# ФИЗИКА

# 1

# General Physics

DOUGLAS C. GIANCOLI

Prentice-Hall, Inc.
1984

Д. Джанколи

# ФИЗИКА

В двух томах

1

Перевод с английского
А. С. ДОБРОСЛАВСКОГО,
О. А. КОТЕЛЬНИКОВОЙ и
М. А. СУХАНОВА

под редакцией
Ю. Г. РУДОГО

Москва «Мир» 1989

ББК 22.3
Д40
УДК 530.1

**Джанколи Д.**
Д40 Физика: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ.– М.: Мир, 1989.– 656 с., ил.
ISBN 5-03-000346-0

Написанная в живой и увлекательной форме книга американского ученого охватывает большой материал по всем разделам классической и современной физики. При изложении используются основы дифференциального и интегрального исчисления. Каждая глава снабжена хорошо подобранными задачами и вопросами с указанием категории трудности. В русском переводе выходит в двух томах. В т. 1 рассматриваются кинематика, динамика, гидродинамика, колебания, волны, звук и термодинамика.

Для школьников старших классов, желающих более глубоко изучить курс физики, для студентов младших курсов естественно-научных и технических вузов, для преподавателей средних школ и младших курсов вузов, а также для всех желающих расширить свои знания об окружающем нас мире.

Д $\frac{1604010000-315}{041(01)-89}$ 34–89

ББК 22.3

*Редакция литературы по физике и астрономии*

**ISBN 5-03-000346-0 (русск.)**
**ISBN 5-03-000345-2**
**ISBN 0-13-350884-6 (англ.)**

© 1984 by Douglas C. Giancoli
© перевод на русский язык, «Мир», 1989

# Предисловие редакторов перевода

В своем предисловии автор книги Д. Джанколи обстоятельно знакомит читателя с ее содержанием и дает полезные рекомендации по использованию ее в качестве пособия для изучения и преподавания физики. Книга представляет собой вводный курс, который часто называют курсом общей или экспериментальной физики. Ее содержание охватывает практически все разделы этого курса, а уровень изложения занимает промежуточное положение между уровнями школьной и вузовской программ. Точнее говоря, данное учебное пособие не связано жестко с какой-либо определенной программой изучения физики. Еще одной характерной особенностью книги является стремление к всестороннему раскрытию физической сущности рассматриваемых явлений. Завершая изложение многих разделов, автор обращается к читателю с предложением поразмыслить над тем, что означают приведенные результаты и как можно качественно объяснить их особенности. Таким образом, использование предлагаемого учебного пособия будет способствовать формированию углубленного представления о природе изучаемого явления.

Автор часто акцентирует внимание читателя на важных проблемах, изложению которых во многих руководствах не уделяется должного внимания. Наконец, особую ценность книге придает насыщенность иллюстративным материалом, большое количество примеров и задач разной степени сложности, разбор и решение которых призваны сыграть решающую роль в закреплении и углубленном понимании изложенного.

Перечисленные достоинства книги как учебного пособия по общей физике – не единственная причина ее издания в переводе на русский язык. Книга, безусловно, будет способствовать успешному решению ряда актуальных проблем, связанных с перестройкой системы народного образования в нашей стране и в первую очередь среднего образования. При этом в программе обучения существенно возрастает удельный вес физики как одной из фундаментальных дисциплин, составляющих прочную базу для дальнейшего освоения конкретных разделов науки и техники.

Предлагаемое в книге изложение материала органично соответствует новому подходу к подготовке молодых специалистов различного уровня, при котором значительно повышается роль самостоятельной работы учащихся и студентов. Эта книга может сыграть важную роль и в своевременном развитии творческих способностей учащейся молодежи, проявляющей интерес к естественным и техническим дисциплинам.

Курс физики Д. Джанколи адресован чрезвычайно широкому кругу читателей. Это прежде всего учащиеся старших классов средней школы, заинтересованные в углубленном изучении предмета; книга поможет им найти ответы на вопросы, выходящие за пределы школьной программы. Она обеспечит прочный фундамент глубоких знаний тем, кто собирается продолжить свое образование на физических или физико-технических факультетах вузов, поможет освоить фундаментальные проблемы физики студентам тех вузов, где физика не является профилирующей дисциплиной. Тем, кто, получив среднее образование, собирается начать трудовой путь, эта книга даст прочные основы знаний о проявлении физических законов в окружающем мире и вооружит умением применять эти законы в повседневной практике. Наконец, она будет полезна и тем, кто, обладая подготовкой по физике и математике в объеме средней школы, испытывает потребность углубить и систематизировать свои знания физики.

Преподавателям физики это учебное пособие предоставляет широкие возможности разнообразить изложение предмета, сделать изучение физики интересным и увлекательным. Кроме того, оно позволяет в широких пределах варьировать программу изучения физики.

Ввиду большого объема книга издается в русском переводе в двух томах. При подготовке перевода к печати были по возможности устранены отдельные недочеты оригинала. В тех случаях, когда это сочтено необходимым, авторский текст снабжен примечаниями.

Перевод выполнили: М. А. Суханов (гл. 1–4, 16–21); О. А. Котельникова (гл. 5–10); А. С. Доброславский (11–15, 22–33), Ю. А. Данилов (гл. 34–43, приложения).

*Е. М. Лейкин*
*Ю. Г. Рудой*

# Предисловие

Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие по физике (с использованием элементов математического анализа) предназначено в качестве вводного для студентов, специализирующихся в области физики, других естественных, а также технических наук. Я стремился к тому, чтобы книга была легко читаема, доступна и интересна студентам и в то же время охватывала материал достаточно полно. При этом основное внимание уделялось тщательному и детальному изложению физических законов, а также решению задач.

Разумеется, в настоящее время уже существует немало хороших учебников по физике. Зачем понадобился еще один? Основная причина состоит в том, что первоклассные учебники, охватывающие все разделы физики, написаны обычно сухо и формально, а это затрудняет их изучение студентами. Таким учебникам, как правило, недостает легкости и свежести. Обычный подход состоит в том, что все темы сначала излагаются формально и абстрактно и лишь впоследствии (да и то не всегда) авторы возвращаются «на землю» и связывают материал с имеющимся у студентов опытом. По-видимому, такой подход привлекателен благодаря своей элегантности, но это может замедлить процесс познания для студентов (за исключением, быть может, лучших). Мой же подход состоит в признании того, что физика представляет собой описание реально происходящих явлений, и поэтому изложение каждой темы начинается с конкретных опытов и наблюдений, которые, без сомнения, знакомы студенту. Затем читателю предлагается более формальное и абстрактное изложение. Дело не только в том, что благодаря этому материал становится интереснее и проще для восприятия; главное, что такой способ изложения лучше отражает действительный ход развития физики. Например, исторически мы не начинали с общей формулировки второго начала термодинамики и последующего извлечения из него разнообразных следствий; напротив, сам этот закон возник как итог обобщения совокупности наблюдаемых явлений. Тем не менее многим учебникам по физике свойственно излагать материал в обратном порядке. Я постарался избежать подобного догматического подхода, при котором сначала формули-

руются в готовом виде законы физики и лишь затем описываются следствия из них; наоборот, физические законы в книге рассматриваются как обобщения конкретных наблюдений.

Я стремился также избежать излишнего педантизма и строить изложение ясно и лаконично, не допуская распространенной ошибки, состоящей в излишнем акцентировании мелких, подчас несущественных деталей, что сбивает студентов с толку. Однако я следил за тем, чтобы отдельные темы не «повисали в воздухе» и не вызывали недоуменных вопросов о том, для чего их следует изучать. Поэтому всюду объясняется важность и значение каждой темы, и все темы доводятся по возможности до своего логического завершения. Например, мы изучаем статические силы в структурах отчасти и потому, что реальные вещества обладают как упругими свойствами, так и хрупкостью, вследствие чего они могут разрушаться; именно поэтому в главе, посвященной статике, мы рассматриваем как упругие свойства вещества, так и его разрушение. Здесь следует упомянуть о нескольких исключениях: очень небольшое количество тем изложено только весьма кратко и не получило дальнейшего развития (например, уравнения Максвелла в дифференциальной форме). В этих немногих случаях цель состояла лишь в ознакомлении студентов с подобными темами. Если в дальнейшем им придется встретиться с ними, они уже не проявят полного незнания. Более развернутого изложения не могло бы быть дано здесь на соответствующем уровне, так как сделало бы книгу слишком громоздкой.

Я придерживался более или менее традиционного порядка следования тем, хотя и допускал значительную вольность в этом порядке. Книга начинается с изложения механики (гл. 1–14), в том числе механики жидкостей и газов; затем следуют волны (гл. 15–16), кинетическая теория газов и термодинамика (гл. 17–21), электричество и магнетизм (гл. 22–33) и оптика (гл. 34–38). Заключают книгу пять глав, посвященных современной физике: специальной теории относительности (гл. 39), квантовой теории и атомной физике, в том числе физике лазеров и физике конденсированного состояния (гл. 40–41), ядерной физике (гл. 42) и, наконец, элементарным частицам (гл. 43); в эту последнюю главу вошло краткое обсуждение кварков, чарма, квантовой хромодинамики (КХД), а также «стандартной модели» (эволюции Вселенной) и теории Большого объединения. Вопросы современной физики излагаются на не слишком сложном уровне (в целом соответствующем принятому в книге) и по необходимости кратко. Я надеюсь, что читатель найдет в этих главах достаточно материала для того, чтобы у него «разыгрался аппетит» и он попробовал «на зуб» то, чем занимается современная физика. Разумеется, основное

внимание в этой книге уделено тем 38 главам, в которых излагается классическая физика.

То, что курс по традиции начинается с механики, представляется вполне оправданным, поскольку механика была исторически первым разделом физики и содержит в себе очень много общефизических понятий. Существуют различные способы расположения отдельных тем внутри этого раздела, и мы не настаиваем на обязательном точном следовании порядку глав, принятому в данной книге. Например, статику можно изучать как до, так и после динамики. Одна из причин выбранного здесь расположения состоит в том, что автору из собственного опыта преподавания известно, как трудно дается студентам понятие силы в отсутствие движения. И лишь после того, как они поймут связь между силой и движением, в том числе третий закон Ньютона, им, по-видимому, будет проще разобраться и в задачах статики, где имеются силы, а движение отсутствует. Кроме того, более позднее изложение статики обладает еще одним преимуществом: к этому времени студент уже полностью осваивает понятие момента силы, столь важное для задач статики и трудное для понимания, когда движение не рассматривается. Наконец, статика является по существу частным случаем динамики, и мы строим ее изучение на том, что статической система становится тогда, когда ей что-либо мешает остаться динамической (например, препятствует падению тела). Тем не менее посвященная статике гл. 11 написана так, что при желании ее можно изучить и перед динамикой, а именно сразу после краткого знакомства с векторами.

Еще один пример свободы в выборе порядка изложения представляют собой главы о свете. В нашей книге они, как это стало общепринятым, помещены следом за главами, посвященными электричеству и магнетизму, а также электромагнитным волнам. Однако можно было бы поместить главы о свете сразу за главами, посвященными волнам и звуку (гл. 15 и 16),– тем самым все сведения о волнах различной физической природы были бы собраны в одном месте. Еще одним примером подобного рода служит специальная теория относительности (гл. 39), следующая за электромагнитными волнами и светом. Можно было бы, однако, с неменьшим основанием поместить эту главу и в механику (например, после гл. 8), поскольку почти все содержание гл. 39 (за исключением факультативного раздела 39.2) опирается на материал, изложенный в гл. 8.

Много внимания уделяется в данной книге решению задач. В нескольких местах в начале книги, в особенности в разд. 2.7, 4.8 и 4.10, даются развернутые рекомендации по решениям задач, помогающие находить «подходы» к ним. Наиболее содержательным из этих разделов является 4.10; к этому времени студент уже приобретает неко-

торый опыт (не всегда вполне успешный) в обращении с задачами и, по нашему мнению, будет заинтересован во внимательном изучении этого раздела. Разумеется, в том случае, если преподаватель сочтет нужным, раздел. 4.10 может быть изучен и значительно ранее.

В книге подобрано значительное число детально разобранных примеров и задач, охватывающих широкий круг вопросов не только из области физики, но также из техники, других наук и повседневной жизни; автор надеется, что они будут более интересны студентам, чем это бывает обычно в подобных курсах. Около 2000 задач распределены по разделам и классифицированы по степени трудности на три группы. Задачи, относящиеся к труппе I (низший уровень), являются простыми (как правило, они решаются простой подстановкой в соответствующие формулы) и призваны дать студенту возможность убедиться в своих знаниях, а иногда служат для иллюстрации несложных, но интересных или практически полезных вопросов курса. Задачи, относящиеся к группе II (средний уровень) – это обычные («нормальные») задачи, требующие определенного размышления и, как правило, комбинированного применения двух или более понятий. Наконец, задачи, относящиеся к группе III (высший уровень), являются наиболее трудными. Расположение задач в том или ином разделе означает, что для их решения требуется лишь знание материала вплоть до данного раздела включительно; в этих задачах (особенно в группах II и III) нередко приходится использовать материал предшествующих глав и разделов. Однако следует заметить, что ранжирование задач по степени трудности и их распределение по группам I, II и III являются неизбежно субъективными и должны рассматриваться лишь как условные. Задачи группы II охватывают очень широкий диапазон по степени трудности, тогда как задачи группы III могут представить затруднения даже для наиболее успевающих студентов. Мы рекомендуем внимательно проверить уровень задач этой группы, прежде чем включать их в регулярное домашнее задание. В конце каждого тома приведены ответы к задачам с нечетными номерами. Каждая глава содержит также определенное количество вопросов (общим числом около 1200), требующих устных ответов. Во всей книге систематически используется система единиц СИ; единицы британской системы лишь определены, но нигде не используются. Во многие главы включено ограниченное число задач, требующих программируемого калькулятора (или компьютера); например, к их числу относится обсуждение в разд. 2.10 процедуры численного интегрирования.

Предполагается, что читатели уже освоили математический анализ (или делают это одновременно с чтением этой книги). Понятие производной вводится впервые в конце гл. 2, посвященной кинематике, в качестве факуль-

тативного материала. Его освоение вполне можно отложить, например, до момента ознакомления с понятием интеграла в гл. 6, посвященной работе и энергии. Вообще математический анализ, особенно вначале, используется весьма постепенно и в небольших дозах. Изложение каждой темы во всей книге начинается, как правило, на достаточно элементарном уровне, что доступно для понимания большинству студентов с различным уровнем подготовки. Математическая строгость, соответствующая этому уровню, достигается обычно довольно быстро; для наиболее успевающих студентов введены дополнительные (факультативные) темы и разделы (отмеченные звездочкой), а также некоторое число весьма сложных задач, относящихся к группе III (см. выше). Математические понятия вводятся там, где они впервые применяются: производная и интеграл, как уже отмечалось,– соответственно в гл. 2 и 6, векторное сложение – в гл. 3, скалярное и векторное произведения – соответственно в гл. 6 и 10 и т. д. Я полагаю, что такой подход более предпочтителен, чем, например, насыщение математикой в гл. 1, поскольку он стимулирует студента к изучению данного математического понятия и наглядно поясняет, почему оно определяется именно так, а не как-либо иначе. Несколько тем общего характера (например, анализ размерностей и оценка по порядку величины) приведены в гл. 1 с тем, чтобы привлечь к ним внимание и не «закопать» в какой-либо более или менее произвольной части книги; впрочем, они могут быть изучены и позднее, когда в этом возникнет необходимость.

Эта книга содержит в себе большой материал, который вряд ли можно изучить в нормальном темпе в рамках, например, годового курса; тем не менее его все же нетрудно адаптировать для целей такого курса. Так разделы, обозначенные звездочкой, можно рассматривать как необязательные (факультативные). В этих разделах содержится материал, обычно не излагаемый в курсах подобного уровня и связанный либо с более сложной физикой, либо с интересными приложениями. Эти разделы не содержат материала, необходимого для чтения дальнейших глав (кроме, разумеется, факультативных разделов в них). Отсюда, впрочем, не следует, что строго необходимо изучать все разделы, не отмеченные звездочкой; в выборе материала сохраняется достаточная гибкость, соответствующая интересам студентов и преподавателей. Для сокращенного курса, помимо факультативных разделов, можно опустить значительные части некоторых глав (или целиком главы). К ним относятся гл. 10 (кроме разделов 10.1 и 10.2), 11–13, 23, 31, 32, 39–43, а также отдельные разделы гл. 8, 16, 27, 29, 33, 35–38. Темы, не изучаемые в аудитории, могут быть прочитаны студентами самостоятельно, и потому эта

книга представляет собой ценное справочное пособие благодаря своему широкому охвату материала.

Я убежден, что необходимо уделять значительное внимание деталям, особенно при получении важного результата. Как при качественном обсуждении, так и в ходе математического вывода я стремился к сохранению всех его этапов; при этом, однако, студенту не придется утопать в деталях, рискуя упустить понимание вопроса в целом. Моя цель состояла в том, чтобы указать, какие выражения носят общий характер, а какие таковыми не являются, и четко установить границы применимости важных соотношений, что указывается в квадратных скобках (рядом с самим соотношением), например:

$x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2$ [постоянное ускорение].

Большинство студентов испытывают трудности при изучении вращательного движения. В качестве примера внимания к деталям (хотя, строго говоря, это отнюдь не «деталь») укажем на то, что автор тщательно проводил различие между радиус-вектором **r** материальной точки и расстоянием от этой точки до оси (по перпендикуляру к ней), обозначаемым специально прописной буквой $R$. Это различие (особенно существенное для понятий момента силы и момента импульса) часто недостаточно разъясняется в других книгах; иногда для обеих величин используется одно и то же обозначение $r$, что может лишь привести к запутыванию студентов. Кроме того, мы начинаем изучение вращательного движения с более простого частного случая вращения вокруг оси (гл. 9); для этого случая вводится момент импульса и кинетическая энергия вращения. Лишь в гл. 10 рассматривается более общее вращение вокруг неподвижной точки, и этот более сложный материал может быть при желании опущен (за исключением разделов 10.1 и 10.2, посвященных векторному произведению и вектору момента силы относительно точки).

Несколько необычно изложение материала в гл. 29, посвященное источникам магнитного поля. Здесь в рамках одной главы рассматриваются магнитные поля, обусловленные электрическими токами (в том числе законы Ампера и Био–Савара), а также магнитные поля в веществе (ферро-, пара- и диамагнетизм). При таком изложении достигается большая ясность, краткость и в то же время полнота изложения темы. Другим примером может служить рассмотрение вопроса о консервативных силах и сохранении энергии в гл. 7 – тщательное, но без обычно присущего изложению этого вопроса затуманивания сути; в частности, явно показано, почему для работы консервативных сил имеет место равенство $W_{1\to 2} = -W_{2\to 1}$. В гл. 18 приведено описание процесса диффузии; несмотря на важность этого вопроса, он редко рассматривается в книгах подобного уровня. Заметим,

что нам удалось не только найти более простой и ясный подход, чем в книгах более высокого уровня, но и дать описание собственно процесса диффузии, а не самодиффузии.

Я хотел бы поблагодарить многих людей, которые различными способами помогали улучшить эту книгу. Среди тех, кто прочел рукопись и сделал много очень существенных замечаний,– профессора Джеймс Б. Герхарт, Эдвард Ф. Гибсон, Роберт Б. Холлок, Гордон Е. Джонс, Террилл В. Маес, Майкл А. Моррисон, Эдвард Б. Нельсон, Норман Пирлмен, Шеридан Саймон, Гилберт Х. Уорд и Томас Х. Вуд. Особую благодарность я выражаю Джону Хайлброну, сделавшему ценные замечания по удивительной истории нашей науки. Большой благодарности заслуживают также профессора Ричард Маррус и Говард Шугарт за многочисленные полезные обсуждения, а также за гостеприимство, оказанное ими в Калифорнийском университете (Беркли). В заключение хотелось бы поблагодарить многих сотрудников издательства «Прентис-Холл», принимавших участие в работе над книгой, в особенности Логана Кэмпбелла, Дуга Хэмфри, Линду Михатов, Джанет Шмид, а также терпеливого и четкого в своих требованиях редактора Рэя Маллани. Ответственность за все ошибки лежит, разумеется, полностью на мне; все замечания и поправки будут приняты с благодарностью.

*Дуглас К. Джанколи*

# Указания для студентов и преподавателей

1. Разделы и подразделы, отмеченные звездочкой (*), рассматриваются как факультативные (см. предисловие).
2. Используются обычные соглашения об обозначениях: символы физических величин обозначены латинским курсивом (например, масса $m$), тогда как символы единиц этих величин – русским прямым шрифтом (например, м – метр); для обозначения векторов применяется полужирный прямой латинский шрифт (например, **F** – сила).
3. Важные термины там, где они впервые вводятся, выделены курсивом, а наиболее важные – полужирным прямым шрифтом (например, *коэффициент трения* и **ускорение**).
4. Лишь немногие формулы физики применимы в любых случаях; поэтому там, где это целесообразно, в квадратных скобках после важной формулы указаны условия (или границы) ее применимости.
5. Детально разработанные примеры и решения к ним выделены в основном тексте отбивкой.
6. Каждая глава заканчивается «Заключением», дающим краткий обзор важных понятий и терминов (наиболее важные выделены здесь курсивом). Заключения не предназначены для усвоения материала, который можно понять, только изучив содержание данной главы.
7. В каждой главе за «Заключением» следуют «Вопросы», на которые студент должен пытаться ответить (по крайней мере себе самому), а также «Задачи», расположенные в соответствии с порядком следования излагаемого материала и степенью трудности (см. предисловие). Вопросы и задачи, относящиеся к факультативным разделам, также отмечены звездочкой.
8. В приложениях содержатся полезные математические формулы (в том числе производные и интегралы), рассматриваются полярные координаты и приводятся таблицы изотопов с их атомными массами, а также другие данные. На форзацах помещены наиболее часто используемые таблицы.
9. Книга снабжена подробным предметным указателем (см. Т.2). Его можно, например, использовать, чтобы вспомнить смысл какого-либо понятия или термина.

# 1 Введение

Первые научные представления возникли очень давно – по-видимому, на самых ранних этапах истории человечества, отраженной в письменных источниках. Однако физика как наука в своем современном виде берет начало со времен Галилео Галилея (1564–1642). Действительно, Галилей и его последователь Исаак Ньютон (1643–1727) совершили революцию в научном познании. Физика, которая развивалась в течение трех столетий и достигла своей кульминации во второй половине 19 в. созданием электромагнитной теории света, называется теперь *классической физикой*. На рубеже 19 и 20 вв. казалось, что достигнуто полное понимание физического мира. Однако уже в самом начале 20 в. новые эксперименты и новые идеи в физике стали указывать на то, что некоторые аспекты классической физики неприменимы к крошечному миру атома, а также к объектам, движущимся с очень высокой скоростью. Следствием всего этого явилась очередная великая революция в физике, которая привела к рождению того, что мы называем теперь *современной физикой*.

## 1.1. Наука и творческая деятельность

Главная цель любой науки, в том числе и физики, рассматривается обычно как приведение в систему сложных явлений, регистрируемых нашими органами чувств, т. е. упорядочение того, что мы часто называем «окружающим нас миром». Многие представляют себе научное познание в виде механического процесса накопления фактов и «измышления» теорий. Однако в действительности это не так. Научное познание представляет собой творческую деятельность, которая во многом напоминает другие виды деятельности человека, традиционно считающиеся творческими.

Приведем несколько подтверждающих примеров. Одним из важных неотъемлемых признаков науки является *наблюдение* событий. Но любое наблюдение требует наличия воображения, поскольку ученый не может включить в описание все, что он наблюдает. Поэтому приходится решать, что из наблюдений действительно существенно.

Рассмотрим, например, как два великих мыслителя – Аристотель (384–322 до н.э.) и Галилей (1564–1642) – истолковывали движение по горизонтальной поверхности. Аристотель заметил, что находящееся на земле (или на поверхности стола) тело, получившее начальный толчок, всегда замедляется и останавливается. Отсюда Аристотель предположил, что естественным состоянием тела является покой. Галилей, повторивший в начале 1600 г. опыты Аристотеля по изучению горизонтального движения, обратился, по существу, к идеализированному случаю движения без сопротивления. В самом деле, Галилей мысленно представил себе, что если бы можно было устранить трение, то тело, получившее начальный толчок на горизонтальной поверхности, продолжало бы двигаться безостановочно в течение неопределенно долгого времени. Галилей сделал вывод о том, что для тела состояние движения столь же естественно, как и состояние покоя. Ему удалось увидеть в тех же самых «фактах» нечто новое, и именно поэтому принято считать Галилея основоположником современного представления о движении (более подробно об этом см. в гл. 2). Очевидно, что подобное «видение» могло возникнуть лишь вследствие тщательного обдумывания опыта.

Теории никогда не выводят непосредственно из наблюдений; напротив, их создают для объяснения полученных из опыта фактов в результате осмысления этих фактов разумом человека. Например, к атомистической теории, согласно которой вещество состоит из атомов, ученые пришли вовсе не потому, что кто-то реально наблюдал атомы[1]. Представление об этом было создано творческим разумом человека. Аналогичным образом возникли и такие фундаментальные теории, как специальная теория относительности, электромагнитная теория света и закон всемирного тяготения Ньютона.

Великие научные теории как творческие достижения можно сравнить с великими творениями литературы или искусства. Однако наука все же существенно отличается от других видов творческой деятельности; основное отличие состоит в том, что наука требует *проверки* своих понятий или теорий: ее предсказания должны подтверждаться экспериментом. Действительно, тщательная постановка эксперимента представляет собой важнейшую (если не решающую) часть всей физики.

Однако не следует все же считать, что научную теорию можно «доказать» посредством эксперимента. Прежде всего потому, что мы не располагаем идеальными измерительными инструментами (или приборами), т.е. аб-

---

[1] Заметим, что последние достижения в области электронной микроскопии, отмеченные Нобелевской премией по физике за 1986 г., позволили осуществить прямое визуальное наблюдение атомов.– *Прим. ред.*

солютно точное измерение вообще невозможно. Кроме того, нельзя проверить теорию во всех возможных конкретных условиях. Следовательно, ее нельзя проверить абсолютно точно[1]. Фактически сами теории, вообще говоря, не являются совершенными – теория редко согласуется точно (в пределах ошибки эксперимента) с результатами наблюдений в каждом отдельном случае, в котором ее проверяют. История науки свидетельствует о том, что созданные теории, отслужив свой срок, сдаются в архив, им на смену всегда приходят новые теории. Процесс смены научных теорий, который находится в центре внимания философии современной науки, мы можем обсудить здесь лишь очень кратко.

В некоторых случаях новая теория принимается учеными потому, что ее предсказания согласуются количественно с экспериментом значительно лучше, чем у прежней теории. Однако во многих случаях новую теорию признают только тогда, когда по сравнению с прежней теорией она позволяет объяснить более широкий *класс* явлений. Например, построенная Коперником теория Вселенной с центром на Солнце не описывала движение небесных тел более точно, чем построенная ранее Птолемеем теория Вселенной с центром на Земле. Однако в отличие от теории Птолемея теория Коперника содержала некоторые новые важные следствия; в частности, с ее помощью становилось возможным определение порядка расположения планет Солнечной системы и расстояний до них; были также предсказаны для Венеры фазы, аналогичные лунным. Более простая (во всяком случае, не более сложная) и более содержательная теория, которая объединяет и объясняет большее число явлений, всегда более полезна и привлекательна для ученого. Именно этот аспект, а также количественное согласие с экспериментом играют определяющую роль при принятии той или иной теории.

Весьма важным в любой теории является то, насколько точно она позволяет получить количественные данные; с этой точки зрения новая теория часто представляется лишь весьма незначительно отличающейся от старой. Например, специальная теория относительности Эйнштейна почти для всех обыденных ситуаций дает предсказания, которые крайне слабо отличаются от предшествующих теорий Галилея и Ньютона, но она приводит к более точным результатам в предельном случае очень высоких скоростей, близких к скорости света. С этой точки зрения теорию относительности можно было бы рассматривать всего лишь как малозначительное уточне-

---

[1] Некоторые философы науки подчеркивают в связи с этим, что проверка теории может быть использована лишь для ее *фальсификации*, а не для подтверждения и (или) для определения пределов ее применимости.

ние старой теории. Однако количественные предсказания – не единственный важный результат теории. Она может изменить также наше понимание физического мира. Например, под влиянием теории относительности Эйнштейна существенно изменились наши представления о пространстве и времени; более того, мы пришли к пониманию единства понятий массы и энергии (на основе знаменитого соотношения $E = mc^2$). Таким образом, теория относительности резко изменила наши взгляды на природу физического мира.

## 1.2. Модели, теории и законы

Пытаясь понять и объяснить определенный класс явлений, ученые часто прибегают к использованию **модели**. При этом под моделью понимают некоторый мысленный образ явления, опирающийся на уже известные понятия и позволяющий построить полезную аналогию. Примером здесь может служить волновая модель света. Световые волны нельзя наблюдать подобно тому, как мы видим волны на воде; однако полезно представить себе свет в виде волн, поскольку результаты опытов со светом указывают на его большое сходство с волнами на воде.

Цель построения модели состоит в том, чтобы получить мысленную или наглядную картину явления в тех случаях, когда мы лишены возможности непосредственного восприятия того, что происходит в этом явлении. Во многих случаях модель позволяет получить более глубокое понимание; так, аналогия с уже известными явлениями (например, с волнами на воде в упомянутом выше примере для света) может стимулировать проведение новых опытов и подсказать характер возможных родственных явлений.

Ни одна модель не может быть вполне безупречной, и ученые постоянно стремятся усовершенствовать свои модели или предложить новые, когда прежние модели перестают быть адекватными[1]. Атомная модель вещества претерпела много уточнений в ходе своего развития; так, с целью объяснения химической связи атомы представлялись как крохотные шарики, снабженные «крючками»; иногда использовалась и другая модель атомов в виде небольших бильярдных шариков, непрерывно соударяющихся друг с другом. Сравнительно недавно возникла так называемая планетарная модель атома, согласно которой электроны в атоме обращаются вокруг ядра подобно планетам, обращающимся вокруг Солнца.

Может возникнуть вопрос о том, чем отличается теория от модели, поскольку иногда эти термины используются как синонимы. Как правило, модель отно-

[1] То есть не могут объяснить новых опытов. – *Прим. ред.*

сительно проста и сохраняет структурное сходство с изучаемым явлением, тогда как **теория** значительно шире: она рассматривает явление более детально и с ее помощью пытаются решать ряд задач, подчас с весьма высокой математической точностью. Во многих случаях, после того как модель получила достаточное развитие в различных вариантах и стала более точно соответствовать эксперименту для широкого круга явлений, ее можно называть теорией. Примерами этого являются атомная теория вещества и волновая теория света.

Модели могут быть очень полезны, и они часто приводят к важным теориям; однако не следует смешивать понятие модели (или теории) с реальной системой или самими явлениями.

**Законом** ученые обычно называют некоторые краткие, но достаточно общие утверждения относительно характера явлений природы (таково, например, утверждение о том, что импульс сохраняется). Иногда подобное утверждение принимает форму определенного соотношения между величинами, описывающими явления; к таким утверждениям относится, например, закон всемирного тяготения Ньютона, согласно которому $F = Gm_1m_2/r^2$.

Для того чтобы иметь право называться законом, утверждение должно выдержать экспериментальную проверку в широком классе наблюдаемых явлений; можно сказать, что закон вносит объединяющее начало для многих наблюдений.

Заметим, что понятие закона в науке отличается от аналогичного понятия в политике или праве: юридические законы являются *предписывающими*, т.е. они диктуют нам, как мы должны себя вести, тогда как естественнонаучные законы являются описательными; они не утверждают, какими *должны* быть явления природы, а лишь описывают то, каков *действительный* характер того или иного явления природы. Так же как и теории, законы не могут быть проверены в бесконечном числе возможных частных случаев. Таким образом, мы не можем быть уверены в том, что любой закон абсолютно справедлив. Слово «закон» используется в тех случаях, когда его применимость проверена в широком классе явлений и у нас имеется четкое представление о том, каковы ограничения и область применимости данного закона. Но даже в этом случае при получении новой информации некоторые законы могут быть видоизменены или даже отброшены.

Как правило, ученые в своей практической деятельности считают, что общепринятые законы и теории верны; однако следует всегда помнить, что новые опыты могут привести к изменению пределов применимости любого закона и любой теории.

## 1.3. Измерение и его погрешность

Стремясь познать окружающий нас мир, ученые пытаются найти соотношения между физическими величинами.

Например, нас может интересовать, каким образом сила, действующая на тело, изменяет его скорость или ускорение, а также, насколько изменится давление газа, находящегося в замкнутом сосуде (например, внутри автомобильной шины), при повышении или понижении температуры. Обычно ученые стремятся выразить подобные взаимосвязи с помощью количественных соотношений между символами, обозначающими соответствующие величины. Для того чтобы определить (или проверить) вид подобных соотношений, необходимо провести тщательные экспериментальные измерения (хотя, разумеется, не следует преуменьшать и роли творческого воображения).

Интересно заметить, что экспериментальные измерения и поиски количественных соотношений между физическими величинами не всегда представляли собой главную цель физической науки. Такая цель была признана лишь в 18 в. Разумеется, при этом ученые руководствовались свободным выбором, поскольку в то время не было очевидно, что этот путь приведет к каким-либо глубоким и важным результатам.

В настоящее время точные измерения составляют важную часть физики. Однако ни одно измерение не является абсолютно точным, т. е. с каждым измерением неизбежно связана некоторая погрешность. Источники возникновения этой погрешности различны; к наиболее важным (если исключить грубые просчеты) относятся ограниченная точность любого измерительного инструмента, а также невозможность считывания со шкалы измерительного инструмента показаний, меньших определенной части минимальной цены деления. Например, если бы вам пришлось измерять ширину классной доски с помощью рулетки, результат измерения можно было бы считать вполне правильным с точностью до 0,1 см, что составляет цену деления рулетки (впрочем, при некоторых условиях можно было бы считать правильным и вдвое более высокую точность, а именно 0,05 см). Причина этого состоит в том, что наблюдателю затруднительно провести интерполяцию в пределах наименьшего деления шкалы, да и сама рулетка едва ли изготовлена с точностью, сколько-нибудь значительно превышающей указанную выше.

Представляя результат измерения, необходимо, следуя установившейся разумной традиции, указывать и точность этого измерения, т. е. оценку его **погрешности**, или **абсолютной ошибки**. Например, измеренную ширину доски следует записать так: $23{,}2 \pm 0{,}1$ см, где $\pm 0{,}1$ см (произносится как «плюс-минус 0,1 см») представляет собой

погрешность измерения; это означает, что истинное значение ширины доски с наибольшей вероятностью лежит между 23,1 и 23,3 см. Точность измерения часто характеризуют величиной *относительной ошибки* (или погрешности), которая является отношением абсолютной ошибки и измеренного значения величины (умноженным на 100, если это отношение необходимо выразить в процентах). В приведенном выше примере, если при измерении мы получили значение 23,2 см, а абсолютная ошибка составляет около 0,1 см, относительная ошибка равна

$$\frac{0{,}1}{23{,}2} \cdot 100 = 0{,}4\%\,.$$

Во многих случаях погрешность измеренного значения явно не указывается; тогда принято считать, что она составляет примерно одну или две единицы в том разряде числа, в котором записана последняя цифра результата. Хотя такой способ менее точен, чем явное указание погрешности, во многих случаях этого вполне достаточно. Например, если измеренная длина равна 23,2 см, то погрешность предполагается равной примерно 0,1 см (или, возможно, 0,2 см). При этом существенно, чтобы результат измерения вы не записали как 23,20 см, поскольку это означало бы, что абсолютная погрешность составляет 0,01 см и, следовательно, истинное значение измеряемой величины лежит якобы между 23,19 и 23,21 см, тогда как в действительности, как мы видели, оно заключено между 23,1 и 23,3 см.

Число надежно установленных цифр в записи результата измерения называется **числом значащих цифр**. Так, в записи 23,21 см мы имеем четыре значащие цифры, а в записи 0,062 см — две.

В процессе измерений или в ходе вычислений не следует сохранять в окончательном ответе больше знаков, чем имеется значащих цифр[1]. Например, при вычислении площади прямоугольника с длинами сторон 11,3 и 6,8 см их перемножение дает 76,84 см$^2$; очевидно, однако, что точность этого результата в действительности не равна 0,01 см$^2$. Если, как это принято при оценке точности, рассмотреть наихудший случай, когда оба измерения одновременно принимают минимальные или максимальные значения (при заданной погрешности каждого измерения), то результат должен находиться между значениями $11{,}2 \cdot 6{,}7 = 75{,}04$ см$^2$ и $11{,}4 \cdot 6{,}9 = 78{,}66$ см$^2$. Таким образом, в лучшем случае мы можем принять в качестве ответа значение 77 см$^2$, т. е. считать, что погрешность равна 1–2 см$^2$. Две другие цифры в полученном числе 76,84 см$^2$ следует опустить, так как они не являются значащими. В качестве общего правила можно принять, что *окончательный результат умножения или деления*

[1] В наименее точно измеренной величине.– *Прим. ред.*

*должен содержать лишь столько цифр, сколько их содержит число с минимальным количеством значащих цифр (из всех чисел, участвующих в вычислении).* В нашем примере минимальное количество значащих цифр (две) имеет число 6,8 см; следовательно, результат 76,84 $см^2$ нужно округлить до 77 $см^2$. Поэтому, когда вы пользуетесь микрокалькулятором, необходимо помнить, что не все цифры, которые он дает, могут быть значащими; «лишние» цифры вообще не следует учитывать (и записывать в результат).

В физике обычно принято записывать число в виде «степеней десяти», т. е. с помощью показателей степени; например, вместо 36 900 пишут $3{,}69 \cdot 10^4$, а вместо 0,0021 записывают $2{,}1 \cdot 10^{-3}$. Одно из преимуществ такой записи состоит в том, что она позволяет четко и ясно указать число значащих цифр. Например, из записи 36 900 неясно, содержит ли это число три, четыре или пять значащих цифр. Если известно, что точность записи составляет три значащие цифры, то результат следует записать в виде $3{,}69 \cdot 10^4$, а если значащих цифр четыре, то в виде $3{,}690 \cdot 10^4$.

## 1.4. Единицы измерения, стандарты и система единиц СИ

Измерение любой физической величины проводится по отношению к определенному стандарту или единице этой величины, и эти единицы обязательно должны приводиться вместе с численным значением результата. Например, длины можно измерять в таких единицах, как дюймы, футы или мили в британской системе единиц, а также в сантиметрах, метрах или километрах в метрической системе единиц. Бессмысленно указать лишь, что длина данного объекта равна 18,6; при этом обязательно *нужно* написать и единицы измерения (очевидно, 18,6 м существенно отличаются от 18,6 дюйма или 18,6 мм).

Еще всего лишь около 200 лет назад единицы измерения не были стандартизованы, и это сильно затрудняло научное общение. В разных странах использовались различные единицы; даже длина фута была разной в различных местах.

Первым международным стандартом стало установление стандартного *метра* Французской академией наук в 1791 г.[1)] Метр был определен как расстояние между двумя насечками, тонко нанесенными на специальный стержень

[1)] В стремлении к рациональности эталон метра был выбран как одна стомиллионная доля расстояния от земного экватора до любого из географических полюсов. Современные измерения длины земного меридиана указывают на то, что принятый ранее эталон не совпадает с истинным метром (относительная точность расхождения составляет около 0,02%).

из платино-иридиевого сплава, хранящийся в Международном бюро мер и весов близ Парижа. Достаточно точные копии эталона стандартного метра были разосланы во многие лаборатории мира. В конце 19 в. благодаря работам американского физика А. Майкельсона (подробнее см. в разд. 36.9) удалось определить метр с помощью длины волны света. Последний по времени стандарт был принят в 1960 г.: метр (сокращенно м) определяется теперь как длина, равная 1 650 763,73 длины волны оранжевого цвета, излучаемого газом криптоном-86. Единицы длины в британской системе единиц (дюйм, фут, миля) также выражаются теперь через метры; так, дюйм равен в точности 2,54 сантиметра (см; 1 см = 0,01 м). Другие переводные коэффициенты можно найти в таблице на форзацах этой книги.

Стандартной единицей *времени* является *секунда* (с). В течение многих лет секунда определялась как 1/86400 средних солнечных суток. В настоящее время секунда определяется более точно – через колебания электронов внутри атома цезия. Собственно, секунда определяется как время, которое необходимо для совершения 9192631770 определенного типа колебаний электронов в атоме цезия; разумеется, как и ранее, в одной минуте (мин) содержится ровно 60 с, а в одном часе (ч) – 60 мин.

Определения других стандартных единиц измерений мы будем давать по мере того, как будем встречаться с ними в последующих главах.

В метрической системе более крупные и более мелкие по сравнению со стандартными единицы определяются в виде величин, кратных 10, что существенно облегчает вычисления. Так, один сантиметр – это 1/100 м, один километр (км) – 1000 м и т. п. Приставки санти-, кило- и т. п. перечислены в табл. 1.1 и могут применяться не только к единицам длины, но также к единицам объема, массы или других метрических единиц. Например, сантилитр (сл) – это 1/100 литра, а килограмм (кг) – 1000 граммов (г).

*Таблица 1.1.* Метрические (в системе СИ) приставки, множители

| Приставка | Обозначение | Множитель |
|---|---|---|
| Тера | Т | $10^{12}$ |
| Гига | Г | $10^{9}$ |
| Мега | М | $10^{6}$ |
| Кило | к | $10^{3}$ |
| Гекто | г | $10^{2}$ |
| Дека | да | $10^{1}$ |
| Деци | д | $10^{-1}$ |
| Санти | с | $10^{-2}$ |
| Милли | м | $10^{-3}$ |
| Микро | мк | $10^{-6}$ |
| Нано | н | $10^{-9}$ |
| Пико | п | $10^{-12}$ |
| Фемто | ф | $10^{-15}$ |

Переводные коэффициенты между различными единицами в британской системе (например, 12 дюймов в 1 футе) весьма неудобны для вычислений. В этом состоит основная причина того, почему практически во всех странах (во всяком случае, при научных вычислениях) принята метрическая система единиц. В настоящее время США медленно переходят на метрическую систему, а Великобритания уже в значительной степени завершила этот переход.

Имея дело с физическими законами и выражающими их равенствами, очень важно использовать согласованный набор, или систему единиц. Приведем простой пример: допустим, вы хотите узнать, как далеко вы можете уехать на своем автомобиле за 40 мин при его скорости 90 км/ч. В следующей главе будет показано, что расстояние $x$ можно выразить в виде $x = vt$, или произведения скорости

$v$ на время $t$. Но если просто умножить 90 км/ч на 40 мин, то получится нелепый ответ. Если скорость $v$ задана в километрах в час, то время $t$ тоже должно быть выражено в часах. В нашем случае $t = 2/3$ ч; следовательно, $x = (90 \text{ км/ч})\ (2/3 \text{ ч}) = 60$ км. (Заметим, как в этом выражении сократились единицы времени (ч); знак равенства здесь относится не только к числовым значениям, но и к единицам измерения.) При работе с более сложными соотношениями необходимость использования согласованного набора единиц измерения становится еще более существенной.

В течение многих лет использовались различные системы единиц. В настоящее время основной системой единиц стала **Международная система единиц**, которая сокращенно называется СИ (система интернациональная). В системе СИ стандартными единицами длины, времени и массы являются соответственно метр, секунда и килограмм – система единиц механических величин, называемая МКС (метр, килограмм, секунда).

Другая метрическая система единиц – система СГС, в которой стандартными единицами длины, массы и времени являются соответственно сантиметр, грамм и секунда, на что указывает сокращенное название системы.

В Британской системе единиц стандартными единицами являются фут для длины, фунт силы для силы и секунда для времени.

В настоящее время в научных исследованиях и преподавании наиболее широко применяется система СИ. Поэтому в данной книге мы будем использовать преимущественно систему СИ, хотя иногда при введении различных величин будут указываться как их единицы измерения в системе СГС, так и переводные коэффициенты для перевода этих величин в систему СИ.

## 1.5. Основные и производные величины

Все физические величины могут быть разделены на два класса: **основные** и **производные величины**. Соответствующие им единицы измерения также называются *основными* и *производными единицами*. Для простоты ученые стремятся выбрать минимальное число основных величин, которое позволяет дать полное описание физического мира. Оказалось, что число таких величин равно семи; для системы СИ они приведены в табл. 1.2. Любые другие величины могут быть определены через эти семь основных величин[1]. В выборе основных величин и производных

[1] Единственными исключениями являются угол (единица измерения радиан; см. гл. 9) и телесный угол (стерадиан), для которых не было достигнуто соглашение о том, являются эти величины основными или производными.

*Таблица 1.2.* Основные величины системы СИ и единицы их измерения

| Величина | Единица | Сокращенное обозначение |
|---|---|---|
| Длина | метр | м |
| Время | секунда | с |
| Масса | килограмм | кг |
| Сила тока | ампер | А |
| Температура | кельвин | К |
| Количество вещества | моль | моль |
| Сила света | кандела | кд |

имеется некоторый произвол. Так, в Британской системе единиц сила рассматривается как основная величина, а масса – как производная, тогда как в системе СИ – наоборот.

Большинство величин определяется через основные величины; например, скорость определяется как отношение перемещения тела ко времени, за которое это перемещение произошло (см. гл. 2). Основные величины по определению не могут быть выражены через другие величины, именно поэтому они называются основными. Необходимо, однако, указать правило (или набор правил) измерения этих основных величин; такое определение называется *операционным* и может быть дано как для основных, так и для производных величин.

## 1.6. Размерности и анализ размерностей

Когда мы говорим о *размерности* величины, мы имеем в виду основные единицы или основные величины, с помощью которых можно построить данную величину. Размерность площади, например, всегда равна квадрату длины (сокращенно $[L^2]$; квадратные скобки здесь и далее обозначают размерность); единицами измерения площади могут быть квадратный метр, квадратный фут и т. п. Скорость же может измеряться в единицах км/ч, м/с и миль/ч, но размерность ее всегда равна размерности длины $[L]$, деленной на размерность времени $[T]$, т. е. мы имеем $[L/T]$. Формулы, описывающие величину, в разных случаях могут быть различны, но размерность сохраняется той же самой. Например, площадь треугольника с основанием $b$ и высотой $h$ равна $A = (1/2)bh$, а площадь круга радиусом $r$ равна $A = \pi r^2$. Эти формулы отличаются друг от друга, но размерности в обоих случаях совпадают и равны $[L^2]$.

При определении размерности величины обычно пользуются размерностями основных, а не производных ве-

личин. Например, сила, как мы увидим ниже, имеет размерность массы $[M]$, умноженной на ускорение $[L/T^2]$, т. е. ее размерность равна $[ML/T^2]$.

Правило подбора размерностей может помочь при выводе различных соотношений; такая процедура называется **анализом размерностей**[1]. Один из полезных методов – это применение анализа размерностей для проверки *правильности* того или иного соотношения. В этом случае используются два простых правила. Во-первых, складывать или вычитать можно величины только одинаковой размерности (нельзя складывать сантиметры и граммы); во-вторых, величины, стоящие в обеих частях любого равенства, должны иметь одинаковые размерности.

Пусть, например, получено выражение $v = v_0 + (1/2)at^2$, где $v$ – скорость тела по прошествии времени $t$, $v_0$ – начальная скорость тела, $a$ – испытываемое им ускорение. Для проверки правильности этой формулы произведем анализ размерностей. Запишем равенство для размерности, учитывая, что скорость имеет размерность $[L/T]$, а ускорение, как мы увидим в гл. 2, – размерность $[L/T^2]$:

$$\left[\frac{L}{T}\right] \stackrel{?}{=} \left[\frac{L}{T}\right] + \left[\frac{L}{T^2}\right][T^2] \stackrel{?}{=} \left[\frac{L}{T}\right] + [L].$$

В этой формуле с размерностью не все в порядке; в правой части равенства стоит сумма величин, размерности которых не совпадают. Отсюда можно сделать вывод о том, что при выводе исходного выражения была допущена ошибка.

Совпадение размерности в обеих частях еще не доказывает правильности выражения в целом. Например, может быть неверным безразмерный числовой множитель вида 1/2 или $2\pi$. Поэтому проверка размерности может указать только на ошибочность выражения, но не может служить доказательством его правильности.

Анализ размерностей можно также использовать как быструю проверку правильности соотношения, в котором вы не уверены. Предположим, вы не можете вспомнить выражение для периода $T$ (времени, необходимого для совершения полного колебания) простого математического маятника длиной $l$: то ли эта формула выглядит как $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, то ли $T = 2\pi\sqrt{g/l}$, где $g$ – ускорение свободного падения, размерность которого, как и у любого ускорения, равна $[L/T^2]$. (Правильная формула для периода колебаний маятника будет получена в гл. 14; здесь нас

[1] Методы, описываемые в нескольких следующих разделах, приобретут больший смысл после того, как вы изучите последующие главы этой книги. Прочтение этого раздела дает общую точку зрения на рассматриваемую проблему; при необходимости к нему можно вернуться позже.

будет только интересовать, входят ли в нее величины $l$ и $g$ в виде отношения $l/g$ или $g/l$.) Анализ размерностей показывает, что верна первая формула:

$$[T] = \sqrt{\frac{[L]}{[L/T^2]}} = \sqrt{[T^2]} = [T],$$

в то время как вторая ошибочна, поскольку

$$[T] \neq \sqrt{\frac{[L/T^2]}{[L]}} = \sqrt{\frac{1}{[T^2]}} = \frac{1}{[T]}.$$

Обратите внимание на то, что постоянный множитель $2\pi$ является безразмерным и не входит в окончательный результат.

Наконец, важное применение анализа размерностей (которое, впрочем, требует большой осторожности) – это нахождение *вида* искомого соотношения. Такая необходимость может возникнуть, если требуется определить лишь то, как одна величина зависит от других. Рассмотрим конкретный пример получения формулы для периода $T$ колебаний математического маятника. Сначала определим, от каких величин может зависеть $T$. Период может зависеть от длины нити $l$, массы на конце маятника $m$, угла отклонения маятника $\theta$ и ускорения свободного падения $g$. Он может также зависеть от сопротивления воздуха (мы будем использовать здесь вязкость воздуха), силы гравитационного притяжения Луны и т. д. Однако повседневный опыт указывает на то, что сила притяжения к Земле значительно превышает все остальные силы, которыми поэтому мы пренебрежем. Предположим, что период $T$ является функцией величин $l$, $m$, $\theta$ и $g$, причем каждая из этих величин возведена в некоторую степень:

$$T = Cl^w m^x \theta^y g^z;$$

здесь $C$ – безразмерная постоянная; $w$, $x$, $y$ и $z$ – показатели степени, которые нужно определить. Запишем формулу размерности для этого соотношения:

$$[T] = [L]^w [M]^x [L/T^2]^z,$$

поскольку $\theta$ – безразмерная величина (угол определяется как отношение некоторых длин; см. разд. 9.1), которая вообще не входит в формулу размерности. После некоторых упрощений мы получаем

$$[T] = [L]^{w+z} [M]^x [T]^{-2z}.$$

В силу того что семь основных величин (табл. 1.2) являются независимыми, для согласования размерностей в обеих частях равенства необходимо положить

$$1 = -2z, \quad 0 = w + z, \quad 0 = x.$$

Решая эти уравнения, получаем $z = -1/2$, $w = 1/2$, $x = 0$.

Таким образом, искомое соотношение имеет вид

$$T = C\sqrt{l/g}f(\theta), \tag{1.1}$$

где $f(\theta)$ – некоторая функция угла $\theta$, которую нельзя определить с помощью рассматриваемого нами метода. Этот метод не позволяет определить безразмерную постоянную $C$. Для того чтобы найти значение $C$ (оно оказывается равным $2\pi$) и вид функции $f$ ($f \approx 1$ для малых $\theta$), необходимо проделать такой анализ, как в гл. 14, основанный на законах Ньютона. Покажем теперь, что́ нам *удалось* получить только с помощью анализа размерностей, т. е. согласования размерностей в левой и правой частях соотношения. Мы определили вид выражения, которое связывает период математического маятника с основными параметрами этой задачи, а именно с величинами $l$ и $g$ [см. выражение (14.13)].

Как нам это удалось? И сколь полезным является этот метод? По существу, с помощью физической интуиции мы определили, какие физические величины (параметры) в этой задаче существенны, а какие нет. Это не всегда легко сделать, и нередко приходится прилагать много усилий. Что же касается полезности, то конечный результат в нашем примере можно получить на основе законов Ньютона, как это сделано в гл. 14. Но во многих физических ситуациях бывает так, что с помощью законов нельзя получить сразу результаты. В этих случаях анализ размерностей может оказаться мощным средством.

В заключение заметим, что любое выражение, полученное из анализа размерностей (или другим подходящим способом) должно быть проверено экспериментально. Например, при выводе выражения (1.1) мы можем сравнить периоды колебаний двух маятников разной длины $l_1$ и $l_2$, у которых угол отклонения один и тот же. Используя формулу (1.1), можно написать

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{C\sqrt{l_1/g}f(\theta)}{C\sqrt{l_2/g}f(\theta)} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

Так как $C$ и $f(\theta)$ одинаковы для обоих маятников, они сократились; то, что отношение периодов колебаний маятников равно квадратному корню из отношений их длин, может быть проверено экспериментально. Сравнение с экспериментом проверит, хотя бы частично, наши вычисления; $C$ и $f(\theta)$ могут быть определены с помощью дальнейших экспериментов.

## 1.7. Порядок величины; быстрая оценка

Иногда нас интересует только приближенное значение физической величины. Это бывает в случае, когда точные расчеты требуют затраты неоправданно большого вре-

мени или знания отсутствующих дополнительных данных. В других случаях требуется сделать грубую оценку порядка величины для проверки расчетов, выполненных на калькуляторе, чтобы убедиться в том, что при введении чисел не было сделано грубой ошибки. Кроме того, при расчетах на калькуляторе или на логарифмической линейке может быть потерян порядок величины (правильная степень числа 10), а грубая оценка помогает исправить это.

В общем случае грубая оценка проводится как округление всех чисел до одной значащей цифры, умноженной на 10 в некоторой степени, причем после проведения вычислений сохраняется также одна значащая цифра. Такая оценка называется оценкой по *порядку величины*, и можно считать, что она дает точность до множителя 10 (но обычно даже лучше). Часто выражение «порядок величины» используется для указания только степени числа 10.

В качестве примера найдем количество воды в некотором почти круглом озере диаметром около 1 км и средней глубиной 10 м. Чтобы найти объем, умножим среднюю глубину озера на площадь его поверхности (полагая, что озеро имеет форму цилиндра). Предположим, что озеро имеет радиус $r$, т. е. его площадь равна $\pi r^2$ или приближенно $3 \cdot (5 \cdot 10^2 \text{ м})^2 \approx 8 \cdot 10^5 \text{ м}^2$, где мы положили $r = 500$ м, а $\pi$ округлили до 3 (знак $\approx$ означает «приближенно равен»). Таким образом, объем озера приближенно равен $(8 \cdot 10^5 \text{ м}^2)(10 \text{ м}) = 8 \cdot 10^6 \text{ м}^3$, что по порядку величины составляет $10^7 \text{ м}^3$. Благодаря всем оценкам, которые делались при этом вычислении, лучше пользоваться оценкой по порядку величины ($10^7$), чем числом $8 \cdot 10^6$.

## Заключение[1)]

Физике, как и другим наукам, присуще творческое начало; она не является простым набором фактов. Для того чтобы объяснить наблюдаемые явления, создаются важные теории. Эти теории «проверяют», сравнивая предсказываемые ими результаты с данными экспериментов, и только после этого они могут быть приняты или отвергнуты. Следует заметить, что в общем случае теория не может быть «доказана» в буквальном смысле этого слова.

Для понимания конкретного явления или определенной совокупности явлений ученые могут предложить *модель* – своего рода представление или аналогию, кото-

---

[1)] Цель заключений, которые мы помещаем в конце каждой главы этой книги, дать краткий обзор основных идей, изложенных в главе. Разумеется, они не могут обеспечить полного представления о материале, которое можно получить лишь в процессе тщательного прочтения главы.

рая способна объяснить явление и, таким образом, облегчить его понимание. *Теория*, развитая на основе модели, во многих случаях оказывается более глубокой и более сложной по сравнению с простой моделью. Научный *закон* представляет собой четкое утверждение, нередко выраженное в виде формулы, которая дает количественное описание конкретной совокупности явлений для целого ряда случаев.

Решающую роль в физике играют измерения, но они никогда не могут быть абсолютно точными. Поэтому для любого числа, которое получается из измерения, должна быть указана *погрешность* этого измерения либо непосредственно с использованием знаков $\pm$, либо путем записи этого числа с сохранением только правильного количества *значащих цифр*.

Все величины выражаются через стандартную величину, или *единицу измерения*, причем в любом случае должны быть указаны соответствующие единицы измерения. В настоящее время обычно используется *Международная система единиц* (СИ), в которой стандартными единицами длины, массы и времени являются метр, килограмм и секунда. Существует семь независимых *основных величин*; все остальные величины называются *производными*, поскольку как они сами, так и их единицы измерения могут быть выражены через основные; например, скорость – это отношение расстояния ко времени.

*Размерность* какой-либо величины является комбинацией размерностей основных величин, из которых составлена данная величина (скорость, например, имеет размерность [длина/время], или $[L/T]$). Рассматривая лишь размерности различных величин, входящих в данное соотношение (этот метод называется *анализом размерностей*), можно проверить правильность того или иного соотношения, а в некоторых случаях найти и общий вид искомого соотношения.

## Вопросы

1. Некоторые утверждают, что наука – это своего рода религия, со своими жрецами и таинствами, доступными лишь небольшому числу избранных – искушенных ученых. Согласны ли вы с этим мнением? Попробуйте порассуждать на эту тему.
2. Обсудите вопрос о том, в чем заключаются ограниченные возможности науки и в чем ее сила?
3. Обсудите различие между наукой и техникой.
4. Говорят, что во многих бедах общества виновна наука. Ученые могут возразить, что их работа имеет чисто интеллектуальный характер, а проблемы создает техника (которая представляет собой практическое применение научных результатов). Обсудите это.
5. С точки зрения так называемых операционалистов в науке имеют значение лишь те величины, которые могут быть описаны рядом операций (или процедур) для их определения. Какие достоинства и недостатки вы находите в этом утверждении?
6. Желательно, чтобы основные эталоны (в частности, длины и времени) были доступны (удобны для сравнения), постоянны (не изменялись), не разрушались и были воспроизводимы. Обсудите, почему это необходимо и может ли какой-то из этих критериев быть несовместимым с остальными.
7. В чем достоинства и недостатки использования ступни человека в качестве эталона?

Обсудите это с точки зрения требований, описанных в вопросе 6. Рассмотрите оба возможных случая: в качестве эталона выбирается а) ступня конкретного человека; б) ступня любого человека.

8. При езде по шоссе в горах можно встретить указатели высоты, на которых написано, скажем, «1220 м (4000 футов)». Критики метрической системы обвиняют ее в сложности, указывая на неудобные числа (1220 м). Как бы вы изменили указатели, чтобы они помогали переходу на метрическую систему?

9. Основные единицы системы СИ, приведенные в табл. 1.2, включают в себя одну величину, в названии которой содержится приставка (килограмм). Не будет ли удобным поменять ее на единицу, в названии которой приставка отсутствует? Как это может быть сделано? Как вы считаете, почему реально используется единица массы килограмм, а не грамм?

10. Предложите метод измерения а) толщины листа бумаги; б) расстояния от Земли до Солнца.

11. Можете ли вы предложить полный набор основных величин, аналогичный приведенному в табл. 1.2, который бы не содержал длины?

## Задачи

[Задачи в конце каждой главы помечены римскими цифрами I, II и III в соответствии со степенью трудности, причем задачи, отмеченные цифрой I, являются наиболее простыми. Задачи помещаются по разделам, причем мы полагаем, что читатель проработал не только этот раздел, но и предыдущие, поскольку часто нельзя решить задачу, не изучив ранее изложенного материала.]

Раздел 1.3

1. (I) Чему приближенно равна относительная ошибка (в процентах) измерения, если была измерена величина 9,7 м?

2. (I) Чему равна относительная ошибка (в процентах) при измерении, результат которого записан в виде $3{,}86 \pm 0{,}17$ с?

3. (II) Чему равна площадь круга радиусом $6{,}7 \cdot 10^4$ см и какова точность ее измерения?

4. (II) Чему равна погрешность измерения объема сферы радиусом $r = 2{,}48 \pm 0{,}03$ м?

Раздел 1.4

5. (I) Назовите следующие величины, используя приставки из табл. 1.1: а) $10^6$ вольт, б) $10^{-6}$ метров, в) $4 \cdot 10^7$ суток, г) $2 \cdot 10^3$ граммов, д) $2 \cdot 10^{-9}$ секунды.

6. (I) Определите свой рост в метрах.

7. (I) Определите переводный коэффициент между километрами и ангстремами.

8. (I) Луна удалена от Земли на 240 000 миль. Чему равно это расстояние в метрах? Выразите его, используя а) степени десяти; б) метрические приставки.

9. (I) Диаметр типичного атома равен примерно 1,0 Å. Чему равно это расстояние в метрах?

10. (I) а) Сколько секунд содержит год? б) Сколько в году наносекунд?

11. (II) *Световой год* (св. год) – это расстояние, которое свет, распространяющийся со скоростью $3{,}00 \cdot 10^8$ м/с, преодолевает за год. а) Чему равна протяженность 1,0 светового года в метрах? б) Астрономическая единица длины (а. е.) – это среднее расстояние между Землей и Солнцем, равное $1{,}50 \cdot 10^8$ км. Сколько астрономических единиц содержится в 1,0 св. годе? в) Чему равна скорость света в единицах а. е./ч?

12. (II) Поместите перед глазами отточенный карандаш так, чтобы кончик его грифеля заслонял от вас Луну; проведите соответствующие измерения для того, чтобы оценить диаметр Луны, если известно, что расстояние до нее от Земли составляет $3{,}8 \cdot 10^5$ км.

Раздел 1.6

13. (I) Укажите единицы измерения коэффициентов $A$ и $B$ из задачи 14 в системе СИ.

14. (I) Зависимость скорости $v$ тела от времени $t$ дается выражением $v = At^3 - Bt$. Каковы размерности коэффициентов $A$ и $B$?

15. (III) Тело массой $m$ колеблется на конце пружины с амплитудой $x$ (следовательно, $2x$ – это полное расстояние в метрах, проходимое телом за один полный период колебаний). Используя анализ размерностей, определите возможный вид зависимости периода от величин $m$, $x$ и коэффициента жесткости пружины $k$ (последний определяется как отношение $F/x$, где $F$ – сила, необходимая для растяжения пружины на длину $x$).

16. (II) Три студента получили различные выражения для зависимости пройденного расстояния $x$ от времени $t$: а) $x = vt^2 + 2at$; б) $x = v_0 t + (1/2)at^2$; в) $x = v_0 t + 2at^2$. Здесь $v$ – скорость, $a$ – ускорение (в единицах м/с$^2$), а нижний индекс 0 указывает на значение величины в момент времени $t = 0$. Какие из этих трех выражений могли бы оказаться правильными с точки зрения анализа размерностей?

17. (III) Частица, имеющая массу $m$, обращается по окружности радиусом $r$ со скоростью $v$; при этом у частицы имеется центростремительное ускорение $a_c$ (м/с$^2$). С помощью анализа размерностей найдите выражение для $a_c$.

