вісь Oy, тому напрямною шуканої поверхні буде коло радіуса R, що розташоване у площині xOz. Таким чином, рівняння шуканої циліндричної поверхні має вигляд

$$x^2+z^2=R^2. \ ▼$$

4. Встановити, що площина $y+6=0$ перетинає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболі. Знайти її параметр і вершину.

▲ Оскільки парабола, рівняння якої потрібно знайти, лежить у площині $y + 6 = 0$, то її рівняння можна визначити з системи:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z, \\ y = -6 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 = 2 \cdot 15\left(z + \frac{3}{2}\right), \\ y = -6. \end{cases}$$

Тоді, згідно з § 2.3, маємо, що параметр параболи $p = 15$, а вершина її — точка, що лежить у площині $y + 6 = 0$ і має координати $\left(0; -6; \frac{3}{2}\right)$. ▼

Вправи

1. Які поверхні визначають рівняння: а) $y = 6z^2$; б) $xy = 3$; в) $y^2 + z^2 = 9$; г) $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$; д) $y^2 + z^2 - \frac{x^2}{4} = 0$; е) $-x^2 + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{7} = 0$; є) $y^2 + z^2 - 2x^2 = 0$; ж) $2x^2 - 3z^2 = -12y$; з) $12x^2 - 2z - 5y^2 = 0$; і) $9y^2 - 4z^2 + 8x = 0$.

Відповідь: а) параболічний циліндр; б) гіперболічний циліндр; в) прямий круговий циліндр; г) еліптичний циліндр; д), е) круговий конус з віссю обертання Ox; є) круговий конус $\frac{y^2 + z^2}{2} - x^2 = 0$ з віссю Ox; ж) — і) відповідно гіперболічні параболоїди

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{6} = y, \quad \frac{x^2}{\frac{1}{6}} - \frac{y^2}{25} = z, \quad -\frac{y^2}{\frac{8}{9}} + \frac{z^2}{2} = x.$$

2. Скласти рівняння циліндра, напрямну якого задано рівняннями $\begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ а твірні перпендикулярні до площини напрямної.

Відповідь: $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$.

3. Скласти рівняння конуса, вершина якого лежить у точці $M_0(0; 2; 4)$, а напрямною є крива

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $4x^2 + 9y^2 - 12yz + 12y + 24z - 60 = 0$.

4. Пряма $y = z$ обертається навколо осі Oy. Знайти рівняння поверхні обертання.

Відповідь: $x + y^2 - z^2 = 0$.

5. Скласти рівняння перетину поверхні $4x^2 - 9y^2 + 8z^2 = 0$ з площиною $y = 3$.

Відповідь: $\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{81}{4}} + \frac{z^2}{\frac{81}{8}} = 1, \\ y = 3. \end{cases}$

ЧАСТИНА II

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

РОЗДІЛ 4. МНОЖИНИ. ДІЙСНІ І КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

До основних понять математичного аналізу і математики взагалі належать поняття множини і дійсного числа, які й розглядаються в § 4.1 і 4.2. Слід звернути увагу на властивості модуля дійсного числа, які надалі широко використовуватимуться.

Потреби багатьох розділів математики та її застосувань змушують узагальнити поняття дійсного числа і увести в розгляд множину комплексних чисел. У § 4.3 дається поняття комплексного числа, розглядаються різні форми його зображення і дії над комплексними числами.

§ 4.1. Множини і операції над ними

Під *множиною* розуміють будь-яку сукупність об'єктів, які називають *елементами множини*. Запис $a \in A$ означає, що об'єкт a є елементом множини A (належить множині A); у противному разі записують $a \notin A$. Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$. Запис $A \subset B$ (A міститься в B) означає, що кожен елемент множини A є елементом множини B; у цьому випадку множину A називають *підмножиною* множини B. Порожня множина $\varnothing$ і сама множина A також є підмножинами множини A. Множини A і B називають *рівними* ($A = B$), якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Множина *задається* двома способами: а) переліком усіх її елементів, наприклад множина з двох чисел $A = \{1, 2\}$; б) заданням деякої характеристичної властивості елементів саме цієї природи (множина студентів інституту, множина міст України). Іноді цей спосіб задання множин виражають спеціальним записом. Наприклад, запис $A = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$ означає, що множина A складається з тих елементів x, які є коренями рівняння $x^2 - 4 = 0$.

Об'єднанням множин A і B називається множина

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

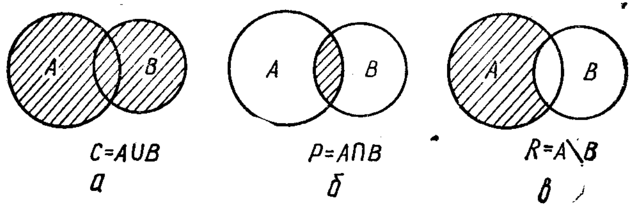

Рис. 21

Різницею множин A і B називається множина

$$R = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Перерізом множин A і B називається множина

$$P = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Часто для наочності дії над множинами умовно зображають у вигляді так званих *кругів Ейлера* (рис. 21).

ПРИКЛАДИ

1. Записати множини, перелічивши їх елементи: а) $A = \{n \mid n$ — додатні числа, кратні 3 і менші $25\}$; б) $B = \{n \mid n$ — прості числа, менші $20\}$.

▲ а) Оскільки на 3 діляться числа, сума цифр яких утворює число, яке ділиться на 3, то $A = \{3, 6, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

б) Просте число не має дільників, відмінних від 1 і самого числа, тому $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. ▼

2. Чи рівні множини $\{a, b, c, d\}$ і $\{b, d, c, a\}$?

▲ Так, оскільки вони складаються з однакових елементів. Порядок розміщення елементів у множині не має значення. ▼

3. Нехай $M = \{$чотирикутники$\}$. Чи належать до множини M такі фігури: квадрат, ромб, коло, шестикутник?

▲ Квадрат і ромб є елементами множини M, а коло і шестикутник не належать до заданої множини. ▼

4. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ і $B = \{2, 4, 6\}$. Знайти: а) суму C; б) різницю R; в) переріз P множин A і B.

▲ За означенням маємо: а) $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = A$; б) $R = A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$; в) $P = A \cap B = \{2, 4, 6\} = B$. ▼

5. Нехай $N = \{$натуральні числа$\}$, $M = \{$додатні раціональні числа$\}$, $P = \{$прості числа$\}$, $Q = \{$додатні

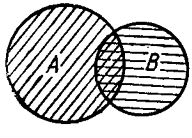

Рис. 22

непарні числа}. Чи правильне твердження $P \subset (Q \cap N) \cup M$?

▲ Оскільки $Q \cap N = Q$, а $Q \cup M = M$, то $P \subset M$, а отже, $P \subset (Q \cap N) \cup M$, тому дане твердження правильне. ▼

6. Користуючись кругами Ейлера, довести рівність $A \cap (A \cup B) = A$.

▲ При доведенні заданої рівності скористатися рис. 22. ▼

Вправи

1. Записати множини, перелічивши їх елементи: а) $A = \{n \mid n$ — додатні числа, кратні 7 і менші $60\}$; б) $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$.
Відповідь: а) $A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56\}$; б) $B = \{2, 3\}$.

2. Записати усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.
Відповідь: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$.

3. Нехай A — множина цілих чисел, що діляться на 4, а B — множина цілих чисел, що діляться на 3. Які з чисел 9, 0, —24, —53, 128, 1 242 048 входять у множину $A \cup B$?
Відповідь: 9, 0, —24, 1 242 048.

4. Нехай A — множина, що складається з 30 стільців, а B — множина, що складається з 30 студентів. Чи $A = B$? Обгрунтувати відповідь.

5. Нехай N, M, P і Q — множини, розглянуті в прикладі 5. Чи правильне твердження $P \subset Q \cap N$?
Відповідь: ні, оскільки $2 \notin Q$.

6. За допомогою наочного зображення на площині впевнитись, що для будь-яких трьох множин A, B і C справджуються такі рівності: а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. Користуючись кругами Ейлера, довести рівності: а) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; б) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$.

8. Вказати, які з поданих нижче множин скінченні, а які нескінченні: а) множина цілих чисел, що діляться на 5; б) множина коренів заданого многочлена; в) множина всіх рослин на Землі.

§ 4.2. Числові множини. Модуль дійсного числа

Множини, елементами яких є числа, називають *числовими*. Прикладами таких множин є: множина *натуральних* чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, *цілих* чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$, *раціональних* чисел $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$.

Кожному раціональному числу на числовій прямій відповідає лише одна точка. Однак на числовій прямій є точки, яким не відповідають ніякі раціональні числа. Такі точки називаються *ірраціональними*, а відповідні їм числа — *ірраціональними числами*. Об'єднання множин раціональних та ірраціональних чисел утворює *множину дійсних чисел*, яку позначають через $\mathbb{R}$. Між множиною дійсних чисел і множиною точок прямої існує взаємно однозначна відповідність. Дійсне число зображається нескінченним десятковим дробом, причому раціональне — періодичним дробом, а ірраціональне — неперіодичним.

Множину всіх дійсних чисел (точок числової прямої) x, які задовольняють нерівності $a \leqslant x \leqslant b$, $a < x < b$, $a \leqslant x < b$ і $a < x \leqslant b$, називають відповідно *відрізком*, *інтервалом*, *піввідрізком* і *півінтервалом* і позначають $[a; b]$, (a, b), $[a; b)$ і $(a; b]$. Усі вказані числові множини об'єднують під загальною назвою «*проміжок*» і позначають $\langle a; b\rangle$.

Модулем (*абсолютною величиною*) дійсного числа x (позначається $|x|$) називають невід'ємне число, яке задовольняє умову: $|x| = x$, якщо $x \geqslant 0$, і $|x| = -x$, якщо $x < 0$.

Основні властивості модуля

$$|-x| = x, \quad \sqrt{x^2} = |x|, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|,$$

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|, \quad |xy| = |x| \cdot |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

ПРИКЛАДИ

1. Показати, що сума раціонального та ірраціонального чисел є число ірраціональне, а сума двох ірраціональних чисел може бути раціональним числом.

▲ Нехай r — раціональне число, α — ірраціональне і $r + \alpha = \beta$. Припустимо, що β — раціональне число. Тоді $\alpha = \beta - r$ також повинно бути раціональним (як різниця двох раціональних чисел), а це суперечить умові. Отже, β — ірраціональне число.

Сума двох ірраціональних чисел (їх можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного дробу) може бути раціональним числом. Наприклад, $\alpha = 4{,}232\,332\,333\ldots$ і $\beta = 1{,}656\,556\,555\ldots$. Їх сума $\alpha + \beta = 5{,}888\ldots = 5{,}(8)$ є числом раціональним (поясніть, чому). ▼

2. Визначити, якому числовому проміжку належить x, якщо:

а) $|x| < 2$; б) $|x| \geqslant 4$; в) $|x| \leqslant 3$; г) $|x| > 5$.

▲ Користуючись означенням модуля дійсного числа, дістаємо:

а) $-2 < x < 2$; б) $x \geqslant 4$ або $x \leqslant -4$; в) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; г) $x > 5$ або $x < -5$.

Отже, нерівність $|x| \leqslant a$ еквівалентна подвійній нерівності $-a \leqslant x \leqslant a$, а з нерівності $|x| \geqslant b$ випливає, що $x \geqslant b$ або $x \leqslant -b$. ▼

3. Визначити множину всіх дійсних значень x, при яких мають дійсні значення такі аналітичні вирази: а) $\sqrt{x^2 - 4}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

▲ а) Значення квадратного кореня є дійсним, якщо $x^2 - 4 \geqslant 0$, тобто $x^2 \geqslant 4$. Добуваючи квадратний корінь з лівої і правої частин останньої нерівності та враховуючи, що $\sqrt{x^2} = |x|$, дістаємо $|x| \geqslant 2$, тобто $x \geqslant 2$ або $x \leqslant -2$.

б) Оскільки квадратний корінь міститься у знаменнику дробу, то даний аналітичний вираз має смисл, якщо $x + 1 > 0$, тобто при $x > -1$. ▼

4. Розв'язати нерівності: а) $|x - 1| < 3$; б) $|x - 2| > x - 2$; в) $\log_2 |x| \geqslant 1$; г) $3^{|x|-2} < 1$; д) $x^2 < 5 - 4x$.

▲ а) Нерівність $|x - 1| < 3$ можна записати через подвійну нерівність $-3 < x - 1 < 3$ (див. приклад 2). Звідси $-2 < x < 4$, тобто задана нерівність виконується для всіх $x \in (-2; 4)$.

б) Згідно з означенням модуля ця нерівність має місце, якщо $x - 2 < 0$, звідки $x < 2$, тобто $x \in (-\infty; 2)$.

в) Запишемо нерівність у вигляді $\log_2 |x| \geqslant \log_2 2$, звідки $|x| \geqslant 2$. Отже, маємо $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

г) Оскільки основа степеня є додатне число $3 > 1$, то задана нерівність справджується тоді й тільки тоді, коли $|x| - 2 < 0$, тобто при $|x| < 2$. Отже, $x \in (-2; 2)$.

д) Перепишемо дану нерівність у вигляді $x^2 + 4x - 5 < 0$ або $(x + 2)^2 < 9$. Розв'язуючи цю нерівність, маємо $|x + 2| < 3$ або $-3 < x - 2 < 3$, звідки $-5 < x < 1$. ▼

5. Знайти дійсні корені рівнянь: а) $|x + 1| = 3$; б) $|x^2 - 1| = 1 - x^2$; в) $|\cos x| = \cos x + 1$; г) $|x - 3| - |x + 1| = 2x - 1$.

▲ а) Якщо $x + 1 \geqslant 0$, то $|x + 1| = x + 1$ і рівняння набирає вигляду $x + 1 = 3$, звідки $x = 2$. Якщо ж $x + 1 < 0$, то $|x + 1| = -x - 1$ і дане рівняння матиме вигляд $-x - 1 = 3$, тобто $x = -4$. Отже, рівняння має два дійсних корені $x_1 = 2$ і $x_2 = -4$.

б) Оскільки завжди $|x^2 - 1| \geqslant 0$, то й права частина $1 - x^2$ повинна бути невід'ємною, тобто $1 - x^2 \geqslant 0$, звідки $x^2 \leqslant 1$. Отже, розв'язком даного рівняння є ті значення x, для яких $|x| \leqslant 1$.

в) Якщо x таке, що $\cos x \geqslant 0$, то $|\cos x| = \cos x$ і рівняння має вигляд $\cos x = \cos x + 1$. Воно не має розв'язків. Якщо ж $\cos x < 0$, то $|\cos x| = -\cos x$ і рівняння набирає вигляду $-\cos x = \cos x + 1$ або $-2\cos x = 1$, звідки $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

г) Розглянемо ті значення x, при яких вирази, записані під знаком модуля, дорівнюють нулю. Це є $x = -1$ і $x = 3$. Розіб'ємо відповідними точками числову пряму на три інтервали: $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ і $(3; +\infty)$ (тобто скористаємось методом інтервалів). На кожному інтервалі рівняння запишемо без знаків модуля.

Для $x \in (-\infty; -1)$ двочлени $x - 3$ і $x + 1$ від'ємні, тому $|x - 3| = 3 - x$ і $|x + 1| = -x - 1$. Рівняння г) на цьому інтервалі набирає вигляду $3 - x - (-x - 1) = 2x - 1$, звідки $2x = 5$, тобто $x = \frac{5}{2}$. Однак $\frac{5}{2} \notin (-\infty; -1)$ і тому не є коренем рівняння.

Для $x \in (-1; 3)$ маємо рівняння $3 - x - x - 1 = 2x - 1$, звідки $x = \frac{3}{4}$. Оскільки $\frac{3}{4} \in (-1; 3)$, то це число є коренем рівняння г).

При $x \in (3; +\infty)$ рівняння набирає вигляду $x - 3 - x - 1 = 2x - 1$, звідки $x = -\frac{3}{2}$. Оскільки $-\frac{3}{2} \notin (3; +\infty)$, то це число не є розв'язком.

Нарешті, числа -1 і 3 не задовольняють дане рівняння. Отже, маємо єдиний розв'язок $x = \frac{3}{4}$. ▼

6. Розв'язати нерівність $|x - 2| + |2x - 1| > 3x + 1$.

▲ Скористаємось методом інтервалів. Вирази, записані під знаком модуля, дорівнюють нулю при $x = \frac{1}{2}$ і $x = 2$. Розглянемо задану нерівність в інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ і $(2; +\infty)$.

У першому інтервалі, тобто для $-\infty < x < \frac{1}{2}$, нерівність матиме вигляд $2 - x - 2x + 1 > 3x + 1$ або $3x < 1$, звідки $x < \frac{1}{3}$ Оскільки ці значення x належать вказаному проміжку, то вони задовольняють задану нерівність.

В інтервалі $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ нерівність еквівалентна такій: $2 - x + 2x - 1 > 3x + 1$, тобто $-2x > 0$, звідки $x < 0$. Ці значення x не є розв'язками даної нерівності, оскільки вони не належать вказаному проміжку $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

Нарешті, для $2 < x < +\infty$ нерівність матиме вигляд $3x - 3 > 3x + 1$ (поясність, чому). Ця нерівність розв'язку не має. Отже, задану нерівність задовольняють значення $x < \frac{1}{3}$. ▼

Вправи

1. Вказати два ірраціональних числа, різниця яких є число раціональне.

2. Вказати два ірраціональних числа, добуток яких є число раціональне.

3. Довести, що не існує раціонального числа r такого, що $r^2 = 7$.

4. При яких дійсних значеннях x задані аналітичні вирази мають дійсні значення:

а) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$; б) $\sqrt{1 + 6x}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

Відповідь: а) $x \neq 2$, $x \neq 3$; б) $x > -\frac{1}{6}$; в) $x < -1$, $x > 3$.

5. Розв'язати нерівності: а) $|x| > 3$; б) $|x| \leqslant 5$; в) $x^2 - 4 \geqslant 0$; г) $|2x + 3| < 5$; д) $\log_3 |x + 2| > 1$; е) $2^{|x| - 3} \leqslant 1$; є) $\left|\frac{x+2}{x}\right| > \frac{x+2}{x}$; ж) $|3x + 1| - |x + 2| < x + 4$; з) $|x| < |x + 1| - |2x - 4|$.

Відповідь: а) $x > 3$, $x < -3$; б) $-5 \leqslant x \leqslant 5$; в) $x \leqslant -2$, $x \geqslant 2$; г) $-4 < x < 1$; д) $x > 1$, $x < -5$; е) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; є) $-2 < x < 0$; ж) $-\frac{7}{5} < x < 5$; з) $2 \leqslant x < \frac{5}{2}$.

6. Знайти дійсні корені рівнянь: а) $|x - 1| = 4$; б) $|\sin x| = 2 + \sin x$; в) $|x^2 - 9| = 9 - x^2$; г) $|x + 1| - |3x + 4| = 2x - 5$.

Відповідь: а) $x = -3$, $x = 5$; б) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; г) $x = 0{,}5$.

§ 4.3. Комплексні числа і дії над ними

Комплексним числом називається вираз вигляду $z = x + iy$ (алгебраїчна форма комплексного числа), де $x, y \in \mathbb{R}$, i — уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$). Число x називається *дійсною частиною* комплексного числа z і позначається $\operatorname{Re} z$, а число y — *уявною частиною* і позначається $\operatorname{Im} z$. Множину всіх комплексних чисел позначають через $\mathbb{C}$. Арифметичні операції над комплексними числами виконуються за такими правилами ($z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$):

а) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

б) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$; (1)

в) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

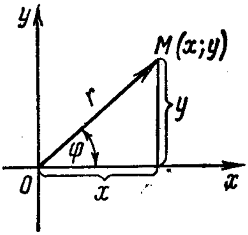

Рис. 23

Комплексне число $z = x + iy$ зображається точкою $M(x; y)$ на координатній площині, де дійсна частина x відкладається вздовж осі Ox, а уявна y — уздовж осі Oy, або вектором, початок якого знаходиться в точці (0; 0), а кінець — у точці $M(x; y)$ (рис. 23). Площину в цьому випадку називають *комплексною*. Довжина вектора $\overrightarrow{OM}$ називається *модулем* комплексного числа і позначається $|z|$, або r. Отже,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Тоді модуль різниці двох комплексних чисел $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані між точками комплексної площини, які відповідають цим числам (геометричний зміст модуля різниці). Кут φ між додатним напрямом осі Ox і напрямом вектора $\overrightarrow{OM}$ (або радіуса-вектора $\vec{z}$) називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $\operatorname{Arg} z$. Якщо $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, то це значення φ називається *головним значенням аргумента* і позначається $\arg z$. Отже, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Для обчислення $\arg z$ користуються формулами

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Із рис. 23 бачимо, що $x = r\cos\varphi$ і $y = r\sin\varphi$. Тоді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \quad (4)$$

Це так звана *тригонометрична форма комплексного числа.* Дії над комплексними числами $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ виконуються за такими правилами:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \qquad (5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \qquad (6)$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \ \ (\textit{формула Муавра}), \qquad (7)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (8)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Із формули (8) випливає, що комплексні числа, які є коренями n-го степеня з комплексного числа z, відповідають точкам комплексної площини, розміщеним у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у точці $z = 0$.

Число $\bar{z} = x - iy$ називається *спряженим* до комплексного числа $z = x + iy$. Очевидно, $|\bar{z}| = |z|$, $\arg\bar{z} = -\arg z$, $z\bar{z} = |z|^2$.

Поясніть, чому множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ є підмножиною множини комплексних чисел $\mathbb{C}$. Сформулюйте, за яких умов $z_1 = z_2$ і $z = 0$. Поясніть, які числа називаються *суто уявними* і який аргумент у числа $z = 0$.

ПРИКЛАДИ

1. Виконати арифметичні дії над числами $z_1 = 1 + 2i$ і $z_2 = 2 - 5i$.

▲ За формулами (1) маємо $z_1 + z_2 = 3 - 3i$, $z_1 - z_2 = -1 + 7i$. Добуток можна обчислити за загальними правилами множенням двочленів $1 + 2i$ та $2 - 5i$, враховуючи, що $i^2 = -1$. Отже, $z_1 z_2 = (1 + 2i)(2 - 5i) = 2 + 4i - 5i + 10 = 12 - i$. Частку можна обчислити за правилом із формул (1), однак простіше це можна зробити, домноживши чисельник і знаменник дробу на число, спряжене до знаменника, і врахувавши, що $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$. Отже,

$$\frac{1+2i}{2-5i} = \frac{(1+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+4i+5i-10}{4+25} = -\frac{8}{29} + \frac{9}{29}i. \ ▼$$

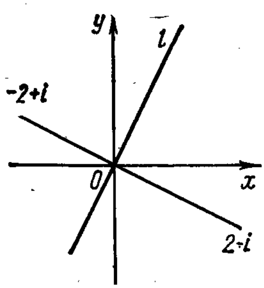

Рис. 24

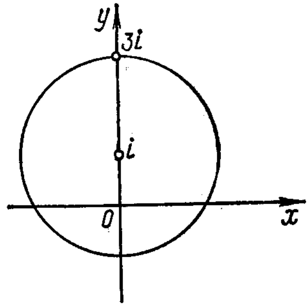

Рис. 25

2. Обчислити $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13}$.

▲ Ураховуючи властивість степеня і те, що $i^2 = -1$, маємо

$$i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} = i^{10}(1 + i + i^2 + i^3) =$$
$$= (-1)^5(1 + i - 1 - i) = 0. \ ▼$$

3. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1 = x^2 - y$ і $z_2 = (y^2 - 1)\,i + 1$ рівні між собою?

▲ Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ рівні між собою тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$. Отже, прирівнюючи дійсні та уявні частини заданих чисел, дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ y^2 - 1 = 0. \end{cases}$ Розв'язками цієї системи є дві пари чисел $x = \sqrt{2}$, $y = 1$ і $x = 0$, $y = -1$. ▼

4. Визначити модуль, головне значення аргумента комплексного числа z і записати його в тригонометричній формі:

а) $z = -3$; б) $z = i$; в) $z = 1 - i$.

▲ Користуючись формулами (2) — (4), дістаємо:

а) $r = |z| = 3$, $\arg(-3) = \pi$, $z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$;

б) $r = |z| = |i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

в) $r = |1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $\arg(1 - i) = \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} =$

$= -\frac{\pi}{4}$, $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. ▼

5. Яка множина точок комплексної площини задається умовами:

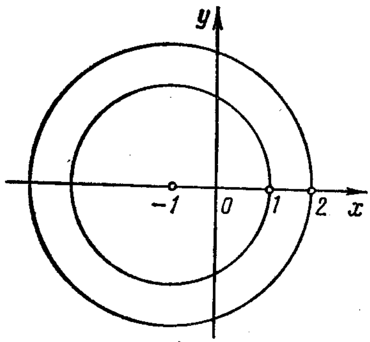

Рис. 26

а) $\operatorname{Re} z > 0$; б) $|z - 2 + i| = |z + 2 - i|$; в) $|z - i| = 2$; г) $2 \leqslant |z + 1| \leqslant 3$?

▲ а) Задану нерівність задовольняють всі точки півплощини $x > 0$.

Надалі використаємо геометричний зміст модуля різниці.

б) Записавши задану рівність у вигляді $|z - (2 - i)| = |z - (-2 + i)|$, робимо висновок, що її задовольняють ті точки комплексної площини, які однаково віддалені від точок $z_1 = 2 - i$ та $z_2 = -2 + i$. Це є пряма l (рис. 2).

в) Задану рівність задовольняють ті точки площини, які розміщені на відстані 2 від точки $z = i$. Вони лежать на колі радіуса 2 з центром у точці $z = i$ (рис. 25).

г) Множина точок площини, яка задовольняє подвійну нерівність $2 \leqslant |z + 1| \leqslant 3$, розміщена всередині кільця (включаючи і його межу), утвореного двома концентричними колами з центром у точці $z = -1$ і з радіусами, рівними 2 і 3 відповідно (рис. 26). ▼

6. Розв'язати рівняння: а) $(z + i)(1 - 2i) + (1 - iz)(3 + 4i) = 1 + 5i$; б) $z^2 - \bar{z} = 0$; в) $z^2 + |z|^2 = 0$.

▲ а) Маємо $z - 2zi + i + 2 + 3 + 4i - 3zi + 4z = 1 + 5i$, звідки $z(5 - 5i) = -4$. Тоді

$$z = \frac{-4}{5 - 5i} = -\frac{4}{5}\,\frac{1 + i}{(1 - i)(1 + i)} = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}i.$$

б) Нехай $z = x + iy$. Тоді $\bar{z} = x - iy$ і рівняння набирає вигляду $(x + iy)^2 - (x - iy) = 0$ або $x^2 + 2xyi - y^2 - x + iy = 0$. Оскільки $z = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y = 0$, то в нашому випадку дістанемо

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0, \\ 2xy + y = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 - x - y^2 = 0, \\ y(2x + 1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є пари дійсних чисел (0; 0); (1; 0), $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, яким відповідають такі комплексні числа: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

в) Оскільки $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то аналогічно попередньому дістаємо рівняння $x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 + y^2 = 0$, звідки для визначення x і y маємо систему $\begin{cases} x^2 = 0, \\ xy = 0. \end{cases}$ Її розв'язками є $x = 0$ і $y \in \mathbb{R}$. Тому розв'язками заданого рівняння є числа суто уявні: $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$. ▼

7. Записати в алгебраїчній і тригонометричній формах числа:

а) $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$;

б) $z = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}{2+2i}$.

▲ а) Подаючи число $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ у тригонометричній формі і користуючись формулою (5), дістаємо

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Розділивши одержане число на i, матимемо

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right).$$

б) Оскільки $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, то за формулою (6) маємо

$$z = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos 0 + i\sin 0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \ ▼$$

8. Обчислити $(\sqrt{3} + i)^6$.

▲ Оскільки $|\sqrt{3} + i| = 2$ і $\arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}$, то за формулою (7) дістаємо

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6\left(\cos 6\cdot\frac{\pi}{6} + i\sin 6\cdot\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64. \ ▼$$

9. Розв'язати рівняння: а) $z^4 = 1$; б) $z^3 = i$.

▲ а) Маємо $z = \sqrt[4]{1}$. Запишемо число 1 у тригонометричній формі $1 = \cos 0 + i\sin 0$. Тоді за формулою (8) дістанемо

$$\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{4}+$$

$$+i\sin\frac{0+2k\pi}{4}=\cos k\pi+i\sin k\pi,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Надаючи k відповідних значень, дістаємо чотири значення кореня: $z_1=1$, $z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, $z_3=\cos\pi+$ $+i\sin\pi=-1$ і $z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$. Як бачимо, корені цього рівняння відповідають точкам, розміщеним у вершинах квадрата, вписаного в коло радіуса 1 з центром у точці $z=0$.

б) Маємо $z=\sqrt[3]{i}$. Оскільки $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, то за формулою (8)

$$\sqrt[3]{i}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,$$

звідки дістаємо $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ і $z_3=$ $=-i$. ▼

Вправи

1. Виконати арифметичні операції над числами z_1 і z_2, якщо: а) $z_1=$ $=4+3i$, $z_2=i-1$; б) $z_1=2+\sqrt{5}i$, $z_2=2-\sqrt{5}i$.
Відповідь: а) $z_1+z_2=3+4i$, $z_1-z_2=5+2i$, $z_1z_2=-7+$ $+i$, $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$; б) $z_1+z_2=4$, $z_1-z_2=2\sqrt{5}i$, $z_1z_2=9$, $\frac{z_1}{z_2}=$ $=-\frac{1}{9}+\frac{4\sqrt{5}}{9}i$.

2. Обчислити:
а) $\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{8}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{6}\right)$; б) $i^{35}-i^{22}$.
Відповідь: а) $\frac{3}{20}+\frac{3}{8}i$; б) 0.

3. Визначити дійсну та уявну частини комплексного числа:
а) $\frac{9+2i}{4-i}-\frac{2-5i}{5+2i}+\frac{1}{i}$; б) $\frac{(1-3i)^3}{i}+i^{21}$.
Відповідь: а) $x=2$, $y=1$; б) $x=18$, $y=27$.

4. Розв'язати рівняння: а) $|z|+2z+1=0$, б) $(1-z)\times$ $\times(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$; в) $z^2+4=4\bar{z}$.

Відповідь: а) $z = -1$; б) $z = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$; в) $z_1 = 2$; $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = -2 - 4i$.

5. При яких x і y комплексні числа $z_1 = x^2 + i(x + y)$ і $z_2 = (y + 3) + i(x - 2)$ рівні між собою?

Відповідь: $x = 1$, $y = -2$ та $x = -1$, $y = -2$.

6. При яких значеннях x і y комплексні числа $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ і $z_2 = 8y^2 + 20i^7$ є спряженими?

Відповідь: $x = -2$, $y = -2$; $x = -2$, $y = 2$.

7. Яку множину точок комплексної площини задають умови:

а) $-1 < \operatorname{Im} z < 1$; б) $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3}$; в) $|z| \leqslant 3$; г) $|z + i - 2| < 4$; д) $|z + i| \leqslant 0$; е) $1 < |z + 1| < 2$; є) $|z - 1| < |z - i|$?

Відповідь: а) смуга $-1 < y < 1$; б) сектор, утворений віссю Ox і променем, що виходить з точки $z = 0$ під кутом $\alpha = \frac{\pi}{3}$ до осі Ox; в) круг (разом із своєю межею) з центром у точці $z = 0$ і радіусом 3; г) круг з центром у точці $z = 2 - i$ і радіусом 4; д) точка $z = -i$; е) кільце між колами з центрами у точці $z = -1$ і радіусами 1 і 2; є) півплощина під бісектрисою $y = x$.

8. Записати в тригонометричній формі такі комплексні числа:

а) $z = 1$; б) $z = i + \sqrt{3}$; в) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; г) $z = i^{23}$.

Відповідь: а) $\cos 0 + i \sin 0$; б) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$; г) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

9. Користуючись формулою Муавра, обчислити:

а) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{127}$.

Відповідь: а) 1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

10. Розв'язати рівняння: а) $z^2 - 1 = i$; б) $z^6 = -64$.

Відповідь: а) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{8}}$, $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{8}}$; б) $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $-2i$, $\sqrt{3}-i$.

11. Виконати вказані дії:

а) $$\frac{(1-i)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}};$$

б) $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}i$; б) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

12. Які необхідні й достатні умови того, що $(x+iy)^2 = |x+iy|^2$? *Відповідь:* $y = 0$.

РОЗДІЛ 5. ФУНКЦІЯ

Предметом вивчення математичного аналізу є функція. Поняття функції, її області визначення, властивості функцій і способи їх задання і вивчаються у цьому розділі. Для успішної роботи з запропонованими вправами читачеві слід добре засвоїти поняття функції та принцип знаходження області визначення елементарних функцій. Властивості парності, періодичності, монотонності використовуватимуться пізніше при повному дослідженні функції та побудові її графіка. У § 5.3 розглядається послідовність дійсних і комплексних чисел як приклад числової функції.

§ 5.1. Функція дійсної змінної, область визначення

Нехай X і Y — дві довільні множини. Якщо кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність певне значення $y \in Y$, то говорять, що на множині X *задано функцію* f (відображення f множини X у множину Y), і записують $y = f(x)$ або $f: X \to Y$. Елемент $x \in X$ називається *аргументом функції* f, елемент $y \in Y$ — *значенням функції*. Множина X називається *областю визначення* функції (позначається $D(f)$), а множина всіх елементів $y \in Y$, для яких $y = f(x)$, $x \in X$,— *множиною значень* функції (позначається $E(f)$).

Якщо X і Y — деякі підмножини множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, то функцію називають *дійсною функцією дійсного аргумента* (вона кожному дійсному числу $x \in X \subset \mathbb{R}$ ставить у відповідність деяке число $y \in Y \subset \mathbb{R}$).

Функція вважається *заданою*, якщо вказано її область визначення (множина X) і спосіб встановлення відповідності між x і y. При цьому x називають *незалежною змінною (аргументом)*, а y — *залежною змінною*, $f(x)$ — значенням функції в точці x.

Існують три основні способи задання функції: *аналітичний* (за допомогою однієї або кількох формул), *табличний* і *графічний*.

Якщо функцію задано аналітично і не вказано область її визначення, то під останньою розуміють область існування даного виразу, тобто ту множину значень x, при яких даний вираз має смисл.

Вкажемо області визначення основних елементарних функцій:

1) степенева $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $D(f) = \mathbb{R}$;

2) показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $D(f) = \mathbb{R}$;

3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $(f) = \{x \mid x > 0\}$;

4) тригонометричні: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$; $y = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \left\{x \mid x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; $y = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = \{x \mid x \in (k\pi;\ (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$;

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $D(f) = [-1;\ 1]$; $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $D(f) = \mathbb{R}$.

Якщо функція є дробово-раціональною вигляду $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, то знаменник дробу $Q(x)$ не повинен дорівнювати нулю. Якщо аналітичний вираз містить корінь парного степеня, то підкореневий вираз повинен бути невід'ємним.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти області визначення таких функцій: а) $y = \sqrt{x+1}$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$; в) $y = \log_a (x^2 - 4)$; г) $y = \arcsin \frac{x+3}{4}$; д) $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + \arccos \frac{x-2}{x}$.

▲ а) Задана функція визначена при всіх x, для яких $x + 1 \geqslant 0$, тобто при $x \geqslant -1$. Отже, областю визначення цієї функції є множина $X = \{x \mid x \geqslant -1\}$, тобто піввідрізок $[1;\ +\infty)$.

б) Функція визначена на всій множині дійсних чисел, крім тих значень x, коли $x^2 - 4x + 3 = 0$. Розв'язуючи останнє рівняння, маємо $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Отже, областю визначення цієї функції є множина

$$X = \{x \mid x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ 3) \cup (3;\ +\infty)\}.$$

в) Вираз, що стоїть під знаком логарифма, повинен бути додатним, тобто $x^2 - 4 > 0$. Розв'язуючи цю нерівність, дістаємо, що

$$D(f) = X = (-\infty;\ -4) \cup (4;\ +\infty).$$

г) Користуючись вказаним пунктом 5), маємо $-1 \leqslant \leqslant \frac{x+3}{4} \leqslant 1$, або $-4 \leqslant x+3 \leqslant 4$. Звідси дістаємо $D(f) = [-7;\ 1]$.

д) Підкореневий вираз повинен бути невід'ємним, тобто $(x-2)(x+3) \geqslant 0$. Ця нерівність виконується на проміжках $(-\infty,\ -3]$ і $[2;\ +\infty)$. Отже, $D(f) = (-\infty;\ -3] \cup [2;\ +\infty)$.

е) Задана функція визначена, якщо одночасно виконуються умови

$$9-x^2>0 \text{ і } \left|\frac{x-2}{x}\right| \leqslant 1.$$

Перша нерівність має розв'язок $|x|<3$, або $-3<x<<3$, а другу можна записати у вигляді $|x-2| \leqslant |x|$, $x \neq 0$, розв'язуючи яку (див. § 4.2, приклад 6), дістаємо $x \geqslant 1$. Остаточно маємо

$$D(f) = (-3;\ 3) \cap [1;\ +\infty) = [1;\ 3). \ ▼$$

2. Шлях, пройдений тілом, що вільно падає, визначається за формулою $s = \frac{gt^2}{2}$. Тіло падає з висоти H. а) Яка область визначення цієї функції? б) Яка область визначення (існування) відповідного аналітичного виразу?

▲ а) Оскільки t — це час, то зрозуміло, що $t \geqslant 0$. За умовою шлях, пройдений тілом, дорівнює H. Розв'язуючи рівняння $H = \frac{gt^2}{2}$ відносно змінної t, дістаємо, що час, через який тіло упаде, дорівнює $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Отже, область визначення заданої функції $D(f) = \left[0;\ \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

б) Оскільки даний аналітичний вираз є многочленом другого степеня, який набуває дійсних значень при будь-яких значеннях (дійсних) t, то тут $t \in \mathbb{R}$. ▼

3. Дано функцію $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Знайти $f(-2)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(x^2)$, $(f(x))^2$. Чи існує $f(-1)$, $f(1)$?

▲ Підставляючи замість x відповідно значення -2, 0, a, x^2, дістаємо

$$f(-2) = \frac{-2}{1-4} = \frac{2}{3},\ f(0) = \frac{0}{1} = 0,$$

$$f(a) = \frac{a}{1-a^2},\ f(x^2) = \frac{x^2}{1-x^4}.$$

Для знаходження $(f(x))^2$ потрібно значення функції $f(x)$ піднести до квадрата. Отже,

$$(f(x))^2 = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2 = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}.$$

У точках $x = -1$ і $x = 1$ функція не визначена, оскільки ділення на нуль неможливе. ▼

4. Чи будуть тотожними функції: а) $f(x) = x - 2$ і $\varphi(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$; б) $f(x) = 3\lg x$ і $\varphi(x) = \lg x^3$; в) $f(x) = x$ і $\varphi(x) = (\sqrt{x})^2$?

▲ Функції f і φ тотожні, якщо у них $D(f) = D(\varphi)$ і $f(x) = \varphi(x)$ для всіх x з області визначення. Отже, маємо:

а) функції f і φ не тотожні, оскільки вони мають різні області визначення. Так, функція $f(x) = x - 2$ визначена при всіх дійсних значеннях x, а областю визначення функції $\varphi(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ є множина $X = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$;

б) задані функції тотожні, бо $\lg x^3 = 3\lg x$, і обидві вони визначені при $x > 0$;

в) перша функція визначена при $x \in (-\infty; +\infty)$, а друга — лише для $x \in [0, +\infty)$, отже, ці функції не тотожні. ▼

5. Знайти множину $E(f)$ значень функції $y = \frac{1}{5+\sin 2x}$.

▲ Розв'яжемо цю рівність відносно $\sin 2x$:

$$\sin 2x = \frac{1}{y} - 5 = \frac{1-5y}{y}.$$

Оскільки $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, то маємо $-1 \leqslant \frac{1-5y}{y} \leqslant 1$. Враховуючи, що $y > 0$, дістаємо (помноживши всі члени подвійної нерівності на y) $-y \leqslant 1 - 5y \leqslant y$. Ліва частина нерівності дає розв'язок $y \leqslant \frac{1}{4}$, а права $y \geqslant \frac{1}{6}$. Отже,

$$E(f) = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right] \cap \left[\frac{1}{6}; +\infty\right) = \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right].$$ ▼

6. Залежність площі S (в гектарах) ділянки лісу від часу t (в роках) описується законом $S = S_0 e^{kt}$ (закон природного росту), де S_0 — початкова площа ділянки, $k > 0$ — деяка стала. Записати цю залежність, якщо відомо, що ділянка, площа якої 20 га, щороку збільшується на 4 %. Через який час ділянка збільшиться на 5 га?

▲ За умовою $S = 20$ при $t = 0$, тому $S_0 = 20$. Для визначення k скористаємось умовою, що за 1 рік ($t = 1$) площа ділянки збільшиться на 4 %, тобто $S(1) = S_0 + 0{,}04 \times \times S_0 = 20 + 0{,}04 \cdot 20 = 20{,}8$. Отже, маємо $20{,}8 = 20\,e^k$, звідки $k = 1 \;\; 1{,}94 \approx 0{,}04$. Остаточно дістаємо таку залежність: $S = 20\,e^{0{,}04t}$. Ділянка збільшиться на 5 га за час t, який визначаємо з умови $20 + 5 = 20\,e^{0{,}04t}$, звідки дістаємо, що $t \approx 5{,}7$ року. ▼

Вправи

1. Знайти області визначення таких функцій:

1) $y = \sqrt{x+5}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$; 3) $y = \dfrac{2x}{x^2-5x+6}$;

4) $y = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 5) $y = \sqrt{(x+1)(x-2)}$;

6) $y = \log_a(x-8)$; 7) $y = \log_a(4-x^2)$; 8) $y = \log_a \dfrac{x+1}{x}$;

9) $y = \sqrt{\lg \dfrac{5x-x^2}{4}}$; 10) $y = \dfrac{1}{\lg(x+2)}$; 11) $y = \sqrt[4]{\sin x}$;

12) $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$; 13) $y = \arccos \dfrac{x-2}{3}$;

14) $y = \dfrac{2}{\sqrt{|x|-x}}$.

Відповідь: 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $x \neq 2$, $x \neq 3$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1] \cup [2, +\infty)$; 6) $(8; +\infty)$; 7) $(-2; 2)$; 8) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 9) $[1; 4]$; 10) $(-2; -1) \cup (-1; +\infty)$; 11) $[2k\pi; \pi(2k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$; 12) $[0; 4]$; 13) $[-1; 5]$; 14) $(-\infty; 0)$.

2. Чи тотожні функції: а) $f(x) = \lg x^2$ і $\varphi(x) = 2\lg x$; б) $f(x) = x - 1$ і $\varphi(x) = \dfrac{x^2-x}{x}$; в) $f(x) = \dfrac{x}{x}$ і $\varphi(x) = 1$ для $x \in [1; 3]$?

Відповідь: а) ні; б) ні; в) так.

3. Нехай $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$. Обчислити $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$. Чи існує $f(-2)$?

Відповідь: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$, $f(1) = \dfrac{1}{3}$, $f(-2)$ не існує.

4. Дано функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$. Визначити $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f(x^3)$, $\sqrt{f(x)}$.

Відповідь: $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $f(x^3) = \operatorname{tg} x^3$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

5. Нехай $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \sin x, & 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

Обчислити $f(0)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f(\pi)$. Чи існує $f(2\pi)$? Обгрунтувати відповідь.

Відповідь: $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$, $f(\pi) = \sin\pi = 0$, $f(2\pi)$ не існує.

6. Виразити площу прямокутного трикутника як функцію його катета x, якщо периметр цього трикутника дорівнює $2p$. Знайти область визначення цієї функції.

Відповідь: $S = \frac{px(p-x)}{2p-x}$, $0 < x < p$.

7. Швидкість різання стружки визначається за формулою $v = \frac{k}{\sqrt[\alpha]{S}}$ (м/с), де S (мм²) — площа перерізу стружки, що знімається. Для хромонікелевої сталі маємо такі дослідні дані: для S, що дорівнює 1,1; 1,4; 1,7; 7; 10 відповідно v дорівнює 0,42; 0,38; 0,34; 0,17; 0,14. Використовуючи мікрокалькулятор, визначити сталі k і α, взявши довільних два відповідних значення S і v. Перевірити, чи задовольняють інші дані задану формулу.

8. Електричне коло містить конденсатор, ємність якого C, і активний опір R. При замиканні кола конденсатор починає розряджатися за законом $j = j_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ (j_0 — струм у початковий момент часу). Через який час струм, що протікав у початковий момент часу через конденсатор, зменшиться на 10 %; зменшиться вдвоє?

Обчислення провести при $C = 10^{-6}$ Ф, $R = 10^8$ Ом.

Відповідь: 10,5 с; 69,3 с.

§ 5.2. Класифікація функцій. Графіки функцій

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $(x; f(x))$ площини, де $x \in D(f)$, $D(f)$ — область визначення функції.

Функція f називається *обмеженою* на множині $E \subset D(f)$, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in E$ маємо $|f(x)| \leqslant M$. Зокрема, якщо $f(x) \leqslant N$ ($f(x) \geqslant K$), то функція обмежена зверху (знизу).

Функція f називається: а) зростаючою; б) спадною; в) незростаючою; г) неспадною на множині $E \subset D(f)$, якщо для будь-яких $x_1 \in E$ і $x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ мають місце відповідні нерівності: а) $f(x_1) < f(x_2)$; б) $f(x_1) > f(x_2)$; в) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$; г) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Всі ці функції називаються *монотонними*, а функції а) і б) — *строго монотонними*.

Функція $y = f(x)$ називається *парною* (*непарною*), якщо для $x \in D(f)$ маємо, що $-x \in D(f)$ і при цьому $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної — відносно початку координат.

Функція $y = f(x)$, $x \in D(f)$, називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо $x + T \in D(f)$ і $f(x + T) = f(x)$. Як правило, під періодом T розуміють найменший додатний період (основний період).

ПРИКЛАДИ

1. Показати, що функція $y = \frac{1}{1+x^2}$ обмежена при всіх $x \in \mathbb{R}$.

▲ Оскільки $0 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то можна записати $\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leqslant 1$, а це й означає, що функція обмежена. ▼

2. Показати, що функція $y = -\frac{1}{x^2}$ обмежена зверху на інтервалі $(0;\ 1)$.

▲ Оскільки $-\frac{1}{x^2} < 0$ для $x \in (0;\ 1)$, то це й означає, що функція $y = -\frac{1}{x^2}$ обмежена зверху на заданому інтервалі. ▼

3. Дослідити на монотонність такі функції: а) $f(x) = x$;

б) $f(x) = \frac{1}{x^5}$; в) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2, & -\infty < x < 0, \\ 2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

▲ а) Функція визначена на всій числовій прямій. Якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, тобто функція є зростаючою на інтервалі $(-\infty;\ \infty)$.

б) При $0 < x_1 < x_2$ маємо $\frac{1}{x_1^5} > \frac{1}{x_2^5}$, тобто функція є спадною при $x \in (0;\ +\infty)$. Якщо $x_1 < x_2 < 0$, то також $\frac{1}{x_1^5} > \frac{1}{x_2^5}$, і функція є спадною і на інтервалі $(-\infty;\ 0)$.

в) Для $x_1 < x_2 < 0$ маємо $f(x_1) > f(x_2) > 0$, а для $0 \leqslant x_1 < x_2$ $f(x_1) = f(x_2) = 2$, тоді для будь-яких x_1 і x_2, $x_1 < x_2$, дістаємо $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, а це й означає, що задана функція є незростаючою. ▼

4. Дослідити на парність і непарність такі функції:

а) $f(x) = x^5$; б) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; в) $f(x) = 2^{\cos x} + |x|$;

г) $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$; д) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$;

е) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x + x^3}$, $x \in [1;\ 2]$.

▲ Спочатку перевіряємо умову того, що область визначення є симетричною відносно точки $x = 0$ (поясніть, чому), а потім визначаємо $f(-x)$ і порівнюємо його з $f(x)$. Отже, маємо:

а) для заданої функції $D(f) = \mathbb{R}$ і $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$, тому f — непарна функція;

б) область визначення $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1;\ 1\}$, тобто $D(f)$ симетрична відносно 0. Оскільки $f(-x) = \frac{1}{1-(-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} = f(x)$, то функція парна;

в) функція визначена на інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$ і $f(-x) = 2^{\cos(-x)} + |-x| = 2^{\cos x} + |x| = f(x)$. Функція парна;

г) оскільки $D(f) = [-1;\ 1]$ (перевірте) і $f(-x) = \lg\frac{1-x}{1+x} = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\lg\frac{1+x}{1-x} = -f(x)$, то функція непарна;

д) у даному випадку область визначення не є симетричною відносно 0, тому досліджувати функцію на парність чи непарність не можна, хоч формально

$$f(-x) = \frac{(\sin(-x))^2}{(-x)+(-x)^3} = \frac{\sin^2 x}{-(x+x^3)} = -\frac{\sin^2 x}{x+x^3} = -f(x)$$

(як довизначити цю функцію, щоб вона стала непарною?);

е) для заданої функції $D(f) = \mathbb{R}$ і $f(-x) = \frac{-2x+1}{x^2+1} = -\frac{2x-1}{x^2+1}$. Як бачимо, $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Отже, функція ні парна, ні непарна. ▼

5. Показати, що сума, добуток і частка двох парних функцій є парною функцією.

▲ Позначимо $f = u + v$, $\varphi = uv$ і $g = \frac{u}{v}$, $v(x) \neq 0$. Нехай області визначення утворених функцій є непорожні множини, симетричні відносно 0. Тоді

$$f(-x) = u(-x) + v(-x) = u(x) + v(x) = f(x),\ \varphi(-x) =$$
$$= u(-x)v(-x) = uv = \varphi(x) \text{ і } g(-x) = \frac{u(-x)}{v(-x)} =$$
$$= \frac{u(x)}{v(x)} = g(x).$$

Отже, всі утворені функції є парними. ▼

6. Нехай функція $u = \varphi(x)$ непарна, а $y = f(u)$ парна. Показати, що складна функція $y = f(\varphi(x))$ є парною.

▲ Припустимо, що $D(f) \neq \varnothing$. Тоді $f(\varphi(-x)) = f(-\varphi(x)) = f(-u) = f(u) = f(\varphi(x))$, тобто складна функція є парною. ▼

7. Функцію $y = x^2$, $x \in [0;\ 1]$, продовжити так, щоб на відрізку $[-1;\ 1]$ вона була: а) парною; б) непарною.

▲ а) Функція f парна на відрізку $[-1;\ 1]$, якщо $f(-x) = f(x)$. Тому для $x \in [-1;\ 0]$ покладемо $f(x) = (-x)^2 = x^2$. Тоді функція $f(x) = x^2$ парна на відрізку $[-1;\ 1]$.

б) Функція f непарна на відрізку $[-1;\ 1]$, якщо $f(-x) = -f(x)$ або $f(x) = -f(-x)$. Тому для $x \in [-1;\ 0]$ покладаємо $f(x) = -(-x)^2 = -x^2$. Тоді функція $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-1;\ 0], \\ x^2, & x \in [0;\ 1], \end{cases}$ є непарною на відрізку $[-1;\ 1]$. ▼

8. Нехай функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом T. Довести, що функція $y = f(ax + b)$, $a > 0$, має період $\frac{T}{a}$.

▲ Оскільки T є періодом функції $y = f(x)$, то

$$f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f(ax + T + b) = f((ax + b) + T) = f(ax + b).$$

Можна показати, що число $\frac{T}{a}$ є основним періодом функції $y = f(ax + b)$, якщо T — основний період функції $y = f(x)$ (покажіть це).

Тоді для функцій $y = \sin(\omega x + \varphi)$ і $y = \cos(\omega x + \varphi)$, де ω і φ — сталі, періодом є число $T = \frac{2\pi}{\omega}$, оскільки функції синуса і косинуса мають період 2π. А для функцій $y = \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ і $y = \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ періодом є число $T = \frac{\pi}{\omega}$. Поясніть, чому. ▼

9. Знайти основний період таких функцій:

а) $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y = \operatorname{ctg}(\pi x + 1)$;

г) $y = \{x\}$; д) $y = \cos^2 x$; е) $y = |\sin x|$.

▲ Користуючись висновками прикладу 8, дістаємо:

а) $T = \frac{2\pi}{3}$; б) $T = \pi : \frac{1}{2} = 2\pi$; в) $T = \frac{\pi}{\pi} = 1$.

г) Функція $y = \{x\}$ кожному дійсному числу x ставить у відповідність його дробову частину. Оскільки будь-які два числа з однаковою дробовою частиною відрізняються на ціле число, то періодом даної функції є довільне ціле число, а основним періодом є число $T = 1$.

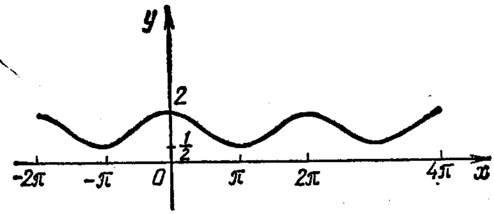

Рис. 27

д) Оскільки $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, то періодом заданої функції є $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

е) За властивістю модуля $(\sqrt{x^2} = |x|)$ дістаємо $|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$, а отже, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Подумайте, як інакше дістати цей же результат. ▼

10. Довести, що функція $y = \cos x^2$ не є періодичною.
▲ Розв'яжемо цей приклад методом від супротивного. Нехай число $T \neq 0$ є періодом заданої функції. Тоді за означенням періодичної функції $\cos(x+T)^2 = \cos x^2$, звідки $(x+T)^2 \pm x^2 = 2k\pi$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. З цих рівнянь дістаємо, що T залежить від x, що неможливо (чому?).

Неперіодичність функції можна довести, показавши, що деякі її властивості (проміжки монотонності, нулі тощо) повторюються неперіодично. Так, $\cos x^2 = 0$ при $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Трьома сусідніми нулями є $x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\pi}$, $x_3 = \sqrt{\frac{5}{2}\pi}$ і $x_2 - x_1 \neq x_3 - x_2$. ▼

11. Побудувати графіки заданих функцій: а) $y = 2^{\cos x}$; б) $y = x + \sin x$; в) $y = x \sin x$; г) $y = 2^{|x|} + 2$.
▲ а) Область визначення заданої функції $D(f) = \mathbb{R}$, функція парна, періодична з періодом 2π. Тому досить побудувати її графік на відрізку $[0; \pi]$, де функція спадає, продовжити його парним способом на відрізок $[-\pi; 0]$, а потім продовжити періодично на всю числову пряму. Враховуючи, що $f(0) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^0 = 1$ і $f(\pi) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, дістанемо ескіз графіка (рис. 27).

б) Дана функція визначена при всіх $x \in \mathbb{R}$, непарна, неперіодична. Оскільки $\sin k\pi = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, то графік функ-

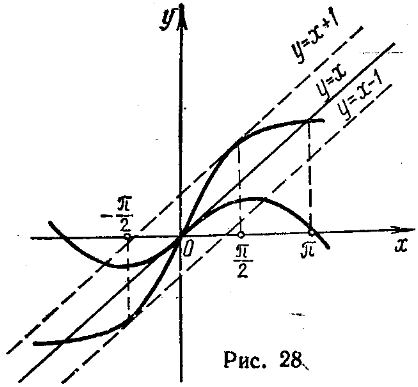

Рис. 28

ції перетинатиме пряму $y = x$ у точках з абсцисами $x = k\pi$. Оскільки $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ і $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$, то графік заданої функції дотикатиметься до прямих $y = x + 1$ і $y = x - 1$ у відповідних точках. Побудуємо спочатку графіки функцій $y_1 = x$ і $y_2 = \sin x$. Тоді шуканий графік дістанемо шляхом додавання відповідних ординат функцій y_1 і y_2. Враховуючи все сказане вище, будуємо графік для $x \geqslant 0$, а потім його симетрично відображаємо відносно початку координат (рис. 28).

в) Область визначення функції $D(f) = \mathbb{R}$. Функція парна як добуток двох непарних функцій (покажіть це), тому її графік симетричний відносно осі Oy. Будуємо спочатку графіки функцій $y_1 = x$ і $y_2 = \sin x$ для $x \geqslant 0$. Враховуючи, що $\sin k\pi = 0$, дістаємо $y(k\pi) = 0$. На тих проміжках, де y_1 і y_2 мають однакові знаки, графік буде розміщено у верхній півплощині, а там, де y_1 і y_2 різних знаків — під віссю Ox. Оскільки $|\sin x| \leqslant 1$, то $|x \sin x| \leqslant |x|$, і тому графік функції розміщується між прямими $y = x$ і $y = -x$, дотикаючись до них у тих точках, де $\sin x = 1$ і $\sin x = -1$ відповідно. Враховуючи тепер парність функції, дістанемо графік заданої функції (рис. 29).

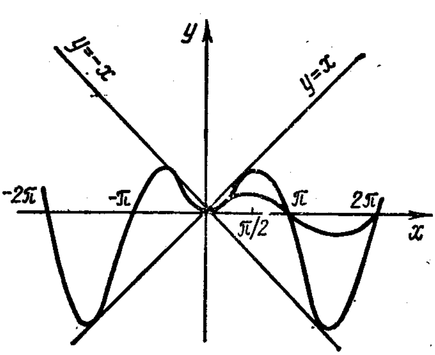

Рис. 29

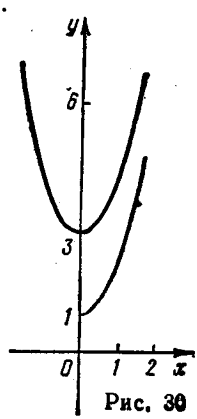

Рис. 30

Для більшої точності побудови графіка бажано обчислити з допомогою мікрокалькулятора значення заданої функції в точках $\frac{\pi}{6}$ і $\frac{\pi}{4}$.

г) Задана функція парна, визначена при всіх $x \in \mathbb{R}$. Для $x \geqslant 0$ маємо $y = 2^x + 2$. Спочатку будуємо графік функції $y_1 = 2^x$, враховуючи, що $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, а потім зсуваємо його вгору вздовж осі ординат на 2 одиниці і відображаємо симетрично відносно осі Oy (рис. 30). ▼

Вправи

1. Показати, що функція $y = \frac{1}{x^3}$ обмежена знизу на інтервалі (0; 1).

2. Показати, що функція $y = -2^x$ обмежена зверху при всіх $x \in \mathbb{R}$.

3. Показати, що функція $y = \frac{x^2}{1 + x^4}$ обмежена при всіх $x \in \mathbb{R}$.

4. Дослідити на монотонність функції:

1) $y = x^4$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = 2^{3x+1}$.

Відповідь: 1) спадна при $x < 0$, зростаюча при $x > 0$; 2) спадна при $x < 1$ і при $x > 1$; 3) зростаюча на інтервалі $(0; +\infty)$; 4) зростаюча при всіх $x \in \mathbb{R}$.

5. Дослідити на парність і непарність такі функції:

1) $f(x) = x^6$; 2) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$; 3) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$;
4) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$; 5) $f(x) = |x| - 1$;
6) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$; 7) $y = \arcsin x$.

Відповідь: 1), 5), 6)— парні; 2), 3), 7)— непарні; 4) ні парна, ні непарна.

6. Продовжити функцію $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, на відрізок $[-\pi; 0]$ парним і непарним способами.

7. Довести, що добуток і частка двох непарних функцій є функція парна.

8. Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ — непарні функції. Показати, що складна функція $y = f(\varphi(x))$ є непарною.

9. Визначити основні періоди функцій:

1) $y = \sin 5x$; 2) $y = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $y = \operatorname{tg} 2\pi x$;

4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} x + 1\right)$; 5) $y = |\operatorname{tg} x|$; 6) $y = \sin^4 x$;

7) $y = \sin 2x + \cos x$; 8) $y = \arccos(\cos x)$.

Відповідь: 1) $\frac{2}{5}\pi$; 2) 8π; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 6; 5) π; 6) π; 7) 2π; 8) 2π.

10. Довести, що функція $y = \sin \frac{1}{x}$ неперіодична.

11. Навести приклади функцій з періодом: а) 3; б) $\frac{1}{4}$; в) $a > 0$.

12. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 3^{\operatorname{tg} x}$; 2) $y = \sin x - x$; 3) $y = x \cos x$;
4) $y = \cos^2 x$; 5) $y = x^2 - 4|x| + 1$.

§ 5.3. Послідовності дійсних і комплексних чисел

Послідовністю дійсних чисел називається функція f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, визначена на множині всіх натуральних чисел, і позначається $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, або (x_n). Число $f(n)$ називається *n-м членом послідовності* і позначається x_n, а формула $x_n = f(n)$ називається *формулою загального члена послідовності* (x_n). Часто послідовність задається записом кількох її перших членів (значень функції, що задає послідовність), розміщених у порядку зростання номера n, тобто $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$.

Послідовність (x_n) називається *обмеженою*, якщо $|x_n| \leqslant M$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ — дійсне число. Тобто послідовність обмежена, якщо всі її члени містяться на відрізку $[-M; M]$.

Послідовність є *зростаючою, спадною, незростаючою, неспадною*, якщо виконуються відповідні нерівності: $x_n < x_{n+1}$, $x_n > x_{n+1}$, $x_n \geqslant x_{n+1}$, $x_n \leqslant x_{n+1}$. Всі ці послідовності називаються *монотонними*.

Послідовність, членами якої є комплексні числа, називається *послідовністю комплексних чисел* і позначається (z_n), де $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ця послідовність обмежена, якщо $|z_n| \leqslant M$, $M > 0$.

Дайте геометричну інтерпретацію поняттю обмеженої послідовності (z_n). Поясніть, чому не можна говорити про монотонність (z_n). Вкажіть способи задання числових послідовностей.

ПРИКЛАДИ

1. Записати чотири перших члени послідовності, якщо:

а) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$; б) $x_n = \frac{2^n}{n!}$; в) $x_n = (-1)^n \sin \frac{n\pi}{2}$;

г) $x_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$; д) $x_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ — непарне}, \\ \frac{n-1}{n}, & n \text{ — парне}; \end{cases}$

е) $z_n = \frac{n}{2n+1} + i\frac{n^2}{2n^2+1}$.

▲ Надаючи n послідовно значень 1, 2, 3 і 4, дістаємо:

а) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$, $x_4 = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}$;

б) $x_1 = \frac{2}{1} = 2$, $x_2 = \frac{2^2}{1 \cdot 2} = 2$, $x_3 = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$;

в) $x_1 = (-1)\sin\frac{\pi}{2} = -1$, $x_2 = (-1)^2 \sin\pi = 0$, $x_3 = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$, $x_4 = 0$;

г) $x_1 = \frac{1^2}{1^3} = 1$, $x_2 = \frac{1^2+2^2}{2^3} = \frac{5}{8}$, $x_3 = \frac{1^2+2^2+3^2}{3^3} = \frac{14}{27}$, $x_4 = \frac{15}{32}$;

д) $x_1 = \frac{2}{1} = 2$, $x_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$.

е) Маємо послідовність комплексних чисел, де $x_n = \frac{n}{2n+1}$, $y_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$. Отже, $z_1 = x_1 + iy_1 = \frac{1}{3} + i\frac{1}{3}$, $z_2 = \frac{2}{5} + i\frac{4}{9}$, $z_3 = \frac{3}{7} + i\frac{9}{19}$, $z_4 = \frac{4}{9} + i\frac{16}{33}$. ▼

2. Записати одну з формул для загального члена послідовності, якщо відомо її перші чотири члени:

а) $1 \cdot 2$, $2 \cdot 2^2$, $3 \cdot 2^3$, $4 \cdot 2^4$; б) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2}$, $\frac{5}{2^2 \cdot 3^2}$, $\frac{7}{3^2 \cdot 4^2}$, $\frac{9}{4^2 \cdot 5^2}$;

в) $\frac{6}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{9}{17}$; г) $1 + \frac{2}{1}$, $\left(1+\frac{2}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(1+\frac{2}{4}\right)^4$.

▲ а) За умовою кожен член послідовності є добутком натурального числа, що відповідає номеру члена послідовності, і числа 2, піднесеного до степеня, який дорівнює тому ж номеру. Отже, $x_n = n \cdot 2^n$.

б) Чисельники дробів утворюють послідовність непарних чисел, починаючи з числа 3, а знаменники є добутками квадратів двох послідовних натуральних чисел, перше з яких збігається з номером члена послідовності. Тому $x_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

в) Чисельники дробів утворюють послідовність натуральних чисел, починаючи з 6, що на 5 одиниць відрізняється від номера члена послідовності, а знаменник кожного члена послідовності більший на 1 від квадрата номера цього члена. Отже, $x_n = \frac{n+5}{n^2+1}$.

г) Неважко бачити, що в даному випадку $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$. ▼

Зауваження. За кількома першими членами послідовності не можна однозначно записати формулу загального члена. Наприклад, для випадку в) можна покласти, що $x_n = \frac{n+5}{n^2+1+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$. Крім того, загальний член однієї й тієї ж послідовності можна записати по-різному. Наприклад, для послідовності

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ — непарне}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ — парне}, \end{cases}$$

загальний член можна записати одним аналітичним виразом $x_n = \frac{n}{2}(1-(-1)^n) + \frac{1}{2n}(1+(-1)^n)$. Перевірте правильність цієї формули.

3. Довести обмеженість послідовності, якщо:

а) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$; б) $x_n = (-1)^n \cos n\pi$;

в) $z_n = \frac{n}{n+1} + i\,\frac{n^2+1}{n^2+2}$.

▲ а) Оскільки $\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^2+1-1}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1} < 1$, то дістаємо, що $0 < x_n < 1$, або $|x_n| < 1$, що й означає обмеженість заданої послідовності.

б) Маємо $|x_n| = |(-1)^n \cos n\pi| \leqslant 1$, отже, (x_n) — обмежена послідовність.

в) Задано послідовність комплексних чисел, де $x_n = \frac{n}{n+1}$, $y_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$. Маємо

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{(n^2+1)^2}{(n^2+2)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2(n^2+2)^2+(n+1)^2(n^2+1)^2}}{(n+1)(n^2+2)} <$$

$$< \frac{\sqrt{(n+1)^2(n^2+2)^2+(n+1)^2(n^2+2)^2}}{(n+1)(n^2+2)} = \sqrt{2}.$$

Отже, задана послідовність обмежена і всі її члени містяться всередині круга з центром у точці $z = 0$ і радіусом $\sqrt{2}$. ▼

4. Довести, що послідовність $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ зростає.

▲ Запишемо $x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Тоді $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1} = x_n$ і послідовність є зростаючою. ▼

Вправи

1. Виписати п'ять перших членів послідовності:

а) $\left(\frac{2n}{n+3}\right)$; б) $\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)$; в) $\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$;
г) $\left(\frac{1+2+\dots+n}{n^2}\right)$; д) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}\right)$;
е) $\left(\frac{n^3}{n+2}+\frac{i}{n}\right)$.

2. Записати одну з формул для загального члена послідовності, якщо відомо її перші п'ять членів:

а) $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}$; б) $\frac{3}{2}, \frac{9}{3}, \frac{27}{4}, \frac{81}{5}, \frac{243}{6}$;
в) $\frac{2}{4}, \frac{5}{7}, \frac{10}{12}, \frac{17}{19}, \frac{26}{28}$;
г) $\frac{1}{1\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 9}, \frac{1}{9\cdot 13}, \frac{1}{13\cdot 17}, \frac{1}{17\cdot 21}$.

Відповідь: а) $\frac{n}{n+4}$; б) $\frac{3^n}{n+1}$; в) $\frac{n^2+1}{n^2+3}$; г) $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

3. Довести обмеженість послідовностей:

а) $\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)$; б) $\left(\frac{n}{n^2+1}+i\frac{2n}{3n+2}\right)$.

4. Показати, що послідовність $\left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)$ спадає.

РОЗДІЛ 6. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Основним методом досліджень у математичному аналізі є *граничний перехід*. Тому поняття границі відіграє в ньому фундаментальну роль. Спочатку це поняття вводиться для послідовностей дійсних і комплексних чисел, а потім воно переноситься на функції неперервного аргументу. Викладено основні властивості збіжних послідовностей. В останньому параграфі розглядаються поняття неперервності функції та властивості неперервних функцій.

При розв'язуванні вправ слід засвоїти основні принципи обчислення різноманітних границь, що надалі широко використовуватимуться.

§ 6.1. Границя числової послідовності. Число e

Число a називається *границею послідовності* (x_n), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число (номер) $N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Символічно це записується так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$, $n \to \infty$.

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*.

Числова послідовність називається *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Нескінченно малі послідовності мають такі властивості:

1) алгебраїчна сума скінченної множини нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність;

2) добуток нескінченно малої послідовності на послідовність обмежену є нескінченно мала послідовність.

Числова послідовність (x_n) називається *нескінченно великою*, якщо для довільного числа $M > 0$ існує такий номер N, що $|x_n| > M$ для всіх $n > N$, і позначається $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Якщо (x_n) — нескінченно мала послідовність, то послідовність $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ нескінченно велика.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$; $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ (*теорема про арифметичні операції над границями*).

Всяка обмежена монотонна послідовність має границю. Зокрема, послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, є монотонною й обмеженою. Її границю позначають буквою e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (1)$$

Число $e \approx 2{,}718$ — ірраціональне. Логарифм числа $x > 0$ за основою e називається *натуральним логарифмом* і позначається символом $\ln x$. Зокрема, $\lg x = M \ln x$, де число $M = \lg e \approx 0{,}434$ називається *модулем переходу*.

Послідовність комплексних чисел (z_n), $z_n = x_n + iy_n$, збігається до числа $c = a + bi$ тоді й тільки тоді, коли $x_n \to a$, $y_n \to b$, $n \to \infty$.

Пропонуємо самостійно сформулювати означення границі послідовності комплексних чисел (z_n) і обгрунтувати геометричний зміст цього поняття.

ПРИКЛАДИ

1. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$. Починаючи з якого n маємо $\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}001$?

▲ Виберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує такий номер N, що для всіх членів послідовності з номерами $n > N$ виконується нерівність

$$\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Для визначення N досить розв'язати нерівність (2) відносно n:

$$\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1-n}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

$$2n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Отже, якщо $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, то нерівність (2) виконується для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$. Якщо $\frac{1}{2\varepsilon} \geqslant 1$, то за N беремо цілу частину виразу $\frac{1}{2\varepsilon}$, тобто $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$. А якщо $0 < \frac{1}{2\varepsilon} < 1$, то за N можна взяти 1 або будь-яке інше натуральне число.

Зокрема, при $\varepsilon = 0{,}001$ маємо $N = \left[\frac{1}{0{,}002}\right] = 500$. Отже, при $n > 500$ дістанемо $\left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}001$. ▼

2. З'ясувати, чи має границю послідовність (x_n), якщо:

а) $x_n = \frac{n}{n+1}$; б) $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{для парного } n, \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{для непарного } n; \end{cases}$

в) $x_n = \frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$.

▲ а) Оскільки $0 < \frac{n}{n+1} < 1$, то послідовність (x_n) обмежена. Неважко бачити, що $x_n < x_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто (x_n) монотонно зростає. Отже, вона має границю.

б) Члени послідовності з парними номерами прямують до 1 при $n \to \infty$, оскільки $\frac{1}{n} \to 0$. А члени послідовності з непарними номерами прямують до 2 при $n \to \infty$. Отже, згідно з означенням, послідовність не має границі, тобто є розбіжною.

в). Дана послідовність є добутком нескінченно малої послідовності $\left(\frac{2}{n}\right)$, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$, і обмеженої послідовності $\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$, тому що $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leqslant 1$. Тоді за властивістю 2) задана послідовність має границю, що дорівнює 0. ▼

3. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3\cos\frac{1}{n}}{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+n} - \sqrt{2+n})$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}$;

є) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1} + i\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2}{3}}\right)$.

▲ а) Скористаємось теоремою про границю суми двох послідовностей. Неважко бачити, що границя першого доданка дорівнює 0, а другий доданок є добутком нескінченно малої послідовності $\left(\frac{3}{n}\right)$ на обмежену послідовність $\left(\cos\frac{1}{n}\right)$, тому його границя також дорівнює нулю. Отже, за властивістю 1) задана послідовність є нескінченно малою.

б) У даному випадку чисельник і знаменник мають нескінченні границі, тому користуватись теоремою про границю частки не можна. Перетворимо дріб, поділивши чисельник і знаменник на n^3 (найвищий степінь n). Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{3+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}.$$

Оскільки при $n\to\infty$ маємо $\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{4}{n}\to$ $\to 0$, то, застосувавши теорему про границю суми і добутку, помічаємо, що границя чисельника дорівнює 1, а знаменника 3. За теоремою про границю частки маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+4}=\frac{1}{3}.$$

в) Поділимо чисельник і знаменник дробу на n^2, а потім скористаємось теоремою про границю суми і частки. Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

г) Аналогічно попередньому маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}}.$$

Оскільки $1+\frac{1}{n^3}\to 1$ при $n\to\infty$, а знаменник є нескінченно малою послідовністю, то задана послідовність є нескінченно великою, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=\infty$.

У прикладах б) — г) порівняйте старші степені чисельників і знаменників заданих дробів і зробіть висновок відносно одержаних відповідей.

д) У даному випадку маємо різницю двох нескінченно великих послідовностей. Позбавимося ірраціональності в чисельнику, вважаючи, що знаменник дорівнює 1, і застосуємо теорему про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей. Матимемо

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3+n}-\sqrt{2+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+n}+\sqrt{2+n}}=0.$$

е) Поділивши чисельник і знаменник виразу, що стоїть в дужках, на n і скориставшись властивістю степеня, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}}{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{6}}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{-1}.$$

Користуючись теоремою про границю добутку, частки і формулою (1), маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}=\frac{e^{3}}{e^{6}}\cdot 1=e^{-3}.$$

є) Оскільки $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

ж) Маємо границю послідовності комплексних чисел. Обчислимо границі дійсної та уявної частин цієї послідовності. Оскільки

$$x_n=\frac{2n^2}{n^2+1}\to 2,\ n\to\infty,\ \text{а}\ y_n=\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2}{3}}\to e^{-\frac{1}{3}}$$

(див. приклад 3, е)), то

$$\lim_{n\to\infty}z_n=2+\frac{i}{\sqrt[3]{e}}.\ ▼$$

Вправи

1. Довести, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+4}=3$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n^2}=0.$

2. Обчислити $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N$, коли:

а) $x_n = \dfrac{n^2+3}{2n^2-1}$, $\varepsilon = 0{,}005$; б) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n^2}{3}$, $\varepsilon = 0{,}001$.

Відповідь: а) $a = \dfrac{1}{2}$, $N = 18$; б) $a = 0$, $N = 1000$.

3. З'ясувати, чи має границю послідовність (x_n), якщо:

а) $x_n = \dfrac{n}{n+7}$; б) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\cos n\pi$;

в) $x_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{2}{n^2} & \text{для парного } n, \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{для непарного } n. \end{cases}$

Відповідь: а) так; б) так; в) ні.

4. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-2n}{n+5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{4-6n^2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+3)}{4n^2+4}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8-n^2}{5n^2+3n+1}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1-n)}{(n+2)(n+8)}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-5)^2-3n^2}{n^2+5n-4}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+9n}{(n+1)(n+2)(n+4)}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^4-1)(2n^2+5)}{(n^3+1)(n^3-3)}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\dots+n}{3n^2}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-6}{\sqrt{n^2+1}}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n^3+7}}$.

12) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3})$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3+4n} - 3\sqrt{5n-1})$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{5n}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2}{n^2-4}\right)^{\frac{3}{2}n^2}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} + i\,\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\right)$.

Відповідь: 1) -2; 2) 0; 3) $\dfrac{1}{4}$; 4) $-\dfrac{1}{5}$; 5) $-\infty$; 6) 6; 7) 1; 8) 2; 9) $\dfrac{1}{6}$; 10) 3; 11) $\sqrt{3}$; 12) 0; 13) $-\infty$; 14) $\dfrac{1}{2}$; 15) e^{15}; 16) e^{-10}; 17) e^{9}; 18) $\dfrac{i}{2}$.

5. Обчислити суму всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії $1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dots$.

Відповідь: $S = 3$.

§ 6.2. Границя функції в точці. Нескінченно малі функції

Нехай функція визначена в деякому околі $O(x_0)$ точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0 (говорять, що функція визначена в проколеному околі $O^*(x_0)$ точки x_0).

Означення 1 (з а К о ш і а б о н а м о в і «$\varepsilon - \delta$»). *Число a називається* г р а н и ц е ю ф у н к ц і ї $y = f(x)$ *в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що з нерівності*

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0, \tag{1}$$

випливає нерівність

$$|f(x) - a| < \varepsilon. \tag{2}$$

Символічно це записується так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ або $f(x) \to a$, $x \to x_0$.

Означення 2 (з а Г е й н е а б о н а м о в і п о с л і д о в н о с т е й). *Число a називається* г р а н и ц е ю ф у н к ц і ї $y = f(x)$ *у точці x_0, якщо для будь-якої послідовності (x_n) значень аргументу ($x_n \in O^*(x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$), що збігається до числа x_0, відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції збігається до числа a.*

Функція f називається *нескінченно малою* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

О с н о в н і т е о р е м и п р о г р а н и ц і т а д е я к і в а ж л и в і г р а н и ц і

I. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, $C = \text{const}$.

II. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, то:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = ab$, $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = a^n$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $\quad b \neq 0$.

III. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (перша важлива границя)}; \tag{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1; \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}. \qquad (6)$$

Дві нескінченно малі при $x\to x_0$ функції f і g називаються *еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ (це записують: $f\sim g$, $x\to x_0$).

З формул (3) — (6) дістають основні еквівалентності, які використовуються при обчисленні границь:

$$\sin x\sim x,\quad x\to 0; \qquad (3a)$$

$$\ln x\sim x,\quad x\to 0; \qquad (4a)$$

$$e^x-1\sim x,\quad x\to 0; \qquad (5a)$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n},\quad x\to 0. \qquad (6a)$$

При обчисленні границі відношення двох нескінченно малих функцій кожну з них можна замінити еквівалентною їй нескінченно малою. Наприклад, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=$ $=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{y}=1$. Звідси маємо

$$\arcsin x\sim x,\quad x\to 0. \qquad (7)$$

Границю відношення двох нескінченно малих функцій називають *невизначеністю виду* $\frac{0}{0}$, а обчислення цієї границі — *розкриттям* даної *невизначеності*.