# 2

# Движение: кинематика в одном измерении

Движение предметов – бейсбольных мячей, автомобилей, бегунов и даже Солнца и Луны – неотъемлемая часть повседневной жизни. Движение, несомненно, представляет собой важнейшее свойство физического мира и заслуживает пристального изучения, историю которого можно проследить, начиная с древних цивилизаций Малой Азии. Уже в древности было достигнуто глубокое понимание сути движения, однако лишь сравнительно недавно – в 16 и 17 вв. – установились современные представления о движении. В формирование этих представлений внесли свой вклад многие ученые, но, как мы вскоре увидим, среди них резко выделяются две личности: Галилео Галилей (1564–1642) и Исаак Ньютон (1643–1727).

Изучение движения предметов и связанных с этим представлений о силе и энергии образует область физики, называемую **механикой**. О твердых телах, перемещающихся без вращения, говорят, что они находятся в состоянии **поступательного движения**. Любая часть предмета, находящегося в состоянии только поступательного движения, проходит одну и ту же траекторию. Примером этого является движение прыгуна в воду, показанное на рис. 2.1, *а*; на рис. 2.1, *б* прыгун в воду совершает как поступательное, так и вращательное движение. В нескольких следующих главах мы будем иметь дело только с

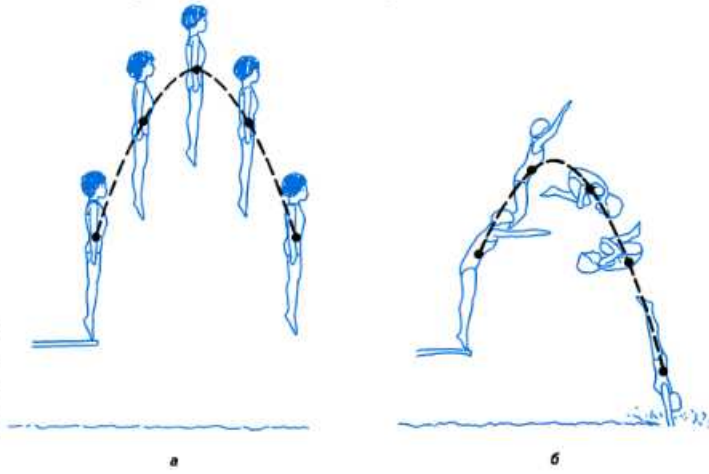



Рис. 2.1. Движение прыгуна в воду представляет собой чисто поступательное перемещение (*а*) или поступательное перемещение с вращением (*б*).

поступательным движением; вращательное движение будет рассмотрено в гл. 9 и 10.

При изучении движения мы будем пользоваться понятием идеализированной **частицы**. Такая частица рассматривается как математическая точка, т. е. у нее нет пространственной протяженности (размеров), и она может совершать только поступательное движение. Окружающие нас предметы, разумеется, не являются частицами: все они имеют протяженность в пространстве. Тем не менее понятие частицы полезно во многих реальных ситуациях, когда нас интересует лишь поступательное движение, а размеры тел не играют существенной роли. Например, бильярдный шар и даже космический корабль, летящий к Луне, при решении многих задач можно рассматривать как частицу. В следующих главах при обсуждении более сложных видов движения мы увидим, что понятие частицы очень полезно, поскольку любое протяженное тело можно считать составленным из множества мельчайших частиц.

Механику обычно делят на две части: **кинематику**, которая описывает то, как движутся предметы, и **динамику**, которая отвечает на вопрос о том, почему предметы движутся именно таким образом. Эта и следующая главы посвящены кинематике поступательного движения; в гл. 4 мы начнем рассматривать динамику поступательного движения. Настоящую же главу посвятим главным образом описанию движения тела по прямой линии (одномерное движение); в гл. 3 рассмотрим кинематику движения в двух и трех измерениях.

## 2.1. Средняя путевая скорость

Средняя скорость в физике определяется двояким образом[1]. Ниже (в разд. 2.4) мы покажем, в чем состоит различие между этими двумя определениями. Рассмотрим здесь пока лишь скорость, которая определяется как путь, проходимый телом в единицу времени, т. е. общее расстояние вдоль траектории, деленное на время, за которое тело его проходит. Если автомобиль проехал 400 км за 5 ч, то мы утверждаем, что его средняя скорость была 80 км/ч. Вообще говоря, *средняя скорость* движения тела определяется как *пройденное им расстояние, деленное на время, затраченное на прохождение этого расстояния*. Если $D$ – пройденный путь, $t$ – затраченное время, а $v_s$ – скорость движения на этом пути, то средняя путевая

[1] В английском языке существует даже два различных слова для скорости speed и velocity. В этом разделе рассматривается скорость в ее первом значении. Такая скорость всегда положительна и не имеет направления в пространстве (т. е. является скаляром). – *Прим. ред.*

скорость определяется следующим образом:

$$\bar{v}_s = D/t\,.$$

Черта над $v_s$ является общепринятым символом для обозначения «среднего».

**Пример 2.1.** Какое расстояние проедет велосипедист за 4,0 ч, если его средняя путевая скорость равна 11,5 км/ч?

**Решение.** Для того чтобы найти пройденный путь, перепишем представленное выше выражение для скорости как $D = \bar{v}_s t$. Используя то, что $\bar{v}_s = 11{,}5$ км/ч, а $t = 4{,}0$ ч, находим $D = (11{,}5 \text{ км/ч})\,(4{,}0 \text{ ч}) = 46$ км.

## 2.2. Системы отсчета

Допустим, что во время путешествия на поезде вы наблюдаете за птицей, летящей у вас над головой, и замечаете, что полет птицы происходит со скоростью 30 км/ч. Но как, по-вашему, она движется со скоростью 30 км/ч: относительно поезда или относительно земли?

Всякое измерение должно быть сделано относительно какой-то **системы отсчета**. Вот наглядный пример. Допустим, вы находитесь в поезде, движущемся со скоростью 80 км/ч, и пусть к началу поезда мимо вас перемещается человек со скоростью 5 км/ч. Разумеется, это будет скорость человека относительно поезда. Относительно земли этот человек будет двигаться со скоростью 85 км/ч. В любом случае при определении скорости необходимо выделить систему отсчета. Почти всегда, даже не задумываясь об этом, мы имеем в виду скорость «относительно земли». Тем не менее всякий раз, когда может возникнуть затруднение, нужно точно указать систему отсчета.

Значения других физических величин тоже зависят от системы отсчета. Например, не имеет смысла говорить, что Иосемитский национальный парк находится в трехстах километрах, не указывая, откуда отсчитывается это расстояние. Расстояния всегда измеряются в некоторой системе отсчета. Кроме того, задавая движение предмета, важно указать не только скорость, но и направление движения. Например, пусть некто вылетел из Нью-Йорка на реактивном самолете, который движется со скоростью 1000 км/ч, а вы хотели бы узнать, в каком направлении летит этот самолет. Это может быть Вашингтон, Париж, Сан-Франциско или какое-либо другое место. Во многих случаях направление можно указать, пользуясь сторонами света: «север», «юг», «запад» и «восток»; применяются также направления «вверх» и «вниз». Однако это не всегда удобно. В физике, чтобы задать систему отсчета, часто изображают систему координатных осей, показанную на рис. 2.2. Указанные на рисунке обозначения положительного и отрицательного направлений являются общепринятыми, хотя в некоторых случаях возникает необ-

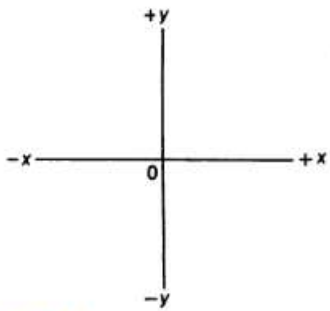



Рис. 2.2. Обычная декартова система координат на плоскости.

ходимость в их изменении. Можно, например, выбрать в качестве положительной оси $y$ направление вниз вместо направления вверх. Любую точку плоскости можно задать ее координатами по осям $x$ и $y$. При наличии трех измерений появляется третья ось, а именно ось $z$, перпендикулярная осям $x$ и $y$.

Хотя большинство измерений выполняется в системах отсчета, закрепленных на земле, полное право на существование имеют и другие системы отсчета. Например, научные измерения часто выполняются в движущемся космическом корабле и могут производиться даже на Луне.

## 2.3. Замена единиц измерения

Во многих случаях из-за необходимости или в целях удобства одну систему единиц измерения желательно заменить на другую. Например, скорость автомобиля нередко лучше указывать в единицах м/с, а не в км/ч. Это удобно при измерении тормозного пути, когда время измеряют в секундах, а расстояние – в метрах, а не в часах и километрах. Кроме того, иногда может потребоваться перевести величины из метрической системы единиц в британскую и наоборот.

Чтобы определить, чему будет равна скорость 80 км/ч в метрах в секунду, проделаем следующий расчет. В 1 км содержится 1000 м, а в 1 ч мы имеем 3600 с. Таким образом,

$$80\ \text{км/ч} = \left(\frac{80\ \text{км}}{1\ \text{ч}}\right)\left(\frac{1000\ \text{м}}{1\ \text{км}}\right)\left(\frac{1\ \text{ч}}{3600\ \text{с}}\right) = (80)\left(\frac{1000}{3600}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}} =$$
$$= (80)\,(0{,}278)\ \text{м/с} = 22\ \text{м/с}.$$

Заметим, что в первой строке исходная величина (80 км/ч) умножается на два переводных множителя (1000 м)/(1 км) и (1 ч)/(3600 с), каждый из которых равен единице, и, следовательно, они не меняют выражения. Единицы часов и километров сокращаются, так что мы получаем м/с. (Заметим также, что в окончательном ответе остались только две значащие цифры, а именно 22 м/с, поскольку в произведении наименьшее количество значащих цифр имеет множитель с двумя значащими цифрами.)

При замене единиц измерения часто бывает трудно определить, где должен находиться переводной коэффициент, – в числителе или в знаменателе. Простейший путь – это проверить, сокращаются ли единицы так, как в приведенном выше примере. Если бы мы написали (80 км/ч) (1000 м/1 км) (3600 с/1 ч), то получили бы неверный результат, поскольку единицы «часы» не сокращаются.

В последней строке в приведенном выше расчете мы

имеем множитель 0,278; это и есть переводной множитель между единицами км/ч и м/с. Этот множитель можно получать еще проще, если заметить, что 1 км/ч это то же самое, что 1 000 м за 3 600 с. Таким образом, 1 км/ч = = (1000 м)/(3600 с) = 0,278 м/с. Следовательно, умножая любую скорость в единицах км/ч на 0,278, ее можно перевести в единицы м/с.

## 2.4. Средняя скорость по перемещению

Как уже отмечалось выше, в физике существует два способа определения скорости. В первом случае скорость определяется по полному пройденному пути и характеризуется только своей величиной, в то время как во втором случае скорость определяется по перемещению и характеризуется как *величиной* (числовым значением), так и *направлением* (в гл. 3 мы покажем, что такие величины называются векторными). **Перемещение** определяется как величина, характеризующая *изменение положения тела*. Чтобы понять различие между полным пройденным путем и перемещением, представим себе человека, который прошел 50 м на восток, затем развернулся и прошел назад (на запад) расстояние 10 м. Полный пройденный путь равен 60 м, в то время как *перемещение* равно лишь 40 м, поскольку человек находится теперь всего лишь в сорока метрах от точки старта. Пусть в некоторый начальный момент времени $t_1$ тело находится в точке $x_1$ на оси $x$ системы координат, изображенной на рис. 2.3. Допустим, что в некоторый последующий момент времени $t_2$ оно оказалось в точке $x_2$; тогда его перемещение будет равно $x_2 - x_1$. *Величина* его **средней скорости** ($\bar{v}$) определяется как *перемещение, деленное на затраченное время* (которое равно $t_2 - t_1$). Таким образом, мы имеем

$$\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1).$$

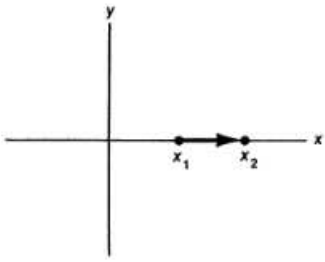



Рис. 2.3. Стрелка показывает направление перемещения, равного $x_2 - x_1$.

В приведенном выше примере предположим теперь, что человек, прошедший 50 м на восток, а затем 10 м на запад, затратил на это 40 с времени. При этом средняя скорость по перемещению оказывается равной всего лишь (40 м)/(40 с) = 1,0 м/с, тогда как вычисленная по полному пройденному пути она равна (60 м)/(40 с) = 1,5 м/с. Такое несоответствие между по-разному определяемыми величинами скорости имеет место в некоторых случаях и только лишь для *средних* значений, поэтому мы будем редко касаться этого вопроса. В следующем разделе мы покажем, что мгновенные значения этих скоростей всегда совпадают.

На рис. 2.3 перемещение рассматриваемого нами предмета за интервал времени $t_2 - t_1$ равно $x_2 - x_1$.

Величину $x_2 - x_1$ удобно записать в виде

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

где символ $\Delta$ (греческая буква «дельта») означает «изменение чего-то». Таким образом, $\Delta x$ – это перемещение, или «изменение координаты $x$». Аналогично можно записать затраченное время (изменение времени) как $\Delta t = t_2 - t_1$. Следовательно, среднюю скорость можно определить как

$$\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t. \qquad (2.1)$$

Заметим, что если $x_2$ меньше $x_1$, то тело движется влево и величина $\Delta x = x_2 - x_1$ оказывается меньше нуля. Знак перемещения, как и знак скорости, указывает направление; средняя скорость тела, движущегося вправо по оси $x$, положительна, в то время как при движении тела влево она отрицательна.

**Пример 2.2.** На графике построена зависимость положения кегельного шара от времени при его движении вдоль оси $x$. В момент времени $t_1 = 3{,}00$ с он находится в точке $x_1 = 40{,}5$ м, а в момент времени $t_2 = 5{,}50$ с – в точке $x_2 = 18{,}8$ м. Какова средняя скорость шара?

**Решение.** $\Delta x = x_2 - x_1 = 18{,}8$ м $- 40{,}5$ м $= -21{,}7$ м, а $\Delta t = t_2 - t_1 = 5{,}50$ с $- 3{,}00$ с $= 2{,}50$ с. Следовательно, $\bar{v} = \Delta x/\Delta t = (-21{,}7 \text{ м})/(2{,}50 \text{ с}) = -8{,}68$ м/с.

Перемещение и средняя скорость по перемещению отрицательны; значит, шар движется вдоль оси $x$ влево.

## 2.5. Мгновенная скорость

Если на автомобиле вы проезжаете по прямой дороге 150 км за 2,0 ч, то ваша средняя скорость равна 75 км/ч. Однако маловероятно, чтобы в каждый момент времени вы двигались со скоростью именно 75 км/ч. Для описания такого движения необходимо ввести понятие *мгновенной скорости*, которая представляет собой скорость в данный момент времени (ее и должен показывать спидометр автомобиля). Это не очень строгое определение мгновенной скорости, поскольку пока мы еще не условились, что подразумевается под «мгновением».

Точнее говоря, **мгновенная скорость** в любой момент времени равна *средней скорости за бесконечно малый интервал времени*. Чтобы пояснить это, полезно построить график зависимости положения частицы от времени (пример такого графика приведен на рис. 2.4). В момент времени $t_1$ частица находится в положении $x_1$, а в момент $t_2$ она имеет координату $x_2$; на графике этим двум положениям соответствуют точки $P_1$ и $P_2$. Прямая линия, проведенная из точки $P_1(x_1, t_1)$ в точку $P_2(x_2, t_2)$, образует гипотенузу прямоугольного треугольника со сто-

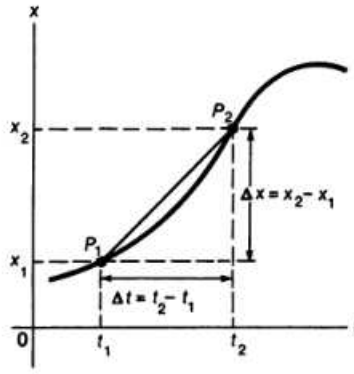



Рис. 2.4. График зависимости координаты частицы $x$ от времени $t$. Тангенс угла наклона прямой $P_1P_2$ равен средней путевой скорости частицы в промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

ронами $\Delta x$ и $\Delta t$. Отношение $\Delta x/\Delta t$ («подъем» прямой за время «пробега») определяет *наклон* прямой $P_1P_2$. Но отношение $\Delta x/\Delta t$ является также средней скоростью частицы за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Следовательно, можно сделать вывод, что средняя скорость тела за любой интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равна наклону прямой (или *хорды*), соединяющей точки $(x_1, t_1)$ и $(x_2, t_2)$ на графике зависимости $x$ от $t$.

Рассмотрим теперь момент времени $t_i$ (промежуточный между $t_1$ и $t_2$), в который частица имеет координату $x_i$ (рис. 2.5). Тогда наклон прямой $P_1P_i$ меньше чем прямой $P_1P_2$. Значит, и средняя скорость в интервале времени $t_i - t_1$ меньше, чем в интервале $t_2 - t_1$.

Представим себе теперь, что на рис. 2.5 мы все более приближаем точку $P_i$ к точке $P_1$; иными словами, интервал $t_i - t_1$ (который будем теперь называть $\Delta t$) становится все меньше и меньше. При этом наклон прямой, соединяющей обе точки, оказывается наклоном касательной к этой кривой в точке $P_1$. По мере того как мы выбираем $\Delta t$ все меньше и меньше, средняя скорость (равная наклону хорды) стремится к величине наклона касательной в этой точке. По определению мгновенная скорость в данный момент времени (например, $t_1$) равна предельному значению средней скорости, когда $\Delta t \to 0$; мы видим, что она равна наклону касательной к кривой в данной точке

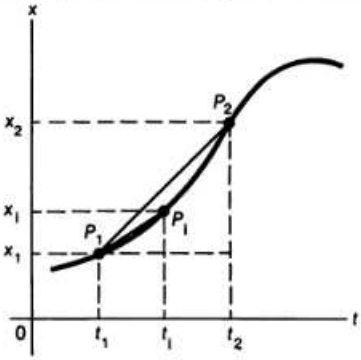



Рис. 2.5. Та же зависимость координаты от времени, что и на рис. 2.4, но заметьте, что средняя скорость по перемещению в промежутке времени $t_i - t_1$ (которая равна тангенсу угла наклона прямой $P_1P_i$) меньше, чем средняя скорость в промежутке времени $t_2 - t_1$.

(который можно просто называть наклоном кривой в этой точке):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Этот предел при $\Delta t \to 0$ в математическом анализе записывается как $dx/dt$ и называется производной величины $x$ по $t$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2.2}$$

Это выражение и есть определение мгновенной скорости в случае одномерного движения.

Следует заметить, что мы не положили просто $\Delta t = 0$, поскольку величина $\Delta x$ при этом также была бы равна нулю и мы имели бы неопределенное число. Таким образом, отношение $\Delta x/\Delta t$ необходимо рассматривать как единое целое; поскольку мы полагаем $\Delta t \to 0$, $\Delta x$ также стремится к нулю, однако отношение $\Delta x/\Delta t$ приближается к некоторому определенному значению, которое и называется мгновенной скоростью. Заметим также, что мгновенная скорость обозначается символом $v$, тогда как средняя скорость через $\bar{v}$ (с чертой над буквой). В остальной части книги слово «скорость» будет всегда означать мгновенную скорость; в любом случае, когда мы будем иметь в виду среднюю скорость, для ясности будем всегда добавлять слово «средняя».

Поскольку в любой момент времени скорость численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой зависимости $x$ от $t$, из этой зависимости можно найти скорость в произвольный момент времени. Например, на рис. 2.4 по мере движения объекта от $x_1$ к $x_2$ тангенс угла наклона кривой непрерывно увеличивается, так что возрастает скорость. Однако для времен, бóльших $t_2$, наклон начинает уменьшаться и при максимальном значении $x$ (высшая точка кривой) становится нулевым (при этом $v = 0$). За этой точкой наклон отрицателен, поэтому и скорость отрицательна. Это означает, что величина $x$ теперь уменьшается, т. е. частица движется к меньшим значениям $x$ (влево на графике с осями $x$ и $y$; рис. 2.3).

Если в течение определенного промежутка времени тело движется с постоянной скоростью, его мгновенная скорость будет равна его средней скорости. Можно ли заранее догадаться, как будет выглядеть зависимость $x$ от $t$ в этом случае, т. е. при постоянной скорости? Конечно, это будет прямая, тангенс угла наклона которой равен скорости. На рис. 2.4 кривая не имеет прямолинейных участков, и, следовательно, не существует промежутков времени, на которых скорость постоянна. В заключение заметим, что значение мгновенной скорости не зависит от того, определяем ли мы ее по полному пройденному пути

или по перемещению, поскольку при $\Delta t \to 0$ перемещение тела стремится также к нулю и его величину невозможно отличить от бесконечно малого расстояния, пройденного телом.

**Пример 2.3.** Частица движется вдоль оси $x$, как показано на рис. 2.3. Ее положение $x$ на этой оси как функция времени дается выражением $x = At^2 + B$, где $A = 2{,}10$ м/с$^2$, а $B = 2{,}80$ м. а) Определите перемещение частицы за время от $t_1 = 3{,}00$ с до $t_2 = 5{,}00$ с; б) найдите среднюю скорость на этом промежутке времени; в) определите величину мгновенной скорости при $t = 5{,}00$ с.

**Решение.** а) При $t_1 = 3{,}00$ с координата частицы равна

$$x_1 = At_1^2 + B = (2{,}10 \text{ м/с}^2)(3{,}00 \text{ с})^2 + 2{,}80 \text{ м} = 21{,}7 \text{ м}.$$

При $t_2 = 5{,}00$ с мы имеем

$$x_2 = (2{,}10 \text{ м/с}^2)(5{,}00 \text{ с})^2 + 2{,}80 \text{ м} = 55{,}3 \text{ м}.$$

Таким образом, перемещение равно

$$x_2 - x_1 = 55{,}3 \text{ м} - 21{,}7 \text{ м} = 33{,}6 \text{ м}.$$

б) Величина средней скорости равна

$$\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = (33{,}6 \text{ м})/(2{,}00 \text{ с}) = 16{,}8 \text{ м/с}.$$

в) Определим мгновенную скорость в произвольный момент времени (т. е. определим $v$ как функцию $t$), а затем положим $t = 5{,}00$ с. В произвольный момент времени $t$ координата $x$ дается выражением $x = At^2 + B$.

В более поздний момент времени $t + \Delta t$ координата частицы изменится на величину $\Delta x$ и станет равна $x + \Delta x$, причем

$$x + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B = At^2 + 2At(\Delta t) + A(\Delta t)^2 + B.$$

Чтобы найти $\Delta x$, вычтем из обеих частей последнего уравнения величину $x = At^2 + B$ и найдем

$$\Delta x = 2At(\Delta t) + A(\Delta t)^2.$$

Средняя скорость за время $\Delta t$ равна

$$\bar{v} = \Delta x/\Delta t = 2At + A(\Delta t).$$

Чтобы найти мгновенную скорость $v$, следует положить $\Delta t = 0$ [см. выражение (2.2)]; тогда последний член в правой части становится равным нулю, и мы имеем

$$v = 2At = (4{,}20 \text{ м/с}^2)(t);$$

здесь мы подставили $A = 2{,}10$ м/с$^2$. Таким образом, при $t = 5{,}00$ с получим

$$v = (4{,}20 \text{ м/с}^2)(5{,}00 \text{ с}) = 21{,}0 \text{ м/с}.$$

Если вам уже известны формулы математического анализа

$$\frac{d}{dt}(Ct^n) = nCt^{n-1} \text{ и } \frac{dC}{dt} = 0,$$

где $C$ – любая константа, то нетрудно получить окончательный результат:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(At^2 + B) = 2At = (4{,}20 \text{ м/с}^2)(t),$$

откуда для $t = 5{,}00$ с находим $v = 21{,}0$ м/с.

## 2.6. Ускорение

Если скорость тела изменяется со временем, то говорят, что оно ускоряется. Автомобиль, скорость которого увеличивается от нуля до 80 км/ч, ускоряется. Если другой автомобиль может совершить такой разгон за меньшее время, чем первый, то говорят, что он испытывает большее ускорение. Вообще говоря, **среднее ускорение** $\bar{a}$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$, в течение которого скорость изменя-

ется на $\Delta v = v_2 - v_1$, определяется как

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

**Мгновенное ускорение** $a$ по определению равно *предельному значению среднего ускорения при* $\Delta t \to 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \tag{2.4}$$

Этот предел $dv/dt$ называется производной величины $v$ по $t$. Ускорением мы будем называть мгновенное значение этой величины. В случае когда речь будет идти о среднем ускорении, мы всегда будем использовать слово «среднее».

**Пример 2.4.** На прямой дороге автомобиль ускоряется из состояния покоя до скорости 60 км/ч за 5,0 с. Какова величина его среднего ускорения?

**Решение.** Из выражения (2.3) имеем

$$\bar{a} = \frac{(60 \text{ км/ч}) - (0 \text{ км/ч})}{5{,}0 \text{ с}} = (12 \text{ км/ч})/\text{с}.$$

Это читается как «двенадцать километров в час за секунду» и означает, что скорость каждую секунду изменяется в среднем на 12 км/ч. Иными словами, предполагая, что ускорение постоянно, мы имеем за первую секунду увеличение скорости автомобиля от нуля до 12 км/ч, за следующую секунду еще на 12 км/ч, т. е. скорость возросла до 24 км/ч, и т. д. (Разумеется, если мгновенное ускорение непостоянно, эти числа будут различны.)

В приведенном выше примере вычисленное ускорение содержало две различные единицы времени – часы и секунды. Во многих случаях предпочитают пользоваться только секундами; для этого преобразуем (см. разд. 2.3) 60 км/ч следующим образом: (60 км/ч)[0,278 (м/с)/(км/ч)] = 17 м/с, и мы получаем

$$\bar{a} = \frac{(17 \text{ м/с}) - (0 \text{ м/с})}{5{,}0 \text{ с}} = 3{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Единицу ускорения почти всегда пишут как м/с² (метры в секунду в квадрате), а не (м/с)/с, поскольку

$$\frac{\text{м/с}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{с}} = \text{м/с}^2.$$

Размерность ускорения – это длина, деленная на время в квадрате, что видно из определения и иллюстрируется следующим примером.

**Пример 2.5.** Предположим, что частица движется по прямой линии таким образом, что ее координата, как и в примере 2.3, дается выражением $x = (2{,}10 \text{ м/с}^2)\,t^2 + (2{,}80 \text{ м})$. Вычислите: а) среднее ускорение частицы за время от $t_1 = 3{,}00$ с до $t_2 = 5{,}00$ с; б) ее мгновенное ускорение как функцию времени.

**Решение.** а) В п. «в» примера 2.3 мы показали, что скорость в произвольный момент времени $t$ равна $v = (4{,}20 \text{ м/с}^2)\,t$. Следовательно, в момент времени

$t_1 = 3{,}00$ с мы имеем $v = (4{,}20\ \text{м/с}^2) \times (3{,}00\ \text{с}) = 12{,}6$ м/с, а при $t_2 = 5{,}00$ с $v_2 = 21{,}0$ м/с. Следовательно,

$$\bar{a} = \frac{21{,}0\ \text{м/с} - 12{,}6\ \text{м/с}}{5{,}00\ \text{с} - 3{,}00\ \text{с}} = 4{,}20\ \text{м/с}^2.$$

б) Используем определение

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

В произвольный момент времени $t$ мы имеем $v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t)$; в более поздний момент времени $t + \Delta t$ скорость изменится на величину $\Delta v$, так что мы получим $v + \Delta v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t + \Delta t)$.

Вычитая из обеих частей уравнения $v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t)$, находим

$\Delta v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(\Delta t)$.

Следовательно,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (4{,}20\ \text{м/с}^2) = 4{,}20\ \text{м/с}^2.$$

В этом случае ускорение постоянно; оно не зависит от времени.

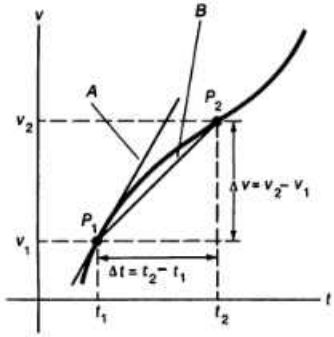



Рис. 2.6. Зависимость скорости $v$ от времени $t$. Среднее ускорение в промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно тангенсу угла наклона прямой $P_1P_2$: $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$. Мгновенное ускорение в момент времени $t_1$ равно тангенсу угла наклона касательной к графику зависимости $v$ от $t$ в этот момент. $A$ – тангенс угла наклона равен мгновенному ускорению в момент $t_1$; $B$ – тангенс угла наклона равен среднему ускорению в промежутке $\Delta t = t_2 - t_1$.

На графике зависимости величины скорости $v$ от времени $t$ (рис. 2.6) величина среднего ускорения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ дается наклоном прямой, соединяющей точки[1] $P_1$ и $P_2$. Мгновенное ускорение в произвольный момент времени (скажем, в момент времени $t_1$) есть тангенс угла наклона касательной к кривой зависимости $v$ от $t$ в этот момент времени; этот наклон также показан на рис. 2.6. Используем этот факт в ситуации, представленной на рис. 2.6; при переходе от $t_1$ к $t_2$ скорость непрерывно увеличивается, однако ускорение (быстрота изменения скорости) уменьшается, поскольку уменьшается наклон кривой.

Если скорость тела постоянна, то его ускорение равно нулю, так как $\Delta v = 0$. При этом зависимость $x$ от $t$ является прямой линией, тангенс угла наклона которой численно равен скорости тела. График зависимости $v$ от $t$ в этом случае представляет собой также прямую, но с нулевым наклоном, т. е. прямая параллельна оси $t$ (рис. 2.7).

В некоторых случаях ускорение движущейся в одном измерении частицы, вычисленное по формуле (2.3) или (2.4), имеет отрицательный знак. Это может произойти по двум причинам. Во-первых, частица может двигаться вправо по оси $x$ ($x$ увеличивается) с уменьшающейся скоростью (тормозиться). Например, в некоторый момент времени частица имела скорость 10 м/с, а через 2 с ее скорость стала равна 4,0 м/с; следовательно, ее среднее ускорение было $(4\ \text{м/с} - 10\ \text{м/с})/(2\ \text{с}) = -3\ \text{м/с}^2$. Во-вторых, частица будет иметь отрицательное ускорение, если она движется вдоль оси $x$ влево ($x$ уменьшается) с возрастающей скоростью. В этом случае перемещение $\Delta x$ (или бесконечно малое $dx$) будет отрицательным, так как $x$ уменьшается ($x_2 < x_1$) и $\Delta x = x_2 - x_1 < 0$. Таким образом, скорость [выражение (2.1) или (2.2)] должна быть

[1] Сравните это с графиком зависимости координаты от времени на рис. 2.4, на котором наклон дает величину средней скорости.

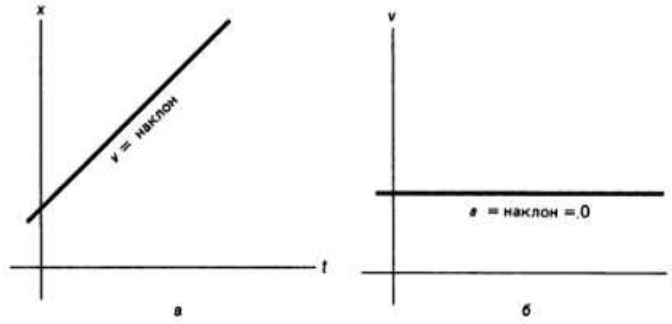



Рис. 2.7. Постоянная скорость. *а* – зависимость $x$ от $t$; *б* – зависимость $v$ от $t$.

отрицательной. Например, если в данный момент времени частица имеет скорость $v_1 = -6$ м/с, а через 2 с мы имеем $v_2 = -14$ м/с (движется быстрее), то $\bar{a} = (-14 \text{ м/с} + 6 \text{ м/с})/(2 \text{ с}) = -4 \text{ м/с}^2$.

Заметим, что, хотя скорость, определяемая по перемещению, может быть как положительной, так и отрицательной, скорость, определяемая по расстоянию или пути, никогда не бывает отрицательной.

Подобно скорости, ускорение также является мерой быстроты изменения. Скорость тела – это быстрота изменения его перемещения во времени; ускорение же представляет собой быстроту изменения скорости тела во времени. В известном смысле ускорение – это «скорость изменения скорости». Поскольку $a = dv/dt$ и $v = dx/dt$, ускорение можно записать следующим образом:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Здесь величину $d^2x/dt^2$ называют *второй производной* координаты по времени; сначала берется первая производная от $x$ по времени ($dx/dt$), а затем, чтобы получить ускорение, она берется еще раз: $(d/dt)(dx/dt)$.

## 2.7. Равноускоренное движение

Во многих практически важных случаях ускорение постоянно. Существует также большое число случаев, когда изменение ускорения достаточно мало, и ускорение можно фактически считать постоянным. Рассмотрим теперь такой случай **равноускоренного движения**, когда величина ускорения постоянна, а движение происходит по прямой линии. При этом мгновенное и среднее ускорения равны между собой.

Чтобы упростить запись, будем всегда считать начальный момент времени равным нулю: $t_1 = 0$. Тогда время, прошедшее с момента начала движения, равно $t_2 = t$. Обозначим начальную координату $x_1$ и начальную

скорость $v_1$ тела через $x_0$ и $v_0$ соответственно, а координату и скорость в момент времени $t$ через $x$ и $v$ (вместо $x_2$ и $v_2$). Средняя скорость за время $t$ дается выражением [см. (2.1)]

$$\bar{v} = (x - x_0)/t,$$

а ускорение (которое предполагается неизменным во времени), согласно (2.3), запишется в виде

$$a = (v - v_0)/t.$$

Обычно задача состоит в том, чтобы при данном ускорении найти скорость движения тела по прошествии некоторого времени. Такие задачи можно решать, используя последнее выражение для нахождения $v$:

$$v = v_0 + at \quad \text{[постоянное ускорение]}. \tag{2.5}$$

Например, может быть известно, что ускорение какого-то мотоцикла равно 4,0 м/с$^2$, и нужно узнать, с какой скоростью он будет двигаться, например, через 6,0 с. Предположим, что движение мотоцикла начинается из состояния покоя ($v_0 = 0$); через 6,0 с его скорость будет равна $v = at = (4{,}0\ \text{м/с}^2)(6{,}0\ \text{с}) = 24\ \text{м/с}$.

Вычислим теперь координату тела по прошествии времени $t$, если оно движется с постоянным ускорением. Из определения средней скорости [выражение (2.1)] $\bar{v} = (x - x_0)/t$ имеем

$$x = x_0 + \bar{v}t.$$

Поскольку скорость увеличивается равномерно, средняя скорость $\bar{v}$ будет расположена посередине между начальным и конечным значениями скорости:

$$\bar{v} = (v + v_0)/2 \quad \text{[постоянное ускорение]}. \tag{2.6}$$

Заметим, что при непостоянном ускорении такое соотношение выполняется не всегда. Объединяя последние три выражения, находим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{v}t = \\ &= x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t = \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + at + v_0}{2}\right)t, \end{aligned}$$

или

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2 \quad \text{[постоянное ускорение]}. \tag{2.7}$$

Выражения (2.5)–(2.7) представляют собой три уравнения из четырех наиболее часто используемых уравнений равноускоренного движения. Выведем теперь четвертое уравнение, которое полезно в случаях, когда известны, например, ускорение, координата и начальная скорость, а требуется найти конечную скорость, причем время $t$ неизвестно. Чтобы выразить скорость $v$ в момент времени $t$

через $v_0$, $a$, $x$ и $x_0$, запишем, как и выше, уравнение

$$x = x_0 + \bar{v}t = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t.$$

где мы использовали выражение (2.6). Затем, выражая время $t$ из (2.5), находим $t = (v - v_0)/a$. Подставляя время $t$ в предыдущее уравнение, имеем

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

Решим это уравнение относительно $v^2$ и получим искомое выражение:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \text{[постоянное ускорение]}. \tag{2.8}$$

Теперь у нас есть четыре уравнения, связывающие различные величины, существенные для рассмотрения равноускоренного движения (т. е. при постоянном $a$). С целью дальнейшего использования запишем их вместе:

$$v = v_0 + at \qquad (a = \text{const}), \tag{2.9а}$$

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2 \qquad (a = \text{const}), \tag{2.9б}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (a = \text{const}), \tag{2.9в}$$

$$\bar{v} = (v + v_0)/2 \qquad (a = \text{const}). \tag{2.9г}$$

Эти уравнения неприменимы в случае, когда ускорение непостоянно. Во многих случаях с целью упрощения выражений можно положить $x_0 = 0$. В следующих ниже примерах мы предполагаем, что $x_0 = 0$, если не утверждается обратное.

**Пример 2.6.** Пусть проектируется аэропорт для небольших самолетов. Один тип самолета, которому предстоит пользоваться взлетной полосой аэропорта, перед отрывом от земли должен достичь скорости 200 км/ч (55,6 м/с), причем с ускорением 12,0 м/с$^2$. Если длина взлетной полосы 100 м, то сможет ли такой самолет достичь скорости, необходимой для взлета?

**Решение.** Подставим в уравнение (2.9в) значения $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $x = 100$ м и $a = 12{,}0$ м/с$^2$. Таким образом,

$$v^2 = 0 + 2(12{,}0 \text{ м/с}^2)(100 \text{ м}) = 2400 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$v = \sqrt{2400 \text{ м}^2/\text{с}^2} = 49{,}0 \text{ м/с}.$$

Очевидно, взлетная полоса такой длины *недостаточна*. Решая (2.9в) относительно $x - x_0$, можно определить, какой длины взлетная полоса необходима этому самолету.

Одна из трудностей задач кинематики (равно как и других задач) состоит в выборе соответствующего уравнения для решения. Для уверенности, возможно, лучше всего провести следующую процедуру: 1) записать то, что *уже «известно»* (или «дано»), а затем то, что *необходимо* узнать; 2) найти подходящее[1)] уравнение, которое вклю-

[1)] Например, если ускорение переменное, вы не сможете воспользоваться уравнениями (2.9).– *Прим. ред.*

чает в себя только известные величины и одну искомую неизвестную, но не содержит других неизвестных; 3) если в какое-то уравнение входит искомое неизвестное [например, нужно найти $a$ из уравнения (2.9в)], то необходимо решить это уравнение относительно искомого неизвестного. В некоторых случаях может потребоваться несколько уравнений. При решении задач важно следить за единицами измерения. Заметьте, что знак равенства предполагает совпадение единиц по обе стороны от него (точно так же, как и числовых значений). Тщательно следя за единицами и размерностями, вы избежите многих ошибок в расчетах.

**Пример 2.7.** Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы проехать 30 м, если он начинает движение из состояния покоя и движется с ускорением 2,0 м/с$^2$?

**Решение.** Сначала составим таблицу:

| **Дано** | **Найти** |
|---|---|
| $x_0 = 0$ | $t$ |
| $x = 30$ м | |
| $a = 2{,}0$ м/с$^2$ | |
| $v_0 = 0$ | |

Поскольку ускорение $a$ постоянно, можно использовать уравнения (2.9а)–(2.9в). Уравнение (2.9а) в данном случае бесполезно, так как кроме искомой неизвестной величины $t$ оно содержит неизвестную скорость $v$. Уравнение (2.9в) еще хуже: в него входит $v$, но не входит $t$. Уравнение (2.9б) подходит, поскольку единственная неизвестная величина в нем это $t$. Прежде чем решить это уравнение относительно $t$, упростим его, положив $v_0 = 0$. Таким образом,

$$x = (1/2)\,at^2,$$

$$t^2 = \frac{2x}{a} = \frac{2(30\text{ м})}{2{,}0\text{ м/с}^2} = 30\text{ с}^2,$$

$$t = \sqrt{30\text{ с}^2} = 5{,}5\text{ с}.$$

**Пример 2.8.** Рассмотрим тормозной путь автомобиля, знать который важно не только для безопасности движения, но и в целях рациональной организации движения. Эту задачу проще всего решать в два этапа: 1) сначала нужно найти время между принятием решения «включить тормоза» и их действительным включением («время реакции»); считается, что в течение этого времени $a = 0$; 2) затем необходимо определить действительное время торможения, когда автомобиль замедляется ($a \neq 0$). Тормозной путь зависит от времени реакции водителя, начальной скорости автомобиля (конечная скорость равна нулю) и от степени замедления автомобиля. На сухой дороге хорошие тормоза могут обеспечить ускорение торможения около 5–8 м/с$^2$. Выполним расчет для начальной скорости 100 км/ч (28 м/с) и предположим, что автомобиль замедляется с ускорением $-6{,}0$ м/с$^2$. Время реакции водителей обычно составляет около 0,3–1,0 с; положим его равным 0,50 с.

**Решение.** Для первой части задачи существенно, что автомобиль движется с постоянной скоростью 28 м/с в течение времени, необходимого для реакции водителя (0,50 с). Таким образом, составим таблицу:

| **Дано** | **Найти** |
|---|---|
| $t = 0{,}50$ с | $x$ |
| $v_0 = 28$ м/с | |
| $v = 28$ м/с | |
| $a = 0$ | |
| $x_0 = 0$ | |

Чтобы найти $x$, воспользуемся уравнением (2.9б) [заметим, что (2.9в) не подходит, так как $x$ умножается на $a$, которое равно нулю]:

$$x = v_0 t + 0 = (28\text{ м/с})\,(0{,}50\text{ с}) = 14\text{ м}.$$

Теперь для второй части пути (когда тор-

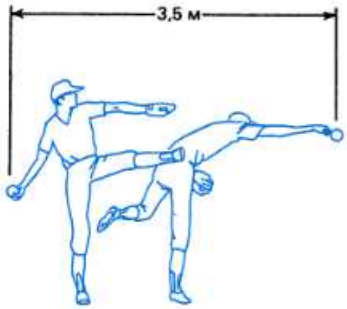



Рис. 2.8. Игрок в бейсбол ускоряет мяч на протяжении около 3,5 м.

моза включены и автомобиль останавливается):

| Дано | Найти |
|---|---|
| $v_0 = 28$ м/с | $x$ |
| $v = 0$ | |
| $a = -6{,}0$ м/с$^2$ | |

Уравнение (2.9а) не содержит $x$; в уравнение (2.9б) входит $x$, но также и неизвестное $t$. Более всего подходит нам уравнение (2.9в); решим его относительно $x$ (положив $x_0 = 0$):

$$v^2 - v_0^2 = 2ax,$$

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} =$$

$$= \frac{0 - (28\ \text{м/с})^2}{2(-6{,}0\ \text{м/с}^2)} = \frac{-784\ \text{м}^2/\text{с}^2}{-12\ \text{м/с}^2} =$$

$$= 65\ \text{м}.$$

За время реакции водителя автомобиль пройдет расстояние 14 м; и, прежде чем остановиться, он пройдет еще 65 м. Следовательно, полное расстояние равно 79 м. На мокрой дороге и при гололеде величина $a$ может составлять лишь треть величины $a$ на сухой дороге, поскольку при этом нельзя резко включать тормоза, не рискуя вызвать «занос» автомобиля; следовательно, тормозной путь значительно увеличится. Заметим также, что тормозной путь зависит от скорости не линейно, а растет пропорционально *квадрату* скорости!

**Пример 2.9.** Игрок в бейсбол бросает мяч со скоростью 30,0 м/с. Вычислите приближенно среднее ускорение мяча в ходе броска. Замечено, что при броске мяч ускоряется на общем расстоянии около 3,50 м, когда игрок проводит мяч из-за спины до точки, в которой мяч освобождается (рис. 2.8).

**Решение.** Требуется найти ускорение $a$ при условии, что $x = 3{,}50$ м, $v_0 = 0$, а $v = 30{,}0$ м/с. Из уравнения (2.9в) найдем $a$:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} =$$

$$= \frac{(30{,}0\ \text{м/с})^2 - (0\ \text{м/с})^2}{2(3{,}50\ \text{м})} = \frac{900\ \text{м}^2/\text{с}^2}{7{,}00\ \text{м}} =$$

$$= 129\ \text{м/с}^2.$$

Очевидно, ускорение очень велико!

## 2.8. Падающие тела

Одним из наиболее распространенных примеров равноускоренного движения является движение тела, свободно падающего по вертикали на землю. Тот факт, что падающее тело ускоряется, может и не быть на первый взгляд очевидным. Может показаться (и в этом многие были убеждены вплоть до эпохи Галилея), что более тяжелые тела падают быстрее, чем легкие, а скорость падения пропорциональна тяжести тела.

Галилей применил свой новый научный метод абстрагирования и упрощения, который состоит в попытке представить себе, что произойдет в идеализированных



Рис. 2.9. *а* – мяч и листок бумаги брошены одновременно; *б* – тот же опыт, но бумага скомкана.

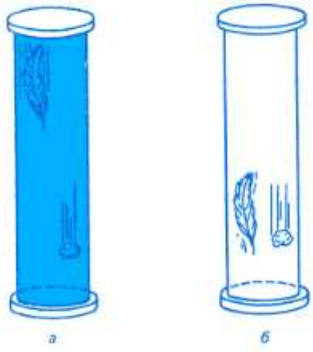


Рис. 2.10. Камень и перо брошены одновременно в воздухе (*а*) и в вакууме (*б*).

(упрощенных) ситуациях. Для случая свободного падения Галилей постулировал, что при отсутствии воздуха или другой среды с сопротивлением все тела будут падать с *одинаковым постоянным ускорением*. Он показал, что, согласно этому постулату, расстояние, проходимое телом, падающим из состояния покоя, пропорционально квадрату времени ($D \sim t^2$). Это можно видеть из уравнения (2.9б), однако впервые такую зависимость получил Галилей. Действительно, один из величайших вкладов Галилея в науку состоит в том, что он установил важные математические соотношения и показал их большое значение. Другой великий вклад Галилея в том, что он предложил теорию, имеющую конкретные экспериментальные следствия, которые можно проверить количественно ($D \sim t^2$).

В поддержку своего утверждения о том, что скорость падающих тел увеличивается при падении, Галилей привел следующий аргумент: тяжелый камень, сброшенный с высоты 2 м, загонит сваю в землю значительно глубже, чем тот же камень, упавший лишь с 10 см. Ясно, что в первом случае камень должен ускориться больше. Как мы упомянули выше, Галилей утверждал, что *любые* предметы (как тяжелые, так и легкие) падают с *одинаковым* ускорением, по крайней мере при отсутствии воздуха. Правда, здравый смысл может подсказать, что древние были ближе к истине. Действительно, если вы держите лист бумаги горизонтально в одной руке, а более тяжелое тело, скажем бейсбольный мяч, в другой и высвобождаете их одновременно (рис. 2.9, *а*), то очевидно, что более тяжелое тело достигнет земли первым. Повторите этот эксперимент, но на этот раз сомните бумагу в маленький комок (рис. 2.9, *б*). Вы увидите, что оба тела достигнут пола почти одновременно.

Галилей был уверен, что воздух действует на очень легкие тела с большой площадью поверхности как особый вид трения. В камере, из которой удален воздух, даже легкие тела, такие, как перо или удерживаемый горизонтально лист бумаги, будут падать с тем же ускорением, что и тяжелые тела (рис. 2.10). Во времена Галилея подобная демонстрация в вакууме была, разумеется, невозможна, что делает его заслуги еще более выдающимися. Галилея часто называют «отцом современной науки» не только за содержание его научных достижений (открытий в астрономии, понятия инерции, свободного падения), но также за его стиль и подход к науке (идеализация и упрощение, математическое выражение теории, предсказание экспериментально проверяемых следствий).

Вклад Галилея в наше понимание движения падающих тел можно обобщить следующим образом. *В данном месте на Земле и в отсутствие сопротивления воздуха все тела падают с одним и тем же постоянным ускорением.* Это ускорение, обусловленное силой тяжести, называется

**ускорением свободного падения** и обозначается символом $g$. Его значение приближенно равно

$g = 9{,}80$ м/с$^2$.

В действительности $g$ несколько меняется в зависимости от географической широты местности (что связано с вращением Земли), а также в зависимости от высоты над уровнем моря (табл. 2.1). Однако эти изменения столь

*Таблица 2.1.* Ускорение свободного падения в различных пунктах земного шара

| Пункт | Высота над уровнем моря, м | $g$, м/с$^2$ |
|---|---|---|
| Нью-Йорк | 0 | 9,803 |
| Сан-Франциско | 105 | 9,800 |
| Денвер | 1620 | 9,796 |
| Пайкс-Пик | 4230 | 9,789 |
| Экватор | 0 | 9,780 |
| Северный полюс (расчетное) | 0 | 9,832 |

малы, что в большинстве случаев мы будем ими пренебрегать. Во многих случаях сопротивление воздуха оказывает незначительное влияние, и большей частью мы также будем им пренебрегать. Однако, если расстояние, проходимое падающим телом, очень велико[1], сопротивление воздуха будет оказывать заметное влияние даже на тяжелые предметы.

Имея дело со свободно падающими телами, можно пользоваться уравнениями (2.9), в которых вместо $a$ нужно подставить величину $g$ с указанным выше числовым значением. Кроме того, поскольку тело движется по вертикали, вместо $x$ нужно подставить $y$, а $x_0$ заменить на $y_0$ ($y_0 = 0$, если не оговорено другое значение). Направление $y$ можно выбрать произвольным образом, т. е. считать его положительным при направлении вверх или вниз, но это соглашение необходимо сохранять неизменным при решении задачи.

**Пример 2.10.** Предположим, что с башни высотой 70,0 м бросают мяч. На какое расстояние он упадет за 1,00, 2,00 и 3,00 с? Пусть при этом ось $y$ направлена вниз.

**Решение.** В данном случае нужно выбрать уравнение (2.9б), положив в нем $v_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Таким образом, через 1,00 с

[1] Скорость тела, падающего в воздухе или другой среде, не увеличивается беспредельно: если тело при падении проходит достаточно большое расстояние, то на некотором расстоянии его скорость станет максимальной; такая скорость называется *установившейся скоростью*. Максимальная скорость достигается в том случае, когда сила сопротивления воздуха (которая увеличивается со скоростью) уравновешивает силу тяжести.




Рис. 2.11. Скорость тела, падающего с башни, постепенно нарастает, и за каждую последующую секунду тело проходит все большее расстояние.




Рис. 2.12. Тело, брошенное вверх в воздух, отрывается от руки бросающего в точке $A$, достигает максимальной высоты в точке $B$ и возвращается на исходную высоту в точке $C$. (См. пример 2.11.)

$y = (1/2)\,at^2 = (1/2)\,(9{,}80\ \text{м/с}^2)\,(1{,}00\ \text{с}^2) = 4{,}90\ \text{м}$.

Аналогично через 2,00 с имеем $y = 19{,}6$ м, а через 3,00 с $y = 44{,}1$ м (рис. 2.11).

**Пример 2.11.** Мяч бросают вверх в воздух с начальной скоростью 15,0 м/с. а) Сколь высоко взлетит мяч? б) Сколько времени мяч пробудет в воздухе, прежде чем возвратится обратно к бросившему его человеку? Мы не будем здесь рассматривать то, как происходило бросание мяча, а проанализируем его движение только после того, как он освободился из руки бросающего (рис. 2.12).

**Решение.** Выберем положительное направление оси $y$ вверх, а отрицательное вниз. (Заметим, что это условие отличается от использованного в предыдущем примере.) При этом ускорение будет иметь отрицательный знак (поскольку оно изменяет скорость в направлении вниз): $a = -g = -9{,}80\ \text{м/с}^2$.

а) Чтобы определить максимальную высоту, вычислим положение мяча, когда скорость его равна нулю ($v = 0$ в наивысшей точке). При $t = 0$ имеем $y_0 = 0$, $v_0 = 15{,}0$ м/с. В момент времени $t$ (когда достигается *максимальная высота*) $v = 0$, $a = -9{,}80\ \text{м/с}^2$ и нужно найти $y$. Используя уравнение (2.9в) (заменяя $x$ на $y$), решим его относительно $y$:

$$v^2 = v_0^2 + 2ay,$$

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (15{,}0\ \text{м/с})^2}{2(-9{,}80\ \text{м/с}^2)} = 11{,}5\ \text{м}.$$

б) Вторую часть примера можно рассмотреть в два этапа: сначала вычислим время, которое потребуется мячу для достижения наивысшей точки, а затем вычислим время, за которое мяч упадет вниз. Однако проще рассмотреть движение от $A$ до $B$ и затем до $C$ (рис. 2.12) в один этап и воспользоваться уравнением (2.9б); это можно сделать, поскольку $y$ (или $x$) представляет собой не полное пройденное расстояние, а положение или перемещение. Таким образом, $y = 0$ как в $A$, так и в $C$. Полагая в уравнении (2.9б) $a = -9{,}80\ \text{м/с}^2$, находим

$$y = v_0 t + (1/2)\,at^2,$$

$$0 = (15{,}0\ \text{м/с})\,t + (1/2)\,(-9{,}80\ \text{м/с}^2)\,t^2.$$

Мы имеем два решения[1]:

$$t = 0 \quad \text{и} \quad t = 2(15{,}0\ \text{м/с})/(9{,}80\ \text{м/с}^2) = 3{,}06\ \text{с}.$$

[1] Решения любого квадратного уравнения, например относительно неизвестной величины $t$, а именно $at^2 + bt + c = 0$, где $a$, $b$ и $c$ – постоянные, записываются в виде

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ускорение тел, в частности ракет и скоростных самолетов, нередко записывают как кратное величины $g = 9{,}80$ м/с$^2$. Например, ускорение пикирующего самолета, испытывающего перегрузку $3{,}00g$, равно $(3{,}00)\,(9{,}80$ м/с$^2) = 29{,}4$ м/с$^2$.

## *2.9. Переменное ускорение – графическое исследование и использование математического анализа

Этот раздел является факультативным. Предполагается, что читатель знаком с производными и простым интегрированием. Если в курсе математического анализа вы еще не познакомились с этим материалом, то можете отложить изучение данного раздела до той поры, когда вы изучите математический анализ.

В разд. 2.5 мы видели, что если положение тела в зависимости от времени известно, то скорость в любой момент времени можно определить, измерив наклон кривой зависимости $x$ от $t$ в данный момент времени. Иными словами, можно взять производную от $x$ по $t$, поскольку $v = dx/dt$. Например, как уже отмечалось в примере 2.3, если $x$ можно записать в виде полинома относительно $t$, то можно использовать формулу

$$\frac{d}{dt}(Ct^n) = nCt^{n-1}.$$

Если, например, $x = At^3 + Bt$, где $A$ и $B$ – постоянные, то $v = dx/dt = 3At^2 + B$. Если мы зададим числовые значения $A$ и $B$, то из этого уравнения сможем получить значение $v$ в любой момент времени $t$.

В разд. 2.6 мы показали, что, если известна скорость как функция времени, можно определить ускорение в любой момент времени; это можно сделать, воспользовавшись тем, что ускорение численно равно наклону кривой зависимости $v$ от $t$; тот же результат можно получить, если взять производную от $v$ по $t$: $a = dv/dt$. В примере, приведенном выше,

$v = 3At^2 + B$, $a = dv/dt = 6At$.

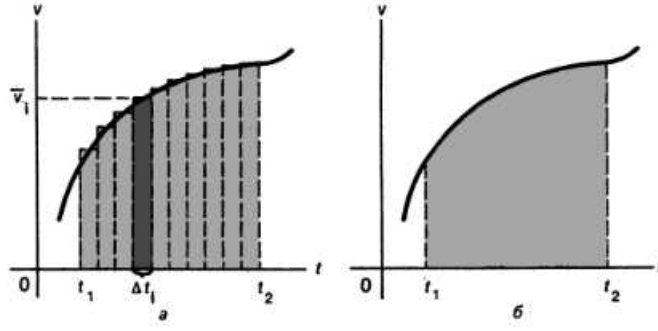



Рис. 2.13. Зависимость скорости $v$ частицы от времени $t$. $а$ – ось времени разбита на промежутки шириной $\Delta t_i$; средняя скорость на каждом промежутке $\Delta t_i$ равна $\bar{v}_i$, а площадь всех прямоугольников $\sum \bar{v}_i \Delta t_i$ численно равна полному перемещению $x_2 - x_1$ за полное время $t_2 - t_1$; $б$ – $\Delta t_i \to 0$ и площадь под кривой равна $x_2 - x_1$.

Возможна также и обратная операция. Если задать ускорение $a$ как функцию времени, то можно найти $v$ как функцию времени; в свою очередь, зная зависимость скорости $v$ от времени $t$, можно получить перемещение $x$. Чтобы понять, как это делается, предположим, что скорость $v(t)$ как функция времени ведет себя так, как показано на рис. 2.13, *а*, и рассмотрим указанный на рисунке интервал времени от $t_1$ до $t_2$. Сначала разобъем ось времени на множество небольших интервалов $\Delta t_1$, $\Delta t_2$, $\Delta t_3$, ...; на рисунке их границы указаны штриховыми вертикальными линиями. Для каждого из этих интервалов горизонтальная штриховая линия будет указывать среднюю скорость за данный временной интервал. Перемещение за каждый такой интервал времени дается величиной $\Delta x_i$, где индекс $i$ соответствует номеру конкретного интервала времени ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Согласно определению средней скорости (2.1), имеем

$$\Delta x_i = \bar{v}_i \Delta t_i .$$

Таким образом, перемещение за каждый малый интервал времени равно произведению $\Delta v_i$ на $\Delta t_i$, т.е. площади прямоугольника, отмеченного для одного из интервалов на рис. 2.13, *а* темно-серым цветом. Общее перемещение за время от $t_1$ до $t_2$ равно сумме перемещений по всем рассмотренным интервалам времени:

$$x_2 - x_1 = \sum_{t_1}^{t_2} \bar{v}_i \, \Delta t_i \qquad (2.10а)$$

(где $x_1$ – координата в момент времени $t_1$, а $x_2$ – координата в момент $t_2$); эта величина в точности равна общей площади всех прямоугольников, показанных на рисунке.

Пользуясь только графиком, иногда трудно точно оценить $\bar{v}_i$ для каждого малого интервала времени. Более высокую точность при расчете $x_2 - x_1$ можно получить, разбивая интервал $t_2 - t_1$ на большее число более мелких интервалов. В конечном счете мы можем положить $\Delta t_i$ равным нулю, т.е. (в принципе) у нас будет бесконечное число интервалов $\Delta t$. В этом пределе площадь всех таких бесконечно тонких прямоугольников станет в точности равна площади под кривой (рис. 2.13, *б*). Таким образом, мы получили важный результат, состоящий в том, что *полное перемещение за время между любыми двумя моментами времени равно площади, заключенной между кривой скорости и осью t в интервале от* $t_1$ до $t_2$. Этот предел можно записать в виде

$$x_2 - x_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} \bar{v}_i \, \Delta t_i ,$$

или

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt . \qquad (2.10б)$$

Мы положили $\Delta t \to 0$ и обозначили этот интервал через $dt$, указав, что теперь он бесконечно мал. Средняя скорость $\bar{v}$ за бесконечно малое время $dt$, разумеется, совпадает с мгновенной скоростью в данный момент времени (мы записываем ее в виде $v(t)$, чтобы напомнить, что $v$ – это функция времени $t$). Символ $\int$ представляет собой удлиненную латинскую букву S и обозначает сумму по бесконечному числу бесконечно малых интервалов времени. В этом случае говорят, что берется *интеграл* от $v(t)$ по $dt$ за время от $t_1$ до $t_2$, а это равно площади, заключенной между кривой $v(t)$ и осью $t$ в интервале времени от $t_1$ до $t_2$ (рис. 2.13, *б*). Интеграл в (2.10б) называется *определенным интегралом*, поскольку в нем указаны пределы интегрирования ($t_1$ и $t_2$). Из графика следует, что интеграл численно равен площади под кривой, причем эту площадь численно можно оценить с достаточной степенью точности, взяв небольшие, но конечные промежутки $\Delta t_i$ и просуммировав соответствующие им площади с помощью калькулятора или компьютера. Во многих случаях, пользуясь методами математического анализа, интегралы можно вычислять точно.

Если известна скорость как функция времени, то, пользуясь выражением (2.10б) и беря интеграл, можно получить полное перемещение. Аналогично, зная ускорение как функцию времени, с помощью интегрирования можно вычислить скорость. Чтобы показать это, вспомним определение среднего ускорения [выражение (2.3)]. Найдем из этого выражения $\Delta v$:

$$\Delta v = \bar{a}\,\Delta t\,.$$

Таким образом, если величина $a$ задана как функция времени $t$ на интервале $t_1 - t_2$, то этот интервал можно разбить на множество более мелких $\Delta t_i$ (так же, как на рис. 2.13,*а*). Изменение скорости за каждый интервал $\Delta t_i$ равно $\Delta v_i = \bar{a}_i\,\Delta t_i$, где индекс $i$ относится к произвольному интервалу $\Delta t$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Полное изменение скорости за время $t_1 - t_2$ равно

$$v_2 - v_1 = \sum_{t_1}^{t_2} \bar{a}_i\,\Delta t_i\,, \qquad (2.11а)$$

где $v_2$ – скорость в момент времени $t_2$, а $v_1$ – скорость при $t_1$. Выражение (2.11а) можно записать в виде интеграла, положив $\Delta t \to 0$:

$$v_2 - v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} \bar{a}_i\,\Delta t_i\,,$$

или

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt\,. \qquad (2.11б)$$

Выражение (2.11б) позволяет нам определять скорость $v_2$

в некоторый момент времени $t_2$, если известна скорость в момент времени $t_1$, а ускорение $a$ задано как функция времени.

Интегрирование представляет собой процесс, обратный взятию производной. Вычисление интегралов в конкретных случаях описывается в учебниках по математическому анализу, и здесь мы можем рассмотреть это лишь кратко. Интеграл можно всегда рассчитать численно с некоторой наперед заданной точностью (разд. 2.10). Некоторые функции с помощью математического анализа могут быть проинтегрированы аналитически; результаты расчетов некоторых интегралов приведены в приложении Б. Нетрудно найти аналитический вид интегралов от полиномов, поскольку известно, что

$$\frac{d}{dt}(Ct^n) = nCt^{n-1}.$$

Умножив обе части этого выражения на $dt$, получим следующее равенство:

$$nCt^{n-1}dt = d(Ct^n),$$

интегрирование обеих частей которого дает

$$\int nCt^{n-1}dt = \int d(Ct^n) = Ct^n.$$

Последний этап вычисления основан на том, что интегрирование обратно действию взятия производной. Последнюю формулу можно записать в более удобном виде, поделив обе части на $n$ и положив $n - 1 = m$:

$$\int Ct^m dt = \frac{1}{m+1} Ct^{m+1}.$$

**Пример 2.12.** Тело начинает двигаться из состояния покоя ($v_1 = 0$) в момент времени $t_1 = 0$ и движется затем с ускорением $a(t) = (7{,}00\ \text{м/с}^3)\,t$. Чему будут равны а) скорость и б) перемещение тела через 2,00 с?

**Решение.** а) Сначала определим $v$ как функцию времени $t$. Полагая в (2.11б) $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $v_1 = 0$, $v_2 = v(t)$, получаем[1)]

$$v(t) = \int_0^t (7{,}00\ \text{м/с}^3)\,t\,dt = (7{,}00\ \text{м/с}^3)\frac{t^2}{2}\Big|_0^t =$$

$$= (7{,}00\ \text{м/с}^3)\left(\frac{t^2}{2} - 0\right) = (3{,}50\ \text{м/с}^3)\,t^2.$$

При $t = 2{,}00$ с имеем $v = (3{,}50\ \text{м/с}^3) \times (2{,}00\ \text{с})^2 = 14{,}0$ м/с.

б) Чтобы получить перемещение, воспользуемся выражением (2.10б) при $v_1 = 0$, $v_2 = 14{,}0$ м/с, $t_1 = 0$, $t_2 = 2{,}00$ с и положим $x_1 = 0$:

$$x_2 = \int_0^{2{,}00\ \text{с}} (3{,}50\ \text{м/с}^3)\,t^2 dt =$$

$$= (3{,}50\ \text{м/с}^3)\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2{,}00\ \text{с}} = 9{,}33\ \text{м}.$$

Таким образом, при $t = 2{,}00$ с получаем $v = 140$ м/с, а $x = 9{,}33$ м.

---

[1)] В первой строке этого выражения символ $|_0^t$ означает, что предшествующее ему выражение вычисляется на верхнем пределе, а затем из него вычитается значение на нижнем пределе интегрирования (при $t = 0$).

**Пример 2.13.** Используя уравнения (2.10б) и (2.11б), выведите кинематические соотношения (2.9а)–(2.9в) для постоянного ускорения.

**Решение.** Используем те же обозначения, что и в разд. 2.7: $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $v_1 = v_0$, $v_2 = v$. Тогда, учитывая, что $a = \text{const}$, из (2.11б) получаем

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt = v_0 + at.$$

Это совпадает с (2.9а). Воспользуемся затем уравнением (2.10б):

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)\,dt = \\ = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2.$$

Это есть не что иное, как уравнение (2.9б). Чтобы получить (2.9в), применим следующее правило замены переменной при дифференцировании:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt};$$

поскольку $dx/dt = v$, мы имеем $a = v(dv/dx)$. Тогда из последнего соотношения находим

$$v\,dv = a\,dx,$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx, \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x - x_0),$$

или $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, что совпадает с выражением (2.9в).

## *2.10. Переменное ускорение; численное интегрирование

В этом факультативном разделе мы проиллюстрируем метод численного интегрирования. Рассмотрим сначала пример, когда интеграл можно вычислить также аналитически, что позволит сравнить результаты численного и аналитического вычисления интегралов.

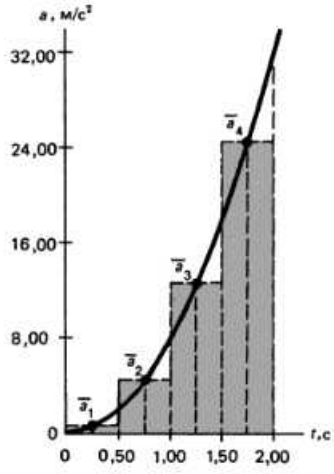



Рис. 2.14. Пример 2.14.

**Пример 2.14.** Тело начинает движение из состояния покоя и движется с ускорением $a(t) = (8{,}00\ \text{м/с}^4)\,t^2$. Найдите его скорость через 2,00 с с помощью численных методов.

**Решение.** Сначала разобъем временной интервал 0,00–2,00 с на четыре более мелких интервала $\Delta t_i = 0{,}50$ с (рис. 2.14). Положим в выражении (2.11а) $v_2 = v$, $v_1 = 0$, $t_2 = 2{,}00$ с и $t_1 = 0$. На каждом интервале $\Delta t_i$ необходимо оценить $\bar{a}_i$, что можно сделать различными способами. Мы воспользуемся простым методом выбора $\bar{a}_i$, приравняв его к ускорению $a(t)$ в средней точке каждого интервала $\Delta t_i$ (еще более простой, но, как правило, менее точный способ состоит в использовании значения $a$ в начальной точке интервала $\Delta t_i$). Таким образом, мы вычисляем $a(t) = (8{,}00\ \text{м/с}^4)\,t^2$ при $t = 0{,}25$ (т. е. посередине между 0,00 и 0,50 с), 0,75, 1,25 и 1,75 с. При этом мы получим следующие результаты:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{a}_i$, м/с² | 0,50 | 4,50 | 12,50 | 24,50 |

Используя (2.11а) и замечая, что все $\Delta t_i$ равны 0,50 с (поэтому $\Delta t_i$ можно вынести за знак суммы в качестве общего мно-

жителя), получаем

$$v(t = 2{,}00\text{ с}) = \sum_{t=0}^{t=2{,}00\text{ с}} \bar{a}_i \Delta t_i =$$

$$= (0{,}50\text{ м/с}^2 + 4{,}50\text{ м/с}^2 +$$

$$+ 12{,}50\text{ м/с}^2 + 24{,}50\text{ м/с}^2)(0{,}50\text{ с}) =$$

$$= 21{,}0\text{ м/с}.$$

Это можно сравнить с результатом аналитического решения, получаемым из выражения (2.11б), поскольку в данном случае функция $a(t)$ интегрируется аналитически:

$$v = \int_0^{2{,}00\text{ с}} (8{,}00\text{ м/с}^4)t^2 dt = \frac{8{,}00\text{ м/с}^4}{3} t^3 \Big|_0^{2{,}00\text{ с}} =$$

$$= \frac{8{,}00\text{ м/с}^4}{3}[(2{,}00\text{ с})^3 - (0)^3] =$$

$$= 21{,}33\text{ м/с},$$

или 21,3 м/с, если правильно учесть число значащих цифр. Полученный аналитический результат, разумеется, точный; очевидно, наша численная оценка не так далека от него, хотя $\Delta t$ мы получили при разбиении общего интервала только на четыре части. Однако в случаях, когда требуется высокая точность, такая близость результатов может оказаться недостаточной. Если увеличить число интервалов $\Delta t$, сделав их более узкими, то мы получим более точный результат. Например, если общий интервал разбить на десять промежутков, каждый с $\Delta t = (2{,}00\text{ с})/10 = 0{,}20\text{ с}$, то, вычисляя $a(t)$ при $t = 0{,}10$ с, 0,30 с, ..., 1,90 с, мы получим следующие значения $\bar{a}_i$:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{a}_i$, м/с$^2$ | 0,08 | 0,72 | 2,00 | 3,92 | 6,48 | 9,68 | 13,52 | 18,0 | 23,12 | 28,88 |

При этом из (2.11а) находим

$$v(t = 2{,}00\text{ с}) = \sum \bar{a}_i \Delta t_i = (\sum \bar{a}_i)(0{,}200\text{ с}) =$$

$$= (106{,}4\text{ м/с}^2)(0{,}200\text{ с}) = 21{,}28\text{ м/с};$$

здесь мы добавили дополнительную значащую цифру, чтобы показать, что этот результат значительно ближе к аналитическому (точному), но все еще не вполне совпадает с ним. Относительная ошибка результата уменьшилась от 1,5% $[(0{,}3\text{ м/с}^2)/(21{,}0\text{ м/с}^2)]$ в случае, когда временной интервал разбивался на четыре промежутка, до 0,2% (0,05/21,0) при десяти промежутках; соответственно относительная точность результата возросла.

Заметим, что аналитическое решение (интегрируемое в явном виде) может дать точный результат, тогда как численное решение (за исключением очень простых случаев) является приближенным.

В приведенном выше примере нам была задана интегрируемая аналитическая функция, что позволило оценить степень точности численного расчета благодаря сравнению с известным точным результатом. (Разумеется, с такой просто интегрируемой функцией нет нужды затруднять себя численным расчетом.) Однако как следует поступить, если функция не интегрируется и нет возможности сравнить численный расчет с аналитическим результатом? Иными словами, каким образом убедиться в том, что мы сделали достаточное число разбиений интервала, так что наша оценка имеет определенную, заранее заданную погрешность, скажем 1%? Поскольку мы не имеем аналитического решения, с которым можно провести сравнение, вместо этого можно сравнить результаты двух последовательных численных расчетов:

первый из них выполнен при разбиении интервала, скажем, на $n$ промежутков, а второй – на удвоенное число промежутков ($2n$). Если оба результата удовлетворяют заданной степени точности (например, 1%), то, как правило, можно считать, что второй результат (с большим числом промежутков) наверняка удовлетворяет заданной степени точности приближения к истинному значению. Если результаты обоих расчетов оказываются недостаточно близкими, то следует выполнить третий расчет с разбиением заданного интервала на еще большее число промежутков (в два раза, а возможно, и в десять раз большее в зависимости от качества предыдущего приближения) и его результат сравнить с предшествующим расчетом. В примере 2.14 разница между результатами расчетов с четырьмя и десятью промежутками около 0,3 м/с$^2$, или 1,5%. Если требуется точность 1%, то мы уже не можем быть уверенными, что второй расчет удовлетворяет этой точности, и должны были бы выполнить третий расчет, возможно, с 20 промежутками.

Такие расчеты оказываются весьма длинными и утомительными, особенно если функция имеет более сложный вид, чем в приведенном выше очень простом примере. И даже в нашем простом примере, если требуется вычислить еще и перемещение $x$ в некоторый момент времени, нам пришлось бы предпринять второе численное интегрирование по $v$, т. е. пришлось бы вычислять $v$ для многих различных моментов времени, а это потребовало бы огромной работы. Поэтому весьма полезно здесь использовать программируемые калькуляторы и компьютеры; для этого составляется программа (часто простая), которая вводится в компьютер, и вычисления повторяют с различными входными переменными с разным числом промежутков до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Численные методы применяются также в том случае, когда вместо аналитического вида функции заданы ее числовые значения. (Например, имеются значения ускорения тела, измеренные в различные моменты времени.) При этом процедура в основном сохраняется той же, что и выше, за исключением случаев, когда все промежутки, на которые разбивается интервал времени, нельзя сделать одинаковыми. Простой способ оценки среднего значения подынтегрального выражения, например $\bar{v}$, для каждого промежутка $\Delta t$ состоит в том, что мы выбираем его равным полусумме значений в начале и в конце промежутка. [Например, для первого промежутка следовало бы принять $\bar{v} = (v_0 + v_1)/2$, где $v_0$ и $v_1$ – значения $v$ в начальных точках соответственно первого и второго промежутков. Можно было бы использовать также значения в начале (или в конце) каждого промежутка, но при этом для получения точного результата нам потребовалось бы большее число промежутков.]

Мы описали простой и прямой метод численного интегрирования. Можно использовать также и более сложные методы (такие, как более точная оценка $\bar{a}_i$ для каждого промежутка, что потребует для получения точного результата еще более узких промежутков). Все эти методы можно найти в соответствующих учебниках.

## Заключение

*Кинематика* описывает движение различных тел, в то время как *динамика* объясняет, почему тела движутся именно таким образом. Движение любого тела должно всегда рассматриваться по отношению к некоторой конкретной *системе отсчета*. Чтобы описать движение тела, которое в данной главе считается одномерным (движение происходит вдоль прямой линии), мы воспользовались понятиями перемещения, скорости и ускорения. *Перемещение* – это изменение положения тела. Скорость представляет собой быстроту изменения перемещения: *средняя скорость* тела за некоторый интервал времени определяется как перемещение $\Delta x$ за интервал времени $\Delta t$: $\bar{v} = \Delta x/\Delta t$; *мгновенная скорость* (скорость в данный момент времени) равна пределу средней скорости в этот момент времени при $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

здесь $dx/dt$ – (в математическом анализе) *производная* от $x$ по $t$. На графике, изображающем зависимость положения тела от времени, мгновенная скорость равна тангенсу угла наклона кривой в данной точке. *Ускорение* – это быстрота изменения скорости: *среднее ускорение* за интервал времени $\Delta t$ определяется как $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$, где $\Delta v$ – изменение скорости в течение интервала времени $\Delta t$; *мгновенное ускорение* определяется как

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Если тело движется по прямой линии с постоянным ускорением (*равноускоренное движение*), то скорость $v$ и положение $x$ связаны с ускорением $a$, временем движения $t$, начальными положением $x_0$ и скоростью $v_0$ следующими уравнениями (2.9):

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2,$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad \bar{v} = (v + v_0)/2.$$

(Эти уравнения полезно запомнить, хотя совсем неплохо было бы уметь выводить их из определений скорости и ускорения.)

Вблизи поверхности Земли как свободно падающие, так и брошенные вертикально вверх или вниз тела движутся с постоянным направленным вниз *ускорением свободного падения*, равным примерно $g = 9{,}80$ м/с$^2$; это

справедливо только в том случае, когда сопротивлением воздуха можно пренебречь.

## Вопросы

1. В каких случаях футбольный мяч удобно рассматривать как частицу, а в каких нет?
2. Какую скорость измеряет спидометр автомобиля – путевую или определяемую по перемещению, или и ту и другую?
3. Допустим, что точный спидометр регистрирует постоянное значение скорости в течение некоторого интервала времени. Можно ли, пользуясь только спидометром, определить среднюю скорость по перемещению за это время? Объясните.
4. Может ли средняя скорость перемещения частицы на каком-то интервале времени быть не равной нулю, если в течение более длительного времени она равна нулю? Объясните.
5. Может ли средняя скорость частицы, определяемая по перемещению, быть равной нулю на данном интервале времени, если в течение более длительного промежутка времени она не была равна нулю? Объясните.
6. Может ли тело иметь переменную скорость по перемещению, если его путевая скорость постоянна? Если может, то приведите примеры.
7. Может ли тело иметь переменную путевую скорость, если его скорость по перемещению постоянна? Если может, то приведите примеры.
8. Если тело движется с постоянной скоростью, то отличается ли его средняя скорость за любой интервал времени от мгновенной скорости?
9. Опишите словами движение, график которого показан на рис. 2.15.
10. Опишите словами движение, график которого приведен на рис. 2.16.
11. Может ли тело иметь скорость, направленную на север, и ускорение, направленное на юг?
12. Может ли тело в один и тот же момент времени иметь равную нулю скорость и не равное нулю ускорение? Приведите пример.
13. Если тело имеет большую путевую скорость, то значит ли это, что у него и большое ускорение? Объясните на примерах.
14. Сравните ускорение мотоцикла, который ускоряется от 80 до 90 км/ч, с ускорением велосипеда, ускоряющегося за тот же промежуток времени из состояния покоя до скорости 10 км/ч.
15. Может ли скорость тела быть отрицательной, если его ускорение положительно? Может ли быть наоборот?
16. Приведите пример движения, когда скорость и ускорение отрицательны.
17. Человек, стоящий на краю утеса, бросает вверх камень со скоростью $v$. Второй камень он бросает вертикально вниз с той же скоростью. Какой камень достигнет подножья утеса с большей скоростью? Сопротивлением воздуха пренебрегите.
18. Ускорение свободного падения на Луне равно примерно одной шестой такого ускорения на Земле. Если тело бросить вертикально вверх на Луне и на Земле с одинаковыми начальными скоростями, то во сколько раз выше взлетит это тело на Луне?
19. Брошенный вертикально вверх мяч вернулся обратно к бросавшему его человеку.

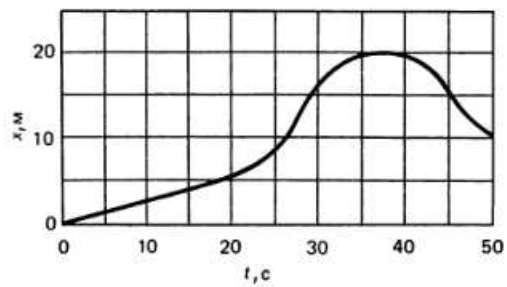



Рис. 2.15.

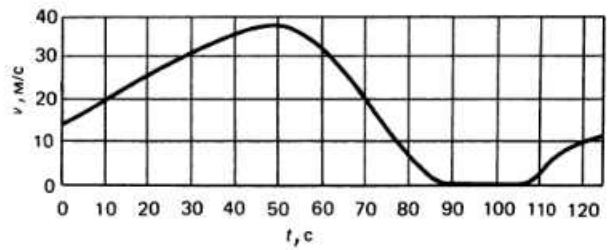



Рис. 2.16.

Какая часть пути займет большее время, вверх или вниз? Дайте ответы для случаев а) отсутствия и б) наличия сопротивления воздуха. (*Подсказка:* ускорение, вызванное сопротивлением воздуха, всегда противоположно направлению движения тела.)

**20.** Если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то тело, брошенное вертикально вверх, возвращается в исходное положение с той же скоростью, что и в начале движения. Изменится ли ситуация при наличии сопротивления воздуха? Если да, то как?

## Задачи

Разделы 2.1–2.5

**1.** (I) Допустим, что при управлении автомобилем, движущимся со скоростью 90 км/ч, вы на 2,0 с отвлеклись от дороги и посмотрели в сторону. Как далеко за это время уедет автомобиль?

**2.** (I) Птица летит со скоростью 28 км/ч. Сколько времени ей потребуется на преодоление 100 км?

**3.** (I) Человек пробегает восемь полных кругов по стадиону с беговой дорожкой длиной 400 м за 10,5 мин. Вычислите а) среднюю путевую скорость и б) среднюю скорость по перемещению.

**4.** (I) На рис. 2.15 приведен график движения кролика, бегущего по прямому туннелю (показана зависимость местонахождения от времени). Какова мгновенная скорость кролика в моменты времени а) $t = 10{,}0$ с; б) $t = 30{,}0$ с? Чему равна его средняя скорость по перемещению в промежутке времени в) $t = 0 - 5{,}0$ с; г) $t = 25{,}0 - 30{,}0$ с; д) $t = 40{,}0 - 50{,}0$ с?

**5.** (I) а) В течение каких интервалов времени, если таковые существуют, на рис. 2.15 скорость кролика постоянная? б) В какой момент времени его скорость наибольшая? в) Равна ли когда-нибудь его скорость нулю? Если да, то когда? г) Бежит ли кролик в течение указанного на рисунке времени в одном направлении или же он меняет направление?

**6.** (II) Постройте график скорости $v(t)$ для тела, перемещение которого зависит от времени так, как показано на рис. 2.15.

**7.** (II) Самолет пролетает 2200 км со скоростью 1000 км/ч. Затем возникает встречный ветер, вследствие чего скорость самолета уменьшается и следующие 1750 км он пролетает уже со скоростью 850 км/ч. Какова средняя путевая скорость самолета за такой перелет?

**8.** (II) При квалификационных заездах перед соревнованиями автогонщик должен на протяжении четырех кругов показать среднюю путевую скорость 200 км/ч. Из-за сбоев в двигателе средняя путевая скорость автомобиля на первых двух кругах оказалась равной 170 км/ч. Какую среднюю скорость нужно развить на последних двух кругах?

**9.** (II) Вычислите пропускную способность (число автомобилей, проходящих данную точку в течение часа) автострады с тремя полосами одностороннего движения. Используйте следующие предположения: средняя путевая скорость автомобилей равна 90 км/ч, средняя длина автомобиля равна 6,0 м, а средняя дистанция между автомобилями должна быть 70 м.

**10.** (II) Камень, брошенный в горизонтальном направлении и прошедший расстояние 40 м, попадает в большой колокол. Удар о колокол был услышан через 3,9 с. Какой была скорость камня, если скорость звука 330 м/с? (Действие силы тяжести не рассматривайте.)

**11.** (II) Собака убежала от своего хозяина на расстояние 100 м за 8,4 с, а затем за треть этого времени пробежала половину пути обратно. Вычислите а) ее среднюю путевую скорость; б) среднюю скорость по перемещению.

**12.** (II) Два автомобиля приближаются друг к другу по параллельным полосам дороги. Каждый имеет скорость 90 км/ч относительно земли. Через какое время автомобили пройдут мимо друг друга, если первоначальное расстояние между ними было 8,5 км?

**13.** (II) Положение мяча, катящегося по прямой, дается выражением $x = 2{,}0 + 6{,}6t - 1{,}1t^2$, где $x$ измеряется в метрах, а $t$ – в секундах. а) Определите положение мяча в моменты времени $t = 1{,}0$; 2,0; 3,0 с. б) Чему равна его средняя скорость на интервале времени 1,0–3,0 с? в) Какова его мгновенная скорость в моменты времени $t = 2{,}0$ с и $t = 3{,}0$ с?

**14.** (II) Автомобиль, движущийся со скоростью 90 км/ч, находится на расстоянии 100 м позади трактора, имеющего скорость 50 км/ч. Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы догнать трактор?

**15.** (II) Автомобиль, едущий со скоростью 90 км/ч, обгоняет поезд длиной 1,10 км, движущийся в том же направлении по параллельному пути. Путевая скорость поезда равна 70 км/ч. Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы проехать вдоль всего поезда? Как далеко автомобиль уедет за это время? Каковы будут эти величины в случае, когда автомобиль и поезд движутся навстречу друг другу?

Раздел 2.6

**16.** (I) На рис. 2.16 показана зависимость скорости поезда от времени. а) В какой момент времени скорость поезда наибольшая? б) Существуют ли промежутки времени (если да, то какие), в течение которых скорость постоянна? в) Существуют ли промежутки времени (если да, то какие), в течение которых ускорение постоянно? г) В какие моменты времени ускорение является наибольшим?

**17.** (I) За время 6,6 с автомобиль разгоняется из состояния покоя до скорости 100 км/ч. Определите его ускорение в м/с$^2$.

**18.** (I) Автомобиль, движущийся с большой скоростью, способен развить ускорение около 3,2 м/с$^2$. За какое время скорость автомобиля увеличится от 85 до 100 км/ч?

**19.** (II) Положение тела $x$ (в метрах) дается выражением $x = At + 4Bt^3$. а) Найдите ускорение тела в зависимости от времени. б) Каковы скорость и ускорение тела через 5,0 с? в) Как выглядит зависимость скорости от времени, если $x = At + Bt^{-3}$?

**20.** (II) За 10 с автомобиль равномерно ускоряется из состояния покоя до скорости 15 м/с, после чего в течение 10 с его скорость 15 м/с остается постоянной. Затем в последующие 5,0 с он равномерно тормозится до скорости 5,0 м/с, после чего его скорость сохраняется постоянной в течение 5,0 с. а) Постройте график зависимости скорости от времени. б) Постройте график зависимости перемещения от времени.

**21.** (III) В помещенной ниже таблице представлена зависимость положения гоночного автомобиля от времени. Автомобиль стартует в момент времени $t = 0$ из состояния покоя и затем движется по прямой. Оцените а) его скорость и б) ускорение в зависимости от времени. Представьте результаты в виде таблицы и графика.

| $t$, с | 0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | 1,50 | 2,00 | 2,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$, м | 0 | 0,11 | 0,46 | 1,06 | 1,94 | 4,62 | 8,55 | 13,79 |

| $t$, с | 3,00 | 3,50 | 4,00 | 4,50 | 5,00 | 5,50 | 6,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$, м | 20,36 | 28,31 | 37,65 | 48,37 | 60,30 | 73,26 | 87,16 |

**22.** (I) В течение 5,0 с автомобиль разгоняется от скорости 30 км/ч до скорости 80 км/ч. Найдите его ускорение в м/с$^2$. Считая ускорение постоянным, определите расстояние, которое автомобиль покроет за это время.

**23.** (I) Автомобиль, движущийся со скоростью 25 м/с, тормозится до полной остановки, проезжая при этом расстояние 120 м. Считая его ускорение при торможении постоянным, найдите это ускорение.

**24.** (I) Покажите, что выражение $\bar{v} = (v + v_0)/2$ [см. выражение (2.9г)] неприменимо для случая, когда ускорение имеет вид $a = A + Bt$, где $A$ и $B$ – постоянные.

**25.** (II) В момент времени $t = 0$ космический корабль имеет скорость 55 м/с. Он ускоряется и к моменту $t = 10{,}0$ с приобретает скорость 162 м/с. Какое расстояние он пролетит в промежутке времени от $t = 2{,}0$ с до $t = 6{,}0$ с?

**26.** (II) Поезд длиной 90 м ускоряется равномерно из состояния покоя. Локомотив проезжает мимо стрелочника, находящегося на расстоянии 130 м от точки начала движения, со скоростью 25 м/с. Какова скорость последнего вагона, когда он проходит мимо стрелочника?.

**27.** (II) Автомобиль, движущийся со скоростью 90 км/ч, равномерно тормозит с ускорением 1,8 м/с$^2$. Вычислите: а) расстояние, которое он пройдет до полной остановки; б) время, затрачиваемое на торможение до полной остановки; в) расстояние, которое автомобиль проходит при торможении за первую и третью секунды.

**28.** (II) Участник игры в гольф рассчитывает силу удара таким образом, чтобы в том случае, если в лунку мяч не попал, он все же остановился в пределах некоторого (небольшого) расстояния от лунки (например, с «перелетом» или «недолетом» 1 м). Сделать это при ударе с горы (мяч при этом катится вниз под уклон) труднее, чем при ударе в гору. Чтобы понять, почему это происходит, предположите, что на данном поле мяч при движении под гору равномерно тормозится с ускорением 3,0 м/с$^2$, а при движении в гору тормозится с постоянным ускорением 4,0 м/с$^2$. Считайте, что подъем начинается на расстоянии 7,0 м от лунки. Вычислите допустимый диапазон скоростей, которые нужно сообщать мячу, чтобы он останавливался в пределах от 1 м перед лункой и до

Раздел 2.7

1 м за лункой. Выполните тот же расчет для случая движения мяча под гору (спуск начинается за 7,0 м от лунки). Что именно в расчетах дает основание считать удары под гору более сложными?

**29.** (II) Автомобиль, движущийся со скоростью 50 км/ч, врезается в дерево; передняя часть автомобиля деформируется, а тело водителя перемещается на 0,7 м и останавливается. Определите среднее ускорение водителя во время этого столкновения. Выразите ответ в единицах, кратных ускорению свободного падения $g$ ($1{,}00g = 9{,}80$ м/с$^2$).

**30.** (II) Человек, плотно пристегнутый ремнем безопасности, имеет все шансы уцелеть в автомобильной аварии, если тормозящее ускорение по величине не превышает $30g$ ($1{,}00g = 9{,}80$ м/с$^2$). Предполагая, что автомобиль тормозится с постоянным ускорением $30g$, определите, на какую деформацию (в целях обеспечения безопасности) должна быть рассчитана передняя часть автомобиля, если авария происходит при скорости 100 км/ч.

**31.** (II) Составьте таблицу значений тормозного пути автомобиля, имеющего начальную скорость 60 км/ч. Время реакции водителя равно 0,80 с. Выполните расчеты а) для ускорения $a = -4{,}0$ м/с$^2$; б) для $a = -7{,}0$ м/с$^2$.

**32.** (III) Покажите, что тормозной путь $d_s$ автомобиля дается выражением $d_s = v_0 t_R - v_0^2/(2a)$, где $v_0$ – начальная скорость автомобиля; $t_R$ – время реакции водителя; $a$ – тормозящее ускорение (оно отрицательно).

**33.** (III). В конструкции светофоров необходимо предусмотреть, чтобы желтый сигнал светился достаточно долго, так чтобы водитель успел остановиться или проехать перекресток. Например, если водитель находится от перекрестка на расстоянии, меньшем тормозного пути $d_s$ (вычисленный выше в задаче 32), то желтый сигнал должен гореть в течение времени, достаточного для проезда водителем этого расстояния и самого перекрестка (шириной $d_i$). а) Покажите, что желтый сигнал должен гореть в течение времени $t = t_R - v_0/2a + d_i/v_0$, где $v_0$ – предполагаемая средняя скорость приближающегося к перекрестку автомобиля, а величины $a$ и $t_R$ определены в задаче 32. б) Специалист по организации уличного движения предполагает, что автомобили подъезжают к перекрестку длиной 14,4 м со скоростями от 30 до 50 км/ч. Для обеспечения безопасности движения он вычисляет время включения желтого сигнала светофора, считая $t_R = 0{,}500$ с и $a = -4{,}00$ м/с$^2$, и для полной безопасности выбирает время, наибольшее из двух получившихся. Какой он получит результат?

**34.** (III) При конструировании высокоскоростного транспорта необходимо выдерживать некоторую пропорцию между средней путевой скоростью поезда и расстоянием между остановками. Чем больше остановок на линии, тем меньше средняя скорость поезда. Чтобы понять существо этой задачи, вычислите время, требующееся поезду для преодоления перегона длиной 30 км в двух случаях: а) остановочные пункты отстоят друг от друга на 1,00 км; б) остановки происходят через 3,00 км. Считайте, что после каждой остановки поезд движется с ускорением 1,5 м/с$^2$, пока не достигнет скорости 80 км/ч. Затем поезд движется с той же скоростью до тех пор, пока при подходе к следующей станции машинист не включит тормоза, создающие тормозящее ускорение $-3{,}0$ м/с$^2$. Считайте, что на каждой станции поезд стоит 20 с.

**35.** (III) В рамках рассмотренной выше задачи по конструированию скоростной транспортной системы выведите общую формулу для средней скорости поезда. Определите символы, используемые для обозначения всех входящих в формулу величин, таких, как ускорение, тормозящее ускорение, максимальная скорость, расстояние между станциями и время стоянки на каждой станции.

**36.** (III) Замаскированный полицейский автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 80 км/ч, обогнал «лихач», движущийся со скоростью 100 км/ч. Ровно через 1,00 с после обгона полисмен нажал на акселератор. Если ускорение полицейского автомобиля 3,00 м/с$^2$, то сколько времени понадобится полицейским, чтобы догнать «лихача» (будем считать, что он движется с постоянной скоростью)?

**37.** (II) Предположите, что в предыдущей задаче скорость «лихача» неизвестна. Если полицейский автомобиль, ускоряясь равномерно, догнал его через 6,0 с, то какой была скорость «лихача»?

Раздел 2.8

**38.** (I) Камень, брошенный с вершины утеса, ударился о землю через 4,2 с. Чему равна высота утеса?

**39.** (I) а) Сколько времени потребуется кирпичу, чтобы достичь земли, если его бросили с высоты 65 м?) б) Какова будет его скорость перед ударом о землю?

**40.** (I) Бейсбольный мяч брошен вертикально вверх со скоростью 18,0 м/с. а) На какую высоту он взлетит? б) Сколько времени потребуется мячу для возвращения на землю?

**41.** (I) С какой минимальной скоростью лосось

должен выпрыгнуть из воды, чтобы попасть на вершину водопада высотой 2,1 м?

42. (II) С крыши высокого здания бросили сначала один камень, а через 1,00 с другой. На каком расстоянии друг от друга будут находиться камни, когда скорость второго камня станет равной 23,0 м/с?

43. (II) Вертолет взлетает вертикально со скоростью 8,0 м/с; на высоте 120 м над землей из окна вертолета выбрасывают груз. Через какое время груз упадет на землю?

44. (II) Прыжок блохи можно анализировать при помощи замедленной фотосъемки. Движение можно разделить на два этапа. Первый этап – отталкивание – продолжается около $10^{-3}$ с. В течение этого времени ноги блохи, отталкиваясь от земли, ускоряют блоху до скорости около 1,0 м/с. На втором этапе полет блохи в воздухе происходит только под действием силы тяжести (считается, что прыжок вертикальный). Вычислите: а) ускорение блохи во время отталкивания, выраженное в величинах, кратных $g$ (ускорение свободного падения); б) высоту подъема над землей во время отталкивания; в) высоту, которой достигнет блоха после взлета с земли, когда ее ускорение равно $g$. Фотосъемка показывает, что блоха прыгает на высоту, составляющую лишь 2/3 вычисленного значения; дайте этому объяснение.

45. (II) Если блоха, упомянутая в предыдущей задаче, достигла высоты 3,5 см, то чему равно ее реальное среднее ускорение во время полета вверх («второй этап» из задачи 44).

46. (II) Тело, брошенное вертикально вверх на Земле, взлетает на высоту 23,0 м. Как высоко взлетит такое же тело на Луне, где ускорение свободного падения в шесть раз меньше, чем на Земле? Считайте, что начальная скорость одна и та же.

47. (II) Покажите, что если пренебречь сопротивлением воздуха, то мяч, брошенный вертикально вверх со скоростью $v_0$, при возвращении в точку старта будет иметь ту же скорость $v_0$.

48. (II) Камень пролетает мимо окна высотой 2,1 м за 0,30 с. С какой высоты падает камень?

49. (II) С вершины утеса высотой 65 м брошен вертикально вверх камень со скоростью 10,0 м/с. а) Через какое время камень достигнет основания утеса? б) Какова его скорость перед ударом о землю?

50. (II) Мяч брошен вертикально вверх со скоростью 16,0 м/с. Изобразите три параллельных графика – для перемещения, скорости и ускорения в зависимости от времени.

51. (II) Камень брошен вертикально вверх со скоростью 17,5 м/с. а) С какой скоростью он будет двигаться на высоте 12,0 м? б) Сколько времени потребуется ему для достижения этой высоты? в) Почему на вопрос б) имеются два ответа?

52. (III) Игрушечная ракета пролетает мимо окна высотой 2,0 м за 0,15 с. Подоконник окна находится на высоте 10,0 м над землей. Какова стартовая скорость ракеты и как высоко она взлетит?

53. (III) Камень брошен с приморского утеса. Звук от его падения в море слышен через 3,5 с. Если скорость звука 330 м/с, то чему равна высота утеса?

54. (III) Когда пеликаны ныряют за рыбой, они складывают свои крылья и совершают свободное падение в воду. Предположим, что пеликан начинает нырять с высоты 25 м и, падая, не в состоянии изменить траекторию. Если у рыбы есть в запасе 0,15 с, то она может сманеврировать и уклониться от пеликана. Какова высота, на которой рыба должна заметить пеликана, чтобы спастись? Считайте, что рыба находится у поверхности воды.

55. (III) Допустим, что вы включаете воду и пускаете через наконечник садового шланга сильную струю. Вы направляете шланг вертикально, и струя бьет на высоту 1,5 м над землей. Если быстро направить шланг в другую сторону или выключить воду, то звук падающей воды будет слышен еще 2,0 с. С какой скоростью вода выпускается из шланга?

### * Раздел 2.9

*56. (II) Оцените расстояние, пройденное телом, график движения которого приведен на рис. 2.16: а) в течение первой минуты; б) в течение второй минуты.

*57. (II) Постройте зависимость $x$ от $t$ для тела, скорость которого меняется со временем так, как показано на рис. 2.16.

*58. (II) Постройте зависимость $v(t) = 25 + 18t$, где $v$ измеряется в м/с, а $t$ – в с, на интервале времени от $t_1 = 1{,}5$ с до $t_2 = 3{,}5$ с. Разделите этот интервал времени на десять малых промежутков и для каждого из них оцените $\bar{v}$; вычисляя площадь под кривой, найдите полное перемещение.

*59. (II) Рассмотрите снова задачу 58, но теперь для определения полного перемещения используйте математический анализ.

*60. (II) Ускорение частицы дается выражением $a(t) = kt^{3/2}$, где $k$ – постоянная. Найдите зависимость положения частицы от времени $t$, если $x = 0$ и $v = 0$ при $t = 0$.

*61. (II) Ускорение протона с течением времени растет экспоненциально в соответствии с формулой $a = 6{,}4e^{2t}$, где $a$ измеряется в единицах м/с$^2$, а $t$ – в секундах. Найдите зависимость от времени а) скорости протона и б) его координаты, если движение начинается из положения покоя в начале системы координат при $t = 0$. в) Каково соотношение между $a(t)$ и $v(t)$? г) Каковы координата и скорость протона в момент времени $t = 3{,}6$ с?

*62. (III) а) Предположим, что ускорение частицы задано как функция от $x$. Покажите, что

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\int_{x_1}^{x_2} a(x)\,dx.$$

б) Пусть $a = (2{,}0\ \text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2})x^2$ и $v_1 = 0$; найдите $v_2$, после того как частица переместилась из точки $x_1 = 0{,}50$ м в точку с координатой $x_2 = 2{,}20$ м.

*63. (III) Сопротивление воздуха, действующее на падающее тело, можно учесть с помощью приближенного выражения для ускорения:

$$a = dv/dt = g - kv,$$

где $k$ – постоянная. а) Выведите формулу для скорости тела в зависимости от времени, предполагая, что движение начинается из состояния покоя ($v = 0$ при $t = 0$). (Указание: замените переменные, положив $u = g - kv$.) б) Найдите выражение для установившейся скорости, которая является максимально достижимой.

* Раздел 2.10

(Задачи для вычислений на программируемом микрокалькуляторе.)

*64. (II) В приведенной ниже таблице представлены значения скорости гонщика в зависимости от времени. Оцените а) среднее ускорение (м/с$^2$) в течение каждого промежутка времени и б) полное пройденное расстояние (м) в зависимости от времени. [*Подсказка:* для определения $v$ на каждом промежутке времени просуммируйте скорости в начале и в конце промежутка и разделите сумму пополам; например, на втором промежутке используйте $\bar{v} = (6{,}0 + 13{,}2)/2 = 9{,}6$.] в) Изобразите эти зависимости.

| $t$, с | 0 | 0,50 | 1,00 | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 3,50 | 4,00 | 4,50 | 5,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$, км/ч | 0,0 | 6,0 | 13,2 | 22,3 | 32,2 | 43,0 | 53,5 | 62,6 | 70,6 | 78,4 | 85,1 |

*65. (III) (Для решения этой задачи предпочтительнее воспользоваться программируемым микрокалькулятором.) Ускорение тела (м/с$^2$), измеренное с интервалом 1,00 с начиная с $t = 0$, имеет следующие значения: 1,25; 1,58; 1,96; 2,40; 2,66; 2,70; 2,74; 2,72; 2,60; 2,30; 2,04; 1,76; 1,41; 1,09; 0,86; 0,51; 0,28; 0,10. Используйте численные методы для оценки а) скорости (считайте, что $v = 0$ при $t = 0$) и б) перемещения при $t = 8{,}00$ с с точностью до 1%. Каковы в) скорость и г) перемещение при $t = 17{,}0$ с?

*66. (III) Тело начинает движение из состояния покоя и ускоряется с ускорением (м/с$^2$), определяемым выражением $a = \sqrt{2 + t^2}$. Проинтегрируйте его численно и определите скорость и ускорение при $t = 3{,}00$ с. Убедитесь, что результат получен с точностью по крайней мере 2%.

# 3 Кинематика в двух и трех измерениях

В гл. 2 мы рассматривали движение частицы вдоль прямой линии; изучим теперь ее движение в двух и трех измерениях. Для этого нам понадобится ввести понятие вектора. После того как мы изучим свойства векторов, рассмотрим движение в общем случае, а затем проанализируем ряд интересных видов движения, в том числе баллистическое и вращательное движение.

## 3.1. Векторы и скаляры

В разд. 2.4 мы отмечали, что понятие *скорости* включает в себя не только быстроту движения тела, но также и направление этого движения. Величины, подобные скорости, которые характеризуются как *направлением*, так и *абсолютным значением*, называются **векторными** величинами. Примерами других векторных величин являются перемещение, сила и импульс. Однако многие величины, такие, как время, температура и энергия, не имеют направления: они характеризуются только абсолютным значением, т. е. полностью определяются своими числовыми значениями (с указанием единиц измерения, если таковые имеются). Такие величины называются **скалярами**.

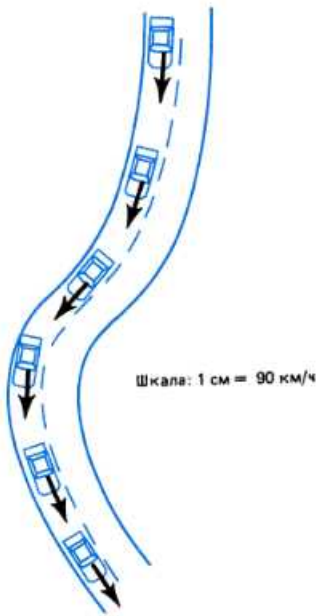



Рис. 3.1. Автомобиль, движущийся по дороге. Стрелки указывают векторы скорости в каждый момент времени.

В физике для изучения конкретной физической ситуации весьма полезно научиться строить соответствующие диаграммы, особенно в тех случаях, когда мы имеем дело с векторными величинами. На диаграмме вектор представляется в виде стрелки. Заостренный конец стрелки указывает направление этого вектора, а ее длина строится пропорциональной абсолютному значению (величине) вектора. Например, на рис. 3.1 изображены стрелки, показывающие скорость автомобиля в различных местах искривленной дороги. Измеряя на этой диаграмме длину соответствующей стрелки и учитывая указанный масштаб (1 см = 90 км/ч), можно определить абсолютное значение скорости автомобиля в любом месте дороги.

Для обозначения векторов мы будем использовать полужирный шрифт[1]. Так, скорость записывается как $\mathbf{v}$.

[1] В рукописях вектор обозначается, как правило, буквой со стрелкой наверху, например $\vec{v}$ для скорости.

Если же нас интересует только абсолютное значение (величина), то можно писать либо $|\mathbf{v}|$, либо (что встречается чаще) просто $v$.

## 3.2. Сложение векторов; графические методы

Поскольку векторы характеризуются как направлением, так и величиной, складывать их нужно особым образом. В этой главе мы будем иметь дело в основном с векторами перемещения (которые будем здесь обозначать через **D**) и с векторами скорости **v**. Полученные результаты можно применять и для других векторов, которые встретятся нам позже.

Для сложения скалярных величин, таких, как время, пользуются простой арифметикой. Простую арифметику можно применить и для сложения векторов, но только в том случае, если они имеют одинаковые направления. Например, если человек прошел в первый день 8 км на восток, а на следующий день 6 км тоже на восток, то он окажется на расстоянии 8 км + 6 км = 14 км от исходной точки. При этом мы говорим, что суммарное, или результирующее, перемещение равно 14 км. Однако если человек в первый день прошел 8 км на восток, а на второй день 6 км на запад (т.е. в обратном направлении), то через 2 дня он будет находиться на расстоянии 2 км от исходной точки, поэтому его результирующее перемещение равно 2 км на восток. В этом случае результирующее перемещение получается вычитанием: 8 км − 6 км = 2 км.

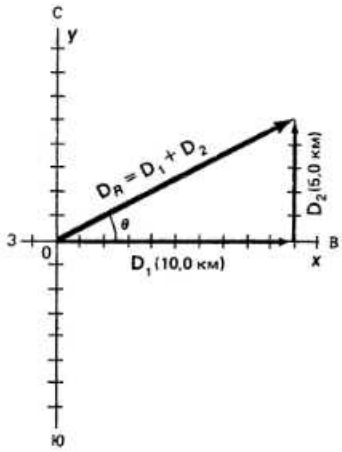



Рис. 3.2. Человек проходит 10,0 км на восток, а затем 5,0 км на север. Эти перемещения представлены соответственно векторами $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, которые показаны стрелками. Показан также результирующий вектор перемещения $\mathbf{D}_R$, равный сумме $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$. Проводя измерения на графике с помощью линейки и транспортира, получаем, что вектор $\mathbf{D}_R$ имеет длину 11,2 км и направлен под углом $\theta = 27°$ к северу от направления на восток.

В случае, когда два вектора не направлены вдоль одной прямой, простой арифметикой уже не обойтись. Пусть, например, человек прошел 10,0 км на восток, а затем 5,0 км на север. Такое движение можно изобразить с помощью графика (рис. 3.2), на котором положительное направление оси $y$ указывает на север, а положительное направление оси $x$ – на восток. На этом графике нарисуем стрелку $\mathbf{D}_1$, которая представляет вектор перемещения на расстояние 10,0 км на восток. Вторая стрелка ($\mathbf{D}_2$) соответствует вектору перемещения на 5 км на север. Оба вектора изображаются в масштабе.

После совершения такой прогулки человек находится на 10,0 км восточнее и на 5,0 км севернее исходной точки. На рисунке результирующее перемещение представлено стрелкой, помеченной $\mathbf{D}_R$. Если воспользоваться масштабной линейкой и транспортиром, то на этой диаграмме можно измерить, что человек будет находиться на расстоянии 11,2 км от исходной точки, причем в северо-восточном направлении, составляющем угол 27° относительно направления на восток. Иными словами, результирующий вектор перемещения имеет величину 11,2 км и составляет с осью $x$ угол ($\theta$), равный 27°. Величину (длину) вектора $\mathbf{D}_R$ можно получить также с помощью теоремы

Пифагора, поскольку $D_1$, $D_2$ и $D_R$ образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой $D_R$. Таким образом, $D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10{,}0\text{ км})^2 + (5{,}0\text{ км})^2} = \sqrt{125\text{ км}^2} = 11{,}2$ км. Разумеется, эту теорему можно применять только в том случае, когда векторы *перпендикулярны* друг другу.

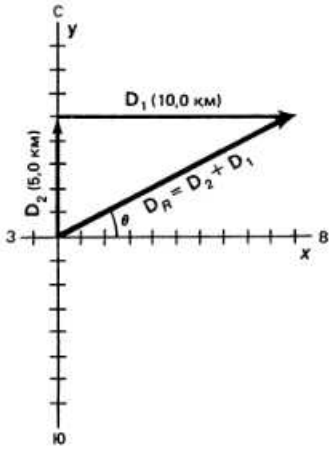



Рис. 3.3. При изменении порядка сложения векторов результирующий вектор не меняется; см. рис. 3.2.

Результирующий вектор перемещения $\mathbf{D}_R$ является суммой векторов $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$. Таким образом, $\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$. Это *векторное* равенство. Важное свойство сложения векторов, не направленных вдоль одной и той же прямой, состоит в том, что величина результирующего вектора не равна сумме величин двух отдельных векторов ($D_R \neq D_1 + D_2$).

Рис. 3.2 иллюстрирует общие правила сложения двух векторов, т. е. получения их суммы независимо от величины углов между ними. Правила эти следующие: 1) на диаграмме изображается в масштабе один из векторов (назовем его $\mathbf{V}_1$); 2) затем изображается в масштабе второй вектор $\mathbf{V}_2$, причем его начало помещается в конец первого вектора (необходимо убедиться в том, что его направление выбрано правильно); 3) стрелка, проведенная из начала первого вектора в конец второго, представляет *сумму*, или **результирующую**, двух векторов. Длина результирующего вектора может быть измерена и соотнесена с масштабом. Углы можно измерить транспортиром. Этот метод известен как *метод сложения векторов «голова к хвосту»*[1]. По существу, этот метод представляет собой определение того, как складывать векторы.

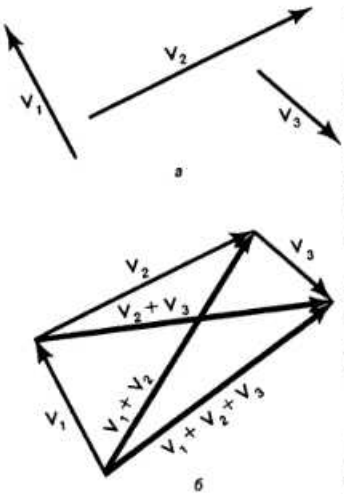



Рис. 3.4. Сложение трех векторов (*а*) в любом порядке даст один и тот же результат $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$. Ясно (*б*), что $\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3$. Проще это можно записать как $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$.

Заметим, что совсем не важно, в каком порядке складывать векторы. Например, при сложении перемещения на 5,0 км на север с перемещением на 10,0 км на восток получается результирующий вектор длиной 11,2 км, направленный под углом $\theta = 27°$ (рис. 3.3). Такой же результат получился и при сложении в обратном порядке (рис. 3.2). Это означает, что

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \quad \text{[коммутативный закон]}. \qquad (3.1а)$$

Метод сложения векторов «голова к хвосту» можно обобщить на случай трех и более векторов (рис. 3.4). Как показано на рисунке,

$$\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 \quad \text{[ассоциативный закон]}. \qquad (3.1б)$$

В левой части этого уравнения мы сначала складываем $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$, а затем прибавляем к этой сумме $\mathbf{V}_1$, что и дает общую сумму. В правой части $\mathbf{V}_1$ прибавляется к $\mathbf{V}_2$ и к этой сумме прибавляют $\mathbf{V}_3$. Видно, что порядок сложения векторов не влияет на результат.

Второй способ сложения двух векторов – *метод парал-*

[1] В отечественной литературе этот метод называют правилом ломаной или правилом многоугольника. – *Прим. ред.*

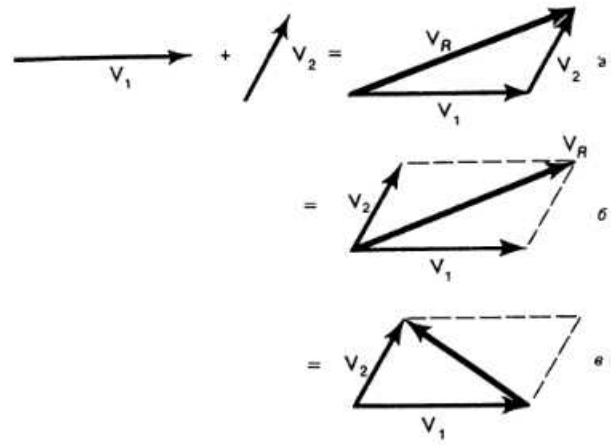



Рис. 3.5. Сложение векторов двумя различными методами. *а* – метод «голова к хвосту»; *б* – метод параллелограмма; *в* – неправильное сложение.

*лелограмма*. Он эквивалентен методу «голова к хвосту». При сложении этим методом два вектора изображаются исходящими из одной точки и на них как на смежных сторонах строится параллелограмм. Результирующим вектором является диагональ, проведенная из общей исходной точки. Пример такого метода сложения показан на рис. 3.5, *б*. Из сопоставления с рис. 3.5, *а* ясно, что метод «голова к хвосту» и метод параллелограмма дают один и тот же результат. Самая распространенная ошибка при сложении заключается в том, что суммарный вектор изображается в виде диагонали, соединяющей концы обоих векторов, как показано на рис. 3.5, *в*; это неправильно: такая диагональ не будет суммой векторов (в действительности она представляет собой их разность; см. следующий раздел).

Если рассматривать векторы как математические величины, то их можно сдвигать параллельно самим себе, не меняя их направления и величины. Мы уже воспользовались этим выше при сложении векторов. (В физическом смысле положение вектора может быть очень существенно; например, если нас интересует результирующее движение тела, то вектор, представляющий силу, действующую на тело, должен быть помещен в точку приложения силы.)

Отсюда вытекает следующее определение: два вектора равны между собой, если они имеют одинаковые величины и направления.

## 3.3. Вычитание векторов и умножение вектора на скаляр

Задав вектор **V**, определим *отрицательный вектор* $-\mathbf{V}$ как вектор, который имеет ту же величину, но направлен противоположно **V** (рис. 3.6, *а*). Используем это для определения операции вычитания одного вектора из другого:

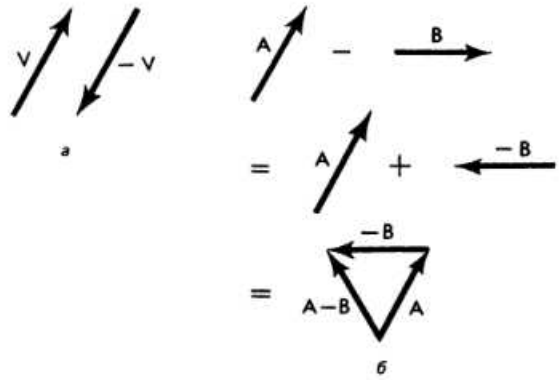



Рис. 3.6. *а* – вектор, отрицательный по отношению к данному, представляет собой вектор той же длины, но противоположного направления; *б* – вычитание векторов: **A** – **B**.

разность двух векторов **A** – **B** определяется как

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}),$$

т. е. разность двух векторов равна сумме первого вектора с вектором, отрицательным второму. Таким образом, мы можем теперь применить сложение векторов по методу «голова к хвосту», как показано на рис. 3.6, *б*.

Вектор **V** может быть умножен на скалярную величину *c*. Произведение *c***V** определяется как такой вектор, который по направлению совпадает с исходным вектором **V**, а его величина равна *cV*. Иными словами, умножение вектора на положительную скалярную величину *c* меняет его величину в *c* раз, но не меняет направления. Если же *c* – отрицательная величина, то абсолютное значение произведения *c***V** по-прежнему равно *cV*, а направлен этот вектор противоположно вектору **V**.

## 3.4. Аналитический метод сложения векторов; составляющие и проекции

Графический метод сложения векторов с использованием линейки и транспортира не вполне точен и не может быть применен для сложения векторов в трех измерениях. Рассмотрим теперь куда более мощный и точный метод сложения векторов, основанный на разложении векторов на составляющие вдоль произвольно выбранных осей координат.

Рассмотрим вначале вектор **V**, лежащий в плоскости. Его можно представить в виде суммы двух других векторов, называемых **составляющими** (или компонентами) исходного вектора. Обычно выбирают составляющие, направленные перпендикулярно друг другу. Процесс нахождения составляющих называется *разложением вектора на его составляющие*. Пример такого процесса показан на рис. 3.7. Вектор **V** может быть вектором перемещения, направленным под углом $\theta = 30°$ к северу от направления на восток (рис. 3.7, *а*). Здесь мы выбрали ось *x* направ-

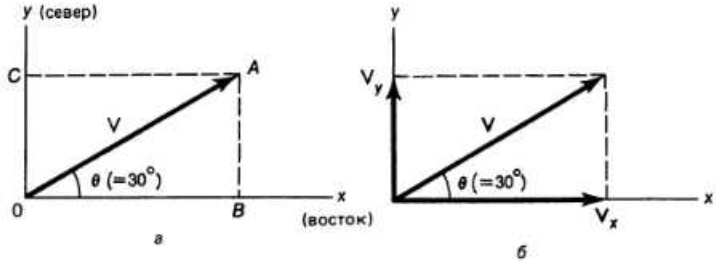



Рис. 3.7. Разложение вектора **V** на составляющие вдоль произвольно выбранных осей координат $x$ и $y$.

ленной на восток, а $y$ – на север. Этот вектор может быть разложен на $x$- и $y$-составляющие, если опустить из конца вектора ($A$) перпендикуляры на оси $x$ и $y$ (прямые $AB$ и $AC$) (рис. 3.7, *б*). Тогда направленные отрезки $OB$ и $OC$ представляют собой соответственно $x$- и *$y$-составляющие вектора* **V**; это *векторные составляющие* $\mathbf{V}_x$ и $\mathbf{V}_y$. Величины векторов $\mathbf{V}_x$ и $\mathbf{V}_y$, а именно $V_x$ и $V_y$, называются *проекциями* вектора **V** на оси координат и выражаются в виде чисел (с соответствующими единицами измерения), положительных или отрицательных в зависимости от того, идут ли они вдоль положительного или отрицательного направления осей $x$ или $y$. Как видно из рис. 3.7, согласно методу параллелограмма мы имеем $\mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y = \mathbf{V}$. Хотя начало вектора на рис. 3.7 находится в начале системы координат, для нахождения составляющих это вовсе не обязательно. При помещении вектора в какое-либо место координатного пространства его составляющие остаются неизменными, до тех пор пока сохраняются неизменными его длина и углы, образуемые с осями координат.

В трех измерениях вектор будет иметь три составляющие. В прямоугольной декартовой системе координат составляющими вектора **V** являются $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ и $\mathbf{V}_z$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z.$$

Разложение вектора на составляющие в трех измерениях является всего лишь обобщением рассмотренного выше метода для двух измерений. Ради удобства изучим главным образом случаи, когда векторы лежат в плоскости и имеются только две составляющие.

При различном выборе осей координат составляющие вектора будут разными. Поэтому, задавая составляющие вектора, существенно указать и соответствующую систему координат.

Используя определение тригонометрических функций, из рис. 3.7 можно видеть, что

$$V_x = V\cos\theta, \qquad (3.2а)$$

$$V_y = V\sin\theta. \qquad (3.2б)$$

Угол $\theta$ выбирается (по соглашению) равным углу, который составляет вектор **V** с осью $x$. Из рисунка мы

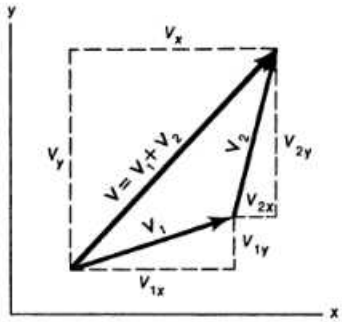



Рис. 3.8. Проекциями вектора $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ являются $V_x = V_{1x} + V_{2x}$ и $V_y = V_{1y} + V_{2y}$.

видим также, что

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \tag{3.3а}$$

$$\operatorname{tg}\theta = V_y/V_x. \tag{3.3б}$$

Таким образом, в любой системе координат вектор можно задать двумя способами. Мы можем задать его величину $V$ и угол $\theta$, который он составляет с осью $x$, или же можно задать его проекции $V_x$ и $V_y$. Используя выражения (3.2) или (3.3), можно перейти от одного способа задания к другому. Заметим, что в двух измерениях для задания вектора необходимо иметь два числа, а в трех измерениях – три числа: либо $V_x$, $V_y$ и $V_z$, либо абсолютное значение $V$ и два угла.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как складывать векторы аналитически с помощью составляющих. Сначала каждый вектор нужно разложить на его проекции. Затем можно показать (рис. 3.8), что сложение двух векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, дающее результирующий вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, означает выполнение следующих операций:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{1x} + V_{2x}, \\ V_y &= V_{1y} + V_{2y}, \\ V_z &= V_{1z} + V_{2z}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Внимательное изучение рис. 3.8 подтвердит правильность этих выражений для $x$- и $y$-проекций; результат для $z$-проекции получается аналогичным образом. Если нас интересуют как величина, так и направление результирующего вектора, то их можно получить с помощью выражений (3.3):

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = V_y/V_x.$$

Разумеется, оси координат мы можем выбирать произвольным образом. Однако удачный выбор осей координат позволяет во многих случаях упростить операцию аналитического сложения векторов. Выбирая, скажем, направление одного из векторов так, чтобы оно совпадало с направлением одной из осей, мы придем к тому, что этот вектор будет иметь только одну составляющую.

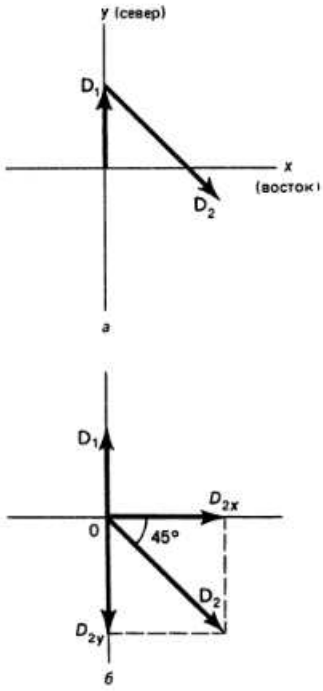



Рис. 3.9. Пример 3.1.

**Пример 3.1.** Исследователь прошел в северном направлении расстояние 22,0 км, а затем на юго-восток (45° к югу от направления на восток) еще 47,0 км (рис. 3.9, *а*). Чему равно его результирующее перемещение из начальной точки?

**Решение.** Выберем положительное направление оси $x$ на восток, а оси $y$ на север. Разложим каждый вектор перемещения на его составляющие (рис. 3.9, *б*). Поскольку величина $\mathbf{D}_1$ равна 22,0 км, а

сам вектор направлен на север, у него есть только проекция на ось $y$:

$$D_{1x} = 0, \quad D_{1y} = 22{,}0 \text{ км},$$

в то время как $\mathbf{D}_2$ имеет проекции на оси $x$ и $y$:

$$D_{2x} = (47{,}0 \text{ км})(\cos 45°) = 33{,}2 \text{ км},$$

$$D_{2y} = -(47{,}0 \text{ км})(\sin 45°) = -33{,}2 \text{ км};$$

здесь мы учли, что $\sin 45° = \cos 45° = 0{,}707$. Заметим, что $D_{2y}$ является отрицательной, поскольку эта векторная составляющая направлена вдоль отрицательного направления оси $y$. Результирующий вектор $\mathbf{D}$ имеет следующие проекции:

$$D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0 + 33{,}2 \text{ км} = 33{,}2 \text{ км},$$
$$D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22{,}0 \text{ км} - 33{,}2 \text{ км} = -11{,}2 \text{ км}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{D}$ определен полностью: $D_x = 33{,}2$ км, $D_y = -11{,}2$ км. Этот вектор можно также определить, задав его величину и угол $\theta$:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(33{,}2 \text{ км})^2 + (-11{,}2 \text{ км})^2} = 35{,}0 \text{ км},$$
$$\operatorname{tg}\theta = D_y/D_x = -(11{,}2 \text{ км})/(33{,}2 \text{ км}) = -0{,}337;$$

следовательно, $\theta = 18{,}6°$ к югу от направления на восток.

## 3.5. Единичные векторы

Удобной записью векторных величин является их запись с помощью **единичных векторов** (это векторы, у которых абсолютное значение равно единице, а направления соответствуют направлениям осей выбранной системы координат). В прямоугольной системе координат эти единичные векторы обозначаются **i**, **j** и **k**. Они направлены вдоль положительных осей $x$, $y$ и $z$ соответственно, как показано на рис. 3.10. (Как и остальные векторы, **i**, **j** и **k** не обязательно должны помещаться в начало координат, а могут располагаться в любом месте, лишь бы их направления не изменялись.)

В соответствии с определением операции умножения вектора на скаляр (разд. 3.3) составляющие вектора $\mathbf{V}$ можно записать следующим образом: $\mathbf{V}_x = V_x\mathbf{i}$, $\mathbf{V}_y = V_y\mathbf{j}$ и $\mathbf{V}_z = V_z\mathbf{k}$. Следовательно, любой вектор $\mathbf{V}$ можно записать через его составляющие в виде

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}. \tag{3.5}$$

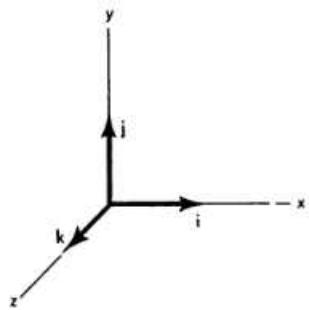



Рис. 3.10. Единичные векторы **i**, **j** и **k**, направленные вдоль осей соответственно $x$, $y$ и $z$.

Единичные векторы очень полезны в процессе аналитического сложения векторов по проекциям. Например, можно убедиться в справедливости выражений (3.4), используя понятие единичного вектора для каждого из входящих в него векторов (мы запишем их для случая двух измерений, однако обобщение на три измерения совершенно очевидно):

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (V_x)\mathbf{i} + (V_y)\mathbf{j} = \\ &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \\ &= (V_{1x}\mathbf{i} + V_{1y}\mathbf{j}) + (V_{2x}\mathbf{i} + V_{2y}\mathbf{j}) = \\ &= (V_{1x} + V_{2x})\mathbf{i} + (V_{1y} + V_{2y})\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Сравнивая первую строку с четвертой, мы получаем соотношения (3.4).

**Пример 3.2.** Представьте векторы из примера 3.1 в записи через единичные векторы и выполните сложение.

**Решение.** В примере 3.1 мы разложили $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ на проекции и нашли, что $D_{1x} = 0$, $D_{1y} = 22{,}0$ (временно мы опускаем единицы измерения) и $D_{2x} = 33{,}2$, $D_{2y} = -33{,}2$. Таким образом,

$\mathbf{D}_1 = 0\mathbf{i} + 22{,}0\mathbf{j}$, $\mathbf{D}_2 = 33{,}2\mathbf{i} - 33{,}2\mathbf{j}$.

Тогда

$$\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 = (0 + 33{,}2)\mathbf{i} + (22{,}0 - 33{,}2)\mathbf{j} = 33{,}2\mathbf{i} - 11{,}2\mathbf{j}.$$

Проекции результирующего вектора перемещения $\mathbf{D}$ равны $D_x = 33{,}2$ км и $D_y = -11{,}2$ км.

## 3.6. Относительная скорость

Если два поезда приближаются навстречу друг другу каждый со скоростью 80 км/ч относительно земли, то скорость одного поезда относительно другого равна 160 км/ч. Иными словами, для наблюдателя в одном из поездов другой поезд будет казаться приближающимся со скоростью 160 км/ч. Аналогично, когда один автомобиль, движущийся со скоростью 90 км/ч, обгоняет другой, у которого скорость равна 75 км/ч, скорость первого автомобиля относительно второго будет равна 90 км/ч – – 75 км/ч = 15 км/ч. Таким образом, мы имеем дело с тем, что называется **относительной скоростью**.