Сформулюйте теорему про суму двох нескінченно малих функцій та про добуток нескінченно малої і обмеженої функцій.

ПРИКЛАДИ

1. Користуючись означенням границі, довести, що

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$.

▲ а) Скористаємось означенням 1. Візьмемо будь-яке число $\varepsilon>0$. Потрібно довести, що знайдеться таке $\delta>0$, що з нерівності

$$|x-1|<\delta,\quad x\neq 1, \qquad (1a)$$

випливає нерівність

$$|(2x+1)-3|<\varepsilon. \qquad (2а)$$

Ліву частину нерівності (2а) запишемо у вигляді $|2x+1-3|=|2x-2|=2|x-1|$. Тоді нерівність (2а) матиме вигляд $2|x-1|<\varepsilon$, або $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поклавши $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, ми й дістанемо, що з нерівності (1а) випливає нерівність (2а), що й треба було довести.

б) Використаємо означення 2. Задана функція визначена в будь-якому околі точки $x=3$, крім самої цієї точки. Виберемо послідовність (x_n) таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$, $x_n\neq 3$, $n\in\mathbb{N}$. Запишемо відповідну послідовність значень функції $f(x_n)=\frac{x_n^2-9}{x_n-3}$, $n\in\mathbb{N}$, і обчислимо границю цієї послідовності. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-3)=0$, то скористатись теоремою про границю частки не можна. Виконаємо спочатку тотожні перетворення, поділивши чисельник і знаменник дробу на $x_n-3\neq 0$ (цим ми розкриємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$). Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-9}{x_n-3}=\lim_{n\to\infty}(x_n+3)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}3=3+3=6.$$

Із означення 2 випливає, що число 6 є границею заданої функції в точці $x=3$. ▼

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$.

▲ а) Користуючись теоремами II, а) і II, б) про границі, маємо

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}2=$$
$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+2=4-3\cdot 2+2=0.$$

б) Обчислимо спочатку границі чисельника і знаменника, користуючись теоремами I, II, а) і II, б). Дістанемо $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-1)=\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)=0$. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Для її розкриття розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники і скоротимо на вираз $x - 1$. Таке скорочення можливе, оскільки вираз $x - 1$ не перетворюється в 0 (за означенням границі $x \to 1$, але $x \neq 1$). Отже, маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}.$$

в) У цьому випадку також маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Для її розкриття позбавляємося ірраціональності в чисельнику дробу, домноживши чисельник і знаменник на вираз $\sqrt{x} + 2$. Скоротивши на $x - 4 \neq 0$, дістанемо

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{32}. ▼$$

Зауваження. При обчисленні границь, які містять ірраціональні вирази, зручно користуватись такими засобами: а) увести нову змінну для одержання раціонального виразу (наприклад, при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ зручно увести змінну $t = \sqrt[4]{x}$ і тоді

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}\Big);$$

б) перенести ірраціональність з чисельника у знаменник або навпаки.

3. Користуючись формулами (3) — (6) і (3а) — (6а) обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}$.

▲ а) Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Помножимо чисельник і знаменник дробу на 5 і виконаємо заміну $5x = t$ (при цьому $t \to 0$, якщо $x \to 0$). Скориставшись першою важливою границею (3), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 5\cdot 1 = 5.$$

Можна й інакше обчислити цю границю, використавши еквівалентність (3а), а саме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=\lim_{x\to 0}5=5.$$

б) Маємо відношення двох нескінченно малих функцій. Оскільки $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $\sin 2x \sim 2x$, $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Користуючись формулою (3), можна інакше обчислити цю границю.

в) Перетворимо чисельник: $\cos 4x-\cos 2x = -2\sin 3x\sin x$. Оскільки $\sin 3x\sim 3x$, $\sin x\sim x$, $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\sin x}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2}=-6.$$

г) Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sin x$. Користуючись границями (3), (4) і зробивши заміну $\sin x = t$ при обчисленні першої з границь добутку, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

Цю границю можна обчислити простіше, користуючись еквівалентностями (3а) і (4а) ($x\sim\sin x$, $\ln(1+\sin x)\sim\sin x$, $x\to 0$). Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x}=1.$$

д) Скориставшись еквівалентністю (5а), маємо $e^{3x}-1\sim 3x$, $x\to 0$. Тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Можна обчислити цю границю, використовуючи формулу (5).

е) Згідно з границею (6), де $n=4$, при $x^2=t$ дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+t}-1}{t}=\frac{1}{4}.$$

Обчислити цю границю можна за допомогою еквівалентності (6а). ▼

4. Знайти наближене значення функції $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ при $x = 1{,}002$.

▲ Для x, близьких до x_0, за значення функції в точці x можна взяти число $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $(a \approx f(x_0))$. Тому потрібно обчислити $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ (оскільки $1{,}002 \approx 1$). Отже,

$$f(1{,}002) \approx \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}. \ ▼$$

5. В атомній фізиці вивчається формула Релея — Джінса, яка виражає залежність розподілу енергії випромінювання від частоти: $u_\nu = A \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$. Вважаючи ν малою величиною, спростити цю формулу, припускаючи, що $d\nu$ є сталою величиною.

▲ Користуючись еквівалентністю (5а), дістаємо, що $e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \sim \frac{h\nu}{kT}$, $\nu \to 0$. Враховуючи тепер попередню задачу, маємо

$$u_\nu \approx A \frac{d\nu}{\frac{h\nu}{kT}} = A \frac{kT}{h\nu} d\nu. \ ▼$$

Вправи

1. Користуючись означенням границі, довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to 3} (2x-4) = 2$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$; 3) $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{x+3} = 3$.

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x+3}{x^2-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8}$; 7) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$; 8) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 6x}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{3x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+2)}{x+2}$;

17) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sin(x-2)}$; 18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{5x}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{2x^2}$.

Відповідь: 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 10; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) -12; 6) $\frac{8}{3}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) 6; 9) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 10) 4; 11) $\frac{3}{2}$; 12) $\frac{1}{3}$; 13) 5; 14) $\frac{1}{27}$; 15) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{1}{2}\sin 2$; 17) 4; 18) $\frac{1}{2}$; 19) 6; 20) $\frac{2}{5}$; 21) $\ln 2$; 22) $\frac{1}{8}$.

3. Обчислити наближене значення функції:

1) $f(x)=\frac{4-x^2}{x-2}$ при $x=2{,}001$; 2) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ при $x=0{,}003$.

Відповідь: 1) -4; 2) 2.

§ 6.3. Границя функції на нескінченності. Нескінченні границі

Число a називається *границею функції* $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, якщо для будь-якої послідовності x_n, $n\in\mathbb{N}$, такої, що $x_n\in D(f)$ і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$, і позначається $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. Аналогічно означається границя функції при $x\to-\infty$ (сформулюйте його). Якщо обидві ці границі рівні між собою, то записують $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

Функція f має *нескінченну границю* при $x\to x_0$ якщо $\forall(x_n)\subset D(f)$, $x_n\neq x_0$ і $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$, маємо $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. Позначається це так: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ або $f(x)\to\infty$, $x\to x_0$.

Пропонуємо самостійно сформулювати означення границь, які записуються у вигляді

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Функція f називається *нескінченно великою* при $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ або $x_0 = \pm\infty$), якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Якщо f — нескінченно велика при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f}$ — *нескінченно мала функція* при $x \to x_0$.

Границя відношення двох нескінченно великих функцій називається *невизначеністю виду* $\frac{\infty}{\infty}$, а обчислення цієї границі — її розкриттям. Часто в обчисленнях доводиться користуватися такими границями:

$$\lim_{x\to\infty} kx = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{k} = \infty; \quad \lim_{x\to 0} \frac{k}{x} = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{k}{x} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 0, & 0 < a < 1; \end{cases} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ -\infty, & 0 < a < 1; \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \tag{3}$$

— *друга важлива границя*, a, $k \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $k \neq 0$.

ПРИКЛАДИ

1. Користуючись означенням, довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$.

▲ Розглянемо довільну послідовність (x_n) з області визначення функції $D(f)$ і таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Оскільки послідовність $f(x_n) = \frac{x_n+2}{x_n-1} = 1 + \frac{3}{x_n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до 1, то, згідно з означенням, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$. ▼

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$; г) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x-1}{x-3}-\frac{4x}{x^2-9}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

є) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2+2}\right)^{3x^2-2}$.

▲ а) Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник дробу на $x^2 \neq 0$. Дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

б) Вважатимемо, що $x<0$. Тоді $|x|=-x$ і

$$\frac{\sqrt{x^2+8}}{x+3}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}{x+3}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}\to-1,\quad x\to-\infty.$$

в) У даному випадку маємо різницю двох нескінченно великих функцій (говорять, що маємо невизначеність виду $\infty-\infty$). Позбудемося ірраціональності в чисельнику дробу, вважаючи, що знаменник дорівнює 1. Для цього помножимо і поділимо даний дріб на вираз $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}$ $\left(\text{дістанемо невизначеність } \frac{\infty}{\infty}\right)$. Маємо

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=\frac{2}{1+1}=1.$$

г) Тут також маємо невизначеність $\infty-\infty$. Зведемо даний вираз до спільного знаменника (дістанемо невизначеність виду $\frac{0}{0}$). Тоді

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{x-1}{x-3}-\frac{4x}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{2}{3}.$$

д) При $x\to1$ маємо $1-x\to0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\to\infty$ (невизначеність виду $0\cdot\infty$). Перетворимо даний вираз до вигляду дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$). Виконавши заміну $1-x=t$ і застосувавши еквівалентність $\operatorname{tg}x\sim x$, $x\to0$, дістанемо

$$\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{2}{\pi}.$$

е) При обчисленні подібних границь виконуватимемо перетворення, які приводять до другої важливої границі (3). Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^2=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^2=e^2.$$

є) Спочатку виділимо цілу частину виразу, записаного в дужках.

Маємо $\frac{1+x^2}{x^2+2}=\frac{x^2+2-1}{x^2+2}=1-\frac{1}{x^2+2}$. Далі виконаємо такі перетворення:

$$\left(\frac{1+x^2}{x^2+2}\right)^{3x^2-2}=\left(\left(1-\frac{1}{x^2+2}\right)^{-(x^2+2)}\right)^{-3}\left(1-\frac{1}{x^2+2}\right)^{-8}.$$

Позначивши $\alpha=-\frac{1}{x^2+2}$ ($\alpha\to0$ при $x\to\infty$), дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2+2}\right)^{3x^2-2}=\lim_{\alpha\to0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-3}\cdot\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{-8}=$$

$$=e^{-3}\cdot1=e^{-3}.\ \blacktriangledown$$

3. Довести, що $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

▲ Нехай $x_n \in D(f)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 1$ і $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$. Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n - 1} = \infty$, оскільки $x_n - 1 \to 0$, $n \to \infty$. ▼

4. Розрахунок робочих коліс турбіни приводить до рівняння $\ln y = -k^2x^2 + \ln y_0$, де y — товщина колеса на відстані x від осі обертання, $y = y_0$ при $x = 0$. Обчислити $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{y_0}$.

▲ Запишемо задане рівняння у вигляді $\ln y - \ln y_0 = -k^2x^2$, звідки $\ln \frac{y}{y_0} = -k^2x^2$ і $\frac{y}{y_0} = e^{-k^2x^2}$. Тоді

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{y_0} = \lim_{x \to +\infty} e^{-k^2x^2} = 0. \ ▼$$

Вправи

1. Користуючись означеннями, довести, що

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x} = 0$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x^2 - 9} = \infty$.

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+4}{5x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+7}{x^3+2}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^6+1}{5x^6+x+8}$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4+2x+1}}{x^2+6}$; 5) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+x})$; 7) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x}}$;

8) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x+6}{2x+3}\right)^{4x+1}$; 9) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x-6}$;

10) $\lim\limits_{x \to 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$; 11) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2}{x-4}$;

12) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}}$; 13) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}$; 14) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x}+1}$.

Відповідь: 1) ∞; 2) 0; 3) 2; 4) 1; 5) ∞; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) 1; 8) e^6; 9) e^{-5}; 10) e; 11) ∞; 12) $+\infty$; 13) 0; 14) 0.

3. Динамічна самоіндукція L антени при видовженні хвилі виражається формулою $L = L_0\left(\operatorname{tg}\frac{\pi l}{\lambda} / \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$, де L_0 — статична самоіндукція;

l — діюча довжина антени; λ — довжина хвилі антени. Обчислити $\lim\limits_{\lambda\to\infty} L$.

Вказівка. Увести нову змінну $x = \frac{\pi l}{\lambda}$ і скористатись еквівалентністю $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \to 0$.

Відповідь: $\frac{L_0}{2}$.

4. Довести, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

§ 6.4. Односторонні границі. Неперервність функції

Якщо при обчисленні границі функції f значення x розглядаються лише зліва (справа) від x_0, то така границя називається *лівою (правою)* і позначається

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)\right).$$

Сформулюйте означення лівої (правої) границі на мові «ε — δ».

Права і ліва границі називаються *односторонніми границями*. Якщо ці границі рівні між собою, то існує границя функції в точці x_0.

Сформулюйте означення *нескінченних односторонніх границь*.

Запам'ятайте такі границі (k, $a \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $a > 0$):

$$\lim_{x\to 0+} \frac{k}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{k}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a < 1, \\ -\infty, & a > 1. \end{cases}$$

Нехай функція визначена в деякому околі $O(x_0)$ точки x_0.

Означення 1. *Функція f називається неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тобто якщо виконуються умови:* а) $x_0 \in D(f)$; б) *існує скінченна границя в точці x_0;* в) *ця границя дорівнює значенню функції в точці x_0.*

При порушенні хоча б однієї з цих умов функція називається *розривною в точці* x_0 ($O^*(x_0) \subset D(f)$), а сама ця точка називається *точкою розриву.*

Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду*, якщо в ній існують скінченні односторонні границі, а якщо хоч одна з границь є нескінченною або взагалі не існує, то — *другого роду.*

Означення 2 (на мові послідовностей). *Функція f називається неперервною в точці x_0, якщо для довільної послідовності (x_n), $x_n \in D(f)$ і $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, маємо $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Означення 3 (на мові приростів). *Функція f називається неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.*

Сформулюйте означення неперервності на мові «ε — δ», а також односторонньої неперервності в точці.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, то вона неперервна на цьому проміжку. Всі елементарні функції неперервні в області свого визначення.

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і $f(a) \neq f(b)$, то для будь-якого числа C, $f(a) < C < f(b)$, існує точка $c \in (a; b)$ така, що $f(c) = C$. Зокрема, якщо $f(a) f(b) < 0$, то існує така точка c, що $f(c) = 0$ (теорема Больцано — Коші).

ПРИКЛАДИ

1. Визначити праву і ліву границі функції в точці x_0:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x+3, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0 = 1$; в) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$, $x_0 = 0$.

▲ а) Функція визначена на відрізку $[0; 2]$. Для обчислення правої границі в точці 1 потрібно розглядати ті значення аргументу, де $x > 1$. Тоді $f(x) = 2x + 3$ і $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (2x + 3) = 5$. Для обчислення лівої границі розглядаємо $x < 1$ і тоді $f(x) = x^2$. Отже, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} x^2 = 1$.

б) Ураховуючи, що $|x-1|=x-1$ при $x>1$ і $|x-1|=-x+1$ при $x<1$, дістанемо

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{x-1}=-1.$$

в) Маємо $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin 3x}{x}=3$ (див. приклад 3, а), § 6.2). ▼

2. Довести, користуючись означенням, неперервність функцій в області їх визначення:

а) $f(x)=2x^2+3x+4$; б) $f(x)=x^3$; в) $f(x)=\frac{2x}{4+x^2}$.

▲ Для всіх заданих функцій $D(f)=\mathbb{R}$. Доведемо неперервність кожної з них у довільній фіксованій точці $x_0\in\mathbb{R}$, отже, і на $\mathbb{R}$.

а) Користуючись відомими теоремами про границі, маємо

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}(2x^2+3x+4)=2x_0^2+3x_0+4=f(x_0).$$

Отже, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, тобто функція неперервна в точці x_0 за означенням 1.

б) Візьмемо довільну послідовність (x_n) таку, що $x_n\to x_0$, $n\to\infty$. Тоді $f(x_n)=x_n^3$ і $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^3=x_0^3=f(x_0)$. За означенням 2 функція неперервна в точці x_0.

в) Надамо x_0 приросту Δx і обчислимо відповідний приріст функції $\Delta f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{2(x_0+\Delta x)}{4+(x_0+\Delta x)^2}-\frac{2x_0}{4+x_0^2}=$$

$$=\frac{8-2x_0^2-2x_0\Delta x}{(4+(x_0+\Delta x)^2)(4+x_0^2)}\cdot\Delta x.$$

При довільному фіксованому значенні x_0 маємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$, тобто функція неперервна за означенням 3. ▼

3. Дослідити задані функції на неперервність і з'ясувати характер їх точок розриву:

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\qquad \text{б) } f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}.$$

▲ а) При $x\neq 0$ функція $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$ неперервна як частка двох неперервних функцій. Оскільки $f(0)=1$, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$, то $x=0$ є точкою розриву першого роду.

б) Функція $y=e^{\frac{1}{x^2}}$ не визначена в точці $x=0$, отже, ця точка є точкою розриву. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$, то $x=0$ є точкою розриву другого роду. ▼

4. Задані функції довизначити в точці $x=0$, щоб вони стали неперервними у цій точці:

$$\text{а) } f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x};\quad \text{б) } f(x)=\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}.$$

▲ а) Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$. Поклавши $f(0)=1$, дістанемо, що $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, тобто функція неперервна в точці x_0.

б) Обчислимо границю заданої функції в точці $x=0$. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Якщо тепер за значення функції в точці $x=0$ взяти число $\frac{1}{4}$, то функція стане неперервною в цій точці. ▼

5. Чи має рівняння $x^3-3x-1=0$ принаймні один дійсний корінь на відрізку $[0; 2]$?

▲ Покладемо $f(x)=x^3-3x-1$. Ця функція неперервна на відрізку $[0; 2]$ і на його кінцях набуває різних за знаком значень: $f(0)=-1<0$, $f(2)=1>0$. Отже, згідно з теоремою Больцано — Коші, існує принаймні одна точка c, $0<c<2$, у якій значення функції дорівнює нулю. Число c і є коренем заданого рівняння. ▼

6. Розв'язати нерівність $(x+2)(x-1)^2(x-3)>0$.

▲ Функція $f(x)=(x+2)(x-1)^2(x-3)$ неперервна при всіх $x\in\mathbb{R}$ і її значення дорівнюють нулю в точках -2,

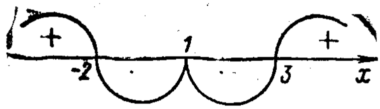

Рис. 31

1, 3. Ці точки поділяють числову пряму на чотири інтервали: $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(1; 3)$ і $(3; +\infty)$. Оскільки функція неперервна, то на кожному з цих інтервалів вона зберігає знак. Тому досить перевірити знак функції у довільній фіксованій точці на кожному з інтервалів, щоб дізнатися про знак функції на всьому інтервалі. Вибираючи пробні точки -3, 0, 2 і 4, маємо: $f(-3) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) < 0$ і $f(4) > 0$. Отже, функція має додатні значення на інтервалах $(-\infty; -2)$ і $(3; +\infty)$, тобто розв'язком заданої нерівності є всі $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ (рис. 31). ▼

Вправи

1. Обчислити односторонні границі функції в заданій точці x:

1) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$, $x = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{|2x+4|}{x+2}$, $x = -2$;

3) $f(x) = \begin{cases} x-1, & -\infty < x \leqslant 0, \\ x^2, & 0 < x < \infty, \end{cases}$ $x = 0$.

Відповідь: 1) 5; 2) -2, 2; 3) -1, 0.

2. Користуючись означенням, довести неперервність при всіх $x \in \mathbb{R}$ таких функцій:

1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; 2) $f(x) = \sin 2x$; 3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+1}$.

3. Дослідити задані функції на неперервність і з'ясувати характер точок розриву:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$;

3) $f(x) = \dfrac{|x-4|}{x^2-16}$; 4) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$.

Відповідь: 1) неперервна при всіх $x \in \mathbb{R}$; 2) $x = -2$ — точка розриву другого роду; 3) $x = 4$ — точка розриву першого роду, $x = -4$ — точка розриву другого роду; 4) $x = 0$ — точка розриву першого роду, 5) $x = -3$ і $x = 3$ — точки розриву другого роду.

4. Довизначити функцію f в точці $x = 0$, щоб вона стала неперервною у цій точці:

1) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x}{5x}$; 2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{4x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

5. Довести, що рівняння $x^4 - 3x - 1 = 0$ має хоча один дійсний корінь на відрізку $[1; 2]$.

6. Довести, що будь-який многочлен непарного степеня має хоча один дійсний корінь.

7. Розв'язати нерівності:

1) $x(x-4)(x-1)(x+5) > 0$; 2) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-3} \leqslant 0$.

Відповідь: 1) $x \in (-\infty; -5) \cup (0; 1) \cup (4; +\infty)$; 2) $x \in [-2; 3)$.

РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Цей розділ є одним з найважливіших у курсі вищої математики. До основних понять математичного аналізу належать поняття похідної, яке вводиться шляхом граничного переходу (§ 7.1), і диференціала (§ 7.3). Слід чітко засвоїти, що всі правила і формули диференціювання дістаємо з означення похідної. При розв'язуванні практичних задач використовується поняття екстремуму функції та геометричний і механічний зміст похідної (§ 7.2 і 7.7).

Замінюючи приріст функції її диференціалом, можна значно спростити обчислення (§ 7.3). При цьому задану функцію в околі розглядуваної точки замінюють на деяку лінійну, графіком якої є дотична до графіка функції у відповідній точці.

Основною формулою диференціального числення є формула Тейлора (§ 7.5), яка реалізує ту ідею, що для заданої функції в околі деякої точки підбирають такий многочлен, який для всіх x з цього околу мало відрізняється від заданої функції, і, користуючись цим многочленом, можна обчислити наближене значення функції з будь-якою наперед заданою точністю. При цьому зручно користуватися ЕОМ.

Теореми про середнє (§ 7.5) мають не лише теоретичне значення для дослідження функцій, а й практичне застосування, зокрема, для наближеного обчислення коренів рівнянь (§ 7.10). При цьому рекомендується використання ЕОМ. Правило Лопіталя дає можливість обчислювати границі (загальне правило розкриття невизначеностей).

Засобами диференціального числення зручно досліджувати поведінку функції і використовувати це для побудови її графіка (§ 7.8 і 7.9).

§ 7.1. Поняття похідної. Правила диференціювання

Похідною функції f в точці x_0 називається число, що дорівнює $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, якщо ця границя існує, і позначається $f'(x_0)$. Функція при цьому називається *диференційовною* в точці x_0. Користуючись позначеннями $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, маємо

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Сформулюйте означення похідної на мові приростів.

Якщо функція має похідну в кожній точці інтервалу $(a;\ b)$, то вона називається *диференційовною* на ньому і її похідна позначається f', або f'_x, або y'. При цьому похідна є функцією від x.

Для обчислення похідної за означенням слід виконати такі кроки:

1) надати аргументу x_0 приросту Δx і обчислити $f(x_0 + \Delta x)$;

2) знайти приріст $\Delta f(x_0)$: $\Delta f(x_0) = \Delta f(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

3) скласти відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$;

4) обчислити границю цього відношення при умові, що $\Delta x \to 0$, тобто обчислити похідну функції f в точці x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Основні правила диференціювання

I. Похідна суми, добутку, частки ($C = \text{const}$):

$C' = 0$; (2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; (3) $(uv)' = u'v + uv'$; (4)

$(Cu)' = Cu'$; (4а) $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$; (4б)

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; (5) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$. (5а)

II. Похідна складної функції: якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x). \qquad (6)$$

9*

III. Похідна оберненої функції:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \varphi'(y) \neq 0, \tag{7}$$

де $x = \varphi(y)$ є оберненою функцією до $y = f(x)$.

Формули (3) — (7) справедливі, якщо розглядувані функції диференційовні.

Основні формули диференціювання

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; (8) $(x)' = 1$; (8а) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; (8б)

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; (8в) $(a^x)' = a^x \ln a$; (9) $(e^x)' = e^x$; (9а)

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; (10) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; (10а)

$(\sin x)' = \cos x$; (11) $(\cos x)' = -\sin x$; (12)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \tag{13}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x; \tag{14}$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (16)

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; (17) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. (18)

Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від логарифма цієї функції, тобто $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$. Застосування попереднього логарифмування часто спрощує обчислення, бо $y' = y(\ln y)'$.

ПРИКЛАДИ

1. Користуючись означенням похідної, знайти $f'(x)$: а) $f(x) = 2x^2 + 3x + 6$; б) $f(x) = \sin 2x$.

▲ Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ за означенням дістаємо:

а) $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 6 = 2x^2 + 3x + 6 + (4x + 3)\Delta x + 2\Delta x^2$; $\Delta f(x) = (4x + 3)\Delta x + 2\Delta x^2$; $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = (4x + 3) + 2\Delta x$; $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}((4x + 3) + 2\Delta x) = 4x + 3$. Отже, $(2x^2 + 3x + 6)' = 4x + 3$.

б) $f(x+\Delta x) = \sin 2(x+\Delta x)$; $\Delta f(x) = \sin 2(x + \Delta x) - \sin 2x = 2\sin\Delta x\cos(2x+\Delta x)$; $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cos(2x+\Delta x)$; $f'(x) = 2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(2x+\Delta x) = 2\cdot 1\cdot\cos 2x = \cos 2x$, бо $\cos 2x$ — неперервна функція. Отже, $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$. ▼

2. Користуючись правилами і формулами диференціювання, визначити похідні таких функцій:

а) $y = x^3 + 2x - 3$; б) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}$;

в) $y = \sin x \ln x$; г) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \arccos x$;

д) $y = \frac{e^x}{\operatorname{tg} x}$.

▲ а) Застосовуючи формули (3), (8), (4а) і (2), маємо

$$y' = (x^3 + 2x - 3)' = (x^3)' + 2(x)' - (3)' = 3x^2 + 2\cdot 1 - 0 = 3x^2 + 2.$$

б) Запишемо дану функцію у вигляді $y = 3x^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 4x^{-3}$. Застосовуючи формули (3), (4а), (8), (8б), (8в), дістаємо

$$y' = 3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + 4(-3)x^{-4} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{12}{x^4}.$$

в) Користуючись формулами (4), (10а) і (11), маємо

$$y' = (\sin x)'\ln x + \sin x(\ln x)' = \cos x\cdot\ln x + \frac{1}{x}\sin x.$$

г) За формулами (17) і (16) і правилами (3) і (4б) дістаємо

$$y' = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

д) Користуючись правилом (5) і формулами (9а) і (13), маємо

$$y' = \frac{(e^x)'\operatorname{tg} x - e^x(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\left(e^x\operatorname{tg} x - \frac{e^x}{\cos^2 x}\right) = \frac{e^x(\sin 2x - 2)}{2\sin^2 x}. \quad ▼$$

3. Користуючись правилом диференціювання складної функції і формулами диференціювання, знайти похідні таких функцій:

а) $y=(2+3x)^3$; б) $y=e^{-5x}$; в) $y=\sin^2 x$;

г) $y=\operatorname{tg} x^4$; д) $y=\ln(x^3+1)$; е) $y=\sqrt{x^5+3}$.

▲ а) Покладемо $u=2+3x$. Тоді $y=u^3$. Користуючись правилом (6) і формулою (8), дістаємо

$$y'_u=3u^2,\ u'_x=3;\ y'=3u^2\cdot 3=3(2+3x)^2\,3=9(2+3x)^2.$$

б) Уводячи позначення $u=-5x$ і застосовуючи формули (9а), (6) і (4а), маємо

$$y'=(e^u)'\cdot u'=e^u\cdot u'=e^{-5x}\cdot(-5)=-5e^{-5x}.$$

в) Покладаючи $\sin x=u$, дістаємо складну функцію $y=u^2$ і тоді $y'=(u^2)'\cdot u'=2u\cdot u'=2\sin x\ \cos x=$ $=\sin 2x$.

г) Покладемо $x^4=u$. Згідно з формулами (6) і (13), маємо

$$y'=(\operatorname{tg} u)'\cdot u'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'=\frac{1}{\cos^2 x^4}\cdot 4x^3=4x^2\sec^2 x^4.$$

д) Нехай $u=x^3+1$. Тоді $y=\ln u$ і

$$y'=(\ln u)'\cdot u'=\frac{u'}{u}=\frac{1}{x^3+1}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{x^3+1}.$$

е) Покладемо $u=x^5+3$. Дістанемо функцію $y=\sqrt{u}$. За формулами (8б), (8) і (2) маємо

$$y'=(\sqrt{u})'\cdot u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+3}}.\ ▼$$

4. Обчислити похідну функції $f(x)=\ln\sin x$ в точці $x=\frac{\pi}{4}$.

▲ Уведемо нову змінну $u=\sin x$. Тоді $f(x)=\ln u$. За формулами (10а) і (11) маємо $f'(x)=(\ln u)'\cdot u'=$ $=\frac{1}{\sin x}\cos x=\operatorname{ctg} x$. Поклавши $x=\frac{\pi}{4}$, дістанемо, що $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$. ▼

5. Знайти похідну функції $y=\sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-3}}$.

▲ Логарифмуючи дану рівність, маємо $\ln y=\frac{1}{3}(2\ln x+$ $+\ln(x+1)-\ln(x-3))$. Користуючись логарифмічною похідною, дістаємо

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2-4x-3}{x(x+1)(x-3)},$$

звідки

$$y' = y(\ln y)' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-3}} \cdot \frac{x^2-4x-3}{x(x+1)(x-3)} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2-4x-3}{\sqrt[3]{x(x+1)^2(x-3)^4}}. \ \blacktriangledown$$

6. Знайти похідну степенево-показникової функції $y = (1 + \sin x)^x$.

▲ Логарифмуючи цю рівність, маємо $\ln y = x \ln(1 + \sin x)$. Тоді

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = x' \ln(1 + \sin x) + x(\ln(1 + \sin x))' =$$

$$= \ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x},$$

звідки знаходимо

$$y' = (1 + \sin x)^x \left(\ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x}\right). \ \blacktriangledown$$

7. Переконатися в тому, що функція $y = e^{3x} + x^2$ є розв'язком рівняння $y' - 3y + 3x^2 - 2x = 0$.

▲ Оскільки похідна заданої функції $y' = 3e^{3x} + 2x$, то, підставляючи значення y' і y в задане рівняння, дістаємо тотожність $0 \equiv 0$, що й доводить дане твердження. ▼

8. Маса (в грамах) куска стержня AB визначається за формулою $m(l) = l^2 + 3l$, де l — відстань від точки A до будь-якої точки стержня. Визначити лінійну густину стержня у його кінці B ($AB = 10$ см).

▲ Лінійна густина стержня в точці $l_0 \in AB$ визначається за формулою

$$\gamma(l_0) = \lim_{l \to l_0} \frac{m(l_0 + \Delta l) - m(l_0)}{l - l_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m(l_0)}{\Delta l}.$$

Тому $\gamma(l_0) = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l}((l_0 + \Delta l)^2 + 3(l_0 + \Delta l) - l_0^2 - 3l_0) = 2l_0 + 3$. Отже, $\gamma(B) = \gamma(10) = 2 \cdot 10 + 3 = 23$ г/см^3.

Крім того, $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m(l_0)}{\Delta l} = m'(l_0)$. Оскільки $m'(l) = 2l + 3$, то $m'(10) = 23$. Як бачимо, обчислення похідної за правилами диференціювання значно простіше, ніж за означенням. ▼

Вправи

1. Користуючись означенням похідної, знайти y':

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = \frac{3}{x}$; 3) $y = \cos 4x$; 4) $y = e^{ax}$.

Відповідь: 1) $2x + 2$; 2) $-\frac{3}{x^2}$; 3) $-4\sin 4x$; 4) ae^{ax}.

2. Застосовуючи правила і формули диференціювання, знайти y':

1) $y = 3x^3 - 6x + 5$; 2) $y = 5x + x^6 - \sin 2$;

3) $y = 2\sqrt{x} + x^3 + 0{,}2x^5$; 4) $y = \sqrt[3]{t} + t^4 + \frac{\pi}{2}$;

5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x^2}$; 6) $y = a\sin t + b\cos t$; 7) $y = 5e^x + \ln x$;

8) $y = x\cos x$; 9) $y = e^t \sin t$; 10) $y = x^2 \ln x$;

11) $y = x^5\left(\frac{x}{2} - 2 + x^3\right)$; 12) $y = x^3 \operatorname{tg} x$; 13) $y = (x^2 + 1)\operatorname{arctg} x$;

14) $y = e^x(\cos x + \sin x)$; 15) $y = \frac{x^2}{1 - x}$; 16) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$;

17) $y = \frac{2x - 1}{3x + 5}$; 18) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$; 19) $y = \frac{\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}}$;

20) $y = \frac{x^2 + 1}{\ln x}$; 21) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Відповідь: 1) $9x^2 - 6$; 2) $5 + 6x^5$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x^2 + x^4$;

4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + 4t^3$; 5) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$; 6) $a\cos t - b\sin t$;

7) $5e^x + \frac{1}{x}$; 8) $\cos x - x\sin x$; 9) $e^t(\cos t + \sin t)$;

10) $x(2\ln x + 1)$; 11) $x^4(8x^3 + 3x - 10)$; 12) $3x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$;

13) $2x \operatorname{arctg} x + 1$; 14) $2e^x \cos x$; 15) $\frac{x(2 - x)}{(1 - x)^2}$;

16) $\frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$; 17) $\frac{13}{(3x + 5)^2}$; 18) $-\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$;

19) $\frac{2}{\sqrt{x}(4 + \sqrt{x})^2}$; 20) $\frac{x^2(2\ln x - 1) - 1}{x\ln^2 x}$;

21) $\frac{-3x^2 + 2x + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$.

3. Довести правило $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ і, користуючись ним, знайти y', якщо: а) $y = x(x+1)(x+5)$; б) $y = xe^x \sin x$.
Відповідь: а) $3x^2 + 12x + 5$; б) $e^x(\sin x + x\sin x + x\cos x)$.

4. Знайти похідні складних функцій:

1) $y=(1+2x)^4$; 2) $y=(3-5x+6x^2)^3$; 3) $y=(x^3-3)^5$;

4) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{x-1}\right)^2$; 5) $y=x^5\left(\dfrac{x}{2}-2+x^3\right)$; 6) $y=\sqrt{1+x^3}$;

7) $y=\sqrt{\sin x}$; 8) $y=\sqrt{\ln x+1}$; 9) $y=\sqrt{x^2+a^2}$;

10) $y=\sin 3x$; 11) $y=a\cos\alpha x+b\sin\beta x$; 12) $y=\operatorname{tg} mx$;

13) $y=\cos^2 x$; 14) $y=\operatorname{tg}^2 4x$; 15) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

16) $y=(\arcsin x)^2$; 17) $y=\ln(a^2+x^2)$; 18) $y=\ln\cos x$;

19) $y=e^{ax}$; 20) $y=e^{-x^2}$; 21) $y=\sqrt{e^{-x}}$; 22) $y=3^{x^2}$;

23) $y=e^{\sqrt[3]{x}}$; 24) $y=x^2e^{-2x}$; 25) $y=(x^3+1)\,e^{\frac{2}{x}}$;

26) $y=2^{3x+x^2}$; 27) $x=\sin at\,e^{bt}$; 28) $y=(x^2+5)\ln x^3$;

29) $y=a^{3x}\lg(x^2+1)$; 30) $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} 3x$;

31) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 32) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$; 33) $x=(t+\sin^2 t)^2$;

34) $y=e^{-x}-\sin e^{-x}\cos e^{-x}$.

Відповідь: 1) $8(1+2x)^3$; 2) $3(12x-5)(3-5x+6x^2)^2$;

3) $15x^2(x^3-3)^4$; 4) $\dfrac{2(x^2+1)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^3}$;

5) $x^4(8x^3+3x-10)$; 6) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$; 7) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$;

8) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}$; 9) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$; 10) $3\cos 3x$;

11) $-a\alpha\sin\alpha x+b\beta\cos\beta x$; 13) $-\sin 2x$; 14) $\dfrac{8\sin 4x}{\cos^3 4x}$;

15) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$; 16) $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 17) $\dfrac{2x}{a^2+x^2}$; 18) $-\operatorname{tg} x$;

19) ae^{ax}; 20) $-2xe^{-x^2}$; 21) $-\dfrac{1}{2\sqrt{e^x}}$; 22) $2x\cdot 3^{x^2}\ln 3$;

23) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}}$; 25) $e^{\frac{2}{x}}\left(3x^2-2x-\dfrac{2}{x}\right)$;

26) $(3+2x)\,2^{3x+x^2}\ln 2$; 28) $\dfrac{3}{x}(2x^2\ln x+x^2+5)$;

29) $\dfrac{a^{3x}}{x^2+1}(3(x^2+1)\ln a\lg(x^2+1)+2x\lg e)$;

30) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}+\dfrac{3}{\cos^2 3x}$; 31) $\dfrac{1}{\sin x}$; 32) $\dfrac{1}{x^2+1}$;

33) $2(t+\sin^2 t)(1+\sin 2t)$; 34) $-2e^{-x}\sin^2 e^{-x}$.

5. Застосовуючи логарифмічне диференціювання, знайти похідну:

1) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$;

3) $y = \sqrt[4]{\frac{x^3(x+4)}{(x+2)^2}}$; 4) $y = x^x$; 5) $y = x^{\cos x}$;

6) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}$; 2) $\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$;

3) $\frac{x^2+6x+12}{2\sqrt[4]{x(x+2)^6(x+4)^3}}$; 4) $x^x(\ln x + 1)$;

5) $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right)$;

6) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right)$.

6. Обчислити похідні у вказаних точках:

1) $y = e^{5x}$, $x = 0$; 2) $y = x^3 \arcsin x$, $x = 0$;

3) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$, $x = \frac{\pi}{6}$; 4) $y = \ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: 1) 5; 2) 0; 3) 2; 4) $2\frac{2}{3}$.

7. Ліфт після включення рухається за законом $x = 2t^3 + 3t + 1$ (м). Користуючись означенням похідної, визначити швидкість його руху в момент часу $t = 1$ с. Результат перевірити за правилами диференціювання.

Відповідь: 7 м/с.

8. Показати, що функції вигляду $y = Cx^k$, $C = \text{const}$, є розв'язком рівняння $y' = \frac{ky}{x}$, $x \neq 0$, $k = \text{const}$, $k \neq 0$.

9. Показати, що функція $y = xe^{-x}$ задовольняє рівняння $xy' = (1-x)y$.

§ 7.2. Геометричний і механічний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

Якщо функція f диференційовна в точці x_0, то $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в точці $(x_0; f(x_0))$ (*геометричний зміст похідної*), тобто $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, утворений дотичною з додатним напрямом осі Ox.

Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції f в точці $(x_0; f(x_0))$ відповідно мають такий вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{1}$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0. \tag{2}$$

Сформулюйте означення дотичної і нормалі до графіка функції.

Якщо $s = s(t)$ — функція, що описує закон руху матеріальної точки, то миттєва швидкість v в момент часу t дорівнює похідній шляху за часом (*механічний зміст похідної*), тобто $v(t) = s'(t)$. Прискорення a є похідною швидкості за часом, тобто $a(t) = v'(t)$.

У багатьох задачах величини, уведені через похідну, можна тлумачити як швидкість зміни деяких функцій. Наприклад, силу струму в провіднику як швидкість зміни кількості електрики з часом, лінійну густину неоднорідного стержня як швидкість наростання маси при зміні його довжини, теплоємність тіла як швидкість зміни теплоти при нагріванні, кутову швидкість обертального руху як швидкість зміни кута повороту із зміною часу та ін.

ПРИКЛАДИ

1. Написати рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = x^2 - 3x + 1$ у точці з абсцисою $x = 2$.

▲ Оскільки $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$, то точка дотику має координати $x_0 = 2$, $f(x_0) = -1$. Обчисливши похідну $f'(x) = 2x - 3$, $f'(2) = 1$, дістанемо за формулами (1) і (2) відповідно рівняння дотичної і нормалі: $y - x + 3 = 0$ і $y + x - 1 = 0$. ▼

2. Обчислити довжину відрізка дотичної до кривої $y = e^x$ від точки дотику, де $x = 0$, до її перетину з віссю Ox.

▲ Знайдемо ординату точки дотику: $f(0) = 1$. Отже, точка дотику має координати $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Далі, $f'(x) = e^x$, $f'(0) = e^0 = 1$. Тоді рівняння дотичної $y - 1 = x - 0$ або $y = x + 1$.

Ордината y_1 точки перетину дотичної з віссю Ox дорівнює 0. Тоді з рівняння дотичної знаходимо, що $x_1 = -1$. Отже, точка перетину дотичної з віссю Ox має координати $x_1 = -1$, $y_1 = 0$. Шукану довжину обчислимо за формулою $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Маємо

$$d = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}. \ ▼$$

3. В якій точці дотична до кривої $y = \ln x$ паралельна прямій $y = x + 1$?

▲ Нехай шуканою точкою є $(x_0; y_0)$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної в точці дотику, тобто

$$k = f'(x)\big|_{x=x_0} = \frac{1}{x}\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

Оскільки дотична паралельна прямій $y = x + 1$, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тобто $k = 1$, або $\frac{1}{x_0} = 1$. Звідси маємо $x_0 = 1$. Підставляючи це значення абсциси в рівняння кривої, знайдемо ординату точки дотику $y = \ln 1 = 0$. Отже, шуканою точкою є (1; 0). ▼

4. Під яким кутом перетинаються параболи $y_1 = x^2$ і $x = y_2^2$?

▲ Кут між двома кривими, що перетинаються, визначається як кут між дотичними до цих кривих у точці їх перетину за формулою

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

де k_1 і k_2 — кутові коефіцієнти цих дотичних. Для знаходження точки перетину заданих кривих розв'яжемо систему $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2, \end{cases}$ звідки маємо дві точки перетину O (0; 0) і M (1; 1) (рис. 32). У точці M (1; 1) маємо

$$k_1 = y_1'\big|_{x=1} = 2x\big|_{x=1} = 2,$$

$$k_2 = y_2'\big|_{x=1} = (\sqrt{x})'\big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 1} = \dfrac{3}{4}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$, $\alpha_2 \approx 37°$.

У точці O (0; 0) дотичні перетинаються під прямим кутом, оскільки вони є осями координат (переконайтесь в цьому), тому $\alpha_1 = 90°$. ▼

5. Висячий міст має форму дуги параболи $y = ax^2$ (рис. 33). Проліт мосту $AB = 2l = 80$ м, стріла прольоту $OC = h = 5$ м. Визначити кут провисання α у точці A.

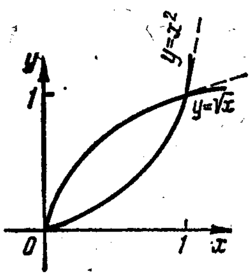

Рис. 32

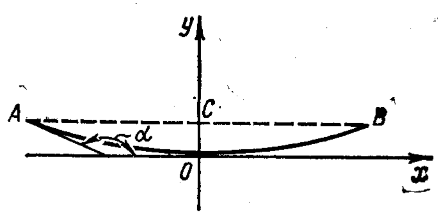

Рис. 33

▲ Знаходимо $y' = 2ax$. Тоді, виходячи з геометричного змісту похідної, дістаємо $k = \operatorname{tg} \alpha = y'(-40) = -80a$. Користуючись умовою задачі, маємо $5 = 1600\ a$, $a = 0{,}003125$. Тоді $\operatorname{tg} \alpha = -0{,}003125 \cdot 80 = -0{,}25$. Отже, $\alpha = \operatorname{arctg}(-0{,}25)$ або $166°$. Поясніть, чому тут кутовий коефіцієнт від'ємний. ▼

6. Шлях s (в метрах), пройдений тілом за час t (в секундах) після початку руху, визначається за формулою $s = \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + 2t$. Обчислити швидкість і прискорення тіла в момент часу $t = 5$ с.

▲ За формулою (4) дістаємо $v = s'(t) = t^2 + t + 2$, $v(5) = 32$ м/с, а за формулою (5) обчислюємо прискорення $a = v'(t) = 2t + 1$, $a(5) = 11$ м/с^2. ▼

7. Сторони b і c прямокутника змінюються за законом $b = 3t + 1$, $c = 2t + 5$. З якою швидкістю змінюються його площа і периметр в момент $t = 5$?

▲ Площа прямокутника $S = bc = (3t + 1)(2t + 5) = 6t^2 + 17t + 5$, а периметр $p = 2b + 2c = 10t + 12$. Тоді $v_1 = s'(t) = 12t + 17$, $v_1(5) = 77$, а $v_2 = p'(t) = 10$, $v_2(5) = 10$. ▼

8. Закон радіоактивного розпаду виражається формумулою $m = m_0 e^{-kt}$, де m — маса радіоактивної речовини, яка не розпалася, m_0 — початкова маса речовини, k — стала розпаду, t — час розпаду. Визначити швидкість радіоактивного розпаду в початковий момент.

▲ Швидкість розпаду в момент часу t дорівнює похідній функції $m = m_0 e^{-kt}$ за змінною t, тобто $v = m'(t) = -km_0 e^{-kt}$. Підставляючи у цю формулу значення $t = 0$, дістаємо $v(0) = -km_0$.

Поясніть, що означає тут знак мінус. ▼

Вправи

1. Під яким кутом перетинається парабола $y = x^2$ з прямою $y = 3x - 2$?

Відповідь: $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{13} \approx 4°$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \approx 8°$.

2. Під яким кутом перетинається парабола $y = \sqrt{x}$ з гіперболою $y = \frac{1}{x}$?

Відповідь: $\alpha = \operatorname{arcctg} 3 \approx 72°$.

3. Визначити кут, під яким синусоїда перетинає вісь Ox.

Відповідь: $\alpha = 45°$ в точках $x_k = 2k\pi$, $\alpha = 135°$ при $x_k = (2k - 1)\pi$.

4. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$: а) паралельна прямій $y = 2x - 4$; б) перпендикулярна до прямої $x + y = 1$?

Відповідь: а) $x = 1$, $y = 1$; б) $x = 0{,}5$, $y = 0{,}25$.

5. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3$ в точці (2; 8).

Відповідь: $y - 12x + 16 = 0$.

6. Записати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^4 + 3$ в точці (1; 4).

Відповідь: $y - 4x = 0$, $4y + x - 17 = 0$.

7. Записати рівняння нормалі до параболи $y = x^2 + 2x + 2$, перпендикулярної до прямої, що з'єднує точку (0; 0) з вершиною параболи.

Відповідь: $4y - 4x - 11 = 0$.

8. Профіль підйому гірської дороги має форму кривої $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$. Визначити кут нахилу підйому на його початку.

Відповідь: 45°.

9. Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно, визначається за формулою $v = 2t^2 + 4t$. Яке прискорення матиме тіло через 3 с після початку руху?

Відповідь: 16.

10. Махове колесо за t секунд повертається на кут $\varphi = 8t - 2t^2$. Визначити кутову швидкість ω і прискорення w обертання. Через скільки секунд колесо зупиниться?

Відповідь: $8 - 4t$; -4; 2.

11. Тіло, маса якого 200 кг, рухається прямолінійно за законом $s = 3t^2 - t + 4$ (в метрах). Визначити кінетичну енергію $\dfrac{mv^2}{2}$ тіла через 4 с після початку руху.

Відповідь: 52 900 Дж.

12. Турист віддаляється від підніжжя скелі, висота якої 80 м, з швидкістю 6 км/год. Яка швидкість віддалення туриста від вершини скелі в той момент, коли він знаходиться на відстані 60 м від її підніжжя?

Відповідь: 3,6 км/год.

13. Переконатися, що швидкість зміни квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є лінійною функцією.

14. Переконатися, що швидкість зміни показникової функції $y = e^{kx}$, $k \neq 0$, пропорційна y, а швидкість зміни логарифмічної функції $y = \ln x$, $x > 0$, обернено пропорційна x.

15. Кількість електрики q у провіднику змінюється за законом $q = \sin(3t + 1)$. За яким законом змінюється сила струму?

Відповідь: $3\cos(3t + 1)$.

16. Залежність кількості теплоти Q, одержаної тілом при нагріванні, від температури θ виражається законом $Q = \theta^2 \ln \theta$, $\theta > 0$. Визначити теплоємність тіла.

Відповідь: $\theta(2 \ln \theta + 1)$.

§ 7.3. Диференціал функції. Диференціювання параметрично заданих функцій

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то її приріст у цій точці можна записати у вигляді ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$)

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x. \qquad (1)$$

При цьому вираз $f'(x_0)\Delta x$ називається *диференціалом функції* в точці x_0 і позначається $df(x_0)$. Отже,

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (2)$$

Оскільки $dx = (x')\Delta x = \Delta x$, то $df(x_0) = f'(x_0)dx$. Звідси дістаємо інший запис похідної: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$. Отже, похідну можна розглядати як відношення диференціала функції до диференціала аргументу. Зокрема, для диференційовної на інтервалі $(a; b)$ функції f її похідну на цьому інтервалі позначають $\frac{df(x)}{dx}$ або $\frac{dy}{dx}$ і

$$df(x) = f'(x)\,dx = dy. \qquad (3)$$

Похідну функції, заданої параметрично у вигляді $x = x(t)$, $y = y(t)$, обчислюють за формулою

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (4)$$

Доведіть цю формулу і поясніть, чому диференціал функції називають ще *головною* і *лінійною* відносно Δx *частиною приросту функції*.

Для диференційовних функцій справедливі такі формули ($C = \text{const}$):

$$dC = 0; \quad d(Cu) = C\,du; \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad v(x) \neq 0. \qquad (5)$$

При досить малих Δx в (1) і (2) дістаємо наближену рівність

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x \qquad (6)$$

або, розкриваючи її, маємо

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (7)$$

Остання формула дає можливість замінити будь-яку функцію, диференційовну в точці, лінійною функцією, значення якої в деякому околі цієї точки близькі до значень заданої функції.

Диференціал функції в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$ *(геометричний зміст диференціала)*.

З рівняння дотичної (§ 7.2, формула (1)) і формули (7) випливає, що графік функції f в деякому околі заданої точки можна наближено замінити відповідною частиною дотичної до цього графіка.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти диференціали таких функцій: а) $f(x) = e^{x^2}$; б) $f(x) = (3x^3 - 4x)^4$; в) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

▲ Користуючись формулою (3), маємо:

$$\text{а)}\ df(x) = (e^{x^2})' dx = e^{x^2} \cdot 2x dx = 2xe^{x^2} dx;$$

$$\text{б)}\ df(x) = ((3x^3 - 4x)^4)' dx = 4(3x^3 - 4x)^3 (9x^2 - 4) dx = $$
$$= 4x^3 (9x^2 - 4)(3x^2 - 4)^3 dx;$$

$$\text{в)}\ df(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1 + x)}. \quad ▼$$

2. Знайти диференціал df і приріст Δf функції $f(x) = x^2 - 2$ при $x = 2$ і $\Delta x = 0{,}1$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які дістаємо при заміні приросту функції її диференціалом.

▲ У будь-якій точці $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 2 - x^2 + 2 =$$
$$= 2x\Delta x + \Delta x^2, \quad df(x) = (x^2 - 2)'\Delta x = 2x\Delta x.$$

При $x = 2$ і $\Delta x = 0{,}1$ дістаємо $\Delta f(2) = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}41$ і $df(2) = 0{,}4$. Абсолютна похибка $|\Delta f(2) - df(2)|$ дорівнює $0{,}41 - 0{,}4 = 0{,}01$, а відносна похибка $\left|\frac{\Delta f(2) - df(2)}{\Delta f(2)}\right| = 0{,}024$ або 2,4 %. ▼

3. Нехай $f(x) = (x - 5)^5 (x - 3)$. Обчислити наближено $f(2{,}97)$.

▲ Покладемо $x_0 = 3$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = 2{,}97 - 3 = -0{,}03$. У точці x_0 значення функції $f(x_0) = f(3) = 0$. Знайдемо похідну заданої функції в будь-якій точці x. Маємо $f'(x) = 2(x - 5)(x - 3) + (x - 5)^2$. Тоді $f'(x_0) = f'(3) = 4$. За формулою (7) обчислимо наближено $f(2{,}97)$, а саме: $f(2{,}97) \approx 0 + 4(-0{,}03) = -0{,}12$. ▼

4. Обчислити наближене значення $\sin 30°12'$, не користуючись таблицею і мікрокалькулятором. Одержане значення порівняти з табличним.

▲ Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Покладемо $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$. Тоді $\Delta x = 30°12' - 30° = 12'$, або в радіанах $\Delta x = \frac{12\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}0035$. Обчислимо: $f'(x) = \cos x$,

$f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5$. За формулою (7) $\sin 30°12' \approx \sin 30° + \cos 30° \cdot 0,0035 = 0,5 + 0,8660 \cdot 0,0035 = 0,5030$. Користуючись мікрокалькулятором, дістаємо $\sin 30°12' = 0,5003$. ▼

5. Площа круга обчислюється за формулою $S = \pi r^2$. Відомо, що $r = 3,2$ см, причому допустима похибка $|\Delta r| = 0,05$ см. Визначити абсолютну і відносну похибки, які допускаються при обчисленні площі круга за вказаною формулою.

▲ Оскільки $dr = \Delta r$, то абсолютна похибка $|\Delta S| \approx |dS| = |S'(r)\,dr| = 2\pi r\,|dr| = 2\pi \cdot 3,2 \cdot 0,05 = 0,32\pi \approx 1$ см². Тоді відносна похибка $\frac{|\Delta S|}{S} \approx \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{10,24\pi} \approx 0,03$, тобто близько 3 %. ▼

6. Мідний кубик з ребром 4 см піддали рівномірному шліфуванню з усіх боків. Визначити, на скільки скоротиться ребро кубика, якщо його маса зменшиться на 0,88 г (густина міді 8,9 г/см³).

▲ Нехай x — ребро кубика, тоді його маса $m = 8,9\,x^3$. Покладемо $x_0 = 4$ і, скориставшись формулою (6), дістанемо $\Delta m(x_0) \approx m'(x_0)\Delta x$, де Δx — шукана величина, а $\Delta m(x_0) = 0,88$ (за умовою). Оскільки $m' = 26,7\,x^2$ і $m'(4) = 427,2$, то $\Delta x = \frac{\Delta m(x_0)}{m'(x_0)} = \frac{0,88}{427,2} = 0,002$ см. ▼

7. Знайти пряму, яка щільніше інших прилягає до графіка функції $y = \sin x$ поблизу точки (0; 0).

▲ Раніше вказувалось на те, що такою прямою є дотична до графіка заданої функції в заданій точці. Оскільки $y' = \cos x$, $y'(0) = 1$, то за формулою (2), § 7.2, маємо $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$ або $y = x$. Отже, у досить малому околі точки (0; 0) найщільніше з усіх прямих прилягає до синусоїди бісектриса $y = x$. ▼

8. За допомогою калькулятора скласти таблицю значень функції $y = e^x$ на відрізку $[-0,05; 0,05]$ з кроком 0,01. За одержаними даними побудувати на цьому проміжку графік заданої функції. Упевнитись в тому, що в межах точності побудови цей графік і графік функції $y = x + 1$ нерозрізнимі і пояснити причину цього факту.

▲ Складаємо таблицю значень функції $y = e^x$ на відрізку $[-0,05; 0,05]$:

x	−0,05	−0,04	−0,03	−0,02	−0,01	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
e^x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05

Легко перевірити, що ці значення збігаються із значеннями функції $y = x + 1$ у відповідних точках. Це пояснюється тим, що пряма $y = x + 1$ є дотичною (покажіть це) до графіка функції $y = e^x$ в точці (0; 1). ▼

9. Знайти похідну функції, заданої параметрично $x = x(t) = \operatorname{tg} t$, $y = y(t) = \sin t$.

▲ Скориставшись формулою (4), дістанемо

$$y'_x = \frac{(\sin t)'}{(\operatorname{tg} t)'} = \frac{\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \cos^3 t. \qquad ▼$$

Вправи

1. Обчислити диференціали таких функцій:

1) $f(x) = (3x + 1)^2$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$; 3) $f(x) = \arcsin x^3$;

4) $f(x) = e^x \sin 5x \quad dx$.

Відповідь: 1) $6(3x + 1)\,dx$; 2) $\dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}dx$; 3) $\dfrac{3x^2dx}{\sqrt{1 - x^6}}$;

4) $e^x(\sin 5x + 5\cos 5x)\,dx$.

2. За допомогою диференціала обчислити наближене значення:

1) $\sqrt[3]{8{,}002}$; 2) $\cos 60°1'$; 3) $\operatorname{arctg} 0{,}98$; 4) $\ln 1{,}02$.

Відповідь: 1) 2,0002; 2) 0,4997; 3) 0,775; 4) 0,02.

3. На скільки збільшиться значення степеня 2^4, якщо основу збільшити на 0,003?

Відповідь: 0,096.

4. Циліндр з висотою 20 см і радіусом 5 см при шліфуванні бічної поверхні втратив у масі 2 г. На скільки зменшився радіус, якщо густина речовини циліндра дорівнює 2,1?

Відповідь: 0,003.

5. Площа рівностороннього трикутника обчислюється за формулою $S = \sqrt{p(p - a)^3}$, де a — сторона, p — півпериметр цього трикутника. Визначити абсолютну і відносну похибки, що допускаються при обчисленні площі трикутника за цією формулою, якщо $a = 5{,}1$ см і допустима похибка при вимірюванні сторони дорівнює $\pm 0{,}02$ см.

Відповідь: 0,04; 0,8 %.

6. Обґрунтувати наближену формулу $\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ і обчислити за цією формулою $\sqrt{24{,}96}$.

Відповідь: 4,996.

7. Знайти пряму, яка щільніше інших прилягає до графіка функції $\operatorname{tg} x$ поблизу точки (0; 0).

Відповідь: $y = x$.

8. Користуючись калькулятором, скласти таблицю значень функції $y = x^2 - x$ на відрізку [0,95; 1,05] з кроком 0,01. За цими даними побудувати графік функції на заданому відрізку. Переконатись в тому, що в межах точності побудови цей графік і графік функції $y = x - 1$ нерозрізнимі. За масштабну одиницю взяти 10 см.

9. Поясніть, чому, розглядаючи наближене значення x поблизу числа 1, значення функції $y = \frac{1}{x}$ можна обчислювати за формулою $y = 2 - x$, тобто замінити дію ділення на простішу — віднімання. Обчислити значення функції $y = \frac{1}{x}$ за наближеною формулою в точках 0,999987; 0,999989; 0,000011 і 0,000013. Користуючись мікрокалькулятором, переконатись в тому, що похибка в проведених обчисленнях не перевищує 10^{-5}.

10. Енергія махового колеса дизельного двигуна виражається формулою $E = 0{,}015n^2$, де n — число обертів за хвилину. На скільки потрібно збільшити число обертів, щоб енергія збільшилась на величину $\Delta E = 0{,}72$ м/хв?

Відповідь: $\Delta n \approx dn = 1$ об/хв.

11. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $x = te^t$, $y = e^{2t}$; 2) $x = \sin^2 t$, $y = \cos 2t$;
3) $x = 2\ (t - \sin t)$, $y = 2\,(1 - \cos t)$.

Відповідь: 1) $\frac{2e^t}{1 + t}$; 2) -2; 3) $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

12. Антифрикаційна крива задана рівняннями $x = r \sin t$, $y = r \cos t + r \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $r = \text{const}$. Обчислити швидкість зміни відповідної функції в точці, для якої значення параметра $t = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\approx 1{,}3$.

§ 7.4. Похідні і диференціали вищих порядків

Похідна від похідної f' функції f називається *похідною другого порядку* або *другою похідною* заданої функції f. Аналогічно означаються похідні *третього* і т. д. порядків. Похідні, починаючи з другої, називаються *похідними вищого порядку* і позначаються: f'', f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, ..., $f^{(n)}$ (іноді пишуть f''_{x^2}, f'''_{x^3}, ...) або $y'' = f''(x)$, $y''' = f'''(x)$, ..., $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ або ще так: $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$, ..., $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Якщо функцію задано параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, то похідна другого порядку обчислюється за формулою

$$y''_{x^2} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{1}$$

Похідна другого порядку від шляху s за часом t дорівнює прискоренню a (*механічний зміст другої похідної*):

$$a = s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{2}$$

Диференціал від диференціала функції f називається *диференціалом другого порядку* і позначається d^2f або d^2y. Отже, $d^2f = d\,(df)$.

Аналогічно означаються диференціали *вищих порядків*, тобто

$$d^nf = d\,(d^{n-1}f), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Якщо x — незалежна змінна, то

$$d^nf(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n. \qquad (3)$$

ПРИКЛАДИ

1. Знайти похідні другого порядку таких функцій:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 2$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = \sqrt{1 + x^2}$.

▲ Обчислюємо послідовно першу, потім другу похідні. Маємо:

а) $y' = 3x^2 + 6x$, $y'' = 6x + 6$; б) $y' = -e^{-x}$, $y'' = e^{-x}$;

в) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y'' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - x\,(\sqrt{1+x^2})'}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,x}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}. \ ▼$$

2. Знайти похідні n-го порядку від функцій:

а) $y = e^{ax}$; б) $y = \cos x$.

▲ а) Поступово знаходимо: $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2e^{ax}$, $y''' = a^3e^{ax}, \ldots$. Методом математичної індукції доводимо, що $y^{(n)} = a^ne^{ax}$.

б) Маємо $y' = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Застосовуючи метод математичної індукції, дістаємо загальну формулу $y^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. ▼

3. Затухаюче гармонічне коливання описується рівнянням $x = e^{-\lambda t}(A\cos kt + B\sin kt)$, де λ, k, A і B — сталі. Показати, що переміщення x, швидкість v і прискорення a пов'язані співвідношенням

$$a + 2\lambda v + (k^2 + \lambda^2)\,x = 0. \qquad (4)$$

▲ Справді, користуючись механічним змістом першої і другої похідних, дістаємо:

$$v = x'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}(A\cos kt + B\sin kt) +$$
$$+ e^{-\lambda t}(Bk\cos kt - Ak\sin kt) = e^{-\lambda t}(\cos kt\cdot(Bk - A\lambda) +$$
$$+ \sin kt\cdot(-B\lambda - Ak));$$
$$a = v'(t) = x''(t) = -\lambda e^{-\lambda t}(\cos kt\cdot(Bk - A\lambda) +$$
$$+ \sin kt\cdot(-B\lambda - Ak) + e^{-\lambda t}(\sin kt\cdot(A\lambda k - Bk^2) +$$
$$+ \cos kt\cdot(-B\lambda k - Ak^2) =$$
$$= e^{-\lambda t}(\cos kt\cdot(A\lambda^2 - 2B\lambda k - Ak^2) +$$
$$+ \sin kt\cdot(B\lambda^2 + 2A\lambda k - Bk^2)).$$

Підставляючи значення x, v і a в рівняння (4), маємо

$$e^{-\lambda t}(\cos kt\cdot(A\lambda^2 - 2B\lambda k - Ak^2 - 2A\lambda^2 + 2B\lambda k +$$
$$+ Ak^2 + A\lambda^2) + \sin kt\cdot(B\lambda^2 + 2A\lambda k - Bk^2 - 2B\lambda^2 -$$
$$-2A\lambda k + Bk^2 + B\lambda^2)) = 0.$$

Як бачимо, коефіцієнти при $\cos kt$ і $\sin kt$ дорівнюють 0, отже, дістаємо тотожність $0 \equiv 0$, яка й доводить наше твердження. ▼

4. Знайти похідну другого порядку від функції, заданої параметрично: $x = \cos t$, $y = \sin t$.

▲ Знаходимо $x'_t = -\sin t$, $x''_{tt} = -\cos t$, $y'_t = \cos t$, $y''_{tt} = -\sin t$. Підставляючи ці значення похідних у формулу (1), дістаємо

$$y''_{xx} = \frac{(-\sin t)(-\sin t) - (-\cos t)\cos t}{(-\sin t)^3} =$$
$$= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{-\sin^3 t} = \frac{1}{\sin^3 t}. ▼$$

5. Швидкість прямолінійного руху тіла пропорційна квадратному кореню з пройденого шляху s. Довести, що тіло рухається під дією сталої сили.

▲ За умовою маємо $v = s' = k\sqrt{s}$, $k = \text{const}$. Оскільки $a = s''$ (формула (2)), то

$$a = v' = (k\sqrt{s})' = k\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot s' = k\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot k\sqrt{s} = \frac{k^2}{2}.$$

За законом Ньютона сила $F = ma$. Отже, $F = m\frac{k^2}{2} = \text{const}$. ▼

6. Знайти d^3f для функції $f(x) = x^2 \ln x$.

▲ Послідовно знаходимо

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1),$$

$$f''(x) = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3, \quad f'''(x) = \frac{2}{x}.$$

Застосовуючи формулу (3) при $n = 3$, дістаємо $d^3f(x) = \frac{2}{x} dx^3$. Цей диференціал можна обчислити інакше (покажіть). ▼

Вправи

1. Знайти похідні вказаних порядків:

1) $y = x^5 + 4x^3 + 3x$, $y'' = ?$; 2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, $y'' = ?$;

3) $y = \operatorname{arctg} x$, $y'' = ?$; 4) $y = \cos^2 x$, $y'' = ?$; 5) $y = \sqrt[3]{x}$, $y''' = ?$;

6) $y = a^x$, $y^{(n)} = ?$; 7) $y = \dfrac{a}{x}$, $y^{(n)} = ?$; 8) $y = \sin x$, $y^{(n)} = ?$.

Відповідь: 1) $20x^3 + 24x$; 2) $\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; 3) $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$;

4) $-2\cos 2x$; 5) $\dfrac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $a^x \ln^n a$; 7) $(-1)^n \dfrac{an!}{x^{n+1}}$;

8) $\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Обчислити y''_{x^2} від функцій, заданих параметрично:

1) $x = 3t^2$, $y = 2t^3$; 2) $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$.

Відповідь: 1) $\dfrac{1}{6t}$; 2) $2e^{-6t}$.

3. Довести, що функція $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{5}{36}$ задовольняє рівняння $y'' - 5y' + 6y = x$.

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $s = ae^t + be^{-t}$. Показати, що його прискорення дорівнює пройденому шляху.

5. Переконатись в тому, що рух ліфта за законом $x = 2t^2 + 3t + 1$ є рівноприскореним.

6. Довести, що для функції $y = ax^3 + be^x$ справедлива рівність $y^{(4)} = y^{(5)}$.

7. Скільки разів потрібно продиференціювати функцію $y = (x^3 + 5)^{20}$, щоб в результаті дістати многочлен 10-го степеня?

Відповідь: 30.

8. Рівняння осі балки, довжина якої l і один кінець закріплено, а до другого підвішено вантаж, маса якого m, має вигляд $y = \dfrac{ml^2}{2EI} \times$

$\times\left(x-\frac{x^3}{l^2}\right)$, де E — модуль пружності, I — момент інерції перерізу.

Визначити: 1) згинаючий момент балки $M = EIy''(x)$, який характеризує її міцність; 2) перериваючий момент $S = M'(x)$; 3) інтенсивність навантаження $q = S'$.

Відповідь: 1) $-m$; 2) 0; 3) 0.

9. Знайти вказані диференціали за формулою (3) і за означенням:

1) $f(x) = 3x^4 + 4x^2 + 6x - 8$, $d^3f = ?$;

2) $f(x) = e^{2x}(x-2)$, $d^2f = ?$

Відповідь: 1) $72x dx^3$; 2) $4e^{2x}(x-1)\,dx^2$.

§ 7.5. Теореми про середнє. Формула Тейлора

Теорема Ролля. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f'(c) = 0$.*

Теорема Лагранжа. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \qquad (\textit{формула Лагранжа}).$$

Теорема Коші. *Якщо функції f і g неперервні на відрізку $[a, b]$, диференційовні на інтервалі (a, b) і $g'(x) \neq 0$ при всіх $x \in (a; b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (\textit{формула Коші}).$$

Якщо функція f в деякому околі точки x_0 має похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то для будь-якого x з цього околу виконується рівність (*формула Тейлора n-го порядку*)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n, \qquad (1)$$

де R_n — доповняльний член формули Тейлора, який у формі Лагранжа має вигляд

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (2)$$

При $x_0 = 0$ формула (1) називається також *формулою Маклорена* і тоді

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (3)$$

Для основних елементарних функцій формули Тейлора мають вигляд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(\theta x + n\pi)}{(2n)!} x^{2n}, \quad (5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{\cos\left(\theta x + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad (6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad (7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}. \quad (8)$$

Обгрунтуйте геометричний зміст теорем Ролля і Лагранжа. Виведіть формулу Лагранжа з формули Тейлора. Поясніть, чому у формулах (7) і (8) замість функцій $\ln x$ і x^α розглядаються функції $\ln(1+x)$ і $(1+x)^\alpha$.

ПРИКЛАДИ

1. Функція $f(x) = \frac{x^2-2}{x^4}$ має на кінцях відрізка $[-1; 1]$ однакові значення, а її похідна дорівнює нулю в точках $x = \pm 2$ (перевірте), розміщених за межами відрізка $[-1; 1]$. Чому не справджується висновок теореми Ролля?

▲ Функція неперервна і диференційовна в усіх точках заданого проміжку, крім точки $x = 0$, де вона не визначена, а ця точка є внутрішньою точкою відрізка $[-1; 1]$. Тому умови теореми Ролля не виконуються. ▼

2. Для функції $y = x^2$ записати формулу Лагранжа на відрізку $[0;\ 1]$ і визначити значення $x = c$.

▲ Оскільки $f'(x) = 2x$, то дістаємо таку формулу Лагранжа: $1 - 0 = 2c\,(1 - 0)$ або $1 = 2c$, звідки $c = \frac{1}{2}$. ▼

3. Показати, що рівняння $x^3 + x + a = 0$ при будь-якому a не може мати більше одного дійсного кореня.

▲ Позначимо $f(x) = x^3 + x + a$. Маємо многочлен непарного степеня, причому функція f є неперервною функцією при всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому задане рівняння має принаймні один корінь (графік функції f перетинає вісь Ox хоч в одній точці). Покажемо, що цей корінь єдиний. Припустимо, що задане рівняння має два корені x_1 і x_2, де $x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) = f(x_2) = 0$. На відрізку $[x_1;\ x_2]$ виконуються умови теореми Ролля (перевірте), тому існує точка $c \in (x_1;\ x_2)$ така, що $f'(c) = 0$. Однак $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Дістали суперечність, яка й доводить наше твердження. ▼

4. Записати формулу Коші для функцій $f(x) = x^3 + 1$ і $g(x) = x^2 - 1$ на відрізку $[1;\ 2]$. Обчислити значення c.

▲ Задані функції задовольняють умови теореми Коші. Оскільки $f'(x) = 3x^2$ і $g'(x) = 2x$, то формула Коші для заданих функцій має вигляд $\frac{9-2}{3-0} = \frac{3c^2}{2c}$ або $\frac{7}{3} = \frac{3}{2}c$, звідки $c = \frac{14}{9}$. ▼

5. Користуючись формулою Тейлора, обчислити з точністю до 10^{-4} наближене значення $\sqrt[5]{33}$.

▲ Виконаємо такі перетворення: $\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32 + 1} = \sqrt[5]{2^5 + 1} = 2\left(1 + \frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$. Покладаючи $x = \frac{1}{32}$ і $\alpha = \frac{1}{5}$ у формулі (8), дістаємо

$$\sqrt[5]{33} = 2\left(1 + \frac{1}{5\cdot 32} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\cdot\frac{1}{32^2} + \frac{1}{6\cdot 32^3}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right) + \cdots + R_n\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{160} - \frac{1}{160\cdot 80} + \frac{3}{160\cdot 160\cdot 80} - \cdots + R_n\right).$$

Враховуючи, що $|(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1}| < 1$ для $\alpha = \frac{1}{5}$ і всіх $n \in \mathbb{N}$, оцінимо величини послідовних похибок обчислення $2|R_n|$:

$$2|R_1|<\frac{2}{160\cdot 80}<2\cdot 10^{-4},\quad 2|R_2|<$$
$$<\frac{3}{160\cdot 80\cdot 80}<3\cdot 10^{-6}.$$

Оскільки $2|R_2|<10^{-4}$, то для одержання заданої точності обчислення досить взяти суму трьох членів формули (8), що передують R_2. Отже, маємо $\sqrt[5]{33}\approx 2(1+0{,}00625-0{,}00008)\approx 2{,}0123$. ▼

6. Вказати деякий проміжок значень x, для яких справедлива наближена (з точністю до 10^{-5}) формула

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}. \tag{9}$$

▲ За формулою (6) маємо $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_4$, де $R_4=\frac{\cos\left(\theta x+\frac{\pi}{2}\right)}{5!}x^5=-\frac{\sin\theta x}{120}x^5$, $0<\theta<1$. Оскільки $|\sin\theta x|\leqslant 1$, то $|R_4|\leqslant\frac{|x|^5}{120}$. Задана точність наближення забезпечується тими значеннями x, для яких $\frac{|x|^5}{120}<10^{-5}$, звідки $|x|\leqslant 0{,}26$. Оцінку R_4 взято з «запасом», і тому проміжок $[-0{,}26;\ 0{,}26]$ не є найбільшим. ▼

7. Написати формулу Тейлора другого порядку для функції $f(x)=e^x$ при $x_0=-1$.

▲ Маємо $f(x)=f'(x)=f''(x)=e^x$, $f(-1)=f'(-1)=f''(-1)=e^{-1}$, $f'''(c)=e^c$. Тоді з (1) і (2) дістаємо таку формулу Тейлора:

$$e^x=\frac{1}{e}\left(1+(x+1)+\frac{1}{2!}(x+1)^2\right)+\frac{1}{3!}e^c(x+1)^3,$$
$$c=-1+\theta(x+1),\ 0<\theta<1. ▼$$

8. Скласти на мові Бейсік програму обчислення многочлена Тейлора n-го порядку для функції $\sin x$ і, користуючись нею, обчислити $\sin 0{,}5$ при $n=7$. Визначити похибку обчислення ε.

▲ Зауважимо, що для функції sin многочлен Тейлора є многочленом непарного степеня $n=2m-1$. Тому з формули (5) дістаємо

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}, \tag{10}$$

де m дорівнює числу доданків. Оскільки $|\sin(\theta x + n\pi)| \leqslant \leqslant 1$, то з формули (5) дістаємо таку оцінку похибки при наближеному обчисленні синуса за формулою (10):

$$|R_n(x)| = |R_{2m-1}| \leqslant \frac{1}{(2m)!} x^{2m} < \varepsilon. \qquad (11)$$

І навпаки, з цієї оцінки можна визначити кількість доданків m, які необхідно взяти для забезпечення заданої точності ε.

У програмуванні для позначення змінних величин користуються в основному великими літерами латинського алфавіту. Тому надалі в програмах змінні величини зображатимемо однойменними великими літерами.

Введемо аргумент X і порядок многочлена N ($n = 2m - 1$) в програму як вхідні числові дані, а кількість доданків M обчислимо за формулою M = (N + 1)/2. Доданки у формулі (10) позначимо через U.

Аналізуючи формулу (10), помічаємо, що значення доданків u_{k+1} у цій сумі зручно обчислювати через їх попередні значення u_k:

$$u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k = v_k u_k, \quad u_1 = x, \quad k = \overline{1, m-1}.$$

Такі формули називаються *рекурентними*. Обчислення за рекурентними формулами у програмі здійснюються за допомогою багаторазового виконання оператора присвоєння, який у нашому випадку має вигляд U = U * V. Якщо, крім того, підсумовувати значення змінної U на кожному кроці S = S + U, то в результаті дістанемо значення суми (10) для заданого значення змінної X. Обчислення суми у формулі (10) виконуємо так: спочатку присвоюємо поточній (що змінюється в процесі обчислення) сумі S її початкове значення S = x, а потім поступово додаємо $u_2 = -\frac{x^3}{3!}$, $u_3 = \frac{x^5}{5!}$ і т. д. (команда присвоєння S = S + U). Тепер запишемо програму обчислення суми (10) на мові Бейсік:

```
10 REM  Обчислення синуса за формулою Тейлора
20 INPUT "Ввести значення змінної X"; X
30 INPUT "Ввести порядок многочлена N (N — непарне)"; N
40 U = X : S = X : M = (N + 1)/2
50 FOR K = 1 TO M — 1
60 V = —X ^ 2/ (2 * K * (2 * K + 1))
```

```
70 U = U * V : S = S + U
80 NEXT K
90 PRINT "При N="; N; "значення S="; S : END
```

Команда 50 означає, що всі команди, які виконуються за нею, включаючи обмежуючу команду 80, циклічно повторюватимуться $M - 1$ разів. Команда 90 виводить результат обчислення (суму S) на екран персонального комп'ютера.

Оскільки при $n = 7$ (тобто $m = 4$) з формули (11) дістаємо $|R_7| \leqslant \frac{1}{8!} \cdot \frac{1}{2^8} < 9{,}7 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$, то з точністю до $\varepsilon = 10^{-7}$ маємо $\sin 0{,}5 = 0{,}4794255$. ▼

Вправи

1. Чи виконуються умови теореми Ролля для функцій:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$?

2. Довести, що до графіка функції $y = 4 - x^2$ можна провести лише одну дотичну, паралельну осі Ox. Знайти її рівняння.

Відповідь: $y = 4$.

3. Для функції $f(x) = x^2 - 3x + 1$ записати формулу Лагранжа на відрізку $[1;\ 2]$ і визначити відповідне значення c.

4. Застосовуючи формулу Лагранжа, довести нерівність

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

5. Довести, що рівняння $x^5 + 7x - 10 = 0$ має лише один дійсний корінь.

6. Довести, що рівняння $e^x + 2x - 1 = 0$, яке має корінь $x = 0$ (перевірте), не має інших дійсних коренів.

7. Записати формулу Коші для функцій $f(x) = \cos x$ і $g(x) = \sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$ та визначити відповідне значення c.

Відповідь: $c = \frac{\pi}{4}$.

8. Застосовуючи формулу Тейлора, обчислити з точністю до 10^{-3}
1) $\sin 20°$; 2) $\sqrt[3]{7}$; 3) $\sqrt{e}$; 4) $\arcsin 0{,}5$.

Відповідь: 1) 0,342; 2) 1,913; 3) 0,182; 4) 0,523.

9. Розкласти многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $x + 1$.

Відповідь: $(x + 1)^3 - 5(x + 1) + 8$.

10. Записати формулу Тейлора другого порядку для функції $f(x) = \sqrt{x}$ при $x_0 = 1$.

Відповідь: $\sqrt{x} = 1 + \frac{x - 1}{2} - \frac{(x - 1)^2}{8} + \frac{(x - 1)^3}{16\sqrt{c^5}}, \quad c = 1 + \theta(x - 1), \ 0 < \theta < 1.$

11. Яку похибку має наближення $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ на відрізку $[-0{,}1;\ 0{,}1]$?

Відповідь: $|R_3| < 10^{-4}$.

12. Скласти на мові Бейсік програму обчислення многочлена n-го порядку для функції $y = e^x$ і, користуючись нею, обчислити $\sqrt{e}$ при $n = 6$. Визначити похибку обчислення.

Відповідь: 1,64872.

§ 7.6. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей

Наслідком теореми Коші (§ 7.5) є правило Лопіталя — теорема, яка дає можливість обчислювати границі, пов'язані з розкриттям невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ (перше правило) і $\frac{\infty}{\infty}$ (друге правило). При цьому досить складні задачі на обчислення границь зводяться до більш простих — обчислення похідних.

Теорема. *Нехай функції f і g, диференційовні в проколеному околі $O^*(x_0)$ точки x_0 ($g'(x) \neq 0$ $\forall x \in O^*(x_0)$), одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими при $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ або $x_0 = \pm\infty$) і, крім того, існує скінченна або нескінченна границя відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to x_0$. Тоді існує також і границя відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$, причому*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Правило Лопіталя справедливе і для односторонніх границь.

Якщо не існує $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то правило Лопіталя не можна застосовувати, але шукана границя може існувати.

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$; д) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

▲ а) Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи перше правило Лопіталя (формула (1)), дістаємо

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x + 2} = \frac{3}{4}.$$

б) Аналогічно попередньому маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{\cos x}=3.$$

в) Застосовуючи перше правило Лопіталя тричі, дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

г) Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. За другим правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0,$$

звідки випливає, що при $x\to+\infty$ логарифмічна функція $y=\ln x$ зростає повільніше, ніж лінійна $y=x$.

д) Застосовуючи друге правило Лопіталя n разів, дістаємо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots$$
$$\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty,$$

тобто показникова функція $y=e^x$ при $x\to+\infty$ зростає швидше за степеневу $y=x^n$. ▼

2. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}5x$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

▲ а) Маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$. Зведемо її до невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$, записавши вираз у вигляді дробу, а потім застосуємо друге правило Лопіталя. Дістанемо

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+}x=0.$$

б) Аналогічно попередньому дістаємо

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 5x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{5\sec^2 5x} = \frac{1}{5}.$$

в) Маємо невизначеність виду $\infty - \infty$. Зведемо її до виду $\frac{0}{0}$. Дістанемо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{\cos x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

г) Зведемо вираз, що стоїть в дужках, до спільного знаменника і застосуємо перше правило Лопіталя. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x - x}{x\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \infty. \ \blacktriangledown$$

3. Обчислити границі: а) $\lim_{x\to 0+} x^x$; б) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$.

▲ Маємо відповідно невизначеності виду 0^0, 1^∞ і ∞^0. Вони зводяться до невизначеності виду $0\cdot\infty$ за формулою $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, $f(x) > 0$, а потім до $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Користуючись неперервністю показникової функції, дістаємо, що $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$. Отже, маємо:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{-\lim_{x\to 0+} x} = e^0 = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{x'}} = e^{-\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x} = e^0 = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1. \ \blacktriangledown$$

Вправи

1. Застосовуючи правило Лопіталя, обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{1-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^5-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sin x+x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2-\dfrac{x}{4}}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{1-e^{3x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-3x^4+x+1}{x^{12}-2x+1}$;

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}$; 12) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; 13) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0+}x^2\ln x$; 15) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

16) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$; 17) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.

Відповідь: 1) -2; 2) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) 1; 5) 1; 6) $\dfrac{a}{b}$; 7) $-\dfrac{1}{64}$; 8) $-\dfrac{2}{3}$; 9) $+\infty$; 10) $-\dfrac{2}{5}$; 11) $+\infty$; 12) $\dfrac{1}{2}$; 13) 0; 14) 0; 15) -1; 16) $\dfrac{1}{\pi}$; 17) $+\infty$; 18) e.

2. Чи можна застосовувати правило Лопіталя для обчислення $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$?

3. Покажіть, що при $x\to+\infty$ логарифмічна функція $y=\log_a x$ зростає повільніше, а показникова $y=a^x$ швидше, ніж будь-яка степенева функція $y=x^\alpha$ $(a>1,\ \alpha>0)$.

§ 7.7. Зростання і спадання функції. Екстремум

Якщо $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для всіх $x\in(a;b)$, то функція *зростає (спадає)* на $(a;b)$.

Функція $y=f(x)$ в точці x_0 має *максимум (мінімум)*, якщо існує такий окіл $O(x_0)$ точки x_0, що для всіх $x\neq x_0$ з цього околу $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$.

Максимум (мінімум) функції в точці x_0 називається *екстремумом функції* в цій точці, а сама точка x_0 — *точкою екстремуму*.

Точки $x \in D(f)$, в яких $f'(x) = 0$, називаються *стаціонарними*, а разом з точками, де f недиференційовна (але неперервна),— *критичними точками* f.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум у точці x_0, то ця точка є критичною.

Перше правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум, потрібно:

1) знайти критичні точки даної функції. Для цього необхідно розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, причому перевірити, щоб корені цього рівняння були внутрішніми точками області визначення функції, а також знайти ті точки з області визначення функції, в яких f' не існує або є нескінченною.

2) у кожній критичній точці перевірити зміну знака похідної f'. Якщо $f'(x)$ при переході x через критичну точку (зліва направо) змінює знак з плюса на мінус, то ця точка є *точкою максимуму*, а якщо з мінуса на плюс, то *точкою мінімуму*;

3) обчислити значення максимуму y_{max} і мінімуму y_{min}.

Друге правило дослідження функції на екстремум. Потрібно:

1) знайти стаціонарні точки заданої функції;

2) обчислити похідну другого порядку в стаціонарній точці. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 є *точкою мінімуму*, а якщо $f''(x_0) < 0$, то *точкою максимуму*.

Сформулюйте першу і другу достатні умови існування екстремуму.

Зауваження. Друге правило дослідження критичних точок практично більш зручне в тих випадках, коли друга похідна легко знаходиться. Однак його не завжди можна застосувати. Так, якщо функція в досліджуваній точці недиференційовна або друга похідна дорівнює нулю, то цим правилом користуватись не можна.

Для відшукання найбільшого і найменшого значень функції f, неперервної на відрізку $[a; b]$, користуємось таким правилом:

а) знаходимо всі критичні точки функції f на інтервалі $(a; b)$;

б) обчислюємо значення функції в кожній критичній точці і на кінцях відрізка;

в) найбільше з одержаних значень є найбільшим значенням функції на відрізку $[a; b]$, а найменше — найменшим значенням функції на цьому відрізку.

Це правило спрощується, якщо функція має єдиний екстремум, а саме: якщо функція неперервна на відрізку (або інтервалі) і має єдиний екстремум, то у випадку максимуму це буде її найбільше значення на заданому проміжку, а у випадку мінімуму — найменше.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти проміжки зростання і спадання функції $y = x^2 - 4x + 6$.

▲ Маємо $f'(x) = 2x - 4$. Функція зростає на проміжку, де $f'(x) > 0$, тобто при $2x - 4 > 0$, звідки дістаємо $x > 2$. Отже, функція зростає на інтервалі $(2; +\infty)$. А на інтервалі $(-\infty; 2)$ функція спадає, оскільки тут $f'(x) < 0$. ▼

2. Дослідити на екстремум такі функції:

а) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; б) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$; в) $f(x) = x \ln x$; г) $f(x) = |x - 1|$.

▲ а) Маємо $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x^2 - 1)$. Оскільки f' неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$, то «підозрілими» на екстремум є лише точки, в яких $f'(x) = 0$. Знаходимо стаціонарні точки з рівняння $x^2 - 1 = 0$. Маємо $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Ці точки поділяють область визначення функції на три інтервали $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна зберігає знак, оскільки вона скрізь неперервна. Тому, обчисливши похідну в будь-якій точці інтервалу, можна сказати про знак похідної на всьому інтервалі. Поведінку функції зображено схематично на рис. 34. Звідси бачимо, що в точці -1 функція має максимум ($y_{\max} = f(-1) = 4$), а в точці 1 мінімум ($y_{\min} = f(1) = 0$).

б) Записавши функцію у вигляді $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$, обчислимо її похідну $f'(x) = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$, яка не дорівнює нулю ні при якому значенні x. Отже, стаціонарних точок задана функція не має. Однак точка 0 є критичною, тому що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} = \infty$ (f' нескінченна). Оскільки $f'(x) < 0$ при $x < 0$ і $f'(x) > 0$ при $x > 0$, то в точці $x = 0$ функція має мінімум: $y_{\min} = f(0) = 0$.

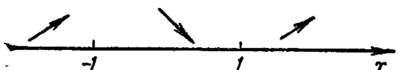

Рис. 34

в) Цю функцію дослідимо на екстремум за другим правилом. Маємо $f'(x) = \ln x + 1$, $\ln x + 1 = 0$, $x = \frac{1}{e}$. Точка $x = \frac{1}{e}$ є єдиною критичною точкою, оскільки f' неперервна при всіх $x > 0$, тобто $\forall x \in D(f)$.

Знаходимо другу похідну $f''(x) = \frac{1}{x}$. Оскільки $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$, то в точці $x = \frac{1}{e}$ маємо мінімум: $y_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

г) Задана функція недиференційовна в точці $1 \in D(f)$ (f' не існує в цій точці). Оскільки $f'(x) = -1$ при $x < 1$ і $f'(x) > 1$ при $x > 1$, то 1 є точкою мінімуму функції, причому $y_{\min} = f(1) = 0$. ▼

3. Довести, що $\ln(1 + x) \leqslant x$ при $x > -1$.

▲ Розглянемо функцію $f(x) = \ln(1 + x) - x$, $D(f) = (-1; +\infty)$. Ця функція має єдиний екстремум (максимум) $f(0) = 0$ (перевірте). Отже, $f(x) \leqslant f(0)$, $x > -1$, тобто $\ln(1 + x) - x \leqslant 0$, звідки $\ln(1 + x) \leqslant x$ при $x > -1$. ▼

4. Обчислити найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^2 - 3x$ на відрізку $[-1; 2]$.

▲ Користуючись відповідним правилом, знаходимо критичні точки і обчислюємо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка, а потім серед них вибираємо найбільше і найменше. Отже, маємо

$$f'(x) = 4x - 3,\ 4x - 3 = 0,\ x = \frac{3}{4};$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8},\ f(-1) = 5,\ f(2) = 2.$$

Таким чином, $f(-1) = 5$ — найбільше значення, $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}$ — найменше значення. ▼

5. Знайти додатне число, яке з оберненим до нього дає найменшу суму.

▲ Позначимо шукане число через x. Досліджуватимемо функцію $f(x) = x + \frac{1}{x}$, де $x > 0$. Маємо $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Похідна є скінченною $\forall x \in D(f)$, тому знаходимо лише стаціонарні точки заданої функції з рівняння $x^2 - 1 = 0$. Дістаємо два розв'язки $x_1 = 1$ і $x_2 = -1$. Оскільки $-1 \notin$

$\notin D(f)$, то маємо одну стаціонарну точку $x = 1$. Знаходимо другу похідну і обчислюємо її значення в точці 1. Маємо $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f''(1) = 2 > 0$. За другим правилом дістаємо, що точка 1 є точкою мінімуму, причому $y_{\min} = f(1) = 2$. Очевидно, це значення є найменшим, оскільки в області визначення функція є неперервною і не має інших точок екстремуму. ▼

6. На шкільному подвір'ї треба обгородити квітник прямокутної форми, який прилягає до паркану. Є 200 плит, кожна з яких має довжину 50 см. Якими повинні бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

▲ Позначимо через y ту сторону прямокутника, яка паралельна паркану, а іншу — через x. Тоді площа прямокутника $S = xy$. За умовою задачі довжина огорожі дорівнює $200 \cdot 0{,}5 = 100$ м. Тоді $y + 2x = 100$, звідки $y = 100 - 2x$ і $S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$, де $0 \leqslant x \leqslant 50$. Отже, потрібно знайти найбільше значення функції $S = 100x - 2x^2$ на відрізку $[0; 50]$ (оскільки за умовою $0 \leqslant x \leqslant 50$). За правилом знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку маємо

$$S' = 100 - 4x, \ 100 - 4x = 0, \ x = 25;$$

$$S(25) = 2\,500 - 2 \cdot 625 = 1250, \ S(0) = S(50) = 0.$$

Як бачимо, найбільшого значення функція набуває в стаціонарній точці $x = 25$. При цьому $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$. Отже, квітник матиме найбільшу площу, якщо сторона, паралельна паркану, вдвоє більша за іншу.

Цю задачу можна розв'язати дещо іншим способом, розглядаючи функцію S на інтервалі $(0; 50)$, що більше відповідає змісту задачі. Оскільки функція неперервна на цьому інтервалі і має на ньому єдину критичну точку $x = 25$, в якій $S > 0$, а при $x \to 0$ і $x \to 50$ маємо $S \to 0$, то звідси випливає, що в точці $x = 25$ функція має максимум, отже, і найбільше значення на інтервалі $(0; 50)$. ▼

7. З пункту A в напрямі до пункту B відправляється вантажна машина з швидкістю 45 км/год. Одночасно з пункту B вирушає легковий автомобіль у напрямі, перпендикулярному до AB, з швидкістю 60 км/год. В який момент часу (від початку руху) відстань між машинами буде найменшою, якщо $AB = 225$ км?

▲ У момент часу t найменша відстань між машинами дорівнює CE (рис. 35). З умови задачі випливає, що $BC =$

$= 225 - 45t$ і $BE = 60t$. З ΔBCE дістаємо $s(t) = CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{(225 - 45t)^2 + (60t)^2}$. Отже, завдання полягає у відшуканні найменшого значення функції $s(t)$ на відрізку $[0; 5]$ (чому?).

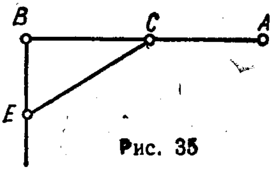

Рис. 35

Маємо $s'(t) = \frac{5625t - 10\,125}{\sqrt{(225 - 45t)^2 + 3600t^2}}$, $s'(t) = 0$ при $t = 1{,}8$. Далі $s(1{,}8) = 180$, $s(0) = 225$, $s(5) = 300$. Отже, $s_{\text{найм}} = s(1{,}8) = 180$ км, тобто найменша відстань між машинами буде через 1 год 48 хв після початку руху. ▼

8. У якій точці крива ймовірності $y = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 x^2}$, $\sigma > 0$, найбільш віддалена від осі Ox? Визначити цю відстань.

▲ Потрібно знайти найбільше значення функції $y = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 x^2}$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Функція визначена і диференційовна при всіх $x \in \mathbb{R}$, і тому її критичні точки можуть бути лише стаціонарними. Маємо $y' = -\frac{2\sigma^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-\sigma^2 x^2}$, $y' = 0$ при $x = 0$. Оскільки $y(0) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} > 0$ і $y \to 0$ при $x \to \pm\infty$, то в точці $x = 0$ функція має максимальне, отже, і найбільше значення на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, яке дорівнює $\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$. ▼

9. Знайти найбільший член послідовності $y_n = \frac{n}{n^3 + 250}$, $n \in \mathbb{N}$.

▲ Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x}{x^3 + 250}$ на проміжку $[1; +\infty)$. Вона має єдину точку максимуму $x = 5$, тому найбільшим членом послідовності є $y_5 = \frac{1}{75}$. ▼

Вправи

1. Знайти проміжки зростання і спадання функцій:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 4$; 2) $f(x) = \ln x + \frac{2}{x}$.

Відповідь: 1) спадає на $(-\infty; 3)$, зростає на $(3; +\infty)$; 2) спадає на $(0; 2)$, зростає на $(2; +\infty)$.

2. Довести, що рівняння має лише один корінь x_0:

1) $e^x + 2x - 1 = 0$, $x_0 = 0$; 2) $4 - x^3 - 3x^5 = 0$, $x_0 = 1$.

Вказівка. Показати, що функції монотонні при всіх $x \in \mathbb{R}$.

3. У шкільній майстерні замінюють слюсарні станки на нові. Нехай $f(t)$ є число наявних станків старої конструкції в момент часу t, а $g(t)$ — число станків нової конструкції. У певний момент часу $g(t) = f(t)$. Чи рівні похідні цих функцій?

Відповідь: ні, оскільки $f'(t) < 0$, а $g'(t) > 0$.

4. Визначити екстремуми функцій:

$$1)\ y = 2 - x^2;\quad 2)\ y = x^2 + 4x + 1;\quad 3)\ y = \frac{1}{4}x^4 - x^3;$$

$$4)\ y = \frac{4}{x} + x;\quad 5)\ y = e^{-x} + e^{2x};\quad 6)\ y = x^2 \ln x;$$

$$7)\ y = \frac{4x}{x^2 + 4};\quad 8)\ y = xe^{-x};\quad 8)\ y = \cos x - \cos^2 x.$$

Відповідь: 1) $y_{\max} = y(0) = 2$; 2) $y_{\min} = y(-2) = -3$;

$3)\ y_{\min} = y(3) = -\dfrac{27}{4}$;

$4)\ y_{\max} = y(-2) = -4,\quad y_{\min} = y(2) = 4$;

$5)\ y_{\min} = y\left(-\dfrac{\ln 2}{3}\right) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$; 6) $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$;

$7)\ y_{\min} = y(-2) = -\quad y_{\max} = y(2) = 1$; 8) $y_{\max} = y(1) = e^{-1}$;

$9)\ y_{\max} = y\left(\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \dfrac{1}{4},\ y_{\min} = y(k\pi) = (-1)^k - 1.$

5. Довести нерівності: а) $e^x \geqslant 1 + x,\ x \in \mathbb{R}$; б) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2,\ x > 0$.

6. Визначити коефіцієнти p і q квадратного тричлена $y = x^2 + px + q$, щоб він мав мінімум $y = 3$ при $x = 1$. Пояснити одержаний результат геометрично.

Відповідь: $p = -2,\ q = 4$.

7. Опір r, який виникає внаслідок тертя, залежить від швидкості v (км/год) руху автомобіля. Ця залежність визначається за такими правилами: 1) на асфальті $r = 14{,}5 + 0{,}25v$; 2) на хорошому шосе $r = 24 - \dfrac{2}{3}v + \dfrac{1}{30}v^2$; 3) на поганому шосе $r = 28 - 0{,}25v - 0{,}02v^2$; 4) на бруківці $r = 17{,}5 - \dfrac{v^2}{40}$. Дослідити задані функції на монотонність і знайти, де це можливо, швидкість, при якій опір буде найменшим.

Відповідь: 1) зростаюча; 2) 10 км/год; 3) 6,25 км/год; 4) спадна.

8. Визначити найбільше $y_{\text{найб}}$ і найменше $y_{\text{найм}}$ значення функцій на вказаному проміжку:

$$1)\ y = x^2 - 2x,\ x \in [0;\ 2];\quad 2)\ y = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \in [1;\ 4];$$

$$3)\ y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1;\ 1];\quad 4)\ y = \frac{1}{1 - x},\ x \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right].$$

Відповідь: 1) $y_{\text{найб}} = y(0) = y(2) = 0,\ y_{\text{найм}} = y(1) = -1$;

2) $y_{\text{найб}} = y(1) = 1,\ y_{\text{найм}} = y(4) = 0{,}5$;

3) $y_{\text{найб}} = y(0) = 1$, $y_{\text{найм}} = y(-1) = y(1) = 0$;

4) $y_{\text{найб}} = y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $y_{\text{найм}} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.

9. Переконатися в тому, що у випадку сталого добутку двох чисел їх сума є найменшою, якщо ці числа рівні між собою.

10. Знайти таке додатне число, щоб різниця між ним і його кубом була найменшою.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Кабель для телеграфування виготовлено з мідного дроту, покритого шаром ізоляції. Якщо позначити через x відношення радіуса дроту до товщини ізоляції, то швидкість телеграфування $v = kx \ln \frac{1}{x}$, $k > 0$. При якому x швидкість є найбільшою?

Відповідь: $x = e^{-1}$.

12. Яке співвідношення повинно існувати між розмірами прямокутних вікон заданого периметра, щоб освітленість приміщення була найбільшою?

13. Матеріальна точка рухається вздовж прямої за законом $s = 6t^2 - t^3$. Яка її найбільша швидкість?

Відповідь: $v(2) = 12$.

14. Відомо, що міцність балки з прямокутним поперечним перерізом (ширина x і висота y) визначається за формулою $M = kxy^2$, $k > 0$. Вирізати з круглої колоди, діаметр якої d, таку балку, щоб вона в горизонтальному положенні чинила найбільший опір згинові.

Відповідь: $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{2}x$.

15. Переріз тунелю заданого периметра має форму прямокутника з насадженим півкругом. При яких розмірах його сторін площа перерізу найбільша?

Відповідь: $r = h$, r — радіус, h — висота прямокутника.

16. Визначити розміри відкритого зверху циліндричного бака місткістю 25 л, при яких на його виготовлення піде мінімальна кількість жерсті.

Відповідь: $h = r \approx 20$ см, r — радіус, h — висота.

17. Яке співвідношення повинно бути між висотою і радіусом консервної банки, щоб на її виготовлення пішло найменше матеріалу?

Відповідь: $h = 2r$.

18. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом 32 м^3, щоб на облицювання його стін і дна затратити якнайменше матеріалу.

Відповідь: $x = 4$ м, $h = 2$ м.

19. Витрати електропровідника на 1 км електромережі визначаються рівнянням $W = ar + \frac{b}{r}$, де r — опір в омах, a і b — сталі. При якому опорі провідник є найекономічнішим?

Відповідь: $r = \sqrt{b/a}$.

20. На сторінці книги друкований текст повинен займати 432 см^2. Поля зверху і знизу повинні бути по 2 см, а справа і зліва по 1,5 см. Обчислити найекономічніші розміри паперу.

Відповідь: 21 см, 28 см.

21. У кулю радіуса r вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею S.

Відповідь: $S = 2\pi r^2$.

22. Визначити, яким повинен бути опір r електронагрівального приладу, увімкненого в електричне коло з опором R, щоб у ньому виділялась максимальна кількість теплоти Q, якщо $Q = \frac{rE^2}{(R+r)^2}$, де E — напруга.

Відповідь: $r = R$.

23. З пунктів A і B, розташованих на вулицях, які перетинаються під кутом 60°, одночасно виїжджають два велосипедисти в напрямі перехрестя C. Через який час відстань між ними буде найменшою, якщо швидкість першого велосипедиста 15 км/год, а швидкість другого 12 км/год, $AC = 9$ км, $BC = 6$ км?

Відповідь: ≈ 34 хв.

§ 7.8. Опуклість кривої і точки перегину. Асимптоти

Вважають, що крива (або графік диференційовної функції) $y = f(x)$ обернена *опуклістю вгору (вниз)* на інтервалі $(a; b)$, якщо вона на цьому інтервалі лежить нижче (вище) будь-якої своєї дотичної (виключаючи саму точку дотику).

Пригадайте, яка крива називається гладкою на інтервалі $(a; b)$.

Достатня умова опуклості кривої. Якщо $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) на інтервалі $(a; b)$, то крива опукла вгору (вниз) на цьому інтервалі.

Точка $(x_0; f(x_0))$ називається *точкою перегину* кривої, якщо при переході через неї крива змінює напрям опуклості. Так, на рис. 36 точка $(x_0; f(x_0))$ — точка перегину. На інтервалі $(a; x_0)$ крива опукла вгору, а на інтервалі $(x_0; b)$ — опукла вниз.

Достатня умова існування точки прегину. Якщо $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує (f — неперервна) і друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину.

Інколи точкою перегину називають саму точку x_0.

Пряма називається *асимптотою кривої* або *графіка функції* $y = f(x)$, якщо відстань від точки $M(x; f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M в нескінченність.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то пряма $x = x_0$ називається *вертикальною асимптотою* кривої $y = f(x)$. При цьому розглянута границя може бути односторонньою, а під символом ∞ слід розуміти $+\infty$ або $-\infty$.

Поясніть, чому неперервна функція не має вертикальних асимптот.

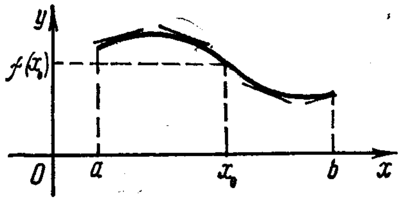

Рис. 36

Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$, то пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* кривої $y = f(x)$. При цьому, якщо $k = 0$, то асимптота називається *горизонтальною*.

Числа k і b обчислюють за формулами

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \qquad (1)$$

При цьому вказані границі можуть бути різними при $x \to +\infty$ (для правої похилої асимптоти) і при $x \to -\infty$ (для лівої похилої асимптоти).

Якщо функцію можна подати у вигляді $f(x) = kx + b + \varphi(x)$, де $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$, то асимптотою буде пряма $y = kx + b$ (поясніть, чому).

ПРИКЛАДИ

1. Знайти інтервали опуклості і точки перегину кривих: а) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$; б) $y = \sqrt{(x-1)^3}$; в) $y = \frac{1}{(x+1)^3}$; г) $y = xe^{-x}$.

▲ а) Знаходимо похідні $f'(x) = 6x^2 + 6x$, $f''(x) = 12x + 6$, звідки $f''(x) = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$. Для $x < -\frac{1}{2}$ маємо $f''(x) < 0$ і тому крива опукла вгору, а при $x > -\frac{1}{2}$ маємо $f''(x) > 0$, тому крива опукла вниз. Отже, точка $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ є точкою перегину.

б) Маємо $f'(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x-1}}$. Тут друга похідна не дорівнює нулю ні при яких значеннях x, а в точці $x = 1$ вона не існує. Однак точка з абсцисою $x = 1$ не є точкою перегину, оскільки областю визначення заданої функції є проміжок $[1; +\infty)$, тобто точка $x = 1$ є межовою точкою області визначення. Оскільки $f''(x) >$

> 0 для всіх $x \in (1; +\infty)$, то крива опукла вниз на інтервалі $(1; +\infty)$.

в) Запишемо функцію у вигляді $y = (x+1)^{-3}$ і обчислимо похідні:

$$f'(x) = -3(x+1)^{-4}, \quad f''(x) = 12(x+1)^{-5} = \frac{12}{(x+1)^5}.$$

При $x = -1$ друга похідна не існує, але в цій точці і сама функція не визначена, тому, як і в попередньому випадку, крива точки перегину не має. Однак при $x < -1$ маємо $f''(x) < 0$, тому крива опукла вгору, а при $x > -1$ маємо $f''(x) > 0$, отже, крива опукла вниз.

г) Знаходимо похідні першого та другого порядків:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2).$$

Прирівнюючи до нуля другу похідну, дістаємо, що $f''(x) = 0$ при $x = 2$. Точка з абсцисою $x = 2$ є точкою перегину, оскільки при $x < 2$ маємо $f''(x) < 0$, тобто крива опукла вгору, а при $x > 2$ маємо $f''(x) > 0$, тобто крива опукла вниз. ▼

2. Показати, що крива $y = x^2 - 4x + 5$ скрізь опукла вниз.

▲ Задана функція визначена при всіх $x \in \mathbb{R}$. Знайдемо її першу і другу похідні: $f'(x) = 2x - 4$, $f''(x) = 2$. Оскільки $f''(x) > 0$ при всіх значеннях x, то крива скрізь є опуклою вниз. ▼

3. При яких значеннях a крива $y = -x^4 + ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ опукла вгору при всіх $x \in \mathbb{R}$?

▲ Знайдемо послідовно першу і другу похідні. Маємо $f'(x) = -4x^3 + 3ax^2 - 3x$, $f''(x) = -12x^2 + 6ax - 3$. Крива буде опуклою вгору, якщо для всіх x друга похідна $f''(x) < 0$, тобто якщо $-12x^2 + 6ax - 3 < 0$ або $4x^2 - 2ax + 1 > 0$. Для того щоб квадратний тричлен був додатним при всіх x, його дискримінант повинен бути від'ємним. Отже, маємо $4a^2 - 16 < 0$ або $|a| < 2$. ▼

4. Знайти асимптоти кривих:

а) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$; б) $y = \dfrac{2x^2}{x-4}$; в) $y = xe^x$;

г) $y = x - \operatorname{arctg} x$.

▲ а) Оскільки $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x-1} = \infty$, то $x = 1$ є вертикальною асимптотою. Для визначення невертикальних асимптот запишемо даний аналітичний вираз у вигляді

$$y=\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1+3}{x-1}=1+\frac{3}{x-1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x-1}=0$, то $y=1$ — горизонтальна асимптота.

б) Пряма $x=4$ є вертикальною асимптотою (поясніть, чому). Знайдемо похилу асимптоту. Користуючись формулами 1), дістаємо

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-4x}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x-4}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x-4}=8.$$

Отже, пряма $y=2x+8$ є похилою асимптотою. Цю асимптоту можна знайти тим самим способом, що і у випадку а), виділивши цілу частину даного виразу шляхом ділення чисельника на знаменник, а саме:

$$\frac{2x^2}{x-4}=(2x+8)+\frac{32}{x-4}.$$

в) Функція неперервна при всіх $x\in\mathbb{R}$, тому вертикальних асимптот її графік не має. Знаходимо невертикальні асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$$

Отже, при $x\to+\infty$ похилої асимптоти не існує. Нехай тепер $x\to-\infty$. Тоді

$$k=\lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

(тут ми скористались другим правилом Лопіталя для розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$). Отже, $y=0$ є горизонтальною асимптотою при $x\to-\infty$ (ліва горизонтальна асимптота).

г) Оскільки функція неперервна при всіх $x\in\mathbb{R}$, то її графік вертикальних асимптот не має. Знайдемо похилі асимптоти. Оскільки

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - 0 = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (x - \operatorname{arctg} x - x) = -\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

то пряма $y = x - \frac{\pi}{2}$ є правою похилою асимптотою. Аналогічно можна знайти (зробіть це), що лівою похилою асимптотою є пряма $y = x + \frac{\pi}{2}$. ▼

Вправи

1. Знайти точки перегину і інтервали опуклості кривих:

1) $y = x^4 - 6x^2 + 5$; 2) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$; 3) $y = \sqrt{x-4}$;
4) $y = \frac{x}{x-1}$; 5) $y = e^{-x^2}$; 6) $y = 4 - \ln(x+2)$.

Відповідь: 1) точки перегину $(-1;\ 0)$ і $(1;\ 0)$; 2) точка перегину $1;\ 1)$; 3) опукла вгору при $x \in (4;\ +\infty)$; 4) точок перегину немає, опукла вгору при $x \in (-\infty;\ 1)$ і вниз при $x \in (1;\ +\infty)$; 5) точки перегину $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 6) опукла вниз при $x \in (-2;\ +\infty)$.

2. При яких значеннях a і b точка $(-1;\ 2)$ є точкою перегину кривої $y = ax^3 + bx^2$?

Відповідь: $a = 1$, $b = 3$.

3. Показати, що крива $y = 3x^2 + 4x - 6$ є опуклою вниз.

4. Показати, що крива $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опукла вгору.

5. Знайти асимптоти кривих:

1) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$; 2) $y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$; 3) $y = \frac{3x^2}{x^2+5}$;
4) $y = 2x + \frac{1}{x}$; 5) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;
7) $y = x \ln x$; 8) $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} 2x$; 9) $y = \frac{|x+2|}{x^2}$.

Відповідь: 1) $x = -1$, $y = 0$; 2) $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; 3) $y = 3$; 4) $x = 0$, $y = 2x$; 5) $y = x + 1$, $x = 0$; 6) $y = -x$, $y = x$; 7) асимптот немає; 8) $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$; 9) $x = 0$, $y = 0$.

6. При якому виборі параметра $\sigma > 0$ крива ймовірності $y = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 x^2}$ має точки перегину з абсцисами $x = \pm 1$? Знайти асимптоти цієї кривої.

Відповідь: $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$ — асимптота.

§ 7.9. Загальна схема побудови графіків функцій

Дослідження функцій проводитимемо за такою схемою:

1) знаходимо область визначення функції. Визначаємо точки розриву і інтервали неперервності функції. Досліджуємо на парність, непарність, періодичність. Знаходимо точки перетину графіка функції з координатними осями та інтервали знакосталості;

2) досліджуємо поведінку функції на кінцях проміжків визначення. Знаходимо асимптоти графіка функції;

3) визначаємо екстремуми функції та встановлюємо інтервали монотонності функції;

4) визначаємо інтервали опуклості графіка функції та точки перегину;

5) будуємо графік функції.

ПРИКЛАДИ

1. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

а) $y = \dfrac{x^2+4}{x}$; б) $y = x\ln x$; в) $y = \sin x + \cos x$;

г) $y = \dfrac{|x|}{(x-1)^2}$.

▲ а) Область визначення $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Функція неперервна $\forall x \in D(f)$. У точці $x = 0$ вона має нескінченний розрив: $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2+4}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^2+4}{x} = +\infty$

Функція непарна, оскільки $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$. Отже, графік функції симетричний відносно початку координат, і тому далі проводитимемо дослідження лише для $x > 0$. Функція не періодична. Графік функції не перетинає координатних осей (чому?). При $x > 0$ маємо $y > 0$, тобто графік знаходиться над віссю Ox.

Пряма $x = 0$ (вісь ординат) є вертикальною асимптотою, бо при $x = 0$ функція має нескінченний розрив. Для визначення похилої асимптоти $y = kx + b$ обчислимо коефіцієнти k і b:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0.$$

Отже, пряма $y = x$ є похилою асимптотою. Її можна знайти простіше, записавши функцію у вигляді $y = x + \frac{4}{x}$. Оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$, то пряма $y = x$ є асимптотою.

Користуючись поданням функції у вигляді $y = x + \frac{4}{x}$, знайдемо її похідну і прирівняємо до нуля. Дістанемо $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$, $1 - \frac{4}{x^2} = 0$, $x^2 - 4 = 0$. Маємо додатний корінь $x = 2$. Дослідимо на екстремум за другим правилом: $y'' = \frac{8}{x^3}$, $y''(2) > 0$. Отже, при $x = 2$ маємо $y_{\min} = 4$. На проміжку $(0; 2)$ функція спадає, а на $(2; +\infty)$ зростає.

Оскільки $y'' > 0$ при $x > 0$, то графік функції на цьому інтервалі опуклий вниз і точок перегину він не має.

Будуємо графік заданої функції для $x > 0$, а потім симетрично відображаємо його відносно початку координат (рис. 37).

б) Функція $y = x \ln x$ визначена і неперервна при $x > 0$. Вона ні парна, ні непарна, не періодична. Графік функції перетинає вісь Ox у точці 1 і не перетинає осі Oy; $y < 0$ при $x < 1$ і $y > 0$ при $x > 1$.

Вертикальних асимптот не існує, бо функція неперервна і, крім того, $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = 0$ (див. приклад 2, а), § 7.6). Невертикальних асимптот також не існує, бо $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Функція має мінімум $y_{\min} = f(e^{-1}) = -e^{-1}$ (див. приклад 2, в), § 7.7). На проміжку $(0; e^{-1})$ функція спадає, а на $(e^{-1}; +\infty)$ зростає.

Крива опукла вниз, тому що $y'' = \frac{1}{x} > 0$ при $x > 0$. Точок перегину немає (чому?).

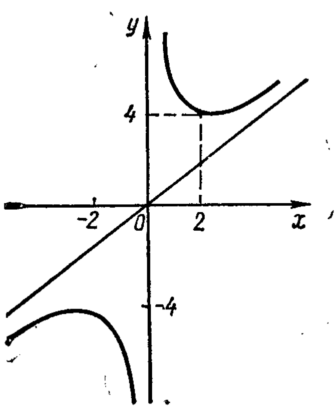

Рис. 37

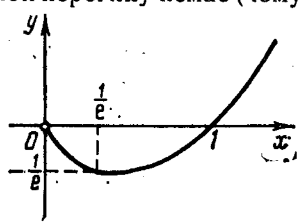

Рис. 38

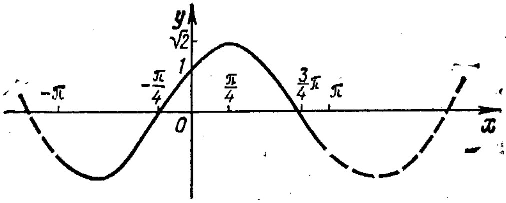

Рис. 39

Враховуючи одержані результати, будуємо графік (рис. 38).

в) Функція $y = \sin x + \cos x$ визначена, неперервна і диференційовна $\forall x \in \mathbb{R}$, ні парна, ні непарна, періодична з періодом 2π. При $x = 0$ маємо $y = 1$, а з рівняння $\sin x + \cos x = 0$ бачимо, що графік функції перетинає вісь Ox у точках $-\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3}{4}\pi$ (розглядаємо функцію на відрізку $[-\pi; \pi]$, довжина якого 2π).

Графік функції не має ніяких асимптот (поясніть, чому)

Обчислимо похідну і прирівняємо її до нуля: $y' = \cos x - \sin x$, $\cos x = \sin x$. Звідси знаходимо дві стаціонарні точки $-\frac{3}{4}\pi$ і $\frac{\pi}{4}$, які належать відрізку $[-\pi; \pi]$. Обчислимо другу похідну $y'' = -\sin x - \cos x$. Оскільки $y''\left(-\frac{3}{4}\pi\right) > 0$ і $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, то $y_{\min} = y\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}$, а $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Прирівнюючи другу похідну до нуля дістаємо, що в точках з абсцисами $-\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3}{4}\pi$ графік функції має перегин (покажіть це). Отже, точки $\left(-\frac{\pi}{4};\ 0\right)$ і $\left(\frac{3}{4}\pi;\ 0\right)$ є точками перегину. При переході через першу з цих точок крива змінює опуклість вниз на опуклість вгору, а при переході через другу — навпаки.

Користуючись проведеним дослідженням, будуємо графік функції $y = \sin x + \cos x$ на відрізку $[-\pi; \pi]$, а потім повторюємо цю частину графіка на кожному відрізку довжиною 2π (рис. 39).

г) Функція $f(x) = \frac{|x|}{(x-1)^2}$ визначена на множині $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ і неперервна на ній, ні парна, ні непарна, не періодична. При $x = 0$ маємо $y = 0$. Точка 1 є точкою розриву другого роду, бо $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) =$

$= +\infty$. Тому пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою. Горизонтальною асимптотою є пряма $y = 0$, оскільки $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|x|}{(x-1)^2} = 0$.

Запишемо задану функцію у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(x-1)^2}, & x \geqslant 0, \\ -\frac{x}{(x-1)^2}, & x < 0, \end{cases}$$

і обчислимо її першу і другу похідні:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x+1}{(x-1)^3}, & x > 0, \\ \frac{x+1}{(x-1)^3}, & x < 0, \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{(x-1)^4}, & x > 0, \\ -\frac{2x+4}{(x-1)^4}, & x < 0. \end{cases}$$

Критичними точками функції є -1 і 0. Неважко перевірити, що $y_{\min} = f(0) = 0$ і $y_{\max} = f(-1) = \frac{1}{4}$. Далі маємо $f''(x) = 0$ при $x = -2$, f'' не існує в точці $x = 0$. Обидві ці точки є абсцисами точок перегину, оскільки при переході x через ці точки друга похідна змінює знак.

Результати досліджень запишемо в таку таблицю:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	не існує	$+$	∞	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	не існує	$+$	$+\infty$	$+$
$f(x)$		$\frac{2}{9}$ перегин		$\frac{1}{4}$ max		0—min перегин		$+\infty$	

Користуючись наведеними даними, будуємо графік функції (рис. 40). ▼

2. Побудувати криву ймовірності $y = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 x^2}$ при $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

▲ Потрібно побудувати графік функції $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ця функція визначена, неперервна і диференційовна $\forall x \in \mathbb{R}$. Вона скрізь додатна, а при $x = 0$ маємо

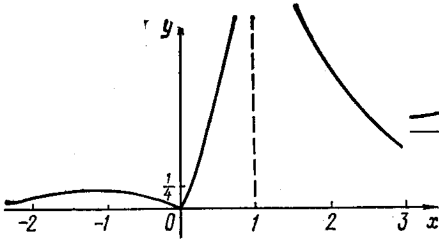

Рис. 40

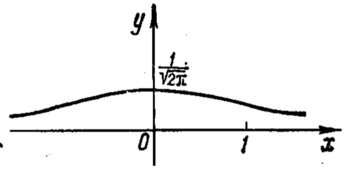

Рис. 41

$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Функція парна. Дослідження на екстремум проведено в § 7.7 (приклад 8). Покладаючи $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, маємо $y_{\max} = y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Точками перегину є $\left(1; \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ і $\left(-1; \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$, а пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою (§ 7.8, вправа 6). Графік функції зображено на рис. 41. ▼

Вправи

1. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

1) $y = 5 - x^2$; 2) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$; 3) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$;

4) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$; 5) $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$; 6) $y = \ln(x^2 + 1)$;

7) $y = xe^x$; 8) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$; 9) $y = \ln^2 x$; 10) $y = \ln \cos x$.

Відповіді 1) $y_{\max} = y(0) = 5$, крива опукла вгору; 2) $y_{\min} = y(0) = 0$, точки перегину $\left(\frac{2}{3}; \frac{44}{81}\right)$ і $\left(2; \frac{4}{3}\right)$, асимптот немає; 3) $x \neq \pm 1$, непарна, $(0; 0)$ — точка перегину, асимптоти $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$; 4) $x \neq \pm\sqrt{3}$, непарна, $y_{\min} = y(-3) = 4{,}5$, $y_{\max} = y(3) = -4{,}5$, точка перегину $(0; 0)$, асимптоти $x = \pm\sqrt{3}$, $y = -x$; 5) $x \neq 0$, $y_{\min} = y(-\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, точок перегину немає, асимптоти $x = 0$, $y = -x$; 6) функція парна, $y_{\min} = y(0) = 0$, точки перегину $(-1; \ln 2)$ і $(1; \ln 2)$; 7) $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{e}$, точка перегину $\left(-2; -\frac{2}{e^2}\right)$, асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$; 8) $x \neq 0$, $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$, точок перегину немає, асимптота $x = 0$; 9) $x > 0$, $y_{\min} = y(1) = 0$, точка перегину $(e; 1)$, асимптота $x = 0$; 10) $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\right.$

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$, парна, $T = 2\pi$, $y_{\max} = y(2k\pi) = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ — вертикальні асимптоти, крива опукла вгору.

2. Побудувати графік функції $v = x \ln \frac{1}{x}$, що описує швидкість телеграфування (див. вправу 11, § 7.7).

Відповідь: $D(f) = (0; 1]$, $v(1) = 0$, $v_{\max} = v(e^{-1}) = e^{-1}$, опуклий вгору.

§ 7.10. Наближене обчислення коренів рівнянь

Нехай f — алгебраїчна або трансцендентна функція і нехай

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Якщо $f(c) = 0$, то c називається *коренем рівняння* (1) або *нулем функції* f. Припустимо, що рівняння (1) має лише ізольовані корені, тобто для кожного кореня існує окіл, який не містить інших коренів цього рівняння. Наближене обчислення цих коренів складається з двох етапів: 1) відокремлення коренів — виділення відрізка з області визначення функції f, на якому розміщено лише один корінь; 2) обчислення цих коренів з наперед заданою точністю.

Процес відокремлення коренів рівняння грунтується на основі теореми Больцано — Коші (§ 6.4): якщо неперервна функція f на кінцях відрізка $[a; b]$ набуває значень, протилежних за знаком, тобто $f(a) f(b) < 0$, то на інтервалі $(a; b)$ міститься принаймні один корінь. Якщо, крім того, похідна f' існує і зберігає сталий знак на $[a; b]$, то цей корінь єдиний.

Відокремлення коренів рівняння (1) можна виконати графічно, знайшовши наближено точки перетину графіка функції f з віссю Ox. Іноді рівняння (1) замінюють на еквівалентне $\varphi(x) = g(x)$, і знаходять наближено абсциси точок перетину графіків функцій φ і g.

Розглянемо два методи наближеного обчислення коренів.

Метод дотичних (метод Ньютона). Нехай функція f двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a; b]$, який містить ізольований корінь c, причому f' і f'' зберігають знак (тобто графік функції f у будь-якій точці має дотичну і не має на цьому відрізку екстремумів і точок перегину), тоді справедлива така формула

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2}$$

причому для оцінки похибки ε n-го наближення можна користуватися наближеною нерівністю $|r| < \varepsilon$, де $r = f(x_n)/f'(x_n)$.

За вихідну точку x_0 слід взяти точку b, якщо $f'(x) f''(x) > 0$, і точку a, якщо $f'(x) f''(x) < 0$, $x \in [a; b]$.

Метод хорд. При виконанні попередньо накладених умов на функцію f справедлива одна з формул

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a - x_n) f(x_n)}{f(a) - f(x_n)} \qquad (3)$$

$$\text{або} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \qquad (4)$$

причому перша — при $f'(x) f''(x) < 0$ (тут $x_0 = b$), а друга — при $f'(x) f''(x) > 0$ (тут $x_0 = a$).

Поясніть назву обох методів.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти в точністю до 10^{-3} наближене значення кореня рівняння $x^3 + x - 3 = 0$ обома методами і порівняти їх результативність.

▲ Відокремимо шуканий корінь. Для цього побудуємо графіки функцій $\varphi(x) = x^3$ і $g(x) = 3 - x$. Помічаємо, що корінь рівняння міститься на відрізку $[1; 2]$. Позначимо $f(x) = x^3 + x - 3$. Тоді $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ і $f''(x) = 6x > 0$ при всіх $x \in [1; 2]$.

Користуючись методом дотичних (формула (2)), де $x_0 = b = 2$, дістаємо

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{7}{13} = 1{,}4615;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}2477; \quad x_3 = 1{,}2141; \quad x_4 = 1{,}2134.$$

Оскільки $f(1{,}214) \approx 0{,}003 > 0$, а $f(1{,}213) \approx -0{,}002 < 0$, то з заданою точністю 10^{-3} можна вважати $c \approx 1{,}213$. Як бачимо, вже четверте наближення дає задану точність.

При застосуванні методу хорд використаємо формулу (4), оскільки тут потрібно взяти $x_0 = a = 1$. Поступово дістаємо: $x_1 = 1{,}1250$; $x_2 = 1{,}7798$; $x_3 = 1{,}1994$; ..., $x_7 = 1{,}2134$. Помічаємо, що при застосуванні методу хорд процес знаходження наближеного значення коренів збігається повільніше, ніж при застосуванні методу дотичних, однак на кожній ітерації вимагається обчислення значень функції. Для швидшого збігання процесу часто комбінують обидва ці методи. ▼

2. Скласти програму наближеного обчислення на ЕОМ коренів рівняння $f(x) = 0$ методом дотичних і, користуючись нею, визначити корінь рівняння $e^{-\frac{x}{2}} = x$ в точністю до 10^{-7}.

▲ Користуючись формулою (2), подамо алгоритм обчислення коренів рівняння у вигляді структурної схеми, зображеної на рис. 42.

Спочатку складемо програму обчислення на мові ПМК, виконавши такий розподіл регістрової пам'яті: $x \to P0$, $\varepsilon \to P1$, $f'(x) \to P2$, $f(x) \to P3$, $r \to P4$. Дістанемо реалізацію методу дотичних у вигляді програми, поданої у табл. 1.

Інструкція: 1) скласти підпрограми обчислення значень функції f та її похідної f'. Значення аргументу міститься в P0;

2) у режимі програмування (F ПРГ) увести програму і підпрограми. Адреса N відповідає адресі початку підпрограми обчислення значень похідної f';

3) в автоматичному режимі (F АВТ) занести початкове наближення x_0 і задану точність обчислення ε за командами: (x_0) X → П 0, (ε) X → П 1;

4) запустити машину для обчислень, натиснувши клавіші В/О і С/П. Після зупинки списати з індикатора значення x. При необхідності значення функції $f(x)$ можна викликати з Р3.

Знайдемо тепер наближений корінь заданого рівняння.

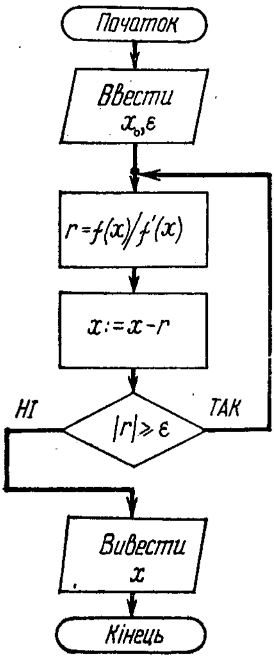

Рис. 42

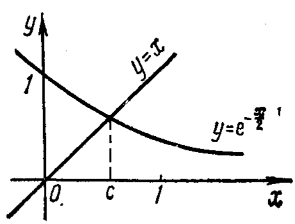

Рис. 43

Таблиця 1

Адреса	Команда	Код	Зміст операції
00	ПП	53	Виклик підпрограми обчислення $f'(x)$
01	(N)	N	
02	X → П 2	42	Занесення $f'(x)$ в Р2
03	ПП	53	Виклик підпрограми обчислення $f(x)$
04	22	22	
05	X → П 3	43	Занесення $f(x)$ в Р3
06	П → X 2	62	$f'(x) \to$ PX, $f(x) \to$ PY
07	÷	13	$r = f(x)/f'(x)$
08	X → П 4	44	$r \to$ P4
09	K |x|	31	$\|r\| \to$ PX
10	П → X 1	61	$\varepsilon \to$ PX, $\|r\| \to$ PY
11	—	11	$\|r\| - \varepsilon \to$ PX
12	F x ⩾ 0	59	Якщо $\|r\| - \varepsilon \geqslant 0$, то перейти **на 14**
13	20	20	Якщо $\|r\| - \varepsilon < 0$, то на 20
14	П → X 0	60	$x \to$ PX
15	П → X 4	64	$r \to$ PX, $x \to$ PY; Обчислення $x := x - r$
16	—	11	$x - r \to$ PX
17	X → П 0	40	$x \to$ P0; Повторення циклу
18	БП	51	
19	00	00	
20	П → X 0	60	$x \to$ PX
21	С/П	50	Зупинка. Індикація значення x
22	...	...	Підпрограма обчислення $f(x)$
...	...	...	
...	В/0	52	
N	...	...	Підпрограма обчислення $f'(x)$
...	...	...	
...	В/0	52	

Побудувавши графіки функції $\varphi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ і $g(x) = x$ (рис. 43), помічаємо, що задане рівняння має лише один корінь, який міститься на відрізку [0; 1]. Позначимо $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - x$. Тоді $f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} - 1 < 0$ і $f''(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} > 0$ на [0; 1] і $x_0 = 1$. Складаємо підпрограми обчислень $f(x)$ і $f'(x)$, починаючи з 22-ї адреси:

П→X 0 2 ÷ /—/ F e^x П→X 0 — В/О

П→X 0 2 ÷ /—/ F e^x 2 ÷ 1 + /—/ В/О

Значення N відповідає адресі 30. Дістаємо $x = 0{,}7034674$.

Зверніть увагу, що для оцінки похибки ми користувались наближеною нерівністю $|r| < \varepsilon$, де $r = f(x)/f'(x)$.

На мові Бейсік програма матиме вигляд:

```
10 REM Розв'язування рівняння F (X) = 0 методом дотичних
20 INPUT "Задайте початкове наближення X0 ="; X
30 INPUT "Задайте похибку обчислення E = "; E
40 GOSUB 80
50 IF ABS (R) > = E THEN 70
60 PRINT "Корінь рівняння X="; X : END
70 X = X — R : GOTO 40
80 REM Підпрограма обчислення R = F (X)/(DF/DX)
90 R = (EXP (—X/2) — X)/(—EXP (—X/2)/2 — 1)
100 RETURN
```

Пояснення програми. За командами 20 і 30 вводяться початкове значення x_0 (позначається X0) і допустима похибка ε (E). Через F (X) і DF/DX позначено відповідно функції $f(x)$ і $f'(x)$. Обчислення виразу $r = f(x)/f'(x)$ (R = F (X)/(DF/DX)) здійснюється за підпрограмою, записаною в рядках 80—100. При розв'язуванні іншого рівняння в рядку 90 слід замінити вираз для R, враховуючи вигляд функції f. ▼

Вправи

1. Знайти методом хорд і методом дотичних наближені значення коренів рівняння:

1) $x^3 + 6x - 8 = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $2x^3 + 2x - 1 = 0$; 4) $x^3 + 2x - 8 = 0$; 5) $x^4 - 4x + 1 = 0$;
6) $x^4 - 2x - 2 = 0$.

Пропонується скласти програму реалізації на ПМК або на ПЕОМ методу хорд.

Відповідь: 1) 1,0755; 2) —3,9488; —0,2172; 1,1660; 3) 0,424; 4) 1,6702; 5) 0,2510; 1,4934; 6) —0,7976; 1,4945.

2. Визначити методом дотичних наближене значення кореня заданого рівняння, який міститься на відрізку $[a;\ b]$ (обчислення проводити до збігу чотирьох знаків після коми):

1) $x + e^x = 0,\ [-1;\ 0]$; 2) $2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0,\ [-2;\ 1]$;
3) $\operatorname{tg} x - \cos x = 0,\ \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; 4) $\ln^2 x + x - 2 = 0,\ [1;\ 2]$;
5) $\ln^2 x - x + 2 = 0,\ [3;\ 4]$; 6) $\sin x + e^{-x} - 2 = 0,\ [0;\ 1]$;
7) $x^2 = e^x + 2,\ [-2;\ -1]$; 8) $\ln x = \operatorname{arctg} x,\ [3;\ 4]$.

Відповідь: 1) —0,5671; 2) —1,9509; 3) 0,6662; 4) 1,7113; 5) 3,7399; 6) 0,4558; 7) —1,4482; 8) 3,6926.

3. Стріла провисання h (в сантиметрах) телеграфного проводу визначається з рівняння $h^3 - 2241h - 146\,600 = 0$. Розв'язати це рівняння методом дотичних, враховуючи, що $60 \leqslant h \leqslant 70$.

Вказівка. Покласти $h = 10x$, $6 \leqslant x \leqslant 7$.

Відповідь: 66,63 см.

4. Показати, що так зване рівняння Кеплера $x = \varepsilon \sin x + a$, де $0 < \varepsilon < 1$, має лише один дійсний корінь, і визначити його з точністю до 10^{-3} при $\varepsilon = 0{,}538$ і $a = 1$.

Відповідь: 1,538.

РОЗДІЛ 8. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Дією, оберненою до диференціювання, є *інтегрування* — відшукання такої функції (первісної), для якої задана функція є похідною. Ця операція, як більшість обернених операцій, неоднозначна. Для заданої функції існує безліч первісних, які відрізняються одна від одної на сталу величину. Сукупність всіх первісних називається *невизначеним інтегралом*. Обчислення невизначених інтегралів від основних елементарних функцій здійснюється за таблицею інтегралів, яку дістаємо з таблиці похідних. Для всіх інших елементарних функцій розглядають основні способи інтегрування (метод розкладу, заміни змінної, інтегрування частинами), а також способи інтегрування раціональних і деяких ірраціональних та тригонометричних функцій.

Для кожної функції, неперервної на відрізку, інтеграл існує, однак він не завжди виражається через елементарні функції.

§ 8.1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Метод розкладу

Функція F називається *первісною* для функції f на проміжку $X = \langle a;\ b \rangle$, якщо $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$. Якщо функція f має первісну F, то вона має нескінченну множину первісних, які містяться у виразі $F + C$, де C — стала. Множина всіх первісних для функції f називається *невизначеним інтегралом* і позначається

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

I. а) $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$;   б) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

II. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

III. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

Доведіть ці властивості. Запишіть по-іншому формули а) і б).

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0dx = C$. 2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

5a. $\int e^x dx = e^x + C$. 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$. 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$. 10. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$.

Інтеграли 1—11 дістаємо з відповідної таблиці похідних, а 12—15 доведемо в наступних параграфах.

Одним з методів інтегрування є *метод розкладу*, який грунтується на застосуванні властивостей II, III і табличних інтегралів.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити інтеграли і результати перевірити диференціюванням:

а) $\int (3x+2)\,dx$; б) $\int (x^5 - 2x^2 + 4x - 6)\,dx$;

в) $\int (\sqrt{t})^9\,dt$; г) $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx$; д) $\int x^{\alpha-1} d\alpha$;

е) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$; є) $\int \frac{(x+2)^3}{x}\,dx$;

ж) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$; з) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

▲ а) Скориставшись властивостями II і III і табличними інтегралами 3 і 2, дістанемо

$$\int (3x+2)\,dx = 3\int x\,dx + 2\int dx = 3\cdot\frac{x^2}{2} + 2x + C =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

Перевірка: за властивістю I, б) похідна від одержаної функції повинна дорівнювати підінтегральній функції: $\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x + C\right)' = 3x + 2.$

б) Аналогічно попередньому дістаємо

$$\int (x^5 - 2x^2 + 4x - 6)\,dx = \int x^5 dx - 2\int x^2 dx +$$

$$+ 4\int x\,dx - 6\int dx = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + C.$$

Перевірку виконайте самостійно.

в) Маємо

$$\int (\sqrt{t})^9\,dt = \int t^{\frac{9}{2}}\,dt = \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{11}\sqrt{t^{11}} + C = \frac{2}{11}t^5\sqrt{t} + C.$$

Перевірте самостійно.

г) За табличним інтегралом 5 при $a = 18$ дістаємо

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int 2^x \cdot 9^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$$

Перевірка: $\left(\frac{18^x}{\ln 18} + C\right)' = \frac{1}{\ln 18}\cdot 18^x \cdot \ln 18 =$ $= 18^x = 2^x \cdot 3^{2x}.$

д) У даному випадку змінною інтегрування є α, а x вважаємо сталою. Тоді за правилом III і інтегралом 5 маємо

$$\int x^{\alpha-1} d\alpha = \int x^{\alpha}x^{-1} d\alpha =$$

$$= x^{-1}\int x^{\alpha} d\alpha = x^{-1}\cdot\frac{x^{\alpha}}{\ln x} + C = \frac{x^{\alpha-1}}{\ln x} + C.$$

Перевірка: $\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\ln x} + C\right)'_{\alpha} = \frac{1}{x\ln x}\cdot x^{\alpha}\cdot \ln x = x^{\alpha-1}.$

е) У чисельнику дробу додамо і віднімемо 1, потім почленно поділимо чисельник на знаменник і скористаємось інтегралами 2 і 10:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Перевірка: $(x - \operatorname{arctg} x + C)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{x^2+1}$.

є) $\int \frac{(x+2)^3}{x}\,dx = \int \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x}\,dx = \int x^2 dx + 6\int x dx + 12\int dx + 8\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8\ln|x| + C$. Перевірку виконайте самостійно.

ж) Підінтегральний вираз запишемо так:

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

За інтегралами 9 і 8 маємо

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

Перевірка: $(-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

з) Оскільки $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, то $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$. Перевірку виконайте самостійно. ▼

2. Для функції $f(x) = \sqrt{x}$ знайти ту первісну, яка задовольняє умову $F(9) = 5$.

▲ Для заданої функції $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$. Підставляючи сюди значення $x = 9$, дістаємо рівняння для визначення C. Маємо $5 = \frac{2}{3}\cdot 27 + C$, звідки $C = -13$. Отже, шукана первісна має вигляд $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 13$. ▼

3. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$ і для якої кутовий коефіцієнт дотичної у кожній її точці дорівнює $k = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

▲ Користуючись геометричним змістом похідної, дістаємо множину всіх кривих з заданим кутовим коефіцієнтом: $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = F(x) + C$. Підставляючи координати точки A у це рівняння, обчислимо константу C: $\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 + C$, $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + C$, $C = 0$. Отже, рівняння шуканої кривої $y = \arcsin x$. ▼

4. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = 10t - t^2$. Визначити закон руху тіла, якщо $s(3) = 2$.

▲ З механічного змісту похідної випливає, що $s(t) = \int v(t)\,dt = \int (10t - t^2)\,dt = 5t^2 - \frac{t^3}{3} + C$. Для визначення C скористаємось початковою умовою $s(3) = 2$. Підставляючи у формулу шляху значення $t = 3$ і $s = 2$, визначаємо $C = -34$, і закон руху тіла матиме вигляд $s(t) = 5t^2 - \frac{t^3}{3} - 34$. ▼

Вправи

1. Обчислити інтеграли і результати перевірити диференціюванням:

1) $\int x^{32}dx$; 2) $\int t^{2000}dt$; 3) $\int u^{-50}du$; 4) $\int t^{\alpha+1}dt$;

5) $\int (5x+3)\,dx$; 6) $\int (2x^4 - 6x^5 + 3x^2 + 7)\,dx$; 7) $\int (\sqrt{x})^5\,dx$;

8) $\int \frac{t}{\sqrt[3]{t}}\,dt$; 9) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$;

10) $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$; 11) $\int (x^3+1)^2\,dx$; 12) $\int \frac{dx}{2^{3x}}$;

13) $\int x^{\beta+4}d\beta$; 14) $\int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$; 15) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

2. Для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ визначити ту первісну, яка задовольняє умову $F(1) = 3$.

Відповідь: $F(x) = \ln|x| + 3$.

3. Знайти рівняння кривої, кутовий коефіцієнт дотичної до якої в будь-якій точці дорівнює $\cos^2 \frac{x}{2}$. Скільки існує таких кривих?

Відповідь: $y = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$.

4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $A(1;\ 0)$, а кутовий коефіцієнт дотичної до неї у кожній точці дорівнює $2x - 1$.

Побудуйте графік цієї функції і проведіть дотичну до нього у заданій точці.

Відповідь: $y = x^2 - x$.

5. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = 2t + 6t^2$. Визначити довжину шляху, пройденого тілом за час з моменту $t = 1$ до $t = 4$.

Вказівка. Обчислити різницю двох первісних для $v(t)$ при $t = 4$ і $t = 1$.

Відповідь: 141.

§ 8.2. Метод підстановки та інтегрування частинами

Спосіб інтегрування, що грунтується на застосуванні формули

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \tag{1}$$

де $t = \varphi(x)$, називається *методом підстановки* або *методом заміни змінної*. Формула (1) часто використовується у зворотному напрямі:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int f_1(t)\,dt. \tag{1a}$$

Завдання заміни змінної полягає в тому, що потрібно спростити підінтегральний вираз, тобто звести заданий інтеграл до табличного або до такого, який легко зводиться до табличного.

Якщо функції u і v неперервні і мають неперервні похідні на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то на ньому справедлива формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2}$$

або

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx, \tag{2a}$$

яка називається *формулою інтегрування частинами*, а метод, що грунтується на цій формулі,— *методом інтегрування частинами.*

Застосовуючи формулу (2), потрібно вдало вибрати u і dv, щоб інтеграл, що стоїть справа у цій формулі, був простіший. Цей метод найчастіше використовується для інтегрування трансцендентних функцій ($\ln x$, $\arcsin x$, $\cos\ln x$, ...), деяких ірраціональних функцій ($\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, ...) та добутків різнойменних функцій ($x \operatorname{arctg} x$, $x \sin x$, $x \ln x$, $e^x \cos x$, $x^2 e^x$ тощо).

Поясніть, на яких правилах диференціювання грунтуються формули (1) і (2) і за яких умов справедлива формула (1).

ПРИКЛАДИ

1. Користуючись формулами (1) і (1а), обчислити інтеграли:

а) $\int (x+2)^5\,dx$; б) $\int \sin 2x dx$; в) $\int e^{5x+4} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

д) $\int \frac{dx}{5-x}$; е) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$; є) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$;

ж) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; з) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$; и) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$; і) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

▲ а) Покладаючи $t = x + 2$, дістаємо $dt = d(x+2) = (x+2)'dx = dx$. Підставляючи ці значення в підінтегральний вираз, маємо

$$\int (x+2)^5\,dx = \int t^5 dt = \frac{1}{6} t^6 + C = \frac{1}{6}(x+2)^6 + C.$$

На практиці підстановка в підінтегральний вираз змінної t замість $\varphi(x)$ здебільшого не записується, а виконується усно. Зокрема, обчислення даного інтеграла можна записати так:

$$\int (x+2)^5\,dx = \int (x+2)^5\,d(x+2) = \frac{1}{6}(x+2)^6 + C.$$

б) Підстановка $2x = t$ дає $2dx = dt$, звідки $dx = \frac{dt}{2}$. Тоді

$$\int \sin 2x dx = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

в) Нехай $5x + 4 = t$. Тоді $5dx = dt$, $dx = \frac{dt}{5}$ і

$$\int e^{5x+4} dx = \frac{1}{5}\int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{5x+4} + C.$$

г) $$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\cos^2 4x} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x + C.$$

Зауваження. Розглянуті вище інтеграли легко обчислюються за загальною формулою

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \tag{3}$$

де F є первісною для функції f. Доведіть цю формулу.

д) Заданий інтеграл зводиться до табличного, якщо покласти $5-x=t$. Тоді $-dx=dt$ і

$$\int \frac{dx}{5-x} = \int \frac{-dt}{t} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|5-x| + C.$$

Аналогічно можна довести загальну формулу (зробіть це):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C. \tag{4}$$

е) Оскільки $d(x^2+1) = 2xdx$, то, помноживши і поділивши інтеграл на 2 і внісши множник 2 під знак інтеграла, а потім під знак диференціала, дістанемо

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$$

є) Покладемо $\sin x = t$, бо $d(\sin x) = \cos x\,dx$. Маємо

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx =$$

$$= \int \sin^2 x\,d(\sin x) = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

ж) Якщо чисельник підінтегрального виразу помножити на 2, то він дорівнюватиме похідній від підкореневого виразу. Тому

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Корисно запам'ятати загальну формулу, яка фактично застосовувалась при обчисленні заданого інтеграла, а саме:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C. \qquad (5)$$

з) Скористаємось формулою (1а), покладаючи $x = t^2$. Тоді $dx = 2tdt$ і, враховуючи приклад 1, е), § 8.1, дістаємо

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \int \frac{t\cdot 2t}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt =$$
$$= 2(t - \operatorname{arctg} t) + C = 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + C.$$

и) Використаємо підстановку $\frac{x}{a} = t$, звідки $dx = adt$. Тоді

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \qquad (6)$$

і) Аналогічно попередньому дістаємо таку формулу (доведіть):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C. \qquad (7)$$

Формули (6) і (7) є табличними інтегралами 12 і 13, § 8.1. ▼

2. Застосовуючи формулу (2), обчислити такі інтеграли:

а) $\int x\sin x dx$; б) $\int x^2 e^x dx$; в) $\int \ln x dx$;

г) $\int e^{-x}\cos x dx$; д) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; е) $\int \arcsin x dx$.

▲ Для застосування формули (2) потрібно підінтегральний вираз подати у вигляді добутку двох множників u і dv, причому через u позначити функцію, яка спрощується при диференціюванні (наприклад, x^2, $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$), а через dv — вираз, що містить dx і такий, що з нього безпосереднім інтегруванням можна знайти v (наприклад, $\sin x dx$, $\cos x dx$, $e^x dx$).

а) Нехай $u = x$, $dv = \sin x dx$, тоді $du = dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$. Підставляючи ці значення у формулу (2), дістаємо

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

б) Покладемо $u = x^2$, $dv = e^x dx$ і знайдемо $du = 2x dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Тоді $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$. До останнього інтеграла знову застосуємо формулу (2), поклавши $u = x$, $dv = e^x dx$, звідки $du = dx$, $v = e^x$. Отже, остаточно

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

в) У даному випадку можливий лише один варіант, а саме: $u = \ln x$, $dv = dx$, звідки $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ і

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C.$$

г) Нехай $u = e^{-x}$, $dv = \cos x\, dx$, тоді $du = -e^{-x} dx$, $v = \sin x$. За формулою (2) маємо

$$I = \int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx = e^{-x} \sin x + I_1. \qquad (*)$$

Знову застосуємо формулу (2) до I_1, покладаючи $u = e^{-x}$, $dv = \sin x dx$, звідки $du = -e^{-x} dx$, $v = -\cos x$. Тоді

$$I_1 = \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - I.$$

Підставляючи цей результат у формулу (*), дістаємо рівняння з невідомим інтегралом I, тобто $I = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I$, звідки

$$2I = e^{-x} (\sin x - \cos x), \quad I = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C.$$

д) Покладемо $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, звідки $du = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$ і

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\,.$$

Аналогічно попередньому прикладу маємо $2I = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$, звідки $I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

е) Покладемо $u = \arcsin x$, $dv = dx$. Тоді

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x d(\arcsin x) =$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = x \arcsin x +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C. \ \blacktriangledown$$

3. Матеріальна точка рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = \sin^5 t \cos t$. Визначити закон руху точки, якщо $s(0) = 0$.

▲ Користуючись механічним змістом похідної, маємо

$$s(t) = \int \sin^5 t \cos t dt = \int \sin^5 t d(\sin t) = \frac{1}{6}\sin^6 t + C.$$

Враховуючи початкову умову $s = 0$ при $t = 0$, дістаємо $0 = 0 + C$, $C = 0$. Отже, остаточно $s = \frac{1}{6}\sin^6 t$. ▼

4. Знайти криву, яка проходить через точку (е; 2) і задовольняє рівняння $y' = \ln^2 x$.

▲ Задане рівняння є прикладом так званих *диференціальних рівнянь першого порядку*, а умова $y(e) = 2$ називається *початковою умовою*. Задача відшукання розв'язку рівняння $y' = f(x)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ називається *задачею Коші* для заданого рівняння.

Нам потрібно за відомою похідною $y' = \ln^2 x$ відновити саму функцію $y = F(x)$. Очевидно, $y = \int \ln^2 x dx = F(x) + C$ (загальний розв'язок рівняння). Враховуючи умову $y(e) = 2$, обчислимо константу C і, підставляючи її значення в загальний розв'язок, дістанемо рівняння кривої, яка проходить через задану точку (частинний розв'язок рівняння).

Отже, інтегруючи частинами, дістаємо при $u = \ln^2 x$, $dv = dx$ $\left(\text{тоді } du = \frac{2\ln x}{x}dx,\ v = x\right)$:

$$y = \int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2\int \ln x dx.$$

Останній інтеграл знову обчислимо частинами, покладаючи $u = \ln x$, $dv = dx$, звідки $du = \frac{dx}{x}$ і $v = x$. Тоді $y = x \ln^2 x - 2(x \ln x - \int dx) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$; $2 = e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e + C$; $C = 2 - e$. Шукана крива має вигляд

$$y = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + 2 - e. \ \blacktriangledown$$

Вправи

1. Методом підстановки обчислити такі інтеграли:

1) $\int e^{-2x} dx$; 2) $\int (x-6)^7 dx$; 3) $\int \cos 8x dx$; 4) $\int \sin(at - b) dt$; 5) $\int \frac{dx}{2x+3}$; 6) $\int \operatorname{tg} x dx$; 7) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$; 8) $\int x^2 \sqrt{x^3+3}\, dx$; 9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 10) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{5 + 2\sin x}}$; 11) $\int \cos^4 x \sin x dx$.

Відповідь: 1) $-\frac{1}{2} e^{-2x} + C$; 2) $\frac{1}{8}(x-6)^8 + C$; 4) $-\frac{1}{a}\cos(at - b) + C$; 5) $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$; 6) $-\ln|\cos x| + C$; 7) $\frac{1}{4}\ln^4 x + C$; 8) $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+3)^3} + C$; 9) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + C$; 10) $\sqrt{5 + 2\sin x} + C$; 11) $-\frac{1}{5}\cos^5 x + C$.

2. Обчислити інтеграли, виконавши вказані підстановки:

1) $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$, $\sqrt[3]{x} = t$; 2) $\int \frac{(2\ln x + 5)^3}{x} dx$, $2\ln x + 5 = t$.

Відповідь: 1) $-3\cos\sqrt[3]{x} + C$; 2) $\frac{1}{8}(2\ln x + 5)^4 + C$.

3. Інтегруючи частинами, обчислити наступні інтеграли:

1) $\int x \ln x dx$; 2) $\int x e^x dx$; 3) $\int x^2 \cos x dx$; 4) $\int x^2 e^{-x} dx$; 5) $\int e^{2x} \sin 3x dx$; 6) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$; 7) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

Відповідь: 1) $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$; 2) $e^x(x-1) + C$; 3) $x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$; 4) $C - e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$; 5) $\frac{1}{13} e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$; 6) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}\cdot(x+1) - \sqrt{x} + C$; 7) $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}) + C$.

4. Знайти криву, яка проходить через точку $\left(-\frac{\pi}{2};\ 1\right)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної у кожній її точці дорівнює $f(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$.

Відповідь: $y = \ln(2+\sin x) + 1$.

5. За яким законом відбувається рух тіла, якщо воно рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = te^{t^2}$, причому $s(0) = \frac{5}{2}$?

Відповідь: $s(t) = \frac{1}{2}e^{t^2} + 2$.

§ 8.3. Інтегрування раціональних функцій

Від кожної раціональної функції можна взяти інтеграл, який виражається через елементарні функції. Інтегрування цілої раціональної функції (многочлена) розглядалось в § 8.1. Функція вигляду $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, називається *дробово-раціональною*, або *раціональним дробом*. Дріб правильний, якщо степінь многочлена $P(x)$ нижчий за степінь $Q(x)$. Якщо дріб неправильний, з нього виділяють цілу частину (многочлен), ділячи чисельник на знаменник: $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$. Правильний дріб $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ можна подати у вигляді суми скінченного числа елементарних дробів типу:

I) $\frac{A}{x-a}$; II) $\frac{A}{(x-a)^n}$; III) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

IV) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$,

де $n > 1$ — натуральне число, $p^2 - 4q < 0$; A, B, a, p, $q \in \mathbb{R}$.

Інтеграли від елементарних дробів обчислюємо за формулами:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C. \quad (1)$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) =$$

$$= \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C. \quad (2)$$

III. Якщо чисельник дробу пропорційний похідній знаменника, то інтеграл обчислюють за формулою (4), § 8.2. В іншому разі чисельник розкладають на суму двох доданків, один з яких пропорційний похідній тричлена, а другий — сталий. Тоді інтеграл записуємо у вигляді суми двох інтегралів, перший з яких обчислюємо за формулою (4), § 8.2, а другий зводимо до інтеграла (6), § 8.2, виділенням повного квадрата з тричлена.

IV. Інтеграл від цього дробу зводиться до двох інтегралів, перший з яких табличний типу $\int \frac{dz}{z^n}$, а другий $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Останній інтеграл шляхом $(n-1)$-кратного інтегрування зводиться до табличного $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$ за допомогою рекурентної формули

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n+3} I_{n-1}. \qquad (3)$$

Отже, інтегрування кожного раціонального дробу можна звести до інтегрування суми елементарних дробів за таким правилом:

1) якщо дріб неправильний, то, виділивши цілу частину, записати його у вигляді $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{P_r(x)}{Q_n(x)}$, $m > n$, $r < n$;

2) розкласти знаменник $Q_n(x)$ на лінійні і квадратичні множники:

$$Q_n(x) = (x-a)^k \ \ldots \ (x^2+px+q)^l \ \ldots, \quad p^2 - 4q < 0;$$

3) зобразити дріб $\frac{P_r(x)}{Q_n(x)}$ у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{P_r(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots +$$
$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l},$$

де $A_1, \ldots, A_k, \ldots, B_1, C_1, \ldots, B_l, C_l, \ldots$ — деякі сталі, $k, \ldots, l, \ldots$ — натуральні числа, більші за одиницю, причому $k + \ldots + 2l + \ldots = n$ (поясніть, чому);

4) обчислити невизначені коефіцієнти $A_1, \ldots, C_l, \ldots$. Для цього потрібно звести останню рівність до спільного знаменника і прирівняти чисельники в обох частинах рівності. Невідомі коефіцієнти обчислюють двома способами: а) прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях x в обох частинах рівності; б) наданням змінній x конкрет-

них значень. Часто застосовують комбінацію цих способів. Залишається розв'язати систему n лінійних рівнянь з n невідомими $A_1, \ldots;$

5) обчислити заданий інтеграл, використовуючи схему розкладу і значення невідомих коефіцієнтів.

ПРИКЛАД

Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{2x^4+1}{x^3-x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$; в) $\int \frac{x-1}{(x+3)^2}\,dx$;

г) $\int \frac{x-3}{x^2+2x+3}\,dx$; д) $\int \frac{x^4+1}{x^3+1}\,dx$; е) $\int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

▲ а) Виділимо цілу частину підінтегрального дробу:

$$\begin{array}{rl|l} -\,2x^4 & +1 & x^3-x \\ \cline{3-3} 2x^4-2x^2 & & 2x \\ \hline 2x^2+1 & & \end{array} \qquad \frac{2x^4+1}{x^3-x} = 2x + \frac{2x^2+1}{x^3-x}.$$

Розкладемо знаменник на множники: $x^3 - x = x(x-1) \times$ $\times (x+1)$. Зобразимо дріб $\frac{2x^2+1}{x^3-x}$ у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Останню рівність зведемо до спільного знаменника і прирівняємо чисельники: $2x^2 + 1 = A(x-1)(x+1) +$ $+ Bx(x+1) + Cx(x-1)$.

Оскільки числа 0, 1, —1 є коренями знаменника, то коефіцієнти A, B і C зручно обчислити, підставляючи саме ці значення x в останню рівність. При $x = 0$ дістаємо $1 =$ $= A \cdot (-1)$, тобто $A = -1$; при $x = 1$ маємо $3 = 2B$, тобто $B = \frac{3}{2}$; при $x = -1$ дістаємо $3 = 2C$, $C = \frac{3}{2}$.