В случае когда скорости направлены вдоль одной прямой, для получения относительной скорости достаточно простого сложения или вычитания. Однако если они не направлены вдоль одной прямой, то приходится прибегать к векторному сложению, что можно показать на следующих примерах. Как уже отмечалось в разд. 2.2, при определении скорости важно знать, какая используется система отсчета.

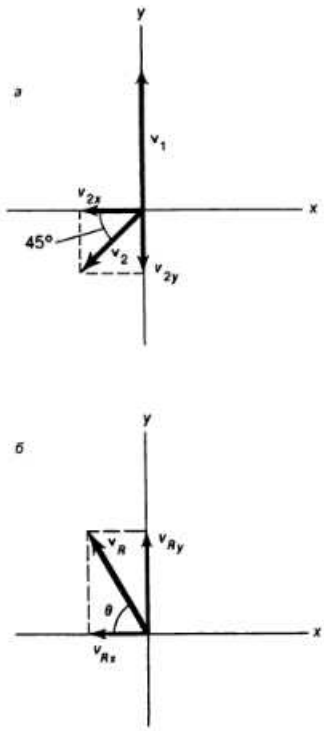



Рис. 3.11. Пример 3.3.

**Пример 3.3.** Самолет, скорость которого относительно воздуха равна 200 км/ч, летит на север. Внезапно начинает дуть северо-восточный ветер со скоростью 100 км/ч относительно земли. Какова будет результирующая скорость самолета относительно земли?

**Решение.** На рис. 3.11, *а* показаны два вектора скорости, разложенные на составляющие (для удобства они изображены исходящими из одной точки); $\mathbf{v}_1$ – это скорость самолета относительно воздуха, а $\mathbf{v}_2$ – скорость ветра относительно земли. Результирующая скорость $\mathbf{v}_R$ есть скорость самолета относительно земли. Поскольку $\mathbf{v}_1$ направлена вдоль оси $y$, она

имеет только $y$-составляющую:

$v_{1x} = 0$ км/ч,

$v_{1y} = v_1 = 200$ км/ч.

Вычислим проекции вектора $\mathbf{v}_2$:

$$v_{2x} = -v_2 \cos 45° = -(100 \text{ км/ч})(0{,}707) = -70{,}7 \text{ км/ч},$$

$$v_{2y} = -v_2 \sin 45° = -(100 \text{ км/ч})(0{,}707) = -70{,}7 \text{ км/ч}.$$

Мы видим, что обе проекции $v_{2x}$ и $v_{2y}$ отрицательны, поскольку их направления соответствуют отрицательным направлениям осей $x$ и $y$. Проекции результирующей скорости равны.

$$v_{Rx} = 0 \text{ км/ч} - 70{,}7 \text{ км/ч} = -70{,}7 \text{ км/ч},$$

$$v_{Ry} = 200 \text{ км/ч} - 70{,}7 \text{ км/ч} = 129{,}3 \text{ км/ч}.$$

Величину результирующей скорости находим с помощью теоремы Пифагора:

$$v_R = \sqrt{v_{Rx}^2 + v_{Ry}^2} = 147 \text{ км/ч}.$$

Чтобы найти угол $\theta$, который $\mathbf{v}_R$ образует с осью $x$ (рис. 3.11, *б*), воспользуемся соотношением

$$\operatorname{tg}\theta = v_{Ry}/v_{Rx} = (129{,}3 \text{ км/ч})/(-70{,}7 \text{ км/ч}) = -1{,}82.$$

(Отрицательный знак указывает лишь на то, что угол $\theta$ отсчитывается от отрицательного направления оси $x$, как показано на рисунке.) Используя тригонометрические таблицы, находим, что $\operatorname{tg} 61° = 1{,}804$, а $\operatorname{tg} 62° = 1{,}881$. Следовательно, искомый угол $\theta$ приблизительно равен 61°. Микрокалькулятор (с использованием кнопки "arctg") дает $\theta = -61{,}2°$.

При определении относительной скорости легко совершить ошибку, прибавляя или вычитая не те скорости, которые требуются. Поэтому полезно применять тщательно согласованные обозначения, что прояснит ситуацию. Каждую скорость помечают двумя индексами: первый относится к движущемуся телу, а второй – к системе отсчета, в которой этот объект имеет данную скорость. Предположим, например, что лодка должна пересечь реку перпендикулярно ее течению, как показано на рис. 3.12. Пусть $\mathbf{v}_{ЛВ}$ – скорость лодки относительно воды. Аналогично пусть $\mathbf{v}_{ЛБ}$ – скорость лодки относительно берега, а $\mathbf{v}_{ВБ}$ – скорость воды относительно берега (т.е. скорость течения реки). Заметим, что $\mathbf{v}_{ЛВ}$ это та скорость, которую создает мотор лодки (относительно воды), в то время как $\mathbf{v}_{ЛБ}$ представляет собой сумму $\mathbf{v}_{ЛВ}$ и скорости течения $\mathbf{v}_{ВБ}$. Следовательно, скорость лодки относительно берега равна

$$\mathbf{v}_{ЛБ} = \mathbf{v}_{ЛВ} + \mathbf{v}_{ВБ}. \qquad (3.6а)$$

Записывая нижние индексы в соответствии с приведенным выше соглашением, мы обнаружим, что внутренние индексы в правой части выражения (3.6а) одинаковы (оба «В»), а внешние индексы («Л» и «Б») те же, что и два индекса у вектора суммы слева, $\mathbf{v}_{ЛБ}$. Используя это соглашение, можно получить правильное соотношение, связывающее скорости в различных системах отсчета[1]. Метод, которым было получено соотношение (3.6а), распространяется и на более общий случай. Его можно обобщить на случай трех и более скоростей. Например, если рыбак в

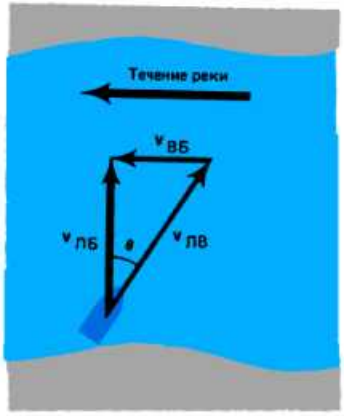



Рис. 3.12. Чтобы двигаться строго поперек реки, лодку необходимо направлять против течения под углом $\theta$.

[1] Таким образом, благодаря проверке мы бы узнали (например), что соотношение $\mathbf{v}_{ЛВ} = \mathbf{v}_{ЛБ} + \mathbf{v}_{ВБ}$ ошибочно.

лодке перемещается со скоростью $\mathbf{v}_{РЛ}$ относительно лодки, то его скорость относительно берега равна $\mathbf{v}_{РБ} = \mathbf{v}_{РЛ} + \mathbf{v}_{ЛВ} + \mathbf{v}_{ВБ}$. Соотношения, содержащие относительные скорости, будут записаны правильно, если соседние внутренние индексы совпадают, а внешние точно соответствуют двум индексам переменной, находящейся в левой части равенства. Однако такое правило справедливо только для положительных знаков (сложение) в правой части и не действует при отрицательных знаках (в случае вычитания векторов).

Во многих случаях полезно помнить, что для любых двух тел или двух систем отсчета $A$ и $B$ скорость $A$ относительно $B$ имеет ту же величину, что и скорость $B$ относительно $A$; знаки же этих скоростей противоположны:

$$\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB}. \qquad (3.6б)$$

Например, во время движения поезда в некотором направлении со скоростью 100 км/ч относительно земли предметы на земле (например, деревья) наблюдателю, находящемуся в поезде, кажутся движущимися со скоростью 100 км/ч в противоположном направлении.

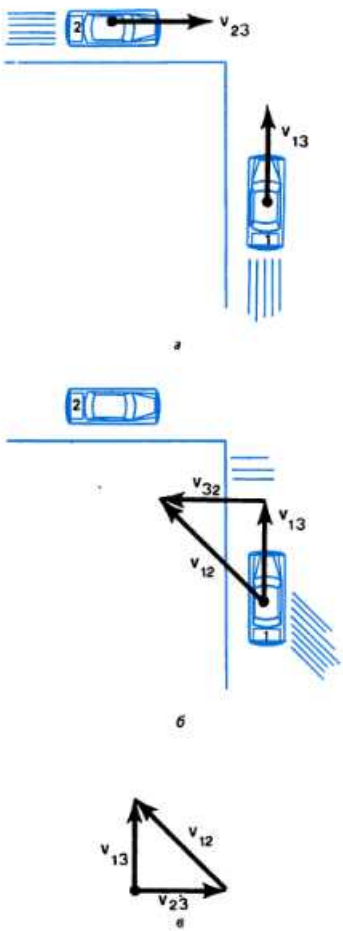



Рис. 3.13. Пример 3.5.

**Пример 3.4.** Скорость лодки в спокойной воде $\mathbf{v}_{ЛВ} = 20{,}0$ км/ч. Если необходимо, чтобы лодка плыла поперек реки, течение которой имеет скорость $\mathbf{v}_{ВБ} = 12{,}0$ км/ч, то под каким углом упреждения должна двигаться лодка (рис. 3.12)?

**Решение.** Заметим, что на рис. 3.12 скорость $\mathbf{v}_{ЛБ}$ направлена строго поперек реки, поскольку по условию задачи лодка должна двигаться в этом направлении. Чтобы достичь этого, лодку направляют против течения, так что скорость $\mathbf{v}_{ЛВ}$ направлена с углом упреждения $\theta$. Из рисунка имеем

$$\sin\theta = \frac{v_{ВБ}}{v_{ЛВ}} = \frac{12{,}0 \text{ км/ч}}{20{,}0 \text{ км/ч}} = 0{,}600.$$

Следовательно, $\theta = 36{,}9°$.

**Пример 3.5.** Два автомобиля приближаются к перекрестку под прямым углом друг к другу с одинаковой скоростью 40,0 км/ч (11,1 м/с); см. рис. 3.13, *а*. Чему равна скорость одного автомобиля относительно другого? (Иными словами, найдите скорость автомобиля 1 с точки зрения водителя автомобиля 2.)

**Решение.** На рис. 3.13, *а* эта ситуация изображена в системе отсчета, жестко свя-

занной с землей. Мы хотим рассмотреть задачу в системе отсчета, в которой автомобиль 2 покоится (рис. 3.13, *б*). В этой системе отсчета (с точки зрения водителя автомобиля 2) земля движется навстречу автомобилю 2 со скоростью $\mathbf{v}_{32}$ (скорость равна 40,0 км/ч), которая равна и противоположна по направлению $\mathbf{v}_{23}$ (скорости автомобиля 2 относительно земли):

$$\mathbf{v}_{23} = -\mathbf{v}_{32}.$$

Таким образом, скорость автомобиля 1 с точки зрения водителя автомобиля 2 будет равна

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{13} + \mathbf{v}_{32},$$

или (поскольку $\mathbf{v}_{32} = -\mathbf{v}_{23}$)

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{13} - \mathbf{v}_{23}.$$

Следовательно, скорость автомобиля 1 с точки зрения водителя автомобиля 2 равна разности их скоростей $\mathbf{v}_{13} - \mathbf{v}_{23}$, каждая из которых измеряется относительно земли (рис. 3.13, *в*). Поскольку $|\mathbf{v}_{13}| = |\mathbf{v}_{23}| = |\mathbf{v}_{32}|$, мы видим (рис. 3.13, *б*), что $\mathbf{v}_{12}$ направлена под углом 45° к скорости автомобиля 2. Величина скорости равна

$$v_{12} = \sqrt{(11{,}1\ \text{м/с})^2 + (11{,}1\ \text{м/с})^2} = 15{,}7\ \text{м/с}$$

(56,5 км/ч).

## 3.7. Векторная кинематика

После того как мы ввели векторы, наши определения скорости и ускорения можно формально обобщить на случай движения в двух и трех измерениях.

Предположим, что на плоскости $xy$ частица описывает траекторию, изображенную на рис. 3.14. В момент времени $t_1$ частица находится в точке $P_1$, а в момент времени $t_2$ – в точке $P_2$. Вектор $\mathbf{r}_1$ представляет собой вектор положения (радиус-вектор) частицы в момент времени $t_1$ (он соответствует перемещению частицы из начала системы координат), а $\mathbf{r}_2$ – радиус-вектор частицы в момент времени $t_2$.

В случае одномерного движения мы определили перемещение частицы как *изменение ее положения*. В более общем случае двух или трех измерений используется **вектор перемещения**, который определяется как вектор, описывающий изменение положения частицы. Обозначим его через $\Delta\mathbf{r}$[1)], причем

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Это и есть перемещение за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. В записи через единичные векторы мы имеем

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}; \qquad (3.7a)$$

здесь $x_1$, $y_1$ и $z_1$ – координаты точки $P_1$ (рис. 3.14). Аналогично

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

---

[1)] В начале этой главы для простых случаев в качестве вектора перемещения использовался вектор **D**. Введение здесь нового обозначения указывает на то, что этот вектор соответствует разности двух радиус-векторов частицы, что позволит более легко рассматривать как малые, так и значительные перемещения.

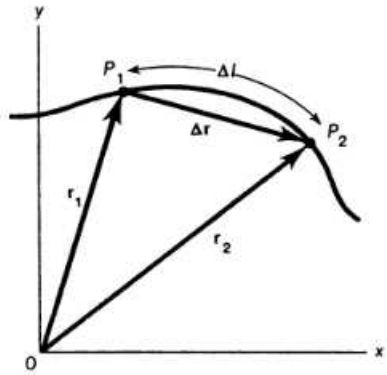



Рис. 3.14. Траектория движения частицы в плоскости $xy$. В момент времени $t_1$ частица находится в точке $P_1$ (ее положение дается вектором $\mathbf{r}_1$), а в момент времени $t_2$ – в точке $P_2$ (ее положение здесь дается вектором $\mathbf{r}_2$). Вектор перемещения за интервал времени $t_2 - t_1$ равен $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Следовательно,

$$\Delta\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}. \qquad (3.7б)$$

Если движение происходит только вдоль оси $x$, то $y_2 - y_1 = 0$ и $z_2 - z_1 = 0$, а величина перемещения равна $\Delta r = x_2 - x_1$, что совпадает с приведенным выше одномерным соотношением (разд. 2.4). Даже в одном измерении перемещение является вектором, так же как скорость и ускорение.

**Вектор средней скорости** $\bar{\mathbf{v}}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется как

$$\bar{\mathbf{v}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t. \qquad (3.8)$$

Поскольку $\mathbf{v}$ является произведением вектора $\Delta\mathbf{r}$ на скаляр $1/\Delta t$, направление вектора $\mathbf{v}$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$, а величина скорости равна $\Delta r/\Delta t$.

Будем теперь рассматривать все более короткие интервалы времени, т.е. устремим $\Delta t$ к нулю, так чтобы расстояние между точками $P_2$ и $P_1$ тоже устремилось к нулю. Мы определяем **вектор мгновенной скорости** как предел средней скорости при стремлении $\Delta t$ к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (3.9)$$

В любой момент времени (скажем, в точке $P_1$ на рис. 3.14) скорость $\mathbf{v}$ направлена вдоль касательной к траектории в данной точке (рис. 3.15).

Следует заметить, что средняя скорость на рис. 3.14, определяемая по перемещению $\Delta\mathbf{r}$, не равна средней путевой скорости (т.е. пройденному телом пути $\Delta l$, деленному на $\Delta t$). В некоторых случаях эти средние скорости совпадают (например, при движении по прямой в одном направлении), но в общем случае они различны. Однако в пределе $\Delta t \to 0$ величина $\Delta r$ всегда стремится к $\Delta l$, так что мгновенные скорости для обоих определений скорости в любой момент времени совпадают.

Мгновенная скорость [выражение (3.9)] равна произ-

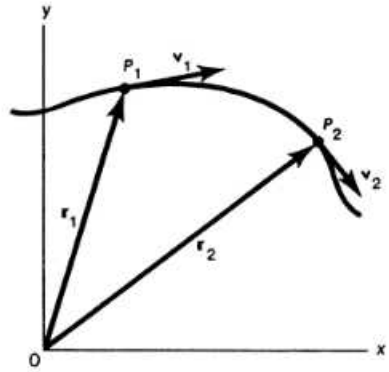



Рис. 3.15. Векторы скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в моменты времени соответственно $t_1$ и $t_2$ для частицы на рис. 3.14.

водной от радиус-вектора по времени. Выражение (3.9) можно записать через проекции вектора[1] [см. также выражение (3.7а)] в виде

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} =$$

$$= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \tag{3.10}$$

где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ и $v_z = dz/dt$ являются проекциями скорости на оси $x$, $y$ и $z$.

Ускорение в двух или трех измерениях рассматривается аналогичным образом. **Вектор среднего ускорения** $\bar{\mathbf{a}}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется как

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}, \tag{3.11}$$

где $\Delta\mathbf{v}$ – изменение вектора мгновенной скорости за этот промежуток времени: $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Заметим, что во многих случаях (например, в изображенном на рис. 3.15) $\mathbf{v}_2$ может не совпадать по направлению с $\mathbf{v}_1$; следовательно, $\bar{\mathbf{a}}$ может иметь направление, отличное как от $\mathbf{v}_1$, так и от $\mathbf{v}_2$. Кроме того, скорости $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$ могут иметь одинаковые абсолютные значения и различные направления, и разность двух таких векторов не будет равна нулю. Следовательно, ускорение может возникнуть как за счет изменения величины скорости, так и за счет изменения ее направления (или за счет изменения того и другого).

**Вектор мгновенного ускорения** по определению равен пределу вектора среднего ускорения при стремлении промежутка времени к нулю

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{3.12}$$

т. е. равен производной от $\mathbf{v}$ по $t$. Используя проекции, мы

---

[1] Заметим, что $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = d\mathbf{k}/dt = 0$, поскольку эти единичные векторы имеют постоянные величины и направления.

имеем

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} =$$
$$= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \qquad (3.13)$$

Мгновенное ускорение отлично от нуля не только при изменении величины скорости, но и при изменении ее направления. Например, человек в автомобиле, движущемся с постоянной скоростью по криволинейному пути, будет испытывать ускорение из-за изменения направления скорости, несмотря на то что величина скорости оставалась постоянной (подробнее об этом см. в следующих разделах).

Как правило, мы будем пользоваться терминами «скорость» и «ускорение», имея в виду мгновенные значения. Если нам потребуются средние значения, мы будем явно это указывать.

В гл. 2 мы изучили важный случай одномерного движения с постоянным ускорением. Рассмотрим теперь движение в двух или трех измерениях, при котором как величина, так и направление вектора ускорения **a** не меняются; иными словами, $a_x = \text{const}$, $a_y = \text{const}$, $a_z = \text{const}$. В этом случае среднее ускорение равно мгновенному ускорению в любой момент времени. Полученные в гл. 2 выражения для одномерного движения (2.9) по отдельности применимы для каждой составляющей двух- или трехмерного движения. В двумерном случае запишем начальную скорость в виде $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j}$ и воспользуемся выражениями (3.7а), (3.10) и (3.13) соответственно для радиус-вектора **r**, скорости **v** и ускорения **a**. Тогда для случая двух измерений можно записать следующие формулы:

Движение с постоянным ускорением

| $x$-проекция | $y$-проекция | |
|---|---|---|
| $v_x = v_{x0} + a_x t$ | $v_y = v_{y0} + a_y t$ | (3.14а) |
| $x = x_0 + v_{x0}t + (1/2)a_x t^2$ | $y = y_0 + v_{y0}t + (1/2)a_y t^2$ | (3.14б) |
| $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$ | $v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$ | (3.14в) |

Первые две строки из этой таблицы [формулы (3.14а) и (3.14б)] можно записать с помощью векторных обозначений [см. выражения (3.7а), (3.10) и (3.13)]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \qquad (3.15а)$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + (1/2)\mathbf{a}t^2. \qquad (3.15б)$$

Здесь вектор **r** указывает положение тела в произвольный момент времени, а $\mathbf{r}_0$ – вектор положения при $t = 0$. На практике обычно пользуются записью соотношений для проекций (3.14). В некотором смысле соотношения для проекций являются независимыми, однако они все же взаимосвязаны, так как выражения и для $x$, и для $y$

содержат одну и ту же переменную, а именно время $t$.

Эти выражения и особенности их применения станут понятнее в процессе их использования. В следующем разделе мы рассмотрим некоторые виды движения на плоскости, встречающиеся в повседневной жизни: баллистическое движение и вращательное движение.

## 3.8. Баллистическое движение

**Баллистическое движение** – это движение тела, брошенного под углом к горизонту. Для простоты будем рассматривать движение тел вблизи земной поверхности. Примерами этого являются движение брошенного бейсбольного мяча, полет пули и прыжок спортсмена в высоту. Хотя сопротивление воздуха нередко оказывается существенным, во многих случаях его действием можно пренебречь, что мы и сделаем при последующем анализе. Мы здесь не будем интересоваться самим процессом броска или выстрела, а изучим движение тела после броска, когда оно движется в воздухе свободно под действием силы тяжести. Таким образом, единственное ускорение, которое будет испытывать тело[1], – это ускорение свободного падения $\mathbf{g}$, направленное вниз и имеющее величину $g = 9{,}80$ м/с$^2$.

Первым, кто правильно описал баллистическое движение, был Галилей; он показал, что это движение можно полностью описать, анализируя горизонтальную и вертикальную составляющие движения по отдельности. Это был совсем новый метод; до Галилея никто ничего подобного не делал. (Следует заметить, что это рассмотрение было также идеализированным, поскольку оно не учитывало сопротивления воздуха.)

Предположим, что тело, запущенное в воздух (рис. 3.16) под углом $\theta_0$ к горизонтали, имеет начальную скорость $\mathbf{v}_0$. (Если тело выстреливают в пространство над

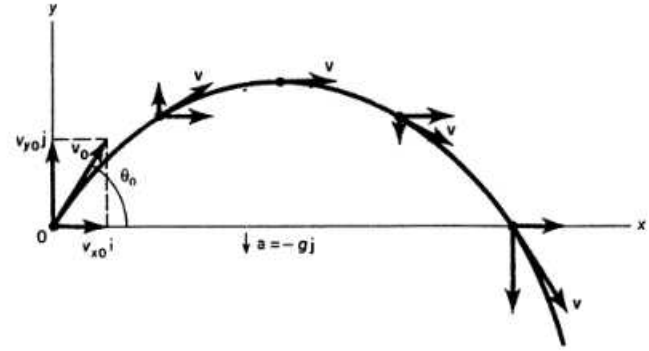



Рис. 3.16. Движение снаряда, вылетевшего из пушки с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ под углом $\theta_0$ к горизонту.

[1] Мы рассмотрим движение тел при броске только на высоту, небольшую по сравнению с радиусом Земли ($R_3 \approx 6.4 \times 10^6$ м), так что $\mathbf{g}$ можно считать постоянным.

линией горизонта, то угол $\theta_0$ является положительным, а если вниз от линии горизонта, то $\theta_0$ отрицателен.) Выберем систему прямоугольных координат таким образом, чтобы движение происходило в плоскости $xy$, причем ось $y$ выбирается направленной вертикально, так что тело будет испытывать ускорение только вдоль оси $y$. Таким образом,

$$a_x = 0, \quad a_y = -g.$$

Кроме того, выберем начало системы координат в точке, из которой тело начинает свое движение (например, когда бейсбольный мяч покидает руку бросающего), т. е. мы имеем $x_0 = y_0 = 0$, и положим начальный момент времени $t_0 = 0$. Начальная скорость $\mathbf{v}_0$ имеет следующие проекции:

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 \cos\theta_0, \\ v_{y0} &= v_0 \sin\theta_0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Поскольку $a_x = 0$, горизонтальное движение происходит с постоянной скоростью, и, следовательно, из выражений (3.14а) и (3.14б) имеем

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{[баллистическое движение]}, \tag{3.17}$$

$$x = v_{x0} t \quad \text{[баллистическое движение]}. \tag{3.18}$$

Движение по вертикали будет происходить с ускорением $a_y = -g$, и поэтому из выражений (3.14) следуют

$$v_y = v_{y0} - gt \quad \text{[баллистическое движение]}, \tag{3.19}$$

$$y = v_{y0} t - (1/2) g t^2 \quad \text{[баллистическое движение]}, \tag{3.20}$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gy \quad \text{[баллистическое движение]}. \tag{3.21}$$

Если снаряд вылетел под некоторым углом вверх (рис. 3.16), то ясно, что скорость $v_y$ с течением времени уменьшается и становится равной нулю в наивысшей точке полета; из (3.19) мы видим, что это произойдет в момент времени $t = v_{y0}/g$. В моменты времени, следующие за этим, $v_y$ становится отрицательной и, оставаясь отрицательной, возрастает по величине с течением времени, как видно из рис. 3.16. Заметим, что тело в баллистическом движении может пересечь ось $x$, если исходная точка броска ($x_0 = y_0 = 0$) находилась выше, чем точка приземления.

Интересный частный случай имеет место, когда начальная скорость тела направлена горизонтально, т. е. $\theta_0 = 0$. Примерами этого являются мяч, скатившийся с края стола, и пуля, вылетевшая из ружья, которое держали горизонтально. В этом случае $v_{y0} = 0$, и мы имеем $v_y = -gt$ и $y = -(1/2) g t^2$. Следовательно, движение по вертикали здесь является движением свободно падающего тела. Таким образом, мы видим (и сам Галилей предсказал это на основе своего рассмотрения), что тело, брошенное горизонтально, упадет на землю одновременно с телом, падающим вертикально без начальной скорости.

**Пример 3.6.** Камень бросают в горизонтальном направлении со скалы высотой 115 м. Он падает на землю на расстоянии 92,5 м от ее подножия. С какой скоростью был брошен камень?

**Решение.** Сначала вычислим время, через которое камень упал на землю. Начальная скорость направлена горизонтально, так что вертикальная проекция скорости ($v_{y0}$) равна нулю. В этом случае выражение (3.20) запишется в виде $y = -(1/2)gt^2$, а поскольку $y = -115$ м, из этого выражения получаем

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{230 \text{ м}}{9{,}80 \text{ м/с}^2}} = 4{,}84 \text{ с}.$$

Чтобы вычислить начальную скорость $v_{x0}$, воспользуемся выражением (3.18):

$$v_{x0} = \frac{x}{t} = \frac{92{,}5 \text{ м}}{4{,}84 \text{ с}} = 19{,}1 \text{ м/с}.$$

**Пример 3.7.** По футбольному мячу ударяют таким образом, что он взлетает под углом $\theta_0 = 37°$ со скоростью 20,0 м/с, как показано на рис. 3.16. Вычислите: а) максимальную высоту полета мяча; б) время в полете до падения мяча на землю; в) расстояние от исходной точки до точки падения на землю. Для простоты предположим, что мяч отделяется от ноги футболиста на уровне земли.

**Решение.** Запишем проекции начальной скорости:

$$v_{x0} = v_0 \cos 37{,}0° = (20{,}0 \text{ м/с})\,(0{,}799) = 16{,}0 \text{ м/с},$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 37{,}0° = (20{,}0 \text{ м/с})\,(0{,}602) = 12{,}0 \text{ м/с}.$$

а) Максимальной высоты мяч достигнет, когда $v_y$ становится равной нулю, а в соответствии с выражением (3.19) это имеет место в момент времени $t = v_{y0}/g = (12{,}0 \text{ м/с})/(9{,}80 \text{ м/с}^2) = 1{,}22$ с. Из выражения (3.20) находим

$$y = v_{y0}t - (1/2)gt^2 = (12{,}0 \text{ м/с})\,(1{,}22 \text{ с}) - (1/2)\,(9{,}80 \text{ м/с}^2)\,(1{,}22 \text{ с})^2 = 7{,}35 \text{ м}.$$

Высоту $y$ можно вычислить также, используя уравнение (3.21):

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12{,}0 \text{ м/с})^2 - (0 \text{ м/с})^2}{2\,(9{,}80 \text{ м/с}^2)} = 7{,}35 \text{ м}.$$

б) Чтобы найти время, необходимое мячу для возвращения на землю, воспользуемся уравнением (3.20) и положим $y = 0$ (уровень земли):

$$y = v_{y0}t - (1/2)gt^2,$$

$$0 = (12{,}0 \text{ м/с})\,t - (1/2)\,(9{,}80 \text{ м/с}^2)\,t^2,$$

откуда

$$t = \frac{2\,(12{,}0 \text{ м/с})}{(9{,}80 \text{ м/с}^2)} = 2{,}45 \text{ с}$$

(решение $t = 0$ также удовлетворяет уравнению, однако оно соответствует начальной точке, координата $y$ которой также равна нулю).

в) Полное пройденное расстояние в направлении оси $x$ находим из уравнения (3.18):

$$x = v_{x0}t = (16{,}0 \text{ м/с})\,(2{,}45 \text{ с}) = 39{,}2 \text{ м}.$$

Траектория брошенного тела, описываемая им в пространстве (при отсутствии сопротивления воздуха), представляет собой параболу. Чтобы показать это, найдем $y$ в зависимости от $x$, исключив время из уравнений (3.18) и (3.20). Из (3.18) имеем $t = x/v_{x0}$, что после подстановки в (3.20) дает

$$y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^2}\right)x^2. \qquad (3.22)$$

Используя здесь выражения (3.16), получаем

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2. \qquad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) следует, что $y$ как функция $x$ имеет вид хорошо известного уравнения параболы:

$$y = ax - bx^2,$$

где $a$ и $b$ – постоянные, соответствующие конкретному баллистическому движению.

**Пример 3.8.** а) Вычислите дальность полета снаряда $R$, которая определяется как расстояние, которое снаряд пролетает по горизонтали до возвращения на исходную высоту $y = 0$ (как правило, на поверхность земли). б) Предположим, что одна из пушек времен Наполеона имела дульную скорость $v_0 = 60{,}0$ м/с. Под каким углом нужно было нацелить эту пушку, чтобы поразить мишень на расстоянии 320 м (без учета сопротивления воздуха)?

**Решение.** а) Чтобы найти общее выражение для $R$, положим в уравнении (3.20) $y = 0$ и решим его относительно $t$. Это даст нам два решения: $t = 0$ и $t = 2v_{y0}/g$. Первое соответствует начальному моменту времени снаряда, а второе ($t = 2v_{y0}/g$) – моменту времени, когда снаряд вернется на высоту $y = 0$. Подставляя полученное значение $t$ в уравнение (3.18), получаем дальность

$$R = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}.$$

Здесь мы воспользовались тригонометрическим тождеством $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$. Видно, что при данной начальной скорости наибольшая дальность стрельбы достигается, когда синус принимает свое максимальное значение, а именно 1,0; это имеет место при $2\theta_0 = 90°$. Следовательно, наибольшая дальность стрельбы реализуется при $\theta_0 = 45°$. (Если учитывать сопротивление воздуха, то при том же значении $v_0$ дальность стрельбы окажется меньше, а наибольшая дальность достигается при угле, меньшем 45°.) Заметим, что максимальная дальность увеличивается пропорционально квадрату скорости $v_0$; следовательно, увеличивая дульную скорость пушки, скажем, в два раза, мы получим в четыре раза большую максимальную дальность.

б) Из полученного в п. «а» выражения следует, что

$$\sin 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{(320\text{ м})\,(9{,}80\text{ м/с}^2)}{(60{,}0\text{ м/с})^2} = 0{,}871.$$

Таким образом, $2\theta_0 = 60{,}6°$ или $180° - 60{,}6° = 119{,}4°$, откуда

$\theta_0 = 30{,}3°$ или $59{,}7°$.

При выстреле под любым из этих углов мы получим одну и ту же дальность стрельбы.

Во многих случаях интерес представляет расстояние, пролетаемое телом по горизонтали, когда полет не кончается на высоте $y = 0$. В некоторых случаях $y$ может быть больше нуля (например, при стрельбе из лука по цели, находящейся на дереве). Иногда $y$ может быть и меньше нуля, например когда с самолета сбрасывают продовольствие жертвам наводнения. (Заметим, что угол $\theta_0$ является отрицательным, если тело бросают в направлении ниже линии горизонта.) В этом случае выражения, полученные в примере (3.8), применять нельзя, а необходимо вернуться к исходным уравнениям и использовать соответствующие значения $y$ и других переменных.

## 3.9. Равномерное вращательное движение

При движении тела по окружности с постоянной по величине скоростью $v$ говорят, что оно совершает **равномерное вращательное движение**. Примерами этого являются движение шарика, раскручиваемого на веревке вокруг головы, и почти равномерное вращение Луны вокруг Земли. Хотя при таком движении величина скорости остается постоянной, направление ее непрерывно изменяется (рис. 3.17). Поскольку ускорение определяется как быстрота изменения скорости, изменение направления скорости дает вклад в ускорение точно так же, как и изменение величины скорости. Таким образом, тело, совершающее равномерное вращательное движение, ускоряется. Теперь изучим это ускорение количественно.

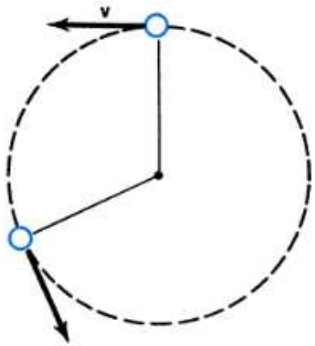


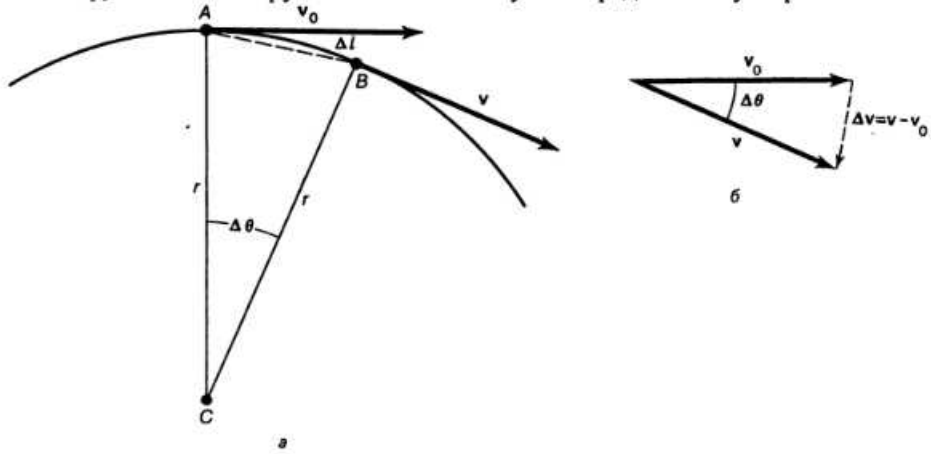

Рис. 3.17. Изменение скорости частицы, движущейся по окружности. Заметьте, что в любой момент времени мгновенная скорость направлена по касательной к круговой траектории.

Ускорение определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

где $\Delta \mathbf{v}$ – изменение скорости за малый промежуток времени $\Delta t$. Нас интересует в конечном счете ситуация, когда $\Delta t$ стремится к нулю, т. е. когда мы имеем дело с мгновенным ускорением. Но для ясности рисунка рассмотрим промежуток времени, отличный от нуля (рис. 3.18). За время $\Delta t$ тело на рис. 3.18, *а* переместится из точки $A$ в точку $B$, пройдя небольшое расстояние $\Delta l$, которое стягивается малым углом $\Delta\theta$. Изменение вектора скорости равно $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \Delta \mathbf{v}$. Если перенести $\mathbf{v}_0$ в правую часть этого равенства, то мы получим $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}$. Таким образом, $\Delta \mathbf{v}$ складывается с $\mathbf{v}_0$, что в сумме дает $\mathbf{v}$. Поэтому на рис. 3.18, *б* $\Delta \mathbf{v}$ – это вектор, показанный штриховой линией. Из этой диаграммы видно, что если $\Delta t$ очень мало (стремится к нулю) и, следовательно, $\Delta l$ и $\Delta\theta$ также очень малы, то вектор $\mathbf{v}$ будет почти параллелен $\mathbf{v}_0$, а $\Delta \mathbf{v}$ почти перпендикулярен им, т. е. вектор $\Delta \mathbf{v}$ направлен к центру окружности. Поскольку по определению ускорение $\mathbf{a}$ сов-

Рис. 3.18. Определение изменения скорости $\Delta \mathbf{v}$ частицы, движущейся по окружности.



падает по направлению с $\Delta\mathbf{v}$, оно тоже направлено к центру окружности. Поэтому это ускорение называют **центростремительным ускорением**; мы будем его обозначать как $\mathbf{a}_c$.

Теперь, когда мы определили направление ускорения, найдем величину центростремительного ускорения $a_c$. На рис. 3.18, *б* векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ и $\Delta\mathbf{v}$ образуют треугольник, который подобен треугольнику $ABC$ на рис. 3.18, *а*. Это следует из того факта, что угол между $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}$ равен $\Delta\theta$ ($\Delta\theta$ – угол, образуемый прямыми $CA$ и $CB$), поскольку $CB$ перпендикулярна $\mathbf{v}$, а $CA$ перпендикулярна $\mathbf{v}_0$. Таким образом, мы можем записать

$$\Delta v/v \approx \Delta l/r,$$

или

$$\Delta v \approx (v/r)\,\Delta l.$$

Если $\Delta t$ стремится к нулю, то последние равенства выполняются точно, поскольку при этом длина дуги $\Delta l$ равна длине хорды $AB$. Чтобы найти величину центростремительного ускорения $a_c$, воспользуемся последним выражением для $\Delta v$. Таким образом, мы имеем

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\,\Delta l}{r\,\Delta t},$$

а поскольку

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

представляет собой скорость тела $v$, получаем

$$a_c = v^2/r. \tag{3.24}$$

Подведем итоги. Мы нашли, что тело, движущееся по окружности радиусом $r$ с постоянной скоростью $v$, обладает ускорением, направленным к центру окружности, величина которого равна $a_c = v^2/r$. Неудивительно, что это ускорение зависит от $v$ и $r$. Чем больше скорость $v$, тем быстрее она меняет свое направление, а чем больше радиус, тем медленнее изменяется направление скорости. Впервые это соотношение было получено во второй половине 17 в. независимо Ньютоном и Гюйгенсом.

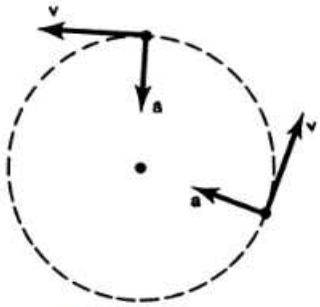



Рис. 3.19. При равномерном вращательном движении вектор ускорения **a** всегда перпендикулярен скорости **v**.

Следует заметить, что для описания различных видов движения не существует какого-либо общего соотношения между направлениями **v** и **a**. В случае прямолинейного движения (например, когда тела падают по вертикали) **v** и **a** направлены параллельно друг другу. В случае же равномерного вращательного движения они перпендикулярны друг другу (рис. 3.19), поскольку скорость **v** направлена по касательной к окружности, а ускорение **a** направлено к ее центру; при этом направления как **v**, так и **a** непрерывно изменяются. В общем случае баллистического движения (имеющего как вертикальную, так и горизонтальную

составляющую) **a** постоянно и по величине, и по направлению (направлено вниз, а величина его равна ускорению свободного падения $g$) и образует со скоростью **v** различные углы по мере прохождения баллистической траектории (рис. 3.16).

При рассмотрении свободного падения и баллистического движения, поскольку в этих случаях **a** постоянно как по величине, так и по направлению, можно пользоваться кинематическими уравнениями для случая движения с постоянным ускорением [уравнения (2.9) или (3.14)]. Однако в случае равномерного вращательного движения их применять *нельзя*, поскольку направление ускорения изменяется.

**Пример 3.9.** Спутник вывели на круговую орбиту на высоте 200 км от поверхности Земли. Ускорение свободного падения на этой высоте составляет всего лишь 9,20 м/с$^2$. Вычислите скорость спутника и период его обращения (время совершения одного оборота).

**Решение.** Радиус Земли равен приблизительно 6400 км. Следовательно, радиус орбиты спутника равен (6400 км + + 200 км) = 6600 км = $6{,}6 \cdot 10^6$ м. Спутник имеет центростремительное (в направлении к центру Земли) ускорение $a_c = 9{,}20$ м/с$^2$. (Если бы у спутника не было этого ускорения, то он улетел бы по прямой, касательной к траектории движения.) Следовательно, из выражения (3.24) при $a_c = 9{,}20$ м/с$^2$ получаем

$$v = \sqrt{ra_c} = \sqrt{(6{,}6 \cdot 10^6 \text{ м})\,(9{,}20 \text{ м/с}^2)} = 7{,}8 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Поскольку скорость $v$ равна расстоянию, деленному на время, то время $T$, за которое спутник совершает один оборот (расстояние равно $2\pi r$), равно

$$T = 2\pi r/v = (6{,}28)\,(6{,}6 \cdot 10^6 \text{ м})/(7{,}8 \cdot 10^3 \text{ м/с}) = 5{,}3 \cdot 10^3 \text{ с},$$

или 88 мин.

**Пример 3.10.** Луна обращается вокруг Земли почти по круговой орбите. Радиус орбиты приблизительно равен 385 000 км, а период обращения 27,3 сут. Найдите величину ускорения $a_c$ Луны при движении вокруг Земли.

**Решение.** Скорость движения Луны по орбите вокруг Земли

$$v = 2\pi r/T = \frac{(6{,}28)\,(3{,}85 \cdot 10^8 \text{ м})}{(27{,}3 \text{ сут})\,(24{,}0 \text{ ч/сут})\,(3600 \text{ с/ч})} = 1{,}02 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Следовательно,

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}02 \cdot 10^3 \text{ м/с})^2}{(3{,}85 \cdot 10^8 \text{ м})} = 2{,}73 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$$

или $a_c \approx 2{,}78 \cdot 10^{-4} g$, где $g = 9{,}80$ м/с$^2$ – ускорение свободного падения на поверхности Земли[1].

[1] Заметим, что ускорение $a \approx 2{,}78 \cdot 10^{-4} g$ *не* является ускорением свободного падения тел на Луне, обусловленным силой тяжести Луны. На самом деле это ускорение вызвано действием силы тяжести Земли на любое тело (в том числе и такое, как Луна), находящееся на расстоянии 385 000 км от Земли.

## 3.10. Неравномерное вращательное движение

Если скорость частицы, вращающейся по окружности, изменяется по величине, то наряду с центростремительным ускорением $\mathbf{a}_c$ будет иметь место и тангенциальное ускорение $\mathbf{a}_t$. Тангенциальное ускорение возникает из-за изменения величины вектора скорости:

$$a_t = dv/dt\,. \tag{3.25}$$

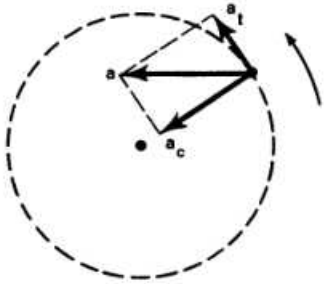



Рис. 3.20. При неравномерном вращательном движении ускорение имеет как тангенциальную ($\mathbf{a}_t$), так и центростремительную ($\mathbf{a}_c$) составляющую.

Центростремительное же ускорение обусловлено изменением направления скорости (что мы уже показали), и его величина равна

$$a_c = v^2/r\,.$$

Тангенциальное ускорение всегда направлено по касательной к окружности, и, если скорость увеличивается, его направление совпадает с направлением движения (параллельно $\mathbf{v}$), как показано на рис. 3.20 для тела, движущегося против часовой стрелки. Если же скорость уменьшается, то направление $\mathbf{a}_t$ противоположно вектору скорости $\mathbf{v}$. В любом случае $\mathbf{a}_t$ и $\mathbf{a}_c$ всегда перпендикулярны друг другу, а их направления непрерывно меняются по мере движения тела по круговой траектории. Вектор полного ускорения $\mathbf{a}$ является суммой этих двух ускорений:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c\,. \tag{3.26}$$

Поскольку $\mathbf{a}_c$ и $\mathbf{a}_t$ всегда перпендикулярны друг другу, величина ускорения $\mathbf{a}$ в любой момент времени равна

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}\,.$$

Во многих случаях при описании вращательного движения удобно использовать полярные координаты $r$ и $\theta$; краткое рассмотрение этого дается в приложении В.

### Заключение

Величина, характеризующаяся числовым значением и направлением, называется *вектором*. Величина, которая имеет лишь числовое значение, называется *скаляром*.

Векторы можно складывать графически, помещая начало каждого последующего вектора (графически изображается стрелкой) в конец предыдущего. Суммарный (или результирующий) вектор изображается стрелкой, проведенной из начала первого вектора суммы в конец последнего. Два вектора можно также складывать, пользуясь методом параллелограмма. Более точное сложение векторов осуществляется с помощью аналитических методов сложения их *составляющих* вдоль выбранных осей координат с использованием тригонометрических функций. Во многих случаях полезно представлять вектор через его составляющие вдоль выбранных осей, используя *единичные векторы*. Они представляют собой векторы единич-

ной длины, направленные вдоль выбранных осей координат. В прямоугольной декартовой системе координат единичные векторы по осям $x$, $y$ и $z$ обозначаются соответственно **i**, **j** и **k**.

Скорость тела относительно некоторой системы отсчета можно определить путем векторного сложения его скорости в другой системе отсчета со скоростью этой второй системы отсчета относительно первой.

Мгновенная *скорость* **v** и мгновенное *ускорение* **a** частицы (в одном, двух и трех измерениях) определяются следующими общими выражениями:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ и } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

где **r** – радиус-вектор частицы. Уравнения кинематики для равноускоренного движения можно записать для каждой из $x$-, $y$- и $z$-составляющих этого движения. Они имеют тот же вид, что и в случае одномерного движения [уравнения (2.9) заменяются уравнениями (3.14)]. Кроме того, их можно записать в более общей векторной форме [уравнения (3.15)].

*Баллистическое движение* (движение тела над поверхностью Земли), если пренебречь сопротивлением воздуха, можно рассматривать как два отдельных движения: движение по горизонтали с постоянной скоростью и движение по вертикали с постоянным ускорением $g$ (т.е. движение тела, падающего вертикально вниз), но только в том случае, когда движение происходит не очень высоко над поверхностью Земли.

Движение тела по окружности радиусом $r$ с постоянной скоростью $v$ называется *равномерным вращательным движением*. Это движение характеризуется *центростремительным ускорением* $a_c$, направленным к центру окружности и имеющим величину

$$a_c = v^2/r.$$

Если величина скорости такого движения изменяется, то в этом случае мы имеем как центростремительное, так и тангенциальное ускорение.

## Вопросы

1. Один автомобиль едет на восток со скоростью 40 км/ч, а другой – на север со скоростью 40 км/ч. Одинаковы ли их скорости? Объясните.
2. Можно ли сделать вывод о том, что автомобиль не ускоряется, если его спидометр постоянно показывает 60 км/ч?
3. Можете ли вы привести несколько примеров движения тела, при котором оно проходит большое расстояние, а перемещение его равно нулю?
4. Может ли вектор перемещения частицы, движущейся в двух измерениях, быть длиннее, чем путь, пройденный частицей за тот же промежуток времени? Может ли он быть короче? Объясните.
5. На тренировке игрок в бейсбол бросает мяч очень высоко, а затем бежит по прямой и ловит его. Чье перемещение больше, игрока или мяча?
6. Если $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, будет ли $V$ обязательно больше, чем $V_1$ и $V_2$? Объясните.
7. Один из двух векторов имеет длину $V_1 = 3{,}5$ км, а другой – длину $V_2 = 4{,}0$ км. Опре-

делите максимальную и минимальную величины их векторной суммы.

8. Могут ли два вектора с неодинаковыми длинами при сложении дать нулевой вектор? Может ли это произойти в случае *трех* неодинаковых по длине векторов?

9. Может ли величина вектора а) быть равна или б) быть меньше, чем одна из его составляющих?

10. Может ли частица, движущаяся с постоянной скоростью, вычисляемой по пути, ускоряться? А будет ли она ускоряться при движении с постоянной скоростью, но определяемой по перемещению?

11. Может ли вектор с равной нулю величиной иметь составляющую, не равную нулю?

12. Каковы единицы измерения единичных векторов?

13. Что измеряет одометр (путемер) автомобиля – скалярную или векторную величину? Что измеряет спидометр?

14. Два автомобиля с одинаковыми скоростями приближаются к перекрестку под прямым углом друг к другу. Обязательно ли они столкнутся? Покажите, что если относительная скорость сближения автомобилей и относительное перемещение совпадают по направлению (т. е. коллинеарны), то мы получим подтверждение морской поговорки: «Постоянный пеленг ведет к столкновению».

15. Человек, сидящий в закрытом вагоне поезда, идущего с постоянной скоростью, подбрасывает мяч прямо вверх (в своей системе отсчета). а) В каком месте упадет мяч? Дайте ответ в случае, когда б) вагон ускоряется; в) тормозится; г) выполняет поворот; д) движется с постоянной скоростью, но испытывает сопротивление воздуха.

16. Два гребца, которые могут грести с одинаковой скоростью, начали движение через реку одновременно. Один направился прямо к противоположному берегу и был снесен течением на некоторое расстояние. Другой направился через реку вверх по течению под некоторым углом и оказался на противоположном берегу точно напротив места старта. Какой из гребцов достиг противоположного берега первым?

17. Ребенок хочет узнать, с какой скоростью из его рогатки вылетает камень. Как это сделать, пользуясь только метровой линейкой?

18. Всегда ли необходимо рассматривать баллистическое движение в трех измерениях, если сопротивлением воздуха можно пренебречь? А если сопротивлением воздуха пренебречь нельзя? Обсудите.

19. Какие факторы должен учитывать спортсмен при выполнении прыжка в длину? А прыгун в высоту?

20. В какой точке своей траектории снаряд имеет наименьшую скорость?

21. Автомобиль выполняет поворот с постоянной скоростью 50 км/ч. Будет ли отличаться его ускорение, если тот же поворот будет выполняться с постоянной скоростью 70 км/ч? Объясните.

22. Изменится ли ускорение автомобиля, если он выполняет крутой поворот со скоростью 60 км/ч, по сравнению с его ускорением на плавном повороте, который он выполняет с той же скоростью? Объясните.

## Задачи

Разделы 3.1–3.5

1. (I) Определите графически результирующий вектор трех перемещений, первое из которых имеет величину 10 м и направлено под углом 30° к северу от направления на восток, второе – величину 6 м и угол 37° к востоку от направления на север и третье – длину 12 м и угол 30° к западу от направления на юг.

2. (I) Три вектора, показанные на рис. 3.4, можно сложить шестью различными способами. Покажите графически, что независимо от способа сложения получается один и тот же результирующий вектор.

3. (I) Покажите, что вектор, представленный на рис. 3.5, *в* как «ошибочный», в действительности является разностью двух векторов. Будет ли это разность $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ или $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$?

4. (I) При сложении двух векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ мы имеем результирующий вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$. Каковы векторы $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, если а) $V = V_1 + V_2$; б) $V^2 = V_1^2 + V_2^2$; в) $V_1 + V_2 = V_1 - V_2$?

5. (I) Если $\mathbf{V} = 3{,}0\mathbf{i} - 4{,}0\mathbf{j}$, то какова должна быть скалярная величина $c$, на которую нужно умножить $\mathbf{V}$, чтобы получить $|c\mathbf{V}| = 7{,}5$?

6. (I) Если $\mathbf{V} = -2{,}5\mathbf{i} + 6{,}0\mathbf{j}$, то чему будет равна величина вектора $c\mathbf{V}$ для $c = 3{,}0$?

7. (I) Самолет летит со скоростью 1000 км/ч под углом 32,5° к западу от направления на север. а) Найдите составляющие вектора скорости в направлениях на север и запад. б) На какое расстояние на север и как далеко на запад переместится самолет за 3,00 ч?

8. (II) а) Вычислите величину и направление суммы трех следующих векторов: $\mathbf{V}_1 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{V}_3 = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. б) Найдите $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$.

9. (II) Составляющие любого вектора $\mathbf{V}$ часто записывают как $(V_x, V_y, V_z)$. Найдите составляющие и длину вектора, который представляет

собой сумму векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ с составляющими (6, 0, 2) и (1, 4, 3).

**10.** (II) Мы имеем два вектора $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, определенные в задаче 9. Найдите третий вектор $\mathbf{V}_3$, такой, что а) $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 0$; б) $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 0$.

**11.** (II) Посыльный проходит 30 м на север, 25 м на восток, 12 м на юг, а затем в здании поднимается на лифте на высоту 36 м. Чему равно его окончательное перемещение из точки старта?

**12.** (II) Определите $y$-составляющую вектора в плоскости $xy$, величина которого равна 36,5, а $x$-составляющая равна 25,4. Каково направление вектора?

**13.** (II) Пусть $\mathbf{V}_1 = 6{,}0\mathbf{i} + 3{,}0\mathbf{j}$ и $\mathbf{V}_2 = -2{,}5\mathbf{i} + 4{,}0\mathbf{j}$. Найдите величину и направление векторов а) $\mathbf{V}_1$; б) $\mathbf{V}_2$; в) $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$; г) $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$.

**14.** (II) Согласно карте, вершина горы высотой 2150 м находится на расстоянии 4750 м от лагеря в направлении 28,2° к западу от направления на север. Запишите выражение для вектора перемещения от лагеря к вершине через единичные векторы. Какова его длина? Пусть ось $x$ направлена на восток, ось $y$ – на север и ось $z$ – вверх.

Раздел 3.6

**15.** (I) Путешественник, прогуливаясь со скоростью 4,20 км/ч по палубе корабля, скорость которого относительно берега равна 9,60 км/ч, пересекает палубу поперек. Чему равна скорость путешественника относительно берега?

**16.** (I) Самолет движется на север со скоростью 425 км/ч. С юго-запада начинает дуть ветер со (средней) скоростью 55 км/ч. Вычислите а) скорость (величину и направление) самолета; б) расстояние, на которое он отклонится от курса через 15 мин.

**17.** (II) При взгляде из окна движущегося поезда капли дождя кажутся падающими косо под углом $\theta$ к вертикали. Если скорость поезда $v_T$, то чему равна скорость дождевых капель в системе отсчета, связанной с землей (в ней они считаются падающими вертикально).

**18.** (II). Скорость лодки в стоячей воде равна 2,60 м/с. а) Лодка движется перпендикулярно потоку, имеющему скорость 0,90 м/с; вычислите величину и направление скорости лодки относительно берега. б) Найдите координаты лодки относительно точки старта через 4,0 с после начала движения.

**19.** (II) В примере 3.4 определите скорость лодки относительно берега.

**20.** (II) Чтобы пересекать поток перпендикулярно течению, моторная лодка, имеющая в стоячей воде скорость 8,6 км/ч, должна направляться под углом 65° против течения. а) Какова скорость течения? б) Чему равна результирующая скорость лодки относительно берега?

**21.** (II) В стоячей воде пловчиха может развивать скорость 1,65 м/с. а) Если она переплывает поперек реку шириной 180 м, скорость течения которой 0,85 м/с, то на каком расстоянии вниз по течению (от точки, противоположной точке старта) она окажется? б) Сколько времени уйдет у нее на то, чтобы достичь противоположного берега?

**22.** (II) С каким углом упреждения должна плыть пловчиха из предыдущей задачи, если ей нужно приплыть в точку, расположенную прямо напротив места старта?

**23.** (II) Вертолет, имеющий скорость относительно воздуха 45 км/ч, летит на юг. Однако пилот заметил, что за предыдущие 50 мин вертолет пролетел 25 км на юго-запад. Какова величина скорости ветра и ее направление?

**24.** (II) Два автомобиля приближаются к перекрестку под прямым углом друг к другу. Автомобиль 1 движется со скоростью 35 км/ч, а автомобиль 2 – со скоростью 55 км/ч. Чему равна относительная скорость автомобиля 1 относительно автомобиля 2? А скорость автомобиля 2 относительно автомобиля 1?

**25.** (III) Предполагается, что самолет, имеющий скорость 550 км/ч, должен лететь по прямой под углом 33,0° к северу от направления на восток. Однако с севера дует постоянный ветер со скоростью 120 км/ч. В каком направлении должен лететь самолет?

**26.** (III) Скорость лодки в стоячей воде равна $v$. Лодка должна проплыть туда и обратно по реке со скоростью течения $u$. Получите выражение для времени, за которое лодка совершает такое плавание общей длиной $D$, если лодка плывет а) сначала против течения, а затем по течению; б) сначала поперек реки, а затем назад. Необходимо предположить, что $u < v$; почему?

**27.** (III) В разгаре погони сыщик должен пересечь реку шириной 2,0 км за минимальное время. Скорость течения реки равна 2,5 км/ч. Сыщик может грести на лодке со скоростью 4,0 км/ч, а бежать он может со скоростью 7,0 км/ч. Опишите путь, который ему лучше избрать (гребля плюс бег вдоль берега), чтобы время переправы через реку было минимальным, и вычислите это минимальное время.

Раздел 3.7

**28.** (I) Положение данной частицы как функция времени задается выражением $\mathbf{r} = 3{,}10t\mathbf{i} + 6{,}05\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$. Найдите, как будут зависеть от

времени скорость и ускорение частицы.

29. (II) Какую форму имеет траектория частицы из задачи 28?

30. (II) Найдите среднюю скорость частицы из задачи 28 в промежутке времени 1,00–3,00 с. Какова ее мгновенная скорость при $t = 2{,}00$ с?

31. (II) В некоторый момент времени автомобиль имел скорость 20,0 м/с в направлении на север, а спустя 9,00 с его скорость оказалась равной 34,6 м/с и направленной на восток. Найдите на этом интервале времени а) среднюю по перемещению скорость автомобиля; б) среднее его ускорение по перемещению (величину и направление скорости и ускорения); в) среднюю его скорость, определяемую по пути. (*Подсказка:* можно ли определить все эти величины на основании данной информации?)

32. (II) а) Лыжник движется по склону холма, имеющего уклон 30°, с ускорением 2,30 м/с$^2$. Найдите вертикальную составляющую его ускорения. б) За какое время лыжник достигнет основания холма, если перепад высот равен 180 м (считайте, что он начинает движение из состояния покоя и ускоряется равномерно)?

33. (III) Положение частицы изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = 6{,}0\cos 3{,}0t\,\mathbf{i} + 6{,}0\sin 3{,}0t\,\mathbf{j}$, причем $r$ измеряется в метрах. Найдите а) вектор скорости $\mathbf{v}$; б) вектор ускорения $\mathbf{a}$. в) Какую траекторию имеет эта частица? (*Подсказка:* вычислите $r = |\mathbf{r}|$.) г) Каково соотношение между величинами $r$ и $a$ (напишите формулу) и между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ (определите угол)? д) Покажите, что $a = v^2/r$.

Раздел 3.8 (Сопротивлением воздуха в следующих задачах пренебрегайте, если не утверждается обратное.)

34. (I) Прыгун в воду, разбегающийся со скоростью 3,2 м/с, прыгает с вершины утеса и достигает поверхности воды через 2,0 с. Какова высота утеса и на каком расстоянии от его подножья прыгун погрузится в воду?

35. (I) Тигр прыгает горизонтально со скоростью 7,0 м/с со скалы высотой 16 м. На каком расстоянии от основания скалы он приземлится?

36. (I) Брандспойт, расположенный на поверхности земли, выбрасывает воду со скоростью 15,0 м/с. Под каким углом нужно направить наконечник брандспойта, чтобы вода падала на землю на расстоянии 18 м? Почему имеются два различных угла?

37. (I) Спортсмен, совершающий прыжок в длину, отрывается от земли под углом 30° и пролетает 8,90 м. Чему равна скорость отрыва?

38. (I) Определите, на сколько длиннее может быть прыжок человека на Луне по сравнению с Землей, если скорость и угол отрыва одинаковы. Ускорение свободного падения на Луне составляет одну шестую земного.

39. (II) Мяч, брошенный горизонтально со скоростью 22,2 м/с с крыши дома, падает на расстоянии 36 м от основания дома. Вычислите высоту этого дома.

40. (II) Покажите, что скорость снаряда, с которой он выстреливается в начальной точке своего пути, равна его скорости в конце пути, при условии что высота начальной и конечной точек одинакова.

41. (II) Из самолета, движущегося со скоростью 150 км/ч, пытаются сбросить продовольствие жертвам наводнения, находящимся на островке на 250 м ниже самолета. За сколько секунд до момента пролета над головами пострадавших должно быть сброшено продовольствие?

42. (II) Охотник целится в мишень, находящуюся на одном с ним уровне и на расстоянии 250 м от него. а) Если пуля вылетает из ружья горизонтально со скоростью 550 м/с, то на каком расстоянии от мишени она пройдет? б) Под каким углом к горизонту должно быть направлено ружье для точного попадания в мишень?

43. (II) Спортсмен толкает ядро (масса ядра 7,3 кг) с начальной скоростью 14,0 м/с под углом 41° к горизонту. Вычислите расстояние, пройденное ядром по горизонтали. Ядро отрывается от руки спортсмена на высоте 2,2 м над землей.

44. (II) Мяч брошен горизонтально с вершины утеса с начальной скоростью $v_0$. В произвольный момент времени направление его движения составляет угол $\theta$ с горизонтом. Выведите формулу зависимости $\theta$ от $t$ до того, как мяч упадет на землю.

45. (II) Покажите, что время, необходимое снаряду для достижения наивысшей точки траектории, равно времени, затрачиваемому на возвращение его на исходную высоту.

46. (II) Прыгун в длину мирового класса способен прыгнуть на 8,0 м. Предположим, что его горизонтальная скорость при отрыве от земли равна 9,0 м/с (скорость спринтера мирового класса несколько выше 10 м/с). Сколько времени прыгун будет находиться в воздухе и на какую высоту он поднимется? Считайте, что он приземляется стоя вертикально, т. е. таким же образом, как он отрывается от земли.

47. (II) Выведите формулу для дальности полета $R$ снаряда, если он падает на высоте $h$ над исходной точкой. (При $h < 0$ он падает на расстоянии $-h$ ниже исходной точки.) Счи-

тайте, что снаряд вылетает под углом $\theta_0$ с начальной скоростью $v_0$.

**48.** (II) При каком угле стрельбы дальность снаряда равна максимальной высоте его полета?

**49.** (II) Замечено, что через 3,0 с после выстрела с земли пуля имеет скорость $\mathbf{v} = (8{,}9\mathbf{i} + 3{,}6\mathbf{j})$ м/с, причем ось $x$ горизонтальна, а ось $y$ направлена вверх. Определите а) дальность полета пули; б) максимальную высоту взлета над землей; в) скорость и направление ее движения перед падением на землю.

**50.** (II) Начальная скорость пули при выстреле в воздух равна 40,0 м/с. Изобразите ее траекторию на миллиметровой бумаге для случаев, когда угол стрельбы $\theta$ равен 15, 30, 45, 60, 75 и 90°. Постройте каждую кривую по крайней мере по 10 точкам.

**51.** (III) Прыгун в воду отрывается от прыжкового трамплина высотой 5,0 м и погружается в воду спустя 1,3 с на расстоянии 3,0 м от края трамплина за ним. Рассматривая прыгуна как частицу, определите а) его начальную скорость $\mathbf{v}_0$; б) максимальную высоту, которую он достигает; в) скорость $\mathbf{v}_f$, с которой он погружается в воду.

**52.** (III) Охотник нацеливает свой лук и стреляет прямо в обезьяну, свешивающуюся с ветки высокого дерева на некотором расстоянии от охотника. В момент, когда начинается полет стрелы, обезьяна падает с ветки, надеясь ускользнуть от стрелы. Покажите аналитически, что обезьяна совершает ошибочный маневр. Сопротивлением воздуха пренебрегите.