Обчислюємо заданий інтеграл, враховуючи значення знайдених коефіцієнтів і попередній розклад:

$$\int \frac{2x^4+1}{x^3-x}\,dx = \int \left(2x - \frac{1}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)}\right) dx =$$

$$= x^2 - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C_1 =$$

$$= x^2 - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2-1| + C_1.$$

б) Маємо $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$, звідки $1=A(x+a)+B(x-a)$ або $A=\frac{1}{2a}$ і $B=-\frac{1}{2a}$.

Тоді

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-$$

$$-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Отже, маємо (табличний інтеграл 14, § 8.1):

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C. \qquad (4)$$

в) Дріб правильний. Знаменник має двократний корінь —3. Тому розклад на елементарні дроби матиме вигляд

$$\frac{x-1}{(x+3^2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}.$$

Зведемо до спільного знаменника цю рівність і прирівняємо чисельники: $x-1=A(x+3)+B$. При $x=-3$ маємо $B=-4$; при $x=1$ маємо $0=4A+B$, звідки $4A=-B$, $4A=4$, $A=1$. Підставляючи значення A і B у даний розклад, дістаємо

$$\int\frac{x-1}{(x+3)^2}dx=\int\frac{dx}{x+3}-4\int\frac{dx}{(x+3)^2}=\ln|x+3|-$$

$$-4\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2}=\ln|x+3|-4\int(x+3)^{-2}d(x+3)=$$

$$=\ln|x+3|+\frac{4}{x+3}+C.$$

г) Маємо інтеграл типу III. Виділяючи в чисельнику похідну знаменника і подаючи інтеграл у вигляді суми двох інтегралів, до яких послідовно застосовуємо формули (4) і (6), § 8.2, дістаємо

$$\int\frac{(x-3)\,dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)-8}{x^2+2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-$$

$$-4\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-$$

$$-\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Зауваження. Вказаним методом можна обчислювати інтеграли вигляду $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ і тоді, коли знаменник має дійсні корені ($p^2-4q>0$). **У цьому випадку до другого інтеграла застосовують формулу (4).**

д) Знаменник має один дійсний корінь $x = -1$ і два уявних, бо $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Виділивши цілу частину $\frac{x^4+1}{x^3+1} = x + \frac{1-x}{x^3+1}$, розкладемо останній дріб на елементарні: $\frac{1-x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Коефіцієнти A, B і C визначаємо з рівняння $1 - x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$ комбінованим способом. При $x = -1$ маємо $A = \frac{2}{3}$. Для обчислення B і C прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B,\ B = -A,\ B = -\frac{2}{3}, \\ x & -1 = -A + B + C,\ C = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Тоді

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) + C_1 =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + C_1.$$

е) Підінтегральна функція — елементарний дріб IV типу. Маємо

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2(x^2+1)} + I.$$

Останній інтеграл обчислюємо за формулою (3) при $t = x$, $a = 1$, $n = 2$:

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Тоді

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{x-3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Вправи

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)(x+1)}$;
4) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$; 5) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}\,dx$;
6) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$; 7) $\int \frac{x^5+1}{x^4+x^2}\,dx$; 8) $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$;
9) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

Відповідь: 1) $-\frac{1}{4(2x+3)^2}+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; 3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 4) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{5}{12}\times$ $\times\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; 5) $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7)+C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{6}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}}+C$; 7) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg} x+C$; 8) $\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 9) $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)+C$.

2. Визначити сім'ю кривих, для яких у кожній точці кутовий коефіцієнт дотичної $k=\frac{1}{x^2+2x-3}$.

Відповідь: $y=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$.

3. Серед усіх функцій, що задовольняють рівняння $y' - \frac{2x-2}{x^2-4x+3}=0$, знайти ту, графік якої проходить через точку (2; 1), тобто потрібно розв'язати задачу Коші для заданого рівняння.

В к а з і в к а. Дивись приклад 4, § 8.2.

Відповідь: $y = 2\ln|x-3|+1$.

§ 8.4. Інтегрування деяких ірраціональних і тригонометричних функцій

Розглянемо деякі класи функцій, які за допомогою певних підстановок зводяться до раціональних функцій, що завжди інтегруються.

I. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, де R — раціональна функція своїх аргументів, m_1, n_1, ..., m_k, n_k — цілі числа, обчислюють за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^\alpha$, де α — спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}$, ..., $\frac{m_k}{n_k}$.

II. Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводять до табличних інтегралів 13 і 15, § 8.1, виділенням повного квадрата у тричлені

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

і наступною заміною змінної $t = x+\frac{b}{2a}$.

III. Інтеграли вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ обчислюють так. У чисельнику дробу утворюють похідну квадратного тричлена, що міститься під знаком кореня, і розбивають дріб на два дроби, перший з яких інтегрують за формулою (5), § 8.2, а другий зводять до випадку II.

IV. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де R — раціональна функція своїх аргументів, зводять до інтегралів від раціональних функцій нової змінної t підстановкою $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ (універсальна тригонометрична підстановка). При цьому дістаємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Доведіть ці формули.

V. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{Z}$, обчислюють так. Якщо n — непарне додатне число, то застосовується підстановка $\sin x = t$, а якщо m — непарне додатне число, то підстановка $\cos x = t$. Якщо m і n — парні невід'ємні числа, то пониження степеня здійснюється внаслідок переходу до подвійного аргументу за допомогою тригонометричних формул:

$$а)\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\quad б)\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};\quad в)\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \qquad (1)$$

VI. Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \times \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ обчислюють, використовуючи такі формули:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x).$$

VII. Інтеграли вигляду $\int R_1(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$, $\int R_2(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$, $\int R_3(x, \sqrt{x^2+a^2})\,dx$ за допомогою тригонометричних підстановок $x = a\sin t$ $(x = a\cos t)$, $x = \frac{a}{\sin t}$ $\left(x = \frac{a}{\cos t}\right)$, $x = a \operatorname{tg} t$ відповідно зводять до інтеграла типу IV, який раціоналізується.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій:

$$а)\ \int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx;\quad б)\ \int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}dx;$$

$$в)\ \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+8}};\quad г)\ \int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$$

▲ а) Даний інтеграл є частинним випадком інтегралів типу I при $a = d = 1$, $b = c = 0$. Підстановкою $x = t^6$ зведемо його до раціонального вигляду. Тоді $dx = 6t^5dt$ і

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx = \int \frac{t^3\cdot 6t^5}{t^6(t^2+1)}dt = 6\int \frac{t^2}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t^2+1} = 6t - 6\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

б) Маємо інтеграл типу I. Застосуємо підстановку $\frac{x-1}{x+1}=t^4$, після чого $x=\frac{t^4+1}{1-t^4}=-\frac{t^4+1}{t^4-1}=-1-$ $-\frac{2}{t^4-1}$, $x+1=-\frac{2}{t^4-1}$, $dx=\frac{8t^3}{(t^4-1)^2}dt$. Отже,

$$\int\frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\int\frac{(t^4-1)^2}{4}\cdot t\cdot\frac{8t^3}{(t^4-1)^2}dt=$$

$$=2\int t^4dt=\frac{2}{5}t^5+C=\frac{2}{5}\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5}+C.$$

в) Маємо інтеграл типу II. Виділяючи повний квадрат у квадратному тричлені, що міститься під знаком кореня, маємо

$$4x^2+12x+8=4(x^2+3x+2)=4\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2-\frac{9}{4}\right)=4\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right).$$

Тоді, застосовуючи табличний інтеграл 15, § 8.1, дістаємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+8}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+2}\right)+C.$$

г) Маємо інтеграл типу III, який розіб'ємо на суму двох інтегралів:

$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=-\int\frac{(-2x+2)-5}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=$$

$$=-\int\frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+5\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

Перший інтеграл обчислюємо за формулою (5), § 8.2, а другий зводимо до табличного 7, § 8.2, якщо покласти $t=x-$ -1. Остаточно маємо

$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=-2\sqrt{1+2x-x^2}+$$

$$+5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C. \ \blacktriangledown$$

2. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

▲ Очевидно, розв'язки цього рівняння становлять множину всіх первісних для функції $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ (див. приклад 4, § 8.2). Отже,

$$y = F(x) + C = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx = \int \frac{(2x+4)-3}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+5} - 3\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right) + C. \ ▼$$

3. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій:

а) $\int \cos^2 3x dx$; б) $\int \sin^4 x dx$; в) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$;

г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; д) $\int \sin x \cos 3x dx$; е) $\int \dfrac{dx}{2+\sin x}$.

▲ Інтеграли а) — г) належать до інтегралів типу V.

а) Маємо $m = 0$, $n = 2$ (парні числа). Користуючись формулою (1), б), дістаємо

$$\int \cos^2 3x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + C.$$

б) У цьому випадку $m = 4$, $n = 0$. Застосовуючи формули (1), а) і (1), б), маємо

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

в) Маємо $m = 3$ — непарне число. Відокремлюючи один співмножник від $\sin^3 x$, дістаємо

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{(1-\cos^2 x)\,d(\cos x)}{\cos^4 x} =$$

$$= -\int \cos^{-4} x d(\cos x) + \int \cos^{-2} x d(\cos x) =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

г). У цьому випадку $m = n = 2$. Користуючись формулами (1), в) і (1), а), дістаємо

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

д) Маємо інтеграл типу VI. Застосовуючи відповідну формулу, дістаємо

$$\int \sin x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-2x) + \sin 4x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}\cos 2x -$$

$$- \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

е) Підінтегральна функція є раціональною від синуса (інтеграл типу IV). Використаємо підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ і формули $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ і $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Маємо

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangledown$$

4. Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$; б) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx$.

▲ а) Маємо інтеграл типу VII. Спочатку розглянемо інтеграл $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a > 0$. Для його обчислення використаємо підстановку $x = a \operatorname{tg} t$. Тоді $dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$ і $\sqrt{x^2+a^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{a}{\cos t}$. Підставляючи ці значення в заданий інтеграл, дістаємо

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\,dt}{\cos^2 t \cdot \dfrac{a}{\cos t}} = \int \frac{dt}{\cos t} =$$

$$= \int \frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}.$$

Покладемо $\sin t = u$ і, користуючись інтегралом 14, § 8.1, маємо

$$I_1 = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| +$$

$$+ C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right| + C.$$

Повертаючись до змінної x, дістаємо

$$I_1 = \ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a} + C = \ln(\sqrt{x^2+a^2}+x) + C_1,$$

$$C_1 = C - \ln a.$$

Інтеграл $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ обчислимо за допомогою підстановки $x = \frac{a}{\sin t}$. Тоді $dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$ і $\sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{ctg} t$. Маємо $I_2 = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C_1$.

Об'єднуючи інтеграли I_1 і I_2, дістаємо табличний інтеграл 15, § 8.1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C. \tag{2}$$

б) Даний інтеграл можна обчислити, користуючись підстановкою $x = a\operatorname{tg} t$. Однак простіше його обчислювати, інтегруючи частинами (див. приклад 2, д), § 8.2), покладаючи $u = \sqrt{a^2+x^2}$, $dv = dx$ і використовуючи формулу (2). Дістанемо

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} +$$

$$+ \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C. \ \blacktriangledown \tag{3}$$

Вправи

1. Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$; 2) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$; 3) $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$;

4) $\int \frac{1}{(x+2)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$; 5) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-6x+5}}\,dx$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; 7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+6}}$;

9) $\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

Відповідь: 1) $2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$;

3) $x+4\sqrt{1+x}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C$; 4) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^4}+C$;

5) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-6x+5}+C$; 6) $\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; 7) $\frac{3}{2}\arcsin 2x-$ $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C$;

9) $2\sqrt{x^2+x+1}+3\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$.

2. Визначити інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \sin^2 2x\,dx$; 2) $\int \cos^5 x\,dx$; 3) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$; 4) $\int \sin^4 t\cos^2 t\,dt$;

5) $\int \cos 5x\cos 2x\,dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Відповідь: 1) $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 2) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\times$ $\times\sin^5 x+C$; 3) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$; 4) $\frac{1}{48}\left(3t-\frac{3}{4}\sin 4t-\right.$ $\left.-\sin^3 2t\right)+C$; 5) $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{14}\sin 7x+C$; 6) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

3. Обчислити інтеграли: 1) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$; 2) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Відповідь: 1) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$;

2) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

4. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v = \frac{3t+1}{\sqrt{3t^2+2t+4}}$. Визначити довжину шляху, пройденого тілом від моменту $t = 0$ до $t = 1$ (див. вправу 5, § 8.1).

Відповідь: $s = 1$.

5. Для функції $f(x) = \frac{1}{5 - 3\cos x}$ визначити ту первісну F, яка задовольняє умову $F(0) = -1$.

Відповідь: $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - 1$.

6. Розв'язати задачу Коші: $y' - \sin^3 \frac{2}{3} x = 0$, $y(0) = 1$ (див. приклад 4, § 8.2).

Відповідь: $y = -\frac{3}{2} \cos \frac{2}{3} x + \frac{1}{2} \cos^3 \frac{2}{3} x + 2$.

РОЗДІЛ 9. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розглядаються задачі на обчислення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми (тобто за означенням) і за формулою Ньютона — Лейбніца, яка встановлює зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами (§ 9.1). Показано переваги другого способу над першим. Однак перший спосіб зручно використовувати при наближених обчисленнях інтегралів, зокрема, у випадках, коли первісну для підінтегральної функції важко обчислити або коли вона взагалі не виражається через елементарні функції (§ 9.3). У таких обчисленнях бажано користуватися ЕОМ.

Основні методи обчислення інтегралів — інтегрування частинами та заміна змінної — для визначених інтегралів розглядаються в § 9.2. Застосування визначеного інтеграла до деяких задач геометрії і фізики розглядається в § 9.4—9.7. Труднощі при розв'язуванні таких задач виникатимуть здебільшого у знаходженні аналітичного виразу відповідної підінтегральної функції.

§ 9.1. Визначений інтеграл, його властивості і обчислення

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ — довільне розбиття цього відрізка на n частин. *Інтегральною сумою* для функції f на $[a; b]$ називається сума вигляду

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n, \quad (1)$$

де $x_{k-1} \leqslant c_k \leqslant x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Ця сума має скінченну границю I, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ таке, що при $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k < \delta$ нерівність $|S_n - I| < \varepsilon$ виконується при будь-якому виборі точок c_k. *Визначеним інтегралом* від функції f на відрізку $[a; b]$ називається границя інтегральної суми (1) за умови, що довжина найбільшого в елементарних відрізків прямує до нуля:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Числа a і b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межами інтегрування*. Функція f, для якої границя у правій частині рівності (2) існує (скінченна), називається *інтегровною* на $[a; b]$. Зокрема, інтегровними на відрізку $[a; b]$ є функції: а) неперервна; б) обмежена, що має скінченне число точок розриву *(достатні умови інтегровності функції)*.

Основні властивості визначеного інтеграла

I. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. II. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

III. $\int_a^b (\alpha_1 f_1(x) \pm \alpha_2 f_2(x))\,dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\,dx \pm$

$\pm \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$. IV. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Оцінка визначеного інтеграла: якщо на відрізку $[a; b]$ маємо $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (3)$$

Якщо f неперервна на $[a; b]$, то $\exists \mu \in [m; M]$ таке, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \qquad (4)$$

де $\mu = f(c)$, $a \leqslant c \leqslant b$, називається *середнім значенням* функції на відрізку $[a; b]$ *(теорема про середнє)*.

Доведіть властивості I — IV. Покажіть, як дістати формулу (4) з (3).

Визначений інтеграл обчислюють за формулою Ньютона — Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{5}$$

де F — одна з первісних для f, тобто $F'(x) = f(x)$ на $[a;\ b]$.

Якщо функція f — непарна (парна), то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \left(\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\right). \tag{6}$$

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити $\int_1^2 x dx$ як границю інтегральної суми.

▲ Підінтегральна функція неперервна на відрізку $[1;\ 2]$, тому границя її інтегральної суми існує і не залежить від способу розбиття відрізка на частини і вибору точок c_k. Розіб'ємо відрізок $[1;\ 2]$ на n рівних частин, довжина яких $\Delta x = \frac{1}{n}$, і за точки c_k візьмемо праві кінці кожного частинного відрізка, тобто $c_k = x_k$. Тоді

$$f(c_1) = 1 + \frac{1}{n},\ f(c_2) = 1 + \frac{2}{n},\ \ldots,\ f(c_n) = 1 + \frac{n}{n}.$$

Отже, згідно з формулою (2), де $\lambda = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, маємо

$$\int_1^2 x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(n + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n(n+1)}{2n^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Тут використано формулу суми n перших послідовних натуральних чисел. ▼

2. Оцінити інтеграли: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,dx$; б) $\int_{10}^{15} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

▲ а) Оскільки для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ маємо $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, а функція $y = e^{\sin x}$ зростаюча на цьому проміжку, то $m = e^0 = 1$, $M = e^1 = e$ (див. формулу (3)). Крім того, $b - a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$. Отже, $\frac{\pi}{2} \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{2} e$.

б) Оскільки $|\sin x| \leqslant 1$ і $\sqrt{1 + x^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x|$, то при $x > 10$ маємо нерівність $\frac{|\sin x|}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{10}$ і, згідно з (3),

$$\left|\int_{10}^{15} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx\right| < \frac{1}{10}(15 - 10) = \frac{1}{2} \quad ▼.$$

3. Обчислити середнє значення функції $f(x) = 2x$ на відрізку $[1; 2]$.

▲ З формули (4) маємо $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Користуючись результатом прикладу 1, дістаємо $\mu = \frac{1}{2-1}\int_1^2 2xdx = 2\int_1^2 xdx = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$. ▼

4. Обчислити за формулою Ньютона — Лейбніца такі інтеграли:

а) $\int_1^2 xdx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin xdx$; в) $\int_0^1 (2x^3 + 1)\,dx$; г) $\int_1^5 \frac{dx}{x}$;

д) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$; е) $\int_2^4 \frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}\,dx$;

є) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos xdx$.

▲ Оскільки всі підінтегральні функції неперервні на відповідних відрізках, то, застосовуючи формулу (5) і властивість III, маємо:

а) $\int_1^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x dx = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -3\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0+3=3;$

в) $\int\limits_0^1 (2x^3+1)\,dx = 2\int\limits_0^1 x^3 dx + \int\limits_0^1 dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2} - 0 + 1 - 0 = \frac{3}{2};$

г) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x} = \ln|x|\,\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5;$

д) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = 2\int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = 2\int\limits_0^1 dx - 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$

$= 2 - \frac{\pi}{2};$

е) під знаком інтеграла маємо неправильний дріб. Виділимо цілу частину, скориставшись розкладом $x^3+2x^2-x-2 = x^2(x+2)-(x+2) = (x+2)(x^2-1)$. Маємо $\frac{x^3+2x^2-x-1}{x^2-1} = x+2+\frac{1}{x^2-1}$ і заданий інтеграл

$$I = \int\limits_2^4 (x+2)\,dx + \int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2-1} = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_2^4 +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\,\Big|_2^4 = 10 + \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5};$$

є) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.$

Порівнюючи приклади 4, а) і 1, помічаємо, що обчислювати інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца значно простіше, ніж за означенням, якщо, зрозуміло, первісна F є елементарною функцією. ▼

5. Для бензину залежність теплоємності c при сталому тиску від температури θ (у градусах Цельсія) виражається формулою $c = 0{,}00102\theta + 0{,}2237$. Яка середня теплоємність $c_{ср}$ бензину для температур в інтервалі від 3 до 54 °С?

▲ Скористаємось теоремою про середнє (формула (4)), маємо

$$c_{\text{ср}} = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} c(\theta)\,d\theta = \frac{1}{51}\int\limits_{3}^{54}(0{,}001020\theta + 0{,}2237)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{51}(0{,}000510\theta^2 + 0{,}2237\theta)\Big|_3^{54} = 0{,}2528. \ \blacktriangledown$$

6. Електровоз через t годин після відправлення мав прискорення $a(t) = 3t^2 - 42t + 80$ (км/год^2). Визначити швидкість і відстань, пройдену електровозом від станції через годину після відправлення.

▲ Нехай функція $s(t)$ описує рух електровоза, а $v(t)$ — його швидкість. Тоді, користуючись механічним змістом похідної і означенням первісної, розглядатимемо $s(t)$ як одну з первісних для $v(t)$, а $v(t)$ — для $a(t)$ на деякому проміжку зміни часу t. Оскільки за умовою задачі шукані величини потрібно обчислити за час від $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$, то дістанемо

$$v = \int\limits_0^1 a(t)\,dt = \int\limits_0^1 (3t^2 - 42t + 80)\,dt = (t^3 - 21t^2 +$$

$$+ 80t)\Big|_0^1 = 60 \text{ км/год},$$

$$s = \int\limits_0^1 v(t)\,dt = \int\limits_0^1 (t^3 - 21t^2 + 80t)\,dt = \left(\frac{t^4}{4} - 7t^3 +\right.$$

$$\left. + 40t^2\right)\Big|_0^1 = 33{,}25 \text{ км}. \ \blacktriangledown$$

Вправи

1. Обчислити $\int\limits_0^1 x^2dx$ як границю інтегральної суми.

Відповідь: $^1/_3$.

2. Оцінити інтеграли: 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x + 2}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Відповідь: 1) $\frac{\pi}{6} \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{4}$; 2) $0 \leqslant I \leqslant 1$.

3. Обчислити середнє значення функції $y = 5x$ на відрізку $[0;\ 1]$.
Відповідь: $^5/_2$.

4. Визначити середнє значення функції $y = e^x + 2$ на відрізку [0; 1].

Відповідь: $e + 1$.

5. Обчислити за формулою Ньютона — Лейбніца такі інтеграли:

$$1)\ \int_{-1}^{1} (x + x^3)\, dx;\quad 2)\ \int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x}\, dx;\quad 3)\ \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2};$$

$$4)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx;\quad 5)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};\quad 6)\ \int_{2}^{3} \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1}\, dx;$$

$$7)\ \int_{0}^{1} e^x (x^4 e^{-x} - 1)\, dx;\quad 8)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^2 2x};\quad 9)\ \int_{0}^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx.$$

Відповідь: 1) 0; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{\pi}{12}$; 4) π; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $9\frac{2}{3}$; 7) $\frac{6}{5} - e$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

6. Відстань між станцією і турбазою велосипедист проїхав за 2 год, рухаючись із змінною швидкістю $v(t) = 6t^2 + 3t + 1$ (км/год). Яка відстань між станцією і турбазою?

Відповідь: 24 км.

§ 9.2. Заміна змінної та інтегрування частинами

Формула заміни змінної для визначеного інтеграла має вигляд

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt, \tag{1}$$

де функція f неперервна на $[a; b]$, φ і φ' — неперервні на $[\alpha; \beta]$, причому $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ $\forall t \in [\alpha; \beta]$.

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла така:

$$\int_a^b u dv = uv \big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{2}$$

Тут функції u, v, u' і v' неперервні на відрізку $[a; b]$.

ПРИКЛАДИ

1. Користуючись формулою заміни змінної, обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx;$$

$$\text{в) } \int_1^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx; \quad \text{г) } \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{д) } \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$$

▲ а) Уведемо нову змінну, поклавши $t = x^2 + 1$. Звідси знаходимо $dt = 2xdx$, $\frac{dt}{2} = xdx$ і нові межі інтегрування $\alpha = 1$ при $x = 0$ і $\beta = 4$ при $x = \sqrt{3}$. Тоді

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}.$$

б) Покладемо $t = \cos x$, тоді $dt = -\sin xdx$, $\alpha = t(0) = 1$, $\beta = t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ і

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 xdx = -\int_1^0 t^2dt = \int_0^1 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

в) Використаємо підстановку $t = \ln x$, звідки $dt = \frac{dx}{x}$, $\alpha = \ln 1 = 0$, $\beta = \ln e = 1$. Тоді

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

г) Нехай $t = \sqrt{4-x^2}$. Продиференціюємо цю рівність: $dt = d\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)\,dx = -\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$. При $x = 0$ маємо $\alpha = 2$, при $x = 1$ маємо $\beta = \sqrt{3}$. Отже, дістанемо

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_2^{\sqrt{3}} (-dt) = \int_{\sqrt{3}}^2 dt = t\Big|_{\sqrt{3}}^2 = 2-\sqrt{3}.$$

д) Покладемо $t = e^x$. Звідси $dt = e^x dx$, $\alpha = 1$, $\beta = e$ і

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \,\Big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}. \ ▼$$

2. Сила струму в електричному колі змінюється за законом $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Визначити середнє значення сили струму за півперіод $T/2$, якщо $\omega = 2\pi/T$.

▲ З формули (4), § 9.1, дістаємо $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Маємо $a = 0$, $b = \frac{T}{2}$, $\frac{1}{b-a} = \frac{2}{T}$ і тому $I_{\text{ср}} = \frac{2I_0}{T} \times$ $\times \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t + \varphi)\,dt$. Покладаючи $u = \omega t + \varphi$, дістаємо $du = \omega dt$, і нові межі інтегрування $\alpha = u(0) = \varphi$, $\beta = u(T/2) = \omega T/2 + \varphi = \pi + \varphi$, бо $\omega = 2\pi/T$. Остаточно маємо

$$I_{\text{ср}} = \frac{2I_0}{T\omega}\int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \sin u\,du = -\frac{I_0}{\pi}\cos u \,\Big|_{\varphi}^{\varphi+\pi} =$$

$$= -\frac{I_0}{\pi}(\cos(\varphi+\pi) - \cos\varphi) = \frac{2I_0}{\pi}. \ ▼$$

Зауваження. Виконуючи заміну змінної в інтегралі, обов'язково необхідно змінити межі інтегрування.

3. Застосовуючи формулу (2), обчислити такі інтеграли:

а) $\int_{-1}^{0} xe^{2x}dx$; б) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$; в) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

▲ а) Покладаючи $u = x$, $dv = e^{2x}dx$, маємо $du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ і за формулою (2) дістаємо

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{2x}dx = \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2} = \frac{3-e^2}{4e^2}.$$

б) Нехай $u = x^2$, $dv = \cos x dx$. Тоді $du = 2xdx$, $v = \sin x$ і

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x dx = -2\int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу (2), покладаючи $u_1 = x$, $dv_1 = \sin x\, dx$, звідки $du_1 = dx$ і $v_1 = -\cos x$. Тоді

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Остаточно дістаємо $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2\pi.$

в) $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Тоді

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2. \ \blacktriangledown$$

4. Обчислити $I = \int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\, dx.$

▲ Спочатку скористаємось підстановкою $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, новими межами інтегрування є $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ і $I = 2\int_0^{\pi} t \cos t dt$. До останнього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I = 2\int_0^{\pi} t d(\sin t) = 2t \sin t \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin t dt = 2\cos t \Big|_0^{\pi} = -4. \ \blacktriangledown$$

5. Обчислити інтеграли, користуючись вказаними підстановками:

а) $\int_0^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $x = a \sin t$; б) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$, $e^x + 1 = t^2$.

▲ а) Маємо $dx = a\cos t dt$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$; $\alpha = \arcsin 0 = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Отже,

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt = a^2 \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^2\pi}{4}.$$

б) Оскільки $e^x + 1 = t^2$, то $e^x = t^2 - 1$, $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2tdt}{t^2 - 1}$. З того що $t = \sqrt{e^x + 1}$, дістаємо $\alpha = \sqrt{e^{\ln 3} + 1} = 2$, $\beta = \sqrt{e^{\ln 8} + 1} = 3$. Тому

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int_2^3 \frac{2tdt}{t(t^2 - 1)} = 2\int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3 =$$

$$= \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3} = \ln\frac{3}{2}. \ ▼$$

Вправи

1. Користуючись формулою заміни змінної, обчислити інтеграли:

1) $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} e^{3x} dx$; 2) $\int_4^7 \sqrt{x - 3}\, dx$; 3) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1 + x}}$; 4) $\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{16 + 7x}}$;

5) $\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$; 6) $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 9}}$; 7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$;

8) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos x dx$; 9) $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x - 1}}$; 10) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{3}(1-e)$; 2) $\frac{14}{3}$; 3) $\frac{32}{3}$; 4) $-\frac{2}{7}$; 5) $\ln\frac{3}{2}$; 6) 1; 7) $-\ln 2$; 8) 0 (поясніть, чому); 9) $2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)$; 10) $1+\ln 2-\ln(e+1)$.

2. Обчислити діюче значення напруги $U=\sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T u^2dt}$ синусоідального струму за період T, якщо $u=U_m\sin\omega t$, де U_m — амплітудне значення напруги u; $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Відповідь: $U=U_m/\sqrt{2}$.

3. Обчислити інтеграли, застосовуючи вказані підстановки:

1) $\int\limits_1^6\frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$, $3x-2=t^2$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$, $e^x-1=t^2$;

3) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$, $x=\sin t$; 4) $\int\limits_0^a\sqrt{x^2+a^2}\,dx$, $x=a\operatorname{tg} t$.

Відповідь: 1) $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$; 2) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $1-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{a^2}{2}\times(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

4. Обчислити інтегруванням частинами такі інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 x\ln x dx$; 2) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$; 3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi} e^x\sin x dx$;

5) $\int\limits_1^e\ln^2 x dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi}x^3\sin x dx$; 7) $\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x dx}{\cos^2 x}$;

9) $\int\limits_2^{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$.

Відповідь: 1) $2\ln 2-\frac{3}{4}$; 2) $1-\frac{2}{e}$; 3) $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$; 5) $e-2$; 6) $\pi^3-6\pi$; 7) $\frac{a^2\pi}{4}$; 8) $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$; 9) $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

Зауваження. Інтеграл 7) розв'язано раніше способом заміни змінної. Проаналізуйте, який спосіб зручніший для його обчислення.

9.3. Наближене обчислення інтегралів

Обчислюючи визначений інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца, спочатку знаходимо первісну F для підінтегральної функції f. Однак не для кожної неперервної функції первісна виражається у скінченному вигляді (через елементарні функції). До таких функцій належать, наприклад, функції $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, $\sqrt{\cos x}$, $\sqrt{1+x^3}$. Тоді обчислюємо наближене значення інтеграла, спираючись на поняття визначеного інтеграла як границі інтегральної суми. Вибираючи досить дрібні розбиття проміжку інтегрування, дістаємо інтегральну суму як завгодно близьку до інтеграла. Користуються правилом:

1) ділять відрізок $[a; b]$ на n рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ і знаходять довжину кожного відрізка $h = \frac{b-a}{n}$;

2) обчислюють значення підінтегральної функції $y = f(x) \geqslant 0$ в точках поділу: $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(b)$;

3) використовують одну з наближених формул.

Найчастіше користуються формулами, що грунтуються на геометричному змісті визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції:

формула прямокутників (рис. 44, *а*, *б*)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}), \qquad (1)$$

або

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n); \qquad (1a)$$

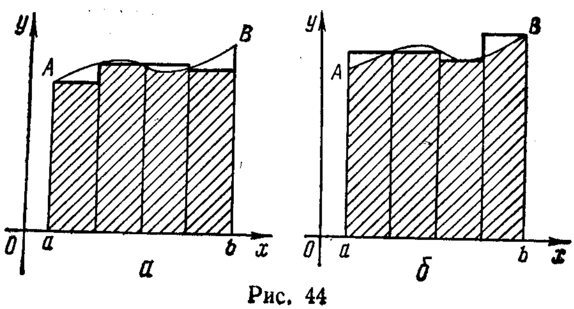

Рис. 44

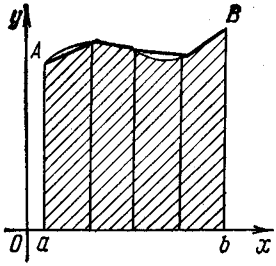

Рис. 45

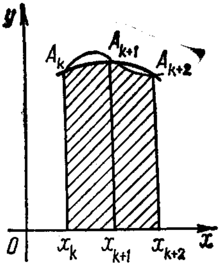

Рис. 46

формула трапецій (рис. 45)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)=$$

$$=\frac{h}{2}(y_0+2y_1+\cdots+2y_{n-1}+y_n); \qquad (2)$$

формула парабол (*формула Сімпсона;* рис. 46), n — парне

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{n-2}+$$

$$+4y_{n-1}+y_n). \qquad (3)$$

Похибки відповідних наближень оцінюють так:

$$|R_n^{(1)}| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n},\quad |R_n^{(2)}| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},$$

$$|R_n^{(3)}| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}, \qquad (4)$$

де M_1, M_2 і M_4 — найбільші значення на $[a;\,b]$ неперервних похідних $|f'|$, $|f''|$ і $|f^{IV}|$ відповідно.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити інтеграл $\int_1^7 \ln x\,dx$ за формулою Ньютона — Лейбніца і за наближеними формулами (1) — (4), розбиваючи проміжок інтегрування на 6 рівних частин і обчислюючи значення з трьома десятковими знаками після коми. Оцінити похибку результатів, одержаних за наближеними формулами.

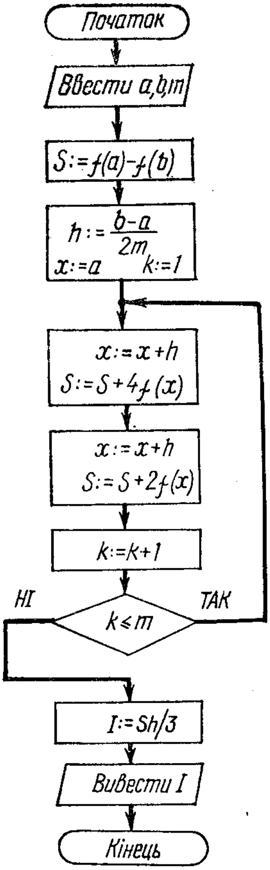

Рис. 47

▲ За формулою Ньютона — Лейбніца (інтегруючи частинами) дістаємо

$$I = \int_1^7 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^7 =$$

$$= 7 \ln 7 - 6 \approx 13{,}622 - 6 = 7{,}622 .$$

Розділивши проміжок інтегрування [1; 7] на 6 рівних частин, знаходимо довжину кожної частини $h = 1$, точки поділу x_k і значення функції $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, 6$, в цих точках:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = \ln 1 = 0;$$
$$x_1 = 2, \quad y_1 = \ln 2 = 0{,}693;$$
$$x_2 = 3, \quad y_2 = \ln 3 = 1{,}099;$$
$$x_3 = 4, \quad y_3 = \ln 4 = 1{,}386;$$
$$x_4 = 5, \quad y_4 = \ln 5 = 1{,}609;$$
$$x_5 = 6, \quad y_5 = \ln 6 = 1{,}792;$$
$$x_6 = 7, \quad y_6 = \ln 7 = 1{,}946.$$

За формулою прямокутників (1) маємо $I \approx \sum_{k=0}^{5} y_k = 6{,}579$. Абсолютна похибка δ за цією формулою дорівнює $| 7{,}622 - 6{,}579 | = 1{,}043$, а відносна $\beta = \frac{1{,}043}{7{,}622} \cdot 100 = 13{,}7$ %.

За формулою прямокутників (1а) знаходимо $I \approx \sum_{k=1}^{6} y_k = 8{,}525$. Абсолютна похибка $\delta = 0{,}903$, а відносна $\beta = 11{,}8$ %.

За формулою трапецій (2) $I \approx \frac{1{,}946}{2} + \sum_{k=1}^{5} y_k = 7{,}552$, $\delta = 0{,}07$, $\beta = 0{,}9$ %.

За формулою Сімпсона (3) дістаємо

$$I \approx \frac{1}{3} (y_0 + y_6 + 4 (y_1 + y_3 + y_5) + 2 (y_2 + y_4)) =$$
$$= 7{,}615, \quad \delta = 0{,}007, \quad \beta = 0{,}09 \text{ \%}.$$

Як бачимо, кожна наступна формула точніша за попередню. Значення інтеграла тим точніші, чим більше n. ▼

2. Скласти програму на мові Бейсік наближеного обчислення інтеграла $\int\limits_a^b e^{x^2}dx$ методом Сімпсона. Користуючись цією програмою, виконати обчислення при $a = 0$, $b = 1$, $n = 10$ і вказати, з якою точністю воно виконано.

▲ Для зручності програмування запишемо формулу (3) у вигляді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{Sh}{3} = \frac{h}{3}(f(a) - f(b) + 4f(a+h) +$$

$$+ 2f(a+2h) + \cdots + 4f(a+(n-1)h) + 2f(b)),\ n = 2m.$$

Структурну схему алгоритму обчислення інтеграла методом Сімпсона зображено на рис. 47. На мові Бейсік програма для обчислення заданого інтеграла матиме вигляд:

```
10 REM Обчислення інтеграла методом Сімпсона
20 INPUT "Уведіть значення A, B, M"; A, B, M
30 DEF FN F (X) = EXP (X^2)
40 S = FN F (A) — FN F (B):    H = (B — A) / 2 / M :
   X = A
50 FOR K = 1 TO M
60 X = X + H : S = S + 4 * FN F (X)
70 X = X + H : S = S + 2 * FN F (X)
80 NEXT K
90 I = S * H/3
100 PRINT "Значення інтеграла I="; I
110 END
```

Пояснення щодо позначень подано у § 7.5, приклад 8. У рядку 20 вводимо межі інтегрування a і b і число інтервалів $m = \frac{n}{2}$. За командою 30 вводимо підінтегральну функцію $f(x) = e^{x^2}$. Команда 40 виконує обчислення початкового значення суми S, а саме: $f(a) - f(b)$, і довжини кроку інтегрування $h = \frac{b-a}{2m}$. За командами 50—80 у циклі підраховуємо наступні значення S. Команда 90 закінчує обчислення інтеграла за формулою $I = \frac{Sh}{3}$, а команда 100 виводить це значення на екран комп'ютера.

Для заданого інтеграла дістаємо на екрані значення 1,462681... . Оцінимо похибку обчислень за відповідною формулою (4). Маємо $y^{IV} = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3)$. Неважко бачити, що $M_4 = \max\limits_{[0;1]} |y^{IV}| < 3 \cdot 10^2$. Тоді

$$|R_{10}^{(3)}| \leqslant \frac{3 \cdot 10^2}{180 \cdot 10^4} < 1{,}7 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Отже, з точністю до 10^{-4} дістаємо $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx = 1{,}4626.$

Для обчислення іншого інтеграла за формулою (3) з використанням поданої вище програми потрібно в рядку 30 записати відповідну підінтегральну функцію. ▼

3. Скласти програму наближеного обчислення інтеграла методом трапецій на ЕОМ і, користуючись нею, обчислити $\int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$ в точністю до 10^{-3}.

▲ Складемо програму для ПМК, записавши формулу (2) у вигляді

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{Sh}{2} = \frac{h}{2}\,(f(a) - f(b) + 2f(a+h) + $$
$$+ 2f(a + 2h) + \cdots + 2f(b)).$$

Регістрову пам'ять розподілимо так: $n \to$ Р0, $a \to$ Р1, $b \to$ Р2, $h \to$ Р3, $S \to$ Р4, 30 → Р7. Тоді програма матиме вигляд, поданий у табл. 2. За командою К ПП 7 викликаємо номер команди, починаючи з якої записується програма обчислення значень f (у даному випадку він дорівнює 30). За командами 00—04 обчислюється $f(a) - f(b)$. Обчислення кроку h здійснюється за командами 06—10. За командами 12—22 в циклі обчислюється сума S. Команда організації циклу F L0 12 виконує такі операції: від вмісту регістра 0 віднімає одиницю і його новий вміст порівнює з нулем. Якщо цей вміст не дорівнює нулю, то машина передає керування за адресою переходу 12; в іншому випадку виконується команда за адресою 24. Цикл повторюється n раз за допомогою команд 22—23. За командами 24—28 завершуємо обчислення інтеграла за формулою $I = \frac{Sh}{2}$. Починаючи з адреси 30 записується підпрограма обчислення значень підінтегральної функції f. Для нашого випадку вона має вигляд

F x^2 1 + F $\sqrt{\ }$.

Число n визначимо з необхідної точності обчислень. Абсолютна похибка результату не повинна перевищувати

Таблиця 2

Адреса	Команда	Код	Зміст операції
00	П → X 1	61	$a \to$ PX
01	К ПП 7	—7	Звернення до підпрограми обчислення $f(a)$
02	П → X 2	62	$b \to$ PX
03	К ПП 7	—7	Обчислення $f(b)$
04	—	11	$f(a) - f(b) \to$ PX, $S := f(a) - f(b)$
05	X → П 4	44	$S \to$ P4
06	П → X 2	62	$b \to$ PX
07	П → X 1	61	$a \to$ PX, $b \to$ PY
08	—	11	$b - a \to$ PX
09	П → X 0	60	$n \to$ PX, $b - a \to$ PY
10	÷	13	$(b-a)/n \to$ PX, $h := (b-a)/n$
11	X → П 3	43	$h \to$ P3
12	П → X 1	61	$a \to$ PX $x := a$
13	П → X 3	63	$h \to$ PX, $x \to$ PY
14	+	10	$x + h \to$ PX, $x := x + h$
15	X → П 1	41	$x \to$ P1
16	К ПП 7	—7	Звернення до підпрограми обчислення $f(x)$
17	2	02	$2 \to$ PX, $f(x) \to$ PY
18	×	12	$2f(x) \to$ PX
19	П → X 4	64	$S \to$ PX, $2f(x) \to$ PY
20	+	10	$S + 2f(x) \to$ PX, $S := S + 2f(x)$
21	X → П 4	44	$S \to$ P4
22	F LO	5Г	Повторення циклу n раз
23	12	12	
24	П → X 4	64	$S \to$ PX
25	П → X 3	63	$h \to$ PX, $S \to$ PY
26	×	12	$Sh \to$ PX
27	2	02	$2 \to$ PX, $Sh \to$ PY
28	÷	13	$Sh/2 \to$ PX, $I := Sh/2$
29	С/П	50	Зупинка. Індикація I
30	...	...	Підпрограма обчислення $f(x)$
...	...	...	
...	В/О	52	

10^{-3}, тобто $|R_n^{(2)}| \leqslant 0{,}001$ (див. формули (4)). Знаходимо другу похідну функції $y = \sqrt{1 + x^2}$; дістаємо $y'' = = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Оскільки $y''' = -\frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \leqslant 0$, $x \in [0;\ 1]$, то $M_2 = f''(0) = 1$ і $|R_n^{(2)}| \leqslant \frac{1}{12n^2} \leqslant 10^{-3}$, звідки $12n^2 \geqslant \geqslant 10^3$, тобто $n \geqslant 9{,}2$. Отже, для обчислення значення інтеграла з заданою точністю досить взяти $n = 10$.

Урахувавши вказівки інструкції для виконання програми (див. § 7.10) і задану точність, дістанемо

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx 1,148. \ ▼$$

Вправи

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-5x}}$ за формулою Ньютона — Лейбніца і за формулами прямокутників і трапецій, розбиваючи проміжок інтегрування на 10 рівних частин. Обчислення виконувати з трьома десятковими знаками після коми. Оцінити похибки результатів, добутих за наближеними формулами.

Відповідь: 0,4; 0,392; 0,406; 0,400.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ за формулою Сімпсона при $n = 6$, користуючись програмами для ЕОМ.

Вказівка. Покласти $\pi = 3,1416$.

Відповідь: 0,612.

3. Визначити $\ln 2$ з точністю до 10^{-4} із співвідношення $\ln 2 = \int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{x}$, обчислюючи інтеграл за формулою Сімпсона.

Відповідь: 0,6931.

4. Ймовірність p попадання значень змінної величини x на відрізок $[a; b]$ обчислюють за формулою $p = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, де $\varphi(x)$ — щільність ймовірності. Обчислити p з точністю до 10^{-4} при $a = 0$ і $b = 0,6$, якщо $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

Відповідь: 0,3019.

5. Обчислити методом трапецій при $n = 10$ такі інтеграли:

$$1)\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}};\quad 2)\ \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{1+\cos x}\,dx;\quad 3)\ \int_0^1 \sin x^2 dx.$$

Оцінити при цьому похибку.

Відповідь: 1) 0,75; 2) 1,04; 3) 0,31.

6. Скласти програму наближеного обчислення на ЕОМ інтегралів методом прямокутників і, користуючись нею, обчислити з точністю до

10^{-2} такі інтеграли:

$$1) \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}; \quad 2) \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}; \quad 3) \int_{0,5}^1 e^{\sqrt{x}} dx.$$

Відповідь: 1) 0,50; 2) 2,59; 3) 1,19.

§ 9.4. Площа плоскої фігури

Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), прямими $x = a$ і $x = b$ і віссю Ox, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Площа фігури, обмеженої графіками функцій f_1 і f_2, прямими $x = a$, $x = b$, які можуть вироджуватись у точки, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $x \in [a; b]$, визначається за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx. \tag{2}$$

Площа криволінійної трапеції у випадку, коли крива, що її обмежує зверху, задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а межі інтегрування визначаються з рівнянь $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, причому $a \leqslant x(t) \leqslant b$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, обчислюється так:

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)\, dt. \tag{3}$$

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, і двома променями $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$, визначається так:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{4}$$

Поясніть, як дістати формулу (3) з (1) і який вигляд мають формули (1) — (3) у випадку, коли криволінійна трапеція спирається на вісь Oy. Вказати умови, яким повинні задовольняти функції $x(t)$ і $y(t)$.

ПРИКЛАДИ

1. Річка тече лугом, утворюючи криву $y = x - x^2$; вісь Ox — лінія шосе. Яка площа лугу між шосе і річкою (одиниця довжини — 1 км)?

▲ За формулою (1), де $f(x) = x - x^2$, $a = 0$, $b = 1$ (рис. 48), маємо

$$S = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\ \text{км}^2.$$

Оскільки 1 га $= 0{,}01$ км², то $S = 16{,}67$ га. ▼

2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x$ і прямою $y = 2 - x$ (рис. 49).

▲ Визначимо абсциси точок перетину прямої з параболою, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 2 - x. \end{cases}$ Маємо $x^2 - 2x - 2 = 0$, звідки $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Згідно з формулою (2), дістаємо

$$S = \int_{-1}^{2} ((2 - x) - (x^2 - 2x))\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}. \ ▼$$

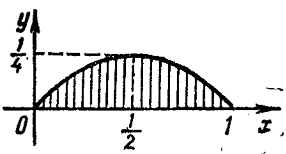

Рис. 48

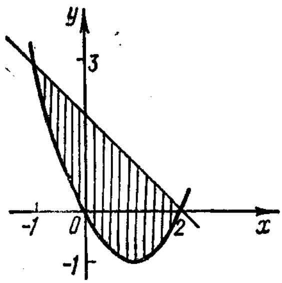

Рис. 49

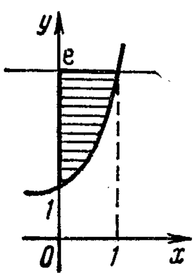

Рис. 50

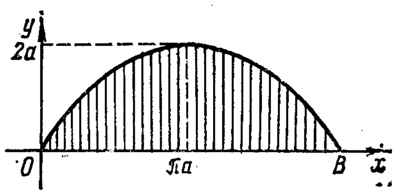

Рис. 51

3. Визначити площу фігури, обмеженої прямою $y = e$, кривою $y = e^x$ і віссю Oy (рис. 50).

▲ Абсцису точки перетину кривої $y = e^x$ і прямої $y = e$ визначаємо з рівняння $e^x = e$, звідки $x = 1$. Застосуємо формулу (2):

$$S = \int_0^1 (e - e^x)\, dx = (ex - e^x)\Big|_0^1 = 1.$$

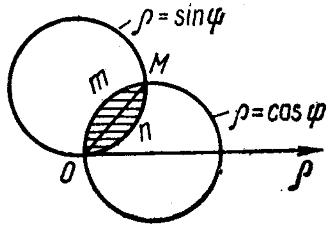

Рис. 52

Однак цю площу можна обчислити по-іншому, розглядаючи дану фігуру відносно осі Oy. Тоді, розв'язуючи рівняння кривої відносно змінної x, тобто $x = \ln y$, маємо

$$S = \int_1^e \ln y\, dy = (y \ln y - y)\Big|_1^e = 1.$$

Тут ми скористались результатом прикладу 2, в), § 8.2. ▼

4. Теплиця має в перерізі форму однієї арки циклоїди, рівняння якої $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рис. 51). Скільки потрібно плівки для затягнення передньої і задньої стінок теплиці, якщо її ширина $OB = 10$ м?

▲ Одну арку циклоїди дістанемо при зміні параметра t від 0 до 2π. Застосовуючи формулу (3), дістаємо

$$S = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(t - \sin t)'\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt = a^2 \left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt \right) = a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2t\Big|_0^{2\pi} \right) =$$

$$= 3\pi a^2.$$

Оскільки $OB = 2\pi a$ (довжина кола, радіус якого a) і $OB = 10$, то $a = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$. Отже, для передньої і задньої стінок теплиці потрібно $2 \cdot 3\pi \cdot \frac{25}{\pi^2} \approx 50$ м^2 плівки. ▼

5. Обчислити площу лунки, обмеженої дугами кіл $\rho = \sin \varphi$ і $\rho = \cos \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

▲ Визначимо полярну координату φ точки перетину даних кіл (рис. 52) з системи рівнянь $\begin{cases}\rho = \sin\varphi, \\ \rho = \cos\varphi.\end{cases}$ Маємо $\sin\varphi = \cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Площа S заданої фігури дорівнює сумі площ криволінійних секторів OmM і OnM. Оскільки ці площі рівні між собою, то досить обчислити одну з них, наприклад площу сектора OnM. Дуга OnM описується кінцем полярного радіуса ρ кола $\rho = \sin\varphi$ при зміні полярного кута від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, тому за формулою (4) маємо

$$S_{OnM} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\varphi) \times$$

$$\times d\varphi = \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}(\pi - 2).$$

Тоді $S = \frac{1}{8}(\pi - 2)$. ▼

Вправи

1. Обчислити площі фігур, обмежених заданими лініями:

1) параболою $y = 3x - x^2$ і віссю Ox;
2) параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $y = x + 4$;
3) кубічною параболою $y = x^3$ і прямою $y = 2x$;
4) параболами $y = x^2$ і $x = y^2$;
5) параболами $y = 1 - x^2$ і $y = x^2 - 7$;
6) дугою синусоїди від $x = 0$ до $x = \pi$ і віссю Ox;
7) кривою $y = \ln x$, віссю Ox і прямою $x = 2$;
8) еліпсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; 9) кривою $\rho = a\cos\varphi$;
10) петлею $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, $-\sqrt{3} \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$;
11) полярною віссю $O\rho$ і одним витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ (рис. 53);
12) кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 54).

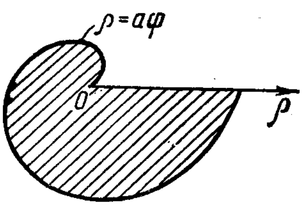

Рис. 53

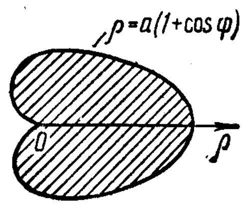

Рис. 54

Відповідь: 1) 4,5; 2) $20\frac{5}{6}$; 3) 2; 4) 1/3; 5) $21\frac{1}{3}$; 6) 2; 7) $2\ln 2 - 1$; 8) πab; 9) $\frac{\pi a^2}{4}$; 10) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 11) $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$; 12) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

2. Обчислити наближено площу фігури, обмеженої координатними осями, прямою $x = 0{,}5$ і кривою $y = e^{\sqrt{x}}$.

Вказівка. Скористатись однією з програм для ЕОМ із § 9.3.
Відповідь: 0,81.

3. Ватерлінія невеликого судна має форму кривої, половина якої задається рівняннями $x = 2 + 2t - 2\cos\frac{\pi t}{10}$, $y = 2\sin\frac{\pi t}{10}$, $0 \leqslant t \leqslant 10$. Визначити площу перерізу, обмеженого ватерлінією.
Відповідь: $160/\pi + 4\pi$.

§ 9.5. Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Якщо навколо осі Ox обертається фігура, обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, $f_2(x) \geqslant f_1(x) \geqslant 0$, і прямими $x = a$ і $x = b$, то об'єм утвореного тіла обертання

$$V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\,dx. \qquad (2)$$

Запишіть аналогічні формули для випадку, коли фігура обертається навколо осі Oy, і вигляд формули (1), якщо криву, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задано параметрично.

ПРИКЛАДИ

1. Визначити об'єм діжки за розмірами перерізу, вказаного на рис. 55, де верхня і нижня криві — параболи. Обчислити цей об'єм при $r = 0{,}75$ м, $R = 1$ м і $l = 3$ м.

▲ Скористаємось формулою (1), де $y = -px^2 + b$ — рівняння верхньої параболи, $a = -\frac{l}{2}$, $b = \frac{l}{2}$. Спочатку знайдемо загальну формулу для обчислення об'єму діжки, враховуючи, що тіло симетричне відносно осі Oy. Маємо

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^{\frac{l}{2}}(-px^2+b)^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{l}{2}}(p^2x^4-2pbx^2+b^2)\,dx =$$

$$= \pi\left(\frac{p^2}{5}x^5-\frac{2}{3}pbx^3+b^2x\right)\Bigg|_0^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{15}\left(\frac{3}{32}p^2l^5-\frac{5}{4}pbl^3+\frac{15}{2}b^2l\right).$$

Тоді

$$V = \frac{\pi}{15\cdot 16}(3p^2l^5-40pbl^3+15\cdot 16b^2l).$$

Оскільки $y=R$ при $x=0$ і $y=r$ при $x=\frac{l}{2}$, то $b=R$ і $p=\frac{4(R-r)}{l^2}$, тобто рівняння параболи має вигляд $y = \frac{4(r-R)}{l^2}x^2+R$. Отже,

$$V = \frac{\pi l}{15}(3(R-r)^2-10R(R-r)+15R^2) =$$

$$= \frac{\pi l}{15}(8R^2+4Rr+3r^2).$$

При заданих значеннях $r=0{,}75$, $R=1$ і $l=3$ дістанемо $V=2{,}54\pi\approx 8$ м³. ▼

2. Оглядовий колодязь, виготовлений з бетону, має форму зрізаного конуса, вузька частина якого закінчується люком. Яка маса колодязя, якщо його розміри (в міліметрах) такі, як на рис. 56 (густина бетону 2,45 т/м³)?

▲ Шукане тіло можна розглядати як таке, що утворюється при обер-

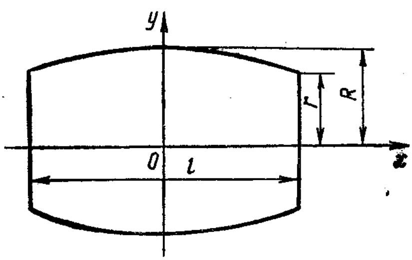

Рис. 55

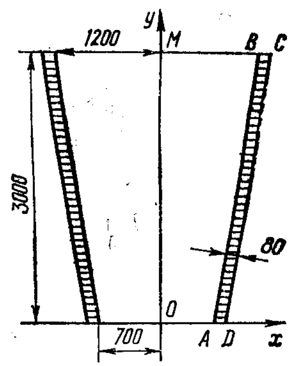

Рис. 56

танні паралелограма $ABCD$ навколо осі Oy. Тоді об'єм стінок колодязя дорівнюватиме різниці об'ємів двох тіл, утворених обертанням навколо осі Oy трапецій $ODCM$ і $OABM$. Знайдено рівняння відрізків AB і CD, покладаючи, що AD дорівнює товщині стінок колодязя, тобто $AD = 0{,}08$ м. (Далі у цій задачі всі розміри записуватимемо в метрах.) Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A\ (0{,}7;\ 0)$ і $B\ (1{,}2;\ 3)$, має вигляд $\frac{y-0}{3-0} = \frac{x-0{,}7}{1{,}2-0{,}7}$, звідки $y = 6x - 4{,}2$ або $x = \frac{1}{6}y + 0{,}7$. Тоді CD задається рівнянням $y = 6\ (x - 0{,}08) - 4{,}2 = 6x - 4{,}68$ або $x = \frac{1}{6}y + 0{,}78$. Формулу для обчислення об'єму стінок колодязя запишемо у вигляді

$$V = \pi \int_0^3 (x_1^2(y) - x_2^2(y))\, dy.$$

Тоді

$$V = \pi \int_0^3 \left(\left(\frac{1}{6}\ y + 0{,}78\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\ y + 0{,}7\right)^2\right) dy =$$

$$= \frac{2\pi}{25} \int_0^3 \left(\frac{1}{3}\ y + 1{,}48\right) dy = \frac{2\pi}{25}\left(\frac{y^2}{6} + 1{,}48y\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{2\pi}{25} \cdot 5{,}94 \approx 1{,}49\ \text{м}^3.$$

Враховуючи густину γ бетону, дістаємо масу колодязя: $m = V\gamma = 1{,}49 \cdot 2{,}45 \approx 3{,}65$ т. ▼

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ (див. рис. 32).

▲ Використаємо формулу (2), де $a = 0$, $b = 1$, $f_2 = \sqrt{x}$ і $f_1 = x^2$. Маємо

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)\, dx = \frac{3\pi}{10}. \ ▼$$

Вправи

1. Визначити об'єм параболоїда обертання, утвореного обертанням навколо осі Ox «параболічного трикутника», обмеженого верхньою половиною параболи $y^2 = 2px$, віссю Ox і прямою $x = a$.

Відповідь: $\pi a^2 p$.

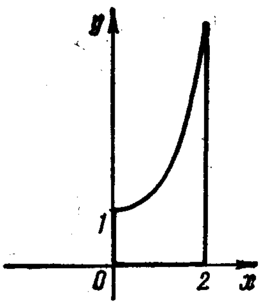

Рис. 57

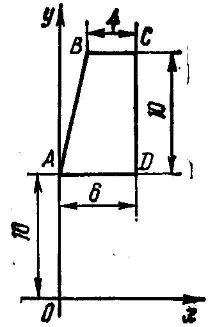

Рис. 58

2. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених вказаними лініями:

1) $y = x^3, y = 0, x = 0, x = 2$; 2) $y = 2x - x^2, y = 0$;

3) ланцюговою лінією $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, y = 0, x = 0$ і $x = 2$ (рис. 57);

4) $y = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$;

5) циклоїдою $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, y = 0$.

Відповідь: 1) $\dfrac{128}{7}\pi$; 2) $\dfrac{16}{15}\pi$; 3) $\dfrac{\pi}{8}(8 + e^4 - e^{-4})$; 4) $\dfrac{\pi^2}{2}$; 5) $5\pi^2$.

3. Трамвайне депо має вигляд половини тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox прямокутної трапеції $ABCD$, розміри якої в метрах указано на рис. 58. Визначити місткість депо.

Відповідь: $1003{,}3\pi \approx 3152$ м^3.

§ 9.6. Довжина дуги кривої. Площа поверхні обертання

Якщо функції f і f' неперервні на відрізку $[a; b]$, то довжина відповідної дуги кривої

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (1)$$

Якщо криву AB задано параметрично рівняннями $x = x(t), y = y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції x, y, x' і y' неперервні на $[\alpha; \beta]$, причому точці A відповідає значення параметра $t = \alpha$, а точці B — значення $t = \beta$, то довжина цієї кривої

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (2)$$

Якщо криву задано в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, то її довжина

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi, \qquad (3)$$

де функції ρ і ρ' неперервні на відрізку $[\varphi_1; \varphi_2]$.

Площа поверхні, що утворюється при обертанні навколо осі Ox кривої $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \geqslant 0$, обчислюється за формулою

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \qquad (4)$$

де функції f і f' неперервні на відрізку $[a; b]$.

Якщо криву AB задано параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції x, y, x' і y' неперервні на $[\alpha; \beta]$, то

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt, \qquad (5)$$

причому значення α параметра t відповідає точці A, а значення β — точці B.

Поясніть, як дістати формулу (2) з (1), а формулу (5) з (4).

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити довжину напівкубічної параболи $y^2 = x^3$ між точками з абсцисами $x = 1$ і $x = 2$.

▲ Диференціюючи рівняння кривої, знаходимо $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x$. Тоді за формулою (1)

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{27}(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}). \ ▼$$

2. У шкільній майстерні виготовляють огорожу для клумби. Яка її довжина, якщо рівняння відповідної кривої має вигляд $x = 2\sin t + \sqrt{5}\cos t$, $y = \sqrt{5}\sin t - 2\cos t$ (за одиницю довжини береться 1 м)?

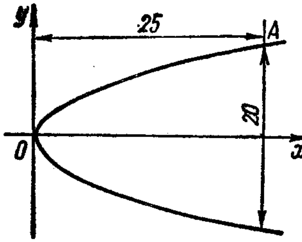

Рис. 59

▲ Оскільки криву задано параметрично, скористаємось формулою (2). Для цього знаходимо $x'(t) = 2\cos t - \sqrt{5}\sin t$, $y'(t) = \sqrt{5}\cos t + 2\sin t$, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9$. Тоді $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9}\,dt = 3t\big|_0^{2\pi} = 6\pi \approx 19$ м.

Аналізуючи рівняння заданої кривої, з'ясуйте, яку форму має клумба і як обчислити довжину огорожі іншим способом. ▼

3. Обчислити довжину кардіоїди $\rho = 1 + \cos\varphi$ (див. рис. 54).

▲ Задана крива симетрична відносно полярної осі, тому при зміні кута φ від 0 до π полярний радіус опише половину кривої. Оскільки $\rho' = -\sin\varphi$, обчислюємо за формулою (3) довжину кривої:

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8. \ ▼$$

4. Розміри перерізу параболічного дзеркала вказано на рис. 59. Визначити площу поверхні дзеркала.

▲ Задана поверхня утворюється при обертанні верхньої вітки параболи — кривої OA навколо осі Ox. Рівняння цієї кривої $y = \sqrt{2px}$. Оскільки при $x = 25$ маємо $y = 10$, то, підставляючи ці значення у рівняння параболи, знаходимо $p = 2$. Отже, рівняння кривої OA має вигляд $y = 2\sqrt{x}$. Знайшовши $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, дістанемо за формулою (4) площу поверхні дзеркала:

$$P = 2\pi\int_0^{25} 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 4\pi\int_0^{25} (x+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x+1) =$$

$$= 4\pi\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{25} = \frac{8}{3}\pi(\sqrt{26^3} - 1) \approx 1105{,}44. \ ▼$$

5. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (див. приклад 4, § 9.4).

▲ За формулою (5) дістаємо

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt =$$

$$= 8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 8\pi\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 8\pi\left(-2\cos\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi. ▼$$

6. Обчислити наближено з точністю до 0,01 довжину частини гіперболи $y=\frac{1}{x}$ між точками з абсцисами $x = 0{,}5$ і $x = 1{,}5$ і площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox цієї кривої.

▲ За формулою (1), де $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=\frac{1}{x^2}$, $a = 0{,}5$ і $b = 1{,}5$, дістаємо

$$l=\int_{0,5}^{1,5}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx=\int_{0,5}^{1,5}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}dx.$$

Для наближеного обчислення цього інтеграла використаємо програму обчислення інтеграла методом трапецій (табл. 2, § 9.3), в якій, починаючи з команди 30, запишемо підпрограму обчислення значень підінтегральної функції $y=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$ у вигляді F x^2 F 1/x F Bx F x^2 1 + F $\sqrt{\ }$ × В/О. Поклавши $n = 10$, знаходимо $h = 0{,}1$ і, враховуючи похибку для методу трапецій, дістаємо $l = 1{,}74$. Можна також використати програму, складену для методу Сімпсона на мові Бейсік (§ 9.3).

Площу поверхні обертання обчислимо за формулою (4):

$$P=2\pi\int_{0,5}^{1,5}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx=2\pi\int_{0,5}^{1,5}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx.$$

У цьому випадку підпрограму для обчислення значень підінтегральної функції можна записати так: F x^2 В↑ F Bx × F 1/x ↔ F x^2 1 + F $\sqrt{\ }$ × В/О. Обчислюючи інтеграл аналогічно попередньому, маємо $I = 2{,}20$. Тоді $P = 2\pi\cdot 2{,}2 \approx 13{,}82$. ▼

Вправи

1. Обчислити довжини дуг таких кривих: 1) параболи $y = \frac{x^2}{2} - 1$ між точками її перетину з віссю Ox; 2) кривої, заданої параметрично рівняннями $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \ln 2$; 3) $y = 2 + \ln \cos x$ між точками з абсцисами $x = 0$ і $x = \pi/6$; 4) першого витка спіралі $\rho = e^{3\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; 5) кола $\rho = 2a \sin \varphi$.

Відповідь: 1) $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{2} \ln 3$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{3} \times (e^{6\pi} - 1)$; 5) $2\pi a$.

2. Обчислити наближено з точністю до 0,01 довжину дуги синусоїди $y = \sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

В к а з і в к а. Скористатись програмою на мові Бейсік для методу Сімпсона, в якій у рядку 30 записати DEF FN F (X) = SQR (1 + COS (X)^2) і покласти $M = 6$, $A = 0$ і $B = 3{,}1416$.

Відповідь: 3,82.

3. Натягнений між точками A і B дріт приблизно має форму параболи (див. рис. 33). Обчислити довжину цього дроту, якщо $AB = 12$ м, $OC = 0{,}5$ м.

Відповідь: $\sqrt{37} + 36 \ln((1 + \sqrt{37})/6) \approx 12{,}06$ м.

4. Обчислити площі поверхонь, утворених обертанням навколо осі Ox таких кривих:

1) параболи $y^2 = x + 2$ від вершини до точки з абсцисою $x = 0$, $y \geqslant 0$;

2) кубічної параболи $y = \frac{x^3}{3}$ від $x = 0$ до $x = 1$;

3) дуги синусоїди від $x = 0$ до $x = 1$;

4) дуги астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ (рис. 60).

Відповідь: 1) $\frac{13}{3}\pi$; 2) 0,64; 3) $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$; 4) $\frac{6}{5}\pi$.

5. Рятівний круг має форму тора (поверхні, утвореної обертанням кола навколо осі, що лежить у площині цього кола і не перетинає її).

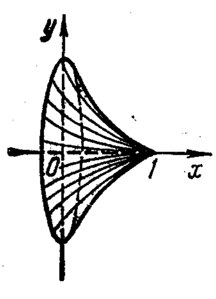

Рис. 60

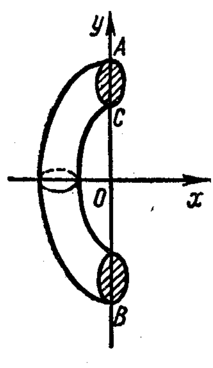

Рис. 61

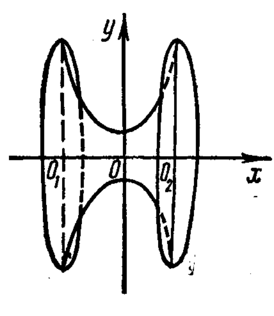

Рис. 62

Обчислити площу його поверхні, якщо зовнішній діаметр $AB = 75$ см, а діаметр поперечного перерізу $AC = 12$ см (рис. 61).

Відповідь: $756\pi^2$ см^2.

6. Мильна плівка, натягнена між двома колами однакового діаметра, набуває форми катеноїда — поверхні, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ навколо осі Ox (рис. 62). Визначити площу цієї поверхні, якщо відстань між колами $OO_1 = l$, і обчислити її при $l = 6$ і $a = 0{,}5$.

Відповідь: 63 923.

§ 9.7. Застосування визначеного інтеграла у фізиці

Координати центра маси і моменти інерції однорідної спрямлюваної дуги плоскої кривої $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (лінійна густина $\gamma = 1$), визначають за формулами

$$x_C = \frac{M_y}{l} = \frac{1}{l}\int_a^b x\,dl, \quad y_C = \frac{M_x}{l} = \frac{1}{l}\int_a^b y\,dl,$$

$$I_x = \int_a^b y^2 dl, \quad I_y = \int_a^b x^2 dl, \qquad (1)$$

де l — довжина цієї дуги, $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ — диференціал дуги, M_x, M_y, I_x і I_y — статичні моменти і моменти інерції даної дуги відносно осей Ox і Oy відповідно.

Координати центра маси і моменти інерції криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, віссю Ox, прямими $x = a$ і $x = b$ (густина $\gamma = 1$), обчислюють за формулами

$$x_C = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx, \quad y_C = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx,$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 y\,dx, \qquad (2)$$

де S — площа криволінійної трапеції, M_x і M_y, I_x і I_y — статичні моменти і моменти інерції заданої фігури відносно осей Ox і Oy відповідно.

Теорема 1 (Г у л ь д і н а). *Площа поверхні, утвореної обертанням дуги плоскої кривої навколо деякої осі, що лежить в її площині і не перетинає її, дорівнює добутку довжини даної дуги на довжину кола, описаного при цьому обертанні центром маси дуги.*

Теорема 2 (Г у л ь д і н а). *Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, що лежить в її площині і не перетинає її, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, яке описує центр маси даної фігури.*

Дайте означення спрямлюваної кривої. Запишіть формули (1) і (2) для випадку, коли криву задано параметрично і коли крива і плоска фігура є неоднорідними.

Якщо тіло рухається прямолінійно із змінною швидкістю $v(t)$, то шлях s, пройдений тілом за час руху від $t = t_1$ до $t = t_2$, визначається за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{3}$$

Маса прямолінійного стержня на ділянці від $l = l_1$ до $l = l_2$ із змінною густиною $\gamma(l)$ визначається за формулою

$$m = \int_{l_1}^{l_2} \gamma(l)\,dl. \tag{4}$$

Кількість електрики Q, що проходить через поперечний переріз провідника із змінним струмом $I(t)$ за час від t_1 до t_2, обчислюється так:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt. \tag{5}$$

Робота A, виконана змінною силою $F(x)$, напрямленою уздовж осі Ox, при переміщенні матеріальної точки від $x = a$ до $x = b$ визначається так:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{6}$$

Сила тиску P на пластинку висотою H, занурену вертикально у рідину, визначається за формулою

$$P = \int_0^H q(x)\,dx, \tag{7}$$

де $q(x)$ — сила тиску на частини горизонтального шару пластинки, розміщеної на глибині x, починаючи від поверхні рідини.

Вказати умови, яким повинні задовольняти підінтегральні функції у формулах (3) — (7). Доведіть ці формули, користуючись означенням визначеного інтеграла і відповідними фізичними законами.

ПРИКЛАДИ

1. Визначити статичні моменти, моменти інерції відносно координатних осей і координати центра маси однорідної дуги кола $x^2 + y^2 = 4$, розташованої в першому квадранті.

▲ Довжина чверті кола ($r = 2$) $l = \frac{\pi r}{2} = \pi$. Знаходимо $y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ і $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$. За формулами (1) дістаємо

$$M_y = \int_0^2 x\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\int_0^2 \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = -2\sqrt{4-x^2}\Big|_0^2 = 4,$$

$$x_C = \frac{M_y}{l} = \frac{4}{\pi},$$

$$M_x = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\int_0^2 dx = 4,$$

$$y_C = \frac{M_x}{l} = \frac{4}{\pi},$$

$$I_x = \int_0^2 (4-x^2)\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{4\pi}{4} = 2\pi,$$

$$I_y = \int_0^2 x^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -2\int_0^2 \frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= -2\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx + 8\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\pi.$$

При обчисленні I_x і I_y ми скористались значенням інтеграла $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{\pi a^2}{4}$ (див. приклад 5, а), § 9.2). Як бачимо, $x_C = y_C$. Це випливає з того, що задана дуга симетрична відносно бісектриси $y = x$. ▼

2. Визначити центр маси плоскої фігури, обмеженої кривими $y_1 = x^2$ і $y_2 = \sqrt{x}$, і її моменти інерції I_x і I_y (див. рис. 32).

▲ Площа заданої фігури $S = \frac{1}{3}$ (вправа 1, 4), § 9.4). За формулами (2) знаходимо

$$x_C = \frac{1}{S}\int_0^1 x(y_2 - y_1)\,dx = 3\int_0^1 (x\sqrt{x} - x^3)\,dx = \frac{9}{20},$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^1 (y_2^3 - y_1^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x\sqrt{x} - x^6)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{35}.$$

Оскільки фігура симетрична відносно бісектриси $y = x$, то $y_C = \frac{9}{20}$ і $I_y = \frac{3}{35}$. ▼

3. Знайти координати центра маси фігури, обмеженої дугою еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $y \geqslant 0$, і віссю Ox.

▲ Маємо $x_C = 0$ (поясніть, чому). Ураховуючи, що площа фігури, обмеженої половиною еліпса, дорівнює $\frac{\pi ab}{2}$ (вправа 1, 8), § 9.4), дістаємо з (2), виконавши заміну змінної,

$$y_C = \frac{1}{2S}\int_{-a}^{a} y^2 dx = \frac{1}{\pi ab}\int_{\pi}^{0} b^2\sin^2 t\cdot a\cdot d(\cos t) =$$

$$= \frac{b}{\pi}\int_{\pi}^{0}(1 - \cos^2 t)\,d(\cos t) = \frac{b}{\pi}\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_{\pi}^{0} = \frac{4b}{3\pi}. \ ▼$$

4. Камера шини велосипеда має форму тора (див. рис. 61), зовнішній діаметр якого $AB = 48$ см, а діаметр поперечного перерізу $AC = 4$ см. Користуючись теоремами Гульдіна, обчислити площу поверхні і об'єм камери.

▲ Тіло, що розглядається в задачі, утворюється обертанням навколо осі Ox круга $x^2 + (y - 22)^2 \leqslant 4$ з центром у точці (0; 22) і радіусом $r = 2$. Зрозуміло, що $x_C = 0$ і $y_C = 22$. Тоді за першою теоремою Гульдіна маємо

$$P = 2\pi r\cdot 2\pi y_C = 2\pi\cdot 2\cdot 2\pi\cdot 22 = 176\pi^2 \text{ см}^2,$$

а за другою —

$$V = \pi r^2\cdot 2\pi y_C = 176\pi^2 \text{ см}^3. \ ▼$$

5. Яку роботу потрібно затратити, щоб розтягнути пружину на 6 см, якщо сила в 1 Н розтягує її на 2 см?

▲ У відповідності з законом Гука, сила пропорційна розтягу пружини: $F = kx$, де $k > 0$ — коефіцієнт пропорційності. Тоді за формулою (6) при $a = 0$, $b = 6$ см $= 0{,}06$ м дістаємо $A = \int_0^{0,06} kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,06} = 18 \cdot 10^{-4}k$. Оскільки при $F = 1$ Н маємо $x = 2$ см $= 0{,}02$ м, то $k = \frac{1}{0{,}02} = 50$. Отже, остаточно маємо $A = 50 \cdot 18 \cdot 10^{-4} = 0{,}09$ Дж. ▼

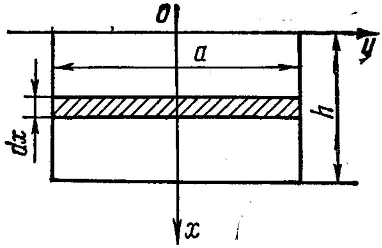

Рис. 63

6. Два тіла почали рухатись по одній прямій в одному напрямі в один і той же час. Одне тіло рухалось з швидкістю $v_1 = 15t^2 + 6t$ (м/с), друге з швидкістю $v_2 = 6t$ (м/с). Через скільки секунд відстань між ними дорівнюватиме 320 м?

▲ За формулою (3) дістаємо шлях s_1, пройдений першим тілом за t секунд після початку руху: $s_1 = \int_0^t (15t^2 + 6t)\,dt = (5t^3 + 3t^2)\Big|_0^t = 5t^3 + 3t^2$. Аналогічно обчислюємо шлях s_2, пройдений другим тілом за той самий час: $s_2 = \int_0^t 6tdt = 3t^2$. Через t секунд відстань між тілами дорівнюватиме $s_1 - s_2 = 5t^3$. Тоді час, через який відстань між тілами становитиме 320 м, визначимо з умови $5t^3 = 320$, тобто $t = 4$ с. ▼

7. Обчислити тиск води на прямокутні ворота шлюзу, ширина якого $a = 25$ м і глибина $h = 15$ м, якщо їх верхня грань лежить на поверхні води (рис. 63).

▲ За законом Паскаля тиск P рідини, густина якої γ, на площадку S при глибині занурення h дорівнює γghS, де $g = 9{,}807$ м/с^2 — прискорення вільного падіння. Уведемо систему координат, як показано на рисунку, і розглянемо елементарну прямокутну площадку, що міститься на глибині x і має основу a. Її площа $dS = adx$, а тиск на неї $dP = \gamma gxdS$. Отже, тиск води на всю пластинку $P = \int_0^h \gamma gxadx = a\gamma g\frac{h^2}{2}$. Оскільки $a = 25$ м, $h = 15$ м, $\gamma = 1000$ кг/м^3, то $P = 2{,}7 \cdot 10^7$ Н.

Цю задачу можна розв'язати за формулою (7). Зробіть це самостійно. ▼

Вправи

1. Обчислити вказані статичні моменти і моменти інерції:

1) відрізка прямої $y = 3$, розміщеного між точками з абсцисами $x = 0$ і $x = 4$, $M_x = ?$, $M_y = ?$, $I_x = ?$, $I_y = ?$;

2) дуги параболи $y = \sqrt{x}$ між точками, де $x = 0$ і $x = 2$, $M_x = ?$;

3) дуги косинусоїди $y = \cos x$ від $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, $M_x = ?$.

Відповідь: 1) 12; 8; 36; $\frac{64}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$.

2. Визначити координати центра маси: 1) півкола $y = \sqrt{9 - x^2}$;

2) дуги астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$;

3) лінії провисання дроту $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ від $x = 0$ до $x = a$.

Відповідь: 1) $x_C = 0$, $y_C = \frac{6}{\pi}$; 2) $x_C = y_C = \frac{4}{5}$; 3) $x_C = \frac{2a}{e + 1}$, $y_C = \frac{a(e^4 + 4e^2 + 1)}{4e(e^2 - 1)}$.

3. Визначити статичний момент і момент інерції трикутника, основа якого a і висота h, відносно його основи.

Відповідь: $M_a = \frac{ah^2}{6}$, $I_a = \frac{ah^3}{12}$.

4. Визначити центр маси фігури, обмеженої лініями: 1) параболою $y = 2x - x^2$ і прямою $y = 0$; 2) прямими $x + y = 2$, $x = 0$ і $y = 0$; 3) напівкубічною параболою $y^2 = x^3$ і прямою $x = 1$.