**53.** (III) Человек стоит у основания холма, склон которого образует угол $\phi$ с горизонтом. При данной начальной скорости $v_0$ под каким углом $\theta$ (к горизонту) следует бросать предметы, чтобы при падении на склон холма они достигали максимального расстояния?

**54.** (III) Баскетбольный мяч отрывается от руки игрока на высоте 2,1 м над полом. Корзина расположена на высоте 2,6 м над полом. Игрок предпочитает бросать мяч под углом 35°. Если бросок совершается с расстояния по горизонтали 12,0 м и имеет точность $\pm$ 0,22 м (по горизонтали), то каким должен быть разброс начальных скоростей, позволяющий попасть в корзину?

**55.** (III) В момент времени $t = 0$ игрок бросает бейсбольный мяч со скоростью 35 м/с под углом 55° к горизонту. Игрок, принимающий мяч, в момент времени $t = 0$ находится на расстоянии 85 м от бросающего, и, как видно с исходной позиции, линия зрения на игрока, принимающего мяч, составляет с плоскостью, в которой движется мяч, горизонтальный угол 22° (рис. 3.21). Какие скорость и направление движения должен избрать игрок, принимающий мяч, чтобы поймать его на той же высоте, с которой он был брошен? Определите угол относительно линии зрения принимающего мяч игрока на исходную позицию.

**56.** (III) С самолета, летящего со скоростью 180 км/ч на малой высоте 80,0 м, агенты полиции пытаются бросить гранату в автомобиль главаря преступников, движущийся по автостраде со скоростью 135 км/ч. Под каким углом (к горизонту) должен быть виден автомобиль из кабины самолета при сбрасывании гранаты?

Раздел 3.9

**57.** (I) Чему равно центростремительное ускорение ребенка на аттракционе «колесо смеха», если он находится в кабине на расстоянии 8,2 м от центра колеса? Скорость ребенка равна 2,1 м/с.

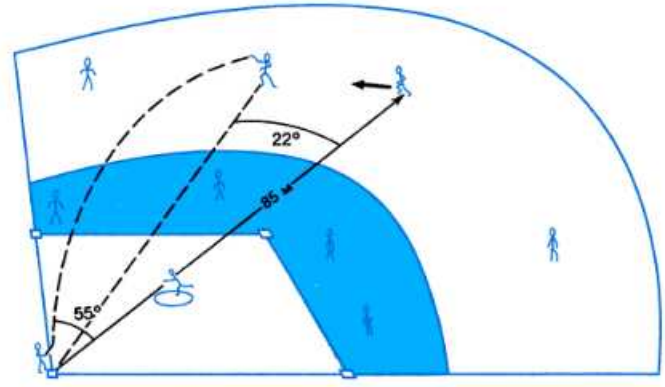



Рис. 3.21.

58. (I) Реактивный самолет, движущийся со скоростью 1800 км/ч (500 м/с), выполняет маневр и летит по дуге радиусом 3,0 км. Чему равно ускорение самолета, выраженное через $g$?

59. (I) Вычислите центростремительное ускорение Земли при движении ее по орбите вокруг Солнца. Считайте, что орбита Земли – это окружность радиусом $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м.

60. (II) а) Выведите формулу для зависимости радиуса кривизны траектории полета снаряда в наивысшей точке (рис. 3.16) от $\theta_0$ и $v_0$ (т.е. считайте, что вершина дуги полета составляет малую часть окружности). б) Чему равно «центростремительное» ускорение в этой точке?

61. (II) Из-за вращения Земли с суточным периодом ускорение свободного падения на экваторе несколько меньше, чем оно было бы, если бы Земля не вращалась. Оцените величину этого эффекта. Какую долю он составляет от величины $g$?

62. (II) Чему равна величина ускорения частицы пыли на краю грампластинки диаметром 30 см, вращающейся с частотой $33^1/_3$ об/мин?

Раздел 3.10

63. (II) Частица вращается по окружности радиусом 3,60 м. В некоторый момент времени ее ускорение, равное $0{,}210g$, направлено под углом 28,0° к направлению движения. Найдите скорость частицы а) в этот момент; б) спустя 2,00 с, считая, что тангенциальное ускорение постоянно.

64. (II) Частица, начинающая движение из состояния покоя, вращается в плоскости $xy$ по часовой стрелке с равномерно увеличивающейся скоростью. Центр окружности находится в начале системы координат $xy$. При $t = 0$ частица имеет координаты $x = 0{,}0$, $y = 2{,}0$ м. При $t = 2{,}0$ с частица находится в точке с координатами $x = 2{,}0$ м, $y = 0{,}0$, а скорость ее равна 14,0 м/с. Вычислите а) вектор средней скорости и б) вектор среднего ускорения за этот промежуток времени.

65. (II) В задаче 64 предположите, что тангенциальное ускорение постоянно, и определите составляющие мгновенного ускорения при а) $t = 0{,}0$; б) $t = 1{,}0$ с; в) $t = 2{,}0$ с.

# 4 Динамика: законы Ньютона

До сих пор мы рассматривали движение на основе понятий скорости и ускорения. Теперь займемся следующими вопросами: *Почему* тела движутся именно таким образом, а не иначе? Что заставляет покоящееся тело начать движение? Что является причиной ускорения или торможения тела? Чем вызвано движение тела по окружности? Можно было бы сказать, что в каждом из этих случаев на тело действует сила. В этой главе мы изучим связь между силой и движением. Единственное ограничение, которое мы примем, заключается в том, что рассматриваемые скорости должны быть значительно меньше, чем скорость света ($3{,}00 \cdot 10^8$ м/с). Это позволит нам не учитывать релятивистские эффекты (гл. 39). Прежде чем серьезно углубиться в *динамику*, обсудим понятие *силы* на качественном уровне.

## 4.1. Сила

Интуитивно **силу** можно определить как любой вид толчка или натяжения. Когда вы толкаете перед собой тележку с продуктами, вы действуете на нее с некоторой силой. Дети, тянущие игрушечную тележку, также прилагают к ней силу. Когда двигатель поднимает лифт, или молоток бьет по гвоздю, или ветер дует на листья дерева,–во всех этих случаях действует сила. Мы говорим, что тела падают потому, что на них действует сила тяжести. Силы не всегда вызывают движение. Например, можно очень энергично толкать тяжелый стол или холодильник, а предметы при этом могут не сдвинуться.

Независимо от того, движется или нет тело под воздействием силы, его форма всегда изменяется. Это станет очевидно, если сжать надувной шарик или толкнуть матрац. Можно также заметить и небольшую деформацию металла, если надавить на стенку холодильника или на крыло автомобиля. За счет приложения силы всегда возникает некоторая деформация, хотя в случае очень твердых тел (например, массивной стальной плиты) обнаружить ее можно лишь с помощью очень чувствительных инструментов.

Один из способов количественного измерения величи-

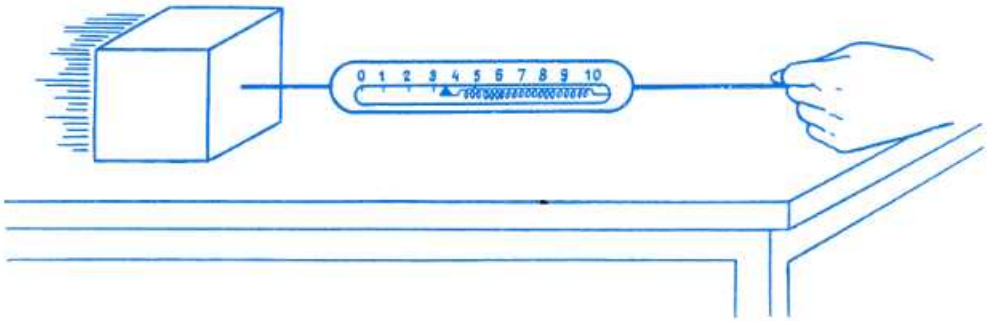



Рис. 4.1. Пружинный динамометр, используемый для измерения силы.

ны силы основан на применении пружинного динамометра (рис. 4.1). Обычно такой динамометр используют для определения действующей на тело силы тяжести (разд. 4.7). Однажды откалиброванный[1)] пружинный динамометр можно использовать и для измерения других видов сил, например для измерения силы натяжения, как показано на рис. 4.1.

Сила имеет как величину, так и направление, т. е. она является вектором и подчиняется правилам сложения векторов, рассмотренным в гл. 3. На векторной диаграмме любую силу можно изобразить в виде стрелки, как это делалось в случае скорости. Направление стрелки совпадает, очевидно, с направлением толчка или натяжения, а длина стрелки изображается на рисунке пропорциональной величине силы. Ограничимся пока определением силы как толчка или натяжения; в разд. 4.5 мы дадим более точное определение.

## 4.2. Первый закон Ньютона

В чем состоит истинная связь силы и движения? Аристотель считал, что сила нужна для того, чтобы поддерживать движение тела по горизонтальной плоскости. Согласно

[1)] Пружинный динамометр калибруют, подвешивая на нем несколько одинаковых тел равной массы (например, по одному килограмму). На шкале динамометра отмечают положение стрелки при подвешивании одной, двух, трех и т. д. единиц массы. Хотя величина растяжения пружины только приблизительно пропорциональна массе подвешенного груза (пока пружина не растянулась слишком сильно), эту особенность в нашем методе учитывать не следует. Мы лишь предполагаем, что стрелка устанавливается в одном и том же положении, когда на нее действует одна и та же сила (в данном случае сила тяжести пропорциональна массе тела). Это может служить операционным определением силы (разд. 1.5). [Об операционном методе определения физических величин см., например, в книге: *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. Изд. 2-е.– М.: Высшая школа, 1986.– *Прим. ред.*]

его аргументам, чтобы заставить книгу двигаться по столу, вы постоянно должны прилагать к ней силу. По Аристотелю, естественное состояние тела – покой, а для поддержания состояния движения необходима сила. Кроме того, Аристотель доказал, что, чем больше сила, действующая на тело, тем больше его скорость.

Спустя приблизительно 2000 лет Галилей усомнился в подобных представлениях Аристотеля (равно как и в представлениях о падении тел) и пришел к совершенно иным выводам. Галилей утверждал, что для тела столь же естественно совершать горизонтальное движение с постоянной скоростью, как и пребывать в состоянии покоя. Чтобы понять точку зрения Галилея, понаблюдаем за движением в горизонтальной плоскости, в котором не участвует сила тяжести. Чтобы толкать с постоянной скоростью по плоскости стола предмет, имеющий шероховатую поверхность, требуется некоторое усилие. Однако, чтобы толкать с той же скоростью предмет той же массы, но по столу с очень гладкой поверхностью, потребуется меньшая сила. Наконец, если между поверхностями предмета и стола поместить слой масла или какой-нибудь другой смазки, то для передвижения предмета не потребуется почти никаких усилий. (Эти наблюдения вполне могут показаться вам совершенно очевидными; в противном случае вы можете сами проделать эти несложные эксперименты.) Заметим, что в каждом из примеров сила, необходимая для поддержания движения, становилась все меньше и меньше. Следующий шаг заключается в обобщении этих фактов на случай, когда предмет совсем не испытывает трения о поверхность стола (или между ними имеется идеальная смазка). Теоретически можно себе представить, что, если однажды привести предмет в состояние движения, он будет двигаться по столу с постоянной скоростью без приложения какой-либо силы. Ситуацию, очень близкую к описанной, можно наблюдать, когда стальной шарик из подшипника катится по твердой горизонтальной поверхности.

Потребовался гений Галилея, чтобы вообразить идеализированный мир (в данном случае – мир без трения) и осознать, что он может привести к более продуктивному взгляду на реальный мир. Именно эта идеализация привела Галилея к замечательному выводу о том, что если на предмет не действует никакая сила, то он будет продолжать двигаться по прямой с постоянной скоростью. Предмет станет двигаться медленнее только в том случае, когда на него действует сила. Таким образом, Галилей рассматривал трение как силу, родственную обычным толчкам и натяжениям.

Чтобы толкать предмет по столу с постоянной скоростью, усилие руки требуется только для преодоления силы трения; в этом случае внешняя сила, приложенная к предмету, равна по величине силе трения, однако дейст-

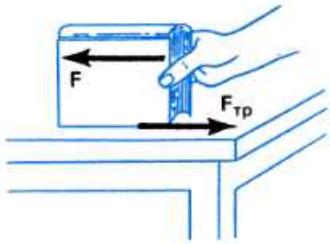



Рис. 4.2. **F** – сила со стороны человека, а $\mathbf{F}_{тр}$ – сила трения.

вуют они в противоположных направлениях, так что *результирующая сила*, действующая на предмет, равна нулю (рис. 4.2). Это согласуется с точкой зрения Галилея, поскольку предмет движется с постоянной скоростью, когда приложенная к нему результирующая сила равна нулю.

Разница между точками зрения Аристотеля и Галилея заключается не просто в том, что один прав, а другой нет. В сущности, взгляд Аристотеля не является ошибочным. Наш повседневный опыт показывает, что движущиеся предметы стремятся остановиться, если их все время не подталкивать. Важнейшее различие позиций Галилея и Аристотеля состоит в том, что взгляд Аристотеля на «естественное состояние» тел считался фактически окончательным и не оставлял возможности для дальнейшего развития. Напротив, анализ Галилея можно расширить для объяснения гораздо большего числа явлений. Совершив творческий скачок, т. е. вообразив недостижимую экспериментально ситуацию отсутствия трения и рассмотрев трение как силу, Галилей смог прийти к выводу о том, что если на предмет не действует никакая сила, то он продолжает двигаться с постоянной скоростью.

На этом фундаменте Ньютон возвел свою великую теорию движения. Ньютоновский анализ движения обобщен в его «трех законах движения». В своих знаменитых «Математических началах натуральной философии», которые были опубликованы в 1687 г. и содержали почти все его труды по вопросам движения, Ньютон прямо заявил о своей признательности Галилею. Действительно, **первый закон Ньютона** очень близок к выводам Галилея[1]. Он гласит

> **Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока действующие на него силы не выведут его из этого состояния.**

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. В силу этого первый закон Ньютона часто называют **законом инерции**.

## 4.3. Масса

Во втором законе Ньютона (который мы рассмотрим в следующем разделе) используется понятие массы. Сам Ньютон использовал термин «масса» как синоним *коли-*

---

[1] Из работ Галилея не ясно, принимал ли он существование «линейной» или «сферической» инерции (т. е. естественного движения, происходящего по сферической поверхности, например по поверхности Земли). Ньютон, а до него Декарт принимали принцип инерции для движения по прямой линии.

*чества вещества*. Это интуитивное представление о массе тела не вполне корректно, так как понятие «количество вещества» само не вполне определено. Выражаясь точнее, можно сказать, что **масса** *является мерой инертности тела*. Чем больше масса тела, тем труднее изменить характер его движения, т. е. тем труднее заставить двигаться покоящееся тело, остановить его, если оно уже движется, или свернуть с прямолинейного пути. У пианино или трактора инертность значительно больше, чем у движущегося с той же скоростью бейсбольного мяча; движение первых предметов изменить значительно труднее. Следовательно, их масса значительно больше.

Чтобы ввести понятие массы, нужно определить для нее эталон и единицу измерения. В системе СИ единицей массы является килограмм (кг). Действующий эталон массы представляет собой цилиндр из платиноиридиевого сплава, хранящийся в Международном бюро мер и весов вблизи Парижа; по определению масса этого цилиндра точно равна одному килограмму. В системе СГС единицей массы является грамм (г), причем $1\ \text{г} = 10^{-3}$ кг. [В британской системе единицей массы является слаг.] При изучении атомов и молекул часто применяется *атомная единица массы* (а. е. м.). По определению масса атома углерода ($^{12}C$) точно равна 12 а. е. м. На сегодняшний день наилучшее измеренное значение а. е. м. равно

$$1\ \text{а. е. м.} = (1{,}6605655 \pm 0{,}0000086) \cdot 10^{-27}\ \text{кг},$$

или округленно $1\ \text{а. е. м.} = 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг.

Имея единицу массы, можно построить шкалу масс (т. е. определить массу в 2 кг, 3 кг и т. д.) двояким образом. Первый метод в общем соответствует определению массы по Ньютону как «количества вещества». Он основан на использовании рычажных весов (рис. 4.3). Эталонную массу в 1 кг помещают на одну чашку весов. Утверждается, что величина любой массы, помещенной на другую чашку весов и уравновешивающей первую, точно равна 1 кг. Теперь у нас имеются две массы по 1 кг. Поместив их вместе, мы получим массу, равную 2 кг. Дробные массы можно получить, находя или изготовляя две одинаковые массы (при помещении на разные чашки весов они уравновешивают друг друга), которые вместе могут уравновесить одну массу в 1 кг. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не получится полный набор известных масс. Любая неизвестная масса может быть измерена ее уравновешиванием комбинацией известных масс. Описанный выше метод основан на том факте, что равновесие чашек рычажных весов с одинаковыми плечами имеет место, когда сила тяжести на обе взвешиваемые массы действует одинаково. Поэтому масса, определяемая таким способом, часто именуется гравитационной массой.



Рис. 4.3. Рычажные весы.

Второй метод определения шкалы масс основан на понятии инертности и втором законе Ньютона; мы опишем его в разд. 4.4, где представлению об инертной массе дается количественное обоснование. Эксперименты показывают, что оба метода полностью согласуются друг с другом[1].

Нередко путают понятие *массы* и *веса*, между которыми имеется существенное различие. Масса – это свойство самого тела (она является мерой инертности тела или его «количества вещества»). Вес же – это сила, с которой тело действует на опору или растягивает подвес (вес численно равен силе тяжести, если опора или подвес не имеют ускорения). Чтобы показать различие этих понятий, предположим, что тело помещено на Луну. При этом вес тела будет равен одной шестой веса, который тело имело бы на Земле, поскольку сила тяжести на Луне слабее. Масса же тела останется прежней; тело будет иметь то же количество вещества и ту же инертность, что и на Земле, так что в отсутствие трения будет столь же трудно привести его в движение или остановить, если оно уже движется.

## 4.4. Второй закон Ньютона

Первый закон Ньютона утверждает, что если на тело не действует результирующая сила, т. е. действие всех сил скомпенсировано, то оно продолжает пребывать в состоянии покоя, а если тело движется, то оно продолжает движение по прямой с постоянной скоростью. Но что происходит, если на тело все-таки действует сила? Ньютон понимал, что скорость тела изменится. Результирующая сила, или равнодействующая всех сил, приложенных к телу, может увеличить скорость тела. Если сила направлена против направления движения тела, то она уменьшит его скорость. Если равнодействующая сил направлена под углом к направлению движения тела, то и величина, и направление скорости тела будут меняться. Таким образом, *равнодействующая всех сил, приложенных к телу, приводит к ускорению.*

Каково точное соотношение между силой и ускорением? Ответ на этот вопрос дает простой житейский опыт. Рассмотрим силу, требующуюся для того, чтобы стронуть с места роликовый конек или тележку, обладающую очень малым трением с поверхностью. (Если трение все же существенно, рассмотрите равнодействующую силу, которая равна приложенной силе за вычетом силы трения.) Ес-

---

[1] Имеются в виду эксперименты ученых ряда стран (в том числе В. Б. Брагинского в СССР и Р. Дикке в США), с очень большой точностью (до $10^{-12}$) показавшие равенство гравитационной и инертной масс, что составляет содержание так называемого принципа эквивалентности.– *Прим. ред.*

ли в течение определенного промежутка времени толкать тележку или конек с небольшим, но постоянным усилием, то можно разогнать их из состояния покоя до некоторой скорости (например, 3 км/ч). Если толкать в два раза сильнее, то выяснится, что тележка приобрела скорость 3 км/ч за время, которое вдвое меньше, чем в предыдущем случае. Это означает, что ускорение стало в два раза больше. При удвоении силы ускорение удваивается, при утроении – увеличивается в три раза и т. д. Следовательно, ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных сил. Однако ускорение зависит также и от массы тела. Если толкнуть пустую тележку с той же силой, что и нагруженную, то выяснится, что последняя разгоняется медленнее. Чем больше масса тела, тем меньше его ускорение при данной равнодействующей силе. Действительно, как установил Ньютон, ускорение тела обратно пропорционально его массе. Оказывается, что эти частные утверждения сохраняют силу и в общем случае, и их можно сформулировать следующим образом:

**Ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей приложенных к нему сил и обратно пропорционально его массе. Тело ускоряется в направлении, совпадающем с направлением равнодействующей приложенных сил.**

В этом и состоит **второй закон Ньютона**, который можно записать в следующем виде:

$\mathbf{a} \sim \mathbf{F}/m$,

где $\mathbf{a}$ – ускорение, $m$ – масса, а $\mathbf{F}$ – равнодействующая сила. Под **равнодействующей силой** мы понимаем векторную сумму всех приложенных к телу сил. Чтобы перейти в этом выражении от знака пропорциональности к знаку равенства, необходимо ввести лишь коэффициент пропорциональности. В данном случае выбор коэффициентов произволен, поскольку мы связываем между собой величины с различными единицами измерения; поэтому можно выбрать единицу силы или массы таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности равнялся единице. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$. Преобразуя это выражение, мы получаем известное выражение второго закона Ньютона в форме равенства:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \qquad (4.1)$$

Это – векторное равенство; его левая и правая части должны совпадать как по величине, так и по направлению. Второй закон Ньютона связывает движение с вызвавшей его причиной – силой. Этот закон является одним из наиболее фундаментальных законов физики[1]. Основы-

[1] Сам Ньютон сформулировал свой второй закон движения, используя понятие импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, в виде $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, что при постоянной массе дает $\mathbf{F} = m(d\mathbf{v}/dt) = m\mathbf{a}$. Эту формулировку мы рассмотрим в гл. 8.

ваясь на уравнении (4.1), можно дать более точное определение силы как действия, способного ускорять тело (более подробно об этом см. в следующем разделе).

Единица измерения *силы* выбирается таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности во втором законе Ньютона ($\mathbf{F} \sim m\mathbf{a}$) был равен единице, и, таким образом, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Если масса измеряется в килограммах, то сила измеряется в *ньютонах* (Н). Один ньютон – это сила, необходимая для того, чтобы сообщить массе 1 кг ускорение 1 м/с$^2$. Таким образом, 1 Н = 1 кг·(м/с$^2$).

Как было отмечено выше, в системе единиц СГС единицей массы является грамм (г), а единицей силы – *дина* (дин). По определению, она равна силе, необходимой для того, чтобы сообщить массе 1 г ускорение 1 см/с$^2$, т. е. 1 дин = 1 г·(см/с$^2$). Нетрудно показать, что 1 дин = $= 10^{-5}$ Н.

В британской системе единиц сила измеряется в фунтах. По определению фунт равен величине силы тяжести (весу), действующей на тело массой 0,453592437 кг в том месте Земли, где ускорение свободного падения $g =$ $= 32{,}1734$ фут/с$^2$. Единицей массы в этой системе является *слаг*, который определяется как масса, испытывающая ускорение 1 фут/с$^2$, когда к ней прикладывается сила, равная 1 фунту. Таким образом, 1 фунт = 1 слаг × × (фут/с$^2$). Нетрудно показать, что 1 фунт = 4,45 Н[1].

Очень важно, чтобы в каждом конкретном расчете или при решении задач применялась только одна система единиц. Предпочтение следует отдавать системе СИ. Например, если сила задана в ньютонах, а масса – в граммах, то, прежде чем приступить к определению ускорения в единицах СИ, массу нужно перевести в килограммы. Например, если заданы сила 2,0 Н и масса 500 г, то последнюю нужно перевести в килограммы (получается 0,50 кг). При этом, если применить второй закон Ньютона, ускорение автоматически получится в единицах м/с$^2$:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2{,}0 \text{ Н}}{0{,}50 \text{ кг}} = 4{,}0 \text{ м/с}^2.$$

**Пример 4.1.** Вычислите среднюю силу, с которой игрок в бейсбол из примера 2.9 действует на мяч. Масса мяча равна 0,145 кг.

**Решение.** Выше мы нашли, что ускорение мяча равно 129 м/с$^2$, а масса его равна 0,145 кг. Таким образом,

$$F = ma = (0{,}145 \text{ кг})(129 \text{ м/с}^2) = 18{,}7 \text{ Н}.$$

---

[1] Другие системы единиц измерения применяются редко. Мы укажем их только для справки. В системе механических единиц МКС масса измеряется также в килограммах, но единицей силы является килограмм-сила (кгс, или кГ); она численно равна силе тяжести, действующей на массу 1 кг в том месте Земли, где $g = 9{,}8066$ м/с$^2$; иными словами, 1 кгс = 9,8066 Н.

Ниже в этой главе мы рассмотрим много примеров применения второго закона Ньютона, которые на самом деле нам будут встречаться по всей книге.

Как отмечалось в разд. 4.3, количественно понятие массы можно определить, основываясь на том, что масса является мерой инертности. Это с очевидностью следует из равенства (4.1), в котором ускорение тела обратно пропорционально его массе. Если на две массы $m_1$ и $m_2$ действует (и ускоряет их) одна и та же равнодействующая сил $F$, то отношение этих масс можно найти по обратному отношению их ускорений:

$$m_2/m_1 = a_1/a_2.$$

Если известна одна из масс (ею может быть эталонный килограмм) и оба ускорения измерены точно, то неизвестную массу можно вычислить, используя эту пропорцию. Например, если $m_1 = 1{,}00$ кг, а для данной силы $a_1 = 3{,}00$ м/с$^2$ и $a_2 = 2{,}00$ м/с$^2$, то $m_2 = 1{,}50$ кг. При таком определении шкалы масс во втором законе Ньютона имеет место обратная пропорциональность между $a$ и $m$. Определяемая таким образом масса называется инертной *массой*; она полностью совпадает с массой, определяемой по методу, описанному в разд. 4.3 (для гравитационной массы). Это замечательный факт, и мы его подробно рассмотрим в разд. 5.5.

## 4.5. Законы или определения?

С точки зрения операционалиста (или, более широко,– философии позитивизма) определение силы как чего-то, что толкает или тянет, неудовлетворительно, поскольку это носит слишком туманный характер. Согласно операционному подходу, физические величины нужно определять с помощью одной или большего числа «операций»[1)]. Один из способов такого определения, который мы обсуждали в разд. 4.1, заключается в применении пружинного динамометра (рис. 4.1). Многие считали такое определение силы (возможно, весьма примитивное) неадекватным отчасти потому, что оно зависит от калибровки пружинного динамометра, которая в свою очередь основана на использовании силы тяжести. Более корректным способом определения силы (динамическим, а не статическим) является сам второй закон Ньютона. Чтобы определить величину и направление действия данной силы **F**, нужно дать ей подействовать на тело известной массы $m$ и измерить полученное телом ускорение **a**. Тогда по определению **F** равна произведению $m$ на **a**. Таким образом, согласно этой точке зрения, второй закон Ньютона следу-

---

[1)] По поводу операционного подхода см. примечание на с. 95.– *Прим. ред.*

ет рассматривать не как закон, а как определение силы[1].

Аналогичные замечания относятся к первому закону Ньютона. Обычно его рассматривают, чтобы определить конкретную систему отсчета, называемую **инерциальной системой отсчета**. Таким образом, инерциальная система отсчета – это такая система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона. (Например, при решении большинства задач Земля может считаться инерциальной системой отсчета.) **Неинерциальная же система отсчета** та, в которой первый закон Ньютона не выполняется. Примером такой неинерциальной системы отсчета является свободно падающий лифт; если вы оказались в лифте, трос которого оборвался, то на вас будет действовать направленная вниз сила тяжести и вы будете свободно падать с ускорением $g$ относительно Земли. Однако, если связать систему отсчета с самим лифтом, вы окажетесь в состоянии *покоя* относительно этой системы, несмотря на то что на вас будет действовать результирующая сила. Таким образом, в этой системе отсчета первый закон Ньютона выполняться не будет. Поскольку такие неинерциальные системы отсчета все же существуют, первый закон Ньютона следовало бы рассматривать как определение, а не как закон.

Заметим, что в неинерциальной системе отсчета второй закон Ньютона ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) также не выполняется. Например, в падающем лифте ускорение человека равно $\mathbf{a} = 0$, хотя $\mathbf{F} \neq 0$, так как действует сила тяжести.

Независимо от того, какой вы будете придерживаться точки зрения, т. е. будете ли вы считать, что $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ является определением силы, или будете рассматривать это соотношение как закон, на решение практических задач при использовании данного соотношения это не окажет никакого влияния[2].

## 4.6. Третий закон Ньютона

Второй закон Ньютона количественно описывает то, как силы влияют на движение. Но возникает естественный вопрос о том, откуда появляются силы? Наблюдения

---

[1] См. примечание на с. 95.– *Прим. ред.*

[2] С этим утверждением автора согласиться полностью нельзя, так как в большинстве задач необходимо с помощью второго закона Ньютона определять ускорение $\mathbf{a}$ при данных значениях массы $m$ и силы $\mathbf{F}$, т. е. сила должна определяться независимо. Обычно для этого используется связь силы с другой характеристикой взаимодействия тел (потенциальной энергией); подробное обсуждение этих вопросов можно найти в следующих учебных пособиях: *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 1.– М.: Наука, 1977, § 9; *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности.– М.: Высшая школа, 1986, § 19.– *Прим. ред.*

наводят на мысль, что сила, приложенная к любому телу, возникает в результате воздействия *другого тела*. Лошадь тянет повозку, человек толкает тележку с продуктами, молоток бьет по гвоздю, магнит притягивает железную иглу. В каждом из этих случаев одно тело (например, молоток) действует на другое (например, гвоздь) с определенной силой и второе тело испытывает воздействие этой силы. Однако Ньютон осознал, что ситуация не может быть столь односторонней. Действительно, хотя молоток действует на гвоздь, гвоздь в свою очередь тоже действует на молоток, потому что скорость молотка при контакте с гвоздем быстро уменьшается до нуля. Только весьма значительная сила может вызвать такое быстрое торможение. Поэтому Ньютон пришел к выводу, что оба тела нужно рассматривать на общих основаниях. Молоток действует на гвоздь, но и гвоздь в ответ тоже действует на молоток. В этом и состоит **третий закон Ньютона**[1]:

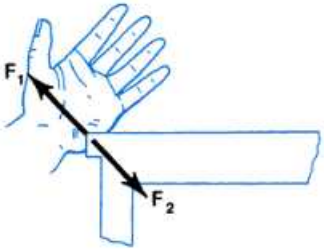



Рис. 4.4. Если вы надавите рукой на угол стола, стол в свою очередь будет давить на вашу руку. $\mathbf{F}_1$ – сила действия стола на руку, $\mathbf{F}_2$ – сила действия руки на стол.

**Всякий раз, когда одно тело действует с некоторой силой на другое, со стороны второго тела на первое действует сила противодействия, равная по величине и противоположная по направлению силе действия.**

Иногда этот закон сокращенно формулируют так: «Сила действия равна по величине и противоположна по направлению силе противодействия». Чтобы избежать путаницы, важно помнить, что силы «действия» и «противодействия» приложены к *различным* телам.

Чтобы убедиться в справедливости третьего закона Ньютона, посмотрите на свою ладонь, когда вы толкаете тележку с продуктами или нажимаете на край стола (рис. 4.4). Вы *увидите*, что край стола оставил вмятину на вашей ладони – явное свидетельство того, что она испытала действие силы. Вы можете даже *почувствовать* действие стола на ладонь – вам будет больно. Чем сильнее вы давите на стол, тем сильнее стол давит на вашу ладонь.



Рис. 4.5. Когда фигуристка отталкивается от стенки, стенка толкает ее назад и заставляет откатываться.

Теперь рассмотрим фигуристку, изображенную на рис. 4.5. Трение между ее коньками и льдом очень невелико. Поэтому, если на фигуристку подействует сила, она будет двигаться довольно свободно. Фигуристка отталкивается от стенки и начинает катиться назад. Ясно, что должна существовать сила, подействовавшая на фигуристку и заставившая ее двигаться. Сила, с которой фигуристка подействовала на стенку, не могла привести фигуристку в движение. Эта сила приложена к стенке и могла повлиять только на стенку. Чтобы фигуристка покатилась, на нее должно было что-то подействовать. Это действие могло

[1] Историки науки сегодня полагают, что самому Ньютону может быть приписано авторство только третьего закона. В работах Галилея и Декарта неявно уже содержались первые два закона движения.

исходить только от стенки. Сила, с которой стенка подействовала на фигуристку, равна по величине и противоположна по направлению силе действия фигуристки на стенку.

Если человек бросает груз из лодки, то лодка сдвигается (хотя бы ненамного) в противоположном направлении. Человек прилагает силу к грузу, а груз с равной и противоположно направленной силой действует на человека. Именно эта сила немного сдвигает лодку назад. На этом же принципе основывается и полет ракет. Наиболее распространенное заблуждение заключается в следующем: считается, что своим ускорением ракеты обязаны газам, вырывающимся из сопла двигателя и якобы отталкивающимся от земли или атмосферы. В действительности ракета ускоряется благодаря тому, что она действует на газы, с большой силой выталкивая их из своего сопла. Газы в свою очередь действуют *на ракету* равной и противоположно направленной силой. Именно эта сила и толкает ракету вперед; космический корабль может маневрировать в безвоздушном пространстве благодаря тому, что газы, образующиеся в результате сгорания топлива в его ракетных двигателях, выходят из сопел в направлении, противоположном направлению предполагаемого ускорения.




Рис. 4.6. Мы можем идти вперед благодаря тому, что земля толкает наши подошвы, когда мы отталкиваемся от земли. $\mathbf{F}_1$ – сила действия человека на землю; $\mathbf{F}_2$ – сила действия земли на человека.

Рассмотрим процесс ходьбы. Человек начинает идти, отталкиваясь ногой от земли. При этом земля действует на человека с равной и противоположно направленной силой (рис. 4.6). Именно эта сила, действующая *на* человека, и продвигает его вперед. Аналогично птица летит вперед благодаря воздействию крыльев на воздух. Однако воздух в свою очередь толкает крылья птицы, и именно это продвигает ее вперед. Автомобиль тоже движется вперед потому, что на него действует сила со стороны земли. Эта сила представляет собой силу противодействия по отношению к силе, с которой колеса действуют на землю.

Из приведенных выше примеров становится ясно, что очень важно всегда четко различать, *к* какому телу приложена данная сила и *со стороны* какого тела она действует. Основной вывод состоит в том, что сила влияет на характер движения тела только тогда, когда она приложена именно *к* этому телу. Сила, с которой данное тело действует на другое, не влияет на движение этого первого тела. Она влияет только на другое тело, а именно на то, к которому она приложена. Поэтому во избежание недоразумений важно всегда точно указать оба объекта: *действующий* с силой и *испытывающий* это *действие*. Насколько это полезно, мы увидим при разборе примеров как в этой главе, так и в последующих.

Интуитивно мы пытаемся обычно связать силы с «активными» объектами – людьми, животными, двигателями или же с движущимися предметами (например, с

молотком). Часто бывает затруднительно понять, каким образом покоящееся неодушевленное тело (например, стенка или стол) может приводить к возникновению силы. Объяснить это явление можно тем, что каждый материал, любой степени твердости, все же обладает самой малой упругостью. Никто не станет отрицать, что натянутая резиновая лента может подействовать на комок бумаги и запустить его через всю комнату. Хотя другие материалы не могут растягиваться так же легко, как резина, однако, если к ним приложена сила, они все же деформируются. Подобно тому как растянутая резиновая лента приводит к появлению силы, аналогичные силы порождают и деформированные (растянутая или сжатая) стена или стол.

## 4.7. Сила тяжести

Галилей утверждал, что все тела, отпущенные с некоторой высоты вблизи поверхности Земли, будут падать с одинаковым ускорением $g$ (если пренебречь сопротивлением воздуха). Сила, вызывающая это ускорение, называется силой тяжести. Применим к силе тяжести второй закон Ньютона, рассматривая в качестве ускорения **a** ускорение свободного падения **g**. Таким образом, действующую на тело силу тяжести можно записать как

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{w} = m\mathbf{g}. \qquad (4.2)$$

Эта сила направлена вниз, к центру Земли.

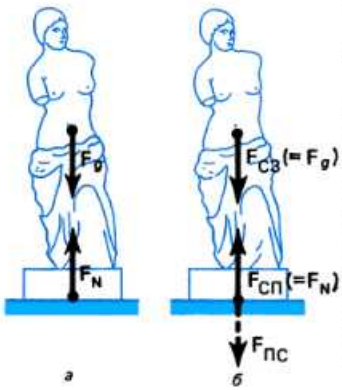



Рис. 4.7. *а* – равнодействующая сил, приложенных к телу, находящемуся в покое, равна нулю. Направленная вниз сила тяжести $\mathbf{F}_g$ уравновешивается силой реакции поверхности Земли (нормальной силой $\mathbf{F}_N$); *б* – $\mathbf{F}_{ПС}$ (сила действия статуи на поверхность Земли), согласно третьему закону Ньютона, является реакцией на силу $\mathbf{F}_{СП}$. Сила реакции $\mathbf{F}_{СЗ}$ не показана.

В системе СИ $g = 9{,}80$ м/с$^2$; поэтому сила тяжести, действующая на тело массой 1 кг, составляет (1,00 кг) × × (9,80 м/с$^2$) = 9,80 Н. Как мы показали в гл. 2, значения $g$ в различных точках на поверхности Земли несколько различаются, хотя и весьма незначительно. Как правило, мы этим различием интересоваться не будем. На Луне, на других планетах или в космическом пространстве сила тяжести, действующая на тело одинаковой массы, будет различна. Например, на Луне величина $g$ составляет всего лишь одну шестую $g$ на Земле и на тело массой 1 кг действует сила тяжести, равная всего лишь 1,7 Н.

При свободном падении тел на них действует только гравитационная сила, или сила тяжести. Если же тело покоится на Земле, то сила тяжести, определяемая формулой (4.2), разумеется, продолжает действовать. Это становится очевидным, если тело взвешивать с помощью пружинного динамометра. Почему же в этом случае тело не движется? Очевидно, если тело находится в состоянии покоя, равнодействующая всех приложенных к нему сил равна нулю. Таким образом, должна существовать другая действующая на тело сила, которая уравновешивает силу тяжести. И действительно, такая сила возникает благодаря действию поверхности Земли (рис. 4.7, *а*). Поверхность земли под телом немного сжимается и за счет своей

упругости толкает тело вверх, как показано на рисунке. Силу, действующую со стороны поверхности Земли, иногда называют *контактной силой*, поскольку она возникает, когда два тела находятся в контакте друг с другом. (Сила со стороны ладони, толкающей тележку, тоже контактная сила.) Если контактная сила действует нормально (перпендикулярно) общей для двух тел поверхности контакта, то ее называют силой нормального давления (или нормальной реакции); на рисунке мы ее обозначили как $\mathbf{F}_N$.

На рис. 4.7, *а* на статую действуют силы, а она остается в состоянии покоя, поскольку векторная сумма этих двух сил равна нулю. Хотя указанные две силы равны по величине и имеют противоположные направления, это *не те* «равные по величине и противоположно направленные силы», о которых говорит третий закон Ньютона. Этот вопрос является принципиальным, и ошибка здесь может привести к значительным затруднениям. Силы действия и противодействия, о которых идет речь в третьем законе Ньютона, приложены к *различным телам*. (Силы же, показанные на рис. 4.7, *а*, приложены к *одному* и тому же телу.) Для каждой из показанных на рис. 4.7, *а* сил уместно поставить вопрос: какова соответствующая ей сила противодействия? Действующая на статую направленная вверх сила $\mathbf{F}_N$ обусловлена поверхностью Земли. Противодействующей этой силе будет сила, с которой статуя действует на поверхность Земли (основание). Она показана на рис. 4.7, *б* как сила $\mathbf{F}_{ПС}$ (сила, действующая на поверхность Земли со стороны статуи)[1]. Силы, действующие на статую, также обозначены двойными индексами, показывающими, *на какое* тело действует сила и *каким* телом эта сила обусловлена: $\mathbf{F}_{СЗ}$ ($= \mathbf{F}_g$) – сила тяжести, действующая на статую со стороны Земли; $\mathbf{F}_{СП}$ ($= \mathbf{F}_N$) – сила действия поверхности Земли на статую. При этом силой противодействия для $\mathbf{F}_{СП}$, согласно третьему закону Ньютона, является сила $\mathbf{F}_{ПС}$. (Справедливо также и обратное: сила действия поверхности Земли на статую $\mathbf{F}_{СП}$, направленная вверх, является силой противодействия для силы $\mathbf{F}_{ПС}$, с которой статуя действует на поверхность Земли. Как вы считаете, что можно сказать о другой действующей на статую силе, а именно силе тяжести $\mathbf{F}_g$? Какая сила является для нее силой противодействия?[2])

---

[1] Эту силу иногда называют *весом* тела (в данном случае статуи). – *Прим. ред.*

[2] Это трудный вопрос, поскольку лишь в гл. 5 мы подробно рассмотрим силу тяжести. В действительности искомой силой противодействия будет сила $\mathbf{F}_{ЗС}$, действующая со стороны статуи на Землю. Она так же, как и $\mathbf{F}_{СЗ}$, является гравитационной силой, или силой тяжести; можно считать, что она приложена к центру Земли (подробности об этом см. в гл. 5): в настоящей главе нам это не понадобится.

## 4.8. Применение законов Ньютона; векторы сил

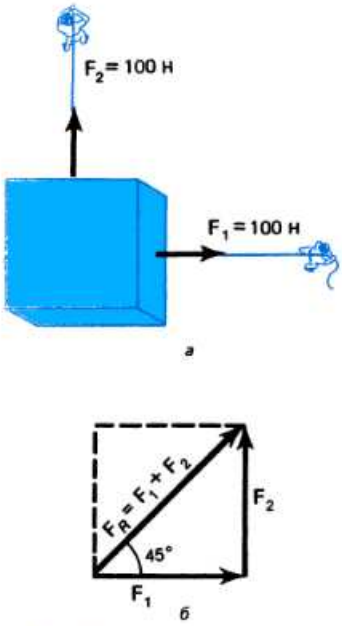



Рис. 4.8. *а* – на тело действуют две силы: $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$; *б* – суммарная, или результирующая, сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ равна $\mathbf{F}_R$.

Второй закон Ньютона утверждает, что ускорение тела пропорционально действующей на тело *результирующей силе*, или равнодействующей. Как упоминалось выше, результирующая сила равна *векторной сумме* всех действующих на тело сил. То, что силы нужно складывать друг с другом как векторы, следует из множества экспериментов. Эти эксперименты показывают, что силы складываются согласно установленным в гл. 3 правилам сложения векторов. Например, на рис. 4.8 показаны две силы одинаковой величины, приложенные к телу под прямым углом друг к другу. Интуитивно ясно, что тело будет двигаться под углом 45°, т. е. результирующая сила направлена под углом 45°. Это же следует и из правил сложения векторов. Теорема Пифагора утверждает, что результирующая сила должна иметь величину $F_R = \sqrt{(100\ \text{Н})^2 + (100\ \text{Н})^2} = 141\ \text{Н}$. Правильность этого ответа интуитивно уже не очевидна, хотя ясно, что результирующая сила будет меньше чем 200 Н (так как два человека, тянущие груз, стремятся сдвинуть его в различных направлениях); несомненно, однако, что эта сила больше нуля. Тщательно проведенные эксперименты показывают, что две силы величиной по 100 Н каждая, действующие под углом 90° друг к другу, создают тот же эффект, что и одна сила величиной 141 Н, действующая под углом 45°. Это полностью соответствует правилу сложения векторов.

**Пример 4.2.** Вычислите сумму двух векторов сил, действующих на корабль, как показано на рис. 4.9, *а*.

**Решение.** На рис. 4.9, *б* показано разложение этих векторов на составляющие по осям $x$ и $y$. Значения составляющих вектора $\mathbf{F}_1$ равны соответственно

$$F_{1x} = F_1 \cos 45° = (40{,}0\ \text{Н})(0{,}707) = 28{,}3\ \text{Н},$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 45° = (40{,}0\ \text{Н})(0{,}707) = 28{,}3\ \text{Н},$$

а вектора $\mathbf{F}_2$ –

$$F_{2x} = F_2 \cos 37° = (30{,}0\ \text{Н})(0{,}799) = 24{,}0\ \text{Н},$$

$$F_{2y} = -F_2 \sin 37° = -(30{,}0\ \text{Н})(0{,}602) = -18{,}1\ \text{Н}.$$

Проекция $F_{2y}$ будет отрицательной, поскольку она направлена вдоль отрицательного направления оси $y$. Вычислим теперь проекции результирующей силы (рис. 4.9, *в*):

$$F_{Rx} = 28{,}3\ \text{Н} + 24{,}0\ \text{Н} = 52{,}3\ \text{Н},$$

$$F_{Ry} = 28{,}3\ \text{Н} - 18{,}1\ \text{Н} = 10{,}2\ \text{Н}.$$

Для определения величины результирующей силы воспользуемся теоремой Пифагора:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(52{,}3)^2 + (10{,}2)^2} = 53{,}3\ \text{Н}.$$

Единственный нерешенный вопрос состоит в том, какой угол $\theta$ образует результирующая сила $\mathbf{F}_R$ с осью $x$? Используя соотношение

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{10{,}2\ \text{Н}}{52{,}3\ \text{Н}} = 0{,}195,$$

находим $\theta = 11{,}0°$.

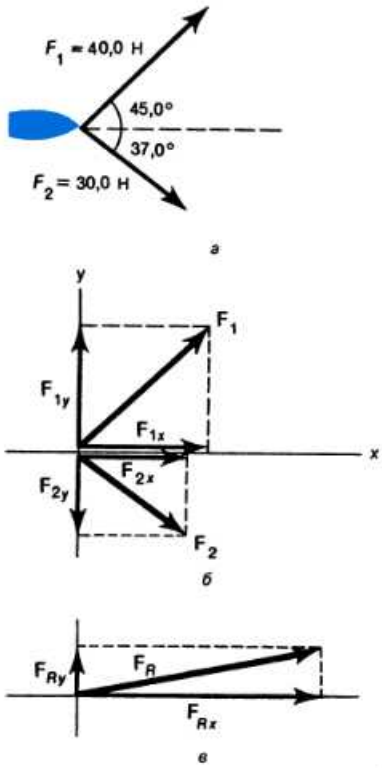



Рис. 4.9. На лодку действуют два вектора сил (пример 4.2).

**Пример 4.3.** Вычислите силу, необходимую для разгона показанной на рис. 4.10, *а* тележки из состояния покоя до скорости 0,50 м/с за время 2,0 с. Масса тележки 20 кг.

**Решение.** Если пренебречь трением, то на тележку действуют три силы (что и показано на рис. 4.10, *б*): сила $\mathbf{F}_p$, с которой человек толкает тележку вперед; сила тяжести $\mathbf{F}_g$, направленная вниз; сила реакции пола $\mathbf{F}_N$, направленная вверх (она представляет собой реакцию на силу давления тележки на пол). Действующие по вертикали силы $\mathbf{F}_g$ и $\mathbf{F}_N$ должны при сложении давать нуль – в противном случае тележка ускорялась бы в вертикальном направлении. Таким образом, результирующей действующих на тележку сил будет просто сила $\mathbf{F}_p$. Чтобы найти величину силы $\mathbf{F}_p$, вычислим сначала ускорение. необходимое для разгона: $a = (0{,}50 \text{ м/с} - 0)/(2{,}0 \text{ с}) = 0{,}25 \text{ м/с}^2$. Таким образом, $F_p = ma = (20 \text{ кг})(0{,}25 \text{ м/с}^2) = 5{,}0$ Н.

Этот пример иллюстрирует некоторые важные особенности применения законов Ньютона. Сначала следует изобразить на рисунке рассматриваемую ситуацию. Затем, если изучается движение только одного тела, нужно показать все действующие на него силы. При рассмотрении движения нескольких тел необходимо построить диаграмму сил для каждого тела, причем должны быть показаны все силы, действующие *на данное тело*; такую диаграмму назовем **диаграммой свободного тела**. Иллюстрацией служит рис. 4.11, *б*, который мы обсудим в примере 4.4. Второй закон Ньютона имеет дело с векторами, и часто возникает необходимость в разложении этих векторов на составляющие и нахождении проекций. Оси $x$ и $y$ следует выбирать таким образом, чтобы можно было упростить вычисления. Тогда второй закон Ньютона можно применять к каждой из $x$- и $y$-проекций векторов. Иными словами, $x$-проекция полной силы связана с $x$-проекцией ускорения следующим образом: $F_x = ma_x$; аналогичное соотношение имеет место и для проекции на ось $y$.

**Пример 4.4.** На рис. 4.11, *а* показан груз массой 10 кг, который тянут по полу с силой 40 Н. Сила приложена под углом 30° к полу. Нужно вычислить а) ускорение груза и б) величину силы $F_N$, приложенной к грузу со стороны пола и направленной вверх. Трением можно пренебречь.

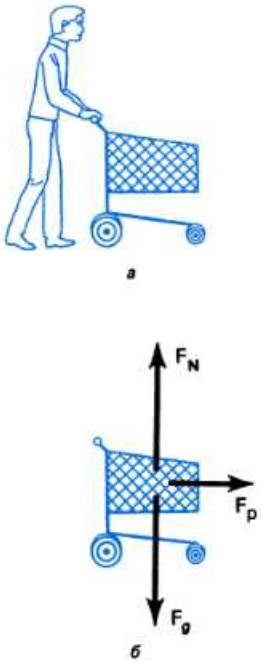



Рис. 4.10. Силы, действующие на тележку (пример 4.3).

**Решение.** На рис. 4.11, *б* изображены все силы, действующие на груз. Если ось $y$ направлена вертикально, а $x$ – горизонтально, то сила натяжения величиной 40 Н имеет следующие проекции:

$$F_x = (40\ \text{Н})(\cos 30°) = (40\ \text{Н})(0{,}866) = 35\ \text{Н},$$

$$F_y = (40\ \text{Н})(\sin 30°) = (40\ \text{Н})(0{,}50) = 20\ \text{Н}.$$

а) В горизонтальном направлении:

$$ma_x = F_x,$$

$$a_x = (35\ \text{Н})/(10\ \text{кг}) = 3{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Таким образом, ускорение груза составляет 3,5 м/с$^2$.

б) В вертикальном направлении имеем

$$ma_y = F_N - F_g + F_y.$$

Учтем, что $F_g = mg = (10\ \text{кг})(9{,}8\ \text{м/с}^2) = 98\ \text{Н}$, а $F_y = 20$ Н. Поскольку груз не движется в вертикальном направлении, $a_y = 0$. Тогда

$$0 = F_N - 98\ \text{Н} + 20\ \text{Н},$$

$$F_N = 78\ \text{Н}.$$

Заметим, что здесь сила реакции со стороны Земли $F_N$ меньше, чем $F_g$; это объясняется тем, что часть тяги, создаваемой человеком, направлена вверх.

Рассмотрим теперь пример баллистического движения, или свободного падения тела, брошенного под углом к горизонту.

**Пример 4.5.** Саранча прыгает, отталкиваясь задними ногами от земли (рис. 4.12, *а*). Эксперименты показывают, что саранча массой 3,0 г давит на землю под углом 57° со средней силой 0,45 Н. За время ускорения тело саранчи проходит расстояние 4,0 см. Вычислите а) действующую на саранчу результирующую силу

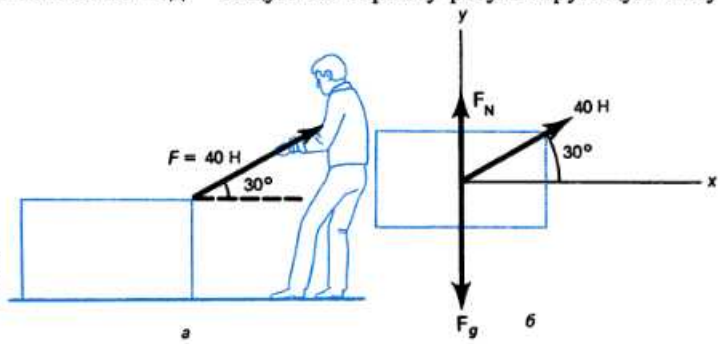



Рис. 4.11. *а* – человек, толкающий груз в примере 4.4; *б* – диаграмма сил в этом примере.

F; б) ускорение саранчи; в) ее «взлетную» скорость; г) расстояние, которое она может пролететь в ходе прыжка, если пренебречь действием сопротивления воздуха.

**Решение.** В пп. «а»–«в» мы имеем дело с движением на участке ускорения и лишь в п. «г»–с баллистическим движением. а) На рис. 4.12, *б* показаны две силы, действующие на саранчу: сила реакции земли, равная 0,45 Н, и сила тяжести $mg$ = = (0,0030 кг)(9,8 м/с$^2$) = 0,030 Н. Используя метод сложения векторов по проекциям, получаем

$$F_x = (0{,}45\ \text{Н})(\cos 57°) = 0{,}25\ \text{Н},$$

$$F_y = (0{,}45\ \text{Н})(\sin 57°) - 0{,}030\ \text{Н} = 0{,}35\ \text{Н}.$$

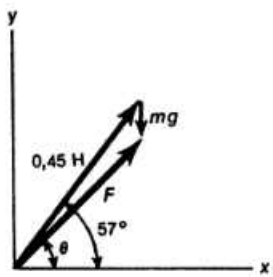
Тогда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(0{,}25\ \text{Н})^2 + (0{,}35\ \text{Н})^2} =$$

$$= 0{,}43\ \text{Н}.$$



*а*




*б*

Рис. 4.12. *а*–иллюстрация к полету саранчи (пример 4.5); *б*–диаграмма сил.

Чтобы найти угол θ, учтем, что

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{F\sin\theta}{F\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta.$$

Подставляя значения $F_y$ и $F_x$, находим $\operatorname{tg}\theta$ = (0,35 Н)/(0,25 Н) = 1,40, откуда θ = = 54°. Величина результирующей силы, действующей на саранчу, равна 0,43 Н, а угол, под которым она направлена (угол «взлета»), равен 54°.

б) Ускорение, приводящее к «взлету», равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0{,}43\ \text{Н}}{0{,}0030\ \text{кг}} = 143\ \text{м/с}^2.$$

в) Тело саранчи разгоняется на расстоянии 0,040 м с ускорением 143 м/с$^2$. Следовательно, скорость ее к концу этого периода (в точке, где ноги саранчи оторвутся от земли и она полетит) будет равна

$$v^2 = v_0^2 + 2aD =$$

$$= 0 + (2)(143\ \text{м/с}^2)(0{,}040\ \text{м}) \approx 11\ \text{м}^2/\text{с}^2,$$

$$v = 3{,}4\ \text{м/с};$$

здесь мы использовали выражение (2.9в), в котором $x - x_0$ заменили на $D$–расстояние, пройденное в направлении разгона.

г) В этой части задачи мы имеем дело с баллистическим движением. Предположим, что сопротивлением воздуха можно пренебречь (ниже мы увидим, что это предположение не вполне корректно). Саранча отрывается от земли под углом 54° со скоростью 3,4 м/с. Вычисления будем проводить в том же порядке, что и в примере 3.7. Найдем сначала время, необходимое для прохождения всего расстояния (считая, что полет происходит над уровнем земли):

$$y = v_{y0}\,t - (1/2)\,gt^2,$$

$$0 = (3{,}4\ \text{м/с})(\sin 54°)\,t - (1/2)(9{,}8\ \text{м/с}^2)\,t^2,$$

$$t = \frac{2{,}8\ \text{м/с}}{4{,}9\ \text{м/с}^2} = 0{,}57\ \text{с}.$$

Затем найдем расстояние $x = v_{x0}\,t$ = = $(v_0 \cos 54°)\,t$ = (3,4 м/с)(0,59)(0,57 с) = = 1,1 м. В действительности так далеко саранча прыгнуть не может (по крайней

мере, если она не пользуется крыльями, что и предполагалось в задаче). При движении такого легкого тела сопротивление воздуха будет весьма значительным. Оно и сократит полученную величину по крайней мере в три раза; при этом реальная траектория полета не будет параболической.

## 4.9. Силы трения и движение по наклонной плоскости

До сих пор мы пренебрегали трением, однако в большинстве практических случаев его приходится учитывать. Трение возникает между двумя поверхностями твердых тел, поскольку даже самая гладкая на вид поверхность в микроскопических масштабах является сильно шероховатой. Даже когда тело катится по поверхности, все же имеется некоторое трение, называемое *трением качения*; это трение, как правило, значительно меньше того, что возникает при скольжении одного тела по поверхности другого. В этом разделе мы в основном будем рассматривать трение *скольжения*, которое иногда называется кинетическим трением (кинетический по-гречески означает «движущийся»).

Когда тело движется, сила трения скольжения действует всегда в направлении, противоположном направлению движения. Величина этой силы зависит от свойств двух скользящих поверхностей. Для данной поверхности она пропорциональна действующей между двумя поверхностями *нормальной силе*, которая представляет собой силу воздействия одного тела на другое, перпендикулярную их общей поверхности контакта[1]. Она не зависит сколько-нибудь заметно от полной площади поверхности контакта. Так, сила трения, действующая на кирпич, будет одной и той же независимо от того, скользит ли он своей плоской частью или ребром. Вводя коэффициент пропорциональности $\mu_k$, пропорциональную зависимость можно записать в виде

$$F_{тр} = \mu_k F_N \qquad \text{[трение скольжения]}.$$

Это приближенное, но достаточно точное и полезное соотношение. Оно не является законом, а представляет собой взаимосвязь между величиной силы трения $F_{тр}$, которая действует параллельно поверхности контакта, и величиной нормальной силы $F_N$, действующей перпендикулярно этой поверхности. Это соотношение не является векторным, так как две силы перпендикулярны друг другу. Множитель $\mu_k$ называется *коэффициентом трения скольжения*; он зависит от вида скользящих поверхностей. В табл. 4.1 приведены значения измеренных на опыте

[1] Заметим, что как нормальная сила, так и сила трения являются силами воздействия одной поверхности на другую. Одна из них перпендикулярна поверхности контакта, другая параллельна ей.

*Таблица 4.1.* Коэффициенты трения*

| Поверхности | Коэффициент трения покоя $\mu_s$ | Коэффициент трения скольжения $\mu_k$ |
|---|---|---|
| Дерево по дереву | 0,4 | 0,2 |
| Дерево (просмоленное) по влажному снегу | 0,14 | 0,1 |
| Лед по льду | 0,1 | 0,03 |
| Металл по металлу (со смазкой) | 0,15 | 0,07 |
| Сталь по стали (без смазки) | 0,6 | 0,3 |
| Резина по твердому телу | 1–4 | 1 |
| Смазанные шарикоподшипники | < 0,01 | < 0,01 |
| Соединения в суставах человека | 0,01 | 0,01 |

* Представленные здесь значения приблизительные и приводятся лишь для ориентировки.

коэффициентов трения скольжения для различных поверхностей. Однако эти значения весьма приближенны, так как $\mu$ зависит от того, сухие эти поверхности или влажные, насколько они зачищены или отполированы, остались ли на них какие-нибудь неровности и т. п.

Выше мы рассматривали *трение скольжения*, возникающее при движении одного тела по поверхности другого. Есть также трение покоя, которое характеризует силу сопротивления при любых попытках сдвинуть тело. Предположим, что тело, например стол, покоится на горизонтальном полу. Когда на стол в горизонтальном направлении никакого действия не оказывают, отсутствует и сила трения. Предположим теперь, что вы пытаетесь сдвинуть стол, но он не двигается. Раз вы прилагаете горизонтальную силу, а стол не двигается, то должна существовать другая действующая на стол сила, препятствующая его движению ($F_{\text{равн}} = 0$). Это сила *трения покоя*, действующая на стол со стороны пола. Если вы толкаете стол с еще большей силой, а он так и не сдвинулся, то это означает, что сила трения покоя также увеличилась. Наконец, вы приложили достаточно большое усилие, и стол сдвинулся. В это время приложенная вами сила стала больше максимальной силы трения покоя, определяемой выражением $F_{\text{тр}} = \mu_s F_N$, где $\mu_s$ – *коэффициент трения покоя* (табл. 4.1). Поскольку сила трения покоя изменяется от нуля до этого максимального значения, можно написать

$$F_{\text{тр}} \leqslant \mu_s F_N \qquad \text{[трение покоя]}.$$

Возможно, вы замечали, что зачастую легче поддерживать состояние движения тяжелого тела, чем впервые сдвинуть его с места. В этом наблюдении отражается тот факт, что $\mu_s$ почти всегда превосходит $\mu_k$ (и уж во всяком случае никогда не может быть меньше).

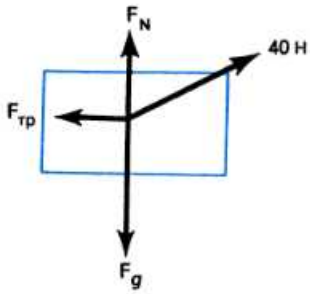



Рис. 4.13. Диаграмма сил, действующих в примере 4.6.

**Пример 4.6.** Вычислите вновь ускорение груза в примере 4.4, считая, что коэффициент трения скольжения равен 0,30. Соответствующая диаграмма сил показана на рис. 4.13.

**Решение.** Сила трения скольжения всегда направлена противоположно направлению движения, параллельно поверхности контакта двух тел. Расчет для движения вдоль оси $y$ проводится в этом случае так же, как и в примере 4.4. Следовательно, нормальная сила, с которой пол действует вверх на груз, по-прежнему равна 78 Н. В уравнении движения для составляющей вдоль оси $x$ появится новое слагаемое – сила трения, равная $\mu_k F_N = 0{,}30 \cdot (78\ \text{Н}) = 23\ \text{Н}$. Таким образом,

$$ma_x = F_x - \mu_k F_N = 35\ \text{Н} - 23\ \text{Н} = 12\ \text{Н},$$

$$a_x = \frac{12\ \text{Н}}{10\ \text{кг}} = 1{,}2\ \text{м/с}^2.$$

**Пример 4.7.** Два тела, изображенные на рис. 4.14, *а*, соединены веревкой, проходящей через блок. Коэффициент трения скольжения между телом I и столом равен 0,20. (Мы пренебрегаем массами веревки и блока, а также любым трением в блоке.) Требуется найти ускорение системы, которое для обоих тел будет одинаковым (в предположении, что веревка не растягивается).

**Решение.** Все силы, действующие на каждое из тел, показаны на диаграммах рис. 4.14, *б* и *в*. Тело I по вертикали не перемещается, так что нормальная сила полностью уравновешивает силу тяжести $F_N = m_I g = (5{,}0\ \text{кг})(9{,}8\ \text{м/с}^2) = 49\ \text{Н}$. В горизонтальном направлении на тело I действуют две силы: $F_R$ – натяжение веревки (значения которого мы не знаем) и сила трения скольжения $\mu_k F_N = (0{,}20)(49\ \text{Н}) = 9{,}8\ \text{Н}$. Требуется найти ускорение в горизонтальном направлении. Используя второй закон Ньютона, имеем

$$F_R - F_{тр} = m_I a.$$

Рассмотрим теперь тело II. Сила тяжести $F_g = m_{II} g = 19{,}6\ \text{Н}$ прижимает его вниз, а веревка тянет его верх с силой $F_R$, равной натяжению веревки. Точно с такой же силой веревка действует на тело I, поскольку, согласно третьему закону Ньютона, когда веревка тянет тело I с силой $F_R$, тело I тоже тянет веревку с силой $F_R$; эта сила $F_R$ передается вдоль веревки целиком телу II точно так же, как если бы кто-то тянул за ее конец[1]. Теперь для

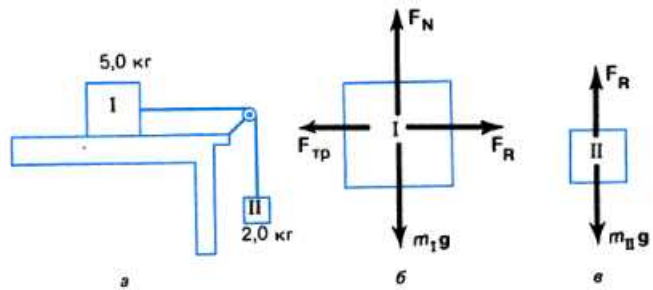



Рис. 4.14. Пример 4.7.