Вказівка. Для обчислення x_C у вправі 3) використайте формулу з прикладу 2, де $y_2 = \sqrt{x^3}$, $y_1 = -\sqrt{x^3}$.

Відповідь: 1) $x_C = 1$, $y_C = 2/5$; 2) $x_C = y_C = 2/3$; 3) $x_C = 5/7$, $y_C = 0$.

5. Квадрат, сторона якого a, обертається навколо прямої, що проходить через його вершину і є перпендикулярною до його діагоналі. Користуючись теоремами Гульдіна, обчислити об'єм тіла обертання і площу його поверхні.

Відповідь: $V = \pi a^3\sqrt{2}$, $P = 4\pi a^2\sqrt{2}$.

6. Користуючись теоремою Гульдіна, знайти центр маси півкруга $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, розміщеного над віссю Ox.

Відповідь: $x_C = 0$, $y_C = \frac{4a}{3\pi}$.

7. Тіло, кинуте з початковою швидкістю $v_0 = 0$, падає на Землю з швидкістю 100 м/с. З якої висоти скинуто тіло, якщо нехтувати опором повітря?

Відповідь: $v = v_0 + gt$, $h = 0{,}51$ км.

8. Ліфт рухається з швидкістю $v = 4t + 3$ (м/с). На яку висоту він підніметься через 3 с після включення?

Відповідь: 27 м.

9. Обчислити масу прямолінійного стержня, якщо його лінійна густина $\gamma = 2l + 3$ (кг/м), $0 \leqslant l \leqslant 10$.

Відповідь: 130 кг.

10. Кінець труби, занурений у рідину з густиною γ, закритий заслінкою. Визначити тиск на заслінку, якщо радіус труби r, а глибина її занурення h.

Відповідь: $P = \gamma g \pi r^2 h$, $g = 9{,}8$ м/с^2.

11. Обчислити загальний тиск води на дно і стінки акваріума, який має форму прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 0,9 і 0,6 м, а висота 0,4 м. Акваріум повністю заповнено водою.

Відповідь: 863,02 Н.

12. Протягом 5 с сила струму в провіднику змінювалась за законом $I(t) = 6t^2 + 3$ (А). Яка кількість електрики пройшла через провідник за цей час?

Відповідь: 265 Кл.

13. Пружина розтягується на 0,02 м під дією сили 50 Н. Яку роботу слід затратити, щоб розтягнути її на 0,1 м?

Відповідь: 12,5 Дж.

14. Для деформації ресори на 1 см виконується робота в 2 Дж. Яку роботу слід затратити для її деформації на 3 см?

Відповідь: 900 Дж.

15. Обчислити роботу, необхідну для викачування води з ями, глибина якої 6 м, а сторона квадратного перерізу дорівнює 2 м.

Відповідь: 706 104 Дж.

16. Яку роботу необхідно затратити, щоб насипати піщану купу конічної форми з радіусом основи 1,2 м і висотою 1 м, якщо щільність піску $\gamma = 2$ г/см^3 і береться він з поверхні Землі?

Відповідь: 7387 Дж.

РОЗДІЛ 10. РЯДИ

Ряди в математичному аналізі виступають як основний засіб дослідження функцій. Розкладання функцій у степеневий ряд (§ 10.4) знаходить широке застосування в наближених обчисленнях і є однією з основ наближених методів математичного аналізу. Воно дає спосіб ефективного обчислення значень функцій, визначених інтегралів і т. п. (§ 10.5). При цьому зручно користуватися ЕОМ.

У різноманітних застосуваннях математичного аналізу, особливо в математичній фізиці, електротехніці, теорії пружності, велику роль відіграють тригонометричні ряди Фур'є (§ 10.6).

Для успішного оволодіння матеріалом слід глибоко засвоїти питання збіжності числових рядів, уміти користуватися ознаками збіжності рядів з дійсними і комплексними членами та визначати область збіжності степеневих рядів (§ 10.1—10.3).

§ 10.1. Числові ряди. Ознаки збіжності додатних рядів

Нехай (u_n) — задана послідовність дійсних або комплексних чисел. Вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ називаються *членами ряду*, $u_n = f(n)$ — *загальним членом*.

Суму перших n членів ряду (1) називають *n-ю частковою сумою ряду* і позначають S_n, отже, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S при цьому називається *сумою ряду*. Якщо $S = \pm\infty$ або взагалі не існує границя послідовності (S_n) при $n \to \infty$, то ряд називається *розбіжним*.

Розглянемо такі ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots, \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \qquad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots. \qquad (4)$$

Ряд (2) утворений з членів геометричної прогресії. Він збігається при $|q| < 1$ і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$ і розбігається при $|q| \geqslant 1$.

Ряд (3) називається *гармонійним*, він розбігається ($S = +\infty$).

Ряд (4) називається *узагальненим гармонійним*. Він збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leqslant 1$ (при $\alpha = 1$ маємо ряд (3)).

Якщо ряд (1) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (*необхідна ознака збіжності ряду*).

Якщо $u_n \geqslant 0$, то ряд називається *додатним*. Розглянемо такі ознаки збіжності додатних рядів.

I. Нехай маємо два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (A) \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (B).$$

а) Якщо $u_n \leqslant v_n$, $n \in \mathbb{N}$, то із збіжності ряду (В) випливає збіжність ряду (А), а з розбіжності ряду (А) випливає розбіжність ряду (В) *(перша ознака порівняння)*.

б) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = r$, $0 < r < +\infty$, то ряди (А) і (В) одночасно збігаються або розбігаються *(друга ознака порівняння)*.

II. *Ознака Д'Аламбера*. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ існує (скінченна або нескінченна) границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D, \tag{5}$$

то при $D < 1$ ряд збігається, а при $D > 1$ розбігається.

III. *Ознака Коші*. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ існує (скінченна або нескінченна) границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K, \tag{6}$$

то при $K < 1$ ряд збігається, а при $K > 1$ розбігається.

Поясніть, чи можна користуватися ознаками Д'Аламбера і Коші, якщо числа D і K дорівнюють 1. Сформулюйте основні властивості числових рядів.

ПРИКЛАДИ

1. Нехай $u_n = \frac{2^n}{n^2 + 1}$. Записати п'ять перших членів ряду.

▲ При $n = 1$ маємо $u_1 = \frac{2}{2} = 1$, при $n = 2$ дістаємо $u_2 = \frac{2^2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5}$. Аналогічно дістаємо $u_3 = \frac{4}{5}$, $u_4 = \frac{16}{17}$, $u_5 = \frac{16}{13}$. ▼

2. Записати загальний член ряду $\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{10}{3^4} + \ldots$.

▲ Чисельники дробів утворюють арифметичну прогресію 1, 4, 7, ...; n-й член її знайдемо за формулою $a_n = a_1 + d(n - 1)$, де $a_1 = 1$, $d = 3$. Отже, $a_n = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$. Знаменники дробів утворюють геометричну прогресію: 3, 3^2, 3^3, ...; n-й член цієї прогресії $b_n = 3^n$. Отже, $u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{3n-2}{3^n}$.

Зауваження. Для одного й того ж ряду n-й член можна записати по-різному (див. зауваження до прикладу 2, § 5.3). ▼

3. Чи збігаються такі ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i\frac{n}{n+4}\right)$?

▲ Використаємо необхідну умову збіжності ряду:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, тому ряд розбіжний;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2 \neq 0$ і ряд розбіжний;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i\frac{n}{n+4}\right) = 0 + i = i \neq 0$, отже, ряд розбіжний. ▼

4. Дослідити на збіжність і знайти суми рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + i\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Скільки членів ряду а) потрібно взяти, щоб його суму обчислити з точністю до 0,01?

▲ а) Оскільки u_n можна подати у вигляді $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, то часткову суму S_n можна записати так:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \dots$$
$$\dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Тоді $S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$ і ряд збігається.

З'ясуємо, починаючи з якого n виконується нерівність $|S - S_n| < 0{,}01$. Маємо

$$|S - S_n| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right| = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Для забезпечення вказаної точності необхідно виконання нерівності $\frac{1}{(n+1)^2} < 0{,}01$. Розв'язуючи її відносно n, дістаємо, що n повинно бути більше 9. Отже, треба взяти 10 членів ряду.

б) У даному випадку $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ і $S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ і ряд розбігається.

в) Маємо ряд з комплексними членами, де $u_n = a_n + ib_n$, $a_n = \frac{1}{2^n}$ і $b_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Тоді

$$S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + i\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + i\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 + i$. Отже, ряд збіжний. ▼

5. Дослідити на збіжність ряди за ознакою порівняння:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 5^n - 4}$.

▲ а) Скористаємось першою ознакою порівняння рядів. Оскільки $\frac{1}{3^n + 2} < \frac{1}{3^n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збігається (його члени утворюють нескінченну геометричну прогресію, знаменник якої $q = \frac{1}{3} < 1$), то й заданий ряд збігається.

б) Маємо розбіжний ряд, оскільки $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається.

в) Порівняємо заданий ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

то за другою ознакою порівняння дістаємо, що наш ряд розбігається.

г) Порівняємо заданий ряд з рядом, у якого загальний член $v_n = \frac{1}{5^n}$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{2 \cdot 5^n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - \frac{4}{5^n}} = \frac{1}{2},$$

тому заданий ряд збігається (обгрунтуйте цей висновок). ▼

6. Користуючись ознакою Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}; \quad \text{в)} \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \ldots.$$

▲ а) Маємо

$$u_n = \frac{2^n}{n^3}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \text{ і } D = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^3}{2^n (n+1)^3} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 2.$$

Оскільки $D > 1$, то ряд розбігається.

б) $u_n = \frac{5^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$; $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!\, 5^n} =$ $= 5 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Тут $D < 1$, отже, ряд збігається.

в) Маємо $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots 3n}$, $u_{n+1} =$ $= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots 3n(3n+3)}$; $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2}{3} < 1$. Ряд збігається. ▼

7. Дослідити на збіжність ряди, користуючись ознакою Коші:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{5n}.$$

▲ а) Маємо $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1$. Ряд збіжний.

б) $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$. Ряд розбіжний.

в) $K = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} < 1$. Ряд збіжний. ▼

Вправи

1. Записати чотири перших члени ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}+\frac{i}{n^3}\right)$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n^2}{n+2}$.

2. Записати загальний член ряду:

1) $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\dots$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\dots$;

3) $1+\frac{5^2}{7}+\frac{5^3}{9}+\frac{5^4}{11}+\dots$.

Відповідь: 1) $\frac{n}{10^n}$; 2) $\frac{2n-1}{2n}$; 3) $\frac{5^n}{2n+3}$.

3. Знайти суми рядів (для прикладів 1) і 3) вказати, скільки членів ряду потрібно взяти, щоб його сума обчислювалась з точністю до 0,01):

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{3^n}$;

3) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\dots$.

Вказівка. $\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$.

Відповіді 1) $S = 2$, $n = 8$; 2) $\frac{1+3i}{5}$; 3) $S = \frac{1}{4}$, $n = 25$.

4. Дослідити на збіжність такі ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+1}$;

3) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\dots$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 9) $\frac{2!}{5}+\frac{3!}{5^2}+\frac{4!}{5^3}+\dots$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \ldots (5n-4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-2)}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+2n+3}\right)^n$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Відповідь: 2), 5) — 8), 11), 12) — збіжні.

5. Показати розбіжність рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+l}{3n+1}$.

§ 10.2. Числові ряди з довільними членами

Знакозмінним рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots$$

$$u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Ознака збіжності знакозмінного ряду (ознака Лейбніца). Ряд (1) збігається, якщо виконуються такі умови:

$$\text{а) } u_{n+1} < u_n \ \forall n \in \mathbb{N}; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{2}$$

При цьому його залишок $R_n = (-1)^{n+2} (u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$ оцінюють так:

$$|R_n| < u_{n+1}. \tag{3}$$

Числовим рядом з довільними членами назвемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ з довільним чергуванням знаків його членів. Цей ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$, і *умовно збіжним*, якщо він є збіжним, але не є абсолютно збіжним. Якщо ряд абсолютно збігається, то він є збіжним. Сформулюйте властивості абсолютно і умовно збіжних рядів.

Критерій Коші збіжності ряду. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним тоді й тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon)$ таке, що $\forall n > n_0$ і

$\forall p \in \mathbb{N}$ маємо

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n = u_n + iv_n$, u_n, $v_n \in \mathbb{R}$, називається *числовим рядом з комплексними членами*. Він збігається тоді й тільки тоді, коли є збіжними ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, причому його сума $S = P + iQ$, де $P = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $Q = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

ПРИКЛАДИ

1. Вияснити, які ряди збігаються абсолютно, які умовно, а які розбігаються: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$; в) $3 - \frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \cdots$; г) $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \cdots$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{3^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + i\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n^3} + \frac{3i}{n^4}\right)$.

▲ а) Ряд збігається за ознакою Лейбніца, оскільки $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Складемо тепер ряд з абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Це гармонійний ряд, який розбігається, тому заданий ряд збігається умовно.

б) Ряд, утворений з абсолютних величин членів заданого ряду, збігається як узагальнений гармонійний (ряд (4), § 10.1, при $\alpha = 2$). Отже, заданий ряд збігається абсолютно.

в) Маємо знакозмінний ряд, у якого $u_n = \frac{2n+1}{n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$, то не виконується необхідна умова збіжності ряду, і, отже, ряд розбігається.

г) Члени ряду мають довільні знаки. Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду. Дістанемо ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$, члени якого утворюють геометричну прогресію, знаменник якої $q = \frac{1}{3} < 1$. Отже, заданий ряд збігається, причому абсолютно.

д) Знак члена заданого ряду визначається знаком $\cos \alpha$, і тому при $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ряд містить нескінченну множину як додатних, так і від'ємних членів, причому знаки не обов'язково чергуються (при переході від одного члена до іншого). Отже, до цього ряду не можна застосувати ознаку Лейбніца. Розглянемо додатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{3^n}$, до якого застосуємо ознаку порівняння. Оскільки $\frac{|\cos n\alpha|}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ збігається, то заданий ряд збігається абсолютно.

е) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ збігається (узагальнений гармонійний), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ збігається умовно (приклад а)), отже, заданий ряд збігається умовно.

є) Оскільки $\frac{|\cos n|}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$ збігається абсолютно. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4}$ також збігається (абсолютно), тому заданий ряд з комплексними членами збігається абсолютно. ▼

2. Скільки членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ потрібно взяти, щоб дістати суму ряду з точністю до 0,01?

▲ Заданий ряд знакозмінний і є збіжним за ознакою Лейбніца. Його n-й залишок R_n оцінюється за формулою (3), тобто $|S - S_n| = |R_n| < u_{n+1}$. Для того щоб визначити кількість членів ряду, які потрібно взяти для забезпечення заданої точності, треба розв'язати нерівність $|R_n| < 0{,}01$, тобто $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{100}$. Звідси дістаємо $2^{n+1} > 100$ або $n \geqslant 6$. Отже, треба взяти не менше 6 перших членів ряду, щоб при заміні суми ряду сумою його перших n членів похибка була менша 0,01. ▼

3. Користуючись критерієм Коші, довести розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

▲ Задамо $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і покладемо $p = n$. Тоді (див. нерівність (4))

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} >$$

$$> n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

і за критерієм Коші заданий ряд розбіжний. ▼

4. Переставити члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ так, щоб його сума збільшилася у півтора рази.

▲ Заданий ряд збігається умовно (див. приклад 1, а)). Позначимо його суму через S і розглянемо допоміжний ряд

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots .$$

Додаючи почленно ці два ряди, дістаємо

$$\frac{3}{2} S = S + \frac{1}{2} S = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} -$$

$$- \frac{2}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots . ▼$$

Вправи

1. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність такі ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{2^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{n}{3^{n+1}}\right)^n$;

5) $1{,}1 - 1{,}02 + 1{,}003 - 1{,}0004 + \dots$;

6) $2+\frac{4}{2!}-\frac{8}{3!}+\frac{16}{4!}+\frac{32}{5!}-\dots;$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\alpha}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$;

12) $1+\frac{2!}{2^2}-\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}-\dots;$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^{2n}$.

Відповіді: абсолютно збіжні: 2) — 4), 6), 7) (при $\alpha > 1$), 8), 9), 11) — 13); умовно збіжні: 1), 7) (при $0<\alpha\leqslant 1$), 10); розбіжний 5).

2. Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ потрібно взяти, щоб дістати суму ряду з точністю до 0,01?

Відповідь: 10.

3. Користуючись критерієм Коші, довести, що:

1) ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$ збігаються;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається.

4. Переставити члени ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$ так, щоб його сума зменшилася вдвоє.

Вказівка. Взяти один додатний і два від'ємних члени.

5. Показати, що до ряду $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{3^k}-\frac{1}{2^k}+$ $+\dots$ не можна застосувати ознаку Лейбніца, однак цей ряд збігається.

Вказівка. Утворити ряд з абсолютних величин членів цього ряду і розглянути його як суму двох збіжних рядів.

§ 10.3. Функціональні ряди. Степеневі ряди

Нехай маємо послідовність функцій $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, визначену на множині $G\subset\mathbb{R}$. *Функціональним рядом* називається вираз

$$f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x). \qquad (1)$$

При різних значеннях $x\in G$ дістаємо числові ряди, які можуть збігатись або розбігатись. Множина значень $x\in G$, при яких ряд збігається, називається *областю збіжності* функціонального ряду. Ряд (1) називається *абсолютно збіжним* на множині $D \subset G$, якщо є збіжним на цій множині ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Для визначення області збіжності функціонального ряду, як правило, використовують ознаки збіжності додатних рядів.

Найбільш вживаним і найпростішим функціональним рядом є *степеневий ряд*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad (2)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — дійсні числа (коефіцієнти ряду).

Степеневим рядом називають і ряд більш загального вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$
$$\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \qquad (2a)$$

Областю збіжності степеневого ряду є проміжок (скінченний або нескінченний), симетричний відносно точки $x = 0$ (для ряду (2)) або відносно точки $x = x_0$ (для ряду (2а)), який пов'язаний з *інтервалом збіжності*. Число R — половина довжини інтервалу збіжності, називається *радіусом збіжності* степеневого ряду. Зокрема, може бути $R = 0$ або $R = +\infty$, тобто ряд збігається лише в одній точці або на всій числовій прямій. Радіус збіжності знаходять за однією з формул

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (3) \qquad \text{або} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad (4)$$

якщо ці границі існують, або безпосередньо з нерівностей

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \quad (5) \qquad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} < 1, \qquad (6)$$

де $u_n(x) = a_nx^n$ ($u_n = a_n(x - x_0)^n$), знаходять зразу інтервал збіжності. Знайшовши інтервал збіжності $(-R; R)$ для ряду (2) або $(x_0 - R; x_0 + R)$ для ряду (2а), потрібно дослідити поведінку ряду на кінцях інтервалу.

Ряди, утворені шляхом почленного диференціювання або інтегрування степеневого ряду, мають той самий інтервал збіжності, і їх сума всередині інтервалу збіжності дорівнює відповідно похідній або інтегралу від суми вихідного ряду.

Для степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (7) \qquad \text{або} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (8)$$

у комплексній площині (a_n — сталі комплексні числа, $z = x + iy$ — комплексна змінна, z_0 — фіксоване комплексне число) радіус збіжності R знаходять за однією з формул (3) або (4), якщо ці границі існують, а кругом збіжності є $|z| < R$ (для ряду (7)) або $|z - z_0| < R$ (для ряду (8)).

ПРИКЛАДИ

1. Знайти область збіжності функціонального ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

▲ а) Заданий ряд є геометричним рядом $\left(\text{знаменник прогресії } q = \frac{1}{x^2}\right)$. Ряд збігається, якщо $\frac{1}{|x|^2} < 1$, тобто $|x| > 1$. Отже, областю збіжності ряду є два нескінченних інтервали $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$.

б) Скористаємось ознакою Д'Аламбера. Оскільки $u_n = e^{-nx}$, а $u_{n+1} = e^{-(n+1)x}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}}{e^{(n+1)x}} = e^{-x}.$$

Ряд збігається, якщо $e^{-x} < 1$, звідки $x > 0$.

в) Оскільки $\frac{|\sin nx|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається (узагальнений гармонійний, де $\alpha = 2 > 1$), то за ознакою порівняння дістаємо, що заданий ряд збігається абсолютно при всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, областю збіжності є інтервал $(-\infty; \infty)$. ▼

2. Чи збігається ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \cdots$ у точці $x = 1$?

▲ При $x = 1$ маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$, який є геометричним рядом $\left(\text{знаменник прогресії } q = \frac{1}{2} < 1\right)$, тому він збігається. ▼

3. Визначити радіус, інтервал і область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nx)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

▲ а) Заданий ряд є геометричним з $q = \frac{x^3}{3}$. Він збігається при $\frac{|x|^3}{3} < 1$ і розбігається при $\frac{|x|^3}{3} \geqslant 1$. Отже, проміжок збіжності визначається подвійною нерівністю $-\sqrt[3]{3} < x < \sqrt[3]{3}$.

б) Маємо степеневий ряд, у якого $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$ і $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+3}$. Тому за формулою (3) знаходимо радіус збіжності: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n (2n+3)}{2^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{2}$. Тоді інтервалом збіжності є $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = -\frac{1}{2}$ маємо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, який збігається за ознакою Лейбніца. При $x = \frac{1}{2}$ дістаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, який розбігається як такий, що складається з непарних членів гармонійного ряду. Отже, область збіжності заданого ряду є піввідрізок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

в) Для визначення R зручно скористатись формулою (4). Маємо $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Отже, ряд збігається в одній точці 0.

г) Ряд збігається при всіх $x \in \mathbb{R}$, оскільки

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, 2^n}{n!\, 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty.$$

д) Маємо $a_n = \frac{1}{5^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$, $R = 5$. Інтервал збіжності знаходимо з подвійної нерівності $-5 < x + 2 <$

< 5, тобто $-7 < x < 3$. При $x = -7$ дістаємо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, який розбігається. При $x = 3$ маємо ряд $1 + 1 + 1 + \ldots$, який розбігається. Отже, областю збіжності ряду є інтервал $(-7; 3)$.

е) У даному випадку не можна застосувати формули (3) і (4) для знаходження радіуса збіжності, оскільки коефіцієнти при парних степенях x дорівнюють нулю. Скористаємось безпосередньо ознакою Д'Аламбера для знаходження інтервалу збіжності. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)}{x^{2n-1}(2n+1)}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

При $x^2 < 1$ ряд збігається, а при $x^2 > 1$ — розбігається. Отже, інтервалом збіжності є $(-1; 1)$. При $x = -1$ маємо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$, який збігається за ознакою Лейбніца, а при $x = 1$ дістаємо аналогічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$, який збігається. Отже, проміжком збіжності цього ряду є відрізок $[-1; 1]$. ▼

4. Знайти суму ряду, користуючись теоремою про почленне диференціювання і інтегрування степеневих рядів:

а) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \cdots$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$.

▲ а) Проміжком збіжності цього ряду є відрізок $[-1; 1]$ (перевірте). Для знаходження суми $S(x)$ ряду продиференціюємо його почленно. Дістанемо $S'(x) = 1 - x + x^3 - x^5 + \ldots = 1 - (x - x^3 + x^5 - \ldots)$. У дужках маємо суму членів геометричної прогресії, знаменник якої $q = -x^2$. При $|x| < 1$ цей ряд збігається і його сума дорівнює $\frac{x}{1+x^2}$. Отже, при $|x| < 1$ дістаємо $S'(x) = 1 - \frac{x}{1+x^2}$. Інтегруючи цю рівність в межах від 0 до x ($|x| < 1$), маємо $S(x) - S(0) = \int\limits_0^x \left(1 - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Отже, при $|x| < 1$ сума ряду $S(x) = x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ $(S(0) = 0)$.

б) Розглянемо геометричний ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ $\cdots = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. Інтегруючи його на відрізку $[0;x] \subset$ $\subset (-1; 1)$, дістаємо $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = -\ln|1 -$ $- x|$. Покладаючи $x = \frac{1}{2}$, дістаємо $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} +$ $+ \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots = \ln 2$. ▼

5. Знайти радіус і круг збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n}$.

▲ За формулою (4) маємо $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Круг збіжності $|z - i| < 1$. ▼

Вправи

1. Визначити область збіжності функціонального ряду:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n x^n}$.

Відповідь: 1) $|x| < 1$; 2) $[-4; 4)$; 3) $|x| > \frac{1}{3}$.

2. Знайти суму ряду:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$; 2) $\frac{1}{e^x - 1}$, $x > 0$; 3) $\frac{x-1}{3-x}$, $-1 <$ $< x < 3$.

3. Вказати радіус, інтервал і область збіжності степеневого ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 3^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{2n-1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Відповідь: 1) $(-\infty; \infty)$; 2) $[-1; 1]$; 3) $R = 0$; 4) $[-4; 2)$; 5) $(2; 4)$; 6) $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$.

4. Знайти суму ряду $2 + 6x + 12x^2 + \ldots + (n+1)(n+2) \times$ $\times x^n + \ldots$, продиференціювавши двічі ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Відповідь: $\frac{2}{(1-x)^3}$.

5. Знайти радіус і круг збіжності ряду у комплексній площині:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} z^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} i\,\frac{n!}{n^n} z^n$.

Відповідь: 1) $|z| < 5$; 2) $|z+i| < 1$; 3) $|z| < e$.

§ 10.4. Розкладання фукцій в ряд Тейлора. Деякі елементарні функції комплексної змінної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і в самій точці x_0 має похідні всіх порядків. Тоді степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \quad 0! = 1, \qquad (1)$$

називається *рядом Тейлора* для функції f у точці x_0 (або за степенями $x - x_0$).

Ряд (1) збігається до функції f на інтервалі $\mathcal{J} = (x_0 - R;\ x_0 + R)$ тоді й тільки тоді, коли функція f на цьому інтервалі має похідні всіх порядків і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всіх $x \in \mathcal{J}$, де $R_n(x)$ — доповняльний член формули Тейлора, який має вигляд

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad x_0 \leqslant c \leqslant x \qquad (2)$$

(*доповняльний член формули Тейлора у формі Лагранжа*, див. § 7.5).

Отже, при вказаних умовах дістаємо такий розклад функції f у степеневий ряд, який є рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots, \qquad (3)$$

і цей розклад єдиний.

Рівність (3) виконуватиметься, якщо в інтервалі $\mathcal{J}$

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M, \quad M > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (4)$$

(*достатня умова розкладання функції в ряд Тейлора*).

Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора називають ще *рядом Маклорена* і тоді

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$
$$\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (5)$$

Справедливі такі розклади елементарних функцій:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{6}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

По аналогії з формулами (6) — (8) визначимо функції e^z ($\exp z$), $\sin z$ і $\cos z$ комплексної змінної z за такими формулами:

$$\text{а) } e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \text{б) } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\text{в) } \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Звідси дістаємо формули Ейлера:

$$\text{а) } e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \text{б) } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\text{в) } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{10}$$

Гіперболічні синус ($\operatorname{sh} z$) і косинус ($\operatorname{ch} z$) комплексної змінної z означимо так:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{11}$$

Сформулюйте основні властивості функцій, уведених у розгляд за формулами (9) і (11). Установіть, що є спільного і в чому різниця між цими функціями і відповідними функціями дійсної змінної.

ПРИКЛАДИ

1. Розкласти в ряд за степенями $x-\frac{\pi}{2}$ функцію $f(x)=$ $=\sin x$.

▲ Обчислимо значення заданої функції та її похідних при $x_0=\frac{\pi}{2}$:

$$f(x)=\sin x,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\quad f'(x)=\cos x,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$$

$$f''(x)=-\sin x,\quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;\quad f'''(x)=-\cos x,$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\quad f^{IV}(x)=\sin x,\quad f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\ \ldots.$$

Оскільки виконується оцінка (4) при всіх $x\in\mathbb{R}$ $\left(|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1\right)$, то для всіх $x\in\mathbb{R}$ за формулою (3) дістаємо:

$$\sin x=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}+\ldots.$$

У справедливості останньої рівності можна переконатись і іншим способом, а саме — досліджуючи доповняльний член формули Тейлора у формі Лагранжа (формула (2), де $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $0<\theta<1$):

$$R_{2n}(x)=\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Переконайтесь, що $\lim\limits_{n\to\infty}R_{2n}(x)=0$ при всіх $x\in\mathbb{R}$. ▼

2. Розкласти в ряд Тейлора за степенями x функцію $y=$ $=\frac{x+1}{x^2-4x+3}$.

▲ У цьому прикладі можна уникнути обчислення похідних і їх значень у точці $x=0$, що привело б до складних викладок. Розкладемо заданий дріб на елементарні (див. § 8.3). Оскільки коренями знаменника є числа 1 і 2, то

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}.$$

Знаходимо $A=-1$, $B=2$. Отже, $\frac{x+1}{x^2-4x+3}=-\frac{1}{x-1}+$ $+\frac{2}{x-3}$. Користуючись формулою суми членів спадної геометричної прогресії, маємо

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$
$$|x|<1;$$
$$\frac{2}{x-3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{x^n}{3^n}+\cdots\right),\quad \frac{|x|}{3}<1.$$

При $|x|<1$ обидва допоміжних ряди збігаються, тому їх можна почленно додати. Тоді при $|x|<1$ дістанемо

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)x+$$
$$+\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^2}\right)x^2+\cdots+\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\right)x^n+\cdots. \blacktriangledown$$

3. Розкласти в ряд Тейлора за степенями x функцію

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

яка називається *функцією Лапласа* або *інтегралом ймовірностей* і відіграє важливу роль в теорії ймовірностей.

▲ Обчислити цей інтеграл у скінченному вигляді не можна, оскільки $\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ не виражається через елементарні функції. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд, користуючись розкладом (6) для функції e^x, в якому замість x візьмемо $-\frac{x^2}{2}$:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\cdots.$$

Інтегруючи почленно цей ряд на відрізку $[0; x]$, дістаємо

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=x-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!}+\cdots.$$

Тоді функцію $\Phi(x)$ можна подати нескінченним рядом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!} + \cdots\right),$$

який збігається на всій числовій прямій, причому найшвидше він збігається до $\Phi(x)$ при $|x| \leqslant 1$. ▼

4. Показати, що число $2\pi i$ є періодом функції e^z.

▲ Користуючись властивістю експоненціальної функції, маємо $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i}$. За формулою Ейлера ((10), а)) маємо $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$. Отже, $e^{z+2\pi i} = e^z$, тобто суто уявне число $2\pi i$ є періодом функції e^z. ▼

5. Обчислити: а) $e^{-2\pi i}$; б) $e^{\frac{3}{2}\pi i}$.

▲ Використовуючи формулу Ейлера ((10), а)), дістанемо:

а) $e^{-2\pi i} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1$;

б) $e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$. ▼

6. Знайти дійсну та уявну частини $\sin(2+3i)$.

▲ Користуючись властивістю $\sin z$, формулами Ейлера ((10), б), в)) та означеннями функцій $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$, дістаємо

$$\sin(2+3i) =$$

$$= \sin 2\cos 3i + \cos 2\sin 3i = \sin 2\cdot\frac{e^{i(3i)} + e^{-i(3i)}}{2} +$$

$$+ \cos 2\cdot\frac{e^{i(3i)} - e^{-i(3i)}}{2i} = \sin 2\cdot\frac{e^{-3}+e^3}{2} +$$

$$+ \cos 2\cdot\frac{e^{-3}-e^3}{2i} = \sin 2\cdot\frac{e^3+e^{-3}}{2} +$$

$$+ i\cos 2\cdot\frac{e^3-e^{-3}}{2} = \sin 2\operatorname{ch} 3 + i\cos 2\operatorname{sh} 3.$$

Отже, $\operatorname{Re}(\sin(2+3i)) = \sin 2\operatorname{ch} 3$, $\operatorname{Im}(\sin(2+3i)) = \cos 2\operatorname{sh} 3$. ▼

Вправи

1. Розкласти в степеневий ряд за степенями x функції:

1) $f(x) = e^{\frac{x}{4}}$; 2) $f(x) = \sin^2 x$; 3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-2}$;

4) $\int\limits_0^x \cos t^2\, dt$.

Відповідь: 1) $1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{2!\cdot 4^2}+\frac{x^3}{3!\cdot 4^3}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}$;
2) $\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\cdots,\ x\in\mathbb{R}$; 3) $-\frac{1}{3}\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)x-\left(1+\frac{1}{2^2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2^3}\right)x^3-\cdots\right)$, $|x|<1$; 4) $x-\frac{x^5}{2!\cdot 5}+\frac{x^9}{4!\cdot 9}-\frac{x^{13}}{6!\cdot 13}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R}$.

2. Записати три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$ для функцій:

1) $y=\frac{1}{x}$, $x_0=3$; 2) $y=\ln x$, $x_0=1$; 3) $y=\sin 3x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

4) $y=e^{\cos x}$, $\quad x_0=\frac{\pi}{2}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}(x-3)+\frac{1}{3^3}(x-3)^2$; 2) $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$; 3) $-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3^3}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3-\frac{3^5}{5!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5$; 4) $1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$.

3. Важка нитка (дріт, канат, ланцюг) під дією власної ваги провисає, набуваючи форму ланцюгової лінії $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, де $a=\frac{H}{Q}$, H — горизонтальний натяг, Q — вага одиниці довжини. Показати, що за умови незначного провисання ланцюгову лінію можна замінити параболою $y=a+\frac{x^2}{2a}$.

4. Переконатися, що число 2π є періодом функції $\cos z$.

5. Обчислити $e^{-\pi i}$, $e^{4n\pi i}$ і $e^{-\frac{5}{2}\pi i}$.
Відповідь: -1, 1, $-i$.

6. Користуючись відповідними означеннями та формулами Ейлера, довести, що:
1) $\operatorname{ch} z=\cos iz$; 2) $\operatorname{sh} z=-i\sin iz$.

7. Визначити дійсну та уявну частини: 1) $\sin 5i$; 2) $\cos(5+2i)$.
Відповідь: 1) 0, $\operatorname{sh} 5$; 2) $\cos 5\operatorname{ch} 2$, $-\sin 5\operatorname{sh} 2$.

§ 10.5. Наближені обчислення за допомогою рядів

Користуючись розкладом у степеневі ряди, можна обчислювати наближені значення визначених інтегралів, границі та ін. У таких обчисленнях зберігають n перших членів ряду, а останні відкидають. Для оцінки похибки знайденого наближеного значення потрібно оцінити суму відкинутих членів, тобто залишок ряду $R_n(x)$. Рекомендується оцінку проводити так: якщо ряд знакосталий, то його залишок порівнюють з геометричним рядом, члени якого утворюють спадну геометричну прогресію, а якщо ряд знакозмінний і його члени задовольняють умови теореми Лейбніца, то використовують оцінку $|R_n(x)| < |u_{n+1}|$, де u_{n+1} — перший з відкинутих членів ряду.

Крім розкладів (6) — (8), § 10.4, використовуватимемо ще такі:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1;\ 1); \tag{1}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in (-1;\ 1); \tag{2}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-1;\ 1),\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити $\sqrt[3]{e}$ з точністю до 0,0001.

▲ Користуючись розкладом e^x за формулою (6), § 10.4, дістаємо при $x = \frac{1}{3}$:

$$\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\cdot 3^2} + \frac{1}{3!\cdot 3^3} + \dots .$$

Визначимо, скільки треба взяти членів ряду, щоб похибка не перевищувала 0,0001. Запишемо залишок ряду (6):

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \dots$$

$$\dots = \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right).$$

Кожен із знаменників дробів, записаних у дужках, зменшимо, замінивши вирази $n+2$, $n+3$, ..., на $n+1$. Дістанемо нерівність

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \cdots\right).$$

У дужках маємо суму членів спадної геометричної прогресії (при $|x| < n+1$), знаменник якої $q = \frac{x}{n+1}$. Обчисливши цю суму, матимемо

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

Тоді при $x = \frac{1}{3}$ дістанемо $R_n < \frac{1}{n! \cdot 3^n} \cdot \frac{1}{3\left(n+1-\frac{1}{3}\right)} =$ $= \frac{1}{n! \cdot 3^n (3n+2)}$. Шляхом підбору визначимо, при якому значенні n справедлива оцінка $R_n < 10^{-4}$. Таким n є число 4. Справді, $R_4 < \frac{1}{4! \cdot 3^4 \cdot 14} = \frac{1}{24 \cdot 81 \cdot 14} < 10^{-4}$. Отже, досить покласти $n = 4$, щоб забезпечити задану точність, тобто справа у формулі (6), § 10.4, потрібно взяти чотири доданки після одиниці. Дістанемо $\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 3^2} +$ $+ \frac{1}{3! \cdot 3^3} + \frac{1}{4! \cdot 3^4}$. Обчислюватимемо кожен доданок з одним зайвим десятковим знаком, щоб при підсумовуванні не дістати похибку, яка б перевищувала 10^{-4}. Отже, маємо $\sqrt[3]{e} \approx 1{,}00000 + 0{,}33333 + 0{,}05556 + 0{,}00617 +$ $+ 0{,}00051 + 0{,}00003 \approx 1{,}3956$. ▼

2. Обчислити $\sqrt[4]{1{,}08}$ з точністю до 0,0001.

▲ Скористаємось розкладом у степеневий ряд функції $(1+x)^\alpha$ при $x = 0{,}08$ і $\alpha = \frac{1}{4}$ (див. формулу (3)). Маємо $\sqrt[4]{1{,}08} = (1+0{,}08)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}08 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4} \times$ $\times \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot 0{,}08^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 2\right) \cdot 0{,}08^3 +$ $+ \ldots = 1 + 0{,}02 - 0{,}0006 + 0{,}000028 - \ldots$. Дістали знакозмінний ряд (починаючи з другого члена). Оскільки четвертий доданок, взятий за модулем, менше 0,0001, то, відкидаючи його і всі наступні члени ряду, маємо $\sqrt[4]{1{,}08} \approx \approx 1 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 1{,}0194$. ▼

3. Обчислити $\ln 1{,}04$ з точністю до 10^{-6}.

▲ За формулою (1) при $x = 0{,}04$ знаходимо $\ln 1{,}04 = \ln(1 + 0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \ldots \approx 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}0000213 \approx 0{,}039221$. Ми взяли лише перших три доданки у формулі (1), оскільки ряд знакозмінний, і наступний (невиписаний) член ряду за модулем менше 10^{-6}. ▼

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 + x^4}$.

▲ Первісна для підінтегральної функції виражається через елементарні функції, однак її вираз досить складний і незручний для обчислення. Тому підінтегральну функцію зручно розкласти в ряд, записавши її у вигляді $\frac{1}{1 - (-x^4)}$ і розглядаючи як суму геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 1, а знаменник $q = -x^4$. Тоді при $|-x^4| < 1$, тобто при $|x| < 1$, дістаємо

$$\frac{1}{1 + x^4} = \frac{1}{1 - (-x^4)} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots .$$

Інтегруючи останню рівність на відрізку $[0; x]$, $|x| < 1$, маємо

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1 + t^4} = x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \cdots .$$

Покладаючи $x = \frac{1}{2}$, дістаємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \cdots \approx 0{,}494.$$

Тут ми обмежилися двома першими членами ряду (при цьому похибка не перевищує $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0{,}0002$; поясніть, чому). ▼

5. Скласти програму обчислення на ЕОМ значень синуса з наперед заданою точністю ε і, користуючись цією про-

грамою, обчислити sin 0,5 в точністю до 10^{-6}. Скільки членів відповідного ряду потрібно для цього взяти?

▲ Для складання програми обчислення синуса за формулою (7), § 10.4, проаналізуємо вираз загального члена ряду. Як бачимо, кожен наступний член ряду u_{k+1} відрізняється від попереднього u_k на один і той же співмножник, а саме: $u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k, \quad k = 1, 2, \ldots$. Оскільки ряд знакозмінний, то похибка обчислення, взята за модулем, не перевищує величини першого відкинутого члена ряду. Тому, обчислюючи черговий член ряду u, порівнюватимемо його величину з заданою точністю обчислень. Якщо ця величина менша за ε, то виводитимемо значення відповідної суми S (наближеного значення синуса) на екран ЕОМ. У противному випадку додамо обчислений член ряду до попереднього значення S і перейдемо до обчислення наступного члена ряду.

Враховуючи зазначене вище, дістаємо структурну схему алгоритму обчислень, зображену на рис. 64.

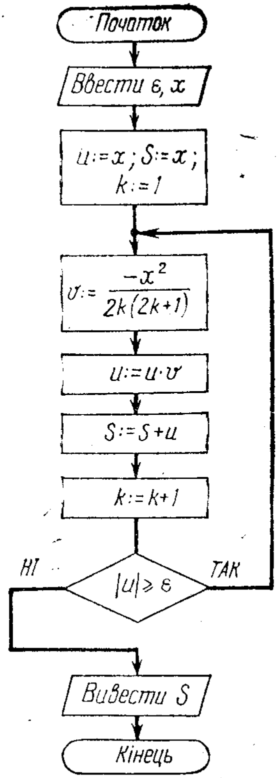

Рис. 64

Реалізуємо цей алгоритм на мові ПМК. Виконаємо такий розподіл пам'яті: $\varepsilon \to$ Р0, $u \to$ Р1, $-x^2 \to$ Р2, $S \to$ Р3 і $k \to$ Р4. Початкове значення $u_1 = x$ заноситься в Р1, а потім туди надсилаються значення наступних членів ряду. Збільшення номера k члена ряду на одиницю виконується за допомогою однієї команди К П $\to$ $\to$ Х 4 (тому спочатку для очищення регістра Р4 надсилається туди число 0). Значення точності ε і значення x надсилаються до відповідних регістрів в автоматичному режимі за допомогою команд: (ε) Х $\to$ П 0 (x) Х $\to$ $\to$ П 1.

Програму для обчислення значень синуса на ПМК подано в табл. 3.

Адреса	Команда	Код	Зміст операції	Вказівка
00	0	00	$0 \to PX$	
01	$X \to П\ 4$	44	$0 \to P4$ (очищення P4)	$k := 0$
02	$П \to X\ 1$	61	$x \to PX$	$u := x$
03	$X \to П\ 3$	43	$x \to P3$	$S := x$
04	F x^2	22	$x^2 \to PX$	
05	/—/	0L	$-x^2 \to PX$	
06	$X \to П\ 2$	42	$-x^2 \to P2$	
07	К $П \to X\ 4$	Г4	Збільшення вмісту P4 на 1	$k := k + 1$
08	$П \to X\ 2$	62	$-x^2 \to PX$	
09	1	01	$1 \to PX,\ -x^2 \to PY$	
10	$П \to X\ 4$	64	$k \to PX,\ 1 \to PY,\ -x^2 \to PZ$	
11	2	02	$2 \to PX,\ k \to PY,\ 1 \to PZ,\ -x^2 \to PT$	
12	×	12	$2k \to PX,\ 1 \to PY,\ -x^2 \to PZ$	
13	+	10	$2k + 1 \to PX,\ -x^2 \to PY$	
14	F Bx	0	$2k \to PX,\ 2k + 1 \to PY,\ -x^2 \to PZ$	
15	×	12	$2k\,(2k + 1) \to PX,\ -x^2 \to PY$	
16	÷	13	$-\dfrac{x^2}{2k\ (2k+1)} \to PX$	$v := -\dfrac{x^2}{2k(2k+1)}$
17	$П \to X\ 1$	61	$u \to PX,\ v \to PY$	
18	×	12	$uv \to PX$	$u := uv$
19	$X \to П\ 1$	41	$u \to P1$	
20	К |x|	31	$\|u\| \to PX$	
21	$П \to X\ 0$	60	$\varepsilon \to PX,\ \|u\| \to PY$	
22	—	11	$\|u\| - \varepsilon \to PX$	
23	F $x < 0$	5[	Якщо $\|u\| - \varepsilon < 0$, то перейти до 25	
24	27	27	Якщо $\|u\| - \varepsilon \geqslant 0$, то перейти до 27	
25	$П \to X\ 3$	63	$S \to PX$	
26	С/П	50	Зупинка для індикації	
27	$П \to X\ 3$	63	$S \to PX$	
28	$П \to X\ 1$	61	$u \to PX,\ S \to PY$	
29	+	10	$S + u \to PX$	$S := S + u$
30	$X \to П\ 3$	43	$S \to P3$	
31	БП	51	Безумовний перехід на	
32	07	07	команду 07	

Для роботи з ПМК скористайтеся інструкцією, поданою в § 7.10.

При $\varepsilon = 10^{-6}$ і $x = 0{,}5$ дістанемо на індикаторі $4{,}7942555 \cdot 10^{-1}$, в той час як sin 0,5, обчислений за програмою F sin, закладеною в ПМК, дорівнює $4{,}7942554 \cdot 10^{-1}$.

Значення k (кількість членів ряду, необхідних для забезпечення заданої точності) визначаємо за командою П →X 4. Для нашого прикладу $k = 4$.

На мові Бейсік програма матиме такий вигляд:

```
10 REM ОБЧИСЛЕННЯ СИНУСА З ЗАДАНОЮ ТОЧ-
   НІСТЮ
20 INPUT "Увести точність обчислення E"; E
30 INPUT "Увести значення змінної X"; X
40 U = X: S = X: K = 1
50 V = -X^2 / (2 *K * (2 * K + 1))
60 U = U * V
70 IF ABS (U) < E THEN 110
80 S = S + U
90 K = K + 1
100 GOTO 50
110 PRINT "SIN ("; X; ") = "; S; " з точністю E = "; E;
    " при K = "; K
120 END
```

Пояснення щодо користування програмами, складеними для ПЕОМ, даються у § 7.5.

Вправи

1. Користуючись відповідним тейлоровим рядом, обчислити з точністю до 0,0001:

1) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 2) $\sqrt[3]{1{,}06}$; 3) $\ln 0{,}92$; 4) $\operatorname{arctg} 0{,}3$; 5) $\sqrt{17}$.

Відповідь: 1) 0,6065; 2) 1,0196; 3) –0,0834; 4) 0,2915; 5) 4,1231.

2. Користуючись програмою обчислення на ЕОМ синуса, знайти з точністю до 10^{-7} значення: $\sin \frac{2}{3}$; $\sin 0{,}9$; $\sin 32°$ і $\cos 63°$.

Відповідь: 0,6183698; 0,7833269; 0,5299193; 0,4539905.

3. Скласти програму обчислення на ЕОМ значень косинуса за формулою (8), § 10.4, і, користуючись нею, обчислити $\cos 3°$, $\cos \frac{4}{5}$, $\cos 18°$ і $\cos 1$ з точністю до 10^{-7}.

Відповіді: 0,9986296; 0,6967068; 0,9510566; 0,5403023.

4. Обчислити вказані інтеграли з точністю до 0,001:

1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$; 2) $\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$; 3) $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}dx$;

4) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$; 5) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 dx$.

Відповіді: 1) 0,747; 2) 0,280; 3) 0,623; 4) 0,764; 5) 0,298.

5. Визначити довжину висячого мосту параболічної форми (див. рис. 33, де $AB = 40$ м і $OC = 1$ м), розкладаючи відповідну підінтегральну функцію у степеневий ряд (див. формулу (1), § 9.6).

Відповідь: 40,07 м.

§ 10.6. Ряди Фур'є

Нехай $y = f(x)$ — інтегровна функція на відрізку $[-l; l]$. Тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (1)$$

де

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

називають *рядом Фур'є* цієї функції, а числа a_n і b_n — *коефіцієнтами Фур'є.*

Запишіть відповідні формули для відрізка $[-\pi; \pi]$.

Достатня умова розкладання функції в ряд Фур'є. Якщо f — кусково-диференційовна функція на відрізку $[-l; l]$, то її ряд Фур'є збігається на цьому відрізку і його сума $S(x)$ визначається так:

1) $S(x) = f(x)$ у кожній точці $x \in (-l; l)$, в якій f неперервна;

2) $S(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ у кожній точці $x \in (-l; l)$, в якій функція має розрив першого роду;

3) $S(-l) = S(l) = \dfrac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

Якщо функція f парна на відрізку $[-l; l]$, то її ряд Фур'є на цьому відрізку містить лише вільний член і косинуси, тобто

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (4)$$

де

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Якщо f — непарна функція, то її ряд Фур'є містить лише синуси:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{6}$$

де

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{7}$$

Якщо функцію f задано на відрізку $[0; l]$, то її потрібно продовжити довільним способом на відрізок $[-l; 0]$, а потім розкласти її в ряд Фур'є на відрізку $[-l; l]$. Доцільно продовжувати функцію парним або непарним способом. Тоді дістанемо неповний ряд Фур'є, який містить лише косинуси або синуси.

ПРИКЛАДИ

1. Розкласти функцію $y = |x|$ в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi; \pi]$. Користуючись одержаним розкладом, показати, що

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{9}.$$

▲ Задана функція задовольняє достатню умову розкладання в ряд Фур'є. Вона парна, тому її ряд Фур'є містить лише косинуси і вільний член (див. формулу (4)). Визначимо коефіцієнти за формулою (5), покладаючи $l = \pi$.

При $n = 0$ маємо $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi = \pi$. Далі $a_n = \frac{2}{\pi} \int x \cos nx dx$. Обчислимо останній інтеграл частинами, покладаючи $u = x$, $dv = \cos nx dx$. Тоді $du = dx$, $v = \frac{1}{n} \sin nx$ і

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

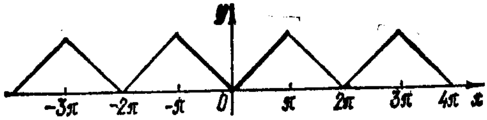

Рис. 65

Згідно з формулою (4), дістаємо такий розклад:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x = \frac{\pi}{2} -$$

$$-\frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right).$$

Одержаний ряд збігається до функції $|x|$ у всіх точках її області задання $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. Оскільки сума ряду є функцією періодичною з періодом 2π, то у всіх інших точках числової прямої ряд Фур'є збігатиметься до періодичного продовження заданої функції (рис. 65). При $x = 0$ дістанемо рівність $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$, звідки знаходимо суму числового ряду, вказаного в умові: $S = \frac{\pi^2}{8}$. ▼

2. Розкласти в ряд за синусами функцію $y = x$ на відрізку $[0; 1]$.

▲ Довизначимо функцію $y = x$ на відрізку $[-1; 0]$ непарним способом (рис. 66). Для визначення коефіцієнтів b_n, $n = 1, 2, \ldots$, скористаємось формулою (7) при $l = 1$. Маємо $b_n = 2\int\limits_0^1 x \sin n\pi x dx$. Інтегруючи частинами останній інтеграл $\left(u = x,\ dv = \sin n\pi x dx,\ du = dx,\ v = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)$, дістаємо

$$b_n = 2\left(-\frac{1}{n\pi}x\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^1 \cos n\pi x dx\right) =$$

$$= 2\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1\right) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}.$$

Отже, для всіх $x \in [0; 1)$ розклад функції в ряд Фур'є має вигляд

$$x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n} = \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\sin 3\pi x - \cdots\right), \quad S(1) = 0. ▼$$

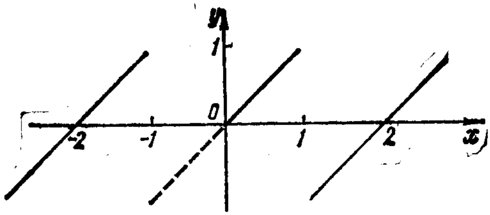

Рис. 66

3. Знайти рівняння сили струму, що відповідає осцилограмі, зображеній на рис. 67.

▲ Прямокутна лінія сили струму, яку дістаємо при його комунікації, є симетричною відносно початку координат і її від'ємна півхвиля є дзеркальним відображенням додатної півхвилі відносно осі абсцис. Тому відповідний ряд Фур'є міститиме лише синуси. Покладаючи у формулі (7) $f(x) = I$, $x = \omega t$, маємо

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} I\sin n\omega t d(\omega t) = \frac{2I}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx =$$

$$= -\frac{2I}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2I}{\pi n}(\cos \pi n - \cos 0) =$$

$$= -\frac{2I}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} \dfrac{4I}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1, \\ 0 & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді за формулою (6) дістаємо рівняння сили струму:

$$i = \frac{4I}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1}. \ ▼$$

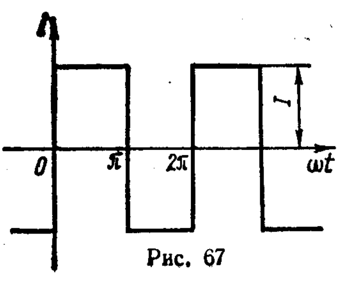

Рис. 67

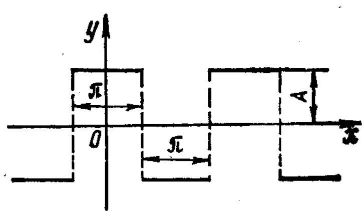

Рис. 68

Вправи

1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$ Чому дорівнює сума ряду Фур'є у точках 0, π і $-\pi$?

Відповідь: $\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$; $S(0) = S(\pi) = S(-\pi) = 0$.

2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$ В яких точках відрізка $[-2; 2]$ сума ряду відмінна від $f(x)$? Яка її величина у цих точках?

Відповідь:
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{2n-1} +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{2n}; \quad S(-2) = S(0) = S(2) = \frac{1}{2}.$$

3. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{\pi^2(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{\pi n}$.

4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$ на відрізку $[-1; 1]$. Користуючись цим розкладом, обчислити суму S ряду
$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

Відповідь: $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi x}{n^2}$; $S = \frac{\pi^2}{12}$.

5. Знайти аналітичний вираз, який відповідає серії імпульсів пилоподібної форми: $i = \frac{A}{\pi}\omega t$, $-\pi \leqslant \omega t \leqslant \pi$ (рис. 68).

Відповідь: $i = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\omega t$.

РОЗДІЛ 11. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

При вивченні багатьох процесів, які відбуваються у природі, доводиться мати справу з функціями двох і більше незалежних змінних. У цьому розділі основні поняття і твердження з розділів 5—7 перенесені на функції кількох змінних. Слід зазначити, що не всі твердження, які справедливі для функції однієї змінної, справедливі і для функції кількох змінних (наприклад, умови диференційовності). Особливо цінним для застосувань є матеріал § 11.6.

§ 11.1. Поняття функції кількох змінних. Границя і неперервність

Всякий упорядкований набір з n дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ називають *точкою n-вимірного простору* і позначають $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При цьому числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають *координатами точки*. Якщо відстань між двома точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ визначається за формулою $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$, то такий простір називається *n-вимірним евклідовим простором* і позначається $\mathbb{R}_n$.

Сформулюйте означення просторів $\mathbb{R}_2$ і $\mathbb{R}_3$.

Для зручності точку простору $\mathbb{R}_2$ позначатимемо $M(x; y)$ або просто $(x; y)$, а точку простору $\mathbb{R}_3$ відповідно $M(x; y; z)$ або $(x; y; z)$.

Якщо $D(f) \subset \mathbb{R}_n$, а $E(f) \subset \mathbb{R}$, то функція f називається *функцією n змінних* і позначається $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $y = f(x)$.

Зокрема, якщо кожній точці $(x; y)$ з деякої множини $X \subset \mathbb{R}_2$ відповідає за деяким законом одне дійсне число z, то говорять, що на множині X задано функцію двох змінних, яку позначають $z = f(x, y)$. При цьому x і y називають *незалежними змінними*, а множину X — *областю визначення (існування) функції*.

Сформулюйте означення функції трьох змінних.

Графіком функції $z = f(x, y)$ називається множина точок $\Gamma = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}_3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$, яка зображає, взагалі кажучи, деяку поверхню в $\mathbb{R}_3$.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається лінія $f(x, y) = C$ на площині xOy, в точках якої функція зберігає стале значення $z = C$, де C взято з множини значень функції.

Аналогічно означається *поверхня рівня* для функції трьох змінних.

Число a називається *границею функції* $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ (позначається $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$), якщо $\forall \varepsilon >$

$> 0\ \exists\, \delta > 0$ таке, що з нерівності

$$0 < \rho(M,\ M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \qquad (1)$$

випливає нерівність $|f(x, y) - a| < \varepsilon$.

Суттєвим у цьому означенні є те, що точка M прямує до M_0 будь-яким шляхом. В означенні границі замість (1) іноді розглядають нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ і $0 < |y - y_0| < \delta$.

На мові послідовностей попереднє означення матиме вигляд: $a = \lim\limits_{M \to M_0} f(x, y)$, якщо для будь-якої послідовності точок (M_n) з $D(f)$ такої, що $M_n \to M_0$, $n \to \infty$, $M_n \neq M_0$, маємо $f(M_n) \to a$ при $n \to \infty$.

Околом точки $M_0(x_0;\ y_0)$ називається будь-який відкритий круг (тобто круг без кола) з центром у точці $M_0(x_0;\ y_0)$. Точка M_0 називається *граничною точкою* множини $A \subset \mathbb{R}_2$, якщо в будь-якому околі цієї точки міститься нескінченна множина точок з A.

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* у точці $(x_0;\ y_0)$, якщо

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0). \qquad (2)$$

Якщо M_0 є граничною точкою області визначення $D(f)$ функції $z = f(x, y)$, але не виконується умова (2), то $(x_0;\ y_0)$ називається *точкою розриву*. Точки розриву можуть утворювати *лінії розриву*.

Сформулюйте означення границі і неперервності для функції n змінних, а також їх властивості.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити значення функцій в заданих точках:

а) $f(x,\ y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(3;\ 4)$; б) $f(x,\ y) = \ln \dfrac{x+y}{y^2 - 1}$, $(1;\ 2)$.

▲ Маємо: а) $f(3,\ 4) = \dfrac{1}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{1}{5}$; б) $f(1,\ 2) = \ln \dfrac{1+2}{4-1} = \ln 1 = 0$. ▼

2. Визначити та зобразити область існування таких функцій:

а) $z = \dfrac{1}{2} xy$; б) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; в) $z = \sqrt{(x-2)(y+2)}$;

г) $z = \ln \frac{x}{y}$; д) $z = \frac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2 - y^2}}$; е) $z = \arcsin (x - y)$.

▲ а) Вираз $\frac{1}{2}xy$ має смисл при довільних значеннях x і y. Отже, $D(f) = \mathbb{R}_2$, тобто функція визначена на всій площині.

б) Задана функція визначена при всіх значеннях x і y, для яких $x^2 + y^2 \neq 0$. Тому областю визначення f є множина всіх точок площини xOy, крім точки $(0; 0)$, в якій $x^2 + y^2 = 0$.

в) Область існування функції визначається з умови, що $(x - 2)(y + 2) \geqslant 0$. Ця нерівність еквівалентна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ y + 2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 2 \leqslant 0, \\ y + 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Перша система дає розв'язки $x \geqslant 2$, $y \geqslant -2$, а друга — $x \leqslant 2$, $y \leqslant -2$. Область визначення заданої функції зображено на рис. 69.

г) Вираз під знаком логарифма повинен бути додатним, тобто $\frac{x}{y} > 0$. Це означає, що або $x > 0$ і $y > 0$, або $x < 0$ і $y < 0$. Перша система розв'язків дає область, що збігається з першою чвертю координатної площини, а друга — з третьою (без точок координатних осей).

д) Область існування даної функції визначається з умови $4 - x^2 - y^2 \neq 0$ (чому?). Отже, шукана область — це всі точки площини xOy, за винятком точок кола $x^2 + y^2 = 4$.

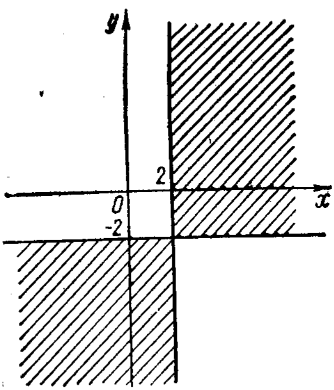

Рис. 69

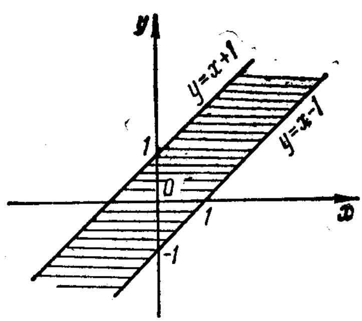

Рис. 70

е) Функція визначена у тій частині площини, координати якої задовольняють подвійну нерівність $-1 \leqslant x - y \leqslant 1$. Це є смуга, обмежена двома паралельними прямими $y = x + 1$ і $y = x - 1$ (рис. 70). ▼

3. Знайти лінії або поверхні рівня таких функцій:

а) $z = x - 3y$; б) $z = x^2 + y^2$; в) $u = x^2 + y^2 - z$.

▲ а) Рівняння ліній рівня має вигляд $C = x - 3y$. Це є сім'я паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{1}{3}$.

б) Лініями рівня заданої функції є криві $x^2 + y^2 = C$, $C \geqslant 0$. Геометрично це є концентричні кола з центрами в точці (0; 0) і радіусами $\sqrt{C}$.

в) Маємо функцію трьох змінних. Поверхні рівня f визначаємо з рівняння $x^2 + y^2 - z = C$ або $z = x^2 + y^2 + C$. Це сім'я параболоїдів обертання, вершини яких містяться на осі Oz. ▼

4. Користуючись означенням границі, довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x + y - 4) = -1$.

▲ Треба показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх точок $(x; y)$, відмінних від точки (1; 2), координати яких задовольняють нерівності

$$|x-1|<\delta, \quad |y-2|<\delta, \tag{3}$$

випливатиме нерівність

$$|(x+y-4)-(-1)|<\varepsilon. \tag{4}$$

Задамо довільно $\varepsilon > 0$ і спробуємо підібрати $\delta > 0$ таке, щоб з нерівності (3) випливала нерівність (4). Нехай нерівності (3) виконуються, хоча δ ще підлягає визначенню. Користуючись правом вибору δ, припустимо, що воно не перевищує 1, тобто x і y задовольняють нерівності $0 < x < 2$ і $1 < y < 3$. Тоді $|(x + y - 4) - (-1)| = |(x - 1) + (y - 2)| \leqslant |x - 1| + |y - 2|$. Звідси випливає, що за умов $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|y - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$ має місце нерівність (4). Якщо ж $\varepsilon \geqslant 2$, то досить покласти $\delta = 1$, і тоді знову з (3) випливатиме (4), що й треба було довести.

Доведіть справедливість заданої рівності, користуючись означенням границі на мові послідовностей. ▼

5. Виявити, чи має функція $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ границю в точці (0; 0).

▲ Нехай точка $(x; y)$ наближається до точки $(0; 0)$ уздовж прямої $y = kx$. При $k \neq -1$ маємо $f(x, y) = \frac{x - kx}{x + kx} = \frac{1-k}{1+k}$. Помічаємо, що в досить малому околі точки $(0; 0)$ є точки, в яких значення функції дорівнює 0 (при $k = 1$), і точки, в яких значення функції дорівнює 1 (при $k = 0$). Отже, г аниця f в точці $(0; 0)$ не існує. ▼

6. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin 2xy}{x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{1+xy^2}-1}{x^2+y^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^2-y^2}{x^2-xy-x+y}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

▲ а) Перейдемо до полярних координат (цей спосіб зручно використовувати при обчисленні границь в точці $(0; 0)$), покладаючи $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Тоді

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Оскільки функція $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ обмежена, а $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ при $(x; y) \to (0; 0)$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ (як добуток нескінченно малої функції на обмежену).

б) Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Покладемо $2xy = \alpha$. Тоді при $x \to 0$ і $y \to 3$ маємо $\alpha \to 0$ і

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin 2xy}{x} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ y\to 3}} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot 2y = 1\cdot 6 = 6.$$

в) Знову маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$, для розкриття якої помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{1+xy^2}+1$, спряжений з чисельником. Дістанемо (враховуючи, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$, як в а)):

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{1+xy^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+xy^2}+1)} = 0.$$

ґ) Виконуючи алгебраїчні перетворення, маємо

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x^2-y^2}{x^2-xy-x+y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{(x-y)(x+y)}{x(x-y)-(x-y)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-1)}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x+y}{x-1}=4.$$

д) Маємо невизначеність виду 1^∞. Поклавши $x^2+y^2=\alpha$, дістанемо, що при $x\to 0$ і $y\to 0$ буде $\alpha\to 0$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

(друга важлива границя). ▼

7. Показати, що функція $f(x,\ y)=\frac{x^2}{x-y}$ неперервна в будь-якій точці її області визначення.

▲ Функція неперервна на множині $E\subset\mathbb{R}_2$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Задана функція визначена в усіх точках $(x;\ y)\in\mathbb{R}_2$, крім тих, де $x=y$. Нехай $(x_0;\ y_0)$ — деяка точка з $D(f)$, тобто $x_0\neq y_0$. Візьмемо довільну послідовність точок $((x_n;\ y_n))$ таку, що $x_n\neq y_n$ і $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ при $n\to\infty$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,\ y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{x_n-y_n}=\frac{x_0^2}{x_0-y_0}=f(x_0,\ y_0).$$

Отже, задана функція неперервна в довільній точці $(x_0;$ $y_0)\in D(f)$. ▼

8. Дослідити функції на неперервність і знайти точки (або лінії) розриву, якщо вони є:

а) $z=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $z=\frac{1}{4-x^2-y^2}$;

в) $z=\begin{cases}\frac{x-y}{x+y}, & (x;\ y)\neq(0;\ 0),\\ 1, & (x;\ y)=(0;\ 0);\end{cases}$

ґ) $f(x,\ y)=\begin{cases}x^2+y^2+1, & (x;\ y)\neq(1;\ 2),\\ 6, & (x;\ y)=(1;\ 2);\end{cases}$

д) $f(x,\ y)=\begin{cases}2+x-y, & (x;\ y)\neq(1;\ 1),\\ 1, & (x;\ y)=(1;\ 1).\end{cases}$

▲ З рівності (2) дістаємо такі умови неперервності функції f в точці $(x_0;\ y_0)$: 1) функція визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$; 2) існує границя функції в цій точці; 3) ця границя дорівнює значенню функції в точці $(x_0; y_0)$.

а) Задана функція визначена при всіх $(x; y) \in \mathbb{R}_2$, крім точки (0; 0), яка є точкою розриву. У всіх інших точках площини функція неперервна як частка двох неперервних функцій.

б) Функція розривна в кожній точці кола $x^2 + y^2 = 4$, яке є лінією розриву. В інших точках $(x; y) \in \mathbb{R}_2$ вона неперервна.

в) Функція визначена на всій площині, однак вона не має границі в точці (0; 0) (див. приклад 5), тому ця точка є точкою розриву. У всіх інших точках площини xOy функція неперервна.

г) У даному випадку потрібно дослідити поведінку функції лише в точці (1; 2), оскільки в усіх інших точках вона неперервна. Маємо

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x^2 + y^2 + 1) = 6 = f(1; 2).$$

Отже, і в цій точці функція неперервна.

д) У всіх точках $(x; y) \neq (1; 1)$ функція неперервна (чому?). У точці (1; 1) існує границя заданої функції $(\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} f(x, y) = 2)$, однак вона не дорівнює значенню функції в цій точці $(f(1; 1) = 1)$, тому ця точка є точкою розриву. ▼

Вправи

1. Зобразити об'єм V циліндра як функцію радіуса основи R і висоти H.

Відповідь: $V = \pi R^2 H$.

2. Вершини прямокутного трикутника лежать всередині круга радіуса R. Виразити залежність площі S цього трикутника від його катетів x і y. Знайти область визначення цієї функції і область існування відповідного аналітичного виразу.

Відповідь: $x^2 + y^2 < 4R^2$; $(x; y) \in \mathbb{R}_2$.

3. Для визначення дальності D освітлення маяком (в кілометрах) в залежності від висоти ліхтаря H і висоти спостерігача над рівнем моря h користуються формулою $D = 3{,}85\,(\sqrt{H} + \sqrt{h})$, де H і h задаються в метрах. Обчислити D при $H = 81$ м і $h = 16$ м.

Відповідь: 50,05 км.

4. Визначити та зобразити область визначення таких функцій:

1) $z = \dfrac{1}{2x + y}$; 2) $z = \dfrac{x}{y}$; 3) $z = \sqrt{y - x}$;

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$; 5) $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

6) $z=\frac{1}{\sqrt{x-y}}+\frac{1}{\sqrt{y+x}}$; 7) $z=\ln\frac{x-1}{y+3}$;

8) $z=\ln\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)$; 9) $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}$;

10) $z=\frac{\ln x^2y}{\sqrt{y-x}}$; 11) $z=\arcsin\frac{x}{2}+\arccos\frac{y}{3}$;

12) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; 13) $z=x\sqrt{\sin\pi y}$.

Відповідь: 1) $y\neq-2x$; 2) без точок осі Ox; 3) $y\geqslant x$; 4) $x^2+y^2\geqslant 9$; 5) внутрішня частина круга $x^2+y^2<1$; 6) внутрішня частина правого вертикального кута, утвореного бісектрисами координатних кутів; 7) $x>1$, $y>-3$ або $x<1$, $y<-3$; 8) частина площини, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; 9) круг радіуса 2 з центром у початку координат; 10) $y>x$, $y>0$, $x\neq 0$; 11) $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-3\leqslant y\leqslant 3$; 12) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $y\leqslant x^2$; 13) $x\in\mathbb{R}$, $2k\leqslant y\leqslant 1+2k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. Описати системою нерівностей вигляду $\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b,\\ \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\end{cases}$ такі області: 1) паралелограм, рівняння сторін якого $x=1$, $x=4$, $2y-4x+2=0$ і $3y-6x-9=0$; 2) область, обмежену кривими $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$ (див. рис. 32).

Відповідь: 1) $1\leqslant x\leqslant 4$, $2x-1\leqslant y\leqslant 2x+3$; 2) $x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

6. Визначити лінії або поверхні рівня функцій:

1) $z=\frac{x}{y}$; 2) $z=x^2-y^2$; 3) $u=2^{3x-y+z}$.

Відповідь: 1) $y=Cx$; 2) $C=x^2-y^2$ — сім'я гіпербол; 3) $3x-y+z=C$ — сім'я площин.

7. Описати і побудувати графіки функцій:

1) $z=2x^2+y^2$; 2) $z=xy$; 3) $\sqrt{x^2+y^2}=z$.

Відповідь: 1) еліптичний параболоїд; 2) гіперболічний параболоїд; 3) конус з вершиною в точці (0; 0; 0).

8. Користуючись означенням границі, довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2-y+5)=4$.

9. Показати, що $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не має границі в точці (0; 0).

10. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3}{x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 3}}\frac{x-y}{x^2+3x-xy-3y}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+y^4+x^3y^2}{x^4+y^4}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg}x^2y}{y}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$.

Відповідь: 1) 0; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 1; 4) 4; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) e.

11. Дослідити задані функції на неперервність і вказати точки або лінії розриву, якщо вони є:

1) $z = \dfrac{x+1}{x^2+y^2-1}$; 2) $z = \dfrac{x+y}{x^3-y^3}$; 3) $z = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$;

4) $z = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x;\ y) \neq (0;\ 0), \\ 0, & (x;\ y) = (0;\ 0); \end{cases}$

5) $z = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{2x}, & (x;\ y) \neq (0;\ 1), \\ 1, & (x;\ y) = (0;\ 1). \end{cases}$

Відповідь: 1) $x^2+y^2=1$ — лінія розриву; 2) лінія розриву $y = x$; 3) лінії розриву — прямі $x = k\pi$ і $y = m\pi$, де k, $m \in \mathbb{Z}$; 4) функція неперервна; 5) $(0;\ 1)$ — точка розриву.

12. Довизначити функції у вказаних точках, щоб вони стали неперервними в цих точках:

1) $z = \dfrac{\sin 3xy}{x}$, $(0;\ 2)$; 2) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(0;\ 0)$.

§ 11.2. Частинні похідні першого і вищих порядків

Нехай функція $z = f(x;\ y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$.

Частинною похідною функції f в точці $(x_0;\ y_0)$ за змінною x (позначають $f'_x(x_0,\ y_0)$ або $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)$) називають

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0,\ y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}.$$

Величина $\Delta_x f(x_0,\ y_0) = f(x_0+\Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)$ називається *частинним приростом функції* f в точці $(x_0;\ y_0)$ за змінною x.

Аналогічно вводяться поняття частинного приросту і частинної похідної за змінною y. Сформулюйте ці означення.

Геометричний зміст частинної похідної: $f'_x(x_0,\ y_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до кривої $z = f(x,\ y_0)$ в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, де $z_0 = f(x_0,\ y_0)$. Аналогічно дається геометрична інтерпретація частинної похідної за змінною y.

Крім того, частинна похідна за змінною x характеризує *швидкість зміни функції* f при зміні x, а f'_y — при зміні y.

Сформулюйте означення частинних похідних функції n змінних.

Частинні похідні обчислюють за звичайними правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної (див. § 7.1). При цьому решта змінних розглядаються як сталі.

Якщо похідні визначають в довільній точці $(x; y) \in D(f)$, то використовують також позначення $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ або z'_x, z'_y.

Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні від її частинних похідних першого порядку і позначають

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = z''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}.$$

Аналогічно означаються частинні похідні третього і вищих порядків. Наприклад,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z'''_{xy^2}.$$

Частинні похідні вищого порядку, в яких диференціювання здійснюється за різними змінними, називають *мішаними*. Якщо вони відрізняються лише порядком диференціювання і є неперервними в деякій точці, то ці частинні похідні рівні між собою в даній точці. Наприклад, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

ПРИКЛАДИ

1. Визначити частинні похідні таких функцій:

а) $z = 3x^2 + xy^3 + y^2$; б) $z = \frac{x}{y} + \cos xy - \ln(x^2 + y^2)$; в) $z = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{xy}}$.

▲ При знаходженні частинної похідної за змінною x змінна y вважається сталою. Користуючись правилами і формулами диференціювання (див. § 7.1), знаходимо:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2 + 2y$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - y\sin xy - \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - x\sin xy - \frac{2y}{x^2 + y^2}$;

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{1+xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{xy}} \times$
$\times \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}\,(1+xy)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{1+xy} \cdot \frac{x}{2\sqrt{xy}} = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{xy}}\, \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}\,(1+xy)}. \blacktriangledown$$

2. Обчислити значення частинних похідних у заданих точках:

а) $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x;\ y) = (3;\ 4)$; б) $f(x, y) = y^x$, $(x;\ y) = (2;\ 1)$.

▲ а) Спочатку визначаємо частинні похідні в довільній точці з $D(f)$:

$$f'_x(x,\ y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f'_y(x,\ y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Покладаючи $x = 3$ і $y = 4$, дістаємо

$$f'_x(3;\ 4) = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \quad f'_y(3;\ 4) = \frac{4}{5}.$$

б) Аналогічно попередньому маємо $f'_x = y^x \ln y$, $f'_y = xy^{x-1}$, $f'_x(2;\ 1) = \ln 1 = 0$, $f'_y(2;\ 1) = 2 \cdot 1 = 2$. ▼

3. Показати, що функція $z = \ln(e^x + e^y)$ задовольняє рівняння $z'_x + z'_y = 1$.

▲ Знаходимо частинні похідні та обчислюємо їх суму. Маємо

$$z'_x = \frac{e^x}{e^x+e^y}, \quad z'_y = \frac{e^y}{e^x+e^y}, \quad z'_x + z'_y = \frac{e^x}{e^x+e^y} +$$
$$+ \frac{e^y}{e^x+e^y} = \frac{e^x+e^y}{e^x+e^y} = 1. \blacktriangledown$$

4. $z = \cos(2x - y)$. Визначити z'''_{x^2y}.

▲ Знаходимо $z'_x = -\sin(2x - y)\,2 = -2\sin(2x - y)$. Диференціюючи за змінною x одержаний вираз, маємо $z''_{xx} = -4\cos(2x - y)$. Нарешті,

$$z'''_{x^2y} = (-4\cos(2x-y))'_y = 4\sin(2x-y)(-1) =$$
$$= -4\sin(2x-y). \blacktriangledown$$

5. $z = xy^3$. Показати, що $z'''_{xy^2} = z'''_{yxy}$.

▲ Для обчислення лівої частини рівності потрібно задану функцію продиференціювати спочатку за змінною x, а потім одержану функцію двічі продиференціювати за змінною y. Маємо $z'_x = y^3$, $z''_{xy} = 3y^2$, $z'''_{xy^2} = 6y$. Праву частину рівності дістанемо, якщо z спочатку продиференціюємо за змінною y, потім за змінною x, а потім знову за змінною y. Отже, маємо $z_y = 3xy^2$, $z''_{yx} = 3y^2$, $z'''_{yxy} = 6y$. Помічаємо, що мішані похідні рівні між собою. Поясніть, чому це так. ▼

6. У теорії теплопровідності важливу роль відіграє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Показати, що функція $u(x, t) = e^{-at} \times \sin x$ є розв'язком цього рівняння.

▲ Обчислимо вказані похідні: $\frac{\partial u}{\partial t} = -ae^{-at}\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-at}\cos x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-at}\sin x$. Підставляючи значення $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в задане рівняння, дістаємо тотожність, яка доводить наше твердження. ▼

Вправи

1. Знайти частинні похідні від функцій:

1) $z = 2x + 3y$; 2) $z = x^3y^2$; 3) $z = x^3 + 3xy^2 + y^3$; 4) $z = (x^2+y^2)^3$; 5) $z = \frac{xy}{x+y}$; 6) $z = x^{2y}$; 7) $z = e^{xy}$; 8) $z = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}$; 9) $z = e^{\frac{x}{y}}$; 10) $z = \sin(x^3 + y^2)$; 11) $z = \sqrt[3]{x^3 + y^2}$; 12) $z = \ln(2^x + 3^y)$; 13) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$; 14) $z = \sin\frac{1}{x+y}$; 15) $z = \ln \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Відповідь: 1) $z'_x = 2$, $z'_y = 3$; 2) $z'_x = 3x^2y^2$, $z'_y = 2x^3y$; 3) $z'_x = 3x^2 + 3y^2$, $z'_y = 6xy + 3y^2$; 4) $z'_x = 6x(x^2+y^2)^2$, $z'_y = 6y(x^2+y^2)^2$; 5) $z'_x = \frac{y^2}{(x+y)^2}$, $z'_y = \frac{x^2}{(x+y)^2}$; 6) $z'_x = 2yx^{2y-1}$, $z'_y = 2x^{2y}\ln x$; 7) $z'_x = ye^{xy}$, $z'_y = xe^{xy}$; 8) $z'_x = \frac{2xy}{y^2+x^4}$, $z'_y = -\frac{x^2}{y^2+x^4}$; 9) $z'_x = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$, $z'_y = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$; 10) $z'_x = 3x^2\cos(x^3+y^2)$, $z'_y = 2y\cos(x^3+y^2)$; 11) $z'_x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^2)^2}}$, $z'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^3+y^2)^2}}$; 12) $z'_x = \frac{2^x\ln 2}{2^x+3^y}$, $z'_y = \frac{3^y\ln 3}{2^x+3^y}$; 13) $z'_x = -\frac{2x}{1-x^2-y^2}$, $z'_y = -\frac{2y}{1-x^2-y^2}$; 14) $z'_x = z'_y = -\frac{1}{(x+y)^2}\cos\frac{1}{x+y}$; 15) $z'_x = -\frac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}$, $z'_y = \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}$.

2. Згідно із законом Ома, сила струму обчислюється за формулою $I = \frac{V}{R}$. Знайти $\frac{\partial I}{\partial V}$ і $\frac{\partial I}{\partial R}$. Пояснити, що характеризують ці похідні.

Відповідь: $\frac{I}{R}$, $-\frac{V}{R^2}$.

3. Горизонтальна складова H напруженості магнітного поля земного магнетизму визначається за формулою $H = \frac{A}{T\sqrt{\sin\varphi}}$, де T — період коливання маятника, φ — кут його відхилення, A — деяка стала. Визначити H'_T і H'_φ.

Відповідь: $H'_T = -\frac{H}{T}$, $H'_\varphi = -\frac{H}{2\sin\varphi}$.

4. Показати, що функція $z = x\ln\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

5. $f(x, y) = e^{-\frac{y}{x}}$. Обчислити $f'_x(1, 0)$ і пояснити геометричний зміст цієї похідної.

Відповідь: 0.

6. $f(x, y) = y\sqrt[3]{x}$. Обчислити $f'_x(1, 1)$ і $f'_y(1, 1)$.

Відповідь: $1/_3$; 1.

7. Обчислити похідні D'_H і D'_h функції, розглянутої у вправі **3**, § 11,1, і пояснити, що вони характеризують.

Відповідь: $\frac{1{,}925}{\sqrt{H}} \approx 0{,}2$; $\frac{1{,}925}{\sqrt{h}} \approx 0{,}5$.

8. Знайти частинні похідні другого порядку від функцій:

1) $z = x^2y - xy^2 + 5$; 2) $z = (x^2 + y^2)^3$; 3) $z = e^{x+y^2}$;

4) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; 5) $z = y^x$.

Відповідь: 1) $z''_{xx} = 2y$, $z''_{xy} = 2(x - y)$, $z''_{yy} = -2x$; 2) $6(x^2 + y^2)(5x^2 + y^2)$, $24xy(x^2 + y^2)$, $6(x^2 + y^2)(x^2 + 5)$; 3) e^{x+y^2}, $2ye^{x+y^2}$, $2(1 + 2y^2)e^{x+y^2}$; 4) $-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; 5) $y^x\ln^2 y$, $y^{x-1}(x\ln y + 1)$, $x(x - 1)y^{x-2}$.

9. $z = x^2\ln y$. Довести, що $z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$.

10. $z = x^2e^y$. Знайти $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$.

Відповідь: $2e^y$.

11. Якщо розмістити струну вздовж осі Ox і закріпити на кінцях, то після виведення її зі стану рівноваги вона почне коливатися і її зміщення $u(x, t)$ в момент часу t задовольнятиме рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, яке називається *рівнянням коливання струни*. Показати, що функція $u = C\sin\lambda t\cos a\lambda t$, де C, λ і a — сталі, задовольняє це рівняння.

§ 11.3. Диференціали першого і вищих порядків. Дотична площина і нормаль до поверхні

Вираз $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називається *повним приростом функції* f. Якщо

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha, \tag{1}$$

де $\alpha = \alpha(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, то функція f називається *диференційовною* в точці $(x_0; y_0)$, а вираз

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \tag{2}$$

— *повним диференціалом* або просто *диференціалом функції* f. З (2) випливає, що $dx = \Delta x$ і $dy = \Delta y$ (покажіть це). Тоді рівність (2) можна записати ще так:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy. \tag{3}$$

Диференціал функції називають ще *головною лінійною частиною приросту* Δf функції f. Обгрунтуйте справедливість такого означення.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці множини $D \subset \mathbb{R}_2$, то вона називається *диференційовною на цій множині*. У цьому випадку диференціал позначають df або dz.

Аналогічно означається диференціал функції n змінних. Сформулюйте це означення і запишіть відповідну формулу для df. Чим відрізняється означення диференційовної функції однієї змінної від аналогічного означення для функції n змінних?

Якщо частинні похідні f'_x і f'_y неперервні в точці $(x_0; y_0)$, то функція f диференційовна в точці $(x_0; y_0)$ *(достатня умова диференційовності функції)*.

При досить малих Δx і Δy для диференційовної функції f в точці $(x_0; y_0)$ має місце наближена формула $\Delta f(x_0, y_0) \approx \approx df(x_0, y_0)$, звідки

$$f(x_0 + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0). \tag{4}$$

Якщо df є диференційовною функцією в точці $(x; y)$, то *диференціалом другого порядку* функції f називається диференціал від диференціала першого порядку і позначається d^2f, тобто $d^2f = d(df)$. Диференціал другого порядку обчислюється за формулою

$$d^2f = d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{5}$$

Для обчислення диференціалів вищих порядків користуються символічною формулою

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z,$$

яка формально розкривається за біноміальним законом.

Запишіть формулу для визначення $d^3 z$.

Рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0; z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$, має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \qquad (6)$$

а рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (7)$$

ПРИКЛАДИ

1. $z = \frac{x^2}{y}$. Знайти dz і $d^2 z$.

▲ Знайдемо частинні похідні першого і другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}.$$

Тоді за формулою (3) для довільної точки $(x; y)$, $y \neq 0$, маємо

$$dz = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy,$$

а за формулою (5) дістаємо

$$d^2 z = \frac{2}{y} dx^2 - \frac{4x}{y^2} dx dy + \frac{2x^2}{y^3} dy^2. \ ▼$$

2. Для функції $z = 3x^2 - xy + 2y - 1$ обчислити повний приріст і повний диференціал у точці (2; 1) при $\Delta x = 0{,}1$ і $\Delta y = 0{,}2$. Оцінити абсолютну і відносну похибки, які допускаються при заміні повного приросту функції її диференціалом.

▲ За означенням маємо

$$\Delta f(x, y) = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y) + 2(y + \Delta y) - 1 - 3x^2 + xy - 2y + 1 = (6x - y)\Delta x + 3\Delta x^2 + (2 - x)\Delta y - \Delta x \Delta y.$$

Користуючись формулою (2), знайдемо

$$df = (6x - y)\,\Delta x + (2 - x)\,\Delta y.$$

Підставляючи у вирази для Δf і df значення $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}1$ і $\Delta y = 0{,}2$, дістаємо:

$$\Delta f(2, 1) = (6 \cdot 2 - 1)\,0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1^2 + (2 - 2)\,0{,}2 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 1{,}11;$$

$$df(2,\ 1) = (12 - 1)\,0{,}1 + (2 - 2)\,0{,}2 = 1{,}1.$$

Тоді абсолютна похибка $\delta = |\,\Delta f - df\,| = 1{,}11 - 1{,}1 = 0{,}01$, а відносна похибка $\beta = \left|\frac{\Delta f - df}{\Delta f}\right| = \frac{0{,}01}{1{,}11} = \frac{1}{111} \approx 1\ \%$. ▼

3. Обчислити наближено: а) $1{,}02^{3{,}04}$; б) $\sin 29° \operatorname{tg} 46°$.

▲ а) Розглянемо функцію $f(x, y) = x^y$ в околі точки (1; 3). Уведемо позначення $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, де $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}02$ і $\Delta y = 0{,}04$. Для обчислення $f(1{,}02;\ 3{,}04)$ скористаємось формулою (4). Маємо $f(1, 3) = 1^3 = 1$; $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_x(1, 3) = 3$; $f'_y = x^y \ln x$, $f'_y(1, 3) = 0$. Тоді

$$df(1,\ 3) = f'_x(1,\ 3)\,\Delta x + f'_y(1,\ 3)\,\Delta y = 3\Delta x = 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}06.$$

Підставляючи значення $f(1, 3)$ і $df(1, 3)$ у праву частину формули (4), дістаємо $1{,}02^{3{,}04} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

б) Уводимо в розгляд функц ю $f(x, y) = \sin x \operatorname{tg} y$. Тоді $f'_x = \cos x \operatorname{tg} y$, $f'_y = \frac{\sin x}{\cos^2 y}$. Покладемо $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = 45° = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = -1° = -\frac{\pi}{180}$ і $\Delta y = 1° = \frac{\pi}{180}$. Тоді

$$f\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},\quad f'_x\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'_y\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Отже, за формулою (4) дістаємо

$$\sin 29°\ \operatorname{tg} 46° \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) + 1 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}502,\quad \pi \approx 3{,}1416.$$ ▼

4. Момент інерції кругового кільця обчислюється за формулою $I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$, де D — зовнішній діаметр кільця, а d — внутрішній. Відомо, що максимальна абсолютна похибка при вимірюванні діаметра дорівнює 0,01 см. Обчислити максимальну абсолютну похибку при обчисленні моменту інерції кільця, якщо $D = 7{,}2$ см і $d = 4{,}1$ см.

▲ Нехай δ — максимальна абсолютна похибка при визначенні I. Тоді

$$\delta = |dI| = |I'_D||\Delta D| + |I'_d||\Delta d|.$$

Знаходимо $I'_D = \frac{\pi}{16}D^3$, $I'_d = -\frac{\pi}{16}d^3$ і $I'_D(7{,}2;\ 4{,}1) = 73{,}29$, $I'_d(7{,}2;\ 4{,}1) = -13{,}53$. Враховуючи, що за умовою $|\Delta D| = |\Delta d| = 0{,}01$, дістаємо

$$\delta = (73{,}29 + 13{,}53)\,0{,}01 = 0{,}8682 \approx 0{,}87.$$ ▼

5. Записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2 + 4$ в точці $M(1;\ 2;\ 9)$.

▲ Знайдемо частинні похідні заданої функції та їх значення в точці M. Маємо $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_x(M) = 2$; $f'_y(x, y) = 2y$, $f'_y(M) = 4$. За формулами (6) і (7) дістанемо відповідно рівняння дотичної площини і нормалі:

$$z - 9 = 2(x - 1) + 4(y - 2) \text{ або } 2x + 4y - z - 1 = 0$$

і

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-9}{-1}.$$ ▼

Вправи

1. Визначити dz і d^2z для функцій:

1) $z = x^3y^2 + xy^4$; 2) $z = \sin xy$; 3) $z = \ln(x^2 + y^2)$; 4) $z = x^y$.

Відповідь: 1) $y^2(3x^2 + y^2)\,dx + 2xy(x^2 + 2y^2)\,dy$, $6xy^2dx^2 + 4y(3x^2 + 2y^2)\,dxdy + 2x(x^2 + 6y^2)\,dy^2$; 2) $\cos xy\,(ydx + xdy)$, $-y^2\sin xy\,dx^2 + 2(\cos xy - yx\sin xy)\,dxdy - x^2\sin xy\,dy^2$;

3) $\frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2}$, $\frac{2}{(x^2 + y^2)^2}((y^2 - x^2)\,dx^2 - 4xydxdy + (x^2 - y^2)\,dy^2)$;

4) $x^y\left(\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right)$, $x^{y-2}(y(y-1)\,dx^2 + 2x(y\ln x + 1)\,dxdy + x^2\ln^2 x dy^2)$.

2. Знайти d^3z, якщо $z = xy^2$.

Відповідь: $6dxdy^2$.

3. Обчислити значення повного диференціала функції $z = e^{xy}$ при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$.

Відповідь: 0,25e.

4. Для функції $z = 5x^2 - xy + 3y^2 + 5x + 2y - 1$ знайти повний приріст і повний диференціал у точці (1; 2) при $\Delta x = 0{,}1$ і $\Delta y = 0{,}2$. Оцінити абсолютну δ і відносну β похибки, які допускаються при заміні повного приросту функції її диференціалом.

Відповідь: $\Delta z = 4{,}05$; $dz = 3{,}9$; $\delta = 0{,}15$; $\beta \approx 4$ %.

5. Обчислити наближено, не використовуючи мікрокалькулятора:

1) $1{,}04^{2{,}02}$; 2) $\ln(0{,}09^2 + 0{,}99^2)$; 3) $\sqrt[3]{3{,}02^2 - 0{,}98}$.

Відповідь: 1) 1,08; 2) —0,02; 3) 2,012.

6. Радіус основи конуса дорівнює $(10{,}2 \pm 0{,}1)$ см, твірна дорівнює $(44{,}6 \pm 0{,}1)$ см. Обчислити об'єм конуса і вказати похибку підрахунку.

Відповідь: (4730 ± 100) см^3.

7. Період коливання маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l — довжина маятника, g — прискорення вільного падіння. Яку відносну похибку при визначенні T ми допускаємо, покладаючи $\pi = 3{,}14$ (з точністю до 0,005), $l = 1$ м (з точністю до 0,01 м), $g = 9{,}8$ м/с^2 (з точністю до 0,02 м/с^2)?

Вказівка. Розглядати T як функцію трьох змінних π, l і g.

8. Потрібно виготовити циліндричний стакан, висота якого $H = 40$ см, внутрішній радіус основи $R = 25$ см і товщина стінок $d = 1$ см. Обчислити наближено об'єм матеріалу, витраченого на його виготовлення.

Відповідь: 0,01 м^3.

§ 11.4. Диференціювання складних та неявно заданих функцій

Якщо $z = f(x, y)$ — диференційовна функція змінних x і y, які, в свою чергу, є диференційовними функціями незалежної змінної t, тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то існує повна похідна $\frac{dz}{dt}$ складної функції $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ за змінною t, яка обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Зокрема, якщо t збігається із змінною x, то повна похідна $\frac{dz}{dx}$ функції z за змінною x дорівнює

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Поясніть, чим відрізняється похідна $\frac{dz}{dx}$ від похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Нехай $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$ і $y = \psi(u, v)$. Частинні похідні складної функції $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ за u і v обчислюються так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3)$$

Вкажіть умови, яким повинні задовольняти функції f, φ і ψ, щоб формули (3) мали місце.

Повний диференціал складної функції має вигляд

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (4)$$

де dx і dy є повними диференціалами x і y. Користуючись цією властивістю інваріантності форми першого диференціала, маємо

$$d(Cu)=Cdu;\quad d(u\pm v)=du\pm dv;$$
$$d(uv)=udv+vdu;\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},\quad v\neq 0, \qquad (5)$$

де u і v — довільні диференційовні функції n змінних.

Якщо змінні x і y пов'язані рівнянням $F(x, y)=0$, що не розв'язане відносно y, то говорять, що це рівняння при певних умовах задає неявну функцію $y=f(x)$, похідна якої $\frac{dy}{dx}$ обчислюється за формулою

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \qquad (6)$$

Аналогічно рівняння $F(x, y, z)=0$ визначає неявну функцію $z=f(x, y)$ двох змінних x і y, частинні похідні якої $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ обчислюються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \qquad (7)$$

Сформулюйте умови, які потрібно накласти на функцію F, щоб були справедливими формули (6) і (7).

1. $z = x^3 + xy^2$, $x = e^t$, $y = \sin t$. Знайти $\frac{dz}{dt}$.

▲ За формулою (1) маємо $\frac{dz}{dt} = (3x^2 + y^2)\,e^t + 2xy\cos t$. Підставляючи замість x і y їх вирази через t, дістаємо

$$\frac{dz}{dt} = (3e^{2t} + \sin^2 t)\,e^t + 2e^t \sin t \cos t =$$
$$= e^t(3e^{2t} + \sin^2 t + \sin 2t).$$

Ця похідна існує при всіх $t \in \mathbb{R}$, оскільки функція $z = x^3 + xy^2$ диференційовна в усій площині xOy (її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні при всіх $(x, y) \in \mathbb{R}_2$), а функції $x = e^t$ і $y = \sin t$ диференційовні при всіх $t \in \mathbb{R}$, бо існують їх похідні. ▼

2. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y = \sqrt{x^2+1}$. Знайти $\frac{dz}{dx}$.

▲ Скористаємось формулою (2). Тут частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ скрізь неперервні, крім точок, для яких $x = 0$ (вісь Oy), а функція $y = \sqrt{x^2+1}$ диференційовна при всіх $x \in \mathbb{R}$, тому повна похідна $\frac{dz}{dx}$ існуватиме для всіх $x \neq 0$ і дорівнюватиме

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Зверніть увагу на те, що повна похідна $\frac{dz}{dx}$ відрізняється від частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$, яку обчислюють за умови, що y — величина стала.

Підставляючи замість y його значення через x, дістаємо

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+x+1} + \frac{x^2}{(x^2+x^2+1)\sqrt{x^2+1}} =$$
$$= -\frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.\ ▼$$

3. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2y - xy^2$, $x = u\sin v$, $y = v\cos u$.

▲ Оскільки частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні, а $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ і $\frac{\partial y}{\partial v}$ існують, то можемо скористатись формулами (3) для будь-яких точок $(x;\ y) \in \mathbb{R}_2$ і $(u;\ v) \in \in \mathbb{R}_2$. Отже, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^2)\sin v + (x^2 - 2xy)(-v\sin u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (2xy - y^2)u\cos v + (x^2 - 2xy)\cos u.$$

Замінюючи x і y їх виразами через u і v, остаточно дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = uv\sin^2 v\,(2\cos u - u\sin v) + v^2\sin v\cos u \times \times (2u\sin u - \cos u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2uv\sin v\cos u\,(u\cos v - 1) + + u\cos u\,(u\sin^2 v - v^2\cos u\cos v).$$ ▼

4. Багато задач математичної фізики приводять до розгляду так званого рівняння Лапласа, яке має вигляд $u''_{xx} + + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$. Показати, що функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ задовольняє це рівняння.

▲ Уведемо нову змінну $r = x^2 + y^2 + z^2$ і запишемо функцію у вигляді $u = \frac{1}{\sqrt{r}} = r^{-\frac{1}{2}}$. Можна розглядати цю функцію як складну функцію від аргументів x, y і z, де проміжним аргументом є змінна r. Обчислимо спочатку частинні похідні першого порядку, користуючись правилом диференціювання складної функції. Маємо

$$u'_x = u'_r \cdot r'_x = -\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -xr^{-\frac{3}{2}}; \quad u'_y = -yr^{-\frac{3}{2}};$$

$$u'_z = -zr^{-\frac{3}{2}}.$$

Частинні похідні другого порядку знайдемо, користуючись означенням і правилом диференціювання складної функції:

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x = \left(-xr^{-\frac{3}{2}}\right)'_x = -\left(r^{-\frac{3}{2}} + x\left(-\frac{3}{2}\right)r^{-\frac{5}{2}}r'_x\right) =$$

$$= \frac{3x^2 - r}{r^2\sqrt{r}}; \quad u''_{yy} = \frac{3y^2 - r}{r^2\sqrt{r}}; \quad u''_{zz} = \frac{3z^2 - r}{r^2\sqrt{r}}.$$

Тоді

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = \frac{3x^2 - r + 3y^2 - r + 3z^2 - r}{r^2\sqrt{r}} =$$

$$= \frac{3r^2 - 3r^2}{r^2\sqrt{r}} = 0. \ \blacktriangledown$$

5. Обчислити dz, якщо $z = u^2 + v^2$, $u = \frac{x^2 - y^2}{2}$, $v = xy$.

▲ За формулою (4) для складної функції маємо

$$dz = z'_u du + z'_v dv.$$

Обчислимо похідні і диференціали, які входять до складу цієї формули:

$$z'_u = 2u, \ z'_v = 2v; \quad du = u'_x dx + u'_y dy =$$

$$= xdx - ydy, \ dv = xdy + ydx.$$

Тоді

$$dz = 2u(xdx - ydy) + 2v(xdy + ydx) = dx(x^3 - xy^2 +$$

$$+ 2xy^2) + dy(y^3 - x^2y + 2x^2y) =$$

$$= (x^3 + xy^2)dx + (y^3 + x^2y)dy.$$

Цей же диференціал можна обчислити іншим способом, користуючись безпосередньо формулами (5), а саме:

$$dz = d(u^2) + d(v^2) = 2udu + 2vdv =$$

$$= 2\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)(xdx - ydy) + 2xy(xdy + ydx) =$$

$$= (x^3 + xy^2)dx + (y^3 + x^2y)dy. \ \blacktriangledown$$

6. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $x^2 + 2xy^2 + y^4 = 0$.

▲ Позначимо ліву частину цього рівняння через $F(x, y)$. Функція F визначена і неперервна $\forall (x; y) \in \mathbb{R}_2$. Знайдемо її частинні похідні $F'_x = 2x + 2y^2$ і $F'_y = 4xy + 4y^3$. Ці похідні неперервні при всіх $(x; y) \in \mathbb{R}_2$, тому за формулою (6) маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2y^2}{4xy + 4y^3} = -\frac{x + y^2}{2y(x + y^2)} = -\frac{1}{2y},$$

причому ця похідна існує скрізь, крім точок $(x; y)$, де $xy + y^3 = 0$. ▼

7. Знайти dz, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$.

▲ *Перший спосіб.* Розглядаючи z як неявну функцію змінних x і y, обчислимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ за формулами (7):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z-2} = \frac{x}{1-z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z-2} = \frac{y}{1-z}.$$

Скористаємось формулою (4) для повного диференціала:

$$dz = \frac{x}{1-z}dx + \frac{y}{1-z}dy.$$

Другий спосіб. Диференціюючи рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, дістаємо $2xdx + 2ydy + 2zdz - 2dz = 0$, звідки

$$dz = \frac{2xdx + 2ydy}{2-2z} = \frac{x}{1-z}dx + \frac{y}{1-z}dy. ▼$$

Вправи

1. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо: а) $z = x^2 + xy + y^2$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$; б) $z = \sin\frac{x}{y}$, де $x = e^t$, $y = t^2$.

Відповідь: а) $\cos 2t$; б) $(t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$.

2. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \frac{x^2-y}{x^2+y}$, $y = 3x+1$.

Відповідь: $\frac{2x(3x+2)}{(x^2+3x+1)^2}$.

3. $z = x^2 + y^2$, $x = u + v$, $y = u - v$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Відповідь: $4u$; $4v$.

4. $z = u \ln v$, $u = 2x + y$, $v = x - y^2$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Відповідь: $2\ln(x-y^2) + \frac{2x+y}{x-y^2}$; $\ln(x-y^2) - \frac{2y(2x+y)}{x-y^2}$.

5. Знайти dz і d^2z, якщо $z = uv$, $u = \sin x$, $v = \cos y$.

Відповідь: $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy$; $-(\sin x \cos y dx^2 + 2\cos x \sin y dx dy + \sin x \cos y dy^2)$.

6. Увівши допоміжну змінну, показати, що функція $z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

7. Знайти $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно:

1) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; 2) $xy - \ln y = 0$; 3) $yx^2 = e^y$.

Відповідь: 1) $\frac{y-x^2}{y^2-x}$; 2) $\frac{y^2}{xy-1}$; 3) $\frac{2y}{x(y-1)}$.

8. $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$. Знайти $\frac{dy}{dx}$ при $x = 2$, $y = 0$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

9. Знайти z'_x і z'_y, якщо:

1) $x^2 + y^2 - xz + yz = 0$; 2) $e^z - xyz = 0$.

Відповідь: 1) $\frac{2x - z}{x - y}$, $\frac{2y + z}{x - y}$; 2) $\frac{yz}{e^z - xy}$, $\frac{xz}{e^z - xy}$.

10. Обчислити dz (двома способами), якщо:
1) $xz + xy + yz = 1$; 2) $z^3 + 3xyz = 0$.

Відповідь: 1) $-\frac{z + y}{x + y}dx - \frac{x + z}{x + y}dy$;

2) $-\frac{yz}{xy + z^2}dx - \frac{xz}{xy + z^2}dy$.

§ 11.5. Екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції

Функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ *максимум (мінімум)*, якщо існує такий окіл $O(M_0)$ точки M_0, що для всіх точок з проколеного околу $O^*(M_0)$ точки M_0 виконується нерівність

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f(x_0, y_0)).$$

Максимум і мінімум функції називають її *екстремумом*.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0; y_0)$, то $f'_x(x_0, y_0) = 0$ і $f'_y(x_0, y_0) = 0$ або $df(x_0, y_0) = 0$. У цьому випадку точка M_0 називається *стаціонарною*.

Сформулюйте означення екстремуму і необхідну умову його існування для функції n змінних.

Достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $z = f(x, y)$ двічі диференційовна в деякому околі $O(M_0)$ стаціонарної точки M_0. Уведемо позначення: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ екстремум, а саме: максимум при $A < 0$ $(C < 0)$ і мінімум при $A > 0$ $(C > 0)$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремум у точці M_0 відсутній;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні додаткові дослідження.

Для відшукання найбільшого $z_{\text{найб}}$ і найменшого $z_{\text{найм}}$ значень функції в обмеженій замкненій області користуються таким правилом.

I. Знаходять стаціонарні точки всередині заданої області і обчислюють значення функції в цих точках.

II. Знаходять найбільше і найменше значення функції на межі області.

III. Серед знайдених значень вибирають найбільше і найменше.

ПРИКЛАДИ

1. Дослідити на екстремум такі функції:

а) $z = 4 - x^2 - y^2$; б) $z = 3xy - x^3 - y^3$; в) $z = (y - x)^2 + (y + 2)^3$.

▲ а) Знайдемо стаціонарні точки. Для цього обчислимо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля: $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$; $z'_x = 0$ при $x = 0$, а $z'_y = 0$ при $y = 0$. Отже, маємо єдину стаціонарну точку $M_0(0; 0)$. Перевіримо виконання достатньої умови. Для цього обчислимо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx} = -2$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = -2$. Отже, $\Delta = AC - B^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0$, тобто виконується умова 1), і тому в точці (0; 0) існує екстремум. Оскільки $A < 0$, то це є максимум, який дорівнює $z_{\max} = f(0, 0) = 4$.

б) Знаходимо частинні похідні першого порядку і прирівнюємо їх до нуля: $z'_x = -3x^2 + 3y$, $z'_y = -3y^2 + 3x$; $3x^2 - 3y = 0$, $3y^2 - 3x = 0$. Розв'язуючи останню систему, дістаємо дві стаціонарні точки $M_1(0; 0)$ і $M_2(1; 1)$. Дослідимо ці точки за знаком визначника Δ, для чого знайдемо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx} = -6x$, $z''_{xy} = 3$, $z''_{yy} = -6y$. Для точки M_1 маємо $A = 0$, $B = 3$, $C = 0$ і $\Delta(M_1) = AC - B^2 = -9 < 0$. Отже, згідно з достатньою умовою 2), в точці M_1 екстремум відсутній. Для точки M_2 маємо $A = -6$, $B = 3$, $C = -6$ і $\Delta(M_2) = 3 \times 6 - 9 > 0$. Згідно з умовою 1), точка M_2 є точкою максимуму, причому $z_{\max} = f(1, 1) = 1$.

в) Маємо $z'_x = 2(x - y)$, $z'_y = 2(y - x) + 3(y + 2)^2$. Прирівнюючи ці похідні до нуля, знайдемо єдину стаціонарну точку $M_0(-2; -2)$. Оскільки $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{yy} = 2 + 6(y + 2)$, то для точки M_0 маємо $A = 2$, $B = -2$, $C = 2$ і $\Delta(M_0) = AC - B^2 = 0$. Згідно з умовою 3), потрібно провести додаткові дослідження. Маємо $z(-2, -2) = 0$ Дослідимо знак функції в деякому околі точки (—2; —2), наприклад уздовж прямої $y = x$. У цьому випадку $z =$

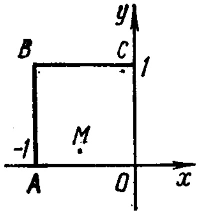

Рис. 71

$= (y + 2)^3$ і при $y < -2$ маємо $z < 0$, а при $y > -2$ маємо $z > 0$, тобто функція набуває різних за знаком значень в будь-якому околі точки $(-2;\ -2)$, отже, екстремум в цій точці відсутній. ▼

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в квадраті, обмеженому прямими $x = 0$, $x = -1$, $y = 0$ і $y = 1$ (рис. 71).

▲ I. Визначимо стаціонарні точки функції f, які містяться всередині заданої області: $z'_x = 2x + 1$, $z'_y = 6y - 1$;

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ 6y - 1 = 0, \end{cases} \quad x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{6}.$$

Маємо стаціонарну точку $M\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{6}\right)$, яка є внутрішньою точкою області. Значення функції в цій точці $z(M) = -\frac{1}{3}$.

II. Визначимо найбільше і найменше значення заданої функції на межі області.

На відрізку OC маємо $x = 0$, тому функція запишеться у вигляді $z(0,\ y) = z_1 = 3y^2 - y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Таким чином, нам треба дослідити на екстремум функцію однієї змінної. Згідно з правилом, вказаним в § 7.7, маємо $z'_1 = 6y - 1$, $6y - 1 = 0$, $y = \frac{1}{6}$, $z_1\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$. Крім того, у кінцях проміжку маємо $z(O) = 0$, $z(C) = 2$.

На відрізку BC маємо $y = 1$ і $z(x,\ 1) = z_2 = x^2 + x + 2$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Отже, $z'_2 = 2x + 1$, $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $z_2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{3}{4}$, $z(B) = 2$.

На відрізку AB $x = -1$ і $z(-1,\ y) = z_3 = 3y^2 - y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. На цьому відрізку маємо стаціонарну точку $y = \frac{1}{6}$ і $z_3\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$, $z(A) = 0$.

На відрізку AO маємо $y = 0$ і $z(x,\ 0) = z_4 = x^2 + x$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Тоді $z'_4 = 2x + 1$, $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $z_4\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

III. Порівнюючи значення $z(M) = -\frac{1}{3}$, $z_1\left(\frac{1}{6}\right) =$

$= z_3\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$, $z(O) = z(A) = 0$, $z(C) = z(B) = 2$, $z_2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{3}{4}$, $z_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, приходимо до висновку, що найбільшого значення функція набуває на межі області в точках B і C: $z_{\text{найб}} = 2$, а найменшого — всередині області в точці M: $z_{\text{найм}} = -\frac{1}{3}$. ▼

3. Яке співвідношення повинно бути між розмірами прямокутного відкритого ящика заданого об'єму V, щоб на його виготовлення затратити якнайменше матеріалу.

▲ Позначимо через x і y розміри основи ящика, а через z його висоту. Площа поверхні ящика (без кришки)

$$S = xy + 2xz + 2yz.$$

Ураховуючи, що об'ем ящика $V = xyz$, виразимо змінну z через відому величину V і змінні x і y. Маємо $z = \frac{V}{xy}$. Отже, остаточно

$$S = xy + 2x\frac{V}{xy} + 2y\frac{V}{xy} = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Потрібно знайти найменше значення цієї функції в області, що визначається нерівностями $x > 0$ і $y > 0$, тобто у першій чверті координатної площини. Знайдемо стаціонарні точки функції S:

$$S'_x = y - \frac{2V}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{2V}{y^2}, \quad \begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0, \end{cases} \quad x = y = \sqrt[3]{2V}.$$

Маємо одну стаціонарну точку $M(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V})$, яка належить області визначення функції. Обчислимо значення функції в цій точці:

$$S(M) = \sqrt[3]{4V^2} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

Зрозуміло, що при наближенні точки $(x; y)$ до межі області $x = 0$, $0 \leqslant y < \infty$ і $y = 0$, $0 \leqslant x < \infty$ функція S необмежено зростає (поясніть, чому), отже, значення S у точці M є найменшим.

Обчислимо висоту z даного ящика при вказаних значеннях x і y. Маємо $z = \frac{V}{\sqrt[3]{2V}\cdot\sqrt[3]{2V}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. Таким чином, шуканий ящик в основі має квадрат, а його висота дорівнює половині ребра основи.

Подумайте, як інакше можна розв'язати цю задачу. ▼

Вправи

1. Дослідити на екстремум функції:
1) $z = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 4$; 2) $z = 2x + 4y - 2xy$;
3) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$; 4) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

Відповідь: 1) $z_{\min}(2, 1) = -4$; 2) екстремум відсутній; 3) $z_{\max}(0, 0) = 10$; 4) $z_{\min}(1, 3) = 10 - 18\ln 3$.

2. Обчислити найбільше і найменше значення функції в заданій області: 1) $z = x^3 + y^3 - 2xy + 1$ в прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$; 2) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; 3) $z = 5xy$ в крузі $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

Відповідь: 1) $z_{\text{найб}} = z\,(2, 0) = 9$, $z_{\text{найм}} = z\,(0, 0) = 1$; 2) $z_{\text{найб}} = z\,(1, 0) = z\,(0, 1) = 3$, $z_{\text{найм}} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$; 3) $z_{\text{найб}} = z\,(1, 1) = z\,(-1, -1) = 5$, $z_{\text{найм}} = z\,(-1, 1) = z\,(1, -1) = -5$.

3. Розкласти додатне число a на три додатних числа так, щоб їх добуток був найбільшим.

Відповідь: всі числа рівні між собою.

4. Потрібно обгородити прямокутну ділянку заданої площі S. Визначити розміри ділянки з найкоротшою огорожею.

Відповідь: квадрат з периметром $4\sqrt{S}$.

5. З картону заданої площі S потрібно виготовити закриту коробку найбільшої місткості. Якими повинні бути її розміри?

Відповідь: куб з ребром $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

6. Річні витрати виробництва виражаються функцією $f(x, y) = a + bx + cy + \frac{m}{x} + \frac{n}{y}$, де a, b, c, m, n — сталі. При яких значеннях x і y витрати підприємства будуть найменшими?

Відповідь: $x = \sqrt{\frac{m}{b}}$, $y = \sqrt{\frac{n}{c}}$.

7. До двох пунктів P_1 і P_2, розміщених на відстанях x_1, y_1 і x_2, y_2 від двох магістралей, які перетинаються під прямим кутом, треба провести газопровід. На магістралях потрібно побудувати два селища B_1 і B_2 так, щоб вартість газопроводу, що з'єднує пункти P_1 з B_1, B_1 з B_2, B_2 з P_2, була найменшою.

Відповідь: $x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 + y_2}$, $y = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 + x_2}$, де x і y — відстані від B_1 і B_2 відповідно до місця перетину магістралей.

РОЗДІЛ 12. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Математичний опис найрізноманітніших процесів, які відбуваються у природі, часто приводять до рівнянь, що зв'язують незалежні змінні, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції. Такі рівняння називають *диференціальними*. Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*. *Порядком диференціального рівняння* називається порядок найвищої похідної, яка входить в дане рівняння.

В § 12.1 розглядаються основні поняття, що стосуються диференціальних рівнянь, в § 12.2 — наведені найпростіші типи рівнянь першого порядку, що розв'язуються в квадратурах (інтегруванням). § 12.3 присвячується вивченню лінійних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами, які широко застосовують у механіці.

§ 12.1. Диференціальні рівняння. Основні поняття

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд
$F(x,\ y,\ y') = 0$ (1) або $y' = f(x,\ y)$, (1а)
якщо воно розв'язане відносно похідної.

Розв'язком рівняння (1) або (1а) на інтервалі $(a;\ b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює це рівняння в тотожність при всіх $x \in (a;\ b)$. Графік цієї функції називається *інтегральною кривою* заданого рівняння.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) або (1а) в області D називається функція $y = \varphi(x,\ C)$, яка є розв'язком цього рівняння при будь-яких допустимих значеннях сталої C, і для будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$ $((x_0;\ y_0) \in D)$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$ задовольняє задану початкову умову.

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x,\ C_0)$, який дістаємо з загального розв'язку при конкретному значенні $C = C_0$, називають *частинним*.

Задача, в якій потрібно знайти частинний розв'язок рівняння (1а), який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, називається *задачею Коші*.

Загальному розв'язку $y = \varphi(x,\ C)$ на площині xOy відповідає сім'я інтегральних кривих, залежних від одного параметра — довільної сталої C, а частинному розв'язку, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$,— крива цієї сім'ї, що проходить через точку $(x_0;\ y_0)$.

Якщо функція f і її похідна f'_y неперервні в області D, то розв'язок диференціального рівняння (1а) за умови $y(x_0) = y_0$ існує і єдиний, тобто через точку $(x_0;\ y_0)$ проходить єдина інтегральна крива даного рівняння *(теорема Коші)*.

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0 \quad (2) \qquad \text{або } y'' = f(x,\ y,\ y'). \quad (2а)$$

Задача Коші для рівняння (2а) формулюється так: знайти той розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \tag{3}$$

тобто треба знайти ту інтегральну криву, яка проходить через задану точку $(x_0;\ y_0)$, і її дотична в цій точці має кутовий коефіцієнт y'_0.

Сформулюйте означення загального розв'язку рівняння (2). Запишіть загальний вигляд рівняння n-го порядку та його розв'язок.

Диференціальне рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$, де функція f неперервна на відрізку $[a;\ b]$, інтегрується в квадратурах n-кратним інтегруванням, і його загальний розв'язок має вигляд $y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + P_{n-1}(x)$, де $P_{n-1}(x) = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_n$.

ПРИКЛАДИ

1. Перевірити, що задана функція є розв'язком відповідного рівняння: а) $y = x^2$, $yy' = 2x^3$; б) $y = 2e^x - 3e^{-x}$, $y'' - y = 0$.

▲ а) Знайдемо похідну $y' = 2x$ і підставимо її значення і значення самої функції $y = x^2$ у задане рівняння. Дістанемо тотожність $x^2 \cdot 2x \equiv 2x^3$.

б) Двічі диференціюючи задану функцію, дістаємо $y' = 2e^x + 3e^{-x}$ і $y'' = 2e^x - 3e^{-x}$. Підставляючи значення y'' і y в задане рівняння, маємо тотожність $2e^x - 3e^{-x} - 2e^x + 3e^{-x} \equiv 0$. ▼

2. Знаючи загальний розв'язок $(x - 1)^2 + y^2 = C^2$ деякого диференціального рівняння першого порядку, знайти його інтегральні криві, які проходять через задані точки: $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ -1)$, $E(2;\ 1)$.

▲ Підставляючи координати заданих точок у загальний розв'язок, знайдемо значення C, при якому із сім'ї інтегральних кривих дістанемо ту криву, яка проходить через задану точку. Маємо для точки A: $4 = C^2$, $(x-1)^2 + y^2 = 4$; для точки B: $1 = C^2$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$; для точки E: $2 = C^2$, $(x-1)^2 + y^2 = 2$. Ці криві є концентричними колами, центри яких містяться в точці $(1; 0)$. ▼

3. Методом виключення параметра скласти диференціальне рівняння: а) сім'ї прямих $y = Cx$; б) сім'ї синусоїд $y = A\sin(x + \varphi)$, де A і φ — параметри.

▲ а) Диференціюючи функцію $y = Cx$, знайдемо $y' = C$. Виключивши параметр C із системи $y = Cx$, $y' = C$, дістанемо диференціальне рівняння першого порядку: $y = y'x$ або $y' = \frac{y}{x}$.

б) Обчислимо $y' = A\cos(x + \varphi)$ і $y'' = -A\sin(x + \varphi)$. Звідси дістаємо $y'' + y = 0$. Це й є шукане диференціальне рівняння (другого порядку). ▼

4. Розв'язати задачу Коші: а) $y' - e^x = 0$, $y(0) = 2$; б) $y'' = \sin^2 x$, $y(0) = \frac{1}{8}$, $y'(0) = 2$.

▲ а) Запишемо це рівняння у вигляді $y' = e^x$. Як відомо (§ 8.1), усі первісні для неперервної функції e^x при всіх $x \in \mathbb{R}$ задаються формулою $y = \int e^x dx + C$. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд $y = e^x + C$. Підставляючи в останню рівність $x = 0$, $y = 2$, дістаємо $2 = 1 + C$, звідки $C = 1$. Отже, частинний розв'язок $y = e^x + 1$ є розв'язком заданої задачі Коші.

б) Маємо диференціальне рівняння другого порядку. Інтегруючи його, дістаємо $y' = \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1$. Інтегруючи вдруге, знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння: $y = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C_1 x + C_2$. Тепер скористаємось початковими умовами. Підставляючи в останнє рівняння значення $x = 0$ і $y = \frac{1}{8}$, знаходимо $C_2 = 0$, а підставляючи в рівняння для y' значення $x = 0$ і $y' = 2$, знаходимо $C_1 = 2$. Отже, розв'язком задачі Коші є функція $y = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + 2x$. ▼

5. Знайти область D єдиності розв'язку для рівняння: а) $y' = 3x^2 y$; б) $y' = \frac{y}{x}$.

▲ а) Функція $f(x, y) = 3x^2y$ і її частинна похідна $f'_y = 3x^2$ неперервні на всій площині $\mathbb{R}_2$ і тому, в силу теореми Коші, $D = \mathbb{R}_2$.

б) Функції $f(x, y) = \frac{y}{x}$ і $f'_y = \frac{1}{x}$ визначені і неперервні при всіх $(x; y) \in \mathbb{R}_2$, крім точок осі Oy. Отже, $D = \{(x; y) \mid x \neq 0\}$. ▼

6. Переконатися в тому, що квадратична функція $s(t) = at^2 + bt + c$ задає закон рівноприскореного руху в прискоренням, яке дорівнює $w = 2a$. З'ясувати фізичний зміст коефіцієнтів b і c.

▲ Користуючись механічним змістом першої і другої похідних, маємо $s'(t) = v = 2at + b$, $s''(t) = w = 2a$. Дістали диференціальне рівняння другого порядку, яке й показує, що рух є рівноприскореним. Покладаючи $t = 0$, дістаємо $s(0) = c$ і $v(0) = b$, тобто c дорівнює шляху, пройденому тілом до початку відліку, а b дорівнює швидкості руху тіла в початковий момент $t = 0$. ▼

Вправи

1. Перевірити, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння:

1) $y = Ce^{3x}$, $y' - 3y = 0$;

2) $y = C_1x + C_2x^2$, $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$.

2. Знаючи загальний розв'язок $xy = C$ деякого диференціального рівняння першого порядку, знайти і побудувати його інтегральні криві, що проходять через точки $A(1; 1)$, $B(-2; 3)$, $E(-1; -3)$.

3. Розв'язати вказану задачу Коші:

1) $y' + x^3 = 1$, $y(0) = -2$;

2) $x'' + \cos 2t = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Відповідь: 1) $y = x - 2 - \frac{x^4}{4}$; 2) $x = \frac{1}{4}(\cos 2t + 1)$.

4. Методом виключення параметра скласти диференціальне рівняння сім'ї вказаних кривих: 1) $y = \frac{C}{x}$; 2) $y = Ce^x$; 3) парабол $y = ax^2 + bx + c$ і виділити інтегральну криву, яка задовольняє початкові умови $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 2$.

Відповідь: 1) $y' = -\frac{y}{x}$; 2) $y' = y$; 3) $y''' = 0$, $y = x^2 + 4x - 2$.

5. Користуючись теоремою Коші, виділити області D, в яких задані рівняння мають єдиний розв'язок:

1) $y' = x^3 + y^2$; 2) $y' = y + \sqrt[3]{y^2}$; 3) $y' = \sqrt{y - 2x}$.

Відповідь: 1) $\mathbb{R}_2$; 2) $y \neq 0$; 3) $y > 2x$.

6. Знайти криві, для яких кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці будь-якої з цих кривих дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Відповідь: $y = x^2 + C$.

7. Визначити криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці дорівнює $2\sin^2 x$ і яка проходить через точку $A\ (0;\ 1)$.

Відповідь: $y = x + 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

8. Визначити перехідну криву закруглення $y = y(x)$ трамвайної колії за її диференціальним рівнянням $ay'' = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, a — константа.

Відповідь: $y = \frac{x^3}{6a}$.

§ 12.2. Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x)\,g(y) \text{ або } f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними.* Його загальний розв'язок

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \text{ або } \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = C.$$

Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння

$$y' + p(x)\,y = q(x), \qquad (2)$$

яке зводиться до двох рівнянь з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y = u(x)\,v(x)$.

Однорідним диференціальним рівнянням називається рівняння вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ або } f(x,\ y)\,dx + g(x,\ y)\,dy = 0, \qquad (3)$$

де функції f і g — однорідні одного порядку, тобто існує таке $k \in \mathbb{Z}$, що $f(tx,\ ty) = t^k f(x,\ y)$ і $g(tx,\ ty) = t^k g(x,\ y)$ для всіх допустимих значень x і y та $t > 0$. За допомогою підстановки $u(x) = \frac{y}{x}$ однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Вказати умови, за яких справедливі формули (1) — (3).

ПРИКЛАДИ

1. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

а) $x^2y\,dx + x^3dy = 0$; б) $\sqrt{xy}\,dx + x^2y\,dy = 0$; в) $y' = e^{x+y}\sin x$.

▲ а) Відокремимо змінні в заданому рівнянні, поділивши його на $x^3y \neq 0$. Дістанемо $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$. Інтегруючи почленно, маємо загальний інтеграл $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = C_1$, $\ln|x| + \ln|y| = \ln|C|$, $C \neq 0$ (тут сталу інтегрування записали в логарифмічній формі для зручності). Після потенціювання маємо $xy = C$ або $y = \frac{C}{x}$. Оскільки функції $x = 0$ і $y = 0$ також задовольняють задане рівняння, то вони теж є його розв'язками. При цьому розв'язок $y = 0$ дістаємо з загального при $C = 0$ $\left(\text{тому можна зняти обмеження на } C \text{ у формулі } y = \frac{C}{x}\right)$, а $x = 0$ не є частинним розв'язком, оскільки його не можна дістати із загального ні при якому значенні C. Такі розв'язки називають *особливими*.

б) Запишемо задане рівняння у вигляді $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}\, dx + x^2y dy = 0$. Очевидно, функції $x = 0$ і $y = 0$ є розв'язками. Нехай тепер $xy \neq 0$. Відокремивши змінні, матимемо $\frac{\sqrt{x}}{x^2} dx + \frac{y}{\sqrt{y}} dy = 0$ або $x^{-\frac{3}{2}} dx + y^{\frac{1}{2}} dy = 0$. Інтегруючи останнє рівняння, дістаємо загальний інтеграл $-2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C$ або $\frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} = C$. Очевидно, $x = 0$ і $y = 0$ є особливими розв'язками.

в) Запишемо рівняння у вигляді $dy = e^x e^y \sin x dx$. Відокремивши змінні, дістанемо $e^x \sin x dx = e^{-y} dy$. Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\int e^x \sin x dx = -e^{-y} + C,$$

звідки, інтегруючи ліву частину (§ 8.2), дістаємо загальний інтеграл

$$\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + e^{-y} = C. \ ▼$$

2. Розв'язати лінійні рівняння:

а) $y' + y = x$; б) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

▲ а) Покладаючи $y = uv$, знаходимо $y' = u'v + v'u$. Підставляючи значення y і y' в задане рівняння, дістаємо $u'v +$

$+ v'u + uv = x$ або $u'v + u(v' + v) = x$. Оскільки одну з функцій можна вибрати довільно, то виберемо таку функцію v, щоб вираз у дужках дорівнював нулю: $v' + v = 0$. Тоді для визначення u матимемо рівняння $u'v = x$ або $du = \frac{xdx}{v}$. Визначаємо v: $\frac{dv}{dx} + v = 0$, $\frac{dv}{v} = -dx$, $\ln v = -x$, $v = e^{-x}$ (ми взяли найпростіший, відмінний від нуля, частинний розв'язок). Тепер визначаємо u як загальний розв'язок рівняння $du = xe^x dx$: $u = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$.

Знаючи u і v, знаходимо шукану функцію:

$$y = uv = x - 1 + Ce^{-x}.$$

б) Замінюючи функцію y за формулою $y = uv$, дістанемо два рівняння з відокремлюваними змінними: 1) $v' - \frac{v}{x} = 0$, 2) $u'v = \frac{1}{x^2}$.

Розв'язуючи перше рівняння, знайдемо його частинний розв'язок v:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \ \ln v = \ln x, \ v = x.$$

Підставимо значення v у друге рівняння і знайдемо u як загальний розв'язок цього рівняння:

$$u'x = \frac{1}{x^2}, \ du = \frac{dx}{x^3}, \ u = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Отже, шуканий розв'язок заданого рівняння $y = Cx - \frac{1}{2x}$.

Для знаходження частинного розв'язку підставимо задані значення змінних $x = \frac{1}{2}$ і $y = 1$ (початкові умови) в останнє рівняння, звідки знайдемо значення довільної сталої $1 = \frac{1}{2}C - 1$, $C = 4$. Отже, шуканий частинний розв'язок $y = 4x - \frac{1}{2x}$. ▼

3. Розв'язати однорідні рівняння:

а) $xdy - ydx = ydy$; б) $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, $y(1) = 0$.

▲ а) Переконавшись, що це рівняння має вигляд (3), покладемо $u = \frac{y}{x}$, тобто $y = ux$. Тоді $dy = udx + xdu$. Підставляючи значення y і dy в задане рівняння, дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними: $x\,(udx + xdu) - uxdx = ux\,(udx + xdu)$ або $u^2dx = x\,(1-u)\,du$. Відокремлюючи змінні і інтегруючи, маємо

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{u^2}\,du,\ \ln|x| = -\frac{1}{u} - \ln|u| + C,$$

$$\frac{1}{u} + \ln|xu| = C.$$

Повертаючись до змінної y, знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння в неявному вигляді: $x = y\,(C - \ln|xy|)$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Як бачимо, воно має вигляд (3), тобто є однорідним. Покладаючи $u = \frac{y}{x}$, знайдемо $y = ux$ і $y' = u'x + u$. Після цієї заміни наше рівняння перетвориться в таке: $u'x + u = \frac{1}{u} + u$ або $u'x = \frac{1}{u}$. Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{du}{dx}\cdot x = \frac{1}{u},\ udu = \frac{dx}{x},\ \frac{u^2}{2} = \ln|Cx|,$$

$$u^2 = 2\ln|Cx|,\ C \neq 0.$$

Повертаючись до змінної y, знаходимо загальний розв'язок (інтеграл) рівняння: $y^2 = 2x^2\ln|Cx|$, $C \neq 0$. Підставляючи значення $x = 1$ і $y = 0$ в останнє рівняння, дістаємо $0 = 2\ln|C|$, $C = \pm 1$. Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y^2 = 2x^2\ln|x|$. ▼

4. Розв'язати задачу Коші: $(1-t)\,x' - x = 0$, $x(-1) = 2$.

▲ Потрібно знайти ту інтегральну криву, яка проходить через точку $M\,(-1;\,2)$. Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Для цього запишемо його у вигляді $\frac{dx}{dt}(1-t) = x$. Відокремивши змінні $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1-t}$ і проінтегрувавши останню рівність, дістанемо $\ln|x| = -\ln|1-t| + \ln|C|$, звідки $x = \frac{C}{1-t}$. Підставляючи початкові умови $t = -1$ і $x = 2$, знаходимо $C = 4$. Отже, розв'язком задачі Коші є функція $x = \frac{4}{1-t}$. ▼

5. Довести, що крива $y = f(x)$ є параболою $y = Cx^2$ тоді і тільки тоді, коли вона має таку властивість: якщо через будь-яку точку кривої провести прямі, паралельні осям координат до перетину з ними, то крива поділить утворений

прямокутник на дві фігури, площі яких відносяться, як 1 : 2, рахуючи від осі Ox.

▲ Позначимо через S_1 площу фігури, що прилягає до осі Ox. Тоді за формулою (1), § 9.4, маємо $S_1 = \int_0^x y(t)\,dt$ (тут x — абсциса довільної точки $M(x;\,y)$ кривої $y = f(x)$). Тоді площа другої фігури $S_2 = xy - S_1$. Оскільки за умовою $S_2 = 2S_1$, то $3S_1 = xy$ або $3\int_0^x y(t)\,dt = xy$. Диференціюючи цю рівність за змінною x і враховуючи, що $y = y(x)$ і $\frac{d}{dx}\int_0^x y(t)\,dt = y(x)$ (властивість інтеграла із змінною верхньою межею), дістаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $3y = xy' + y$ або $2y = xy'$. Загальним розв'язком цього рівняння є функція $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$ або $y = Cx^2$.

Нехай заданою кривою є парабола $y = Cx^2$. Треба показати, що $S_1 : S_2 = 1 : 2$ (зробіть це самостійно). ▼

6. Електричне коло складається з послідовно увімкнених джерела постійного струму, що має напругу E, опору R, самоіндукції L і вимикача, який вмикається при $t = 0$. Знайти залежність $I(t)$ сили струму від часу (задача про перехідний процес в електричному колі).

▲ Для визначення сили струму в електричному колі з самоіндукцією користуються формулою

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E. \tag{4}$$

Це лінійне рівняння відносно невідомої функції $I(t)$. Потрібно знайти частинний розв'язок цього рівняння за умови $I(0) = 0$.

Покладемо $I(t) = u(t)\,v(t)$ і обчислимо $I' = u'v + uv'$. Значення I і I' підставимо в рівняння (4). Дістанемо $L(u'v + uv') + Ruv = E$ або $v'L + Rv = 0$ і $Lu'v = E$ (див. приклад 2). У першому рівнянні відокремимо змінні $\frac{dv}{v} = -\frac{Rdt}{L}$ і звідси дістанемо $v = e^{-\frac{R}{L}t}$. Тоді друге рівняння матиме вигляд $L\frac{du}{dt}e^{-\frac{R}{L}t} = E$ або $du = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,dt$, звідки, інтегруючи, дістаємо $u = \int\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,dt = \frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C =$

$= \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C$. Тоді $I(t) = uv = e^{-\frac{R}{L} t} \left(\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C \right) =$ $= \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L} t}$. Підставляючи сюди початкову умову $I(0) = 0$, обчислимо $C = -\frac{E}{R}$. Тоді $I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L} t})$.

Оскільки функція $e^{-\frac{R}{L} t}$ практично дуже швидко спадає, то, відкидаючи її, дістаємо відоме з курсу фізики співвідношення $I = \frac{E}{R}$, яке називається *законом Ома.* ▼

7. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хв падає від 100 до 60 °С. Температура повітря 25 °С. Через який час від початку охолодження температура хліба знизиться до 30 °С?

▲ З фізики відомо емпіричний закон: швидкість охолодження тіла в будь-який момент часу пропорційна різниці температур тіла і середовища. Позначивши температуру хліба через T, а час через t, дістанемо диференціальне рівняння, яке описує процес охолодження:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25). \tag{5}$$

Тут k — коефіцієнт пропорційності. Знак «мінус» поставлено тому, що температура хліба знижується, а похідна спадної функції від'ємна.

Відокремимо змінні в рівнянні (5) і знайдемо його загальний розв'язок. Матимемо $\frac{dT}{T - 25} = -kdt$, $\ln(T - 25) = -kt + C_1$, $T - 25 = e^{-kt + C_1}$, звідки

$$T = 25 + Ce^{-kt}, \ C = e^{C_1}.$$

Використаємо умову, що при $t = 0$ температура хліба була 100 °С, і визначимо сталу C. Маємо $100 - 25 = Ce^{-k \cdot 0}$, $C = 75$. Отже, частинним розв'язком рівняння є функція $T = 25 + 75e^{-kt}$. Для визначення коефіцієнта k скористаємось другою умовою, а саме $T(20) = 60$. Тоді $35 = 75e^{-20k}$, $-20k = \ln \frac{7}{25}$, $k = 0{,}038$. Остаточно дістаємо такий розв'язок: $T = 25 + 75e^{-0{,}038t}$. Підставляючи сюди замість T значення 30, обчислимо шуканий час:

$$30 - 25 = 75e^{-0{,}038t}, \ e^{-0{,}038t} = \frac{1}{15}, \ 0{,}038t = \ln 15,$$

$$t \approx 71 \text{ хв.}$$ ▼

8. Знайти криву, яка проходить через точку (0; —2), щоб кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеній на 3.

▲ Складемо диференціальне рівняння за умовою задачі. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x; y)$ дорівнює y', то маємо рівняння $y' = y + 3$, розв'язком якого є $\ln|y+3| = x + C$. Враховуючи початкову умову, дістаємо $y = e^x - 3$. ▼

Вправи

1. Визначити тип рівняння і розв'язати його:

1) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$; 2) $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$;
3) $x^2dy + y^2dx = xydx$; 4) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;
5) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$; 6) $y'x + 2y = x^3$; 7) $y' - y = e^x$;
8) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Відповідь: 1) $y = \frac{C\sin^2 x - 1}{2}$; 2) $(1+y^2)(1+x^2) = Cx^2$;
3) $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$; 4) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$;
5) $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$; 6) $y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}$; 7) $y = e^x(x+C)$;
8) $y = e^{-x^2}(x^2+C)$.

2. Розв'язати вказану задачу Коші:

1) $x't = 3x$, $x(-1) = 2$; 2) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$, $y(1) = 0$;
3) $2xy' - x = 3x^2$, $y(1) = 3$.

Відповідь: 1) $x = -2t^3$; 2) $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$;
3) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$.

3. Диференціальне рівняння $y' = ky$, $k \neq 0$, називається ***рівнянням показникового росту***. Які з поданих нижче рівнянь є рівняннями показникового росту:

1) $y' = 5y$; 2) $y' = y^2$; 3) $y' = xy$; 4) $y' = -3y$;
5) $y' = \frac{y}{4}$; 6) $y' = y - x$?

4. Пскaзати, що розв'язком рівняння $y' = k\frac{y}{x}$, $k \neq 0$, є функції вигляду $y = Cx^k$ і лише вони ($C = \mathrm{const}$!).

5. Знайти криву, всі дотичні до якої проходять через початок координат.

Відповідь: $y = Cx$.

6. Довести, що крива, у якої кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці пропорційний абсцисі точки дотику, є парабола $y = \frac{a}{2}x^2 + C$, де a — коефіцієнт пропорційності.

7. Населення країни зростає з швидкістю, пропорційною його наявній кількості. Знайти закон залежності кількості населення від часу.

Відповідь: $x = Ce^{kt}$, k — коефіцієнт пропорційності.

8. Швидкість тіла пропорційна пройденому шляху. За перші 10 с тіло проходить 100 м, за 15 с — 200 м. Який шлях пройде тіло за 20 с?

Відповідь: 400 м.

9. За 30 днів маса радіоактивної речовини зменшилась на 50 %. Через який час залишиться 1 % від початкової кількості цієї речовини, якщо відомо, що швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна наявній її кількості?

Відповідь: ≈ 200 днів.

10. Нехай температура повітря T в залежності від висоти H змінюється за законом $\frac{dT}{dH} = -kT_0$, де T_0 — температура повітря на поверхні Землі, k — стала. Визначити температуру повітря на висоті H.

Відповідь: $T = T_0(1 - kH)$.

11. Для розрахунків процесів випаровування застосовується рівняння Клапейрона — Клаузіуса $L = RT\frac{d(\ln p)}{dT}$, де L — теплота випаровування, p — тиск, R — газова стала, T — температура. Визначити $p(T)$.

Відповідь: $p = CT^{\frac{L}{R}}$, $C = \text{const}$.

12. Швидкість реакції розчину цукру описується рівнянням $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$, де a — число молей цукру до початку реакції, x — кількість молей, які вступили в реакцію за час t від початку реакції, k — коефіцієнт пропорційності. Визначити $t(x)$ за умови $t(0) = 0$.

Відповідь: $t = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a - x}$.

13. Рівняння теплового стану електродвигуна має вигляд $adT = bdt - cTdT$, де a — повна теплоємність двигуна, b — витрата енергії на нагрівання, c — питома теплота двигуна, T — різниця температур двигуна і оточуючого середовища, t — час. Знайти $T(t)$, якщо $T(0) = 0$.

Відповідь: $T = \frac{b}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{a}t}\right)$.

14. Знайти форму дзеркала, що відбиває всі промені, які виходять з точки O, паралельно заданому напряму.

Відповідь: парабола $y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right)$, $C = \text{const}$.

§ 12. 3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = 0, \ p \text{ і } q \text{ — сталі}, \tag{1}$$

називаються *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку* із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{2}$$

де y_1 і y_2 — два лінійно незалежних частинних розв'язки рівняння (1), C_1 і C_2 — довільні сталі. Ці розв'язки знаходять у вигляді $y = e^{kx}$, де k — невизначене стале (дійсне або уявне). Для знаходження k складають характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що характеристичне рівняння складається з даного рівняння (1) шляхом заміни y'', y', y відповідно на k^2, k, 1.

Розв'язуючи рівняння (3), знаходимо його корені k_1 і k_2. Можливі такі три випадки.

I. Якщо k_1 і k_2 — дійсні і різні числа, то $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$, а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{4}$$

II. Якщо $k_1 = k_2 = k$, то $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ і

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{5}$$

III. Корені k_1 і k_2 уявні ($k_1 = \alpha + \beta i$ і $k_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$). Тоді $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, і загальний розв'язок такий:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \tag{6}$$

Зокрема, якщо $\alpha = 0$, то

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x. \tag{7}$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{8}$$

де p і q — сталі, а f — деяка неперервна функція на відрізку $[a; b]$ (вона може бути сталою). Рівняння (1) у цьому випадку називається відповідним лінійним однорідним рівнянням.

Загальний розв'язок рівняння (8) знаходять у вигляді

$$y = u + v, \tag{9}$$

де $u(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (1), $v(x)$ — деякий частинний розв'язок рівняння (8).

Якщо права частина рівняння (8) має певний вигляд, то частинний розв'язок v можна знаходити, не вдаючись до інтегрування.

Розглянемо ці випадки.

1. $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. (10)

а) Якщо число 0 не є коренем характеристичного рівняння (3), то покладають $v(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$, де невідомі коефіцієнти $b_0, b_1, \ldots, b_n$ визначають шляхом підстановки у рівняння (8) значень v, v' і v'' замість y, y' і y'' відповідно і наступного прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x у правій і лівій частинах.

б) Якщо 0 є коренем характеристичного рівняння (3), то

$$v(x) = x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n).$$

2. $f(x) = e^{ax}$. (11)

а) Якщо $a \neq k_1$ і $a \neq k_2$, то $v(x) = Ae^{ax}$, де A — невідомий коефіцієнт, який підлягає визначенню з умови рівняння.

б) Якщо $a = k_1$ і $a \neq k_2$, то $v(x) = Axe^{ax}$.

в) Якщо $a = k_1 = k_2$, то $v(x) = Ax^2e^{ax}$.

3. $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$. (12)

а) Якщо $k_1 \neq bi$ і $k_2 \neq bi$, то $v(x) = A\cos bx + B\sin bx$.

б) Якщо $k_1 = bi$ (тоді $k_2 = -bi$), то $v(x) = x \times (A\cos bx + B\sin bx)$, де A і B — невідомі коефіцієнти.

Якщо права частина рівності (12) містить лише один доданок із синусом або з косинусом, то розв'язок v всеодно повинен містити обидва доданки.

Запишіть частинний розв'язок $v(x)$, якщо права частина рівняння (8) має більш загальний вигляд, а саме:

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx).$$

ПРИКЛАДИ

1. Скласти характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння:

а) $y'' - 6y' + 7y = 0$; б) $y'' + 4y = 0$; в) $y'' - 5y' = 0$.

▲ Замінивши y'', y' і y відповідно на k^2, k і $1 = k^0$, дістанемо:

а) $k^2 - 6k + 7 = 0$; б) $k^2 + 4 = 0$; в) $k^2 - 5k = 0$. ▼

2. Знаючи корені характеристичного рівняння, записати відповідне диференціальне рівняння:

а) $k_1 = 2$, $k_2 = 3$; б) $k_1 = 1 + 2i$, $k_2 = 1 - 2i$.

▲ а) За теоремою Вієта маємо $p = -(k_1 + k_2) = -5$, $q = k_1k_2 = 6$. Отже, характеристичне рівняння має вигляд

$k^2 - 5k + 6 = 0$, а відповідне диференціальне $y'' - 5y' + 6y = 0$.

б) У даному випадку числа k_1 і k_2 уявні, тому скористаємось основною теоремою алгебри і складемо алгебраїчне рівняння за його коренями. Маємо $(k - (1 + 2i))(k - (1 - 2i))$ або $k^2 - 2k + 5 = 0$ і $y'' - 2y' + 5y = 0$. ▼

3. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' - 2y' + 17y = 0$; г) $y'' + 9y = 0$.

▲ а) Запишемо характеристичне рівняння для заданого диференціального: $k^2 - k - 2 = 0$. Корені цього рівняння $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ дійсні і різні, тому за формулою (4) маємо $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

б) Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = (k - 2)^2 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 2$ (дійсні і рівні), тому за формулою (5) знаходимо $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

в) Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 17 = 0$ має два уявних спряжених корені $k_1 = 1 + 4i$ і $k_2 = 1 - 4i$. Отже, за формулою (6) загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = e^x (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

г) Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ має чисто уявні корені $k_1 = 3i$ і $k_2 = -3i$. Тому, згідно з формулою (7), дістаємо $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. ▼

4. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

▲ Спочатку знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Маємо $k^2 - 6k + 5 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5$; $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$. Тепер використаємо початкові умови для знаходження C_1 і C_2. Підставляючи $x = 0$ і $y = 2$ у загальний розв'язок, дістаємо $2 = C_1 e^0 + C_2 e^0$ або $C_1 + C_2 = 2$. Візьмемо похідну y' від загального розв'язку: $y' = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x}$ і підставимо сюди значення $x = 0$ і $y' = -2$. Маємо $-2 = C_1 e^0 + 5C_2 e^0$ або $C_1 + 5C_2 = -2$. Для визначення C_1 і C_2 потрібно розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 + 5C_2 = -2. \end{cases}$ Розв'язком цієї системи є $C_1 = -1$ і $C_2 = 3$. Підставляючи значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок, дістанемо шуканий частинний розв'язок, тобто розв'язок задачі Коші: $y = -e^x + 3e^{5x}$. ▼

5. Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь:

а) $y'' + 9y - 9 = 0$; б) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$; в) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$; г) $y'' + 4y = 3 \sin 2x$; д) $x'' - 2x' = te^{2t}$.

▲ а) Запишемо рівняння у вигляді $y'' + 9y = 9$. Маємо $f(x) = 9$. Характеристичне рівняння для відповідного однорідного має вигляд $k^2 + 9 = 0$. Його корені $k_{1,2} = \pm 3i$ чисто уявні, тому загальний розв'язок однорідного рівняння $u(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. Оскільки $f(x) = 9$, тобто є многочленом нульового степеня і число 0 не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння знаходитимемо у вигляді $v = A$ (випадок 1, а)), де A — невідоме число, яке знайдемо, підставляючи замість y і y'' у задане рівняння відповідно $v = A$ і $v'' = 0$. Маємо $9A = 9$, звідки $A = 1$. Отже, $v = 1$, а загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y = u + v = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1$.

б) Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Тоді $u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Покладемо $v(x) = Ax^2 + Bx + C$ (випадок 1, а)). Знаходимо $v = 2Ax + B$ і $v'' = 2A$. Підставивши ці значення v, v' і v'' замість y, y' і y'' відповідно, дістанемо $Ax^2 + x(B - 6A) + (4A - 3B) = x^2 + 1$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x з обох частин тотожності, маємо систему $A = 1$, $B - 6A = 0$, $C - 3B + 4A = 1$, з якої знаходимо $A = 1$, $B = 6$, $C = 5$. Отже, $v = x^2 + 6x + 5$, а шуканий загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y = u + v = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^2 + 6x + 5$.

в) Маємо $k^2 + 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = -1$. Отже, $u = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. Права частина заданого рівняння має вигляд, розглянутий у випадку 2, в). Оскільки число -1 є двократним коренем характеристичного рівняння, то функцію $v(x)$ знаходитимемо у вигляді $v = Ax^2 e^{-x}$. Тоді $v' = (2Ax - Ax^2)e^{-x}$, $v'' = e^{-x}(2A - 4Ax + Ax^2)$. Після підстановки цих значень у задане рівняння дістанемо $2Ae^{-x} = e^{-x}$. Скоротивши на $e^{-x} \neq 0$, маємо $A = \frac{1}{2}$. Отже, $v = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$ і $y = u + v = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\right)$.

г) Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має уявні корені $k_{1,2} = \pm 2i$, тому $u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Оскільки $2i$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок підбираємо у вигляді $v = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ (випадок 3, б)). Знаходимо $v' = A \cos 2x + B \sin 2x + x(2B \cos 2x - 2A \sin 2x)$ і $v'' = (4B - 4Ax) \cos 2x + (-4A - 4Bx) \sin 2x$. Підставляючи значення v замість y в задане рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ у правій і лівій частинах, дістаємо систему $4B =$

$= 0$, $-4A = 3$, звідки $B = 0$, $A = -\frac{3}{4}$. Отже, $v = -\frac{3}{4} \times$
$\times\ x \cos 2x$, а $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x$.

д) Маємо $k^2 - 2k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ і $u(t) = C_1 + C_2 e^{2t}$.

Оскільки число 2 є коренем характеристичного рівняння, то, виходячи з вигляду правої частини, функцію v підбиратимемо у вигляді $v(t) = t(At + B)e^{2t}$. Підставивши значення v у задане рівняння і скоротивши його на e^{2t}, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t. Дістанемо $4A = 1$ і $2A + 2B = 0$, звідки $A = \frac{1}{4}$ і $B = -\frac{1}{4}$. Тоді

$$v(t) = \frac{t}{4}(t-1)e^{2t} \text{ і } x(t) = u(t) + v(t) =$$

$$= C_1 + C_2 e^{2t} + \frac{t}{4}(t-1)e^{2t}. \ \blacktriangledown$$

6. Матеріальна точка масою m рухається вздовж осі Ox під дією сили притягання, напрямленої до початку координат і пропорційної відстані цієї точки від початку координат. Знайти закон руху.

▲ Позначимо через $x(t)$ шлях, пройдений точкою за час t. Тоді x' — це швидкість руху точки, а x'' — її прискорення. За умовою задачі сила притягання дорівнює $F = -\lambda x$ ($\lambda > 0$ — коефіцієнт пропорційності, знак «—» означає, що сила притягання напрямлена проти руху точки). Згідно з другим законом Ньютона, диференціальне рівняння руху точки має вигляд $mx'' = -\lambda x$ або $x'' + \frac{\lambda}{m} x = 0$. Отже, дістали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $k^2 + \frac{\lambda}{m} = 0$ має суто уявні корені $k_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, i$ і $k_2 = -\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, i$, і тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t$. Якщо покласти $C_1 = A \sin \varphi$ і $C_2 = A \cos \varphi$, то $x = A \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \varphi\right)$, тобто точка здійснює коливання біля точки рівноваги 0. Такі коливання називають гармонічними (A — амплітуда коливання, φ — початкова фаза). ▼

7. Ланцюг, що звисає на гачку, починає сповзати в момент часу, коли один кінець його має довжину 12 м, а другий 8 м. За який час ланцюг сповзе повністю?

▲ Позначимо через $x(t)$ довжину довшого кінця ланцюга в момент часу t, тоді $20 - x(t)$ — довжина коротшого кінця, а їх маси відповідно дорівнюватимуть $m_1 = x\gamma$, $m_2 = (20 - x)\gamma$, де γ — густина матеріалу, з якого зроблено ланцюг. Рух відбувається за рахунок дії двох сил $F_1 = m_1 g$ і $F_2 = m_2 g$. Тоді за законом Ньютона рівняння руху ланцюга має вигляд $mx'' = m_1 g - m_2 g$, де $m = 20\gamma$ — маса всього ланцюга, а $x''(t)$ — прискорення руху в момент часу t. Підставимо в рівняння руху знайдені величини, скоротимо на γ і покладемо для простоти $g = 10$ м/с^2. Тоді рівняння запишеться у вигляді $x'' - x = -10$. Це неоднорідне рівняння з правою частиною $f(t) = -10$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, а частинний $v = 10$ (див. приклад 5, а)). Тоді загальним розв'язком рівняння руху є функція $x(t) = u(t) + v(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 10$. З умови задачі визначаємо початкові умови, а саме: $x(0) = 12$ (довжина довшого кінця) і $x'(0) = 0$, бо ланцюг знаходився у стані спокою до цього моменту. Підставляючи першу умову в загальний розв'язок, дістаємо $C_1 + C_2 = 2$. Тепер знаходимо $x'(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$ і, підставляючи сюди другу умову, маємо $C_1 = C_2$. Отже, $C_1 = C_2 = 1$, і частинний розв'язок нашого рівняння має вигляд $x(t) = e^t + e^{-t} + 10$. Ланцюг повністю впаде, коли $x(t) = 20$. Тоді маємо $10 = e^t + \frac{1}{e^t}$. Звідси визначимо час t. Увівши позначення $z = e^t$, дістанемо квадратне рівняння $z^2 - 10z + 1 = 0$, яке має два корені $z_{1,2} = (5 \pm 2\sqrt{6})$, з яких лише перший задовольняє умову задачі, оскільки при $z_{1,2} = (5 - 2\sqrt{6})$ дістанемо $t < 0$. Отже, $t = \ln(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2{,}292$, тобто ланцюг упаде приблизно через 2 с. ▼

Вправи

1. Знайти загальні розв'язки рівнянь:
1) $y'' + 2y' - 3y = 0$; 2) $y'' + 2y' + y = 0$; 3) $y'' + 3y = 0$;
4) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 5) $y'' + 2y' + y = -2$; 6) $y'' - y = 5x + 2$;
7) $y'' + y' - 2y = 6x^2$; 8) $y'' - 3y' = 2 - 6x$; 9) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$;
10) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$; 11) $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$;
12) $y'' + y' = xe^{-x}$; 13) $y'' + y = \sin x$; 14) $y'' + y = x + 2e^x$.

Відповідь: 1) $y = C_1e^x + C_2e^{-3x}$; 2) $y = e^{-x}(C_1 + C_2x)$; 3) $y = C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x$; 4) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; 5) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} - 2$; 6) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 5x - 2$; 7) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2}$; 8) $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$; 9) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x}$; 10) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} - \frac{9}{2}xe^{-3x}$; 11) $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{102}(14 \cos x + 5 \sin x)$; 12) $y = C_1 + e^{-x}\left(C_2 - \frac{x^2}{2} - x\right)$; 13) $y = \left(C_1 - \frac{x}{2}\right)\cos x + C_2 \sin x$; 14) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x$.

2. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; 2) $3y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

3) $y'' + 9y = 15 \sin 2x$; $y(0) = -7$; $y'(0) = 0$; 4) $y'' - 2y' = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Відповідь: 1) $y = \frac{1}{3}(5 - 2e^{-3x})$; 2) $y = e^{2x}$; 3) $y = 3 \sin 2x - 7 \cos 3x - 2 \sin 3x$; 4) $y = \frac{1}{8}(1 - e^{2x}) - \frac{1}{4}x(x - 1)$.

3. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $y'' + 5y' + 6y = 0$, яка дотикається в точці $M(0; 1)$ до прямої $y + 6x - 1 = 0$.

Відповідь: $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$.

4. Крива провисання каната, закріпленого в кінцях, визначається рівнянням $y'' = a^2y$, де a — стала. Визначити рівняння цієї кривої, якщо $y(0) = h$, $y'(0) = 0$.

Відповідь: $y = \frac{h}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$.

5. Ланцюг завдовжки 6 м сповзає донизу зі стовпа без тертя. Рух почався тоді, коли звисав 1 м ланцюга. За який час сповзе весь ланцюг? Покласти $g = 9{,}8$ м/с^2.

Відповідь: $\approx 1{,}938$ с.

6. Човну надано початкову швидкість $v_0 = 5$ м/с. Через 70 с після початку руху швидкість човна зменшилась удвоє. Знайти закон руху човна, якщо сила опору води прямо пропорційна швидкості човна (коефіцієнт пропорційності $k > 0$). Яку максимальну відстань може пройти човен?

Вказівка. Потрібно розв'язати задачу Коші: $mx'' + kx' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 5$. Для визначення числа $\frac{k}{m} = p$ слід скористатись умовою $x'(70) = 2{,}5$.

Відповідь: $x(t) = 500(1 - e^{-0{,}01t})$; 500 м.

7. Записати рівняння коливання матеріальної точки масою 2 г, на яку діє пружна сила F_1, величина якої пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги (коефіцієнт пропорційності $k = 8$) при наявності періодичної збурюючої сили $F_2 = 4 \cos t$.

Відповідь: $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{2}{3} \cos t$.

8. Матеріальна точка масою 1 г рухається прямолінійно. На неї діє сила у напрямі руху, пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ кг · м/с³), і сила опору середовища, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $\mu = 0{,}003$ кг/с). Визначити швидкість точки через 3 с після початку руху, якщо початкова швидкість точки дорівнювала нулю.

Вказівка. Диференціальне рівняння руху таке: $mx'' = \lambda t - \mu x'$.

Відповідь: $8{,}9 \cdot 10^{-5}$ м/с.

РОЗДІЛ 13. ПОДВІЙНІ І ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

У цьому розділі узагальнюються основні поняття інтегрального числення функцій однієї змінної на функції багатьох змінних. У залежності від області інтегрування розглядатимемо подвійний (область інтегрування — плоска фігура) і потрійний (область інтегрування — просторове тіло) інтеграли.

Найбільші труднощі виникатимуть при визначенні меж інтегрування та обчисленні повторних інтегралів. У зв'язку з цим потрібно повторити матеріал на побудову плоских кривих і просторових тіл (частина I), а також основні методи інтегрування та способи інтегрування різних класів функцій (розділ 8).

§ 13.1. Подвійний інтеграл, його обчислення та геометричний і фізичний зміст

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в обмеженій замкненій області $D \subset \mathbb{R}_2$. Виконаємо розбиття цієї області на n елементарних областей D_k, $k = \overline{1, n}$, і позначимо їх площі через Δs_k, а їх діаметри через d_k відповідно (що таке діаметр області?).