[1] Это утверждение в точности справедливо только в том случае, когда блок не имеет массы и в нем отсутствует трение (что и предполагается здесь); см. рассуждения в конце примера.

тела II можно записать второй закон Ньютона:

$$m_{II}g - F_R = m_{II}a.$$

Здесь имеются две неизвестные величины: $a$ и $F_R$, но у нас уже есть два уравнения. Решим первое из них относительно $F_R$:

$$F_R = F_{тр} + m_I a$$

и подставим полученное значение во второе уравнение:

$$m_{II}g - F_{тр} - m_I a = m_{II}a.$$

Найдем отсюда $a$ и подставим численные значения:

$$a = \frac{m_{II}g - F_{тр}}{m_I + m_{II}} = \frac{19{,}6\ \text{Н} - 9{,}8\ \text{Н}}{5{,}0\ \text{кг} + 2{,}0\ \text{кг}} = 1{,}4\ \text{м/с}^2.$$

При желании можно вычислить $F_R$, используя первое уравнение:

$$F_R = F_{тр} + m_I a = 9{,}8\ \text{Н} + (5{,}0\ \text{кг})(1{,}4\ \text{м/с}^2) = 17\ \text{Н}.$$

Если бы у веревки была масса (обозначим ее $m_R$), которой нельзя было бы пренебречь, то силы, действующие на обоих концах веревки, не были бы одинаковыми. Веревка тянула бы тело I с силой $F_{RI}$, отличающейся от силы $F_{RII}$, с которой веревка действовала бы на тело II. По третьему закону Ньютона тело II действует на веревку с силой $F_{RII}$, а тело I – с силой $F_{RI}$. Действующая на веревку результирующая сила (веревку при этом можно считать «самостоятельным» телом) равна $F_{RII} - F_{RI}$, что должно быть численно равно массе веревки, умноженной на ее ускорение:

$$F_{RII} - F_{RI} = m_R a.$$

Записанные нами исходные два уравнения принимают вид

$$F_{RI} - F_{тр} = m_I a, \qquad m_{II} - F_{RII} = m_{II}a.$$

Таким образом, мы имеем теперь систему трех уравнений с тремя неизвестными ($a$, $F_{RI}$ и $F_{RII}$), которую можно решить.

Рассмотрим теперь некоторые примеры движения тел по наклонной плоскости, например движение вверх по склону холма или под уклон. Такие ситуации встречаются довольно часто и интересны тем, что, хотя ускорение создается в них действием силы тяжести, направление вектора ускорения отличается от вертикального.

**Пример 4.8.** Лыжник, изображенный на рис. 4.15, *а*, начал спуск по склону, имеющему угол 30°. Считая, что коэффициент трения скольжения равен 0,10, вычислите а) ускорение лыжника и б) скорость, которую он приобретет через 6,0 с.

**Решение.** а) На рис. 4.15, *б* приведена диаграмма всех сил, действующих на лыжника: направленная вниз сила тяжести ($\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$) и две силы, обусловленные действием снега на лыжи, – нормальная сила, перпендикулярная поверхности снега, и сила трения, параллельная поверхности. Для удобства мы выбрали ось $x$ параллельной склону с положительным направлением вниз, а ось $y$ перпендикулярной поверхности склона. Таким образом, на составляющие следует разложить только один вектор – силу тяжести. На рис. 4.15, *в* эти составляющие показаны штриховыми линиями; их величины равны соответственно

$$F_{gx} = mg\sin\theta, \qquad F_{gy} = mg\cos\theta$$

(обратите внимание, какой именно угол обозначен через $\theta$, и учтите замечание на рис. 4.15, *в*). Применим сначала второй закон Ньютона к силам, действующим в направлении оси $y$:

$$F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0.$$

$F_N$ равна нулю, поскольку по оси $y$ движение отсутствует. Таким образом,

$$F_N = mg\cos\theta.$$

В направлении оси $x$ из второго закона Ньютона $F_x = ma_x$ имеем

$$mg\sin\theta - \mu_k F_N = ma_x,$$

$$mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma_x.$$

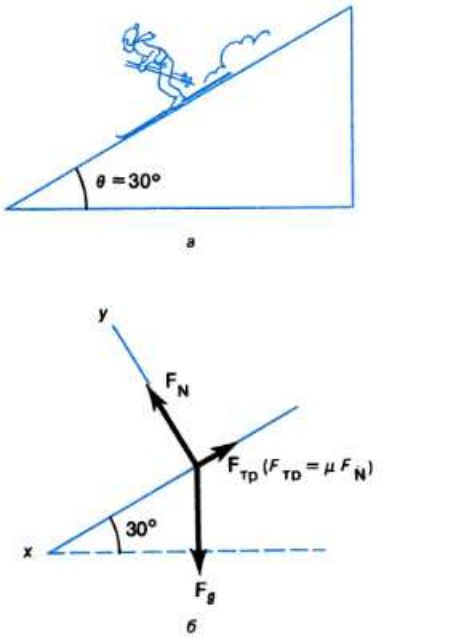



Рис. 4.15. Пример 4.8.




Рис. 4.16. Пример 4.10.

В последнем выражении в каждый член входит масса $m$, которую можно сократить. Тогда имеем

$$a_x = g \sin 30° - \mu_k g \cos 30° =$$

$$= [0{,}50 - (0{,}10)(0{,}866)]\, g =$$

$$= 0{,}41\, g.$$

Найденное ускорение составляет 0,41 ускорения свободного падения, и, следовательно, $a = (0{,}41)(9{,}8\ м/с^2) = 4{,}0\ м/с^2$. Мы получили интересный результат: масса сократилась, и, таким образом, ускорение не зависит от массы. То, что иногда происходит такое сокращение и расчет упрощается, является неоспоримым преимуществом, когда мы решаем задачу с помощью алгебраических выражений и подставляем числовые значения только в конце расчета.

б) Скорость через 6,0 с движения получаем, используя выражение (2.9а):

$$v = v_0 + at = 0 + (4{,}0\ м/с^2)(6{,}0\ с) = 24\ м/с,$$

где мы предположили, что лыжник стартовал из состояния покоя.

**Пример 4.9.** В этом примере мы опять рассмотрим спускающегося с холма лыжника. Однако на этот раз коэффициент трения скольжения между лыжами и снегом нам неизвестен – именно его и нужно определить.

**Решение.** Решить эту задачу можно, если рассмотреть спуск лыжника по склонам с различными уклонами и выяснить, при каком уклоне он будет катиться с постоянной скоростью. Уравнения второго закона Ньютона для $x$- и $y$-составляющих сил и ускорений будут теми же, что в примере 4.8, только теперь $a_x = 0$, а угол $\theta$ не обязательно равен 30°. Таким образом,

$$F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0,$$

$$mg\sin\theta - \mu_k F_N = ma_x = 0.$$

Из первого уравнения имеем $F_N = mg\cos\theta$; подставляя это выражение во второе уравнение, находим

$$mg\sin\theta - \mu_k (mg\cos\theta) = 0.$$

Решим его относительно $\mu_k$:

$$\mu_k = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta;$$

здесь $\theta$ – угол, при котором лыжник скатывается с постоянной скоростью. Например, если скорость лыжника постоянна при $\theta = 5°$, то $\mu_k = \operatorname{tg} 5° = 0{,}09$.

**Пример 4.10.** Пусть в универсаме различные секции связаны между собой наклонными переходами. Покупатели должны толкать тележки по таким наклонным переходам, и, очевидно, желательно, чтобы это не было слишком тяжело для них. Собранная статистика показала, что если необходимое усилие не превышает 20 Н, то почти никто из покупателей не жалуется. Если пренебречь трением, то какой должен быть максимальный угол наклона для таких переходов, при котором толкать полную тележку массой 20 кг нетрудно?

**Решение.** Как показано на рис. 4.16, сила, толкающая тележку вверх по наклонной плоскости, должна уравновешивать $x$-составляющую силы тяжести, действующей на тележку. В случае, когда максимально допустимая сила равна 20 Н, мы имеем

$$F_{gx} = F_g \sin\theta = 20 \text{ Н}.$$

Поскольку $F_g = mg = (20 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2) = 200$ Н, имеем $\sin\theta = 20/200 = 0{,}10$; следовательно, $\theta = 5{,}7°$. В практических случаях мы должны учитывать трение, особенно трение в колесах старых тележек, и для определения допустимого наклона, по-видимому, нужно ставить опыты.

Трение может оказывать вредное влияние. Оно тормозит движущиеся тела, а также вызывает нагревание и износ движущихся частей механизмов. Для уменьшения трения можно использовать различные смазки (например, масло). Более эффективно уменьшить трение между двумя поверхностями удается за счет помещения между ними слоя воздуха или другого газа. К устройствам, в которых используется этот эффект, в большинстве случаев не находящий практического применения, относятся суда и платформы на воздушной подушке (или соответствующие игрушки). В таких устройствах воздушная прослойка создается продуванием воздуха через множество мелких отверстий. Другой способ создания воздушной прослойки основан на использовании магнитного поля для поддержания тел в воздухе[1)]. Этот метод находит применение в некоторых транспортных средствах. Однако трение может приносить и пользу. Наша способность ходить основывается на трении между подошвами обуви (или ступнями ног) и землей. (Какой вид трения существен при ходьбе: трение скольжения или трение покоя?) Движение автомобиля, а также его устойчивость зависят от трения. На льду, когда трение невелико, безопасная ходьба или езда на автомобиле становятся затруднительными.

---

[1)] Так называемая левитация.– *Прим. ред.*

## 4.10. Рекомендации по решению задач

За исключением простейших случаев, решение задач не всегда осуществимо при помощи стандартных процедур. Напротив, во многих случаях требуется творческий подход, так как каждая задача индивидуальна. Тем не менее можно предложить общий подход, который окажет вам некоторую помощь при решении задач.

**1.** Внимательно прочитайте условие задачи. Распространенная ошибка заключается в том, что при чтении теряется слово или два, а это может полностью изменить смысл задачи.
**2.** Постройте рисунок или диаграмму описанной в задаче ситуации. (Это, возможно, наиболее существенная, хотя и наименее тщательно выполняемая часть решения задачи.) Для изображения векторов скоростей и сил пользуйтесь стрелками. Для различных видов векторов стройте отдельные диаграммы, например одну – для сил, а другую – для скоростей, если в задаче имеются оба типа векторов. Убедитесь в том, что учтены все силы, действующие на данное тело, и уясните, какие именно силы действуют и на какое тело (иначе можно допустить ошибку в определении действующей на данное тело *результирующей силы*).
**3.** Выясните, что в данной задаче требуется найти, т. е. какие величины являются неизвестными.
**4.** Установите, что́ вам нужно для нахождения неизвестных величин. а) Может оказаться полезным наличие одного или более соотношений (или уравнений), которые связывают неизвестные величины с известными, но необходимо убедиться в том, что данное соотношение (соотношения) применимо в рассматриваемом случае. Помните о формулах, которые не имеют общего характера, а применимы лишь в конкретных частных случаях. (Поэтому не рекомендуется просто пролистывать главу в поисках подходящего уравнения.) Очень важно знать пределы применимости любого выражения или уравнения, т. е. когда оно правомерно, а когда нет. В настоящей книге наиболее общим выражениям присвоены номера, но даже эти выражения могут обладать ограниченным диапазоном применимости. Выражения без номеров, как правило, справедливы только в весьма частных случаях. б) Полезно также установить, какая информация для решения данной задачи или в рассматриваемой ситуации существенна, а какая не существенна.
**5.** Решите задачу, используя как алгебраические преобразования, так и (или) численные расчеты. Убедитесь при этом в соблюдении правильной размерности – это может служить критерием правильности решения.
**6.** В заключение поставьте перед собой вопрос: «*Разумен ли ответ*?» Используйте здесь ваш здравый смысл. Полезно также произвести *оценку порядка величин*; способ такой оценки описан в разд. 1.7. Это помимо всего прочего поможет избежать ошибок в определении места запятой при записи ответа в десятичных дробях. При решении отдельных задач может помочь также и анализ размерностей, описанный в разд. 1.6.

### Заключение

*Три закона движения* Ньютона являются фундаментальными классическими законами, описывающими движение. *Первый закон* Ньютона говорит о том, что если равнодействующая всех сил, действующих на тело, равна нулю, то тело, находящееся первоначально в состоянии покоя, остается покоящимся, а движущееся тело продолжает двигаться по прямой с постоянной скоростью. Стремление тела сопротивляться изменениям своего движения называется *инертностью*. *Масса* является мерой инертности тела. *Сила тяжести*, действующая на тело, равна произведению массы тела на ускорение свободного падения $g$ ($F_g = mg$).

*Второй закон* Ньютона утверждает, что ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к телу сил и обратно пропорционально массе

тела, что записывается как

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Второ́й закон Ньютона является одним из наиболее важных и фундаментальных законов классической физики. *Сила* – величина векторная, и ее можно рассматривать как толчок или натяжение. С помощью второго закона Ньютона силу можно определить как воздействие на тело, способное вызвать его ускорение. *Равнодействующая* (результирующая) всех приложенных к телу сил равна векторной сумме этих сил.

*Третий закон* Ньютона гласит, что если одно тело действует с некоторой силой на другое, то второе тело всегда действует на первое с силой, равной по величине первой силе и противоположной ей по направлению.

При выполнении расчетов необходимо пользоваться соответствующей системой единиц измерения; в настоящее время применяют главным образом систему единиц СИ.

В случае когда одно тело скользит по другому, силу трения, с которой каждое тело действует на другое, можно приближенно записать в виде $F_{тр} = \mu F_N$, где $F_N$ – нормальная сила (эта сила, с которой каждое тело действует на другое, перпендикулярна поверхности их контакта), а $\mu$ – коэффициент трения скольжения (если происходит относительное движение тел). В случае когда тела покоятся относительно друг друга, $\mu$ представляет собой коэффициент трения покоя, а $F_{тр}$ – максимальную силу трения непосредственно перед началом движения.

## Вопросы

1. Сравните силы, необходимые для подъема тела массой 10 кг на Луне и на Земле. С какой силой нужно запустить тело массой 2 кг, чтобы оно двигалось в горизонтальном направлении на Луне? на Земле?
2. Камень подвешен к потолку на тонкой нити так, что остаток ее свешивается ниже камня. Если человек дернет за свешивающуюся нить, то в каком месте она порвется – ниже камня или выше его? Что произойдет, если человек приложит к нити медленно нарастающее усилие? Поясните ваши ответы.
3. Почему ребенок в коляске откидывается назад, когда вы резко толкаете ее?
4. При автомобильных авариях иногда у водителя бывает сотрясение мозга; это имеет место, когда пострадавший автомобиль испытывает сильный толчок сзади. Объясните, почему кажется, что при этом голова жертвы откидывается назад. Реально ли это?
5. Если мяч для игры в гольф бросить на тротуар, он подпрыгнет вверх. а) Требуется ли приложить усилие, чтобы заставить мяч подпрыгнуть вверх? б) Если да, то со стороны какого тела эта сила действует?
6. С точки зрения первого и второго законов Ньютона рассмотрите движение вашей ноги во время выполнения одного шага при прогулке.
7. Когда у человека на руке или на ноге наложен гипс, он испытывает сильную усталость. Объясните это на основании первого и второго законов Ньютона.
8. Если ускорение тела равно нулю, то означает ли это, что на него не действует ни одна сила?
9. На тело действует одна-единственная сила. Может ли ускорение тела равняться нулю? Может ли тело иметь скорость, равную нулю?
10. Почему в начале движения вы сильнее нажимаете на педаль велосипеда, чем при движении с постоянной скоростью?
11. Каковы ваша масса (в килограммах) и вес (в ньютонах)?
12. Должна ли действовать на тело какая-либо сила, чтобы оно двигалось по криволинейной траектории? Рассмотрите случаи а) постоянной скорости; б) переменной скорости.
13. Если вы бежите и хотите сразу же остановиться, то вы должны быстро затормозиться. а) Откуда берется сила, которая приводит к вашему торможению? б) Оцените (основываясь на вашем житейском опыте) максимальное

тормозящее ускорение человека, бегущего с большой скоростью и внезапно останавливающегося.

14. Одна лошадь сказала себе: «Бесполезно тащить телегу. С каким бы усилием я ее ни тянула, она все равно будет тянуть меня назад с точно такой же силой. Поэтому я никогда не смогу сдвинуть ее». Объясните, в чем ошибка в рассуждениях лошади. Вам поможет диаграмма, изображающая все участвующие в данном процессе силы.

15. Почему, когда вы идете по плывущему по воде бревну, оно движется в противоположном направлении?

16. Почему при ударе по футбольному мячу вашей ноге бывает больно?

17. С какой силой действует на вас земля, когда вы стоите на ней неподвижно? Почему эта сила не подбрасывает вас в воздух?

18. Сила тяжести, действующая на камень массой 2 кг, в два раза больше, чем сила тяжести, действующая на камень массой 1 кг. Почему же более тяжелый камень не падает быстрее?

19. Чтобы держать сумку с продуктами, человек прикладывает силу величиной 40 Н, направленную вверх. Опишите силу «реакции» (третий закон Ньютона), указав а) ее величину; б) ее направление; в) от какого тела исходит; г) на какое тело действует эта сила.

20. Согласно третьему закону Ньютона, при перетягивании каната каждая команда действует на соперника с равной силой. Чем же тогда определяется, какая команда победит?

21. Может ли коэффициент трения превышать 1,0?

22. Предложите метод измерения коэффициента трения с помощью наклонной плоскости.

## Задачи

Раздел 4.4

1. (I) Какое натяжение должен испытывать трос, при помощи которого автомобиль массой 1500 кг разгоняют с ускорением 0,650 м/с$^2$? Трением пренебрегите.

2. (I) Какая сила необходима для того, чтобы за 5,0 с остановить автомобиль массой 1000 кг, движущийся со скоростью 90 км/ч?

3. (I) Согласно упрощенной модели сердца млекопитающего, при каждом сокращении около 20 г крови ускоряется от скорости 0,25 м/с до скорости 0,35 м/с за время 0,10 с. Какова при этом величина силы, развиваемой сердечной мышцей?

4. (I) Ускорение тела равно 8,8 м/с$^2$. На него действует результирующая сила величиной 30,8 Н. Какова масса тела?

5. (I) Какая сила нужна, чтобы тело массой 4,0 г приобрело ускорение 10 000$g$ (например, в центрифуге)?

6. (II) Паук массой 0,085 г спускается по нити паутины, которая поддерживает паука с силой $4{,}8 \cdot 10^{-4}$ Н. Каково ускорение паука? Сопротивлением воздуха пренебрегите.

7. (II) При автомобильной катастрофе человек имеет реальные шансы выжить, если величина тормозящего ускорения не превышает 30$g$. Вычислите силу, которая действует на человека массой 70 кг и создает такое ускорение. Какое расстояние при этом проходит автомобиль до полной остановки, если его скорость была 80 км/ч?

8. (II) Бейсбольный мяч массой 0,145 кг летит со скоростью 35,0 м/с и ударяется о рукавицу принимающего мяч игрока; при этом мяч полностью останавливается и затем отскакивает назад на 11,0 см. Определите среднюю силу, с которой мяч действует на рукавицу.

9. (II) Определите среднюю силу, которую спортсмен прикладывает к ядру массой 7,0 кг, если ядро ускоряется на пути длиной 2,9 м, а сообщенная ему начальная скорость была равна 13 м/с.

10. (II) Лифт (масса 4750 кг) устроен таким образом, что его максимальное ускорение равно 0,0650$g$. Определите максимальную и минимальную силы, с которыми мотор должен действовать на удерживающий лифт трос.

11. (II) Чтобы избежать наказания, ребенок массой 38 кг хочет спуститься из окна третьего этажа. К сожалению, самодельная веревка, сделанная из лоскутков, может выдержать массу только 31 кг. Каким образом должен ребенок использовать такую «веревку» для побега? Дайте количественный ответ.

12. (II) Каково ускорение падающего свободно парашютиста (без парашюта) массой 60 кг, если сила сопротивления воздуха равна 250 Н?

13. (II) Человек прыгает с башни высотой 4,7 м. При ударе о землю он сгибает колени и его тело тормозится на пути, приблизительно равном 0,70 м. Если масса туловища человека (без массы ног) равна 48 кг, то каковы а) скорость человека перед тем, как его ноги коснутся земли; б) сила, с которой ноги человека действуют на туловище при торможении?

14. (II) При исключительно высоком прыжке с места человек может взлететь на высоту 0,80 м над землей. С какой силой человек массой 75 кг должен действовать на землю, чтобы выполнить такой прыжок? Считайте, что перед прыжком человек опустился (присел) на 0,20 м.

15. (II) С вершины падающей Пизанской башни высотой 55 м брошен кошелек массой 3,0 кг, который достиг земли при скорости 29 м/с.

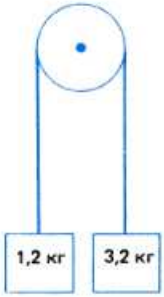



Рис. 4.17.

Чему равна средняя сила сопротивления воздуха?

16. Бейсбольный мяч массой 0,14 кг отрывается от биты, имея скорость 80 м/с. Время контакта с битой приблизительно равно $5{,}0 \times 10^{-4}$ с. С какой силой (считается, что она постоянна) бита действует на мяч? Достаточно ли этой силы, чтобы поднять человека средней массы?

Раздел 4.7

17. (I) Какова величина силы тяжести, действующей на космонавта массой 75 кг а) на Земле; б) на Луне ($g = 1{,}7$ м/с$^2$); в) на Венере ($g = 8{,}7$ м/с$^2$); г) при его движении с постоянной скоростью в космическом пространстве?

Раздел 4.8

18. (I) Сила величиной 500 Н действует в северо-западном направлении. В каком направлении нужно приложить вторую силу тоже величиной 500 Н, чтобы равнодействующая двух сил была направлена на запад?

19. (II) Человек толкает газонокосилку с постоянной силой 90 Н, направленной вдоль ручки, расположенной под углом 30° к горизонтали. Косилка движется с постоянной скоростью. Вычислите а) горизонтальную силу сопротивления движению косилки (ее масса равна 18 кг); б) нормальную силу; в) силу, которую человек должен приложить к газонокосилке, чтобы разогнать ее из состояния покоя до скорости 4,0 км/ч за 2,5 с.

20. (II) Лучшие спринтеры могут пробежать стометровку за 10,0 с. а) Какова горизонтальная составляющая силы, с которой спринтер массой 75 кг действует на землю в процессе ускорения (мы предполагаем, что спортсмен ускоряется равномерно на первых 10,0 м дистанции)? б) Какова средняя скорость спринтера на остальных 90 м дистанции?

21. (II) Устройство, показанное на рис. 4.17, в котором две массы поддерживаются блоком, называется *машиной Атвуда*. Считая, что блок не обладает ни массой, ни трением, вычислите а) ускорение системы; б) натяжение нити.

22. (II) В момент начала забега спринтер массой 60 кг толкает стартовую колодку с силой 950 Н, направленной под углом 20° относительно земли. а) Каково горизонтальное ускорение спринтера? б) С какой скоростью спринтер оторвется от колодки, если сила действовала в течение 0,32 с?

23. (II) Бадья с краской, на которую действует сила тяжести 20 Н, подвешена на веревке, не имеющей массы, под другой бадьей (под ее дном), на которую действует сила тяжести 20 Н. Обе бадьи поднимаются вверх с помощью не имеющей массы веревки, прикрепленной к верхней бадье, с ускорением 1,5 м/с$^2$. Вычислите натяжение каждой веревки.

24. (II) Вертолет массой 5000 кг, поднимая автомобиль массой 1500 кг, движется вверх с ускорением 0,55 м/с$^2$. а) Чему равна подъемная сила, действующая со стороны воздуха на пропеллер вертолета? б) Каково натяжение троса, (пренебрегите его массой), соединяющего автомобиль с вертолетом?

25. (III) Каждый из двух грузов, показанных на рис. 4.17, первоначально находится на высоте 1,60 м над землей, а блок – на высоте 4,8 м над землей. Какой наибольшей высоты достигнет самый легкий груз после того, как системе дадут возможность двигаться свободно?

26. (III) Локомотив тянет за собой поезд, состоящий из двух вагонов одинаковой массы. Покажите, что при любом не равном нулю ускорении поезда натяжение в сцепке между локомотивом и первым вагоном будет в два раза больше, чем между первым и вторым вагонами.

27. (III) Тяжелый стальной трос длиной $L$ и массой $M$ проходит через небольшой блок, не имеющий ни массы, ни трения в оси. а) Если $y$ – длина троса по одну сторону блока (т.е. с другой стороны блока свешивается часть троса длиной $L - y$), то каким будет ускорение троса в зависимости от $y$? б) Считая, что трос начинает движение из состояния покоя, когда по одну сторону блока свешивается его часть длиной $y_0$, найдите скорость $v_f$ троса в момент, когда он целиком пройдет через блок и упадет с него. в) Вычислите $v_f$ при $y_0 = (2/3)\,L$.

28. (III) К потолку кабины транспортного средства (поезда, автомобиля, самолета) подвешен на пружине груз массой $m$. Это устройство можно использовать для измерения ускорения. а) Выведите соотношение между ускорением $a$ транспортного средства и углом $\theta$, который

пружина составляет с вертикалью. Считайте, что движение происходит вблизи поверхности земли. б) Какой была начальная скорость автомобиля, если он полностью затормозился за 5,5 с и был измерен угол $\theta = 18°$?

Раздел 4.9

29. (I) Для передвижения ящика массой 40 кг по бетонному полу требуется сила 270 Н. Чему равен коэффициент трения покоя между коробкой и полом?
30. (I) Какая сила требуется для передвижения с постоянной скоростью корзины массой 35 кг по полу, если коэффициент трения скольжения между корзиной и полом $\mu_k = 0{,}41$? Какой должна быть сила, если $\mu_k = 0$?
31. (II) Ящик массой 8,0 кг на наклонной плоскости с углом наклона 30° движется с ускорением 0,30 м/с$^2$. Найдите силу трения, препятствующую этому движению. Чему равен коэффициент трения?
32. (II) Предположим, что вы стоите в вагоне поезда, движущегося с ускорением $0{,}42g$. Каким должен быть минимальный коэффициент трения между вашими подошвами и полом, чтобы вы не скользили?
33. (II) На горизонтальной дороге автомобиль без «заноса» может тормозиться с ускорением $-5{,}80$ м/с$^2$. Чему будет равно его тормозящее ускорение, если дорога идет под углом 12° в гору? Считайте, что сила трения не меняется.
34. (II) С каким максимальным ускорением может двигаться автомобиль, если коэффициент трения покоя между шинами и покрытием дороги равен 0,55?
35. (II) Какую массу должно иметь тело I на рис. 4.14, чтобы никакого движения не происходило? Считайте, что $\mu_s = 0{,}20$.
36. (II) Мокрый кусок мыла свободно скользит по желобу длиной 12 м, имеющему наклон 8,8°. Сколько времени потребуется ему, чтобы достигнуть самого низа? Трением пренебрегите.
37. (II) Ящик толкнули таким образом, что он начал скользить по полу. Как далеко продвинется ящик, если коэффициент трения скольжения равен 0,30, а при толчке ему была сообщена начальная скорость 3,0 м/с?
38. (II) Выведите формулу для ускорения системы, показанной на рис. 4.14, через $m_I$, $m_{II}$ и массу веревки $m_R$. Выясните, какие еще нужны переменные.
39. (II) Велосипедист взбирается по крутому склону холма со скоростью 5,0 км/ч и достигает вершины. Затем он спускается по склону холма с углом наклона 45° и длиной 50 м. Чему будет равна скорость велосипедиста, когда он доберется до подножия холма? Трением пренебрегите.
40. (II) Автомобиль массой 1000 кг тянет трейлер массой 450 кг. Чтобы ускориться, автомобиль действует на землю силой в горизонтальном направлении, величина которой равна $3{,}5 \cdot 10^3$ Н. С какой силой автомобиль действует на трейлер? Считайте, что коэффициент трения равен 0,45.
41. (II) а) Покажите, что минимальный тормозной путь автомобиля, движущегося со скоростью $v$, равен $v^2/(2\mu g)$, где $\mu$ – коэффициент трения покоя между шинами и дорогой, а $g$ – ускорение свободного падения. б) Найдите тормозной путь автомобиля массой 1500 кг, движущегося со скоростью 90 км/ч, если $\mu = 0{,}85$. в) Каким был бы тормозной путь автомобиля на Луне, если бы все остальные условия были прежними?
42. (II) Автомобиль начинает катиться с холма с наклоном 1/4 (1/4 означает, что на каждые 4 м пройденного пути изменение высоты составляет 1 м). Какая скорость будет у автомобиля, когда он достигнет подножия холма, после того как он проехал 50 м? Трением пренебрегите.
43. (II) Решите снова задачу 42, считая, что действующий коэффициент трения равен 0,10.
44. (II) Два контейнера, масса одного из которых равна 95 кг, а другого – 125 кг, стоят, соприкасаясь друг с другом, на горизонтальной поверхности. К контейнеру массой 95 кг прикладывают силу величиной 650 Н. Если коэффициент трения скольжения равен 0,25, то чему равны а) ускорение системы; б) сила, с которой каждый контейнер действует на соседний?
45. (II) Трактор везет на плоской платформе контейнер с тяжелым оборудованием массой 3200 кг. Коэффициент трения покоя между контейнером и платформой равен 0,55. Какое максимальное тормозящее ускорение может создать водитель трактора при остановке, чтобы избежать сползания контейнера?
46. (II) Велосипедист массой 70 кг (вместе с велосипедом) может катиться с холма, имеющего уклон 6,2°, с постоянной путевой скоростью 7,0 км/ч. Какую силу (в среднем) ему придется приложить, чтобы подниматься на холм с той же скоростью?
47. (II) Мотоциклист, движущийся с постоянной скоростью 12 м/с, въезжает на участок дороги, покрытой песком, где коэффициент трения скольжения равен 0,80. Проскочит ли он песчаный участок без переключения скоростей, если протяженность участка равна 15 м? Если да, то какова будет его скорость в конце участка?
48. (II) Инженер работает над перепланировкой

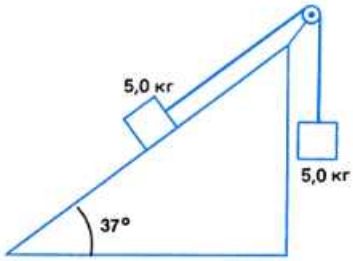



Рис. 4.18.

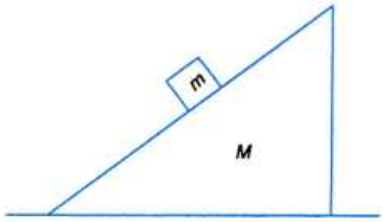



Рис. 4.19.

холмистого участка города. Важным является вопрос о том, какую крутизну должны иметь дороги, чтобы даже маломощные автомобили взбирались на холмы без потери скорости. Известно, что некоторый маломощный автомобиль, имеющий массу 1200 кг, при полной загрузке может на горизонтальной дороге ускоряться из состояния покоя до скорости 14 м/с (50 км/ч) за 7,2 с. Используя эти данные, вычислите максимально допустимую крутизну дороги.

49. (II) Чему равно ускорение системы на рис. 4.18, если коэффициент трения скольжения равен 0,10?

50. (III) Блок массой 4,0 кг положен на блок массой 12,0 кг, движущийся по горизонтальному столу с ускорением $a = 5{,}2$ м/с$^2$. а) Найдите минимальный коэффициент трения $\mu$, при котором верхний блок не будет сползать. б) Если $\mu$ составляет лишь половину этого минимального значения, то чему будут равны ускорения верхнего блока относительно стола и относительно нижнего блока? в) Какую силу нужно приложить к блоку массой 12,0 кг в случаях «а» и «б», если нижний блок движется по столу без трения.

51. (III) Велосипедист может катиться с холма, имеющего наклон 4,5°, с постоянной скоростью 8,5 км/ч. Если сила трения (в нее входит и сопротивление воздуха) пропорциональна скорости $v$ ($F_{тр} = cv$), то чему будут равны а) постоянная $c$; б) средняя сила, которую нужно прикладывать, чтобы спускаться с холма со скоростью 25 км/ч? Масса велосипедиста вместе с велосипедом равна 80 кг.

52. (III) Небольшой блок массой $m$ покоится на наклонной грани треугольного блока массой $M$, который лежит на горизонтальном столе (рис. 4.19). а) Если все поверхности не имеют трения, то каким будет ускорение каждого блока? Считая, что движение начинается из состояния покоя, опишите это движение. б) Какую силу нужно прикладывать к блоку массой $M$, чтобы блок массой $m$ не двигался относительно блока $M$ (т.е. чтобы $m$ не двигался по наклонной плоскости)?

53. (III) Если тело движется со скоростью $v$, которая не слишком велика, то сила сопротивления воздуха $F_A$, действующая на это тело, приблизительно пропорциональна $v$. Следовательно, можно записать $F_A = -kv$, где $k$ – постоянная. а) Почему в этом соотношении стоит знак минус? б) Покажите, что для вертикально падающего тела второй закон Ньютона может быть записан следующим образом:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

в) Покажите, что конечная скорость задается соотношением $v_t = mg/k$, и объясните, что означает термин «конечная скорость». г) Покажите, что скорость тела, начавшего падение из состояния покоя при $t = 0$, в произвольный момент времени $t$ дается выражением

$$v = v_t(1 - e^{-kt/m}).$$

д) Постройте графики зависимости $a$ от $t$, $v$ от $t$ и $y$ от $t$ в системе единиц СИ при $k = 0{,}30$ м и $m = 6{,}8$ кг. [*Подсказка* для п. "г" задачи: это можно показать либо интегрированием выражения из п. «б» после замены переменных: $\mu = mg/k - v$, либо подстановкой этого соотношения для $v$ в уравнение, приведенное в п. «б» задачи.]

Задачи для решения с помощью программируемого микрокалькулятора (см. разд. 2.10):

* 54. (III) Сила сопротивления воздуха, действующая на быстро падающее тело, записывается в виде $F = -kv^2$, так что второй закон Ньютона для такого тела принимает вид

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2;$$

при этом мы считаем, что положительным является направление вниз. Используя метод численного интегрирования, рассмотренный в разд. 2.10, оцените (с точностью до 2%) ско-

рость и координату (при разбиении на промежутки по 1,0 с) до момента времени 15,0 с свободно падающего человека (парашютиста) массой 75 кг, начинающего движение из состояния покоя; считайте, что $k = 0{,}22$ кг/м. [*Подсказка*: вам очень поможет программируемый микрокалькулятор.] Покажите также, что в некоторый момент времени скорость тела становится постоянной (эта скорость называется *установившейся скоростью*), и объясните, почему это происходит.

*** 55.** (III) Предположим, что в момент времени $t = 0$, когда ракета массой 250 кг исчерпала свой запас топлива и приобрела скорость 120 м/с в вертикальном направлении, на нее начала действовать результирующая сила $F = -mg - kv^2$ ($k = 0{,}65$ кг/м). Вычислите $v$ и $y$ через промежутки времени 1,0 с при движении только вверх, а также наибольшую высоту, которой достигла ракета. Сравните результат с полетом в отсутствие сопротивления воздуха ($k = 0$).

# 5 Динамика вращательного движения; гравитация и обобщение Ньютона

В разд. 3.9 и 3.10 рассматривалась кинематика движения частицы по окружности. В этой главе с помощью законов Ньютона мы изучим динамику такого движения. Мы обсудим также вопрос о том, как Ньютон пришел к открытию еще одного великого закона, предположив, что Луна и планеты совершают круговое движение. Этот новый закон, называемый законом всемирного тяготения, стал кульминацией ньютоновского рассмотрения физического мира. Действительно, вплоть до начала 20 в. считалось, что физика Вселенной полностью описывается ньютоновскими тремя законами движения и законом всемирного тяготения.

## 5.1. Динамика движения по окружности

В разд. 3.9 мы показали, что частица, обращающаяся по окружности радиусом $r$ с постоянной скоростью $v$, испытывает ускорение

$$a_c = v^2/r .$$

Ускорение $a_c$ называется центростремительным, так как оно направлено к центру окружности. Таким образом, хотя величина ускорения при равномерном движении по окружности остается постоянной, направление вектора ускорения постоянно меняется. Следовательно, вектор ускорения $\mathbf{a}_c$ должен рассматриваться как переменный. Направление вектора ускорения $\mathbf{a}_c$ при равномерном движении по окружности всегда перпендикулярно направлению скорости $\mathbf{v}$.

Движущееся равномерно по окружности тело, например мячик на конце веревки, испытывает действие силы, удерживающей его на окружности; иными словами, для сообщения телу центростремительного ускорения к телу необходимо приложить силу. Величина этой силы может быть рассчитана с помощью второго закона Ньютона: $F = ma$, в который вместо $a$ нужно подставить центростремительное ускорение $a_c = v^2/r$; при этом полная (или результирующая) сила $F$ запишется в виде

$$F = ma_c = mv^2/r .$$




Рис. 5.1. Сила, необходимая для удерживания движущегося тела на окружности. Если скорость движения постоянна, то сила направлена к центру окружности.

Поскольку в любой момент времени ускорение $a_c$ направлено к центру окружности, сила должна быть направлена тоже к центру окружности. Необходимость действия силы интуитивно вполне понятна: если бы на тело не действовала никакая сила, то оно двигалось бы не по окружности, а по прямой – в соответствии с первым законом Ньютона. Для того чтобы отклонить тело от его «естественного» прямолинейного движения «по инерции», необходима сила, действующая под углом к направлению движения. При движении по окружности эта сила должна быть направлена к центру окружности (рис. 5.1). Такую силу иногда называют центростремительной, но следует подчеркнуть, что это название не означает новой разновидности силы. Оно указывает лишь на то, что сила направлена к центру окружности. Сила должна быть приложена со стороны какого-либо тела. Например, когда человек вращает шарик на веревке по окружности, он (через веревку) прикладывает к шарику силу.

Существует неправильное представление о том, что тело, движущееся по окружности, испытывает действие так называемой центробежной силы, которая направлена наружу. Рассмотрим, например, случай, когда человек вращает вокруг своей головы шарик, привязанный к концу нити (рис. 5.2). Если вы проделывали это когда-ни-

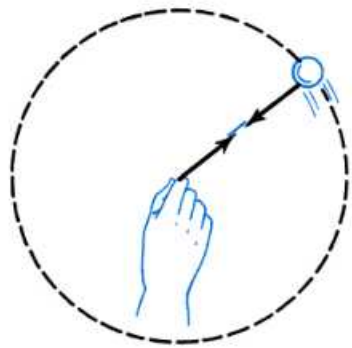


Рис. 5.2. Вращение шарика на конце нити. Рука действует на шарик, а шарик по третьему закону Ньютона – на руку.

будь сами, то должны помнить, что ощущали силу, приложенную к вашей руке и тянущую ее наружу. Возникает неправильное представление, когда эту силу интерпретируют как направленную наружу «центробежную» силу, удаляющую шарик от центра и передающуюся через нить руке. В действительности все происходит совсем иначе. Для удерживания шарика на окружности человек (посредством нити) тянет его внутрь. Следовательно, по третьему закону Ньютона шарик (опять-таки посредством нити) действует на руку с равной и противоположно направленной силой, и *это* та сила, которую ощущает

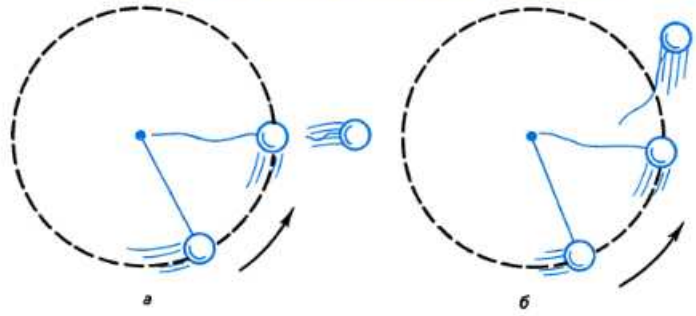



Рис. 5.3. Если бы существовала центробежная сила, то при обрыве нити мячик улетал бы так, как показано на рис. *а*. В действительности он улетает так, как показано на рис. *б*.

ваша рука. Сила, *действующая на шарик*,– это направленная внутрь сила натяжения нити. Для более убедительного доказательства того, что на шарик действует не «центробежная» сила, посмотрим, что произойдет, если нить убрать. Если бы на шарик действовала центробежная сила, то он улетел бы по радиусу в сторону от центра, как показано на рис. 5.3,*а*. Однако этого не происходит; шарик начинает двигаться по касательной (тангенциально) (рис. 5.3,*б*) в направлении скорости, которую он имел в момент времени, когда исчезла нить. Это происходит потому, что в этот момент времени прекращается действие силы, направленной внутрь.

Возникновение центростремительного ускорения можно проследить на примере автомобиля, движущегося с большой скоростью по кривой дороге. При этом, находясь в салоне автомобиля, вы можете ощутить действие силы, которая относит вас в сторону. Однако никакой мистической центробежной силы, действующей на вас, не существует. При повороте происходит только следующее: вы «стремитесь» двигаться по прямой, в то время как автомобиль, образно говоря, отклоняется «перед вами». Для того чтобы заставить вас двигаться по искривленной

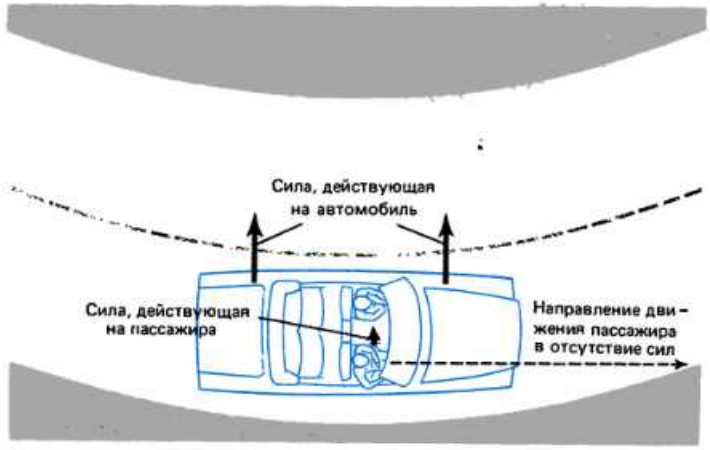



Рис. 5.4. Дорога создает силу, заставляющую автомобиль двигаться по окружности и направленную к ее центру. Аналогично автомобиль создает силу, действующую на пассажиров и также направленную к центру окружности.

траектории, спинка кресла или дверца машины действует на вас с некоторой силой (рис. 5.4). Автомобиль, если он должен двигаться по кривой, в свою очередь, испытывает направленную внутрь этой кривой силу. При движении по ровной дороге это сила трения между шинами и мостовой. Если сила трения недостаточно велика (как, например, при движении по льду), т. е. к автомобилю не может быть приложена достаточная по величине сила, то автомобиль испытает занос и «соскользнет» с круговой траектории.

**Пример 5.1.** Автомобиль массой 1000 кг равномерно движется по ровной дороге в форме окружности радиусом $R = 50$ м. Скорость движения автомобиля 50 км/ч (14 м/с). Сможет ли автомобиль выполнить поворот, если а) мостовая сухая и коэффициент трения скольжения равен 0,60; б) мостовая обледенела и коэффициент трения скольжения равен $\mu_s = 0{,}20$?

**Решение.** Вычислим сначала силу $F$, необходимую для сообщения автомобилю ускорения при его движении по окружности:

$$F = m\frac{v^2}{R} = \frac{(1000\text{ кг})\,(14\text{ м/с})^2}{(50\text{ м})} = 3900\text{ Н}.$$

Поскольку дорога ровная, то сила нормального давления $F_N$, действующая на автомобиль, равна силе тяжести: $F_N = mg = (1000\text{ кг})\,(9{,}8\text{ м/с}^2) = 9800$ Н. Для случая «а» $\mu_s = 0{,}60$ и максимальная сила трения покоя равна

$$F_{тр} = \mu_s F_N = (0{,}60)\cdot(9800\text{ Н}) \approx 5900\text{ Н}.$$

Поскольку для движения по окружности достаточно силы 3900 Н и именно эта сила трения покоя будет приложена к автомобилю, то автомобиль сможет выполнить поворот. В случае «б» максимальная возможная сила трения покоя равна

$$F_{тр} = \mu_s F_N = (0{,}20)\,(9800\text{ Н}) = 1960\text{ Н}.$$

Следовательно, автомобиль занесет и он «не впишется» в поворот.

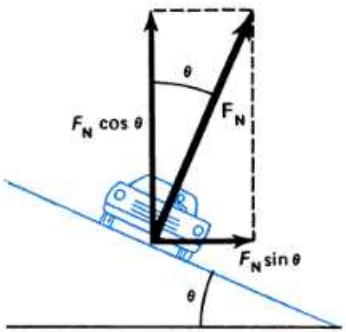



Рис. 5.5. Разложение на горизонтальную и вертикальную составляющие силы, направленной нормально наклонному полотну дороги и действующей на автомобиль, движущийся по окружности.

Ситуация ухудшается, если под действием тормозов колеса автомобиля окажутся заблокированными. При обычном вращении нижняя часть колес, касающаяся дороги, в каждый данный момент времени неподвижна относительно нее; при этом возникает сила трения покоя. При торможении шины скользят относительно дороги и сила трения (она называется теперь силой трения скольжения) становится меньше. Поэтому, когда дорога мокрая или покрыта льдом, т. е. сила трения между колесами и дорогой стала меньше, блокировка колес достигается при нажатии тормозной педали с меньшей силой.

При наклоне дорожного полотна (дорога профилирована) вероятность заноса при движении по кривой может уменьшиться, поскольку у силы нормальной реакции дороги возникнет составляющая в направлении к центру окружности (рис. 5.5), так что необходимая величина силы трения уменьшится. Для данного угла наклона будет существовать некоторое значение скорости, когда сила трения вообще не требуется. Это имеет место, когда горизонтальная составляющая силы нормальной реакции дороги $F_N \sin\theta$ в точности совпадает с силой, необходимой для сообщения автомобилю центростремительного

ускорения, т. е. будет выполняться условие

$$F_N \sin\theta = mv^2/r.$$

Угол наклона дороги $\theta$ выбирается таким, чтобы это условие выполнялось при определенном значении скорости, называемой проектной скоростью.

**Пример 5.2.** а) Найдите угол наклона профилированной дороги, при котором автомобиль может двигаться со скоростью $v$ по окружности радиусом $r$ в условиях отсутствия трения. б) Чему равен этот угол для окружности радиусом 50 м при проектной скорости 50 км/ч?

**Решение.** а) Из формулы, написанной выше, следует, что $F_N \sin\theta = mv^2/r$. В вертикальном направлении действуют две силы: сила $F_N \cos\theta$, направленная вверх (рис. 5.5), и сила тяжести $mg$, направленная вниз. Так как в вертикальном направлении автомобиль не движется, вертикальная составляющая ускорения равна нулю, и из второго закона Ньютона следует, что

$$F_N \cos\theta - mg = 0,$$

откуда

$$F_N = mg/\cos\theta.$$

Подставляя это значение $F_N$ в формулу, полученную выше для горизонтальной составляющей нормальной силы реакции, находим

$$\frac{mv^2}{r} = F_N \sin\theta = mg\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = mg\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

или

$$\mathrm{tg}\,\theta = v^2/rg.$$

б) В случае $r = 50$ м и $v = 50$ км/ч (или 14 м/с) имеем $\mathrm{tg}\,\theta = (14\text{ м/с})^2/(50\text{ м} \times 9{,}8\text{ м/с}^2) = 0{,}40$, т. е. $\theta = 22°$.

Особенности динамики движения по окружности можно весьма наглядно продемонстрировать на примере устройства, широко применяемого на практике, которое называется центрифугой или ультрацентрифугой. Центрифуги используются для быстрого осаждения или сепарации веществ с незначительно различающимися физическими свойствами. Пробирки или другие сосуды, содержащие пробы вещества, помещаются в ротор центрифуги, вращающийся с очень высокой скоростью. На рис. 5.6 одна и та же пробирка изображена в двух различных положениях при вращении ротора центрифуги. Маленьким кружком обозначена частица (например, макромолекула) в наполненной жидкостью пробирке. Когда пробирка находится в положении $A$ и ротор поворачивается, частица стремится сместиться по прямой в направлении, указанном штриховой линией со стрелкой. Жидкость противодействует[1] такому движению частиц, вследствие чего возникает центростремительная сила, удерживающая частицу при ее движении по окружности. Поскольку сила сопротивления жидкости или газа, содержащихся в пробирке, как правило, не равна необходимой центростремительной силе, частица в конечном счете достигает дна, дно пробирки действует на частицу с силой, необходимой для удержания частицы на окружности. В действительности дно пробирки должно действовать на всю пробирку, заставляя ее

[1] Это одна из сил трения, аналогичная силе сопротивления воздуха.

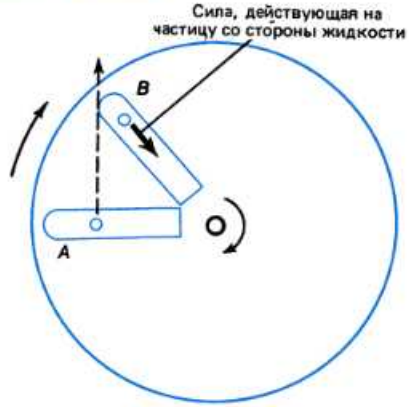



Рис. 5.6. Вращение пробирки в центрифуге.

двигаться по окружности. Если пробирка недостаточно прочна для того, чтобы сообщить эту силу, то под воздействием частицы она может разрушиться.

В центрифугу помещают вещества, которые нельзя быстро осадить или разделить под действием силы тяжести. Преимущество центрифуги и в том, что благодаря высоким скоростям вращения она создает «эффективную силу тяжести», значительно превышающую обычную силу тяжести. Под действием этой силы частицы движутся ко дну пробирки быстрее, чем в обычных условиях.

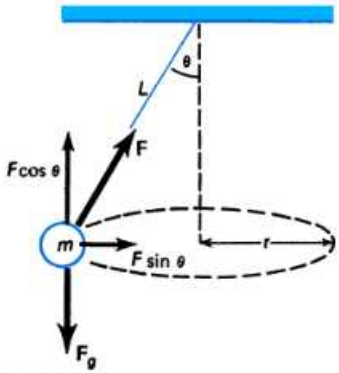



Рис. 5.7. Конический маятник (пример 5.4).

**Пример 5.3.** Ротор ультрацентрифуги вращается с частотой 50 000 об/мин (оборотов в минуту). Длина пробирки (перпендикулярной оси вращения) равна 6,00 см, и дно пробирки отстоит от оси вращения на 10,0 см. а) Вычислите центростремительное ускорение (в единицах ускорения свободного падения $g$). б) Если полная масса содержимого пробирки равна 12,0 г, то какую силу должно выдерживать дно пробирки?

**Решение.** а) Находясь в верхней части пробирки, частица вращается по окружности длиной $2\pi r = (2)(3{,}14)(0{,}0600\text{ м}) = 0{,}377\text{ м}$. Поскольку частица в минуту совершает $5{,}00 \cdot 10^4$ оборотов, ее скорость равна

$$v = \frac{(0{,}377\text{ м/об})(5{,}00 \cdot 10^4\text{ об/мин})}{60{,}0\text{ с/мин}} = 3{,}14 \cdot 10^2\text{ м/с}.$$

При этом центростремительное ускорение равно

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(3{,}14 \cdot 10^2\text{ м/с})^2}{(0{,}0600\text{ м})} = 1{,}64 \cdot 10^6\text{ м/с}^2.$$

Разделив это значение на $g = 9{,}8\text{ м/с}^2$, получим ускорение $1{,}67 \cdot 10^5$ в единицах $g$. Частица вблизи дна пробирки ($r = 0{,}100$ м) вращается со скоростью $v = (2\pi r)(5{,}00 \times 10^4)/(60{,}0\text{ с}) = (0{,}628) \cdot (5{,}00 \cdot 10^4)/(60{,}0\text{ с}) = 5{,}24 \cdot 10^2$ м/с и $a_c = v^2/r = 2{,}74 \cdot 10^6\text{ м/с}^2$, или $2{,}79 \cdot 10^5$ в единицах $g$.

б) Так как ускорение частицы зависит от расстояния до оси вращения, рассчита-

ем силу, обеспечивающую среднее ускорение, равное $(1{,}64 \cdot 10^6$ м/с$^2 + 2{,}74 \cdot 10^6$ м/с$^2)/2 = 2{,}19 \cdot 10^6$ м/с$^2$. Таким образом, $F = ma = (0{,}0120$ кг$)\ (2{,}19 \cdot 10^6$ м/с$^2) = 2{,}63 \times \times 10^4$ Н. Эта сила эквивалентна силе тяжести, действующей на массу 2680 кг ($m = F/g = (2{,}63 \cdot 10^4$ Н$)/(9{,}80$ м/с$^2) = 2{,}68 \cdot 10^3$ кг, т. е. примерно 3 тонны).

Рассмотрим пример другого типа.

**Пример 5.4.** Частица массой $m$ подвешена на нити длиной $L$ и вращается по окружности радиусом $r = L \sin\theta$, где $\theta$ – угол, который нить составляет с вертикалью (рис. 5.7). Вычислите скорость и период (время, необходимое для совершения одного оборота) такого *конического маятника* в зависимости от $L$, $\theta$ и $m$.

**Решение.** На частицу массой $m$ действуют сила тяжести $\mathbf{F}_g$ (величиной $F_g = mg$) и сила натяжения нити $\mathbf{F}$, которая имеет вертикальную и горизонтальную составляющие, равные по величине $F\sin\theta$ и $F\cos\theta$ соответственно. В вертикальном направлении частица не перемещается, поэтому ускорение равно нулю, и, следовательно,

$$F\cos\theta - mg = 0\,.$$

В горизонтальном направлении действует только одна сила, равная по величине $F\sin\theta$, направленная к центру окружности и сообщающая частице ускорение, равное $v^2/r$:

$$F\sin\theta = mv^2/r\,.$$

Решим эти уравнения относительно скорости $v$, исключая из них силу $F$ (воспользуемся также соотношением $r = L\sin\theta$):

$$v = \sqrt{\frac{rF\sin\theta}{m}} = \sqrt{\frac{r}{m}\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta} =$$

$$= \sqrt{\frac{Lg\sin^2\theta}{\cos\theta}}.$$

Периодом $T$ называется время, необходимое для одного оборота частицы, которая при этом проходит расстояние $2\pi r = 2\pi L\sin\theta$. Тогда скорость $v$ можно записать в виде

$$v = \frac{2\pi L\sin\theta}{T},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi L\sin\theta}{v} = \frac{2\pi L\sin\theta}{\sqrt{\frac{Lg\sin^2\theta}{\cos\theta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}};$$

здесь мы вновь воспользовались соотношением $r = L\sin\theta$.

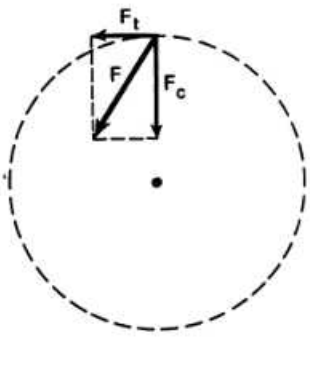



Рис. 5.8. Скорость частицы, вращающейся по окружности, изменяется по величине, если сила, действующая на нее, имеет касательную (тангенциальную) составляющую.

Движение по окружности с постоянной скоростью имеет место в том случае, когда сила, действующая на тело, направлена строго к центру окружности. Если она направлена не к центру, а под углом к радиусу, как это изображено на рис. 5.8, то ее можно разложить на две составляющие: в направлении к центру окружности и в направлении, касательном к окружности. Составляющая $\mathbf{F}_c$, направленная к центру окружности, сообщает телу центростремительное ускорение $\mathbf{a}_c$ и удерживает его на окружности. Составляющая $\mathbf{F}_t$ – касательная (тангенциальная) к окружности вызывает возрастание или убывание величины скорости, т. е. приводит к возникновению тангенциального ускорения, которое мы уже рассматривали в разд. 3.10 (рис. 3.20).

Начиная вращать вокруг головы шарик на нити, вы сообщаете ему тангенциальное ускорение. Для этого вы натягиваете нить рукой, перемещая руку из центра окружности. Аналогично поступает в спорте метатель молота, который сообщает тангенциальное ускорение молоту для

того, чтобы он приобрел к моменту бросания высокую скорость.

## 5.2. Закон всемирного тяготения Ньютона

Исаак Ньютон не только открыл три закона динамики, но изучил также движение небесных тел – планет и Луны. В частности, он интересовался природой силы, которая должна действовать на Луну, чтобы при движении вокруг Земли она удерживалась на почти круговой орбите.

Ньютон также задумывался над не связанной, казалось бы, с этим проблемой гравитации. Поскольку падающие тела ускоряются, Ньютон заключил, что на них действует сила, которую мы называем теперь силой тяготения или гравитации. Но что *вызывает* эту силу тяготения? Мы видели ранее, что если *на* тело действует сила, то она вызывается *со стороны* какого-либо другого тела. Любое тело на поверхности Земли испытывает действие этой силы тяготения, и, где бы тело ни находилось, сила, действующая на него, направлена к центру Земли. Ньютон заключил, что сама Земля создает силу тяготения, действующую на тела, находящиеся на ее поверхности.

Согласно легенде, Ньютон сидел в своем саду и обратил внимание на падающее с дерева яблоко. У него неожиданно возникла догадка о том, что если сила тяготения действует на вершине дерева и даже на вершинах гор, то возможно, что она действует и на любом расстоянии от Земли вплоть до самой Луны! Правдива ли эта история и послужило ли яблоко причиной догадки, мы в действительности не знаем[1]. Но мысль о том, что именно притяжение Земли удерживает Луну на ее орбите, послужила Ньютону основой, с которой он начал построение своей великой теории гравитации [ощутимую помощь и поддержку оказал ему в этом Роберт Гук (1635–1703)].

Ньютон начал с определения величины гравитационного взаимодействия, с которым Земля действует на Луну, путем сравнения ее с величиной силы, действующей на тела на поверхности Земли. На поверхности Земли сила

---

[1] Многие историки науки в настоящее время считают, что Ньютон выдумал эту историю для того, чтобы отодвинуть дату открытия к 60-м годам 17 в., тогда как его переписка и дневники указывают на то, что по-настоящему он пришел к закону всемирного тяготения лишь около 1685 г. Идея о том, что могла существовать связь между силой тяжести на Земле и силой, действующей на Луну, а также закон вида $1/r^2$, уже высказывалась другими учеными, в том числе Гуком. Тем не менее открытие закона всемирного тяготения мы приписываем Ньютону, поскольку именно он дал его наиболее полную формулировку и привел наиболее убедительные аргументы в его поддержку.




Рис. 5.9. Сила гравитационного притяжения, которая действует со стороны первого тела на второе, направлена к первому телу. Она равна и противоположно направлена силе, с которой второе тело действует на первое.

тяготения придает телам ускорение $g = 9{,}80$ м/с$^2$. Но чему равно центростремительное ускорение Луны? Так как Луна движется по окружности почти равномерно, ее ускорение может быть рассчитано по формуле $a_ц = v^2/r$; мы уже проводили такой расчет в примере 3.10 и нашли, что $a_ц = 2{,}73 \cdot 10^{-3}$ м/с$^2$. Если выразить это ускорение через ускорение свободного падения $g$ вблизи поверхности Земли, то получим

$$a_ц \approx \frac{1}{3600} g .$$

Таким образом, ускорение Луны, направленное к Земле, составляет 1/3600 ускорения тел вблизи поверхности Земли. Луна удалена от Земли на 385 000 км, что превышает примерно в 60 раз радиус Земли, равный 6380 км. Это означает, что Луна в 60 раз дальше от центра Земли, чем тела, находящиеся на поверхности Земли. Но $60 \cdot 60 = 3600$, и мы вновь получили число 3600! Ньютон сделал вывод, что сила тяготения, действующая со стороны Земли на любые тела, уменьшается обратно пропорционально квадрату их расстояния $r$ от центра Земли:

$$\text{Сила тяготения} \sim \frac{1}{r^2} .$$

Луна, удаленная на 60 земных радиусов, испытывает силу гравитационного притяжения, составляющую всего лишь $1/60^2 = 1/3600$ той силы, которую она испытывала бы, если бы находилась на поверхности Земли. Любое тело, помещенное на расстоянии 385 000 км от Земли, благодаря притяжению Земли приобретает то же ускорение, что и Луна, а именно $2{,}73 \cdot 10^{-3}$ м/с$^2$.

Ньютон понимал, что сила тяготения зависит не только от расстояния до притягиваемого тела, но и от его массы. Действительно, как мы видели, сила тяготения прямо пропорциональна массе притягиваемого тела. Согласно третьему закону Ньютона, когда Земля действует силой тяготения на другое тело (например, Луну), это тело в свою очередь действует на Землю с равной по величине и противоположно направленной силой (рис. 5.9). Благодаря этой симметрии Ньютон предположил, что величина силы тяготения пропорциональна *обеим* массам. Таким образом,

$$F \sim \frac{m_з m_т}{r^2},$$

где $m_з$ – масса Земли, $m_т$ – масса другого тела, $r$ – расстояние от центра Земли до центра тела.

Продолжая изучение гравитации, Ньютон продвинулся еще на шаг вперед. Он определил, что сила, необходимая для удержания различных планет на их орбитах вокруг Солнца, убывает обратно пропорционально квадрату их расстояний от Солнца. Это привело его к мысли о том, что сила, действующая между Солнцем и каждой из

планет и удерживающая их на орбитах, также является силой гравитационного взаимодействия. И если гравитационное взаимодействие существует между этими телами, то почему бы ему не существовать между всеми телами? Таким образом Ньютон пришел к своему знаменитому **закону всемирного тяготения**, который можно сформулировать так:

> **Каждая частица во Вселенной притягивает любую другую частицу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Эта сила действует вдоль линии, соединяющей эти две частицы.**

Величина этой силы может быть записана в виде

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{5.1}$$

где $m_1$ и $m_2$ – массы двух частиц, $r$ – расстояние между ними, а $G$ – гравитационная постоянная, которая может быть измерена экспериментально и для всех тел имеет одно и то же численное значение.

Строго говоря, выражение (5.1) определяет величину силы тяготения, с которой одна частица действует на другую, находящуюся от нее на расстоянии $r$. Для протяженных (не точечных) тел мы должны определить способ измерения расстояния $r$. Можно было бы подумать, что $r$ – это расстояние между центрами тел, но это не обязательно так. Для корректного расчета любое протяженное тело следует рассматривать как совокупность крошечных частиц, и результирующая сила является геометрической суммой сил от всех частиц. Суммирование по всем этим частицам чаще всего удобно проводить с помощью интегрального исчисления, которое было изобретено самим Ньютоном. В частности, Ньютон показал, что для двух однородных сфер выражение (5.1) правильно описывает силу взаимодействия, если $r$ – расстояние между центрами сфер. (Доказательству этого посвящена задача 23 в конце главы.) Кроме того, если протяженные тела малы по сравнению с расстояниями между ними (как это имеет место для системы Земля – Солнце), то, рассматривая тела как точечные частицы, мы вносим лишь небольшую ошибку.

Если нужно рассмотреть силу гравитационного притяжения, действующую на данную частицу со стороны двух или нескольких других частиц, например силу, действующую на Луну со стороны Земли и Солнца (или суммарную силу от частиц, на которые разбит протяженный объект), то необходимо для каждой пары взаимодействующих частиц воспользоваться формулой (5.1), после чего векторно сложить силы, действующие на частицу.

Величина постоянной $G$ в формуле (5.1) должна быть очень мала, так как мы не замечаем никакой силы, действующей между телами обычных размеров (напри-

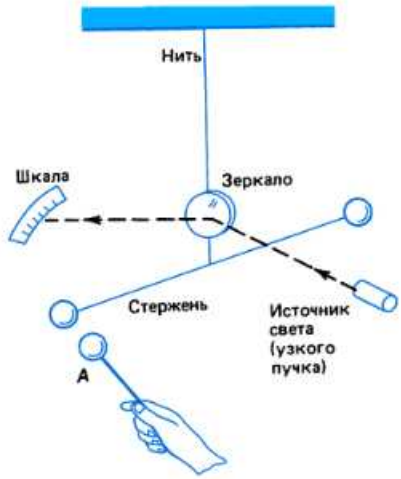



Рис. 5.10. Схематическое изображение установки Кавендиша. Два шарика закреплены на концах легкого горизонтального стержня, подвешенного за середину к тонкой нити. Когда шар, обозначенный буквой *A*, подносят близко к одному из подвешенных шаров, сила гравитационного притяжения заставляет закрепленный на стержне шар сдвинуться, что приводит к небольшому закручиванию нити. Это незначительное смещение измеряется с помощью узкого пучка света, направленного на зеркало, укрепленное на нити так, что отраженный пучок света падает на шкалу. Проделанные ранее измерения закручивания нити под действием известных сил позволяют определить величину силы гравитационного взаимодействия, действующей между двумя телами.

мер, между двумя тяжелыми шарами для игры в кегли). Сила, действующая между двумя телами обычных размеров, впервые была измерена в 1798 г. Генри Кавендишем – через 100 лет после того, как Ньютон опубликовал свой закон. Для обнаружения и измерения столь невероятно малой силы он использовал установку, показанную на рис. 5.10. Кавендиш не только подтвердил гипотезу Ньютона о том, что тела притягивают друг друга и формула (5.1) правильно описывает эту силу. Поскольку Кавендиш мог с хорошей точностью измерить величины $F$, $m_1$, $m_2$ и $r$, ему удалось также рассчитать величину постоянной $G$. В настоящее время принято считать, что эта постоянная равна

$$G = (6{,}6720 \pm 0{,}0041) \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2,$$

или

$$G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

**Пример 5.5.** Два сферических свинцовых шара массой 8,00 кг каждый расположены так, что расстояние между их центрами составляет 50,0 см. С какой гравитационной силой действуют шары друг на друга?

**Решение.** Предположим, что шары однородны. Тогда из формулы (5.1) получим

$$F = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2)(8{,}00\ \text{кг})(8{,}00\ \text{кг})}{(0{,}500\ \text{м})^2} =$$

$$= 1{,}71 \cdot 10^{-8}\ \text{Н}.$$

Это очень малая величина, которую можно измерить лишь весьма чувствительными приборами.

**Пример 5.6.** Чему равна сила гравитационного притяжения, действующая на космический корабль, движущийся по круговой орбите, удаленной от центра Земли на расстояние, равное двум радиусам Земли (т. е. движущийся на высоте 6400 км от поверхности Земли)?

**Решение.** Корабль удален от центра Земли на расстояние, в два раза превышающее расстояние от центра Земли до поверхности; следовательно, поскольку

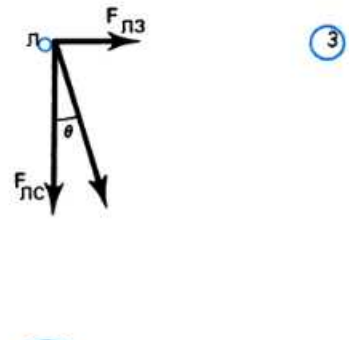



Рис. 5.11. Относительное расположение Солнца (С), Земли (З) и Луны (Л) в примере 5.7 (масштаб не соблюден).

сила гравитационного взаимодействия уменьшается как квадрат расстояния (и $1/2^2 = 1/4$), сила будет в четыре раза меньше.

**Пример 5.7.** Определим силу, действующую на Луну ($m_Л = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг) благодаря гравитационному притяжению как Земли ($m_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг), так и Солнца ($m_С = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг), считая, что эти силы направлены перпендикулярно друг другу (рис. 5.11).

**Решение.** Земля удалена от Луны на расстояние $3{,}85 \cdot 10^5$ км, поэтому сила $F_{ЛЗ}$, действующая на Луну со стороны Земли, равна

$$F_{ЛЗ} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2)(7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{кг})(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{кг})}{(3{,}85 \cdot 10^{8}\ \text{м})^2} =$$

$$= 1{,}98 \cdot 10^{20}\ \text{Н}.$$

Солнце находится на расстоянии $1{,}50 \times 10^8$ км от Земли, поэтому сила $F_{ЛС}$, действующая на Луну со стороны Солнца, равна

$$F_{ЛС} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2)(7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{кг})(1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{кг})}{(1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{м})^2} =$$

$$= 4{,}35 \cdot 10^{20}\ \text{Н}.$$

Так как эти две силы в рассматриваемом случае направлены друг к другу под углом 90° (рис. 5.11), суммарная сила

$$F = \sqrt{(1{,}98)^2 + (4{,}35)^2} \cdot 10^{20}\ \text{Н} =$$

$$= 4{,}79 \cdot 10^{20}\ \text{Н}$$

направлена под углом $\theta = \operatorname{arctg}(1{,}98/4{,}35) = 24{,}5°$ относительно линии Луна – Солнце.

Закон всемирного тяготения[1] не следует путать со вторым законом Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Если закон всемирного тяготения имеет дело с конкретной силой гравитационного взаимодействия и описывает зависимость ее величины от расстояния между взаимодействующими телами и их масс, то второй закон Ньютона устанавливает связь между силой, действующей на тело (это может быть любая сила), массой и ускорением этого тела.

## 5.3. Векторная форма записи закона всемирного тяготения Ньютона

Закон всемирного тяготения Ньютона можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}, \qquad (5.2)$$

[1] Его иногда называют четвертым законом Ньютона.– *Прим. ред.*

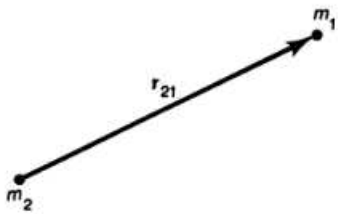



Рис. 5.12. Вектор $\mathbf{r}_{21}$, направленный от частицы массой $m_2$ к частице массой $m_1$.

где $\mathbf{F}_{12}$ – вектор силы, действующей на частицу 1 (массой $m_1$) со стороны частицы 2 (массой $m_2$), находящейся на расстоянии $r_{21}$ от частицы 1; $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ – единичный вектор, направленный от частицы 2 к частице 1 вдоль прямой, соединяющей эти частицы, так что $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{r}_{21}/r_{21}$, где $\mathbf{r}_{21}$ – вектор, показанный на рис. 5.12. Знак минус в формуле (5.2) обусловлен тем, что сила, действующая на частицу 1 со стороны частицы 2, направлена противоположно вектору $\hat{\mathbf{r}}_{21}$. Вектор $\mathbf{r}_{12}$ равен по величине вектору $\mathbf{r}_{21}$, но направлен в противоположную сторону, т. е. $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$.

Согласно третьему закону Ньютона, сила $\mathbf{F}_{21}$, действующая на тело массой $m_2$ и создаваемая телом массой

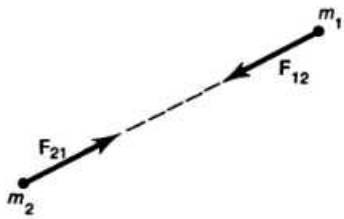



Рис. 5.13. Согласно третьему закону Ньютона сила гравитационного притяжения, действующая на частицу 1 со стороны частицы 2, $\mathbf{F}_{12}$ равна и противоположно направлена силе $\mathbf{F}_{21}$, с которой частица 1 действует на частицу 2; иными словами, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

$m_1$, должна иметь ту же величину, что и сила $\mathbf{F}_{12}$, но направлена противоположно ей (рис. 5.13). Таким образом,

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}.$$

## 5.4. Сила тяготения вблизи поверхности Земли

Применим формулу (5.1) для описания силы тяготения между Землей и телом, находящимся на ее поверхности. Тогда $m_1$ заменится на массу Земли $m_3$, а $r$ – на расстояние до центра Земли[1)], т. е. на радиус Земли $r_3$. Эта сила гравитационного притяжения Земли называется силой тяжести; эту силу мы записывали как $mg$, где $g$ – ускорение свободного падения. Таким образом,

$$mg = Gmm_3/r_3^2.$$

[1)] То, что расстояние измеряется от центра Земли, не означает, что сила притяжения в каком-то смысле «исходит» из этой точки. В действительности все частицы Земли притягивают тело, но суммарное их действие таково, что результирующая сила притяжения направлена к центру Земли (см. задачу 23).

Из этого равенства следует, что

$$g = Gm_3/r_3^2. \tag{5.3}$$

Иными словами, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g$ определяется величинами $m_3$ и $r_3$. [Не следует путать $G$ с $g$; это совершенно разные величины, хотя и связанные друг с другом соотношением (5.3).]

В гл. 2 было отмечено, что значения ускорения свободного падения $g$ в разных точках Земли несколько различаются. Из формулы (5.3) можно видеть, что величина $g$ должна быть меньше, например, на вершинах гор, чем на уровне моря, поскольку расстояние от центра Земли до вершины горы несколько больше. Действительно, этот факт установлен экспериментально. Однако формула (5.3) не дает точного значения величины $g$ во всех точках, так как поверхность Земли не является в точности сферической (на ее поверхности не только существуют горы и долины, но также имеют место изменения радиуса Земли на экваторе; кроме того, масса Земли распределена неоднородно); вращение Земли, как будет показано в примере 5.8, также влияет на изменение $g$.

До тех пор, пока не была измерена гравитационная постоянная $G$, масса Земли оставалась неизвестной. И лишь после того, как $G$ была измерена, с помощью соотношения (5.3) удалось вычислить массу Земли. Это впервые проделал сам Кавендиш. Подставляя в (5.3) значения $g = 9{,}80$ м/с$^2$ и радиуса Земли $r_3 = 6{,}38 \cdot 10^6$ м, получаем следующее значение массы Земли:

$$m_3 = \frac{gr_3^2}{G} = \frac{(9{,}80 \text{ м/с}^2)(6{,}38 \cdot 10^6 \text{ м})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2} = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Для силы тяготения, действующей на тела, находящиеся вблизи поверхности Земли, мы можем пользоваться просто выражением $mg$. Если же необходимо рассчитать силу тяготения, действующую на тело, расположенное на некотором удалении от Земли, или силу, вызываемую другим небесным телом (например, Луной или другой планетой), то следует использовать эффективное значение величины $g$, вычисленное с помощью формулы (5.3), в которой $r_3$ и $m_3$ должны быть заменены на соответствующее расстояние и массу; можно также непосредственно воспользоваться формулой (5.1).

**Пример 5.8.** Предполагая, что форма Земли является сферической, определим влияние вращения Земли на ускорение свободного падения $g$ на экваторе по сравнению с его величиной на полюсах.

**Решение.** На рис. 5.14 показаны тела массой $m$ каждое, подвешенные на пружинных весах в двух точках на поверхности Земли. На Северном полюсе на тело действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{w}$, с которой пружина тянет тело. Последнюю силу мы назвали $\mathbf{w}$, так как

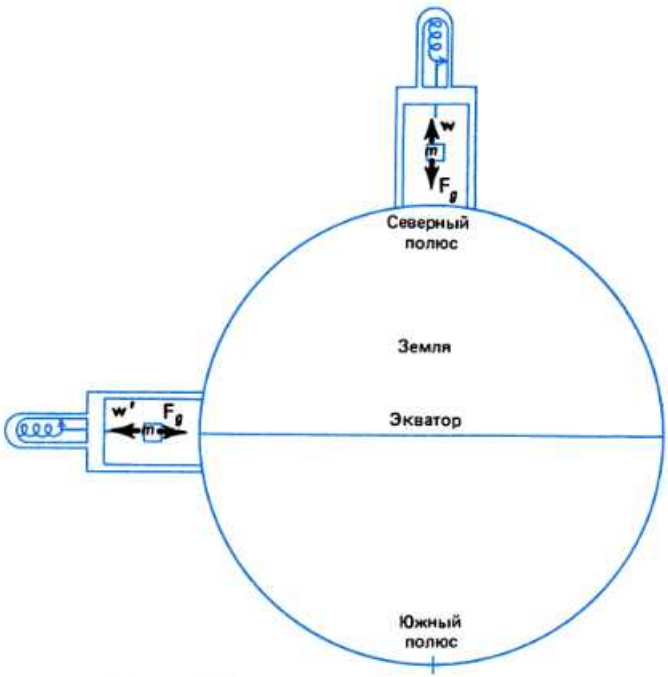



Рис. 5.14. Пример 5.8.

по третьему закону Ньютона она равна силе, с которой тело растягивает пружину (т. е. весу тела)[1]. Поскольку тело не испытывает ускорения, из второго закона Ньютона имеем

$$mg - w = 0$$

и, следовательно, $w = mg$. Таким образом, вес этого тела, регистрируемый на пружинных весах, равен $mg$, что, разумеется, не удивительно. На экваторе же тело обладает ускорением из-за вращения Земли. По-прежнему та же самая сила тяжести $F_g = mg$ действует в направлении к центру Земли (мы обозначаем буквой $g$ ускорение свободного падения в отсутствие вращения и пренебрегаем изменением радиуса Земли на экваторе). Пружина действует на тело с силой $w'$, направленной вверх; при этом $w'$ также равна по величине силе, с которой тело растягивает пружину (согласно третьему закону Ньютона), и, следовательно, равна весу тела, регистрируемому на пружинных весах. Согласно второму закону Ньютона, мы теперь имеем (рис. 5.14)

$$mg - w' = mv^2/r_3;$$

здесь $r_3 = 6{,}38 \cdot 10^6$ м – радиус Земли, а $v$ – скорость тела, обусловленная суточным вращением Земли и численно равная $v = 2\pi r_3/(1\text{ сут}) = (6{,}28)(6{,}38 \cdot 10^6\text{ м})/(8{,}64 \times \times 10^4\text{ с}) = 4{,}64 \cdot 10^2$ м/с. Можно ввести «эффективное» ускорение свободного падения, определив его следующим образом[2]: $g' = w'/m$. Решив уравнение, написанное выше, относительно $w'$, получим $w' = m(g - v^2/r_3)$. Таким образом,

$$g' = w'/m = g - v^2/r_3.$$

Следовательно, $\Delta g = g - g' = v^2/r_3 = (4{,}64 \cdot 10^2\text{ м/с})^2/(6{,}38 \cdot 10^6\text{ м}) = 0{,}0337\text{ м/с}^2$. Из табл. 2.1 видно, что реально существу-

[1] По первой букве англ. слова weight – вес. – *Прим. ред.*

[2] В отечественной литературе подобный термин не принят, и ускорение свободного падения всегда равно $g$. – *Прим. ред.*

ющее различие между этими величинами составляет (9,832–9,780) м/с$^2$ = 0,052 м/с$^2$ и превышает полученное нами значение. Это расхождение объясняется тем, что Земля на экваторе несколько «толще» (примерно на 21 км), чем на полюсах. Для определения эффективного значения величины $g$ на широтах, отличающихся от полюса и экватора, приходится решать двумерную задачу, поскольку $\mathbf{F}_g$ направлена к центру Земли по радиусу, в то время как центростремительное ускорение направлено перпендикулярно оси вращения (т. е. параллельно плоскости экватора).

## * 5.5. Гравитационная и инертная масса

Мы рассмотрели два аспекта понятия массы. В гл. 4 мы определили массу как меру инертности тела. Второй закон Ньютона связывает силу, действующую на тело, с его ускорением и его *инертной массой*. Затем в данной главе мы рассматривали массу как свойство, связанное с силой гравитационного притяжения между телами; оказалось, что масса тел определяет интенсивность этого притяжения. Такую массу мы назвали *гравитационной массой* (подробнее см. в разд. 4.4, где определены два способа введения шкалы измерения массы).

Отнюдь не очевидно, что инертная масса тела должна быть равна его гравитационной массе. (Вообще говоря, сила тяготения могла бы зависеть от совершенно другого свойства тела; например, электрическая сила, как мы увидим ниже, определяется свойством, называемым электрическим зарядом.) Опыты Ньютона и Кавендиша показали, что для данного тела оба этих вида массы совпадают; современные эксперименты подтверждают это с точностью до $10^{-11}$.

Если бы гравитационная и инертная массы не были равны друг другу, то не был бы справедлив вывод Галилея о том, что все тела в отсутствие сопротивления воздуха падают на Землю с одинаковыми ускорениями. Предположим, что более тяжелые тела обладают такой же инертностью, как и легкие (под более легкими мы имеем в виду тела, на которые действует меньшая сила тяжести). При этом более тяжелые тела будут сильнее ускоряться по сравнению с более легкими, поскольку $a = F/m$; иными словами, сила $F$ будет больше для тяжелого тела, в то время как его масса $m$ та же, что и у более легкого тела. Благодаря равенству инертной и гравитационной масс более тяжелое тело не только подвергается действию большей силы, но и имеет соответственно бóльшую инертность по сравнению с легким телом, так что ускорения этих тел одинаковы.

## 5.6. Спутники и невесомость

Искусственные спутники, обращающиеся вокруг Земли, стали теперь обыденным явлением. Спутник выводится на орбиту вследствие разгона до достаточно высокой тангенциальной скорости, осуществляемого с помощью ракетных двигателей, как показано на рис. 5.15. Если приобретенная спутником скорость слишком велика, то притяжение Земли не сможет удержать космический корабль и он покинет ее пределы. В случае недостаточно высокой скорости, сообщенной спутнику, он упадет обратно на Землю. Спутники обычно выводятся на круговые или близкие к ним орбиты. Для этого спутнику необходимо сообщить некоторую минимальную скорость запуска. Иногда спрашивают: что удерживает спутник на орбите? Ответ обычно звучит так: ведь спутник движется с высокой скоростью. Разумеется, если спутник перестанет двигаться, он упадет на Землю. Но при очень высокой скорости движения спутник очень скоро улетел бы в космическое пространство, если бы гравитационная сила Земли не удерживала его на околоземной орбите.

У спутников, которые движутся равномерно по окружности (хотя бы приблизительно), центростремительное ускорение равно $v^2/r$. Сила, которая сообщает спутнику это ускорение, является силой тяжести, а, поскольку спутник может находиться на значительном удалении от Земли, величину силы, действующей на него, можно вычислять с помощью формулы (5.1). Применяя второй закон Ньютона $F = ma$, можно написать следующее соотношение:

$$G\frac{mm_3}{r^2} = m\frac{v^2}{r}. \qquad (5.4)$$

Это соотношение связывает расстояние $r$ от спутника до центра Земли с его скоростью $v$. Еще раз заметим, что на спутник действует только одна сила, а именно сила тяжести.

**Пример 5.9.** Вычислите скорость, необходимую для того, чтобы спутник двигался по круговой орбите на высоте 200 км от поверхности Земли.

**Решение.** Решим уравнение (5.4) относительно скорости $v$:

$$v = \sqrt{Gm_3/r}.$$

Величина $r$ равна $(6380 + 200)$ км $=$ $= 6580$ км, или $6{,}58 \cdot 10^6$ м.

Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{кг})}{6{,}58 \cdot 10^6\ \text{м}}} =$$

$$= 7{,}79 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Это приблизительно равно 27 000 км/ч. Следует заметить, что с увеличением высоты необходимая для удержания спутника на круговой орбите скорость будет уменьшаться.

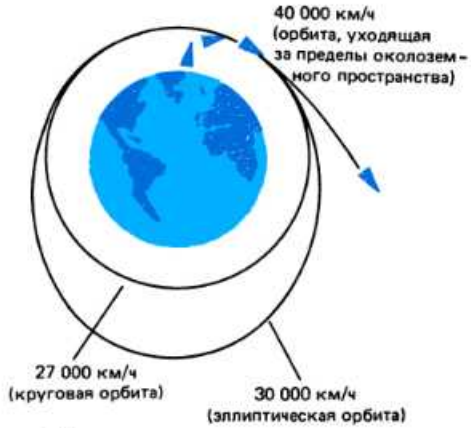
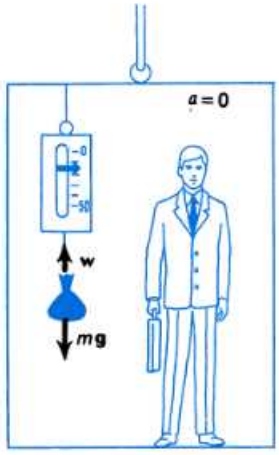



Рис. 5.15. Искусственные спутники.




а




б

Рис. 5.16. В покоящемся лифте (*а*) тело действует на пружину весов с силой, равной действующей на него силе тяжести; в свободно падающем лифте (*б*) наступает состояние «невесомости».

Находящиеся на спутнике, вращающемся вокруг Земли по круговой орбите, космонавты испытывают состояние невесомости. Прежде чем проанализировать случай со спутником, рассмотрим более простой случай падающего лифта. На рис. 5.16, *а* лифт находится в покое. Пусть в лифте имеются пружинные весы со шкалой, к которым подвешен груз в мешке, как показано на рис. 5.16, *а*. При этом стрелка на шкале указывает величину силы, действующей вниз на пружину со стороны мешка. Эта сила, действующая *на* пружину, в точности равна и противоположно направлена силе, которая действует на мешок вертикально вверх со стороны пружины; обозначим эту силу через **w**. Поскольку при этом ускорение подвешенного груза $m$ равно нулю, применение к нему второго закона Ньютона $F = ma$ дает

$$0 = w - mg;$$

здесь $mg$ – сила тяжести; следовательно, $w = mg$. А поскольку стрелка на пружинных весах указывает силу $w$, приложенную к пружине со стороны мешка, пружинные весы регистрируют силу, равную весу мешка, как мы и ожидали. Если теперь лифт начал двигаться с ускорением $a$, то, применяя снова закон $F = ma$ к мешку, мы имеем $w - mg = ma$. Отсюда находим следующее выражение:

$$w = mg + ma.$$

За положительное направление мы выбрали направление вверх. Таким образом, если ускорение $a$ направлено вверх, то оно положительно и пружинные весы, которые измеряют $w$, покажут величину, бóльшую, чем $mg$. Если же лифт ускоряется вниз, то его ускорение $a$ будет отрицательно и $w$ будет меньше, чем $mg$. Например, если ускорение лифта равно $-g/2$, то вес будет равен $w = mg - (1/2)mg = (1/2)mg$. Иными словами, весы показывают значение $w$, равное половине силы тяжести. Когда лифт *свободно падает* (например, если оборвется трос), то $a = -g$ и $w = mg - mg = 0$. Весы покажут нуль (рис. 5.16, *б*), и ме-

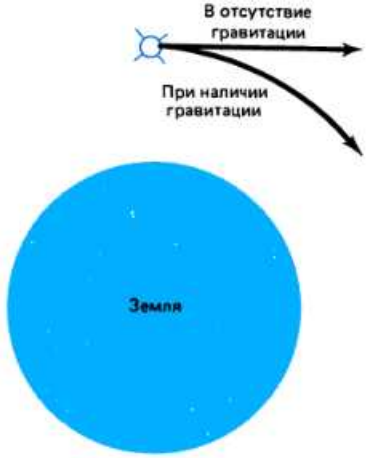



Рис. 5.17. Летящий спутник «падает» с прямолинейной орбиты по направлению к Земле.

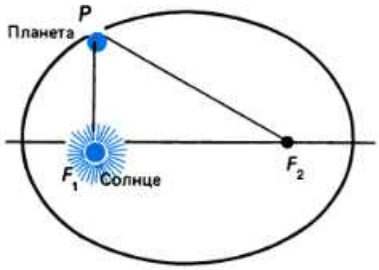
шок окажется невесомым. Если человек в лифте уронит предмет, например карандаш, то карандаш не упадет на пол. Действительно, карандаш будет свободно падать с ускорением $g$, но с таким же ускорением будут падать и лифт, и человек. Карандаш будет находиться перед человеком в том месте, где его отпустили. Такое явление называется *невесомостью*, причем сила тяжести продолжает действовать на тело. Тела становятся невесомыми только потому, что лифт движется с ускорением, равным $-g$.

Невесомость, испытываемая человеком на спутнике, обращающемся по орбите вблизи Земли, имеет ту же природу, что и невесомость в свободно падающем лифте. Это вначале может показаться странным: как можно говорить о свободном падении спутника? Но спутник действительно падает на Землю (рис. 5.17); сила тяжести заставляет его «падать», т. е. отклоняться от своей естественной прямолинейной траектории. Спутник приобретает ускорение благодаря наличию гравитации, так как единственной силой, действующей на спутник, является сила тяжести. [Мы использовали этот факт при записи соотношения (5.4); то, что мы записали ускорение в виде $v^2/r$, ничего не меняет.] Таким образом, хотя на тела внутри спутника действует сила тяжести, они испытывают состояние невесомости, так как и они, и сам спутник движутся с ускорением свободного падения.

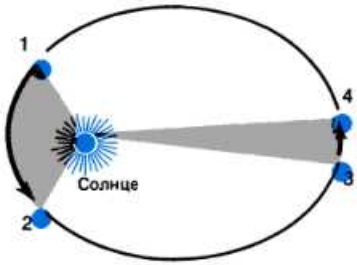
Совершенно иная картина наблюдается в космическом корабле, находящемся в космосе вдали от Земли и других притягивающих небесных тел (например, Луны). Сила гравитационного притяжения Земли и других небесных тел будет исчезающе мала из-за большого удаления космического корабля, и люди в таком корабле испытают невесомость, даже если корабль движется прямолинейно и равномерно (без ускорения).

## 5.7. Законы Кеплера и обобщение Ньютона

Более чем за полстолетия до того, как Ньютон предложил свои три закона динамики, а также четвертый закон – закон всемирного тяготения, немецкий астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) написал ряд работ по астрономии, в которых можно найти подробное описание движения планет вокруг Солнца. Работы Кеплера возникли отчасти благодаря многолетнему изучению им данных, полученных астрономом Тихо Браге (1546–1601), относительно положений планет в процессе их наблюдаемого «небесного» движения. На основании всех этих изысканий были сделаны три открытия, которые мы называем теперь **законами Кеплера для движения планет**. Их можно сформулировать следующим образом (пояснение см. на рис. 5.18).




*а*




*б*

Рис. 5.18. *а* – первый закон Кеплера. Эллипс – это замкнутая кривая, обладающая следующим свойством: сумма расстояний от любой точки $P$, принадлежащей эллипсу, до двух фиксированных точек $F_1$ и $F_2$, называемых фокусами, постоянна; это означает, что сумма расстояний $F_1P + F_2P$ одинакова для всех точек $P$, принадлежащих эллипсу; окружность – частный случай эллипса, у которого оба фокуса совпадают с центром окружности. *б* – второй закон Кеплера; две заштрихованные области имеют одинаковые площади. Из точки 1 в точку 2 планета перемещается за то же время, что из точки 3 в точку 4. Быстрее всего планета движется на наиболее приближенном к Солнцу участке пути.

*Первый закон Кеплера.* Траектория движения (орбита) каждой планеты вокруг Солнца представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис. 5.18).

*Второй закон Кеплера.* Каждая планета движется так, что воображаемая линия, соединяющая ее с Солнцем, заметает равные площади за равные промежутки времени (рис. 5.18, *б*).

*Третий закон Кеплера.* Отношение квадратов периодов любых двух планет, обращающихся вокруг Солнца, равно отношению кубов их средних расстояний от Солнца. Это означает, что если $T_1$ и $T_2$ – периоды обращения (т. е. промежутки времени, необходимые для совершения планетой полного оборота вокруг Солнца), а $r_1$ и $r_2$ – средние расстояния от планет до Солнца, то

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

(Современные данные представлены в последнем столбце табл. 5.1.)

*Таблица 5.1.* Параметры движения планет, используемые в третьем законе Кеплера

| Планета | Среднее расстояние до солнца $r$, $10^6$ км | Период $T$, земной год | $r^3/T^2$, $10^{24}$ км$^3$/год$^2$ |
|---|---|---|---|
| Меркурий | 57,9 | 0,241 | 3,34 |
| Венера | 108,2 | 0,615 | 3,35 |
| Земля | 149,6 | 1,0 | 3,35 |
| Марс | 227,9 | 1,88 | 3,35 |
| Юпитер | 778,3 | 11,86 | 3,35 |
| Сатурн | 1427 | 29,5 | 3,34 |
| Уран | 2870 | 84,0 | 3,35 |
| Нептун | 4497 | 165 | 3,34 |
| Плутон | 5900 | 248 | 3,33 |

Ньютону удалось показать, что законы Кеплера могли быть получены путем математического вывода из закона всемирного тяготения и законов движения. Кроме того, Ньютон показал, что из всех более или менее разумных записей закона для гравитационной силы полностью согласована со всеми тремя законами Кеплера только одна – та, в которой зависимость от расстояния подчиняется закону обратных квадратов. Поэтому Ньютон использовал законы Кеплера как свидетельство в пользу своего закона всемирного тяготения, записываемого в виде (5.1).

Проще всего вывести третий закон Кеплера, и мы сделаем это для частного случая круговой орбиты. (Большинство планетных орбит достаточно близки к окружностям, представляющим собой частный случай эллипса.) Прежде всего запишем второй закон Ньютона: $F = ma$, а затем запишем закон всемирного тяготения (5.1), в который подставим вместо силы $F$ ее выражение через массу и ускорение, а вместо ускорения $a$ центростремительное

ускорение $v^2/r$. Таким образом, мы имеем

$$F = ma,$$

$$G\frac{m_1 M}{r_1^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1}.$$

Здесь $m_1$ – масса данной планеты, $r_1$ – ее среднее расстояние от Солнца, $v_1$ – средняя скорость ее движения по орбите, а $M$ – масса Солнца, гравитационное притяжение которого и удерживает каждую планету на своей орбите. Поскольку период $T_1$ – это время, за которое планета совершает полный оборот вокруг Солнца (т. е. проходит путь длиной, равной длине окружности $2\pi r_1$), скорость $v_1$ запишется в виде

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

Подставляя это выражение для $v_1$ в написанное выше соотношение, находим

$$G\frac{m_1 M}{r_1^2} = m_1 \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}.$$

Выполняя преобразование, получаем

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Этот результат получен для планеты 1 (например, Марса), но аналогичный вывод применим и для любой другой планеты 2 (например, Сатурна):

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM};$$

здесь $T_2$ и $r_2$ – соответственно период и радиус орбиты планеты 2. Поскольку правые части обоих равенств одинаковы, очевидно, что $T_1^2/r_1^3 = T_2^2/r_2^3$, или окончательно

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Таким образом, мы пришли к третьему закону Кеплера. Второй закон Кеплера также нетрудно вывести, и мы сделаем это в гл. 10.

Точные измерения орбит планет показали, что для них не вполне точно выполняются законы Кеплера; например, наблюдались небольшие отклонения от идеальных эллиптических орбит. Ньютон понимал, что этого следует ожидать на основании закона всемирного тяготения («каждое тело во Вселенной притягивает любое другое тело...»), так как помимо Солнца каждая планета действует гравитационной силой на другие планеты. Поскольку

масса Солнца значительно превышает массу любой другой планеты, силы гравитационного взаимодействия между любыми двумя планетами малы по сравнению с силой их гравитационного взаимодействия с Солнцем. (При выводе закона Кеплера об идеально эллиптических орбитах полностью пренебрегалось влиянием сил со стороны других планет.) Однако благодаря этим малым силам каждая планетная орбита должна отличаться от идеального эллипса[1)], в особенности если другая планета достаточно близка к данной. Подобные отклонения (или, как их называют, возмущения) от идеальных эллиптических орбит действительно наблюдаются. По существу, именно наблюдение Ньютоном возмущений орбиты Сатурна было той подсказкой, которая помогла ему сформулировать закон всемирного тяготения, справедливый для всех тел. Наблюдения других возмущений привели позднее к открытию Нептуна и Плутона. Например, отклонения орбиты Урана не могли быть объяснены за счет действия других, уже известных планет. Тщательные вычисления, проведенные в прошлом столетии, показали, что эти отклонения можно объяснить лишь наличием в Солнечной системе еще одной удаленной планеты. Ее положение было предсказано по отклонениям орбиты Урана, и с помощью телескопов, направленых в указанную область неба, эта планета была быстро обнаружена и названа Нептуном[2)]. Аналогично по значительно более слабым возмущениям орбиты Нептуна в 1930 г. удалось открыть планету Плутон.

Открытие Ньютоном закона всемирного тяготения и трех законов динамики (гл. 4) явилось одним из высших достижений физической науки. С помощью этих законов Ньютону удалось описать движение тел на Земле и указать причины этого движения. Кроме того, на той же основе удалось объяснить движение планет вокруг Солнца и обращение Луны вокруг Земли. Оказалось, что движение небесных тел и тел на Земле подчиняется одним и тем же законам (до Ньютона эта точка зрения не была общепринятой, хотя Галилей усиленно отстаивал ее). Поэтому иногда говорят о ньютоновском обобщении, отмечая при этом, что Ньютон привел в систему и взгляды своих предшественников.

Деятельность Ньютона была столь всеобъемлюща,

---

[1)] Ньютон формулировал это так: «Планеты никогда не движутся точно по эллипсам и не обращаются дважды по одной и той же орбите». Он также указывал, что, например, Солнце не находится в точности в одном из фокусов эллипса; даже в идеальном случае только двух тел (Солнца и одной планеты) они обращаются вокруг их общего центра тяжести.

[2)] Речь идет об открытии французского астронома Леверье (1811–1877), вошедшем в историю науки как классический пример открытия, сделанного «на кончике пера».– *Прим. ред.*

что она привела к созданию определенной картины мира, повлиявшей на философию и другие области науки. Законы, формулировку которых дал Ньютон, называют *причинными законами*; здесь под *причинностью* мы понимаем то, что одно явление с необходимостью может вызывать другое[1]. Мы не раз видели, как удар камня в окно приводит к тому, что окно немедленно разбивается. Отсюда мы делаем вывод, что именно камень послужил *причиной* разбиения окна. Вообще представление о «причине» и «следствии» приобрело мощную поддержку в законах Ньютона, поскольку было обнаружено, что движение (или, точнее, ускорение) любого тела *вызывается* действующей на него результирующей силой. В итоге многие ученые и философы стали описывать Вселенную как гигантскую машину, отдельные «части» которой движутся предсказуемым и предопределенным образом в соответствии с законами природы[2]. Однако эта *детерминистская* картина Вселенной[3] была отвергнута в 20 в., что мы покажем в гл. 40 и 41.

## 5.8. Виды сил в природе

Мы уже обсудили, каким образом закон всемирного тяготения Ньютона [выражение (5.1)] описывает зависимость конкретной силы, а именно силы тяжести, от масс взаимодействующих тел и расстояний между ними. Второй закон Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ говорит о том, как будет ускоряться тело под действием силы $\mathbf{F}$ любой природы. Но какие же виды сил вообще встречаются в природе?

В настоящее время физики различают всего четыре вида сил в природе[4]. К ним относятся следующие: 1) гравитационная сила; 2) электромагнитная сила (как мы увидим ниже, электрическая и магнитная силы тесно взаимосвязаны); 3) сильная ядерная сила и 4) слабая ядерная сила. Мы подробно рассмотрели гравитационную силу, электромагнитная сила будет изучена в следующих главах. Сильная и слабая ядерные силы действуют на уровне атомного ядра и значительно менее заметны в

---

[1] О таких законах часто принято также говорить как о законах динамических в противоположность законам статистическим, или вероятностным (см. гл. 18).– *Прим. ред.*

[2] То есть в соответствии с ньютоновскими законами.– *Прим. ред.*

[3] Ярким выразителем этого был французский философ и математик П. Лаплас (1749–1827).– *Прим. ред.*

[4] Строго говоря, насчитывается всего лишь три различных вида фундаментальных сил, так как указанные здесь силы 2) и 4) имеют, как выяснилось, одинаковую природу. В настоящее время ведется интенсивная работа по поиску возможности дальнейшего объединения фундаментальных сил.– *Прим. ред.*

повседневной жизни (хотя именно им мы обязаны такими явлениями, как радиоактивность и ядерная энергия).

А как обстоит дело с обычными силами, подобными точкам, натяжениям или трению? К какой категории следует отнести их? Мы будем называть силы такого типа *контактными силами*[1], так как они возникают лишь при непосредственном контакте взаимодействующих тел. Согласно современной квантовой теории, эти силы своим происхождением обязаны электромагнитной силе. Например, сила, с которой ваши пальцы действуют на ручку или карандаш,– это результат электрического отталкивания внешних электронов атомов ваших пальцев и атомов карандаша.

## * 5.9. Поле тяготения (гравитационное поле)

Большинство сил, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни, являются контактными силами: вы толкаете или тянете газонокосилку, теннисная ракетка действует с силой на теннисный мяч, когда они соприкасаются, или мяч действует с силой на оконное стекло при попадании в него и т. п. Но сила гравитационного взаимодействия (и даже электромагнитная сила, как мы увидим ниже) действует на расстоянии; сила существует даже тогда, когда два тела не находятся в контакте. Земля, например, действует силой на падающее яблоко; она также взаимодействует с Луной, удаленной от нее на расстояние 385 000 км. Создаваемая Солнцем сила тяготения действует на Землю. Мысль о возможности существования сил, *действующих на расстоянии*, была трудна для понимания учеными прошлого. Сам Ньютон с трудом примирился с этим, когда опубликовал свой закон всемирного тяготения.

Трудности в понимании действия на расстоянии могут быть преодолены с помощью понятия силового поля, которое было развито в 19 в. Майклом Фарадеем (1791–1867) для объяснения электромагнетизма; только позже это понятие было применено к гравитации. В соответствии с общим понятием поля *гравитационным полем* окружено любое тело, обладающее массой, и это поле заполняет все пространство. Второе тело, находящееся в некоторой точке вблизи первого, испытывает действие силы, так как в этой точке существует гравитационное поле.

Гравитационное поле может быть описано количественно с помощью *напряженности гравитационного поля*, определяемой как сила гравитационного взаимодействия,

---

[1] Точнее, следовало бы вообще говорить об эмпирических, или вторичных силах, которые в принципе сводятся к фундаментальным, или первичным.– *Прим. ред.*

действующая на единицу массы в любой точке пространства. Для того чтобы измерить напряженность гравитационного поля в произвольной точке, необходимо поместить в эту точку небольшое «пробное» тело массой $m$ и измерить силу $\mathbf{F}$, действующую на него (при этом надо быть уверенным, что на тело не действуют другие силы, кроме гравитационной). При этом напряженность гравитационного поля $\mathscr{G}$ в этой точке определяется как

$$\mathscr{G} = \mathbf{F}/m. \qquad (5.5)$$

Таким образом, $\mathscr{G}$ измеряется в единицах Н/кг.

Если поле тяготения вызвано одиночным телом с массой $M$ (это, например, справедливо для тела с массой $m$, находящегося вблизи поверхности Земли), то

$$\mathscr{G} = \frac{GM}{r^2};$$

здесь $r$ – расстояние от $m$ до $M$, а $G$ – универсальная гравитационная постоянная [см. формулы (5.1) и (5.3)]. Если гравитационное поле обусловлено несколькими телами, то $\mathscr{G}$ равна векторной сумме напряженностей полей тяготения, создаваемых каждым из тел. Например, в межпланетном пространстве $\mathscr{G}$ является векторной суммой соответствующих величин для Земли, Солнца, Луны и других небесных тел, дающих существенный вклад в поле тяготения. Важным аспектом существования поля тяготения является то, что его напряженность в любой точке пространства не зависит от массы $m$ пробного тела, помещаемого в эту точку; $\mathscr{G}$ зависит только от масс (и их расположения в пространстве) тел, которые создают поле в рассматриваемой точке.

Напряженность поля тяготения $\mathscr{G}$, определяемая формулой (5.5), аналогична ускорению свободного падения $\mathbf{g}$, которое мы рассматривали выше. Действительно, они могут иметь одно и то же численное значение. Но смысл этих понятий различен. Это различие можно проследить на примере анализа размерностей; хотя Н/кг = м/с$^2$ (поскольку 1 Н определяется как 1 кг · м/с$^2$; см. разд. 4.4), для напряженности поля тяготения мы используем Н/кг, в то время как ускорение, приобретаемое вследствие гравитационного взаимодействия, мы измеряем в м/с$^2$.

Интересно заметить, что поле тяготения в любой точке пространства изменится, если одно или несколько тел из тех, что создают это поле, изменят свое положение. Но это изменение не происходит мгновенно. По-видимому, необходимо какое-то время, чтобы мы могли почувствовать в любой точке пространства, что положение тела изменилось. Согласно общей теории относительности Эйнштейна, любое изменение напряженности поля распространяется в пространстве со скоростью света $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. Характерное время этого распространения экспериментально еще не определено.

## Заключение

Частица, вращающаяся по окружности радиусом $r$ с постоянной скоростью $v$, испытывает действие силы, которая в любой момент времени направлена к центру окружности. Величина этой силы равна произведению массы частицы $m$ на центростремительное ускорение $v^2/r$.

Согласно *закону всемирного тяготения* Ньютона, любая частица во Вселенной притягивается любой другой частицей с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Эта сила направлена вдоль прямой, соединяющей две взаимодействующие частицы. Именно эта сила гравитационного притяжения удерживает на орбите Луну при ее обращении вокруг Земли, а планеты – при их обращении вокруг Солнца. Полная, или результирующая, сила тяготения, действующая на любое тело, является векторной суммой сил, вызванных всеми другими телами; во многих случаях при этом можно пренебречь влиянием всех тел, кроме одного или двух, дающих основной вклад.

Три закона Ньютона вместе с его законом всемирного тяготения составляют теорию Вселенной, имеющую широкий диапазон применений. Эти законы позволяют правильно описывать движение любого тела на Земле и на любом небесном теле; они послужили теоретическим обоснованием полученных экспериментально законов Кеплера для движения планет.

## Вопросы

1. Бытует мнение, что в стиральной машине капли воды удаляются с одежды под действием центробежной силы, отбрасывающей их к стенкам машины. Правильно ли это мнение?
2. В отчетах об экспериментах на центрифуге часто ограничиваются указанием только значений числа оборотов в минуту. Почему этого недостаточно?
3. Предположим, что автомобиль с постоянной скоростью движется по горной дороге. В каких точках сила нормального давления автомобиля на дорогу принимает максимальное и минимальное значения: а) на вершине холма; б) в низшей точке вогнутой долины, соединяющей два холма; в) на ровной дороге у подножья холма?
4. Укажите все силы, действующие на ребенка, катающегося на карусельной лошадке.
5. Действует ли на Землю сила гравитационного притяжения со стороны яблока? Если да, то чему равна эта сила? Рассмотрите яблоко, а) висящее на яблоне и б) падающее с яблони.
6. Как изменилась бы орбита Луны, если бы масса Земли удвоилась?
7. Пусть космический корабль движется с постоянной скоростью от Земли к Марсу. Ускорение свободного падения вблизи поверхности Марса $g = 3{,}8$ м/с$^2$. Изобразите графически полную гравитационную силу, действующую на пассажира массой 70 кг, как функцию расстояния между кораблем и одной из планет.
8. Гравитационное притяжение Солнца, действующее на Землю, во много раз превышает гравитационное притяжение Луны. Несмотря на это, за земные приливы в основном ответственна Луна. Объясните.
9. Истоки реки Миссисипи ближе к центру Земли, чем ее устье в Луизиане (так как Земля на экваторе «толще», чем на полюсах). Объясните, как может Миссисипи течь «в гору»?
10. Где тело весит больше: на экваторе или полюсах? Какие два явления необходимо учитывать? Оказывают ли эти явления противоположное влияние?
11. Где – на экваторе или на Северном полюсе – вы купите в магазине большее количество му-

ки, весящей 1 Н? Зависит ли ваш ответ от того, на каких весах – пружинных или рычажных – вам будут взвешивать муку? Объясните.

12. В большинстве точек на Земле нить отвеса не указывает точное направление к центру Земли. Почему это происходит?

13. В каком случае ваш вес, измеренный на пружинных весах в движущемся лифте, будет наибольшим: а) когда лифт движется с ускорением, направленным вертикально вниз по направлению к Земле; б) когда лифт движется с ускорением, направленным вертикально вверх; в) когда лифт находится в состоянии свободного падения или г) когда лифт движется вверх с постоянной скоростью? В каком из этих случаев измеренный вес будет наименьшим? В каком случае он будет таким же, если измерения проводятся не в лифте, а на поверхности земли?

14. Предположим, что вы находитесь внутри спутника, обращающегося вокруг Земли. Как вы могли бы справиться со своим перемещением по спутнику, питьем воды или тем, чтобы положить ножницы на стол?

15. У спутника, движущегося вокруг Земли по круговой орбите, ослабло крепление антенны и антенна отделилась от спутника. Опишите последующее движение антенны. Если она упадет на Землю, то укажите, в каком месте; если не упадет, то опишите, каким способом можно сделать так, чтобы антенна приземлилась.

16. В полночь Солнце находится точно под нами, на прямой, проходящей через центр Земли. Не становимся ли мы ночью тяжелее по сравнению с полднем из-за силы гравитационного притяжения Солнца? Объясните.

17. Сила гравитационного притяжения Луны Землей равна половине силы гравитационного притяжения Луны Солнцем (см. пример 5.7). Почему Луна не улетает прочь от Земли?

18. Космонавты, находящиеся долгое время в космическом пространстве, могут испытать отрицательные последствия невесомости. Можно создать искусственную силу тяжести, придав кораблю форму велосипедного колеса и затем вращая этот корабль относительно оси подобно велосипедному колесу. При этом космонавты будут находиться внутри «обода» колеса. Объясните, каким образом в таком корабле возникает искусственная сила тяжести? Рассмотрите: а) как будут падать предметы в таком корабле; б) силу, которая будет действовать на ступни космонавтов; в) любые другие проявления искусственной силы тяжести, которые вы можете придумать.

19. Иногда задают вопрос: «Что удерживает спутник на орбите при его вращении вокруг Земли?» Как бы вы ответили на этот вопрос?

20. Объясните, почему бегущий человек испытывает состояние «свободного падения», или «невесомости», в моменты отрыва от поверхности Земли.

21. Зимой Земля вращается по своей орбите вокруг Солнца быстрее, чем летом. Когда она находится ближе к Солнцу – зимой или летом? Влияет ли это на времена года? Объясните.

22. Обсудите разницу между понятиями ускорения свободного падения $\mathbf{g}$ и напряженности гравитационного поля $\mathcal{G}$.

## Задачи

Раздел 5.1

1. (I) Рассчитайте центростремительное ускорение Земли, движущейся по орбите вокруг Солнца, и суммарную силу, действующую на Землю. Какие небесные тела создают эти силы? Считайте, что орбита Земли представляет собой окружность радиусом $1{,}49 \cdot 10^{11}$ м.

2. (I) С какой максимальной скоростью автомобиль массой 1300 кг может проходить по горизонтальной дороге поворот радиусом 95 м, если коэффициент трения между шинами автомобиля и дороги равен 0,55. Зависит ли ответ от массы автомобиля?

3. (I) Чему равен коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой, если автомобиль проходит закругление дороги радиусом 62 м со скоростью 55 км/ч?

4. (I) К камню массой 0,60 кг приложена сила 26,0 Н таким образом, что он вращается по окружности радиусом 0,40 м, расположенной в горизонтальной плоскости. Найдите, с какой скоростью вращается камень.

5. (I) Ребенок, катающийся на карусельной лошадке, движется со скоростью 1,50 м/с на расстоянии 7,8 м от оси вращения карусели. Рассчитайте а) центростремительное ускорение ребенка и б) результирующую горизонтальную силу, действующую на ребенка (масса ребенка 25 кг).

6. (II) Сколько оборотов в минуту должна совершать центрифуга, чтобы частица, находящаяся на расстоянии 9,0 см от оси вращения, испытывала ускорение $110\,000g$?

7. (II) Можно ли вращать ведро с водой в вертикальной плоскости настолько быстро, что вода из него не будет выливаться? Если да, то с какой наименьшей скоростью нужно вращать ведро?

8. (II) Монета находится на расстоянии 12,0 см от оси вращающегося диска, скорость вращения которого можно менять. Когда частота вращения диска медленно увеличивается, монета покоится на диске до тех пор, пока частота



Рис. 5.19. Аттракцион «американские горы» в калифорнийском парке.

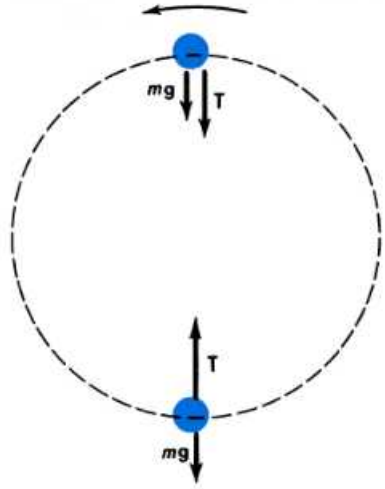



Рис. 5.20.

вращения диска не станет равной 58 об/мин, после чего монета сдвигается к краю диска. Чему равен коэффициент трения покоя между диском и монетой?

9. (II) На карнавале можно увидеть карусель, на которой люди прижимаются к внутренней стенке вертикального цилиндра радиусом 2,9 м, вращающегося с частотой 0,92 об/с (при этом у него убирается дно). Каков должен быть коэффициент трения, чтобы человек, катающийся на такой карусели, не выпал из нее? Безопасна ли она?

10. (II) Какую минимальную скорость должен иметь поезд на роликах в аттракционе «американские горы» (рис. 5.19) в тот момент, когда он находится в верхней части колеи, имеющей вид вертикальной окружности, чтобы пассажиры из него не выпали. Считайте, что радиус окружности равен 8,0 м.

11. (II) Шарик, закрепленный на конце нити,

вращается с постоянной скоростью по вертикальной окружности радиусом 96,5 см (рис. 5.20). Рассчитайте натяжение нити, когда шарик находится а) в наивысшей точке траектории и б) в наинизшей точке траектории. Скорость шарика равна 3,15 м/с, а масса 0,335 кг.

12. (II) Шарик массой $m$, закрепленный на шнуре длиной $L$, вращается по вертикальной окружности. Чему должна быть равна наименьшая скорость $v$ шарика в самой высокой точке окружности, чтобы при прохождении этой точки шариком шнур оставался натянутым?

13. (II) Проектируемая космическая станция представляет собой трубку кругового сечения с тонкими стенками, свернутую в виде окружности и вращающуюся вокруг своей оси симметрии (аналогично тому, как вращается велосипедное колесо). Диаметр этой окружности равен 1,6 км. а) Какая часть внутренней поверхности трубы будет для обитателей станции играть роль «пола»? б) С какой частотой (в оборотах в сутки) должна вращаться станция, чтобы на ней создавалась искусственная сила тяжести, равная силе тяжести на поверхности Земли ($1g$)?

14. (III) Наклон профилированной дороги в месте поворота с радиусом кривизны 60 м подобран таким образом, чтобы в этот поворот вписывался автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч. Каков должен быть коэффициент трения покоя, чтобы автомобиль, едущий со скоростью 90 км/ч, не испытал заноса?

15. (III) Автомобиль массой 1200 кг выполняет поворот с радиусом кривизны 65 м по профилированной дороге с углом наклона 14° относительно горизонтальной плоскости. Понадобится ли сила трения для того, чтобы автомобиль мог выполнить поворот, двигаясь со скоростью 80 км/ч? Если да, то чему должна быть равна и как направлена эта сила трения?

16. (III) Образующая боковой поверхности конуса составляет угол ϕ с вертикалью. Небольшое тело массой $m$ помещено на внутреннюю поверхность конуса, обращенного вверх основанием и вращающегося с частотой $f$ (оборотов в секунду) вокруг своей оси симметрии. В каких точках на внутренней поверхности конуса тело не будет соскальзывать, если коэффициент трения покоя равен μ? (Укажите наибольшее и наименьшее расстояния $r$ от оси вращения до точек, где тело находится в покое относительно поверхности конуса.)

Разделы 5.2 и 5.3

17. (I) Рассчитайте силу тяжести, действующую на космический корабль массой 850 кг, находящийся над поверхностью Земли на высоте 12 800 км.

18. (I) Вычислите ускорение свободного падения вблизи поверхности Луны. Радиус Луны приближенно равен $1{,}7 \cdot 10^6$ м, а ее масса равна $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг.

19. (I) На какой высоте над поверхностью Земли ускорение свободного падения будет равно половине величины ускорения свободного падения на ее поверхности?

20. (II) Выведите формулу для массы планеты в зависимости от ее радиуса $r$, ускорения свободного падения на поверхности $g_p$ и гравитационной постоянной $G$.

21. (II) Четыре тела сферической формы, имеющие массу 8,0 кг каждое, расположены в вершинах квадрата со стороной 0,50 м. Рассчитайте величину и направление силы гравитационного притяжения, действующей на одну из сфер со стороны остальных трех.

22. (II) На каком расстоянии от Земли результирующая гравитационная сила, действующая на космический корабль, летящий от Земли к Луне, равна нулю? (В этой точке силы притяжения Луны и Земли становятся равными и противоположно направленными.)

23. (III) С помощью интегрального исчисления покажите, что сила гравитационного притяжения, действующая на частицу с массой $m$ со стороны тела сферической формы с однородно распределенной массой $M$, описывается формулой (5.1), в которой $r$ – расстояние от частицы $m$ до центра сферы, и предполагается, что вся масса сферического тела сосредоточена в его центре. [*Подсказка*: при расчете разбейте сферу на бесконечно тонкие сферические слои, а затем каждый слой разбейте на тонкие кольца так, чтобы все части каждого кольца находились на одинаковом расстоянии от частицы $m$. Определите силу, действующую на частицу $m$ со стороны каждого кольца, и просуммируйте (проинтегрируйте) результат по кольцам, а затем по слоям.]

Раздел 5.4

24. (I) Рассчитайте эффективное значение гравитационного ускорения на высоте а) 3200 м и б) 3200 км над поверхностью Земли.

25. (I) Определите массу Солнца, используя известное значение периода обращения вокруг него Земли и ее расстояния от Солнца.

26. (I) Предположим, что масса Земли удвоилась, но плотность ее и сферическая форма сохранились. Как изменится сила тяжести, действующая на тела, расположенные на ее поверхности?

27. (III) а) Используя биномиальное разложе-

ние

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots,$$

покажите, что на высоте $\Delta r$ над поверхностью Земли значение $g$ меняется приблизительно на величину

$$\Delta g \approx -2g\frac{\Delta r}{r_з}$$

при условии, что $\Delta r \ll r_з$ (здесь $r_з$ – радиус Земли). б) Что означает знак минус в этом соотношении? в) С помощью этого соотношения вычислите эффективное значение величины $g$ на высоте 100 км над поверхностью Земли. Сравните результат с полученным ранее прямым вычислением с помощью формулы (5.1).

**28.** (III) Определите величину и направление эффективного ускорения свободного падения **g** на поверхности Земли в точке, находящейся на широте 45°. Считайте, что Земля имеет сферическую форму и вращается.

**29.** (III) Судно идет вдоль экватора со скоростью $v$. Покажите, что вес $w$ тела, взвешиваемого на корабле, приближенно равен $w = w_0(1 \pm 4\pi f v/g)$, где $f$ – частота вращения Земли (в оборотах в секунду). Почему здесь имеются оба знака $\pm$? Считайте, что $w_0$ – вес тела, измеренный в условиях, когда судно находится в покое относительно Земли.

Раздел 5.6

**30.** (I) Обезьяна массой 15,0 кг подвешена на шнуре к потолку лифта. Шнур выдерживает силу натяжения 185 Н. При ускорении лифта шнур оборвался. Чему при этом равно наименьшее ускорение лифта (по величине и направлению)?

**31.** (I) Найдите скорость спутника, обращающегося по стационарной круговой орбите на высоте 3200 км над поверхностью Земли.

**32.** (II) Один из спутников Юпитера, открытый Галилеем, имеет период обращения $1{,}44 \cdot 10^6$ с и отстоит от Юпитера в среднем на расстояние $1{,}9 \cdot 10^9$ м. Используя эти данные, вычислите массу Юпитера.

**33.** (II) Что покажут пружинные весы при взвешивании женщины массой 55,0 кг, находящейся в лифте, если лифт движется а) с постоянной скоростью 5,0 м/с вверх; б) с постоянной скоростью 5,0 м/с вниз; в) с ускорением $0{,}33g$, направленным вверх; г) с ускорением $0{,}33g$, направленным вниз, и д) если лифт свободно падает?

**34.** (II) Колесо обозрения диаметром 22,5 м делает один оборот за 12,5 с. Чему равно относительное изменение веса человека, когда он находится а) в верхней точке колеса и б) у основания колеса? (Сравните полученные вами результаты с весом человека, когда он находится в покое относительно Земли.)

**35.** (II) Чему равен вес космонавта массой 65 кг, находящегося в космическом корабле, движущемся на расстоянии 4200 км от центра Луны, если а) корабль движется с постоянной скоростью; б) корабль движется с ускорением, направленным к поверхности Луны, равным 3,6 м/с$^2$. Установите его «направление» в каждом из рассматриваемых случаев.

**36.** (II) а) Покажите, что масса Солнца определяется формулой $M_C = (4\pi^2 r^3)/(GT^2)$, где $T$ – период обращения любой из планет (время, необходимое для совершения одного оборота вокруг Солнца), $r$ – радиус орбиты этой планеты (по предположению орбита круговая) и $G$ – гравитационная постоянная. б) Вычислите массу Солнца, используя в качестве выбранной планеты Землю.

**37.** (II) Какими были бы земные сутки, если бы Земля вращалась так быстро, что тела на экваторе были бы невесомы?

**38.** (II) Опишите, каким образом можно определить массу планеты по наблюдениям орбиты одного из ее спутников.

**39.** (II) Две звезды находятся на расстоянии $8{,}0 \cdot 10^{10}$ м друг от друга и вращаются относительно точки, расположенной посередине между ними, с частотой 1 оборот за каждые 12,6 года. а) Почему звезды не падают друг на друга из-за взаимного гравитационного притяжения? б) Чему равна масса каждой звезды (считайте, что массы звезд одинаковы)?

**40.** (III) В лифте установлена наклонная плоскость, угол наклона которой относительно пола равен 30°. Тело массой $m$ без трения скользит по плоскости. С каким ускорением оно движется, если лифт: а) движется с ускорением $0{,}50g$, направленным вверх; б) движется с ускорением $0{,}50g$, направленным вниз; в) свободно падает; г) движется вверх с постоянной скоростью?

Раздел 5.7

**41.** (I) С помощью законов Кеплера, если известно, что период обращения Луны равен 27,4 сут, найдите период обращения искусственного спутника по орбите вблизи поверхности Земли.

**42.** (I) Астероид Икар, имеющий всего несколько сот метров в поперечнике, вращается вокруг Солнца, как и другие планеты. Период обращения его 410 сут. Чему равно среднее расстояние от него до Солнца?

**43.** (I) Венера находится на среднем расстоянии

от Солнца, равном $1{,}08 \cdot 10^8$ км. Оцените приближенно длительность венерианского года, учитывая, что Земля удалена от Солнца в среднем на $1{,}49 \cdot 10^8$ км.

**44.** (II) С помощью третьего закона Кеплера найдите, на какой высоте над Землей должна проходить орбита искусственного спутника, если он находится в одном и том же месте относительно Земли.

**45.** (II) а) Используя второй закон Кеплера, покажите, что отношение скоростей планеты, когда она располагается ближе всего к Солнцу и дальше всего от Солнца, равно обратному отношению расстояний от Солнца до ближайшей и самой далекой точек орбиты планеты: $v_{\text{ближ}}/v_{\text{дальн}} = d_{\text{дальн}}/d_{\text{ближ}}$. б) Учитывая, что расстояние от Земли до Солнца меняется в пределах $(1{,}47–1{,}52) \cdot 10^{11}$ м, вычислите наименьшую и наибольшую скорости Земли при ее обращении вокруг Солнца.

*Раздел 5.9

***46.** (I) Чему равна величина и каково направление напряженности поля тяготения в точке, находящейся посередине между Землей и Луной?

***47.** (I) а) Чему равна напряженность поля тяготения, создаваемого Солнцем на поверхности Земли? б) Оказывает ли это поле существенное влияние на ваш вес?

***48.** (III) Две одинаковые частицы массой $m$ каждая расположены на оси $x$ в точках $x = +x_0$ и $x = -x_0$. а) Напишите формулу для напряженности поля тяготения, создаваемого этими двумя частицами в точках на оси $y$, т. е. найдите зависимость $\mathcal{G}$ от $y$, $m$, $x_0$ и других переменных. б) В какой точке (или точках) на оси $y$ величина $\mathcal{G}$ имеет максимальное значение? Чему равно это максимальное значение? (*Подсказка*: вычислите производную $d\mathcal{G}/dy$.)



# Работа и энергия

До сих пор мы изучали движение частицы в рамках трех законов динамики Ньютона. При этом для количественного описания движения мы использовали понятие *силы*. В настоящей главе и в двух последующих мы рассмотрим альтернативное описание движения частицы с помощью понятий *энергии* и *импульса*. Важной особенностью этих величин является то, что они *сохраняются*; иными словами, при достаточно общих условиях их значения остаются постоянными. (Свойство этих величин сохраняться не только позволяет нам глубже заглянуть в устройство мира, но и дает другой способ решения практических задач.)

Законы сохранения энергии и импульса особенно полезны, когда мы имеем дело с системами многих тел, в которых детальное рассмотрение действующих сил представляло бы трудную задачу.

Эта глава посвящена очень важному понятию *энергии* и тесно связанному с ним понятию *работы*. Поскольку эти величины являются скалярными и не имеют направления, во многих случаях с ними проще иметь дело, чем с векторными силами. Важная роль энергии обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, это сохраняющаяся величина, а во-вторых, это – понятие, которое находит применение не только для изучения механического движения, но и во всех областях физики, а также в других науках. Однако, прежде чем рассматривать саму энергию, выясним сначала, что представляет собой работа.

## 6.1. Работа, совершаемая постоянной силой

В повседневной жизни слово *работа* употребляется в различном смысле. В физике же работа имеет строго определенный смысл; она описывает то, что совершает сила, когда, действуя на тело, она перемещает его на некоторое расстояние. В частности, **работа**, совершаемая постоянной (как по величине, так и по направлению) силой при перемещении частицы определяется как *произведение величины силы и проекции перемещения на направление вдоль силы*. Это можно записать следующим образом:

$$W = Fd\cos\theta; \tag{6.1}$$

здесь $F$ – постоянная сила, $d$ – результирующее перемещение частицы, а $\theta$ – угол между направлениями силы и перемещения. (Следует заметить, что $d\cos\theta$ – это величина составляющей вектора **d**, параллельной вектору **F**.)

Рассмотрим случай, когда сила и перемещение имеют одно и то же направление, так что $\cos\theta = 1$ и $W = Fd$. Например, если вы толкаете нагруженную продуктовую тележку с постоянной горизонтальной силой 30 Н и перемещаете ее на расстояние 50 м, то вы совершаете над тележкой работу (30 Н)(50 м) = 1500 Н·м.