Подвійною інтегральною сумою для функції f в області D називають суму вигляду

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(a_k, b_k)\, \Delta s_k, \tag{1}$$

де точка $M_k(a_k; b_k) \in D_k$, $k = \overline{1, n}$.

Подвійним інтегралом від функції f по області D називають скінченну границю суми (1), якщо вона існує, за умови, що $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n} d_k \to 0$, і позначають $\iint\limits_D f(x, y)\, ds$ або

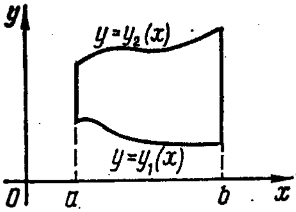

Рис. 72

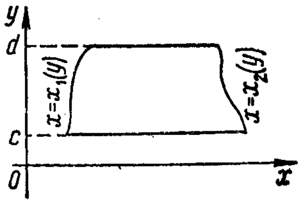

Рис. 73

$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$. Отже,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(a_k, b_k)\,\Delta s_k. \qquad (2)$$

У цьому випадку функцію f називають *інтегровною.* Змінні x і y називають *змінними інтегрування,* $f(x, y)\,ds$ — *підінтегральним виразом,* f — *підінтегральною функцією,* ds — *елементом площі,* D — *областю інтегрування.*

Якщо функція f неперервна в області D, то границя (2) існує і не залежить від способу розбиття області D на частини і від вибору точок M_k *(достатня умова інтегровності функції f).*

Основні властивості подвійного інтеграла

1) $\iint\limits_D (k_1 f_1(x,y) \pm k_2 f_2(x, y))\,ds = k_1 \iint\limits_D f_1(x, y)\,ds \pm$
$\pm \iint\limits_D f_2(x, y)\,ds;$

2) $\iint\limits_D f(x, y)\,ds = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,ds + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,ds$, $D =$
$= D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

Обчислення подвійного інтеграла. Виділимо два основних види областей.

а) Нехай область D задано нерівностями виду $a \leqslant x \leqslant$ $\leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, де y_1 і y_2 — неперервні функції на $[a; b]$. При цьому межа області перетинається будь-якою вертикальною прямою не більш як у двох точках (рис. 72). Тоді

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (3)$$

б) Область D задано нерівностями виду $c \leqslant y \leqslant d$, $x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$, де x_1 і x_2 — неперервні функції на

$[c; d]$. При цьому межа області перетинається будь-якою горизонтальною прямою не більш як у двох точках (рис. 73). Тоді

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{4}$$

Праві частини формул (3) і (4) називаються *двократними* або *повторними інтегралами*. У формулі (3) інтегрування спочатку виконують за змінною y, вважаючи x сталою, а одержаний результат інтегрують за змінною x. У формулі (4) обчислюють спочатку внутрішній інтеграл за змінною x, вважаючи y сталою.

У складніших випадках область інтегрування D розбивають на області вказаних вище типів і використовують властивість 2) інтеграла для його обчислення.

Об'єм циліндричного тіла (циліндроїда), обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geqslant 0$, f — неперервна функція в області D), знизу площиною $z = 0$, збоку — циліндричною поверхнею з твірною, яка пробігає межу області D паралельно осі Oz, визначають за формулою

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy \tag{5}$$

(*геометричний зміст подвійного інтеграла*). Тобто при $f > 0$, $(x; y) \in D$, об'єм циліндроїда обчислюють за формулою (5).

Маса матеріальної фігури D дорівнює подвійному інтегралу від густини $\gamma = \gamma(x, y)$ по області D:

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\,dxdy \tag{6}$$

(*фізичний зміст подвійного інтеграла*).

Запишіть формулу для обчислення подвійного інтеграла у випадку прямокутної області D. З'ясуйте, за яких умов повторні інтеграли у формулах (3) і (4) рівні між собою.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити $I = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (3x + 2y)\,dy$.

▲ Внутрішній інтеграл обчислюємо за змінною y, вважаючи, що x стала. Потім, підставивши замість y значення верхньої і нижньої меж інтегрування за формулою Ньютона — Лейбніца, знайдемо зовнішній інтеграл за змінною x. Отже,

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (3x + 2y)\, dy = \int_0^1 (3xy + y^2)\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \int_0^1 (6x^2 + 4x^2 - 3x^2 - x^2)\, dx = 6\int_0^1 x^2 dx = 2x^3\Big|_0^1 = 2. \ ▼$$

2. Обчислити $\iint\limits_D (y - x)\, dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = 3x$, $y = 4 - x^2$.

▲ Побудуємо область D. Координати точок перетину прямої $y = 3x$ і параболи $y = 4 - x^2$ знайдемо з системи рівнянь $y = 3x$ і $y = 4 - x^2$. Маємо $x^2 + 3x - 4 = 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Тоді $y_1 = -12$, $y_2 = 3$ (рис. 74). Для обчислення подвійного інтеграла скористаємось формулою (3):

$$\iint\limits_D (y - x)\, dxdy = \int_{-4}^{1} dx \int_{3x}^{4-x^2} (y - x)\, dy =$$

$$= \int_{-4}^{1} \left(\frac{y^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{3x}^{4-x^2} dx = -11\,\frac{5}{12}. \ ▼$$

3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\, dy.$$

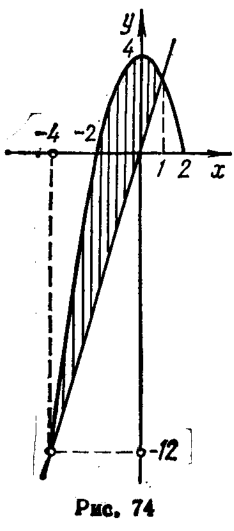

Рис. 74

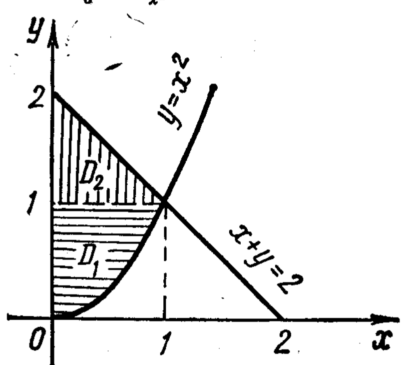

Рис. 75

▲ Маємо повторний інтеграл, записаний за формулою (3). Якщо функція f неперервна у заданій області D, то можна змінити порядок інтегрування і записати повторний інтеграл за формулою (4). Будуємо область D, враховуючи межі інтегрування. Вона обмежена лініями $y = y_1(x) = x^2$, $y = y_2(x) = 2 - x$, $x = 0$, $x = 1$ (рис. 75). Зліва область D обмежена прямою $x_1 = 0$, а справа — кривою $x_2(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 < y \leqslant 1, \\ 2 - y, & 1 < y \leqslant 2. \end{cases}$ Тому маємо

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y)\, dx.$$

Як бачимо, при зміні порядку інтегрування область D довелось розбити на дві області D_1 і D_2. Часто це приводить до громіздких розрахунків, тому при обчисленні подвійного інтеграла переходом до двократного потрібно вдало вибирати порядок двократного інтегрування. ▼

4. Скільки тонн бетону може вмістити бункер бетононасосу, який має форму параболічного циліндра і розміри, вказані на рис. 76, якщо густина бетону дорівнює 2,2 т/м³?

▲ Спочатку обчислимо об'єм тіла, зображеного на рисунку. Це — циліндроїд, обмежений у площині xOy прямими $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ і $y = 2$, а зверху — циліндричною поверхнею $z = 1 - ax^2$. Обчислимо коефіцієнт a, користуючись умовою, що $z\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Дістанемо $a = 4$ і рівняння поверхні $z = 1 - 4x^2$. Тоді об'єм тіла

$$V = 2\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 (1 - 4x^2)\, dy = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)\, dx \cdot y\big|_0^2 =$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)\, dx = \frac{4}{3} \text{ м}^3.$$

Тут ми скористались формулою (5) і властивістю симетрії тіла відносно площини zOy. Отже, маса бетону $m \approx 1,3 \cdot 2,2 = 2,86$ т. ▼

5. Обчислити масу квадратної пластинки, сторона якої a, а густина в будь-якій точці пропорційна квадрату відстані цієї точки від однієї в вершин квадрата.

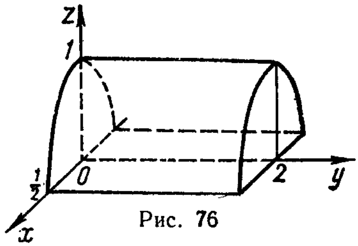

Рис. 76

▲ Розмістимо пластинку у площині xOy так, щоб одна вершина збігалася з точкою O, а сторони — з додатними напрямами координатних осей. Тоді густина $\gamma = k(x^2 + y^2)$, де k — коефіцієнт пропорційності. Масу пластинки обчислимо за формулою (6):

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\,dxdy = k\int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2)\,dy =$$

$$= k\int_0^a \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a dx = \frac{2}{3}ka^4. \ ▼$$

Вправи

1. Зобразити область інтегрування і змінити порядок інтегрування у повторних інтегралах:

1) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy$; 2) $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$; 3) $\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x, y)\,dy$.

Відповідь: 1) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx$; 2) $\int_0^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y)\,dy$;

3) $\int_2^3 dy \int_0^{\sqrt{y-2}} f(x, y)\,dx + \int_3^4 dy \int_0^{4-y} f(x, y)\,dx$.

2. Для вказаних нижче областей D записати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ у вигляді повторних, взятих у різних порядках:

1) D — прямокутник з вершинами $A(1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(4; 3)$, $E(4; 1)$;

2) D — паралелограм, обмежений прямими $y = x$, $y = x - 5$, $y = 1$, $y = 3$;

3) D — фігура, обмежена лініями $y = e^x$, $x + y = 1$, $x = 1$.

Відповідь: 3) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{e^x} f(x, y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 f(x, y)\,dx +$

$+ \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y)\,dx.$

3. За якою змінною взято зовнішній інтеграл у повторному інтегралі $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dxdy$ і яка його область інтегрування?

Відповідь: за змінною x; D обмежена лініями $x = y^2$ і $x = 1$.

4. Обчислити подвійні інтеграли в областях, обмежених вказаними лініями:

1) $\iint\limits_D (x - y)\, dxdy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 1 \leqslant y \leqslant 2;$

2) $\iint\limits_D \sqrt{xy}\, dxdy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1;$

3) $\iint\limits_D y e^{xy} dxdy, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \ 0 \leqslant y \leqslant 1;$

4) $\iint\limits_D \sqrt{x - y}\, dxdy, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3, \ 1 \leqslant y \leqslant 2;$

5) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \ 2 \leqslant y \leqslant 4;$

6) $\iint\limits_D (x + y)\, dxdy, \quad x = 0, \ y = 0, \ x + y = 1;$

7) $\iint\limits_D x^2 y dxdy, \quad y = 0, \ y = 1 - x^2;$

8) $\iint\limits_D \sin (x + y)\, dxdy, \quad x = 0, \ y = 0, \ x + y = \frac{\pi}{2};$

9) $\iint\limits_D e^{x+y} dxdy, \quad y = e^x, \ y = 2, \ x = 0;$

10) $\iint\limits_D x dxdy, \quad x^2 + y^2 = 1;$

11) $\iint\limits_D y \ln x dxdy, \quad xy = 1, y = \sqrt{x}, \ x = 2.$

Відповідь: 1) -1; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{1}{e}$; 4) $\frac{8}{15}(2\sqrt{2} - 1)$; 5) $a^2(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$; 6) $\frac{1}{3}$; 7) $\frac{8}{105}$; 8) 1; 9) e; 10) 0; 11) $\frac{1}{8}(10 \ln 2 - 1)$.

5. Обчислити об'єми тіл, обмежених вказаними поверхнями:

1) піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною $2x + y + z = 1$;

2) площинами $x + y + z = 6$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$;

3) параболоїдом $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

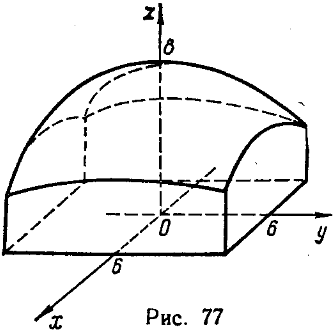

Рис. 77

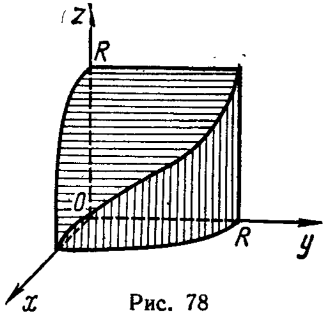

Рис. 78

4) круговим циліндром $x^2 + y^2 = 9$ і площинами $z = 2y$ і $z = 0$.
Відповідь: 1) 1/12; 2) 12; 3) 1/6; 4) 36.

6. Фойє концертного залу має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою ($a = 12$ м) і куполоподібним верхом, що має форму поверхні $z = 8 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12}$ (рис. 77). Визначити кубатуру фойє.
Відповідь: 864 м^3.

7. Осі двох труб газопроводу з однаковим радіусом R перетинаються під прямим кутом. Яка маса газу міститься в їх спільному перерізі, якщо густина газу дорівнює γ?

В к а з і в к а. Розглянути восьму частину тіла, обмеженого круговими циліндрами $z^2 + x^2 = R^2$ і $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 78).

Відповідь: $\frac{16}{3}\gamma R^3$.

8. Визначити масу пластинки, що має форму рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами, що дорівнюють a, якщо густина її в будь-якій точці дорівнює відстані цієї точки від катета.
Відповідь: $a^3/6$.

§ 13.2. Подвійний інтеграл у полярних координатах. Застосування подвійних інтегралів

Формула переходу від декартових координат до полярних у подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi, \qquad (1)$$

де функції $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$ здійснюють відображення області D_1 площини $\rho O\varphi$ на область D площини xOy. Вираз $\rho d\rho d\varphi$ є елементом площі в полярних координатах. Якщо область інтегрування D обмежена двома променями $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$, $\varphi_1 < \varphi_2$, що виходять з полюса, і двома кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) \leqslant \rho_2(\varphi)$, де ρ_1 і ρ_2 —

неперервні функції на відрізку $[\varphi_1; \varphi_2]$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \qquad (2)$$

До полярних координат зручно переходити у тих випадках, коли областю інтегрування є круг або певна його частина або коли підінтегральний вираз містить $x^2 + y^2$, що дорівнює ρ^2.

Площа S плоскої області D визначається за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy, \qquad (3)$$

а в полярних координатах —

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi. \qquad (4)$$

Об'єм циліндроїда обчислюють за формулою (5), § 13.1.

Якщо поверхню задано функцією $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D$, диференційовною в області D, то площа цієї поверхні

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (5)$$

Масу матеріальної пластинки, що займає область $D \subset \subset \mathbb{R}_2$ і має змінну густину $\gamma = \gamma(x, y)$, обчислюють за формулою (6), § 13.1, а її координати центра маси $(x_C; y_C)$ визначають за формулами

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}, \qquad (6)$$

де M_y і M_x — статичні моменти пластинки відносно осей Oy і Ox відповідно, які дорівнюють

$$M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)\,dxdy, \quad M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)\,dxdy. \qquad (7)$$

Якщо пластинка однорідна ($\gamma(x, y) = \mathrm{const}$), то її координати центра маси обчислюють за формулами

$$x_C = \frac{1}{S}\iint\limits_D xdxdy, \quad y_C = \frac{1}{S}\iint\limits_D ydxdy, \qquad (8)$$

де S — площа області D.

Моменти інерції пластинки відносно осей Ox і Oy відповідно дорівнюють

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x, y)\,dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2\gamma(x, y)\,dxdy, \qquad (9)$$

а відносно початку координат (полярний момент інерції) —

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y)\,dxdy. \qquad (10)$$

Якщо пластинка однорідна і її густину не вказано, будемо вважати, що $\gamma(x, y) = 1$.

Запишіть формулу (5) для випадку, коли поверхню задано рівняннями $x = f(y, z)$ або $y = f(x, z)$.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити подвійні інтеграли, перейшовши до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

а) $\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$;

б) $\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\,dxdy$, D — верхнє півкільце між колами з радіусами e і e^2 і центром у початку координат.

▲ а) У полярних координатах область інтегрування визначається нерівностями $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, а підінтегральна функція $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$. Тоді за формулою (2) дістаємо

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

б) Область інтегрування в полярних координатах визначається нерівностями $e \leqslant \rho \leqslant e^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ і

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_e^{e^2} \frac{\ln\rho^2}{\rho}\,d\rho = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_e^{e^2} \frac{\ln\rho}{\rho}\,d\rho.$$

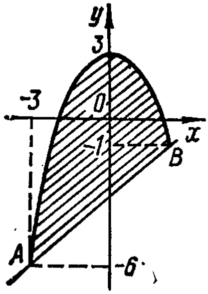

Рис. 79

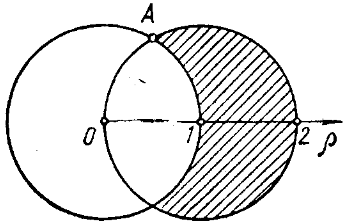

Рис. 80

Покладаючи у внутрішньому інтегралі $\ln\rho = t$, $\frac{d\rho}{\rho} = dt$, маємо

$$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln\rho}{\rho} d\rho = \int_{1}^{2} t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Остаточно шуканий інтеграл дорівнює $I = 2 \cdot \frac{3}{2}\int_0^{\pi} d\varphi =$ $= 3\pi$. ▼

Зверніть увагу на той факт, що у випадку прямокутної області інтегрування можна окремо обчислити кожен з повторних інтегралів, а потім взяти їх добуток, якщо внутрішній інтеграл не містить змінної, за якою обчислюється зовнішній інтеграл.

2. Знайти площі областей, обмежених лініями:

а) $y = x^2$, $y = 4$; б) $y = 3 - x^2$, $y = x - 3$;

в) $\rho = 1$, $\rho = 2\cos\varphi$ (поза колом $\rho = 1$).

▲ а) Задана область симетрична відносно осі Oy, тому досить знайти половину площі, а потім її подвоїти. За формулою (3) маємо

$$S = \iint_D dxdy = 2\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = 2\int_0^4 dy \cdot x\Big|_0^{\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{y^3}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

б) Знайдемо координати точок A і B перетину параболи $y = 3 - x^2$ і прямої $y = x - 3$ (рис. 79). Розв'язуючи систему рівнянь $y = 3 - x^2$ і $y = x - 3$, дістаємо точки

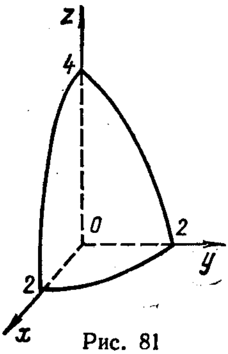

Рис. 81

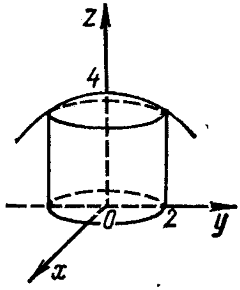

Рис. 82

$A(-3;\ -6)$ і $B(2;\ -1)$. Тоді

$$S = \int_{-3}^{2} dx \int_{x-3}^{3-x^2} dy = \int_{-3}^{2} (3 - x^2 - x + 3)\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\,dx = 20\,\frac{5}{6}.$$

в) Задану область зображено на рис. 80 (заштрихована частина). Знайдемо полярні координати точки A, для чого розв'яжемо систему рівнянь $\rho = 1$ і $\rho = 2\cos\varphi$. Маємо $1 = 2\cos\varphi$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Отже, маємо точку $A\left(1;\ \frac{\pi}{3}\right)$. Оскільки область симетрична відносно полярної осі, то можна розглядати лише її верхню половину, обмежену кривими $\rho = 1$, $\rho = 2\cos\varphi$ і двома променями $\varphi = 0$ і $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Тоді за формулою (4) дістанемо

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^{2\cos\varphi} \rho d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\varphi - 1)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= (\varphi + \sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \ \blacktriangledown$$

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = 4 - x^2 - y^2$ і площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

▲ Проекцією тіла на площині xOy, об'єм якого треба знайти, є чверть круга $x^2+y^2 \leqslant 4$ (рис. 81). Зверху тіло обмежене поверхнею $z=4-x^2-y^2$, а з боків зрізане площинами $x=0$ і $y=0$. Отже, це тіло є циліндроїдом, тому його об'єм за формулою (5), § 13.1, дорівнює $V=\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dxdy$. Оскільки областю інтегрування є частина круга, а під інтегралом маємо вираз x^2+y^2, то зручно перейти до полярних координат. Тоді область інтегрування зобразиться нерівностями $0 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ і

$$V=\iint\limits_D (4-\rho^2)\,\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^2 (4\rho-\rho^3)\,d\rho=\frac{\pi}{4}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^2=\pi. \ ▼$$

4. Скільки тканини затрачено на виготовлення пляжного зонта, який має форму частини сферичної поверхні радіуса 4 м, вирізаної прямим круговим циліндром радіуса 2 м (рис. 82).

▲ Виберемо прямокутну систему координат у просторі так, щоб центр сфери містився у початку координат, а вісь циліндра збігалася б з віссю Oz. Тоді рівняння сфери і циліндра відповідно запишуться так: $x^2+y^2+z^2=16$ і $x^2+y^2=4$. Областю D є круг $x^2+y^2 \leqslant 4$. Оскільки рівняння верхньої півсфери має вигляд $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, то

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\quad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}},$$

$$1+(z'_x)^2+(z'_y)^2=\frac{16}{16-x^2-y^2}.$$

Тоді за формулою (5) маємо $P=4\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$. Перейдемо до полярних координат. При цьому область D запишеться так: $\rho^2 \leqslant 4$ або $\rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ і

$$P=4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{16-\rho^2}}=-4\pi\int\limits_0^2 \frac{d\,(16-\rho^2)}{\sqrt{16-\rho^2}}=$$

$$=-8\pi\sqrt{16-\rho^2}\,\Big|_0^2=16\pi\,(2-\sqrt{3})\approx 13{,}5 \text{ м}^2. \ ▼$$

5. Ангар має форму параболічного циліндра. Визначити витрату матеріалу на його облицювання, якщо довжина ангара 50 м, ширина 20 м і висота по центру 10 м.

▲ Розмістимо задану поверхню так, як показано на рис. 76. Рівняння цієї поверхні має вигляд $z = -ax^2 + b$, де $b = 10$, а коефіцієнт a знайдемо з умови $z(10) = 0$. Дістанемо $a = 0{,}1$ і рівняння поверхні $z = 10 - 0{,}1x^2$. Ця поверхня проектується на площину xOy у прямокутник: $-10 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 50$. Оскільки $z'_x = -0{,}2x$, $z'_y = 0$ і поверхня симетрична відносно площини Oy, то її площа

$$P = 2\int_0^{50} dy \int_0^{10} \sqrt{1 + \frac{4}{100}x^2}\, dx = 20\int_0^{10} \sqrt{25 + x^2}\, dx =$$

$$= 250\,(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})) \approx 1479 \text{ м}^2. \ ▼$$

6. Визначити координати центра маси фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 4$.

▲ Оскільки фігура симетрична відносно осі Oy, то $x_C = 0$. Залишається обчислити y_C. Скористаємось формулою (8). Площу $S = \frac{32}{3}$ даної фігури ми обчислили у прикладі 2, а). Отже,

$$y_C = \frac{3}{32}\iint_D y\,dx\,dy = \frac{3}{32}\int_0^4 y\,dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = \frac{12}{5}. \ ▼$$

7. Обчислити полярний момент інерції фігури, обмеженої прямими $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

▲ За формулою (10) маємо

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2 + y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^2 dx\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{2-x} = \frac{8}{3}. \ ▼$$

Вправи

1. Обчислити подвійні інтеграли, перейшовши до полярних координат:

1) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy;\quad x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0.$

2) $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy;\quad 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant e^2.$

3) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy;\quad x^2+y^2 \leqslant 9.$

Відповідь: 1) $\frac{8}{3}\pi$; 2) $\pi(1+e^2)$; 3) $\pi(e^9-1)$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:
1) $y=x^2$, $y=2-x$; 2) $x=y^2$, $y=x^2$;
3) колами $\rho=2\sin\varphi$ і $\rho=2\cos\varphi$.

Відповідь: 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}-1$.

3. Скільки зерна зібрали з поля, розміщеного між шосе і річкою, яка має форму кривої $y=x-x^2$ (вісь Ox — лінія шосе), якщо урожайність становить 30 ц/га (довжина вимірюється в кілометрах)?

Відповідь: 50 т.

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=0$, $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$.

Відповідь: 8π.

5. Обчислити площу тієї частини площини $6x+3y+2z=12$, яка міститься у першому октанті.

Відповідь: 14.

6. Обчислити площу поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, обмеженого площинами $z=1$ і $z=2$.

Відповідь: $3\sqrt{2}\,\pi$.

7. Потрібно відремонтувати музейне приміщення, яке має форму циліндра $x^2+y^2=16$, завершеного куполом у формі поверхні $z=6-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}$. Скільки коштуватиме ремонт стін і стелі, якщо ремонт 1 м² коштує 5 крб.?

Відповідь: 902 крб.

8. Скільки плівки потрібно заготовити для спорудження тента у формі параболічного циліндра (див. рис. 76) над доріжкою, ширина якої 2 м і довжина 10 м, якщо висота тента по центру дорівнює 2 м?

Відповідь: рівняння поверхні $z=2-2x^2$; $P=36$ м².

9. Дах літньої естради має форму частини півсфери радіуса 10 м, зрізаної площиною, яка перпендикулярна до підлоги і відтинає від неї 1 м, рахуючи від центра (рис. 83). Скільки матеріалу витрачено на його покриття?

Відповідь: $80\pi \approx 251$ м².

10. Обчислити масу круглої пластинки радіуса 2, якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює 1 на краю пластинки.

Відповідь: 2π.

11. Визначити статичні моменти однорідних плоских фігур:
1) прямокутника з сторонами a і b відносно сторони a;
2) півкруга відносно діаметра.

Відповідь: 1) $\frac{ab^2}{2}$; 2) $\frac{2}{3}R^3$.

12. Визначити центр маси фігури, обмеженої параболою $y^2=x$ і прямою $x=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $C\left(\frac{3}{10};\ 0\right)$.

13. Визначити координати центра маси півкруга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, розміщеного у верхній півплощині.

Відповідь: $x_C = 0,\ y_C = \frac{4R}{3\pi}$.

14. Визначити момент інерції прямокутника з сто онами a і b відносно його сторін.

Відповідь: $\frac{a^3b}{3},\ \frac{ab^3}{3}$.

15. Обчислити полярний момент інерції фігури, обмеженої прямими $y = 2x,\ x = 1,\ y = 0$.

Відповідь: $\frac{7}{6}$.

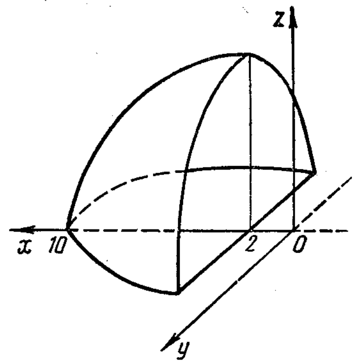

Рис. 83

§ 13.3. Потрійний інтеграл

Потрійним інтегралом від функції $u = f(x, y, z)$ по обмеженій просторовій області T називається границя послідовності відповідних інтегральних сум за умови, що $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i \to 0$, де d_i — діаметр елементарної області T_i, $i = \overline{1, n}$, об'єм якої Δv_i. Отже,

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta v_i,$$

$$(x_i;\ y_i;\ z_i) \in T_i. \qquad (1)$$

Якщо функція f неперервна в області T, то потрійний інтеграл існує, тобто існує скінченна границя (1), яка не залежить від способу розбиття області T на частини і від вибору точки $(x_i;\ y_i;\ z_i)$.

Якщо область T обмежена знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$, зверху — поверхнею $z = z_2(x, y)$, $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$, з боків — прямим циліндром, який вирізає область D у площині xOy, то потрійний інтеграл (1) обчислюється за формулою

$$I = \iiint\limits_T f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

Записавши подвійний інтеграл по області D через один з повторних, дістанемо

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (3)$$

Переходячи до циліндричних, координат ρ, φ, z за формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, де $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, маємо

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{T_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho d\rho d\varphi dz, \qquad (4)$$

а при переході до сферичних координат ρ (довжина радіуса-вектора), φ (довгота, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$), θ (широта, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) за формулами $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, дістаємо

$$I = \iiint_{T_2} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\, \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (5)$$

Об'єм просторового тіла T знаходимо за формулою

$$V = \iiint_T dxdydz = \iiint_T dv. \qquad (6)$$

Маса m тіла із змінною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z) = \gamma(P)$, що займає просторову область T, визначається за формулою

$$m = \iiint_T \gamma(P)\, dv \qquad (7)$$

(фізичний зміст потрійного інтеграла);

статичні моменти відносно координатних площин:

$$M_{yz} = \iiint_T x\gamma(P)\, dv, \quad M_{xz} = \iiint_T y\gamma(P)\, dv,$$

$$M_{xy} = \iiint_T z\gamma(P)\, dv; \qquad (8)$$

координати центра маси:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m}; \qquad (9)$$

моменти інерції відносно координатних осей:

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\gamma(P)\,dv, \quad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\gamma(P)\,dv,$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\gamma(P)\,dv. \qquad (10)$$

Запишіть формули (7) — (10) для випадку однорідного тіла ($\gamma = 1$).

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} z dz.$

▲ Послідовно обчислюючи інтеграли за кожною із змінних z, y і x, вважають спочатку x і y сталими, а потім x сталою, і користуючись формулою Ньютона — Лейбніца, дістаємо

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} z dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{xy}} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} xy dy = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 4x^3 dx = \frac{1}{4}. \ ▼$$

2. Розставити межі інтегрування у потрійному інтегралі $I = \iiint_T f(P)\,dv$ для вказаних областей T:

а) T — тетраедр, обмежений площинами $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

б) T — тіло, обмежене поверхнями $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$ і $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

▲ а) Задане тіло обмежене знизу площиною $z = 0$, а зверху $z = 6 - 2x - 2y$. Проекція цього тіла на площину xOy є трикутник, обмежений осями координат Ox і Oy і прямою $x + y = 3$ (рис. 84). Тому, згідно з формулою (3), маємо

$$I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{6-2x-2y} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} dx \int\limits_0^{6-2x-2y} f(x, y, z)\,dz.$$

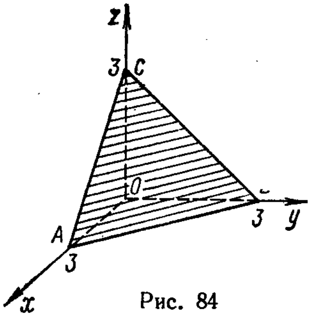

Рис. 84

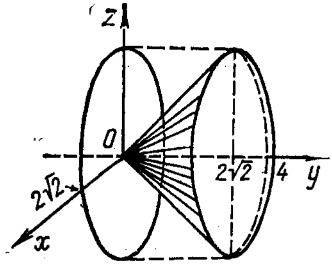

Рис. 85

б) Задане тіло симетричне відносно осі Oy, тому розглядатимемо його як таке, що знизу обмежене поверхнею $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ (конус), а зверху — сферою $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$ (рис. 85). Спроектуємо це тіло на площину zOx, і тоді областю D буде круг $x^2 + z^2 \leqslant 8$. Отже,

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} dz \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy. \ \blacktriangledown$$

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$ і $z = 4$.

▲ Знизу це тіло обмежене параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, а зверху площиною $z = 4$ (рис. 86). Проектується воно на площину xOy в круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Користуючись формулою (6) і переходячи до циліндричних координат (при цьому рівняння параболоїда $z = \rho^2$, рівняння кола $\rho = 2$ і $dv = \rho d\rho d\varphi dz$), знаходимо

● $$V = \iiint_T dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 (\rho (z\,|_{\rho^2}^4)\, d\rho = 2\pi \int_0^2 \rho (4 - \rho^2)\, d\rho = 2\pi \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 8\pi. \ \blacktriangledown$$

4. Визначити масу і центр маси півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$, якщо густина в кожній точці дорівнює відстані від точки до центра кулі.

▲ Обчислюємо масу тіла за формулою (7), де $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Перейдемо до сферичних координат, в яких область інтегрування опишеться нерівностями $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 3$, а елемент об'єму $dv = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$. Тоді з формул (7) і (5) дістаємо

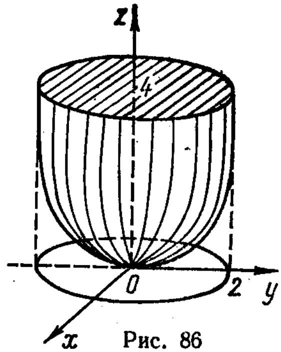

Рис. 86

$$m = \iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dv =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^3 \rho^3 d\rho = -2\pi \cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{81}{2}\pi.$$

Тут при обчисленні повторних інтегралів ми скористались зауваженням до прикладу 1, § 13.2.

Оскільки задане тіло симетричне відносно осі Oz, то $x_C = y_C = 0$. Обчислимо z_C за формулою (9):

$$z_C = \frac{1}{m} \iiint\limits_T z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dv =$$

$$= \frac{2}{81\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta \int\limits_0^3 \rho^4 d\rho = \frac{6}{5}.$$

Отже, центр маси даного тіла міститься у точці $C\left(0;\ 0;\ \frac{6}{5}\right)$. ▼

5. Визначити момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$ і $z = 4$ (див. рис. 86).

▲ За формулою (10) дістаємо $I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\,dxdydz.$

Перейдемо до циліндричних координат. Тоді (див. приклад 3)

$$I_z = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dz = 2\pi \int\limits_0^2 \rho^3 (4 - \rho^2)\,d\rho = \frac{32}{3}\pi. \ ▼$$

Вправи

1. Обчислити повторні інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 (x+y+z)\,dz$;   2) $\int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int\limits_0^1 dz$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^2 z dz$.

Відповідь: 1) 18; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{110}$.

2. Розставити межі інтегрування у потрійному інтегралі $I = \iiint\limits_T f(x, y, z)\,dxdydz$ для вказаних областей T:

1) T — циліндр $x^2+y^2=R^2$, обмежений площинами $z=0$ і $z=2$;

2) T — тіло, обмежене поверхнями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=2$;

3) T — тіло, обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=2$ і циліндром $z=x^2+y^2$.

3. Обчислити потрійні інтеграли:

1) $\iiint\limits_T xy^2z^3 dxdydz$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$;

2) $\iiint\limits_T xy dxdydz$, де T — область, обмежена гіперболічним параболоїдом $z=xy$ і площинами $x+y=1$ і $z=0$ $(z\geqslant 0)$;

3) $\iiint\limits_T (x+y+z)\,dxdydz$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z=1$, $z=x^2+y^2$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{180}$; 3) $-\frac{7}{480}(15\pi+16)$.

4. Обчислити наступні інтеграли шляхом переходу до циліндричних або сферичних координат:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^2 dz$;

2) $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dxdydz$, $z\geqslant 0$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

3) $\iiint\limits_T \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$.

Відповідь: 1) π; 2) $\frac{4}{15}\pi$; 3) 6π.

5. Обчислити об'єми вказаних тіл: 1) тетраедра, обмеженого площинами $z=0$, $x=0$, $y=0$ і $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; 2) тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=9$ та площинами $z=0$ і $x+z=4$; 3) тіла, вирізаного з кулі $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ циліндром $x^2+y^2=9$; 4) тіла, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=8$ і параболоїдом обертання $2z=x^2+y^2$; 5) тіла, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=R^2$ і циліндром $x^2+y^2=Rx$ (задача Вівіані; рис. 87).

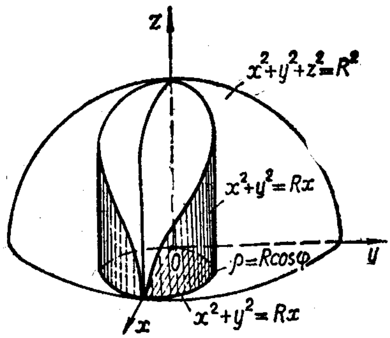

Рис. 87

Відповіді: 1) $\frac{abc}{6}$; 2) 36π; 3) $36\pi(8-3\sqrt{3})$; 4) $\frac{4}{3}\pi(8\sqrt{2}-7)$; 5) $\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

6. Казан має форму параболоїда обертання $az=x^2+y^2$. Яка його місткість (в літрах), якщо висота казана $h=25$ см, а діаметр верхньої частини $d=40$ см?

Відповідь: ≈ 16 л.

7. Визначити центр маси тетраедра, обмеженого координатними площинами і площиною $x+2y+z=1$.

Відповідь: $C\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\right)$.

8. Визначити центр маси тіла, обмеженого поверхнями $2z=x^2+y^2$ і $x^2+y^2+z^2=3$.

Відповіді $x_G=y_G=0,\ z_G=\frac{5}{83}(6\sqrt{3}+5)$.

9. Визначити центр маси купи піску конічної форми з радіусом r і висотою h.

Відповіді: $x_G=y_C=0,\ z_C=\frac{1}{4h}(6h^2-8hr+3r^2)$.

10. Обчислити масу тіла T, обмеженого конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, площиною $z=0$ і циліндром $x^2+y^2=1$, якщо густина в кожній його точці чисельно дорівнює відстані цієї точки до осі Oz. Визначити момент інерції цього тіла відносно осі Oz.

Відповіді: $m=\frac{\pi}{2},\ I_z=\frac{\pi}{3}$.

11. Визначити момент інерції однорідного сегмента параболоїда обертання з радіусом основи R і висотою H відносно його осі обертання, якщо густина дорівнює γ.

Відповідь: $\frac{1}{6}\pi\gamma HR^4$.

РОЗДІЛ 14. ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

Цей розділ присвячено розгляду основних характеристик векторного поля (§ 14.1 і 14.4). Крім того, розглядаються криволінійні інтеграли першого і другого роду (областю інтегрування є крива, розміщена на площині або у просторі), які значно розширюють можливості застосування математичного аналізу до розв'язування практичних задач (§ 14.2), а також поверхневі інтеграли першого і другого роду (§ 14.3), коли областю інтегрування є деяка поверхня.

Криволінійні та поверхневі інтеграли відіграють важливу роль в теорії поля.

При вивченні цього розділу слід особливу увагу звернути на конструкцію тих інтегральних сум, які лежать в основі визначення вказаних інтегралів.

§ 14.1. Скалярні і векторні поля. Похідна за напрямом. Градієнт

Якщо кожній точці M області T поставлено у відповідність скалярну $u = f(M)$ (векторну $\vec{a} = \vec{a}(M)$) величину, то говорять, що в області T задано *скалярне (векторне) поле.*

Задання скалярного поля в декартовій системі координат рівносильне заданню функції трьох змінних $f(M) = f(x, y, z)$, а векторного поля — трьох функцій трьох змінних:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де P, Q і R — проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox, Oy і Oz відповідно.

Нехай задано векторну функцію $\vec{f}(t)$, де t — скалярний аргумент (в механіці під t розуміють в більшості випадків час). Якщо вектор $\vec{f}(t)$ розкласти за одиничними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$, то векторна функція визначається так: $\vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Тоді похідною $\vec{f}'(t)$ в точці t є вектор $\vec{f}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$.

Поясніть, за яких умов існує ця похідна.

Нехай точка $M(x; y)$ прямує до точки $M_0(x_0; y_0)$ в напрямі, що визначається вектором $\vec{l}$. Границя (якщо вона існує) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{|\overrightarrow{MM_0}|}$ називається *похідною* функції $z = f(x, y)$ в точці M_0 за напрямом $\vec{l}$ і позначається $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$

або f'_l. Отже,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho}, \quad \rho = |\overrightarrow{MM_0}|.$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$ і вектор $\vec{l}$ утворює з додатними напрямами осей Ox і Oy кути, що відповідно дорівнюють α і β, то існує похідна функції f за будь-яким напрямом l, яка обчислюється за формулою

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta. \qquad (1)$$

Запишіть аналогічну формулу для функції трьох змінних.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$ називається вектор

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\vec{j}, \qquad (2)$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ — орти.

Похідна за напрямом $\vec{l}$ матиме найбільше значення, якщо цей напрям збігається з напрямом градієнта. Тоді вектор $\vec{l}$ вказує напрям найшвидшого зростання функції в точці M_0, і значення похідної $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ обчислюють за формулою

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = |\operatorname{grad} f(M_0)| = \sqrt{(f'_x(x_0, y_0))^2 + (f'_y(x_0, y_0))^2}. \qquad (3)$$

Запишіть формулу градієнта функції трьох змінних і поясніть, як дістати частинні похідні f'_x і f'_y з формули (1)

ПРИКЛАДИ

1. Знайти похідну функції $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ в точці $M(1; 2)$ за напрямом, що утворює кут 45° з додатним напрямом осі Ox.

▲ Обчислюємо частинні похідні: $f'_x = 3x^2 + 3y$, $f'_x(1, 2) = 9$; $f'_y = 3x + 3y^2$, $f'_y(1, 2) = 15$. Оскільки $\cos\alpha = \cos\beta = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то за формулою (1) дістаємо $\frac{\partial f(M)}{\partial l} = 9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$. ▼

2. $z = x - y + \sqrt{xy}$. Знайти $\operatorname{grad} z$.

▲ Знайдемо частинні похідні: $z'_x = 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}$, $z'_y = -1 + \frac{x}{2\sqrt{xy}}$. Тоді, згідно з формулою (2), дістаємо

$$\text{grad}\, z = \left(1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} - 1\right)\vec{j}. \ ▼$$

3. Знайти напрям найшвидшої зміни функції $z = x \sin y + y \cos x$ в точці (0; 0) і значення похідної за цим напрямом.

▲ Оскільки напрям найшвидшої зміни функції в точці збігається з напрямом градієнта в цій точці, то спочатку обчислимо градієнт заданої функції в точці (0; 0) за формулою (2).

Маємо $f'_x = \sin y - y \sin x$, $f'_x(0, 0) = 0$; $f'_y = x \cos y + \cos x$, $f'_y(0, 0) = 1$; $\text{grad}\, z = \vec{j}$. Це означає, що напрям найшвидшого зростання функції в точці (0; 0) збігається з додатним напрямом осі Oy.

Тепер за формулою (3) обчислимо значення похідної за цим напрямом. Дістанемо $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial l} = |\text{grad}\, f(0, 0)| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. ▼

4. Показати, що для функції $z = f(x, y)$ її градієнт напрямлений перпендикулярно до лінії рівня $f(x, y) = C$, яка лежить у площині xOy і проходить через відповідну точку.

▲ Справді, кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня $f(x, y) = C$ дорівнює $k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$. Кутовий коефіцієнт градієнта $(\text{grad}\, f = f'_x\vec{i} + f'_y\vec{j})$ $k_2 = \frac{f'_y}{f'_x}$. Як бачимо, $k_1k_2 = -1$. Це й доводить справедливість нашого твердження. ▼

5. Знайти $\vec{f}'(t)$, якщо $\vec{f}(t) = e^t\vec{i} + \ln t \cdot \vec{j} - \sin t \cdot \vec{k}$.

▲ Знайдемо похідні координат вектор-функції: $(e^t)' = e^t$, $(\ln t)' = \frac{1}{t}$, $(-\sin t)' = -\cos t$. Отже, $\vec{f}'(t) = e^t\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j} - \cos t \cdot \vec{k}$. ▼

Вправи

1. Для функції $z = \frac{x}{y}$ знайти похідну за напрямом, що утворює кут 30° з додатним напрямом осі Ox.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2y} - \frac{x}{2y^2}$.

2. Знайти похідну функції $z = x^2 + y^2 + xy$ за напрямом від точки (3; 1) до точки (6; 5).

Відповідь: $0{,}2\ (10x + 11y)$.

3. $z = \sin xy$. Визначити $\operatorname{grad} z$.

Відповідь: $y \cos xy \cdot \vec{i} + x \cos xy \cdot \vec{j}$.

4. Визначити напрям і величину градієнта функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці M (1; 1; 1).

Відповідь: $\operatorname{grad} u = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{3}$.

5. Обчислити похідну функції $z = \ln (x^2 + y^2)$ у точці (3; 4) за напрямом градієнта і пояснити її фізичний зміст.

Відповідь: 0,4.

6. Переконатися в тому, що $\operatorname{grad} z$ функції $z = e^{x^2+y}$ перпендикулярний до лінії рівня цієї функції в точці $(x;\ y)$ і визначити ту лінію рівня, що проходить через точку (1; 2).

Відповідь: $k_1 = -2x$, $k_2 = \frac{1}{2x}$; $y = 3 - x^2$.

7. Показати, що в точці (—1; 2) похідна функції $z = x^4 + 2xy + 2y$ в будь-якому напрямі дорівнює нулю.

8. Дослідити характер зміни поля $z = xy$ за напрямом вектора $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ в точці (1; 1) і обчислити швидкість цієї зміни.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{4}{5} y + \frac{3}{5} x$, $\frac{\partial z\,(1,\,1)}{\partial l} = \frac{8}{5}$.

9. Показати, що векторна функція $\vec{f}(t) = \cos \omega t \cdot \vec{i} + \sin \omega t \cdot \vec{j}$ описує рух по колу з кутовою швидкістю ω і обчислити похідну $\vec{f}'(t)$.

Відповідь: $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$, $\vec{f}'(t) = -\omega \sin \omega t \cdot \vec{i} + \omega \cos \omega t \cdot \vec{j}$.

10. Довести, що вектор-функція $\vec{f}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + 2t\vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k}$ описує рух по кривій, що лежить на конусі $x^2 + y^2 = z^2$ і що цей рух відбувається під дією сталої сили.

Вказівка. Показати, що $\vec{f}''(t) = \text{const}$ і скористатись другим законом Ньютона.

§ 14.2. Криволінійні інтеграли

Нехай уздовж кривої AB задано функцію $z = f(x,\ y)$. Виконаємо розбиття дуги AB на n частин точками $A = A_0$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$ і позначимо через Δl_k довжину дуги $A_{k-1}A_k$, $k = \overline{1,\ n}$. На кожній з елементарних дуг виберемо довільну точку $M_k(a_k;\ b_k)$ і утворимо суму $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(a_k, b_k)\,\Delta l_k$. Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум (S_n) при $\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k \to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої AB точками A_k, ні від вибору точок M_k, то ця границя називається *криволінійним інтегралом уздовж дуги* AB від функції f (або *криволінійним інтегралом першого роду*) і позначається $\int_{AB} (x, y)\,dl$. Отже,

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(a_k, b_k)\,\Delta l_k. \qquad (1)$$

Якщо функція f неперервна на AB, то інтеграл (1) існує.

Якщо $f(x, y) > 0$, то криволінійний інтеграл (1) виражає *масу* кривої AB із змінною лінійною густиною $\gamma = f(x, y)$ *(фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду)*.

Якщо $f(x, y) \geqslant 0$, то криволінійний інтеграл першого роду чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, у якої напрямна AB лежить у площині xOy, а твірні перпендикулярні до неї, причому зверху ця циліндрична поверхня обмежена поверхнею $z = f(x, y)$, а знизу площиною xOy *(геометричний зміст)*.

Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напряму проходження дуги AB, тобто

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{BA} f(x, y)\,dl.$$

Інші властивості цього інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла (сформулюйте їх).

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

I. Якщо криву AB задано рівнянням $y = \varphi(x)$, де функції φ і φ' неперервні на відрізку $[a;\ b]$ (a — абсциса точки A, b — абсциса точки B), а функція f неперервна у кожній точці AB, то

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{a}^{b} f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx. \qquad (2)$$

II. Якщо криву AB задано параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, і функції x, y, x' і y' неперервні на $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt, \quad (3)$$

де значення параметра α відповідає точці A, а β — точці B і функція f неперервна уздовж кривої AB.

Сформулюйте означення криволінійного інтеграла першого роду від функції $u = f(x, y, z)$ уздовж просторової кривої AB і запишіть формули для його обчислення.

Координати центра маси C дуги AB визначаються за формулами

$$x_C = \frac{1}{l} \int_{AB} x\,dl, \quad y_C = \frac{1}{l} \int_{AB} y\,dl, \quad (4)$$

де l — довжина AB.

Нехай уздовж кривої AB задано функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. *Криволінійний інтеграл за координатами* (або *криволінійний інтеграл другого роду*) від функцій P і Q уздовж кривої AB означається так:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(a_k, b_k)\,\Delta x_k + Q(a_k, b_k)\,\Delta y_k. \quad (5)$$

Криволінійний інтеграл другого роду виражає *роботу* змінної сили F на шляху AB, якщо проекції цієї сили на осі Ox і Oy відповідно дорівнюють P і Q (*механічний зміст криволінійного інтеграла другого роду*).

Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду

1) $\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$

2) $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AB} P\,dx + \int_{AB} Q\,dy,$

причому кожен інтеграл справа також називається криволінійним інтегралом другого роду відповідно за координатою x і координатою y.

3) $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AC} P\,dx + Q\,dy + \int_{CB} P\,dx + Q\,dy,\ C \in AB.$

4) Якщо контур L інтегрування замкнений, то величина криволінійного інтеграла $\oint\limits_L Pdx + Qdy$ уздовж цього контура не залежить від вибору початкової точки інтегрування на ньому. Якщо, крім того, L — проста замкнена крива, то інтеграл береться у напрямі проти руху годинникової стрілки (додатний напрям).

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Якщо криву AB задано рівнянням $y = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\,\varphi'(x))\,dx. \tag{6}$$

Якщо криву AB задано рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta (P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t))\,dt. \tag{7}$$

Сформулюйте означення криволінійного інтеграла другого роду вздовж просторової кривої і запишіть формули для його обчислення. Вкажіть, за яких умов справедливі формули (5) — (7).

Формула Гріна. Нехай функції P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в замкненій області D. Тоді подвійний інтеграл по цій області пов'язаний з криволінійним по її контуру L так:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy. \tag{8}$$

Якщо область D однозв'язна і

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{9}$$

то криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування L, що цілком належить D. Якщо при цьому контур L замкнений, то $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:

а) $\int\limits_{AB} xdl$, де AB — дуга параболи $y = x^2$ від A (0; 0) до B (1; 1);

б) $\int\limits_{AB} x^2y\,dl$, де AB — дуга кола $x^2+y^2=1$, розміщена у першій чверті.

▲ а) Знаходимо $y'=2x$ і за формулою (2) дістаемо

$$\int\limits_{AB} x\,dl=\int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^1 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+4x^2)=$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{(1+4x^2)^3}\Big|_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

б) Використаємо параметричне задання кола $x=\cos t$, $y=\sin t$. З умови задачі випливає, що $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. Тоді за формулою (3) маємо

$$\int\limits_{AB} x^2y\,dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,d(\cos t)=-\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}.\ ▼$$

2. Визначити масу гвинтової лінії $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, якщо густина в кожній її точці дорівнює $\gamma=2z$.

▲ Масу заданої кривої (просторової) визначимо за формулою

$$m=\int\limits_\alpha^\beta \gamma(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Оскільки $\gamma=2z=2\cdot 4t=8t$ і $x'(t)=-3\sin t$, $y'(t)=3\cos t$, $z'(t)=4$, то

$$m=\int\limits_0^{2\pi} 8t\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t+16}\,dt=20t^2\Big|_0^{2\pi}=80\pi^2.\ ▼$$

3. Знайти координати центра маси однорідної дуги ланцюгової лінії $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $0\leqslant x\leqslant\ln 2$.

▲ Спочатку обчислимо довжину дуги заданої кривої. За формулою (1), § 9,6, маємо $l=\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$.

Оскільки

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),$$

то

$$l=\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^x+e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_0^{\ln 2}=\frac{3}{4}.$$

Тоді за формулами (4) знаходимо

$$x_C=\frac{4}{3}\int_0^{\ln 2}x\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{\ln 2}(x(e^x+e^{-x}))\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}(3\ln 2-1)$$

(останній інтеграл обчислено методом інтегрування частинами);

$$y_C=\frac{4}{3}\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+2+$$

$$+e^{-2x})\,dx=\frac{1}{24}(16\ln 2+15).\ \blacktriangledown$$

4. Обчислити площу бічної поверхні кругового циліндра $x^2+y^2=4$, зрізаного знизу площиною xOy, а зверху гіперболічним параболоїдом $z=\frac{1}{4}xy$.

▲ Виходячи з геометричного змісту криволінійного інтеграла першого роду, задача зводиться до обчислення криволінійного інтеграла від функції $f(x, y)=\frac{1}{4}xy$ ($f(x, y)\geqslant 0$) уздовж кола $x^2+y^2=4$. Оскільки $f(x; y)\geqslant 0$ при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ і $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, а поверхня $z=\frac{xy}{4}$ симетрична відносно площини $y=-x$, то можна обмежитися обчисленням інтеграла лише уздовж четвертої частини кола, що міститься у першій чверті площини xOy, і результат подвоїти. Дістанемо

$$y=\sqrt{4-x^2},\quad y'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\quad 1+(y')^2=\frac{4}{4-x^2},$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$P = \int_L f(x, y)\, dl = 2\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2. \ \blacktriangledown$$

5. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

а) $\int\limits_{AB} x^2dx + xydy$, AB — відрізок, що з'єднує точки A (1; 1) і B (2; 3);

б) $\int\limits_{L} (x - y)\, dx + (x + y)\, dy$, L — ламана OAB, де O (0; 0), A (1; 0), B (3; 2) (рис. 88);

в) $\int\limits_{AB} xdx + y^2dy$, AB — дуга параболи від точки (0; 0) до точки (2; 4);

г) $\int\limits_{AB} \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$, якщо AB — перша чверть кола $x^2 + y^2 = 4$ і обхід здійснюється за годинниковою стрілкою.

▲ а) Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. У нашому випадку дістанемо $y = 2x - 1$. Тоді за формулою (6), де $\varphi(x) = 2x - 1$, $\varphi'(x) = 2$, маємо

$$\int\limits_{AB} x^2dx + xydy =$$

$$= \int_1^2 (x^2 + x(2x - 1) \cdot 2)\, dx = \int_1^2 (5x^2 - 2x)\, dx = \frac{26}{3}.$$

б) Рівняння відрізка OA має вигляд $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, і тут $dy = 0$. Для відрізка AB маємо $y = x - 1$ (див. приклад а)), $1 \leqslant x \leqslant 3$, $dy = dx$. Користуючись властивістю

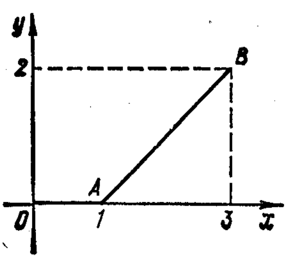

Рис. 88

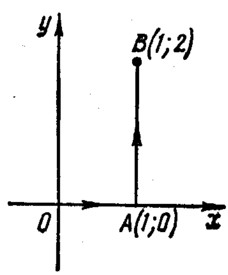

Рис. 89

інтеграла 3) і формулою (6), дістаємо

$$\int_{L}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=\int_{OA}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy+$$

$$+\int_{AB}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3(x-x+1+x+x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x^2\Big|_1^3=\frac{17}{2}.$$

в) Користуючись властивістю інтеграла 2) і формулою (6), маємо

$$\int_{AB}x\,dx+y^2dy=\int_{AB}x\,dx+\int_{AB}y^2dy=\int_0^2 x\,dx+\int_0^4 y^2dy=\frac{70}{3}.$$

г) Запишемо рівняння кола у параметричній формі: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. Тоді $x'(t)=-2\sin t$, $y'(t)=2\cos t$ і за формулою (7)

$$\int_{AB}\frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\frac{2\sin t}{2\sin t}-\frac{2\cos t}{2\cos t}\right)dt=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\pi.\ \blacktriangledown$$

6. Обчислити $I=\oint_L(x^2+y^2)\,dx+x\,dy$, застосовуючи формулу Гріна, якщо L — трикутник з вершинами $O\,(0;\,0)$, $A\,(1;\,0)$, $B\,(0;\,1)$.

▲ Маємо $P=x^2+y^2$, $Q=x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-2y$. За формулою (8) дістаємо $\oint_L(x^2+y^2)\,dx+x\,dy=\iint_D(1-2y)\,dx\,dy$, де область D — трикутник OAB. Оскільки рівняння сторони AB має вигляд $x+y=1$, то

$$I=\iint_D(1-2y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-2y)\,dy=\frac{1}{6}.\ \blacktriangledown$$

7. Обчислити $I=\int_{(0;0)}^{(1;2)}(x^2+y)\,dx+(x+2y)\,dy.$

▲ Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ (умова (9) виконується), то значення інтеграла не залежить від шляху інтегрування. Будемо рухатись від точки (0; 0) до точки (1; 2) уздовж ламаної OAB (рис. 89). Маємо на OA: $y = 0$, $dy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; на AB: $x = 1$, $dx = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. Отже,

$$I = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^2 (1 + 2y)\, dy = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + (y + y^2)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}. \ ▼$$

8. Обчислити роботу, виконану силою $\vec{F} = y^2\vec{i} + x\vec{j}$ уздовж прямої, що з'єднує точки A (1; 2) і B (2; 4).

▲ Потрібно обчислити криволінійний інтеграл другого роду від функцій $P = y^2$ і $Q = x$ уздовж відрізка AB. Скористаємось властивістю інтеграла 2) і тим фактом, що на AB маємо $y = 2x$. Дістанемо

$$W = \int_{AB} y^2 dx + x dy = \int_1^2 4x^2 dx + \int_2^4 \frac{y}{2} dy = \frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}. \ ▼$$

Вправи

1. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:

1) $\int\limits_{AB} \frac{dl}{x - y}$, де AB — відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$, розміщений між точками A (0; —2) і B (4; 0);

2) $\int\limits_{AB} \frac{y}{\sqrt{x}} dl$, де AB — дуга напівкубічної параболи $y^2 = \frac{4}{9} x^3$, $x_A = 3$, $x_B = 8$;

3) $\int\limits_{L} (x^2 + y^2)\, dl$, де L — коло $x = \cos t$, $y = \sin t$;

4) $\int\limits_{L} (x + y)\, dl$, де L — контур трикутника ABO з вершинами A (1; 0), B (0; 1), O (0; 0).

Відповідь: 1) $\sqrt{5} \ln 2$; 2) 2152/45; 3) 2π; 4) $\sqrt{2} + 1$.

2. Обчислити масу: 1) дуги кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, якщо лінійна густина її в точці (x; y) дорівнює y; 2) дуги AB кривої $y = \ln x$, якщо в кожній її точці лінійна густина пропорційна квадрату абсциси точки, $x_A = 1$, $x_B = 3$.

Відповідь: 1) 2; 2) $\frac{k}{3}(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$.

3. Визначити координати центра маси однорідних дуг: 1) півкола $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$; 2) циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Відповідь: 1) $x_C = 0$, $y_C = 4/\pi$; 2) $x_C = 8/3$, $y_C = 4/3$.

4. Обчислити площу бічної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, зрізаного знизу площиною xOy, а зверху параболоїдом обертання $z = 1 + x^2$.

Відповідь: 3π.

5. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

1) $\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)\,dx + xy\,dy$, AB — відрізок, що з'єднує точки A (1; 1) і B (3; 4);

2) $\int\limits_{L} (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$, L — ламана OAB, де O (0; 0), A (2; 0), B (4; 5);

3) $\int\limits_{L} y\,dx + \frac{x}{y}\,dy$, L — крива $y = e^{-x}$ від A (0; 1) до B (—1; e);

4) $\int\limits_{L} y^2dx + x^2dy$, L — верхня половина еліпса, яка пробігається за годинниковою стрілкою.

Вказівка. Покласти $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

5) $\oint\limits_{L} x^2y\,dx + x^2dy$, L — замкнений контур з додатним обходом, який складається з дуг парабол $y = x^2$ і $x = y^2$;

6) $\int\limits_{AB} (x + y)\,dx + (x + z)\,dy + (y + z)\,dz$, AB — пряма у просторі, рівняння якої $x = 1 + 2t$, $y = t + 1$, $z = 3 - 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Відповідь: 1) $11\frac{1}{6}$; 2) 10,5; 3) $\frac{1}{2} - e$; 4) $\frac{4}{3}ab^2$; 5) $\frac{6}{35}$; 6) 4.

6. Користуючись формулою Гріна, довести, що площа S області D через криволінійний інтеграл по її контуру L обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx$. Обчислити S, якщо область D обмежена:

1) еліпсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;
2) прямими $y = x$, $y = 5x$ і $x = 1$;
3) параболами $3y^2 = 25x$ і $5x^2 = 9y$.

Відповідь: 1) πab; 2) 2; 3) 5.

7. Обчислити такі інтеграли:

1) $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} 2xy\,dx + x^2dy$; 2) $\int\limits_{(0;0)}^{(\pi;\pi)} (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$.

Відповідь: 1) 1; 2) π^2.

8. Визначити роботу, виконану силою $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{1}{y-1}\vec{j}$ на переміщення матеріальної точки масою m уздовж дуги циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} - \ln 3)\right)m$.

5. Визначити роботу, виконану силою тяжіння по переміщенню на площині матеріальної точки масою m з положення A $(a_1;\ a_2)$ в положення B $(b_1;\ b_2)$, уздовж будь-якої гладкої кривої L.

Відповідь: $mg\,(a_2 - b_2)$.

§ 14.3. Поверхневі інтеграли

Нехай на гладкій поверхні П (поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина, яка змінює своє положення неперервно при переході від точки до точки) задано функцію $u = f(x,\ y,\ z)$. Виконаємо розбиття поверхні П на частини Π_k, $k = \overline{1,\ n}$, і виберемо довільну точку $M_k\,(a_k;\ b_k;\ c_k) \in \Pi_k$. Розглянемо суму

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(a_k,\ b_k,\ c_k)\,\Delta\sigma_k, \tag{1}$$

де $\Delta\sigma_k$ — площа k-го елемента поверхні, і позначимо $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n} d_k$, $d_k = \operatorname{diam} \Pi_k$. Границя інтегральної суми (1) при $\lambda \to 0$, якщо вона існує, називається *поверхневим інтегралом першого роду* від функції f по поверхні П і позначається $\iint\limits_{\Pi} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma$. Отже,

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(a_k,\ b_k,\ c_k)\,\Delta\sigma_k. \tag{2}$$

Якщо f неперервна на поверхні П, то ця границя існує і не залежить від способу розбиття П на частини і від вибору точок M_k.

Значення цього інтеграла не залежить від вибору сторони поверхні П, по якій виконується інтегрування.

Якщо рівняння поверхні П має вигляд $z = \varphi(x,\ y)$, де φ — неперервно диференційовна функція в області D, що є проекцією поверхні П на площину xOy, то поверхневий інтеграл першого роду обчислюють за формулою

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,\ y,\ z)\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x,\ y,\ \varphi(x,\ y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy. \tag{3}$$

Розглянемо двосторонню поверхню П (виберемо на ній певну сторону Π^+) і функцію f, яка визначена в точках цієї поверхні. Границя інтегральної суми $\sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k,\ b_k,\ c_k)\,\Delta s_k$, де

Δs_k — площа проекції елемента Π_k на площину xOy, за умови, що $\lambda \to 0$, називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції f по орієнтовній поверхні П і позначається $\iint\limits_{\Pi+} f(x, y, z)\,dxdy$.

Якщо функція f неперервна в усіх точках поверхні П, а сама поверхня П проектується на площину xOy в обмежену замкнену область D, то обчислення цього інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла, а саме:

$$\iint\limits_{\Pi+} f(x, y, z)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(x, y, \varphi(x))\,dxdy. \tag{4}$$

Якщо $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — неперервні функції і Π^+ — сторона гладкої поверхні П, яка характеризується напрямом нормалі $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то відповідний поверхневий інтеграл другого роду (загального вигляду) виражається через поверхневий інтеграл першого роду:

$$\iint\limits_{\Pi+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma. \tag{5}$$

При переході на другу сторону Π^- поверхні цей інтеграл змінює знак на протилежний.

Маса матеріальної поверхні з поверхневою густиною $\gamma(x, y, z)$

$$m = \iint\limits_{\Pi} \gamma(x, y, z)\,d\sigma \tag{6}$$

(фізичний зміст поверхневого інтеграла).

Координати центра маси матеріальної однорідної поверхні ($\gamma = \text{const}$):

$$x_C = \frac{1}{P}\iint\limits_{\Pi} x\,d\sigma, \quad y_C = \frac{1}{P}\iint\limits_{\Pi} y\,d\sigma, \quad z_C = \frac{1}{P}\iint\limits_{\Pi} z\,d\sigma, \tag{7}$$

де

$$P = \iint\limits_{\Pi} d\sigma \tag{8}$$

— площа даної поверхні.

Сформулюйте основні властивості поверхневих інтегралів. Поясніть, як звести поверхневий інтеграл (5) до подвійного. Запишіть формули (7) для випадку неоднорідної поверхні.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити $I = \iint\limits_{\Pi} (x - 2z)\, d\sigma$ по частині **площини** $x + y + z = 1$, розміщеної у першому октанті.

▲ Поверхню П задано рівнянням $z = 1 - x - y$, де функція z і її частинні похідні $z'_x = -1$, $z'_y = -1$ неперервні в обмеженій замкненій області D — проекції П на площину xOy. Тому заданий інтеграл існує. Обчислимо його за формулою (3):

$$I = \iint\limits_{D} (x - 2(1 - x - y)) \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dxdy =$$

$$= \sqrt{3} \iint\limits_{D} (-2 + 3x + 2y)\, dxdy =$$

$$= \sqrt{3} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (-2 + 3x + 2y)\, dy = -\frac{\sqrt{3}}{6}. \ ▼$$

2. Обчислити $I = \iint\limits_{\Pi} x \cos \alpha d\sigma$, де П — зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщеної над площиною xOy, а α — гострий кут вектора нормалі $\vec{n}$ до П з віссю Ox.

▲ Маємо $\iint\limits_{\Pi} x \cos \alpha d\sigma = \iint\limits_{\Pi} x dy dz$. Проекцією П на площину yOz є круг $y^2 + z^2 = 1$. Оскільки $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, то, згідно з формулою (5), де $P = x$, $Q = R = 0$, дістаємо $I = \iint\limits_{D} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\, dydz$. Перейдемо до полярних координат, покладаючи $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$. Застосовуючи формулу (2), § 13.2, дістаємо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\, \rho d\rho = 2\pi \left(-\frac{1}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\pi. \ ▼$$

3. Визначити площу поверхні частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщеної всередині циліндра $x^2 + y^2 = Rx$.

▲ Задана поверхня (верхня і нижня основи «тіла Вівіані», вирізаного циліндром з кулі; див. рис. 87) симетрична відносно площин xOy і xOz; в першому октанті міститься четверта частина Π_1 заданої поверхні П. Для неї $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а проекцією D_{xy} цієї поверхні на площину xOy є півкруг $x^2 + y^2 \leqslant Rx$, $y \geqslant 0$. Тому, згідно з формулою (8), шукана площа

$$P = 4\iint_{\Pi_1} d\sigma =$$

$$= 4\iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\, dxdy = 4R \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Перейдемо до полярних координат. Тоді рівняння півкола запишеться у вигляді $\rho = R\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ і

$$P = 4R \iint_{D_{xy}} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} (R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times d(R^2 - \rho^2) = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)\, d\varphi = 2R^2(\pi - 2). \ \blacktriangledown$$

4. Обчислити координати центра маси півсфери, якщо в кожній її точці поверхнева густина чисельно дорівнює відстані цієї точки від радіуса, перпендикулярного до основи півсфери.

▲ Розмістимо початок прямокутної системи координат у центрі основи півсфери, а вісь Oz направимо перпендикулярно до цієї основи. Тоді рівняння півсфери матиме вигляд $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, де R — радіус півсфери, а поверхнева густина у точці $(x; y; z)$ $\gamma = \sqrt{R^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Користуючись формулою (6) і переходячи до полярних координат, дістаємо

$$m = R \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

(Внутрішній інтеграл обчислюється з допомогою підстановки $\rho = R\sin t$.)

Оскільки поверхня симетрична відносно осі Oz, то $x_C = y_C = 0$. Враховуючи неоднорідність поверхні, маємо

$$z_C = \frac{1}{m} \iint_{\Pi} z\gamma d\sigma = \frac{2}{\pi^2 R^3} \cdot R \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \rho^2 d\rho = \frac{4R}{3\pi}. \ \blacktriangledown$$

5. Обчислити $\iint\limits_{\Pi} 2xdydz - ydxdz$, де П — зовнішня сторона частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

▲ Розглянемо заданий інтеграл як суму двох інтегралів $I = I_1 + I_2$. Для обчислення I_1 спроектуємо поверхню на площину yOz. Дістанемо прямокутник D_{yz}: $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, а рівняння циліндра розв'яжемо відносно x: $x = \sqrt{1 - y^2}$. Отже,

$$I_1 = \iint\limits_{\Pi} 2xdydz =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \sqrt{1 - y^2}dy \int\limits_0^1 dz = 2\int\limits_0^1 \sqrt{1 - y^2}dy = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{\pi}{2}$$

(тут виконано заміну $y = \sin t$, $dy = \cos tdt$). Аналогічно обчислюємо I_2. Для цього поверхню проектуємо на площину xOz і рівняння поверхні розв'язуємо відносно y: $y = \sqrt{1 - x^2}$. Тоді

$$I_2 = -\iint\limits_{\Pi} ydxdz = -\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx \int\limits_0^1 dz = -\frac{\pi}{4},$$

і остаточно дістаємо $I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. ▼

Вправи

1. Обчислити поверхневі інтеграли першого роду:

1) $\iint\limits_{\Pi} (x^2 + y^2)\, d\sigma$, де П — частина конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, розміщеної між площинами $z = 0$ і $z = 1$;

2) $\iint\limits_{\Pi} x^2yzd\sigma$, де П — частина площини $x + y + z = 1$, розміщеної у першому октанті;

3) $\iint\limits_{\Pi} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 d\sigma}$, де — П півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Відповідь: 1) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sqrt{3}/360$; 3) πR^3.

2. Визначити площу частини поверхні:

1) $2x + 2y + z = 8$, розміщеної всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$;

2) циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, що міститься всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (бічна поверхня тіла Вівіані; див. рис. 87).

В к а з і в к а. Перетворити поверхневий інтеграл формули (8) у подвійний із змінними x і z і розглянути четверту частину поверхні. Тоді $P = 4 \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dxdz$.

Відповідь: 1) 3π; 2) $4R^2$.

3. Визначити масу циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 1$, розміщеної між площинами $z = 0$ і $z = 1$, якщо у кожній її точці поверхнева густина обернено пропорційна (коефіцієнт пропорційності $k = 2$) квадрату відстані цієї точки від початку координат.

Відповідь: π^2.

4. Знайти координати центра маси частини однорідної поверхні:
1) площини $z = x$, обмеженої площинами $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$;
2) конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Відповідь: 1) $x_C = y_C = z_C = 1/3$; 2) $x_C = y_C = 0$, $z_C = 2/3$.

5. Обчислити поверхневі інтеграли другого роду:

1) $\iint\limits_{\Pi} y\,dxdz$, де Π — зовнішня сторона частини площини $x + y + z = 2$, розміщеної в першому октанті;

2) $\iint\limits_{\Pi} (y^2 + z^2)\,dydz$, де Π — зовнішня сторона частини параболоїда $x = 4 - y^2 - z^2$, зрізаного площиною yOz.

Відповідь: 1) 4/3; 2) 8π.

§ 14.4. Формули Стокса і Остроградського — Гаусса. Елементи теорії поля

Нехай задано векторне поле $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, де функції P, Q і R — неперервно диференційовні у відповідних областях.

Дивергенцією векторного поля $\vec{a}(M)$ називається число

$$\operatorname{div}\vec{a} = P'_x + Q'_y + R'_z, \tag{1}$$

де P'_x, Q'_y і R'_z обчислені в точці M. Якщо $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то векторне поле називається *соленоїдальним* або *трубчастим*.

Ротором (вихором) векторного поля $\vec{a}(M)$ називається вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = (R'_y - Q'_z)\vec{i} + (P'_z - R'_x)\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Векторне поле називається *безвихорним*, якщо $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через зовнішню сторону гладкої поверхні П називається величина поверхневого інтеграла

$$П = \iint\limits_{П} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \qquad (3)$$

Циркуляцією векторного поля $\vec{a}(M)$ уздовж замкненої орієнтовної кривої L називається криволінійний інтеграл

$$Ц = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (4)$$

Якщо $Ц = 0$, то поле називається *потенціальним*. Векторне поле, яке одночасно є соленоїдальним і потенціальним, називається *гармонійним*.

Якщо П — гладка орієнтовна поверхня, обмежена орієнтовним замкненим контуром L, то справедлива *формула Стокса*:

$$\iint\limits_{П} (Q'_x - P'_y)\, dxdy + (R'_y - Q'_z)\, dydz + (P'_z - R'_x)\, dzdx =$$

$$= \oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz, \qquad (5)$$

яка встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по поверхні і криволінійним інтегралом по її контуру і означає, що циркуляція векторного поля вздовж замкненого контуру L дорівнює потоку вихору поля через поверхню П.

Якщо просторова область T обмежена орієнтовною поверхнею П, то справедлива *формула Остроградського — Гаусса*:

$$\iiint\limits_{T} (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dxdydz =$$

$$= \oint\!\!\oint\limits_{П} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \qquad (6)$$

яка встановлює зв'язок потрійного інтеграла по області T з поверхневим інтегралом по зовнішній стороні поверхні П, яка обмежує цю область, і означає, що потрійний інтеграл від дивергенції вектора $\vec{a}$ по області T дорівнює потоку вектора через межу цієї області. Справді, з формул (3) і (6) дістаємо

$$П = \iiint\limits_{T} \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz. \qquad (7)$$

Поясніть фізичний зміст усіх уведених понять векторного поля. Покажіть, що формула Стокса є узагальненням формули Гріна (8), § 14.2. Поясніть символічний запис $\operatorname{rot}\vec{a}$ у формулі (2).

ПРИКЛАДИ

1. Визначити дивергенцію і ротор векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$.

▲ Маємо $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = -z^2$; $P'_x = 2x$, $Q'_y = 2y$ і $R'_z = -2z$. Тоді за формулою (1) дістаємо

$$\operatorname{div}\vec{a} = 2x + 2y - 2z = 2(x + y - z).$$

Оскільки $R'_y = Q'_z = P'_z = R'_x = Q'_x = P'_y = 0$, то, згідно з формулою (2), $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, тобто задане поле є безвихорним. ▼

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщеної у першому октанті, в напрямі зовнішньої нормалі.

▲ Оскільки потік векторного поля через задану поверхню виражається поверхневим інтегралом (3), де $P = x$, $Q = y$ і $R = z$, то потрібно обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Pi} xdydz + ydzdx + zdxdy$. Розглянемо його як суму трьох інтегралів $I = I_1 + I_2 + I_3$. Для обчислення I_1 спроектуємо задану поверхню на площину yOz. Дістанемо чверть круга D_{yz}: $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Рівняння сфери розв'яжемо відносно змінної x: $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$. Тоді

$$I_1 = \iint\limits_{\Pi} xdydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\,dydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Аналогічно обчислюємо I_2 і I_3, проектуючи спочатку поверхню на площину xOz і розв'язуючи рівняння поверхні відносно y, а потім — на площину xOy і розв'язуючи її рівняння відносно z. Дістанемо, аналогічно попередньому, $I_2 = I_3 = \frac{\pi}{6}$. Отже, $\Pi = I_1 + I_2 + I_3 = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. ▼

3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i} + yx\vec{j} + zy\vec{k}$ уздовж лінії перетину площини $x + y + z = 3$ з координатними площинами.

▲ Розглянемо верхню сторону площини П і відповідний цій стороні додатний напрям $ABCA$ (див. рис. 84). Маємо $P = xz$, $Q = yx$, $R = zy$, $Q'_x = y$, $P'_y = 0$, $R'_y = z$, $Q'_z = 0$, $P'_z = x$, $R'_x = 0$. Підставляючи ці значення у формулу Стокса (5) і користуючись формулою (4), дістаємо

$$Ц = \oint_L xzdx + yxdy + zydz =$$

$$= \iint_П ydxdy + zdydz + xdzdx.$$

Виразимо поверхневий інтеграл через подвійні інтеграли по областях, які є проекціями П на координатні площини:

$$Ц = \iint_{\triangle ABO} ydxdy + \iint_{\triangle BCO} zdydz + \iint_{\triangle AOC} xdzdx,$$

де $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle AOC$ — проекції заданої площини відповідно на координатні площини xOy, yOz, zOx. Маємо

$$\iint_{\triangle ABO} ydxdy = \int_0^3 ydy \int_0^{3-y} dx = 4{,}5.$$

Аналогічно $\iint_{\triangle BCO} zdydz = \iint_{\triangle AOC} xdzdx = 4{,}5$ (перевірте). Отже, $Ц = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$. ▼

4. Обчислити циркуляцію вектора $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ уздовж кола $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ в додатному напрямі.

▲ *Перший спосіб (безпосереднє обчислення)*. Параметричне рівняння заданого кола L має вигляд $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Оскільки $P = -y = -\sin t$, $Q = x = \cos t$, $R = 1$, $dx = -\sin tdt$, $dy = \cos tdt$, $dz = 0$, то за означенням циркуляції (див. формулу (4)) дістаємо

$$Ц = \oint (-y)\,dx + xdy + dz = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) +$$

$$+ \cos t \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Другий спосіб (застосування формули Стокса). З формул (4) і (5) маємо (D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$)

$$Ц = \iint_{П} (1 - (-1))\, dxdy = 2 \iint_{D} dxdy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi.$$

Обгрунтуйте цей розв'язок. ▼

5. Користуючись формулою Остроградського — Гаусса, обчислити потік векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через повну поверхню конуса $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

▲ Знайдемо дивергенцію векторного поля:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2(x + y + z).$$

Тоді за формулою (7), яку дістали з формули Остроградського — Гаусса, обчислюємо потік заданого поля:

$$П = \iiint_{T} \operatorname{div} \vec{a} dxdydz = 2 \iiint_{T} (x + y + z)\, dxdydz =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho} (\rho \cos\varphi + \rho \sin\varphi + z)\, dz = \frac{\pi}{3}.$$ ▼

6. Обчислити $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$, якщо $u = x^2 + y^2 + z^2$.

▲ Оскільки $\operatorname{grad} u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ (див. формулу (2), § 14.1), то за формулою (2) дістаємо $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$ (поясніть, чому). ▼

Вправи

1. Визначити дивергенцію вектора $\vec{a} = (x - y^2)\vec{i} + x^3z\vec{j} + xy\vec{k}$.
Відповідь: 1.

2. Обчислити $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a)$, якщо:

1) $\vec{a} = \vec{r}$; 2) $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$.

Відповідь: 1) 0; 2) 0.

3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -\frac{1}{y}\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j}$ уздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$.
Відповідь: 4π.

4. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ уздовж контура ромба, рівняння сторін якого $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \pm 1$, $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = \pm 1$.

Відповідь: 24.

5. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ через сторону трикутника, вирізаного з площини $x + y - z - 1 = 0$ координатними площинами.

Відповідь: 0,5.

6. Визначити потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнену поверхню циліндра $x^2 + y^2 = 1$, обмеженого площинами $z = 0$ і $z = 1$.

Відповідь: 3π.

7. Користуючись формулою Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L y^2dx + x^2dy + zdz$, де L — коло $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

Відповідь: 0.

8. Застосовуючи формулу Остроградського — Гаусса, звести заданий поверхневий інтеграл до інтеграла по об'єму:

$$\iint\limits_{\Pi} x^2ydydz + y^3dxdz + zxdxdy.$$

Відповідь: $\iiint\limits_{\Pi} (2xy + 3y^2 + x)\, dxdydz.$

9. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\Pi} x^2zdxdy + y^2xdydz$, де Π — повна поверхня параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмеженого площиною $z = 1$, скориставшись формулою Остроградського — Гаусса.

Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

ЧАСТИНА III
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

РОЗДІЛ 15. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ І ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі експериментів з випадковими результатами (наслідками). Будь-який результат інтерпретується як випадкова подія, яка може відбуватися або не відбуватися в результаті експерименту. Випадкові події можна порівнювати між собою за певною мірою можливості їх появи. Ймовірністю випадкової події і називають деяку чисельну міру об'єктивної можливості появи випадкової події.

У § 15.2 і 15.3 використовується класичне означення ймовірності. Для успішного його застосування слід чітко засвоїти основні поняття, пов'язані з випадковими подіями (§ 15.2), та елементи комбінаторики (§ 15.1). Розподіл ймовірностей за схемою Бернуллі при повторних випробуваннях розглядається в § 15.5. Висвітленню питань, пов'язаних с дискретними випадковими величинами і законом великих чисел, присвячено § 15.6.

§ 15.1. Елементи комбінаторики. Біном Ньютона

Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язанню задач вибору і розміщення елементів деякої скінченної множини згідно з певним правилом. Найпростішими комбінаціями елементів є розміщення, перестановки і сполучення.

Нехай $M^{(n)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — довільна n-елементна множина.

Упорядкована k-елементна підмножина множини $M^{(n)}$ називається *розміщенням* з n елементів по k. Число всіх таких розміщень A_n^k обчислюють за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1), \quad 0! = 1. \quad (1)$$

При $k = n$ розміщення є *перестановкою* елементів множини $M^{(n)}$, причому їх число дорівнює

$$P_n = A_n^n = n! \quad (2)$$

Зверніть увагу на те, що розміщення вважаються різними, якщо вони відрізняються складом елементів або порядком їх розташування.

Будь-яка невпорядкована k-елементна підмножина множини M називається *сполученням* з n елементів по k. Число різних таких сполучень позначається символом C_n^k і виражається формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\,\dots\,(n-k+1)}{k!}\,. \qquad (3)$$

Числа C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n є коефіцієнтами в розкладі бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^2 + \cdots + C_n^n a^n b^0 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \quad a,\ b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \quad C_n^0 = C_n^n = 1. \qquad (4)$$

Сполучення вважаються *різними,* якщо вони відрізняються складом елементів.

Нехай маємо множину $M = \{1, 2, 3\}$. Розміщеннями по два елементи є (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1) і (3, 2), а їх число $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ Перестановками елементів множини M є (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) і (3, 2, 1), а їх число $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Сполученнями по два елементи є (1, 2), (1, 3) і (2, 3), а їх число $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$.

Будь-який набір з k елементів множини $M^{(n)}$ назвемо вибіркою (рядком) довжиною k. Вибірка є впорядкованою, а її компоненти можуть повторюватися.

Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називається будь-яка вибірка довжиною k, утворена з елементів множини $M^{(n)}$. Два розміщення з повтореннями вважаються *різними,* якщо принаймні на одному місці вони мають різні елементи. Число різних розміщень з повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (5)$$

Для множини $M = \{1, 2, 3\}$ число розміщень з повтореннями по 2 елементи є $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$. До розглянутих вище розміщень (без повторень) слід додати ще такі: (1, 1), (2, 2), (3, 3).

Будь-яка невпорядкована вибірка довжиною k, утворена з елементів множини $M^{(n)}$, називається *сполученням з повтореннями* з n елементів по k. Два сполучення з повтореннями вважаються *різними*, якщо принаймні для одного номера i ($1 \leqslant i \leqslant n$) в одному з цих сполучень елемент x_i повторюється більше число разів, ніж в іншому. Число різних сполучень з повтореннями з n елементів по k визначається за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}. \qquad (6)$$

Для множини $M = \{1, 2, 3\}$ сполученнями з повтореннями по 2 елементи будуть такі: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), а їх число $\overline{C}_3^2 = C_4^2 = 6$.

Основні властивості розміщень і сполучень

$$а)\ A_n^0 = A_0^0 = 1,\ б)\ C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},\ в)\ C_n^k = C_n^{n-k},\ г)\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k,\quad k < n. \qquad (7)$$

Доведіть ці властивості і поясніть їх зміст.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати k способами і після кожного з цих виборів об'єкт B, в свою чергу, можна вибрати l способами, то вибір A і B можна здійснити kl способами.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити: а) $\frac{P_4 - P_3}{3!}$; б) $\frac{A_8^4 + A_6^3}{A_5^2}$; в) $C_6^4 + C_3^2$.

▲ а) Оскільки $P_n = n!$ (формула (2)), то

$$\frac{P_4 - P_3}{3!} = \frac{4! - 3!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 - 2!}{3!} = \frac{3!\,(4-1)}{3!} = 3.$$

б) Користуючись формулою (1), маємо

$$\frac{A_8^4 + A_6^3}{A_5^2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4} = 90.$$

в) За властивістю (6), в) і формулою (3) дістаємо

$$C_6^4 + C_3^2 = C_6^2 + C_3^1 = \frac{6 \cdot 5}{2!} + \frac{3}{1!} = 3 \cdot 5 + 3 = 18.$$ ▼

2. Обчислити n, якщо $A_n^5 = 20A_{n-1}^4$.

▲ За формулою (1) маємо

$$A_n^5 = \frac{n!}{(n-5)!} \text{ і } A_{n-1}^4 = \frac{(n-1)!}{(n-1-4)!} = \frac{(n-1)!}{(n-5)!}.$$

Отже, $\frac{n!}{(n-5)!} = 20 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-5)!}$, звідки $n! = 20\ (n-1)!$ або $n\ (n-1)! = 20\ (n-1)!$, тобто $n = 20$. ▼

3. Довести, що $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

▲ Покладаючи у формулі (4) $a = b = 1$, дістаємо $(1 + 1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

Оскільки C_n^k — число всіх k-елементних підмножин n-елементної множини, то з останньої рівності випливає, що кількість всіх підмножин n-елементної множини дорівнює сумі всіх біноміальних коефіцієнтів, тобто 2^n (числу C_n^0 ставиться у відповідність порожня множина, а числу C_n^n — сама множина). ▼

4. Знайти номер члена розкладу степеня бінома $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}\right)^{12}$, який не залежить від x.

▲ Запишемо k-й член розкладу, який стоїть на $(k + 1)$-му місці (на першому місці записано нульовий член). За формулою (4) маємо

$$T_k = C_{12}^k (\sqrt[3]{x})^{12-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = (-1)^k C_{12}^k x^{\frac{12-k}{3} - k}.$$

Цей член не залежить від x тоді й тільки тоді, коли $\frac{12-k}{3} - k = 0$, тобто при $k = 3$. Отже, третій член розкладу не залежить від x. ▼

5. Знайти найбільший коефіцієнт многочлена $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^8$.

▲ Використаємо формулу (4) і запишемо многочлен за зростаючими степенями x. Маємо

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(\frac{1}{4}\right)^{8-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k x^k = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k.$$

Для відшукання найбільшого коефіцієнта a_k розв'яжемо нерівність $a_{k-1} \leqslant a_k$, тобто

$$C_8^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{8-k+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \leqslant C_8^k \left(\frac{1}{4}\right)^{8-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Поділивши на $\frac{3^{k-1}}{4^8}$ обидві частини нерівності, дістанемо

$$C_8^{k-1} \leqslant 3C_8^k \text{ або } \frac{8!}{(k-1)!\,(8-k+1)!} \leqslant \frac{3 \cdot 8!}{k!\,(8-k)!}.$$

Після скорочення матимемо $\frac{1}{8-k+1} \leqslant \frac{3}{k}$ або $k \leqslant \frac{27}{4} = 6\frac{1}{4}$. Очевидно, при $k > 6\frac{1}{4}$ дістанемо $a_{k-1} > a_k$. Отже, коефіцієнт a_6 є найбільшим серед усіх дев'яти коефіцієнтів заданого многочлена. Він дорівнює $a_6 = C_8^6\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6$ ▼.

6. Студенти одного з курсів вивчають 8 навчальних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день слід запланувати три лекції з різних предметів?

▲ Кількість таких способів дорівнює числу розміщень з 8 елементів по 3, тобто $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. ▼

7. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох чоловік для чергування, якщо: а) один з них має бути старшим; б) старшого не повинно бути?

▲ а) Оскільки роль чергуючих різна, то кількість способів виділення двох чергових дорівнює числу розміщень з 30 елементів по 2, тобто $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

б) У даному випадку маємо число сполучень з 30 елементів по 2: $C_{30}^2 = 435$. ▼

8. У шаховому турнірі, де учасники зустрічаються між собою один раз, 3 шахісти вибули через хворобу, зігравши відповідно одну, дві і три партії. Скільки шахістів почали турнір, якщо всього було зіграно 84 партії?

▲ Позначимо через n число учасників турніру. Оскільки три з них вибуло, зігравши в сумі 6 партій, то в останніх $84 - 6 = 78$ партіях взяло участь $n - 3$ учасники. Отже, $78 = C_{n-3}^2$, тобто $\frac{(n-3)\,(n-4)}{2!} = 78$ або $n^2 - 7n - 144 = 0$, звідки дістаємо додатний корінь $n = 16$. ▼

9. Команда з «Клубу знавців» у складі 6 осіб займає місця за круглим столом. Скільки є можливих варіантів розміщення гравців? Скільки таких варіантів у випадку, коли два члени команди повинні сісти поруч?

▲ У першому випадку кількість способів розміщення гравців дорівнює числу перестановок з 6 елементів, тобто $P_6 = 6! = 720$. У другому випадку для двох виділених осіб є 6 різних сусідніх пар місць, на кожному з яких ці дві особи можуть сісти двома способами. Отже, посадити їх поряд можна 12 способами. На місця, що залишилися, решту членів команди можна розсадити $P_4 = 4!$ способами. За правилом добутку дістаємо кількість всіх варіантів розміщень: $12 \cdot 4! = 288$. ▼

10. Скільки парних п'ятизначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4 так, щоб усі цифри числа були різними?

▲ Парними будуть числа, які закінчуються на 0, 2 і 4. Кількість чисел, які закінчуються нулем, дорівнює числу перестановок з чотирьох цифр (1, 2, 3, 4), тобто P_4. Числа, які закінчуються на 2, утворюються з цифр 0, 1, 3, 4 їхніми різноманітними перестановками, кількість яких P_4. Однак на першому місці не може стояти 0. Тому потрібно вилучити з P_4 ту кількість чисел, які утворюються з цифр 1, 3 і 4, тобто P_3. Аналогічно знаходимо кількість п'ятизначних чисел, що закінчуються на 4. Отже, остаточно матимемо $n = 3P_4 - 2P_3 = 3 \cdot 4! - 2 \cdot 3! = 60$. ▼

11. Скільки існує різних положень, в яких можуть бути п'ять перемикачів, якщо кожен з них увімкнений або вимкнений?

▲ Маємо розміщення з повтореннями з елементів множини $M = \{$«увімкнений», «вимкнений»$\}$ по 5 елементів. Їх кількість визначаємо за формулою (4): $\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32$. Цю задачу можна розв'язати й іншим способом, розглядаючи кількість всіх підмножин 5-елементної множини (приклад 3). ▼

Вправи

1. Обчислити: а) C_{100}^{98}; б) $\dfrac{A_n^k\,(n-k)!}{(n-1)!}$; в) $A_5^3 : P_2$.

Відповідь: а) 4950; б) n; в) 30.

2. Обчислити n, якщо $(n+4)! = 30\,(n-k)!\,A_{n+2}^{k+2}$.

Відповідь: 2.

3. У розкладі $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^9$ знайти член, який після спрощення містить x^4.

Відповідь: $T_3 = C_9^3 x^4 = 84x^4$.

4. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу степеня бінома $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^n$ дорівнює 64. Знайти член розкладу, який не містить x.

Відповідь: 160.

5. Скільки існує двоцифрових чисел, що записуються цифрами 2, 4, 6, 8 і в запису кожного з яких використовуються різні цифри?

Відповідь: 12.

6. У групі 30 студентів. Скількома способами можна обрати старосту і профорга групи за умови, що кожен учень може бути обраний лише на одну з цих посад.

Відповідь: $A_{30}^2 = 870$.

7. Скільки п'ятицифрових парних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 5, 7 за умови, що в числі цифри не повторюються.

Відповідь: 24.

8. На одній із секцій студентської наукової конференції повинно виступити 7 доповідачів. Скількома способами можна розмістити їх у списку ораторів?

Відповідь: 5040.

9. З цифр 0, 2, 3, 4, 5 потрібно утворити п'ятизначні числа, кратні 5, так, щоб цифри не повторювалися в записі жодного з чисел. Скільки таких чисел можна утворити?

Відповідь: 42.

10. Для прийому вступних екзаменів з математики кафедра повинна виділити 6 викладачів. Скількома способами можна скласти таку комісію, якщо на кафедрі працює 8 викладачів?

Відповідь: $C_8^6 = 28$.

11. Команди вищої ліги з футболу провели за сезон у двох турах 240 матчів. Скільки команд у вищій лізі?

Відповідь: 16.

12. До профкому надійшло 6 заяв від студентів з проханням виділити їм туристські путівки. Скількома способами можна розділити 3 наявні путівки, якщо вони: а) різні; б) однакові?

Відповідь: а) 120; б) 20.

13. Скількома способами можна розділити 4 однакові папки у три ящики письмового столу, якщо кожен ящик може вмістити всі папки?

Відповідь: $\overline{C}_3^4 = 15$.

14. Скільки можна скласти різних телефонних номерів, у яких на перших трьох місцях стоїть цифра 2, а на четвертому, п'ятому, шостому і сьомому — будь-яка з цифр 0, 1, 2, ..., 9?

Відповідь: $\overline{A}_{10}^4 = 10^4$.

§ 15.2. Випадкові події та їх ймовірності

Випробуванням називається експеримент, який можна проводити в однакових умовах (принаймні теоретично) будь-яке число разів. Найпростіший результат випробування називається *елементарною подією* або *наслідком* і позначається ω. При випробуванні обов'язково настає лише один наслідок. Множина всіх можливих наслідків випробування називається *основним простором* або *простором елементарних подій* і позначається Ω. *Випадковою подією* (*подією*) називається будь-яка підмножина A простору Ω, тобто будь-яка множина наслідків. Наслідки, які утворюють подію A, називають *сприятливими* для A ($\omega \in A$). Подія A настає тоді й тільки тоді, коли настає елементарна подія (наслідок), сприятлива для A. Порожня множина $\varnothing$ і сама множина Ω, розглядувані як підмножини основного простору, називаються відповідно *неможливою* і *вірогідною* подіями.

Оскільки подія означається як множина елементарних подій, то над подіями можна увести такі ж операції, як і над множинами.

Сумою подій A і B називається така подія C, яка настає тоді, коли настає принаймні одна з подій A або B, і позначається $C = A + B$ або $C = A \cup B$. *Добутком (суміщенням)* подій A і B називається така подія C, яка настає тоді й тільки тоді, коли настають обидві події A і B, і позначається $C = AB$ або $C = A \cap B$. *Різницею* подій A і B є подія $C = A - B$ ($C = A \setminus B$), яка полягає в тому, що A відбувається, а B не відбувається. Подія $\bar{A} = \Omega - A$ (доповнення множини A до Ω) називається *протилежною* до A. Ця подія полягає в тому, що A не відбувається. Очевидно, $\bar{\Omega} = \varnothing$, $\bar{\varnothing} = \Omega$.

Події A і B називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої, тобто $AB = \varnothing$.

Події A_i ($i = \overline{1, n}$) утворюють *повну групу*, якщо в результаті випробування обов'язково настане принаймні одна з них, тобто $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Імовірністю $\mathbf{P}(A)$ події A називається числова функція, яка визначена на множині подій і задовольняє такі три умови (аксіоми ймовірності): 1) для довільної події $A \subset \Omega$ справедлива нерівність $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$; 2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ (ймовірність вірогідної події дорівнює 1); 3) ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $\mathbf{P}(\sum\limits_{k} A_k) = \sum\limits_{k} \mathbf{P}(A_k)$ *(аксіоматичне означення ймовірності)*.

Оскільки $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{\omega_k \in A} \mathbf{P}(\omega_k)$, тобто ймовірність події A дорівнює сумі ймовірностей усіх елементарних подій ω_k, які входять до множини A, то в *механічній інтерпретації* ймовірність $\mathbf{P}(A)$ вказує на те, яка частка всієї ймовірності, розподіленої на множині Ω всіх елементарних подій, припадає на множину A, так само як число $\mathbf{P}(\omega_k)$ вказує, яка частка всієї одиничної ймовірності припадає на елемент ω_k.

Будь-яке випробування, при якому простір елементарних подій Ω є скінченною множиною *рівноймовірних наслідків* $\left(\text{тобто } \mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_2) = \ldots = \mathbf{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}\right)$, називається *класичною схемою* або *схемою урн*. У цьому випадку ймовірність будь-якої події $A \subset \Omega$ означається так:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

де $N(A) = m$ — число елементів множини A (число наслідків, які сприяють події A), $N(\Omega) = n$ — число елементів множини Ω (число всіх наслідків випробування) (*класичне означення ймовірності*).

Неважко перевірити, що так означена функція $\mathbf{P}(A)$ має властивості: $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, якщо $AB = \varnothing$.

Класичне означення ймовірності передбачає, що: 1) число елементарних наслідків скінченне; 2) ці наслідки рівноможливі (рівноймовірні). Це звужує його застосування.

Нехай при n разовому здійсненні досліду подія A відбулася k разів. Тоді відношення $\frac{k}{n} = W_n$ називається *частотою випадкової події*, а границя $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \mathbf{P}(A)$ — *ймовірністю* цієї події (*статистичне означення ймовірності*).

ПРИКЛАДИ

1. Випробування полягає в підкиданні правильного однорідного шестигранного кубика, на гранях якого нанесено цифри 1, 2, 3, 4, 5 і 6. Подія A полягає в тому, що на верхній грані випаде число, більше за 4, подія B — випаде парне число, подія C — випаде число, кратне 3. Вказати множину всіх можливих наслідків випробування, а також підмножини, що визначають відповідно події A, B і C.

▲ Простором елементарних подій є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, де $\omega_i = \{$при підкиданні випала цифра $i\}$, $i = \overline{1, 6}$. Подія A відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається ω_5 або ω_6. Тому $A = \{\omega_5, \omega_6\}$. Аналогічно визначаємо, що $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, а $C = \{\omega_3, \omega_6\}$. ▼

2. На дошці записують два числа, вибрані навмання. Подія A — одне з цих чисел просте, подія B — одне з написаних чисел парне. Що означають події $A + B$ і AB?

▲ Подія $A + B$ означає настання принаймні однієї з подій A або B, тобто з двох записаних чисел одне просте або одне парне, або може бути одночасно одне число просте, а інше парне. Подія AB означає настання одночасно подій A і B, тобто з двох написаних чисел одне просте, а інше парне. ▼

3. Дослід полягає у підкиданні трьох монет. Нехай монети занумеровано і події O_1, O_2 і O_3 означають випадання орла відповідно на першій, другій і третій монетах. Виразити через ці події такі події: A = {випадання одного орла і двох решок}, B = {випадання не більше одного орла}, C = {число випадань орлів менше за число решок}, D = = {випадання принаймні двох орлів}.

▲ Подія A відбудеться, якщо настане принаймні одна з подій $O_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ (випадання орла на першій монеті і решок на другій і третій) або $\overline{O}_1O_2\overline{O}_3$, або $\overline{O}_1\overline{O}_2O_3$. Отже A є сумою цих трьох подій: $A = O_1\overline{O}_2\overline{O}_3 + \overline{O}_1O_2\overline{O}_3 + \overline{O}_1\overline{O}_2O_3$. Подія B означає, що випаде решка на всіх трьох монетах або випаде один орел (на першій, другій або третій монетах). Отже, $B = \overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3 + O_1\overline{O}_2\overline{O}_3 + \overline{O}_1O_2\overline{O}_3 + \overline{O}_1\overline{O}_2O_3$. Очевидно, $C =$ $= B$. Подія D полягає в тому, що випаде або два, або три орли. Це означає, що обов'язково відбудеться одна з подій $O_1O_2\overline{O}_3$ або $O_1\overline{O}_2O_3$, або $\overline{O}_1O_2O_3$, або $O_1O_2O_3$. Отже, $D =$ $= O_1O_2\overline{O}_3 + O_1\overline{O}_2O_3 + \overline{O}_1O_2O_3 + O_1O_2O_3$. ▼

4. В урні є 5 білих, 3 чорних і 4 червоні кулі. Яка ймовірність того, що навмання вийнята куля виявиться білою?

▲ Можливі такі елементарні події (наслідки): A = {вийнята куля — біла}, B = {вийнята куля — чорна} і C = = {вийнята куля — червона}. Однак ці події не є рівноймовірними, оскільки білих куль більше, а тому маємо більше шансів вийняти білу кулю. Отже, для використання формули (1) не можна розглядати простір Ω, утворений саме з цих подій. Поступимо так. Перенумеруємо всі кулі. Білим присвоїмо номери з 1 до 5, чорним — з 6 до 8, а червоним — з 9 до 12. Наслідки ω_i = {вийнята куля має номер i}, $i = \overline{1, 12}$, є рівноймовірними (кулі нерозрізнимі і виймають їх навмання) і вони утворюють простір елементарних подій Ω даного випробування. Отже, $n = N(\Omega) =$ $= 5 + 3 + 4 = 12$ (кількість всіх куль в урні), а $m =$ $= N(A) = 5$ (кількість білих куль). Тоді за формулою (1) маємо $P(A) = 5/12$. ▼

5. У лотереї 2000 білетів. На один з білетів припадає виграш 100 крб., на 4 — по 50 крб., на 20 — по 20 крб., на 55 — по 10 крб., на 150 — по 5 крб., на 500 — по 1 крб. Решта білетів невиграшні. Навмання вибирається один білет. Яка ймовірність виграти не менше 5 крб.?

▲ Маємо $n = 2000$, $m = 1 + 4 + 20 + 55 + 150 = 230$ і $P = 230/2000 = 0{,}115$. ▼

Вправи

1. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій Ω і подію A = {принаймні один раз випаде орел}.

Відповідь: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\omega_1 = \{О, Р\}$, $\omega_2 = \{Р, О\}$, $\omega_3 = \{О, О\}$, $\omega_4 = \{Р, Р\}$, $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, де О = {випадання орла}, Р = {випадання решки}.

2. Нехай A, B і C — довільні події. Що означають такі події: $\bar{A}BC$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ і $E = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$?

Відповідь: $\bar{A}BC$ — перша подія не відбулася, а друга й третя відбулися, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ — жодна з трьох подій не відбулася, $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ — принаймні одна з трьох подій не відбулася, E — відбулася лише одна подія з трьох.

3. Стрілець виконує три постріли по мішені. Подія A_i = {влучення в мішень при i-му пострілі}, $i = \overline{1, 3}$. Виразити через A_1, A_2 і A_3 такі події: A = {принаймні одне влучення}, B = {три промахи}, C = {три влучення}, D = {принаймні один промах}, E = {не менше двох влучень}, F = {не більше одного влучення}.

Відповідь: $A = A_1 + A_2 + A_3$, $B = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $C = A_1A_2A_3$, $D = \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $E = A_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3$, $F = \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

4. Підлягає контролю 150 деталей, з яких 3 нестандартні. Яка ймовірність того, що навмання взята для контролю деталь виявиться: а) нестандартною; б) стандартною?

Відповідь: а) 0,02; б) 0,98.

5. Навмання вибирається натуральне число, яке не перевищує 18. Яка ймовірність того, що воно кратне 3?

Відповідь: $^1/_3$.

6. Яка ймовірність того, що в навмання вибраному двозначному числі цифри однакові?

Відповідь: 0,1.

§ 15.3. Ймовірносні задачі комбінаторного характеру

У цьому параграфі розглядаються задачі на комбінаторний підрахунок ймовірностей за класичною схемою (схемою урн). Для підрахунку кількості елементарних наслідків (подій), які складають подію в класичній схемі (див. формулу (1), § 15.2), використовуватимемо формули комбінаторики, розглянуті в § 15.1. Кожна з комбінаторних формул визначає загальну кількість елементарних наслідків в деякій схемі урн, тобто у випробуванні, яке полягає у виборі навмання k елементів з n різних елементів вихідної множини $M^{(n)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Якщо випробування полягає у виборі k елементів без повернення і без упорядкування, то різними наслідками слід вважати k-елементні підмножини множини $M^{(n)}$, тобто сполучення з n елементів по k, і тоді число елементарних наслідків $N(\Omega) = C_n^k$.

Якщо випробування полягає у виборі k елементів без повернення, але з упорядкуванням їх в міру вибору в послідовний ланцюжок, то різними наслідками є упорядковані k-елементні підмножини, тобто розміщення з n елементів по k, і тоді $N(\Omega) = A_n^k$.

Якщо вибираються елементи з наступним їх поверненням, але без упорядкування, то різними наслідками такого випробування є різноманітні k-елементні набори, які відрізняються за складом (при цьому окремі елементи можуть повторюватися). Тоді $N(\Omega) = \bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Врахуйте, що в цьому (і наступному) випадку може бути $k > n$.

Якщо вибір k елементів з множини $M^{(n)}$ виконується з поверненням і з упорядкуванням їх в послідовний ланцюжок, то різними наслідками будуть різноманітні k-елементні набори (окремі елементи можуть повторюватися), які відрізняються або складом елементів, або порядком їх розміщення. Тоді $N(\Omega) = \bar{A}_n^k = n^k$.

ПРИКЛАДИ

1. В урні 16 куль: 10 білих і 6 чорних. Навмання вийняли дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

▲ Кількість усіх випадків (елементарних наслідків) $N(\Omega) = C_{16}^2 = 120$, а сприятливих для події A $N(A) = C_{10}^2 = 45$. Отже, за формулою (1), § 15.2, маємо $\mathbf{P}(A) = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$. ▼

2. Слово «інтеграл» складено з букв розрізної азбуки. Навмання виймають три картки і кладуть в ряд одну за одною в порядку появи. Яка ймовірність дістати при цьому слово «гра»?

▲ При утворенні простору елементарних подій Ω розглядаються всі впорядковані 3-елементні підмножини 8-елементної множини (букв, що утворюють слово «інтеграл»). Отже, $N(\Omega) = A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$, а сприятливим для шуканої події A є лише один випадок: коли підряд буде вийнято букви «г», «р» і «а». Отже, $\mathbf{P}(A) = 1 : 336 \approx 0{,}003$. ▼

3. Задано відрізки, довжина яких 2, 5, 6 і 10. Яка ймовірність того, що з навмання взятих трьох відрізків можна побудувати трикутник?

▲ Кількість всіх елементарних рівноможливих наслідків дорівнює числу сполучень з чотирьох елементів множини $M = \{2, 5, 6, 10\}$ по три, тобто $N(\Omega) = C_4^3 = 4$. Оскільки трикутник можна побудувати лише тоді, коли сума довжин будь-яких двох сторін більша за довжину третьої, то сприяють події A лише ті випадки, коли ця умова виконується. Такими випадками є $\omega_1 = \{2, 5, 6\}$ і $\omega_2 = \{5, 6, 10\}$. Отже, $N(A) = 2$ і $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$. ▼

4. У групі з 30 студентів екзамен з вищої математики 3 студента склали на «відмінно», 12 — на «добре» і 10 — на «задовільно». Яка ймовірність того, що два підряд за списком студенти одержали незадовільні оцінки?

▲ Маємо $N(\Omega) = C_{30}^2 = 435$, $N(A) = C_5^2 = 10$ і $\mathbf{P}(A) \approx \approx 0{,}03$. ▼

5. Групу волейболістів з 12 чоловік, серед яких два є майстрами спорту, жеребкуванням розбивають на дві команди по 6 чоловік. Яка ймовірність того, що обидва майстри спорту попадуть в одну команду?

▲ Кількість всіх можливих випадків вибору двох волейболістів з 12 дорівнює $C_{12}^2 = N(\Omega)$. Сприятливими для події A є випадки, коли обох майстрів спорту взято в одну команду (це можна зробити одним способом: $1 = C_2^2$). На чотири інших місця в команді потрібно взяти чотирьох волейболістів з 10, які залишилися після відбору двох майстрів спорту. Це можна зробити C_{10}^4 способами. Ці випадки також є сприятливими для події A. Отже, за правилом добутку загальне число сприятливих випадків дорівнює $N(A) = = C_2^2 \cdot C_{10}^4 = C_{10}^4$. Тоді $\mathbf{P}(A) = C_{10}^4 : C_{12}^2 \approx 0{,}2$. ▼

6. З десяти білетів книжкової лотереї виграшними є два. Навмання купують п'ять білетів. Визначити ймовірність того, що серед них: а) один виграшний (подія A); б) два виграшних (подія B); в) принаймні один виграшний (подія C).

▲ Число всіх можливих способів взяти 5 білетів з 10 дорівнює $C_{10}^5 = N(\Omega)$. Сприятливими для події A є випадки, коли із загальної кількості виграшних білетів (2) взято 1 (це можна зробити C_2^1 способами), а останні $5 - 1 = 4$ білети взято невиграшні, тобто їх взято із загальної кількості $10 - 2 = 8$ невиграшних білетів (число таких способів дорівнює C_8^4). Тому за правилом добутку $N(A) = C_2^1 \cdot C_8^4$. Отже, шукана ймовірність $\mathbf{P}(A) = C_2^1 \cdot C_8^4 : C_{10}^5 = \frac{5}{9}$. Аналогічно попередньому дістаємо $\mathbf{P}(B) = C_2^2 \cdot C_8^3 : C_{10}^5 = \frac{2}{9}$. Подія C є протилежною до події $\overline{C}$, яка полягає в тому, що жоден білет з куплених не є виграшним. Очевидно, $\mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{2}{9}$ (поясніть, чому). Тоді $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{C}) = \frac{7}{9}$. ▼

7. У складальника є 10 деталей, які мало між собою відрізняються. З них 4 деталі одного виду, по 2 — другого, третього і четвертого. Яка ймовірність того, що з 6 взятих навмання деталей виявиться три деталі першого виду, дві другого і одна третього?

▲ Маємо $N(\Omega) = C_{10}^6 = C_{10}^4$. Аналогічно попередньому дістаємо $N(A) = C_4^3 \cdot C_2^2 \cdot C_2^1 = C_4^1 \cdot C_2^1$ і тоді $\mathbf{P}(A) = C_4^1 \times C_2^1 : C_{10}^4 \approx 0{,}038$. ▼

8. Десять різних книг розміщено на поличці навмання. Визначити ймовірність того, що при цьому дві книги одного автора стоятимуть поряд.

▲ Дві книги одного автора будемо розглядати як одну книгу. Тоді різних способів розміщення 9 книг є $P_9 = 9!$ (число перестановок з 9 елементів). Книги одного автора можна переставляти між собою двома способами (2!). Об'єднуючи кожен перший випадок розміщень з другим, дістанемо за правилом добутку $N(A) = 9! \cdot 2!$ Очевидно, $N(\Omega) = 10!$. Отже, $\mathbf{P}(A) = \frac{2 \cdot 9!}{10!} = 0{,}2$. ▼

9. Замок відкривається лише при наборі п'ятизначного шифру, який складається з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Яка ймовірність відкрити замок при випадковому наборі шифру?

▲ Кількість всіх способів набору п'ятизначного шифру з семи заданих цифр дорівнює числу розміщень з поверненнями (оскільки цифри можуть повторюватися і повинні розміститися в певному порядку), тому $N(\Omega) = \overline{A}_7^5 = 7^5$. Сприятливим випадком є лише один. Отже, $\mathbf{P} = \frac{1}{7^5}$. ▼

10. У кабінеті вищої математики є книги з шести розділів математики. Надійшло 3 нові замовлення на літературу. Вважаючи, що будь-який склад замовленої літератури рівноможливий, визначити ймовірність таких подій: A = {замовлені книги є з різних розділів математики}, B = {замовлені книги — з одного розділу}, C = {одна книга — з одного розділу, а дві інші — з другого}.

▲ Кількість всіх рівноможливих наслідків даного випробування дорівнює числу сполучень з повтореннями з 6 елементів по 3 (оскільки тут елементи можуть повторюватися, а порядок їх розміщення не відіграє ролі), тобто $N(\Omega) = \overline{C}_6^3 = C_8^3$. Кількість наслідків, сприятливих для події A, дорівнює числу способів відібрати без повернення 3 елементи з 6, тобто $N(A) = C_6^3$. Тоді $\mathbf{P}(A) = C_6^3 : C_8^3 = \frac{5}{14}$. Кількість випадків, які сприяють події B, дорівнює числу способів вибрати один елемент з 6, тобто $N(B) = C_6^1$, і тоді $\mathbf{P}(B) = C_6^1 : C_8^3 = \frac{3}{28}$. Для події C маємо $N(C) = C_6^1 + C_6^2$ (обгрунтуйте це) і $\mathbf{P}(C) = (C_6^1 + C_6^2) : C_8^3 = \frac{3}{8}$. ▼

Вправи

1. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні в ряд карток розрізної азбуки, на яких написано букви «і», «я», «д», «е», «н», «п», «с», «т», «и», дістанемо слово «стипендія»?

Відповідь: 1/9!.

2. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи, що ці цифри різні. Яка ймовірність того, що номер набрано правильно?

Відповідь: 1/90.

3. Серед 100 електроламп 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 3 лампи є справними?

Відповідь: $C_{95}^3 : C_{100}^3 \approx 0{,}86$.

4. У партії з k виробів бракованими є l штук. Визначити ймовірність того, що серед вибраних навмання для перевірки r виробів виявиться s штук бракованих.

Відповідь: $C_l^s \cdot C_{k-l}^{r-s} : C_k^r$.

5. Залізницею перевозять k легкових і l вантажних автомобілів. Надійшла інформація, що в дорозі зіпсовано два автомобілі. Яка ймовірність того, що ці автомобілі різних типів?

Відповідь: $\dfrac{2kl}{(k+l)(k+l-1)}$.

6. У залі є $n + k$ місць. Випадково займають місця n чоловік. Яка ймовірність того, що будуть зайнятими певні m ($m \leqslant n$) місць?

Відповідь: $C_{n+k-m}^{n-m} : C_{n+k}^{n}$.

7. Три підручники з фізики і два з математики довільно розміщено на книжковій полиці. Яка ймовірність того, що підручники з одного предмета виявляться поряд?

Відповідь: 0,2.

8. У кондитерській продають 5 сортів тістечок. Покупець вибив чек на 4 тістечка. Вважаючи, що будь-який набір тістечок рівноможливий, визначити ймовірність того, що: а) всі тістечка одного сорту; б) тістечка різних сортів; в) два тістечка одного сорту і два іншого.

Відповідь: а) $C_5^1 : C_8^4 = 1/14$; б) $C_5^4 : C_8^4 = 1/14$; в) $(C_5^2 + C_5^2) : C_8^4 = 2/7$.

9. Випробування полягає в чотирьохкратному виборі з поверненнями однієї букви алфавіту {а, б, в, т, о} і викладенні слова в порядку надходження букв. Яка ймовірність дістати слово «тато»?

Відповідь: $1/5^4$.

§ 15.4. Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей. *Ймовірність суми двох довільних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку, тобто*

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB). \qquad (1)$$

Для суми трьох доданків A, B, C маємо

$$\mathbf{P}(A+B+C)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)+\mathbf{P}(ABC). \qquad (2)$$

Зокрема, для попарно несумісних подій дістаємо

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i). \qquad (3)$$

Ймовірність події A, обчислена за умови, що вже відбулася подія B, називається *умовною ймовірністю* події A і позначається $\mathbf{P}(A \mid B)$. Для умовної ймовірності справедлива рівність

$$\mathbf{P}(A \mid B)=\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad (4)$$

якщо $\mathbf{P}(B)>0$ *(формула умовної ймовірності).*

Якщо $\mathbf{P}(A \mid B)=\mathbf{P}(A)$, то подія A називається *незалежною* від події B. В іншому разі ($\mathbf{P}(A \mid B) \neq \mathbf{P}(A)$) подія A називається *залежною* від події B.

Теорема множення ймовірностей. *Ймовірність добутку двох довільних подій дорівнює ймовірності однієї з цих подій, помноженій на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулася, тобто*

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B \mid A) \quad \text{або} \quad \mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(A \mid B). \qquad (5)$$

Якщо події A і B незалежні, то

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B). \qquad (6)$$

Для довільних подій A, B і C справедлива формула

$$\mathbf{P}(ABC)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B \mid A)\cdot\mathbf{P}(C \mid AB). \qquad (7)$$

Нехай подія A настає лише разом з однією з n попарно несумісних подій H_1, H_2, ..., H_n, які по відношенню до A

називаються *гіпотезами*. Тоді справедлива формула *повної ймовірності*:

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(H_i)\cdot\mathbf{P}(A\mid H_i). \qquad (8)$$

Якщо подія A відбулася, то умовні ймовірності $\mathbf{P}(H_i \mid A)$ обчислюють за формулою Байєса

$$\mathbf{P}(H_i\mid A)=\frac{\mathbf{P}(H_i)\cdot\mathbf{P}(A\mid H_i)}{\mathbf{P}(A)},\quad i=\overline{1,\ n}, \qquad (9)$$

де $\mathbf{P}(A)$ обчислюють за формулою (8).

ПРИКЛАДИ

1. В одній урні 3 білі і 7 чорних куль, у другій — 4 білі і 6 чорних. З кожної урни виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

▲ Нехай подія A = {поява білої кулі з першої урни}, подія B = {поява білої кулі з другої урни}. Очевидно, події A і B — незалежні. У задачі йдеться про суміщення подій A і B, тобто про їх добуток. Оскільки $\mathbf{P}(A)=0{,}3$ і $\mathbf{P}(B)=0{,}4$, то за формулою (6) маємо $\mathbf{P}(AB)=0{,}12$. ▼

2. За умов попередньої задачі визначити ймовірність того, що одна з вийнятих куль є біла, а друга чорна.

▲ Розглянемо попарно незалежні події $Б_1$ = {біла куля з першої урни}, $Б_2$ = {біла куля з другої урни}, $Ч_1$ = {чорна куля з першої урни}, $Ч_2$ = {чорна куля з другої урни}. Тоді ймовірність того, що з першої урни вийнято білу, а з другої чорну кулі, дорівнює $\mathbf{P}(Б_1Ч_2)=\mathbf{P}(Б_1)\cdot\mathbf{P}(Ч_2)$. А ймовірність того, що з першої урни вийнято чорну, а з другої білу кулі, дорівнює $\mathbf{P}(Ч_1Б_2)=\mathbf{P}(Ч_1)\cdot\mathbf{P}(Б_2)$. Неважко підрахувати, що $\mathbf{P}(Б_1)=0{,}3$, $\mathbf{P}(Б_2)=0{,}4$, $\mathbf{P}(Ч_1)=0{,}7$, $\mathbf{P}(Ч_2)=0{,}6$. Тоді $\mathbf{P}(Б_1Ч_2)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$ і $\mathbf{P}(Ч_1Б_2)=0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}28$. Оскільки події $Б_1Ч_2$ і $Ч_1Б_2$ є несумісними, то шукану ймовірність обчислимо за формулою (3):

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(Б_1Ч_2)+\mathbf{P}(Ч_1Б_2)=0{,}18+0{,}28=0{,}46. \ ▼$$

3. В урні 3 білі і 7 чорних куль. З урни виймають одну за одною дві кулі. Обчислити ймовірність того, що обидві кулі білі.

▲ Нехай A = {поява білої кулі при першому вийманні}, B = {поява білої кулі при другому вийманні}. Ці події залежні між собою. За формулою (5) маємо $\mathbf{P}(AB)=$

$= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B \mid A)$. Ймовірність появи першої білої кулі $\mathbf{P}(A) = 3 : 10 = 0{,}3$. Якщо ця подія відбудеться, то в урні залишиться 2 білі кулі (а всього 9), тому $\mathbf{P}(B \mid A) = 2 : 9 = \frac{2}{9}$. Отже, $\mathbf{P}(AB) = 0{,}3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$. ▼

4. Відомо, що 3 % всієї продукції є бракованою, а 80 % небракованих виробів є першосортними. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб є першосортним?

▲ Нехай $A = \{$взятий виріб небракований$\}$, $B = \{$взятий виріб першосортний$\}$. Тоді $\mathbf{P}(A) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$, $\mathbf{P}(B \mid A) = 0{,}8$ (за умовою задачі). Отже, ймовірність шуканої події $\mathbf{P} = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B \mid A) = 0{,}97 \cdot 0{,}8 = 0{,}776$. ▼

5. Ймовірність влучення в мішень одного стрільця 0,8, другого — 0,7. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що принаймні один стрілець попаде в мішень?

▲ Уведемо події $A = \{$влучив перший в ціль$\}$, $B = \{$влучив другий в ціль$\}$, C — шукана подія. Тоді $C = A + B$. Оскільки події A і B — сумісні, то за формулою (1) маємо $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94$. ▼

6. У команді 10 спортсменів, 4 з яких — майстри спорту. Жеребкуванням з команди вибирають трьох спортсменів. Яка ймовірність того, що всі вибрані спортсмени є майстрами спорту?

▲ Нехай A — шукана подія. Розв'язуючи задачу за класичною схемою, дістанемо $\mathbf{P}(A) = C_4^3 : C_{10}^3 = 4 : 120 = \frac{1}{30}$ (див. приклад 5, § 15.3).

Однак цю задачу простіше розв'язати, користуючись формулою (7). Позначимо $A_i = \{i$-й вибраний спортсмен є майстром спорту$\}$, $i = \overline{1, 3}$. Тоді $A = A_1A_2A_3$ і $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbf{P}(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$. ▼

7. Ймовірність виходу верстата з ладу протягом робочого дня дорівнює α (α — мале додатне число). Яка ймовірність того, що за 5 робочих днів верстат жодного разу не вийде з ладу?

▲ Ймовірність того, що протягом дня верстат не вийде з ладу, дорівнює $1 - \alpha$. За теоремою множення для незалежних подій визначаємо шукану ймовірність $\mathbf{P} = (1 - \alpha)^5 \approx 1 - 5\alpha$. Тут ми скористались біноміальним розкладом (див. формулу (4), § 15.1), де знехтували досить малими членами α^2, α^3, α^4 і α^5. Якщо, наприклад, $\alpha = 0{,}01$, то $\mathbf{P} = (1 - 0{,}01)^5 \approx 1 - 5 \cdot 0{,}01 = 0{,}95$. ▼

8. У люстрі 4 електричні лампи. Ймовірність невиходу з ладу за певний проміжок часу для кожної з ламп дорівнює p. Визначити ймовірність справної роботи люстри протягом цього часу (її надійність). Скільки ламп повинна мати люстра, щоб її надійність перевищувала 0,99 за умови, що $p = 0{,}8$?

▲ Нехай $A_i = \{$справна робота i-ї лампи$\}$, $i = \overline{1, 4}$, A — шукана подія. Зручно спочатку обчислити ймовірність події $\bar{A}$. Очевидно, $\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$, бо люстра виходить з ладу, коли всі лампи перегорять. Події A_i (а отже, і $\bar{A}_i$) незалежні в сукупності, тому $\mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(\bar{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_2) \times \times \mathbf{P}(\bar{A}_3) \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_4) = (1 - p)^4$. Тоді $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) = = 1 - (1 - p)^4$.

Для n ламп дістанемо $\mathbf{P}(A) = 1 - (1 - p)^n$. Число n знайдемо з умови $1 - (1 - p)^n > 0{,}99$. Розв'язуючи цю нерівність, дістанемо $(1 - p)^n < 0{,}01$, а після логарифмування і підстановки значення $p = 0{,}8$, дістанемо $n > > -\frac{\ln 100}{\ln 0{,}2} \approx 2{,}9$. Отже, для забезпечення заданої надійності люстра повинна мати не менше трьох ламп. ▼

9. Радіолампа надійшла з одного з трьох заводів відповідно з ймовірностями 0,35; 0,45; 0,2. Ймовірність вийти з ладу протягом року дорівнює 0,2 для ламп, виготовлених першим заводом, 0,3 — другим і 0,1 — третім. Яка ймовірність того, що лампа працюватиме рік?

▲ Нехай подія $A = \{$лампа працюватиме рік$\}$, гіпотези $H_i = \{$лампа надійшла з i-го заводу$\}$, $i = \overline{1, 3}$. Ймовірність гіпотез дістаємо в умови задачі: $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}35$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}45$ і $\mathbf{P}(H_3) = 0{,}2$. Умовні ймовірності події A за умови, що є гіпотези H_1, H_2 або H_3, визначимо з того, що задано умовні ймовірності протилежних подій. Отже, $\mathbf{P}(A \mid H_1) = 0{,}8$ (або $\mathbf{P}(\bar{A} \mid H_1) = 0{,}2$), $\mathbf{P}(A \mid H_2) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(A \mid H_3) = 0{,}9$. Тоді за формулою (9) дістаємо $\mathbf{P}(A) = = 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0{,}45 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}775$. ▼

10. Відомо, що 95 % випущеної продукції задовольняє стандарт. Спрощений контроль визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,97 і нестандартну — з ймовірністю 0,06. Визначити ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, стандартний.

▲ Нехай $A = \{$виріб пройшов спрощений контроль$\}$, H_1 і H_2 — гіпотези, які полягають відповідно у виборі стандартного і нестандартного виробу. За умовою задачі маємо $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}95$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}05$, $\mathbf{P}(A \mid H_1) = 0{,}97$, $\mathbf{P}(A \mid H_2) = 0{,}06$. Тоді за формулами (8) і (9) дістаємо

$$\mathbf{P}(H_1 \mid A) = 0{,}95 \cdot 0{,}97 : (0{,}95 \cdot 0{,}97 + 0{,}06 \cdot 0{,}05) = 0{,}997. \ \blacktriangledown$$

Вправи

1. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені. Ймовірність влучення в ціль дорівнює 0,7 для першого стрільця, 0,8 — для другого і 0,9 — для третього. Яка ймовірність того, що: а) всі три стрільці влучать в ціль; б) принаймні один влучить в ціль?

Відповідь: а) 0,504; б) 0,994.

2. В урні a виграшних і b невиграшних лотерейних білетів. Яка ймовірність того, що з двох вийнятих білетів один виграшний, а інший невиграшний?

Відповідь: $\dfrac{2ab}{(a+b)\ (a+b-1)}$.

3. У групі 20 хлопців і 5 дівчат. Потрібно обрати двох делегатів на профспілкову конференцію. Яка ймовірність того, що: а) виберуть двох хлопців; б) виберуть двох дівчат; в) виберуть хлопця і дівчину, якщо цей вибір випадковий?

Відповідь: а) $^{19}/_{30}$; б) $^{1}/_{30}$; в) $^{1}/_{3}$.

4. Студент повинен складати з вищої математики залік і екзамен. Ймовірність скласти студентом залік дорівнює 0,8. Якщо залік складено, то студент допускається до екзамену, ймовірність складання якого для нього дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що студент складе залік і екзамен?

Відповідь: 0,72.

5. Нехай ймовірність попадання в рухому мішень при одному пострілі дорівнює 0,05. Скільки пострілів потрібно зробити, для того щоб з ймовірністю, не меншою за 0,75, мати принаймні одне влучення?

Відповідь: 28.

6. Ймовірність оплати в касі виписаного продавцем чека дорівнює 0,99. Яка ймовірність того, що із 100 виписаних чеків принаймні один виявиться неоплаченим?

Відповідь: 0,63.

7. Два верстати працюють незалежно один від одного. Ймовірність безперебійної роботи протягом години для першого верстата дорівнює 0,85, для другого — 0,9. Яка ймовірність того, що протягом години будуть порушення в роботі лише одного верстата?

Відповідь: 0,22.

8. Ймовірність перевиконання плану одним заводом 0,9, другим 0,95. Яка ймовірність того, що принаймні один із заводів перевиконає свій план, якщо вони реалізують свою продукцію незалежно один від одного?

Відповідь: 0,995.

9. У збиральний цех надходить 40 % деталей з першого автомата, 30 % — з другого, 20 % — з третього, 10 % — з четвертого. Серед деталей з першого автомата бракованими є 0,1 %, з другого — 0,2, з третього — 0,25, з четвертого — 0,5 %. Визначити ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою.

Відповідь: 0,002.

10. В урні три лотерейних білети. Навмання вийнятий білет виявився виграшним. Яка ймовірність того, що: а) в урні був лише один виграшний білет; б) два білети виграшні; в) всі три білети виграшні?

Відповідь: $^1/_6$; $^1/_3$; $^1/_2$.

§ 15.5. Повторні незалежні випробування. Граничні теореми

Подія A називається *незалежною* в даній серії випробувань, якщо її ймовірність у кожному з них не залежить від наслідків інших випробувань. Серія повторних незалежних випробувань, у кожному з яких дана подія A має одну й ту саму ймовірність $\mathbf{P}(A) = p$, що не залежить від номера випробування, називається *схемою Бернуллі.*

Ймовірність того, що при n-разовому проведенні випробування подія A відбувається рівно k разів ($0 \leqslant k \leqslant n$), визначається за формулою

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1}$$

яка називається *формулою Бернуллі.* При цьому q — ймовірність події $\overline{A}$. Подія A розглядається як успіх, а $\overline{A}$ — як невдача.

Застосовуючи формулу Ньютона до многочлена $(q + px)^n$, дістаємо

$$(q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k p^k q^{n-k}) x^k, \tag{2}$$

звідки бачимо, що $\mathbf{P}_n(k)$ є коефіцієнтами многочлена $(q + px)^n$, який називають *твірним многочленом* для ймовірностей k-разового настання події A в серії n незалежних випробувань. Тому формулу (1) називають ще *біноміальною.*

З формули (2) при $x = 1$ дістаємо (враховуючи, що $p + q = 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_n(k) = 1. \tag{3}$$

Для знаходження найімовірнішого числа успіхів k_0 за заданими n і p можна користуватися нерівностями

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + q. \tag{4}$$

При досить великій кількості випробувань зручно користуватися наближеною формулою Лапласа

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \tag{5}$$

де $q = 1 - p$, $0 < p < 1$.

При досить великому n і малому p використовують наближену *формулу Пуассона*

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \frac{m^k}{k!}\,e^{-m}, \quad \text{де} \quad m = np. \tag{6}$$

ПРИКЛАДИ

1. По мішені зроблено 6 пострілів з ймовірністю влучення в ціль при кожному пострілі 0,7. Яка ймовірність того, що в мішені буде 4 влучення?

▲ Покладаючи у формулі (1) $n = 6$, $k = 4$ і $p = 0{,}7$, дістаємо

$$\mathbf{P}_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^2 = C_6^2 \cdot 0{,}2401 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}3. \ ▼$$

2. У люстрі три лампи. Ймовірність виходу з ладу протягом року для кожної лампи дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться замінити не менше двох ламп?

▲ Скористаємось формулою (1). Ймовірність того, що протягом року вийде з ладу три лампи, дорівнює $C_3^3 \cdot 0{,}2^3 \times \times 0{,}8^0 = 0{,}008$; дві лампи — $C_3^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$. За теоремою додавання для несумісних подій шукана ймовірність дорівнює $\mathbf{P}_3(2) + \mathbf{P}_3(3) = 0{,}096 + 0{,}008 = 0{,}104$. ▼

3. Три елементи обчислювального пристрою працюють незалежно. Ймовірність безвідмовної роботи для кожного елемента за час t дорівнює 0,8. Визначити ймовірність того, що протягом часу t: а) всі елементи вийдуть з ладу; б) тільки один працюватиме безвідмовно; в) два елементи не відмовлять; г) всі три елементи працюватимуть справно.

▲ Дослід полягає в спостереженні за роботою елемента протягом часу t, подія A — в безвідмовній роботі елемента протягом цього часу. Ймовірність події A (успіху) $p = 0{,}8$, ймовірність $\bar{A}$ (невдачі) $q = 0{,}2$, число дослідів $n = 3$. Для розв'язування задачі складемо твірний многочлен $(0{,}2 + 0{,}8x)^3$ і запишемо для нього формулу (2). Маємо $(0{,}2 + 0{,}8x)^3 = 0{,}2^3 + 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8x + 3 \cdot 0{,}2 \times$

$\times\, 0{,}8^2x^2 + 0{,}8^3x^3$. Коефіцієнти многочлена дають шукані ймовірності:

а) $\mathrm{P}_3(0) = 0{,}2^3 = 0{,}008$; б) $\mathrm{P}_3(1) = 3 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$; в) $\mathrm{P}_3(2) = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384$; г) $\mathrm{P}_3(3) = 0{,}8^3 = 0{,}512$.

Перевірку виконаємо за формулою (3): $\sum\limits_{k=0}^{3} \mathrm{P}_3(k) = 0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1$. ▼

4. Ймовірність події A при одному досліді $p = 0{,}75$. Дослід повторюють 8 разів. Який результат цього експерименту має найбільшу ймовірність?

▲ Твірний многочлен у цьому випадку має вигляд $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^8$. Найбільший коефіцієнт цього многочлена дорівнює $C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^6$ (коефіцієнт при x^6; див. приклад 5, § 15.1). Отже, найбільш імовірний наслідок експерименту — подія A відбувається 6 разів, а ймовірність такого результату $\mathrm{P}_8(6) = C_8^6 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^6 \approx 0{,}31$. Кожен з 8 інших наслідків експерименту має меншу ймовірність. Число $k = 6$ можна було б визначити з нерівності (4). Справді, маємо $8 \cdot 0{,}75 - 0{,}25 \leqslant k \leqslant 8 \cdot 0{,}75 + 0{,}75$, звідки $5{,}75 \leqslant k \leqslant 6{,}75$, тобто $k = 6$. ▼

5. Знайти ймовірність того, що з 500 висіяних насінин не зійде 130, якщо схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,75.

▲ Маємо $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, $n = 500$, $k = 130$. Зручно скористатися формулою Лапласа. Отже, $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{93{,}75} \approx 9{,}682$, $x = \frac{130 - 500 \cdot 0{,}25}{9{,}682} \approx 0{,}52$. За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(0{,}52) = 0{,}3485$. Тоді за формулою (5) дістаємо $\mathrm{P}_{500}(130) \approx 0{,}036$. ▼

6. При виготовленні деякої масової продукції ймовірність появи одного нестандартного виробу дорівнює 0,01. Яка ймовірність того, що в партії із 100 виробів 4 будуть нестандартними?

▲ У даному випадку ймовірність $p = 0{,}01$ мала, а число $n = 100$ велике, причому $m = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$. Користуючись формулою Пуассона (6), дістаємо

$$\mathrm{P}_{100}(4) \approx \frac{m^4}{4!} e^{-m} = \frac{1}{24} e^{-1} \approx 0{,}015. \ ▼$$

Вправи

1. Монету підкидають 8 разів. Яка ймовірність того, що орел випаде зверху 5 разів?

Відповідь: $\approx 0{,}212$.

2. Ймовірність того, що добова витрата електроенергії на підприємстві не перевищує норми, дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що протягом тижня підприємство допустить перевитрату електроенергії: а) втричі; б) в чотири рази?

Відповідь: а) $\approx 0{,}11$, б) $\approx 0{,}03$.

3. У сім'ї троє дітей. Визначте ймовірність того, що серед них два хлопчики, якщо ймовірності народження хлопчика і дівчинки однакові.

Відповідь: 0,375.

4. За даними технічного контролю 2 % випущених телевізорів потребують додаткового регулювання. Визначте ймовірність того, що з 10 випущених телевізорів 1 потребує додаткового регулювання.

Відповідь: $\approx 0{,}17$.

5. Ймовірність виграшу і програшу в одній партії однакова і дорівнює 0,5. Що ймовірніше: а) виграти три партії з чотирьох чи п'ять з восьми; б) виграти не менше трьох партій з чотирьох чи не більше п'яти партій з восьми?

Відповідь: а) $\mathbf{P}_4(3) > \mathbf{P}_8(5)$; б) $\mathbf{P}_4(k \geqslant 3) < \mathbf{P}_8(k \leqslant 5)$.

6. Ймовірність того, що грошовий приймач автомату при опусканні однієї монети спрацює правильно, дорівнює 0,97. Скільки потрібно опустити монет, щоб найімовірніше число випадків правильної роботи автомата дорівнювало 100?

Відповідь: 103.

7. Нехай ймовірність того, що пасажир запізниться до відправлення поїзда, дорівнює 0,02. Знайти найбільш ймовірне число пасажирів, які запізняться, з 855 пасажирів, що повинні їхати.

Відповідь: 17.

8. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти ймовірність 100 влучень з 320.

Відповідь: 0,0003.

9. Проводиться серія з 1000 випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю 0,001. Визначити ймовірність того, що в цій серії випробувань подія A з'явиться тричі.

Відповідь: 0,06.

§ 15.6. Дискретні випадкові величини. Нерівність Чебишева

Величина називається *випадковою,* якщо вона набуває своїх значень в залежності від наслідків деякого випробування, причому для кожного елементарного наслідку вона має єдине значення. Якщо ці значення можна записати у вигляді послідовності (скінченної або нескінченної), то випадкова величина називається *дискретною.*

Якщо змінна величина X набуває значень x_1, x_2, ..., x_n, ... з відповідними ймовірностями p_1, p_2, ..., p_n, ..., то говорять, що *задано закон розподілу ймовірностей випадкової величини,* який зручно записувати у вигляді таблиці

x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
p_1	p_2	p_3	...	p_n	...

, де $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, (1)

або пар чисел (x_k, p_k), $k = 1, 2, \ldots$.

Позначимо через $p_k = \mathbf{P}(X = x_k)$ ймовірність події, яка полягає в тому, що X набуває значення x_k.

Число появ k події A при n незалежних випробуваннях можна розглядати як випадкову величину X із значеннями $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Закон розподілу цієї величини задається біноміальною формулою $p_k = \mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ (див. формулу (1), § 15.5), де $p = \mathbf{P}(A)$, $q = \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - p$ (біноміальний розподіл). Його можна записати у вигляді такої таблиці:

0	1	...	k	...	n
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

, (2)

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

Зокрема, якщо p мале і n велике, причому $pn = m$ — обмежена величина, то наближено справедливий розподіл Пуассона (див. формулу (6) § 15.5):

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) \approx \frac{m^k}{k!} e^{-m}. \qquad (3)$$

У механічній інтерпретації розподіл ймовірностей випадкової величини вказує на те, яка частка всієї ймовірності припадає на те чи інше значення випадкової величини.

Важливими числовими характеристиками випадкової величини є математичне сподівання і дисперсія цієї величини.

Математичним сподіванням випадкової величини називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх значень випадкової величини на ймовірності цих значень. Отже,

$$\mathbf{M}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad \text{або} \quad \mathbf{M}X = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (4)$$

Точку з координатою $\mathbf{M}X$ називають центром розсіювання ймовірностей. Часто $\mathbf{M}X$ називають середнім значенням випадкової величини, бо воно означає деяке «середнє число», навколо якого групуються всі значення випадкової величини.

У механічній інтерпретації $\mathbf{M}X$ є не що інше, як центр системи мас (імовірностей), розподілених дискретно вздовж осі абсцис так, що на точку з абсцисою x_k припадає маса (ймовірності) p_k, причому $\sum_k p_k = 1$ (загальна маса ймовірностей дорівнює 1), бо

$$x_C = \frac{\sum_k x_k p_k}{\sum_k p_k} = \sum_k x_k p_k = \mathbf{M}X.$$

Випадкову величину $X - \mathbf{M}X$ називають *відхиленням*.

Дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання (квадрат випадкової величини X, тобто X^2 — нова випадкова величина, яка з тими самими ймовірностями, що й X, набуває значень, рівних квадратам значень випадкової величини X) і позначають $\mathbf{D}X$. Отже,

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = \sum_k (x_k - \mathbf{M}X)^2 p_k. \tag{5}$$

Дисперсія випадкової величини характеризує ступінь розсіювання її ймовірностей навколо математичного сподівання (середнього значення). У механічній інтерпретації дисперсія — це момент інерції відносно центра мас із загальною одиничною масою, розподіленою вздовж осі абсцис так, що в точці з абсцисою x_k знаходиться маса p_k. Часто для характеристики розсіювання ймовірностей користуються не дисперсією, а так званим середнім квадратичним відхиленням σ_X (або стандартом), яке дорівнює

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}X}. \tag{6}$$

Поясніть зміст арифметичних операцій $X + Y$, $X - Y$ і XY і запишіть закони розподілу ймовірностей відповідних випадкових величин.

Основні властивості числових характеристик

$$\mathbf{M}C = C, \quad \mathbf{M}(X + Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y, \quad \mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y,$$
$$\mathbf{M}(CX) = C\mathbf{M}X, \quad \mathbf{D}X = \mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2, \quad \mathbf{D}C = 0,$$
$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y, \quad \mathbf{D}(CX) = C^2\mathbf{D}X, \quad \mathbf{D}(X - Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y. \tag{7}$$

Поясніть, для яких величин X і Y справедливі ці властивості.

Для випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом,

$$\mathbf{M}X = np, \quad \mathbf{D}X = npq. \tag{8}$$

Для довільної випадкової величини X і будь-якого додатного числа ε справедлива *нерівність Чебишева*

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2} \tag{9}$$

або в іншому варіанті

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{9a}$$

Зокрема, для випадкової величини X — числа настання події A в серії з n незалежних дослідів, у кожному з яких A настає з ймовірністю p, матимемо

$$\mathbf{P}(|k - np| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{npq}{\varepsilon^2}, \tag{10}$$

звідки дістаємо *теорему Бернуллі* або *закон великих чисел*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \tag{11}$$

який стверджує, що частота настання події A в серії з n випробувань $\left(\frac{k}{n}\right)$ наближається до ймовірності події A із зростанням n.

ПРИКЛАДИ

1. Є 4 ключі, з яких лише один підходить до замка. Скласти закон розподілу ймовірностей числа спроб при відкриванні замка, якщо випробуваний ключ в наступних випробуваннях не бере участі.

▲ Оскільки всього є 4 ключі, то ймовірність спрацювання кожного з них буде однією й тією ж, а саме: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0{,}25$. Отже, маємо такий закон розподілу: $(k;\ 0{,}25)$ $k = \overline{1, 4}$. ▼

2. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа бракованих виробів у партії з 2000 виробів, якщо кожен виріб може бути бракованим з ймовірністю 0,01.

▲ Кількість бракованих виробів — випадкова величина X, розподілена за біноміальним законом, де $p = 0{,}01$, $q =$

$= 0{,}99$ і $n = 2000$. Тому за формулами (8) дістаємо $\mathbf{M}X = np = 2000 \cdot 0{,}01 = 20$, $\mathbf{D}X = npq = 19{,}8$. ▼

3. Ймовірність того, що автомат для розміну монет спрацює при киданні монети (подія A), дорівнює 0,98. Скласти закон розподілу числа опускань монет в автомат до першої правильної роботи автомата (числа випробувань до настання події A) і визначити математичне сподівання і дисперсію відповідної випадкової величини X.

▲ Шукана випадкова величина X — число опускань монет до першої правильної роботи автомата — може набувати значень 1, 2, 3, ... Значення n вона набуває в тому випадку, коли в перших $n - 1$ випробуваннях подія A не настане, а в n-му випробуванні настане. За теоремою множення незалежних подій ймовірність цієї події дорівнює $q^{n-1}p$, де $q = 1 - p$ (ймовірність події $\bar{A}$). Тобто $p_1 = \mathbf{P}(X = 1) = q^0 p = p = 0{,}97$ (ймовірність того, що подія A настане при першому киданні монети), $p_2 = \mathbf{P}(X = 2) = q^1 p = 0{,}03 \cdot 0{,}97$ (подія A не настане при першому киданні монети, а настане при другому), $p_3 = \mathbf{P}(X = 3) = q^2 p = 0{,}03^2 \cdot 0{,}97$ (подія A не настане при перших двох киданнях, а настане при третьому) ..., $p_n = \mathbf{P}(X = n) = q^{n-1}p = 0{,}03^{n-1} \cdot 0{,}97$, ... При цьому

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = p\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 0{,}97 \cdot \frac{1}{1-0{,}03} = 1$$

(тут ми розглядали ряд, утворений з членів геометричної прогресії, знаменник якої $q = 0{,}03 < 1$, а сума $S = \frac{1}{1-q}$).

Математичне сподівання величини X обчислимо за формулою (3):

$$\mathbf{M}X = 1 \cdot p + 2pq + 3pq^2 + \cdots + npq^{n-1} + \cdots = p(1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots),$$

а дисперсію — за формулою (7):

$$\mathbf{D}X = (1^2 p + 2^2 pq + 3^2 pq^2 + \cdots + n^2 pq^{n-1} + \cdots) - (\mathbf{M}X)^2 = p(1^2 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \cdots + n^2 q^{n-1}) - (\mathbf{M}X)^2.$$

Для обчислення сум розглянутих вище рядів користуємося рівністю $q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{q}{1-q}$

(геометричний ряд і його сума, де $|q| < 1$). Диференціюючи обидві частини цієї рівності за змінною q, маємо

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (10)$$

Обидві частини рівності (10) помножимо на q і знову почленно продиференціюємо за змінною q. Дістанемо

$$1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \cdots + n^2 q^{n-1} + \cdots = \frac{1+q}{(1-q)^3}. \quad (11)$$

Користуючись формулами (10) і (11), маємо

$$\mathbf{M}X = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}, \text{ тобто } \mathbf{M}X = \frac{1}{0{,}97} \approx 1{,}03,$$

$$\mathbf{D}X = p\frac{1+q}{(1-q)^3} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}, \text{ тобто } \mathbf{D}X \approx 0{,}03. \ \blacktriangledown$$

Зауваження. Закон розподілу ймовірностей випадкової величини, розглянутий в цій задачі (коли $p_k = q^{k-1}p$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$), називається *геометричним*.

4. Задано незалежні випадкові події X і Y з відповідними законами розподілу ймовірностей $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ і $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Скласти закони розподілу ймовірностей випадкових величин $X + Y$, $X - Y$, XY і перевірити для них властивості (7) числових характеристик.

▲ Під сумою $Z = X + Y$, різницею $R = X - Y$, добутком $W = XY$ розуміють випадкові величини, які набувають всіх значень вигляду

$$x_i + y_j, \ x_i - y_j, \ x_i \cdot y_j, \quad i, j = 1, 2, \quad x_i \in X, \ y_j \in Y,$$

відповідно з ймовірностями $p_{i,j} = \mathbf{P}(X = x_i) \cdot \mathbf{P}(Y = y_j)$, якщо X і Y — незалежні величини. Обчислимо спочатку, користуючись формулами (4) і (5), математичне сподівання і дисперсію випадкових величин X і Y:

$$\mathbf{M}X = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0, \quad \mathbf{M}Y = (-2)\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ 2\cdot\frac{1}{2} = 0, \quad \mathbf{D}X = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1,$$

$$\mathbf{D}Y = 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = 4.$$

Тепер знайдемо закон розподілу ймовірностей випадкової величини $Z = X + Y$. Оскільки $z_{ij} = x_i + y_j$, $i, j = 1, 2$, то $z_{11} = -1 - 2 = -3$, $z_{12} = -1 + 2 = 1$, $z_{21} = 1 - 2 = -1$, $z_{22} = 1 + 2 = 3$, причому $p_{11} = p_{12} = p_{21} = p_{22} = \frac{1}{4}$. Тому дістаємо такий розподіл: $\left(-3, \frac{1}{4}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$, $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, $\left(3, \frac{1}{4}\right)$. Тоді $\mathbf{M}Z = (-3) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 0$, тобто $\mathbf{M}Z = \mathbf{M}(X + Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y$.

Обчислюємо тепер $\mathbf{D}Z = \sum_{k=1}^{4} (x_k)^2 p_k = \frac{1}{4} ((-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2) = 5$. Помічаємо, що $\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y$.

Для випадкової величини $R = X - Y$ аналогічно дістаємо закон розподілу: $\left(-3, \frac{1}{4}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$, $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, $\left(3, \frac{1}{4}\right)$; $\mathbf{M}(X - Y) = \mathbf{M}X - \mathbf{M}Y = 0$, $\mathbf{D}(X - Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y = 5$.

І нарешті, для $W = XY$ маємо: $w_{11} = (-1)(-2) = 2$, $w_{12} = (-1) \cdot 2 = -2$, $w_{21} = 1(-2) = -2$, $w_{22} = 1 \cdot 2 = 2$, причому всіх цих значень випадкова величина W набуває з однаковою ймовірністю $p = \frac{1}{4}$. Значення -2 вона набуває у двох випадках (w_{12} і w_{21}). Оскільки ці випадки — події несумісні, то за властивістю ймовірності $\mathbf{P}(W = -2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогічно знаходимо, що $\mathbf{P}(W = 2) = \frac{1}{2}$. Тому закон розподілу для W такий: $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Тоді $\mathbf{M}W = (-2) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$, тобто $\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y$ і $\mathbf{D}W = (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2 + 2 = 4$, тобто $\mathbf{D}(XY) = \mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y$. ▼

5. Ймовірність появи деякої події в кожному з 1000 дослідів дорівнює 0,2. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що відхилення числа появи цієї події від математичного сподівання буде більше 30.

▲ Число появ події в $n = 1000$ дослідах є випадкова величина X, яка розподілена за біноміальним законом. Тому її математичне сподівання і дисперсію знайдемо за формулами (8). Маємо $\mathbf{M}X = 1000 \cdot 0,2 = 200$, $\mathbf{D}X = 1000 \times 0,2 \cdot 0,8 = 160$. Користуючись нерівністю Чебишева (9) при $\varepsilon = 30$, дістаємо

$$\mathbf{P}(|X - 200| > 30) \leqslant \frac{160}{30^2} \approx 0{,}178. \blacktriangledown$$

6. Вважаючи, що ймовірність народження хлопчиків дорівнює 0,5, оцінити з допомогою нерівності Чебишева ймовірність того, що серед 1500 новонароджених хлопчиків буде від 700 до 800.

▲ Маємо біноміальний закон розподілу випадкової величини X — числа хлопчиків серед 1500 новонароджених. Тому $\mathbf{M}X = 1500 \cdot 0{,}5 = 750$, $\mathbf{D}X = 1500 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 375$. Оскільки числа 700 і 800 — межі допустимих значень випадкової величини — симетричні відносно математичного сподівання, що дорівнює 750, то нерівність $700 \leqslant X \leqslant 800$ можна замінити еквівалентною їй $|X - 750| \leqslant 50$. Використовуючи нерівність (9а) при $\varepsilon = 50$, маємо

$$\mathbf{P}(700 \leqslant X \leqslant 800) = \mathbf{P}(|X - 750| \leqslant 50) \geqslant 1 - \frac{375}{50^2} = 0{,}85.$$

Отже, ймовірність шуканої події не менше 0,85. ▼

Вправи

1. Чи може розподіл ймовірностей якої-небудь випадкової величини задаватися таблицею:

1)

x_k	0	0,5	0,7	0,9
p_k	0,2	0,1	0,5	0,2

;

2)

x_k	1	2	3	4
p_k	0	0,3	0,4	0,2

Відповідь: 1) так; 2) ні.

2. Монету підкидають тричі. Випадкова величина X — число появи орла. Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини X.

Відповідь: (0; 0,125), (1; 0,375), (2; 0,375), (3; 0,125).

3. Виконують три незалежних досліди, у кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю 0,8. Випадкова величина X — частота появи $\frac{k}{n}$ події A в трьох дослідах (n — число дослідів, k — число появ події A). Знайдіть закон розподілу ймовірностей випадкової величини X.

Відповідь: (0; 0,008), $\left(\frac{1}{3}; 0{,}096\right)$, $\left(\frac{2}{3}; 0{,}384\right)$, (1; 0,512).

4. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, розглянутої у вправі 2.

Відповідь: 1,5; 0,75; ≈0,87.

5. На шляху руху автомобіля 6 світлофорів, кожен з яких або дозволяє, або забороняє наступний рух з ймовірністю 0,5. Знайдіть закон розподілу ймовірностей випадкової величини X, яка дорівнює числу світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки.

Відповідь: (x_k, p_k), $x_k = k$, $p_k = 0{,}5$, $k = 0, 1, \ldots, 6$.

6. Задано закон розподілу ймовірностей випадкової величини X: (—2; 0,1), (0; 0,5), (1; 0,3), (3; 0,1). Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X^2 і $5X$.

Відповідь: (0; 0,5), (1; 0,3), (4; 0,1), (9; 0,1) і (—10; 0,1), (0; 0,5) (5; 0,3), (15; 0,1).

7. Ймовірність того, що в бібліотеці необхідна студентові книга вільна, дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу числа бібліотек, які відвідає студент, якщо він записаний в чотирьох бібліотеках.

Відповідь: (1; 0,3), (2; 0,21), (3; 0,147), (4; 0,343).

8. Задано дві незалежні випадкові величини:

а) випадкова величина X:

x_k	—1	0	1
p_k	0,2	0,3	0,5

б) випадкова величина Y:

x_k	0	1	3
p_k	0,1	0,3	0,6

Скласти закон розподілу їх добутку.

9. Добова витрата електроенергії в населеному пункті є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 2000 кВт · год, а дисперсія складає 20 000. Оцінити ймовірність того, що найближчого дня витрата електроенергії в цьому населеному пункті складатиме від 1500 до 2500 кВт · год.

Відповідь: $\mathbf{P}(1500 \leqslant X \leqslant 2500) = \mathbf{P}(|X - 2000| \leqslant 500) \geqslant 0{,}92$.

10. Ймовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює 0,2. Застосовуючи нерівність Чебишева, знайти число випробувань, необхідних для того, щоб імовірність відхилення частоти події від її ймовірності p була за абсолютною величиною більше 0,99.

Вказівка. Скористатися нерівністю (9а), де $\mathbf{M}X = p$, $\mathbf{D}X = \frac{pq}{n}$.

Відповідь: $n \geqslant 160\,000$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М.* Вища математика: Елементи аналітичної геометрії, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1984.— 391 с.
2. *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика : Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1986.— 511 с.
3. *Высшая* математика / Под ред. Г. Н. Яковлева.— М. : Просвещение, 1988.— 430 с.
4. *Александров А. П.* Лекции по аналитической геометрии.— М. : Наука, 1968.— 912 с.
5. *Жалдак М. І.* Початки теорії ймовірностей.— К. : Рад. шк., 1978.— 142 с.
6. *Жалдак М. И., Квитко А. Н.* Теория вероятностей с элементами информатики. Практикум.— К. : Выща шк., 1989.— 263 с.
7. *Алгебра* і початки аналізу: В 2 ч./ За ред. Г. М. Яковлева.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1984.— Ч. 2.— 292 с.
8. *Лященко М. Я., Слєдзінський І. Ф.* Програмування на ЕКОМ.— К. : Рад. шк., 1987.— 128 с.
9. *Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н.* Сборник задач по математическому анализу.— М. : Просвещение, 1973.— 254 с.
10. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа.— М. : Наука, 1985.— 383 с.
11. *Дадаян А. Л., Масалова Е. С.* Сборник задач по аналитической геометрии и элементам линейной алгебры.— Минск : Вышэйш. шк., 1982.— 206 с.
12. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.— М. : Физматгиз, 1963.— 244 с.
13. *Цубербиллер О. В.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии.— М. : Наука, 1968.— 236 с.
14. *Ноздрин И. Н., Степаненко И. М., Костюк Л. К.* Прикладные задачи по высшей математике.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1976.— 172 с.

ЗМІСТ

Дюженкова Л. І., Носаль Т. В.
Д95 Вища математика: Практикум: Навч. посібник. — К.: Вища шк., 1991. — 407 с.: іл.
ISBN 5-11-002281-X

Д $\frac{1602010000-263}{М211(04)-91}$ 59—91 **ББК 22.11я73**

Учебное издание

Дюженкова Любовь Ивановна
Носаль Татьяна Васильевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

Допущено Министерством народного образования УССР в качестве учебного пособия для студентов педагогических институтов по специальности 03.02.00 «Труд»

Киев
«Выща школа»
На украинском языке

Художній редактор С. В. Анненков
Технічний редактор С. Л. Светлова
Коректор В. П. Нікітіна

ИБ № 13897

Здано до набору 29.06.90. Підписано до друку 31.05.91. Формат 84×108[1]/32. Папір друк. № 2. Гарнітура літературна. Високий друк. Умов.-друк. арк. 21,42. Умов. фарбо-відб. 21,68. Обл.-вид. арк. 23,48. Тираж 6000 пр. Вид. № 8874. Замовлення № 0—3658. Ціна 2 крб. 60 к.

Видавництво «Вища школа», 252054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7.

Надруковано з матриць Головного підприємства РВО «Поліграфкнига». 252057, Київ-57, вул. Довженка, 3 в Київській книжковій друкарні наукової книги. 252004, Київ-4, вул. Репіна, 4. Зам. 1-617.