Из этого примера следует, что в системе единиц СИ работа измеряется в ньютонах, умноженных на метры; для удобства единице измерения работы присвоено специальное наименование *джоуль* (Дж): 1 Дж = 1 Н·м. В системе СГС единица измерения работы называется *эргом* и определяется как 1 эрг = 1 дин·см. Легко показать, что 1 Дж = $10^7$ эрг.

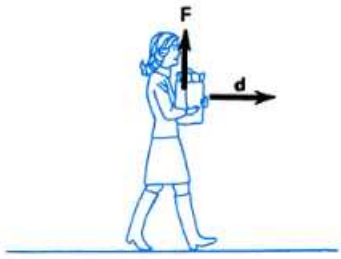



Рис. 6.1. В этом случае работа равна нулю, поскольку сила **F** перпендикулярна перемещению **d**.

Сила может быть приложена к телу и не совершать при этом работы. Например, если вы держите в руках тяжелую сумку с продуктами и не двигаетесь, то вы не совершаете работы; вы можете устать (и действительно ваши мускулы расходуют энергию), но, поскольку сумка остается в покое (т. е. ее перемещение равно нулю), работа $W = 0$. Вы также не совершаете работы, когда несете сумку с продуктами так, как показано на рис. 6.1, т. е. идете по горизонтальному полу. Для перемещения вашего груза с постоянной скоростью не требуется никакой горизонтальной силы. Однако вы действуете на сумку с силой **F**, направленной вверх и равной ее весу. Но эта сила перпендикулярна горизонтальному перемещению сумки и, следовательно, не влияет на горизонтальное движение; поэтому вертикальная сила не производит работы. Это согласуется с нашим определением работы (6.1); в самом деле, $W = 0$, поскольку $\theta = 90°$, а $\cos 90° = 0$. Таким образом, когда сила направлена перпендикулярно перемещению, она не совершает работы.

Понаблюдаем теперь за мальчиком, который тянет за собой тележку, прилагая силу **F** под углом $\theta$ к горизонту (рис. 6.2). Перемещая тележку на расстояние $d$ вдоль поверхности земли, он совершает работу, которую нетрудно вычислить по формуле (6.1). Если мальчик тянет тележку с силой 20 Н под углом $\theta = 30°$ и тележка перемещается на расстояние 100 м, то полная работа оказывается равной (20 Н)(100 м)(0,866) ≈ 1700 Дж.

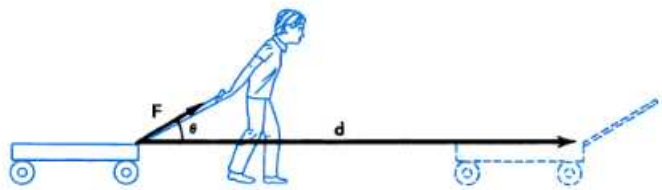



Рис. 6.2. Работа, совершаемая силой **F**, действующей под углом $\theta$ к поверхности земли, равна $Fd\cos\theta$.

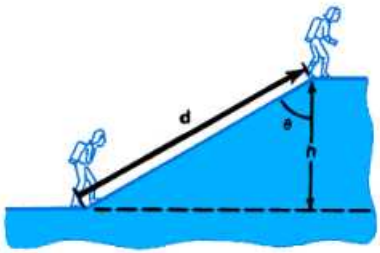



Рис. 6.3. Пример 6.1.

**Пример 6.1.** Вычислите работу, совершаемую против силы тяжести при подъеме рюкзака массой 15,0 кг на холм высотой $h = 10{,}0$ м (рис. 6.3).

**Решение.** Пренебрегая возможным ускорением, будем считать, что человек прилагает к рюкзаку постоянную силу **F**, направленную вертикально вверх и численно равную силе тяжести, действующей на рюкзак: $(15{,}0\text{ кг})(9{,}80\text{ м/с}^2) = 147$ Н. Формула (6.1) может быть переписана в виде $W = F(d\cos\theta)$, и из из рис. 6.3 следует, что $d\cos\theta = h$. Следовательно, мы имеем

$$W = Fh = (147\text{ Н})(10{,}0\text{ м}) = 1470\text{ Дж}.$$

Заметим, что работа зависит только от изменения высоты и не зависит от крутизны холма. При вертикальном подъеме рюкзака на такую же высоту $h$ совершается та же работа. Чтобы найти полную работу, которую человек совершает против силы тяжести при подъеме на холм, нужно поступить аналогичным образом, но использовать силу тяжести, действующую на человека и на рюкзак.

Как и в случае с силой, когда мы имеем дело с работой, необходимо уточнять, совершается ли работа *данным телом*, или она совершается *над* телом. Существенно также выяснить, производится ли работа какой-либо одной конкретной силой или *результирующей сил*, действующих на тело.

Полная (или результирующая) работа, совершаемая над телом, является алгебраической суммой работ каждой из сил, действующих на тело; разумеется, что эта полная работа производится равнодействующей всех сил, действующих на тело. Например, когда человек медленно поднимает груз массой 5,0 кг с пола на стол высотой 1,0 м, на груз действуют две силы: действующая вертикально вверх сила со стороны человека и направленная вертикально вниз сила тяжести $mg = 49$ Н. Если груз поднимается аккуратно с постоянной скоростью, то сила, прикладываемая человеком, равна силе тяжести, так что работа, совершаемая *человеком*, равна $W = (49\text{ Н})(1{,}0\text{ м}) = 49$ Дж. Если считать положительным направление вверх, то работа, совершаемая *силой тяжести*, равна $(-49\text{ Н})(1{,}0\text{ м}) = -49$ Дж. [Заметим, что, когда направление силы противоположно перемещению, работа оказывается отрицательной; в этом случае в формуле (6.1) $\theta = 180°$.] Таким образом, *полная работа* над грузом равна 49 Дж + (− 49 Дж) = 0. Это согласуется с тем, что, поскольку полная сила, действующая на груз, равна нулю, полная работа над грузом должна быть равна нулю. Это, разумеется, не противоречит тому, что человек действительно совершает над грузом работу 49 Дж.

## 6.2. Скалярное произведение двух векторов

Хотя работа скалярная величина, она равна произведению двух векторных величин: силы и перемещения. Поэтому рассмотрим теперь произведение векторов.

Поскольку векторы характеризуются и величиной, и направлением, их нельзя перемножать тем же способом, что и скалярные величины. Вместо этого мы должны *определить* операцию умножения векторов. Среди многих возможных способов умножения векторов существует три способа, которые используются в физике: 1) умножение вектора на скаляр, которое уже обсуждалось в разд. 3.3; 2) умножение одного вектора на другой вектор, когда получается скаляр; 3) умножение одного вектора на другой, когда получается новый вектор. Третий тип произведения, называемый *векторным произведением*, мы рассмотрим ниже (в разд. 10.1). Сейчас мы рассмотрим второй тип, называемый *скалярным произведением*. **Скалярное произведение** двух векторов **A** и **B** записывается следующим образом:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta, \tag{6.2}$$

где $A$ и $B$ – величины векторов, $\theta$ – наименьший угол ($< 180°$) между ними (в случае, когда эти векторы исходят из общего начала; рис. 6.4). Так как $A$, $B$ и $\cos\theta$ – скалярные величины, мы имеем скалярное произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Выражение (6.2) полностью совпадает с определением работы, совершаемой постоянной силой [формула (6.1)]. Это означает, что работу, совершаемую постоянной силой, можно записать как скалярное произведение вектора силы и вектора перемещения:

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = Fd\cos\theta. \tag{6.3}$$

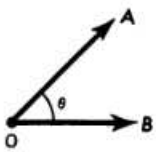



Рис. 6.4. Скалярное произведение двух векторов **A** и **B** записывается как $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$.

Действительно, скалярное произведение в виде (6.2) записывается так потому, что некоторые важные физические величины, такие, как работа и другие величины, с которыми мы встретимся ниже, можно представить скалярным произведением двух векторов. (Мы могли бы определить скалярное произведение, например, как $AB\,\mathrm{tg}\,\theta$ или $AB^2\cos(\theta/2)$, но эти определения были бы бесполезными для физики.)

Скалярное произведение можно эквивалентно определить как произведение абсолютной величины одного вектора (скажем, $A$) и проекции другого вектора на направление первого ($B\cos\theta$).

Поскольку $A$, $B$ и $\cos\theta$ – скалярные величины, не имеет значения, в каком порядке они перемножаются. Следовательно, скалярное произведение *коммутативно*:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}.$$

Нетрудно также показать, что оно *дистрибутивно* (см.

задачу 23):

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}.$$

Используя это свойство и записывая каждый вектор через его проекции на три взаимно перпендикулярные оси [разд. 3.5, формула (3.5)], можно показать (см. задачу 15), что

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \tag{6.4}$$

Это равенство очень полезно.

Если вектор **A** перпендикулярен **B**, то $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$, однако обратное неверно; значение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ может осуществляться тремя способами: $\mathbf{A}=0$, $\mathbf{B}=0$ или $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$.

**Пример 6.2.** Сила на рис. 6.2 равна 20 Н и составляет с горизонтом угол 30°. Рассчитайте с помощью формулы (6.4) работу, совершенную этой силой при перемещении тележки на 100 м по горизонтали.

**Решение.** Направим ось $x$ горизонтально вправо, а ось $y$ вертикально вверх. Тогда $\mathbf{F}=(F\cos\theta)\mathbf{i}+(F\sin\theta)\mathbf{j}=(17\text{ Н})\mathbf{i}+(10\text{ Н})\mathbf{j}$, в то время как $\mathbf{d}=(100\text{ м})\mathbf{i}$. Используя формулу (6.4), получаем

$$W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}=(17\text{ Н})(100\text{ м})+(10\text{ Н})(0)+(0)(0)=1700\text{ Дж}.$$

Заметим, что, выбирая направление оси $x$ вдоль **d**, мы упростили расчеты, поскольку в такой системе координат вектор **d** имеет лишь одну составляющую.

## 6.3. Работа, совершаемая переменной силой

Во многих случаях в процессе движения сила меняется по величине или по направлению. Например, при старте ракеты с Земли совершается работа против силы тяжести, которая изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния ракеты до центра Земли. Сила, обусловленная деформацией пружины, возрастает с увеличением этой деформации. Как можно рассчитать работу, совершаемую переменной силой?

На рис. 6.5 показана траектория частицы, движущейся в плоскости $xy$ из точки $a$ в точку $b$. Траектория разделена на малые интервалы длиной $\Delta l_1$, $\Delta l_2$, ..., $\Delta l_7$. Сила **F** действует на частицу в любой точке траектории: на рис. 6.5 показана сила, действующая в двух точках и обозначаемая в этих точках соответственно как $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_5$. В пределах каждого интервала $\Delta l$ сила меняется мало и ее можно считать постоянной. Тогда на первом интервале

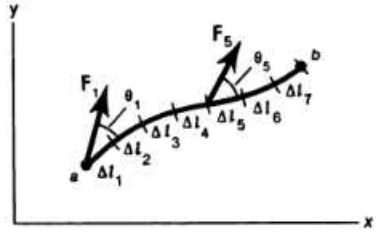



Рис. 6.5. Частица, на которую действует переменная сила **F**, движется по указанной здесь траектории из точки $a$ в точку $b$.

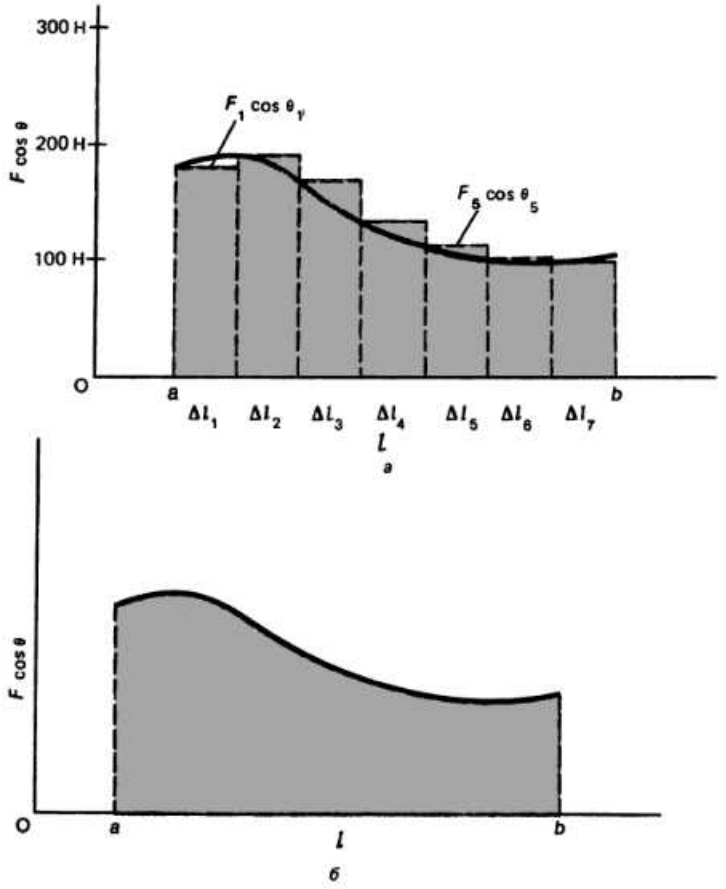



Рис. 6.6. Работа, совершаемая силой $F$, равна приближенно сумме площадей прямоугольников (*а*) и точно площади под кривой, описывающей зависимость $F\cos\theta$ от $l$ (*б*).

сила совершает работу $\Delta W$, приближенно [см. формулу (6.1)] равную

$$\Delta W \approx F_1 \cos\theta_1 \, \Delta l_1 .$$

Работа на втором интервале приближенно равна $F_2 \cos\theta_2 \, \Delta l_2$ и т. д. Полная работа при перемещении частицы на полное расстояние $l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_7$ равна сумме всех таких слагаемых:

$$W \approx \sum_{i=1}^{7} F_i \cos\theta_i \, \Delta l_i . \qquad (6.5)$$

Представим эту сумму графически (рис. 6.6, *а*). Для этого построим зависимость проекции $F\cos\theta$ от $l$. Отрезок $l$ разделен на семь равных частей вертикальными штриховыми линиями. Значения $F\cos\theta$ на каждом отрезке $\Delta l$ указываются горизонтальными штриховыми линиями. Каждый из затененных прямоугольников имеет площадь $(F_i \cos\theta_i)(\Delta l_i)$, равную работе, совершенной при перемещении частицы на $\Delta l_i$. Таким образом, определяемая выражением (6.5) работа равна сумме площадей всех

прямоугольников. Если траекторию разбить на большее число отрезков, так что длина $\Delta l_i$ станет меньше, то по формуле (6.5) мы определим работу более точно (при этом предположение о том, что сила $F$ постоянна на каждом отрезке $\Delta l_i$, оказывается еще более справедливым). Если устремить длину каждого отрезка $\Delta l_i$ к нулю (т. е. получить бесконечное число отрезков разбиения), то мы найдем точное значение совершенной работы:

$$W = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum F_i \cos\theta_i \Delta l_i,$$

$$W = \int_a^b F \cos\theta \, dl. \qquad (6.6)$$

Этот предел при $\Delta l_i \to 0$ называется *интегралом* от $F\cos\theta\, dl$ в пределах от $a$ до $b$ и записывается в виде специального знака. Символ интеграла $\int$ представляет собой вытянутую букву $S$ и указывает на вычисление бесконечной суммы; при этом $\Delta l$ заменяется на $dl$, что обозначает бесконечно малое расстояние.

В пределе $\Delta l \to 0$ полная площадь прямоугольников (рис. 6.6, *а*) оказывается равна площади между кривой $F\cos\theta$ и осью $l$, ограниченной перпендикулярами к оси $l$ в точках $a$ и $b$ (рис. 6.6, *б*). Иными словами, *работа, совершаемая переменной силой при перемещении частицы от одной точки до другой, численно равна площади под кривой зависимости $F\cos\theta$ от $l$ между этими двумя точками $a$ и $b$.*

В пределе $\Delta l \to 0$ бесконечно малое расстояние $dl$ равно[1] длине вектора бесконечно малого перемещения $d\mathbf{l}$. Направление вектора $d\mathbf{l}$ совпадает с касательной к кривой в этой точке; следовательно, $\theta$ – это угол между векторами $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{l}$ в любой точке траектории. Таким образом, используя скалярное произведение, можно написать следующее выражение:

$$W = \int_a^b F\cos\theta\, dl = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}. \qquad (6.7)$$

Это *наиболее общее определение работы*. Интеграл, входящий в формулу (6.7), называется *криволинейным интегралом*, так как он представляет собой интеграл от функции $F\cos\theta$ вдоль линии, которая представляет собой траекторию тела [формула (6.1) для работы постоянной силы – это частный случай формулы (6.7)].




Рис. 6.7. Абсолютная величина вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ может не совпадать с пройденным путем $\Delta l$.

[1] Расстояние $\Delta l$, пройденное частицей вдоль траектории, в общем случае не совпадает с перемещением $\Delta\mathbf{r}$ (рис. 6.7). Но в пределе бесконечно малых величин они совпадают: $dl = dr$, и в этом пределе $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$. Заметим, что вектор $\Delta\mathbf{l}$ нельзя определить, поскольку при прохождении искривленной траектории он не имеет однозначного направления; направление $d\mathbf{l}$ можно определить как направление касательной к кривой в данной точке, так что $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ и $dl = dr$.

Для вычисления работы с помощью формул (6.6) или (6.7) существует несколько способов. Если произведение $F\cos\theta$ является функцией положения частицы, то можно построить график, как на рис. 6.6, *б*, и графически определить искомую площадь. Кроме того, можно выполнить численное интегрирование или численное суммирование (возможно, с применением ЭВМ или микрокалькуляторов). Можно также применить для вычисления интегралов аналитические методы. С этой целью $F$ необходимо записать как функцию положения, т. е. как $F(x, y, z)$. В качестве примера использования интегрального исчисления рассмотрим одномерный случай и определим аналитически работу, совершаемую при растяжении пружины. Предположим, что один конец пружины прикреплен к стене. Для растяжения или сжатия такой пружины на величину $x$ относительно ее нормальной (недеформированной) длины требуется сила, величина которой прямо пропорциональна $x$:

$$F(x) = kx,$$

где $k$ – постоянная, называемая коэффициентом упругости пружины и характеризующая ее жесткость. Это соотношение для пружины иногда называют *законом Гука*[1]. Оно справедливо, если деформация $x$ достаточно мала. Рассчитаем работу, совершаемую при растяжении (или сжатии) пружины на длину $x_b = x$ от ее длины в недеформированном состоянии ($x_a = 0$). Будем считать, что растягивается пружина медленно, так что ее ускорение равно нулю. Приложенная к пружине сила параллельна оси пружины (оси $x$); следовательно, векторы $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{l}$ параллельны друг другу. Таким образом, работу можно записать в виде (мы полагаем в этом случае, что $d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{i}$)[2]:

$$W = \int\limits_{x_a=0}^{x_b=x} [F(x)\mathbf{i}]\cdot[dx\,\mathbf{i}] = \int\limits_0^x F(x)\,dx = \int\limits_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}kx^2.$$

(Следует заметить, что буквой $x$ мы обозначали как переменную, по которой производится интегрирование, так и ее значение на верхнем пределе при интегрировании от $x_a = 0$ до $x_b = x$.) Таким образом, мы видим, что работа по растяжению пружины пропорциональна квадрату величины удлинения (или сжатия) пружины $x$. Это же можно получить, вычисляя площадь под прямой на гра-

---

[1] Это соотношение не совсем точно называть законом, поскольку оно является, во-первых, приближенным, а, во-вторых, относится лишь к ограниченному классу явлений. Большинство физиков предпочитает законом называть более общие и точные соотношения, такие, как законы динамики Ньютона или закон сохранения энергии (гл. 7).

[2] См. таблицу интегралов в приложении Б.

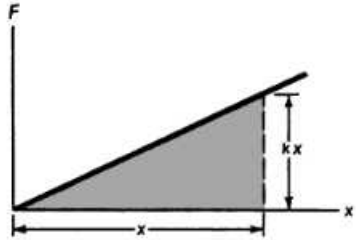



Рис. 6.8. Работа, совершаемая при растяжении пружины на длину $x$, равна площади треугольника под кривой $F = kx$. Поскольку площадь треугольника равна произведению полувысоты на основание, $W = (1/2)(x)(kx) = kx^2/2$.

фике зависимости $F$ от $x$ (в рассматриваемом случае $\cos\theta = 1$), как показано на рис. 6.8. Поскольку область, площадь которой нужно подсчитать, является треугольником с высотой $kx$ и основанием $x$, работа, равная площади, запишется в виде

$$W = \frac{1}{2}(x)(kx) = \frac{1}{2}kx^2,$$

что совпадает с полученным выше выражением для $W$.

**Пример 6.3.** Математический маятник состоит из очень небольшого по размерам груза массой $m$, подвешенного на нити, имеющей пренебрежимо малую массу и длину $L$ (рис. 6.9, *а*). К грузу в горизонтальном направлении прикладывается сила $\mathbf{F}$ (т. е. $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$), под действием которой он очень медленно движется, так что его ускорение в любой момент времени равно нулю. (Заметим, что величина силы $\mathbf{F}$ изменяется в зависимости от угла $\theta$, который нить составляет с вертикалью в каждый момент времени.) а) Вычислите работу, совершенную этой силой $\mathbf{F}$, если маятник переместился из положения $\theta = 0$ в положение $\theta = \theta_0$. б) Определите работу, совершаемую силой тяжести $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, приложенной к грузу, и работу, совершаемую силой натяжения $\mathbf{F}_s$, приложенной к грузу со стороны нити.

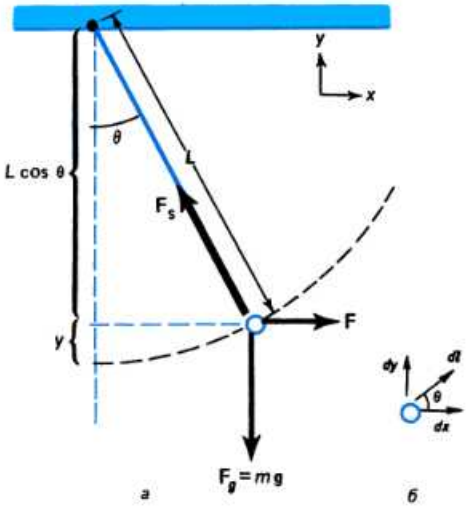



Рис. 6.9. *а* – математический маятник (пример 6.3); *б* – разложение на составляющие бесконечно малого перемещения груза маятника.

**Решение.** а) Выберем систему координат таким образом, чтобы в самом нижнем положении ($\theta = 0$) груз имел координаты $x = y = 0$. Поскольку ускорение груза равно нулю, результирующая сила, действующая на груз в любом его положении, равна нулю. Следовательно, $x$- и $y$-проекции результирующей силы должны быть равны нулю (рис. 6.9, *а*):

$$F - F_s \sin\theta = 0,$$

$$F_s \cos\theta - mg = 0.$$

Если из второго уравнения найти силу $F_s$ и подставить найденное выражение в первое уравнение, то получим

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = \mathbf{i}\,mg\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Отсюда следует, что $F$ зависит от положения груза (мы задаем положение груза углом $\theta$). Из рис. 6.9, *б* видно, что в любой

точке

$$d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j},$$

где

$$dx = \cos\theta\, dl, \quad dy = \sin\theta\, dl.$$

Работа, совершаемая силой $\mathbf{F}$ при перемещении груза из положения $\theta = 0$ в положение $\theta = \theta_0$, вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} W_F = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} &= \int_{\theta=0}^{\theta_0} (mg\,\mathrm{tg}\,\theta\,\mathbf{i})\cdot(\cos\theta\, dl\,\mathbf{i} + \\ &+ \sin\theta\, dl\,\mathbf{j}) = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta_0} mg\,\mathrm{tg}\,\theta\cos\theta\, dl = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta_0} mg\sin\theta\, dl = \\ &= \int_{y=0}^{y_0} mg\, dy = mgy\Big|_0^{y_0} = \\ &= mgy_0. \end{aligned}$$

Как видно из рис. 6.9, *а*, $y = L - L\cos\theta$; следовательно, $y_0 = L(1 - \cos\theta_0)$ и работа, выраженная через угол $\theta_0$, запишется в виде $W_F = mgL(1 - \cos\theta_0)$.

б) Сила $\mathbf{F}_s$ не совершает работы, поскольку в любой момент времени она действует в направлении, перпендикулярном перемещению груза, так что $\mathbf{F}_s\cdot d\mathbf{l} = 0$ в любой точке. Работа, совершаемая силой тяжести, равна

$$\begin{aligned} W_g = \int_{y=0}^{y_0} mg\cdot d\mathbf{l} &= \int_{y=0}^{y_0} (-mg\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}) = \\ &= -\int_0^{y_0} mg\, dy = -mgy\Big|_0^{y_0} = -mgy_0. \end{aligned}$$

Следует заметить, что полная работа, совершаемая всеми силами, действующими на груз, равна нулю, т. е. $mgy_0 + 0 - mgy_0 = 0$, что согласуется с тем, что результирующая сила, действующая на груз, равна нулю.

## 6.4. Кинетическая энергия и теорема о связи энергии и работы

*Энергия* представляет собой одно из наиболее важных понятий в науке. Однако мы не можем дать простого и в то же время достаточно строгого и полного определения энергии всего лишь в нескольких словах. Любой из различных ее видов можно определить весьма просто, и в этой главе мы определим кинетическую энергию (поступательного) движения и (механическую) потенциальную энергию. В последующих главах настоящего тома мы рассмотрим другие виды энергии, например связанные с тепловым движением (гл. 19–21). Все виды энергии объединяет то, что их можно определить согласованно друг с другом, т. е. их единицы измерения должны совпадать с единицами измерения работы (сила × расстояние), и таким образом, что сумма всех видов энергии, а именно *полная энергия*, должна оставаться неизменной, какой бы процесс мы ни рассматривали. Иными словами, энергию можно определить как величину, которая сохраняется. Позже мы рассмотрим это более подробно.

Для целей настоящей главы мы могли бы определить энергию обычным образом как «способность совершать работу». Это простое определение не вполне точно и в действительности не применимо ко всем видам энергии[1].

[1] Например, энергия, связанная с тепловым движением, во многих случаях не может быть превращена в работу (по крайней мере, полностью.– *Ред.*); подробнее об этом см. в гл. 21.

Однако его вполне достаточно для механической энергии, которая рассматривается в настоящей главе; на основе этого определения можно дать и наиболее общее определение энергии для чисто механических систем, поскольку связь между энергией и работой является фундаментальной. Определим теперь один из основных видов энергии, а именно кинетическую энергию, и обсудим ее свойства.

Движущееся тело может совершить работу над другим телом, с которым оно соударяется. Летящее пушечное ядро совершает работу над кирпичной стеной, которую оно проламывает; движущийся молоток производит работу по забиванию гвоздя. В любом из этих случаев движущееся тело действует с определенной силой на второе тело и перемещает его на некоторое расстояние. Движущееся тело обладает способностью совершать работу, и потому можно говорить, что оно обладает энергией. Энергию механического движения называют **кинетической энергией** (от греч. *kinetikos*, что значит «движение»).

Для того чтобы получить количественное определение кинетической энергии, вычислим работу, которую действительно может совершить движущееся тело в частном случае одномерного движения. Будем считать, что рассматриваемое тело является материальной частицей или в любом случае может двигаться лишь поступательно. Пусть тело массой $m$, движущееся со скоростью $v$, соударяется со вторым телом (над которым оно производит работу) и затем останавливается. Для конкретности будем думать о молотке, ударяющем по гвоздю. Предположим, что при ударе по гвоздю молоток действует на него с постоянной силой $\mathbf{F}$ во время перемещения гвоздя на расстояние $d$ параллельно $\mathbf{F}$ (рис. 6.10) до тех пор, пока молоток не остановится. Таким образом, эта сила производит работу $W = Fd$. Нас интересует молоток, на который по третьему закону Ньютона гвоздь действует с силой $-\mathbf{F}$. Будем считать, что $-\mathbf{F}$ представляет собой результирующую силу, действующую на молоток (вообразим себе, что рука человека лишь слегка поддерживает молоток после достижения им скорости $v$). Тогда по

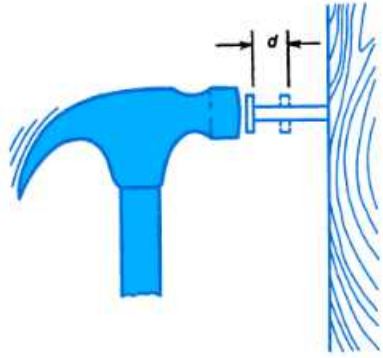



Рис. 6.10. Ударяя по гвоздю, молоток совершает работу.

второму закону Ньютона именно сила $-\mathbf{F}$ замедляет движение молотка от начальной скорости $v$ до полной остановки, так что $-\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. С помощью выражения (2.9в) ускорение (отрицательное) молотка **a** (которое является постоянным, поскольку мы предположили, что сила **F** постоянна во время взаимодействия молотка с гвоздем) можно связать с начальной скоростью $v$ и расстоянием $d$; поскольку конечная скорость равна нулю, мы имеем $v^2 = -2ad$. Объединяя эти соотношения, находим работу, совершаемую молотком:

$$W = Fd = -mad = m(v^2/2d)\,d = (1/2)\,mv^2\,.$$

Таким образом, тело массой $m$, движущееся со скоростью $v$, если его остановить, может совершить работу, равную $(1/2)\,mv^2$. Поэтому величину $(1/2)\,mv^2$ мы *определяем* как **кинетическую энергию (КЭ) поступательного (трансляционного) движения** тела:

$$\text{КЭ} = (1/2)\,mv^2\,. \tag{6.8}$$

Это определение кинетической энергии дает количественный смысл представлению об энергии как способности совершить работу. (Ниже мы покажем, что данное определение применимо также и в случае трех измерений.) Очень важно и то, что (как мы вскоре увидим) это определение кинетической энергии позволяет оперировать с еще более общим понятием энергии, которая сохраняется в любом процессе.

Мы убедились в том, что движущееся тело может совершать работу. Верно и обратное: чтобы тело приобрело кинетическую энергию, над ним необходимо совершить работу. Для того чтобы найти точную взаимосвязь, обратим ход рассуждений, приведенный выше. Предположим, что тело массой $m$ движется прямолинейно с начальной скоростью $v_1$, причем для равномерного ускорения его до скорости $v_2$ к нему прикладывают постоянную результирующую силу $F$ в направлении, параллельном движению тела, причем сила действует на расстоянии $d$. Тогда работа, совершаемая над телом, равна $W = Fd$. Используя второй закон Ньютона $F = ma$ и формулу (2.9в) (на этот раз записанную в виде $v_2^2 = v_1^2 + 2ad$, где $v_1$ и $v_2$ – начальная и конечная скорости соответственно), находим

$$W = Fd = mad = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}\right)d,$$

или

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta\text{КЭ}\,. \tag{6.9}$$

Таким образом:

**Полная работа, произведенная над телом, равна изменению его кинетической энергии.**

Это утверждение иногда называют теоремой о **связи работы и энергии**. Заметим, однако, что, поскольку мы использовали второй закон Ньютона $F = ma$, сила $F$ должна быть результирующей (суммой всех сил, действующих на тело). Поэтому сформулированное выше утверждение справедливо лишь в том случае, когда $W$ – это *полная работа*, произведенная над телом.

Соотношение между работой и кинетической энергией можно рассматривать с двух точек зрения. С одной стороны, если над телом совершается работа, его кинетическая энергия возрастает. С другой стороны, если у тела имеется кинетическая энергия, оно может совершить работу над каким-либо другим телом, и если это происходит, то его собственная кинетическая энергия уменьшается. Это можно выразить иначе: если полная работа $W$, совершаемая над телом, положительна, то его кинетическая энергия возрастает: если же $W$ отрицательна, то кинетическая энергия убывает. В случае когда полная работа равна нулю, кинетическая энергия остается постоянной.

Теорема о связи работы с кинетической энергией (6.9) доказана нами для одномерного случая и постоянной силы. Однако эта теорема справедлива и для случая переменной силы, когда движение происходит в двух или трех измерениях; докажем это. Предположим, что результирующая сила **F**, действующая на тело, изменяется как по величине, так и по направлению, причем тело движется по криволинейной траектории, как показано на рис. 6.5. При этом силу можно рассматривать как функцию (векторную) величины $l$ – расстояния вдоль кривой. В соответствии с формулой (6.6) эта сила совершает работу

$$W = \int F \cos\theta \, dl = \int F_{\parallel} \, dl,$$

где $F_{\parallel}$ – величина составляющей силы $F$, параллельной[1] касательной к кривой в любой точке. По второму закону Ньютона

$$F_{\parallel} = ma_{\parallel} = m\frac{dv}{dt},$$

где $a_{\parallel}$ соответствует величине, параллельной (или тангенциальной) составляющей ускорения, равной быстроте изменения скорости тела $dv/dt$. Считая, что $v$ является функцией расстояния $l$, и используя правила дифференци-

---

[1] Заметим, что сила (или ее составляющая), перпендикулярная вектору скорости, не совершает работы. Такая сила лишь изменяет направление скорости и не влияет на ее величину. Одним из примеров этого может служить равномерное движение по окружности, при котором на тело, движущееся с постоянной по величине скоростью, действует центростремительная сила, направленная к центру окружности; эта сила не совершает работы над телом.

рования, имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dl}\frac{dl}{dt} = v\frac{dv}{dl}.$$

Здесь мы учли, что по определению $dl/dt = v$. Таким образом (вводя индексы 1 и 2 соответственно для начальных и конечных величин), получаем выражение

$$W = \int_1^2 F_\parallel dl = \int_1^2 m\frac{dv}{dt}dl = \int_1^2 mv\frac{dv}{dl}dl = \int_1^2 mv\,dv,$$

которое после интегрирования приводит к

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta\text{КЭ}.$$

Таким образом, мы вновь пришли к теореме о связи работы и энергии, доказав ее для трехмерного движения с переменной результирующей силой. Заметим кстати, что эта теорема не является новым независимым законом. Она была выведена, исходя из определений работы и кинетической энергии с использованием второго закона Ньютона.

Поскольку работа и кинетическая энергия непосредственно связаны друг с другом, энергия должна иметь те же единицы измерения, что и работа: джоули в системе СИ, эрги в СГС. Кинетическая энергия, как и работа, является скалярной величиной. Кинетическая энергия системы частиц равна (скалярной) сумме кинетических энергий отдельных частиц, входящих в систему.

**Пример 6.4.** Какую работу необходимо совершить, чтобы скорость автомобиля массой 1000 кг, равная 20 м/с, увеличилась до 30 м/с?

**Решение.** Необходимая работа равна приращению кинетической энергии:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(1000\text{ кг})(30\text{ м/с})^2 -$$

$$- \frac{1}{2}(1000\text{ кг})(20\text{ м/с})^2 = 2{,}5\cdot 10^5\text{ Дж}.$$

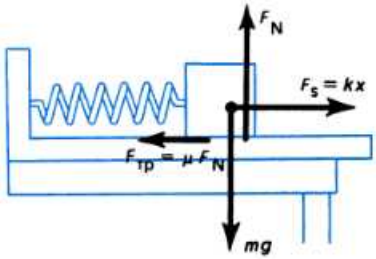



Рис. 6.11. Пример 6.5.

**Пример 6.5.** Горизонтально расположенная пружина имеет коэффициент упругости $k = 180$ Н/м (рис. 6.11). а) Какая работа требуется, чтобы сжать ее из свободного состояния ($x = 0$) до значения $x = 15{,}5$ см ($x$ – величина деформации пружины)? б) Если прикрепить теперь к концу пружины груз массой 1,85 кг, то какова будет его скорость, когда он отделится от

пружины в точке $x = 0$? Трением пренебрегите. в) Рассмотрите вновь случай «б», считая теперь груз скользящим по столу и принимая коэффициент трения скольжения равным $\mu_k = 0{,}27$.

**Решение.** а) В разд. 6.3 мы показали, что работа $W$, необходимая для сжатия пружины на величину $x$, равна $kx^2/2$. Следовательно, в нашем случае потребуется работа $W = (1/2)(180\ \text{Н/м})(0{,}155\ \text{м})^2 = 2{,}16$ Дж (все величины приведены к системе СИ).

б) Возвращаясь в исходное недеформированное состояние, пружина произведет над грузом работу 2,16 Дж (вычисления те же, что и в п. «а», изменяется лишь направление движения). Согласно теореме о связи работы и энергии, груз приобретает кинетическую энергию 2,16 Дж; поскольку КЭ $= (1/2)mv^2$, скорость груза

$$v = \sqrt{\frac{2(\text{КЭ})}{m}} = \sqrt{\frac{2(2{,}16\ \text{Дж})}{1{,}85\ \text{кг}}} = 2{,}34\ \text{м/с}.$$

в) На груз действуют две силы: одна со стороны пружины и другая со стороны стола (за счет трения). Пружина производит над грузом работу 2,16 Дж. Работа силы трения, действующей на груз, равна

$$W_{\text{тр}} = (-\mu_k mg)x =$$
$$= -(0{,}27)(1{,}85\ \text{кг})(9{,}8\ \text{м/с}^2)(0{,}155\ \text{м}) =$$
$$= -0{,}76\ \text{Дж}.$$

Мы учли здесь, что сила нормального давления $F_N$, с которой груз действует на стол, равна силе тяжести $mg$. Эта работа отрицательна, поскольку сила трения скольжения направлена противоположно перемещению $x$. Полная работа, произведенная над грузом, равна $W = 2{,}16$ Дж $- 0{,}76$ Дж $= 1{,}40$ Дж. Используя теорему о связи работы и энергии (6.9) и полагая $v_2 = v$ и $v_1 = 0$, имеем

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}40\ \text{Дж})}{1{,}85\ \text{кг}}} = 1{,}26\ \text{м/с}.$$

## 6.5. Потенциальная энергия

Можно говорить, что энергия тела обусловлена не только его движением, но и положением в пространстве и его формой; такую энергию называют **потенциальной энергией** (ПЭ).

Потенциальной энергией обладает, например, заведенная пружина часов. При своем раскручивании она совершает работу и передвигает стрелки часов. Сама пружина приобрела потенциальную энергию благодаря тому, что *над* ней совершил работу человек, заводивший часы.

Возможно, самым привычным примером потенциальной энергии является *гравитационная потенциальная энергия*. Массивное тело, поднятое высоко в воздух, имеет потенциальную энергию благодаря своему положению. Оно обладает способностью совершать работу, поскольку, если его освободить, оно упадет на землю и может совершить работу (например, загнать в землю торчащий стержень). Определим теперь количественно гравитационную потенциальную энергию тела вблизи поверхности Земли. Поднять тело массой $m$ вертикально вверх можно, только приложив к нему силу, по крайней мере равную силе тяжести $mg$ (например, со стороны ладони человека). Для того чтобы поднять это тело без ускорения на высоту $h$ над поверхностью Земли (рис. 6.12, *а*), человек должен совершить работу, равную произведению силы $mg$ на расстояние по вертикали $h$; иными словами, $W = mgh$.

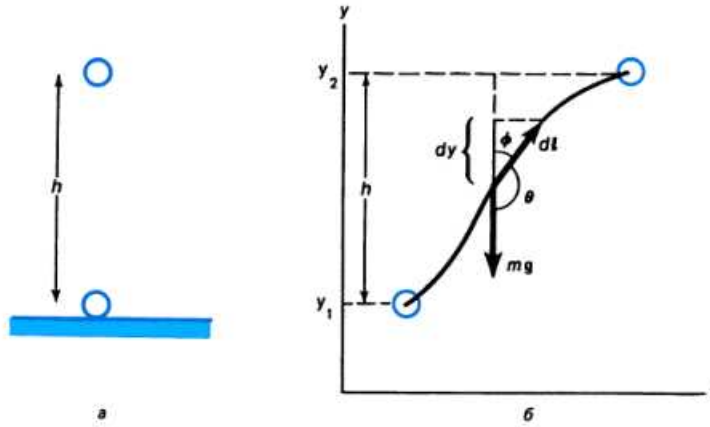



Рис. 6.12. Тело массой $m$ поднимается на высоту $h = y_2 - y_1$ вертикально ($а$) и по произвольной двумерной траектории ($б$).

Если затем мы позволим телу свободно падать под действием силы тяжести и при падении загнать в землю стержень, то тело совершит над стержнем работу $mgh$, что можно проверить, используя кинематические соотношения, как мы это делали в разд. 6.4 для кинетической энергии. Таким образом, чтобы поднять тело массой $m$ на высоту $h$, *необходимо* совершить работу, равную $mgh$; поднятое на высоту $h$ тело обладает *способностью* производить работу, равную $mgh$.

Предположим, что вместо движения вверх по вертикали тело следует по некоторой произвольной траектории в плоскости $xy$ (рис. 6.12, $б$). Оно начинает движение в точке с вертикальной координатой (высотой) $y_1$ и достигает высоты $y_2$, причем $y_2 - y_1 = h$. С помощью формулы (6.7) вычислим работу $W_g$, совершаемую в этом процессе силой тяжести:

$$W_g = \int_1^2 (\mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{l}) = \int_1^2 mg \cos\theta \, dl.$$

Обозначим через $\phi = 180° - \theta$ угол между вектором перемещения $d\mathbf{l}$ и его вертикальной составляющей $dy$, как показано на рис. 6.12, $б$; тогда, учитывая, что $\cos\theta = -\cos\phi$ и $dy = dl\cos\phi$, находим

$$W_g = -\int_{y_1}^{y_2} mg\, dy = \\ = -mg(y_2 - y_1). \qquad (6.10)$$

Поскольку $y_2 - y_1 = h$ – высота по вертикали, мы видим, что работа зависит только от высоты и вовсе не зависит от конкретной выбранной траектории. В случае, изображенном на рис. 6.12, $б$, $y_2 > y_1$, и потому работа силы тяжести отрицательна; если же $y_2 < y_1$ (т.е. тело падает вниз), то $W_g$ положительна.

Если тело падает свободно по вертикали на расстояние $h = y_2 - y_1$, то оно может совершить работу (над другим телом или системой), равную $mgh = mg(y_2 - y_1)$. В соот-

ветствии с определением энергии как способности совершать работу, мы можем найти изменение *гравитационной потенциальной энергии* $U$, когда тело с высоты $y_1$ переместится в точку на высоте $y_2$, как

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1) \quad \text{[гравитационная ПЭ]}. \tag{6.11}$$

Выражение (6.11) определяет изменение потенциальной энергии между двумя точками. Потенциальную энергию $U$ в любой точке, характеризуемой высотой $y$ относительно какой-либо точки отсчета (начала системы координат), можно определить следующим образом:

$$U = mgy \quad \text{[гравитационная ПЭ]}. \tag{6.12}$$

Можно было бы определить гравитационную ПЭ в точке также в виде

$$U = mgy + C,$$

где $C$ – постоянная величина; такое определение тоже согласуется с формулой (6.11) (постоянные $C$ сократились бы одна с другой при вычитании $U_1$ из $U_2$). Значение $C$ для удобства выбирают обычно равным нулю, поскольку $U$ так или иначе зависит от выбора системы координат (т.е. от точки, в которой мы выбрали начало отсчета высоты $y$). Например, гравитационная потенциальная энергия книги, поднятой высоко над столом, зависит от того, откуда мы измеряем высоту $y$: от поверхности стола, пола или от какой-либо другой точки отсчета[1]. В любой ситуации физический смысл имеет *изменение* потенциальной энергии, поскольку именно она связана с совершаемой работой. Мы можем поэтому выбирать нулевое значение потенциальной энергии в любой точке, в которой это удобно, но должны сохранять этот выбор в процессе решения данной задачи. Изменение потенциальной энергии между любыми двумя точками не зависит от этого выбора.

**Пример 6.6.** Автомобиль массой 1000 кг перемещается из точки $A$ (рис. 6.13) в точку $B$, а затем в точку $C$. а) Чему равна потенциальная энергия автомобиля в точках $B$ и $C$ относительно точки $A$? б) Каково будет изменение потенциальной энергии тела, когда оно переместится из точки $B$ в точку $C$? в) Ответьте на вопросы «а» и «б», выбрав начало отсчета ($y = 0$) в точке $C$.

**Решение.** а) Будем измерять высоты от точки $A$, так что в начальном положении автомобиль имеет нулевую потенциаль-

[1] Это имеет место и в случае кинетической энергии: кинетическая энергия тела тоже зависит от выбора системы отсчета; например, у человека, сидящего в автобусе, движущемся со скоростью $v$, кинетическая энергия в системе отсчета, связанной с автобусом, равна нулю, но в системе отсчета, связанной с дорогой, она равна КЭ = $(1/2)mv^2$. Однако *изменение* потенциальной энергии не зависит от системы отсчета, тогда как изменение кинетической энергии также зависит от системы отсчета.

ную энергию. В точке $B$, где $y = 10$ м,

$$\text{ПЭ}_B = mgy = (1000 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2)(10 \text{ м}) = 1{,}0 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

В точке $C$, находящейся ниже $A$, $y = -15$ м, и потому

$$\text{ПЭ}_C = mgy = (1000 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2)(-15 \text{ м}) = -1{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

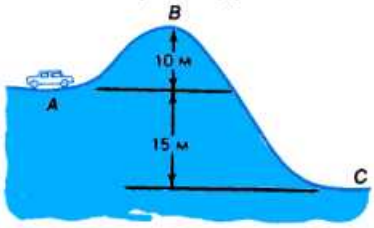



Рис. 6.13. Пример 6.6.

б) Изменение потенциальной энергии автомобиля при его перемещении из точки $B$ в точку $C$ равно

$$\text{ПЭ}_C - \text{ПЭ}_B = (-1{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж}) - (1{,}0 \cdot 10^5 \text{ Дж}) = -2{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Таким образом, автомобиль теряет энергию $2{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

в) В этом случае, поскольку $y = 15$ м, потенциальная энергия автомобиля в начальной точке $A$ равна $(1000 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2) \times (15 \text{ м}) = 1{,}5 \cdot 10^5$ Дж. В точке $B$ его потенциальная энергия равна $2{,}5 \cdot 10^5$ Дж, а в точке $C$ – нулю. Однако изменение потенциальной энергии при переходе из точки $B$ в точку $C$ (или из точки $A$ в точку $B$) такое же, как и в п. «б».

Сравнивая выражения (6.10) и (6.11), мы видим, что изменение гравитационной потенциальной энергии определено так, что оно равно работе со знаком минус, совершаемой силой тяжести при перемещении тела с высоты $y_1$ на высоту $y_2$:

$$\Delta U = -W_g = -\int_1^2 (\mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{l}).$$

Вместо этого можно было бы сказать, что изменение потенциальной энергии $\Delta U$ равно работе, совершаемой другой силой (равной по величине силе тяжести), например действующей со стороны человека и поднимающей тело (без ускорения) против силы тяжести.

Помимо гравитационной существуют и другие виды потенциальной энергии. В общем случае мы определяем *изменение потенциальной энергии, связанной с конкретной силой* $\mathbf{F}$, *как величину, равную (с обратным знаком) работе, совершаемой этой силой:*

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}). \qquad (6.13)$$

В следующей главе мы увидим, что такое определение имеет смысл не для всех возможных сил, а лишь для так называемых консервативных сил, таких, как сила тяжести.

Рассмотрим теперь еще один вид потенциальной энергии, характерный для упругих тел и имеющий много практических применений. В качестве простого примера рассмотрим часовую пружину или даже просто проволочную пружину (рис. 6.14). В сжатом или растянутом состоянии пружина обладает потенциальной энергией, поскольку, когда ее высвобождают, она может совершить

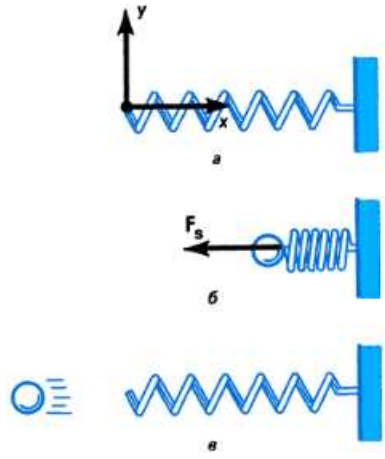



Рис. 6.14. Пружина (*а*) может запасать энергию (упругая ПЭ), находясь в сжатом состоянии (*б*); эту энергию можно использовать для совершения работы в момент освобождения пружины (*в*).

работу над шариком, как это показано на рис. 6.14. По аналогии с другими упругими телами сжатие пружины описывается законом Гука (см. разд. 6.3) при условии, что ее деформация $x$ не слишком велика. Выберем систему координат так, чтобы конец нерастянутой пружины находился в точке $x = 0$ (рис. 6.14, *а*) и положительным было направление оси $x$ вправо. Для того чтобы удержать пружину в сжатом (или растянутом) на длину $x$ состоянии, к ней необходимо приложить силу $F = kx$. По третьему закону Ньютона пружина действует на нас в обратном направлении с силой

$$F_s = -kx.$$

Знак минус появился потому, что направление силы $F_s$ противоположно направлению смещения $x$ (рис. 6.14, *б*). Согласно определению (6.13), изменение потенциальной энергии пружины между значениями координаты $x_1 = 0$ (недеформированная пружина) и $x_2 = x$ равно

$$\Delta U = U(x) - U(0) = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Здесь $U(x)$ – потенциальная энергия в точке $x$, так что $U(0)$ – это потенциальная энергия в точке $x = 0$. Удобно положить потенциальную энергию в этой точке равной нулю: $U(0) = 0$; тогда потенциальная энергия пружины, сжатой или растянутой на длину $x$ от положения равновесия, запишется в виде

$$U(x) = (1/2)kx^2 \quad \text{[упругая ПЭ]}. \tag{6.14}$$

В любом из предыдущих примеров потенциальной энергии – гравитационной или упругой – тело обладает потенциальной способностью совершить работу, хотя в действительности еще не совершает ее. Именно поэтому используется название потенциальная энергия. Из этих примеров очевидно также, что энергию можно накопить

для дальнейшего использования в форме потенциальной энергии. Кроме того, следует заметить, что если для кинетической энергии частицы существует единое, универсальное выражение $(1/2)mv^2$, то для потенциальной энергии такого выражения не имеется; аналитический вид потенциальной энергии зависит от рассматриваемых сил.

Потенциальная энергия всегда связана с той или иной силой, действующей со стороны одного тела на другое (например, Земля действует силой тяжести на падающий камень, сжатая пружина – на шарик и т. п.). Таким образом, потенциальная энергия это не то, что присуще самому телу: она всегда связана со взаимодействием двух (или большего числа) тел.

## 6.6. Другие виды энергии

Помимо кинетической и потенциальной энергии для обычных тел можно определить и другие виды энергии. К ним относятся электрическая энергия, ядерная энергия, внутренняя энергия, а также химическая энергия, запасенная в пище и топливе. С возникновением атомной теории перечисленные выше виды энергии стали рассматриваться как разновидности кинетической и потенциальной энергий на атомном или молекулярном уровнях. Например, согласно атомной теории, внутренняя энергия интерпретируется как кинетическая и (или) потенциальная энергия быстро движущихся молекул; когда тело нагревают, составляющие его молекулы начинают двигаться быстрее. С другой стороны, энергию, запасенную в пище и топливе (например, бензине), можно рассматривать как потенциальную энергию, обусловленную относительным расположением атомов внутри молекулы. Использовать эту энергию для совершения работы можно, если только ее высвободить (как правило, в ходе химической реакции). Это несколько напоминает сжатую пружину, которая также способна совершить работу, если отпустить ее.

Электрическую, магнитную и ядерную энергии можно также рассматривать с помощью понятий кинетической и потенциальной энергии. Эти виды энергии мы рассмотрим в последующих главах.

## 6.7. Преобразование энергии

Энергия может быть преобразована из одного вида в другой. Камень, поднятый высоко в воздух, обладает потенциальной энергией; когда он падает, его потенциальная энергия уменьшается, поскольку уменьшается его высота над Землей. Однако кинетическая энергия камня при этом увеличивается, поскольку возрастает его ско-

рость. Таким образом, потенциальная энергия камня преобразуется в его кинетическую энергию.

Во многих случаях при преобразовании энергии происходит передача энергии от одного тела другому. Так, потенциальная энергия, запасенная в сжатой пружине (на рис. 6.14, *б*), преобразуется в кинетическую энергию шарика (рис. 6.14, *в*). Потенциальная энергия воды в верхней части плотины при падении воды преобразуется в кинетическую энергию; у основания плотины кинетическая энергия воды может быть передана лопастям турбины и затем преобразована в электрическую энергию, как мы это увидим в гл. 30 (т. 2 настоящей книги). Потенциальная энергия, запасенная в натянутой тетиве лука, может быть преобразована в кинетическую энергию стрелы.

В каждом из этих примеров передача энергии от одного тела другому сопровождается совершением работы. Пружина совершает работу над шариком, вода – над лопастями турбины, тетива – над стрелой. Это наблюдение приводит нас еще к одному аспекту взаимосвязи работы и энергии:

**Работа совершается всякий раз, когда энергия одного тела передается другому[1)].**

Можно привести еще пример: человек бросает мяч или толкает продуктовую тележку. Совершенная при этом работа указывает на передачу энергии от человека (которую он в конечном счете получил из химической потенциальной энергии, запасенной в пище) к мячу или тележке.

Важность понятия энергии состоит в том, что энергия – сохраняющаяся величина. Иными словами, в любом процессе энергия может преобразовываться из одного вида в другой, но полная энергия не возрастает и не убывает. В этом состоит закон сохранения энергии – один из самых важных в физике; мы обсудим его в следующей главе.

## Заключение

Сила совершает работу над телом, когда эта сила передвигает тело на некоторое расстояние. Работа $W$, совершаемая постоянной силой $\mathbf{F}$ над телом при его перемещении на $\mathbf{d}$, дается выражением

$$W = Fd\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d},$$

где $\theta$ – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{d}$.

Последнее выражение называется скалярным произведением векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{d}$. Вообще *скалярное произведение* любых двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяется как $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$, где $\theta$ – угол между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

---

[1)] Здесь следовало бы все же уточнить, что это происходит в действительности не всегда, а лишь в тех случаях, когда передача энергии не происходит исключительно путем теплообмена (см. подробнее гл. 19). – *Прим. ред.*

Работа $W$, совершаемая переменной силой $\mathbf{F}$, действующей на частицу, которая перемещается из точки $a$ в точку $b$, дается выражением

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b F \cos\theta \, dl,$$

где $d\mathbf{l}$ – бесконечно малое перемещение частицы вдоль ее траектории (по направлению этот вектор совпадает в каждой точке с касательной к ней), а $\theta$ – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{F}$.

*Кинетическая энергия* частицы массой $m$, движущейся со скоростью $v$, определяется выражением

$$\text{КЭ} = (1/2)mv^2.$$

*Теорема о связи работы и энергии* гласит, что полная работа, совершаемая над телом результирующей силой, равна изменению кинетической энергии тела:

$$W = (1/2)mv_2^2 - (1/2)mv_1^2.$$

Тело может иметь *потенциальную энергию*, обусловленную его положением или формой. Примерами потенциальной энергии являются гравитационная, упругая, химическая, электрическая и ядерная энергии. В частности, гравитационная потенциальная энергия частицы массой $m$, находящейся вблизи поверхности Земли на высоте $y$ относительно некоторой точки отсчета, равна $mgy$. Упругая потенциальная энергия пружины с коэффициентом упругости $k$, сжатой или растянутой на длину $x$ из положения равновесия, равна $kx^2/2$. Потенциальная энергия определяется всегда относительно какой-либо точки отсчета, поскольку физический смысл имеют только изменения потенциальной энергии. Изменение потенциальной энергии $\Delta U$ тела, движущегося из точки 1 в точку 2 под действием силы $\mathbf{F}$, определяется как работа (взятая с обратным знаком), совершаемая этой силой:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

(Потенциальная энергия может быть определена не для всех, а лишь для некоторых сил; см. гл. 7.)

## Вопросы

1. В чем понятие работы, используемое в повседневной жизни, совпадает с понятием работы в физике? А в чем их отличие?
2. С помощью рычага, изображенного на рис. 6.15, можно поднять вверх тело, которое обычным способом человек поднять не может. Легко показать, что отношение силы $F_o$, действующей со стороны рычага на тело, к силе $F_i$, прикладываемой к противоположному концу рычага, равно отношению длины $l_i$ к длине $l_o$: $F_o/F_i = l_i/l_o$ (в пренебрежении силой трения и массой рычага). Покажите, что, хотя рычаг дает нам выигрыш в силе, он не приводит к уменьшению совершаемой работы.
3. Почему работа, совершаемая силами динамического трения, всегда отрицательна?
4. Женщина, плывущая против течения в реке с сильным течением, не перемещается относительно берега. Совершает ли она какую-либо работу? Если она перестанет плыть и, удержи-

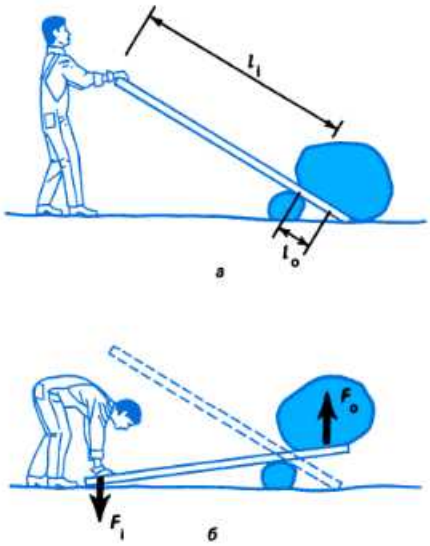



Рис. 6.15. Простой рычаг.

ваясь на поверхности воды, будет перемещаться только из-за течения реки, будет ли над ней совершаться работа?

5. Докажите, что $\mathbf{A} \cdot (-\mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

6. Зависит ли скалярное произведение двух векторов от выбора системы координат?

7. Может ли скалярное произведение двух векторов быть отрицательным? Если да, то укажите, какие условия при этом должны выполняться.

8. Если $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, то следует ли из этого, что $\mathbf{A} = \mathbf{B}$?

9. Совершает ли центростремительная сила какую-либо работу? Объясните.

10. Может ли сила нормальной реакции, перпендикулярная вектору перемещения тела, совершать работу? Объясните.

11. Имеются две пружины, которые различаются лишь жесткостью; пружина 1 жестче, чем пружина 2 ($k_1 > k_2$). Над какой пружиной совершается бóльшая работа, а) если их растягивают, прикладывая одинаковые силы; б) если их растягивают на одинаковую длину?

12. Может ли кинетическая энергия быть отрицательной? Объясните.

13. Зависит ли работа, совершаемая над телом, от выбора системы отсчета? Влияет ли это на теорему о связи работы и энергии?

14. Вычислите приближенно, на сколько изменится гравитационная потенциальная энергия, когда вы прыгаете на максимальную для вас высоту.

15. Опишите превращения энергии в случае, когда ребенок скачет верхом на палочке.

16. Опишите, как преобразуется энергия лыжника, когда он начинает скатываться с горы и через какое-то время останавливается, заехав в сугроб.

## Задачи

### Раздел 6.1

1. (I) Женщина массой 48 кг поднимается по лестнице на высоту 4,5 м. Какую работу при этом она совершает?

2. (I) С какой высоты должен упасть забивающий сваю груз массой 37,8 кг, чтобы совершить работу $5{,}60 \cdot 10^4$ Дж?

3. (I) Работа двигателя автомобиля, проехавшего 1,25 км с постоянной скоростью, равна $5{,}8 \cdot 10^4$ Дж. Чему равна средняя сила трения (любого происхождения), действующая на автомобиль?

4. (I) Какую работу проделала лошадь, перевезя тележку массой 300 кг на расстояние 50 км вдоль горизонтальной дороги, если эффективный коэффициент трения был 0,060? Считайте, что лошадь тянет тележку с постоянной силой в горизонтальном направлении.

5. (I) На полу находится ящик массой 59 кг. Какую работу нужно затратить, чтобы передвинуть ящик с постоянной скоростью а) на 12,0 м в горизонтальном направлении по полу, если сила трения равна 150 Н; б) на 12,0 м вертикально вверх?

6. (I) Чему равен переводный коэффициент между джоулями и эргами?

7. (II) Какая работа требуется для перемещения с постоянной скоростью автомобиля массой 1250 кг на 115 м вверх по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 13,5°? а) пренебрегите трением; б) считайте, что коэффициент трения равен 0,090.

8. (II) Десять кирпичей, каждый массой 1,5 кг и толщиной 6,0 см лежат широкой своей частью на горизонтальном столе. Какую работу нужно затратить, чтобы положить их друг на друга?

9. (II) Рассчитайте полную работу, совершаемую вертолетом массой $M$, который поднимается на высоту $h$ с ускорением, направленным вверх и равным $0{,}10g$.

10. (II) или (III) Пианино массой 300 кг скатывают по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 25°, на расстояние 4,5 м, подталкивая его сзади и сообщая тем самым ему ускорение. Эффективный коэффициент трения равен 0,39. Рассчитайте а) полную работу, совершаемую над пианино; б) работу, совершаемую над пианино толкающим его человеком;

в) работу, совершаемую над пианино гравитационным полем.

Раздел 6.2

11. (I) Покажите, что

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

и

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0,$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей $x$, $y$ и $z$ прямоугольной системы координат.

12. (I) Покажите, что для любого вектора $\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$ справедливы соотношения

$$V_x = \mathbf{i}\cdot\mathbf{V}, \quad V_y = \mathbf{j}\cdot\mathbf{V}, \quad V_z = \mathbf{k}\cdot\mathbf{V}.$$

13. (I) Вектор $\mathbf{V}_1$ направлен вдоль оси $z$, и его абсолютная величина $V_1 = 36$. Вектор $V_2$ лежит в плоскости $xz$ и составляет угол 25° с осью $x$, а его абсолютная величина равна $V_2 = 55$. Чему равно скалярное произведение $\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2$?

14. (I) Найдите угол между векторами $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

15. (I) Докажите, что $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$, используя формулу (6.2) и дистрибутивный закон (который будет доказан в задаче 23).

16. (II) Пусть $\mathbf{A} = 4{,}0\mathbf{i} - 3{,}5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -1{,}7\mathbf{i} + 8{,}1\mathbf{j} + 4{,}6\mathbf{k}$ и $\mathbf{C} = 6{,}3\mathbf{i} - 2{,}2\mathbf{j}$. Вычислите а) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C})$; б) $(\mathbf{A} + \mathbf{C})\cdot\mathbf{B}$; в) $(\mathbf{B} + \mathbf{A})\cdot\mathbf{C}$.

17. (II) Предположим, что сила $\mathbf{F}$ на рис. 6.9 направлена вдоль касательной к окружности так, что в любой момент времени она составляет угол $\theta$ с горизонтальной осью. Рассчитайте работу, которую должна совершить эта сила, чтобы переместить груз с небольшой постоянной скоростью из нижнего положения на высоту $y_0$.

18. (II) Пусть даны векторы $\mathbf{A} = 5{,}2\mathbf{i} - 3{,}8\mathbf{j}$ и $\mathbf{B} = 3{,}6\mathbf{i} + 5{,}1\mathbf{j}$. Найдите вектор $\mathbf{C}$, который лежит в плоскости $xy$ и перпендикулярен вектору $\mathbf{B}$ и скалярное произведение которого с вектором $\mathbf{A}$ равно 16,4.

19. (II) Покажите, что если два вектора имеют одинаковую абсолютную величину, то их сумма будет перпендикулярна их разности.

20. (II) Пусть дан вектор $\mathbf{V} = 6{,}8\mathbf{i} + 12{,}0\mathbf{j} - 4{,}7\mathbf{k}$. Чему равны углы, которые он составляет с осями $x$, $y$ и $z$?

21. (II) С помощью формулы для скалярного произведения докажите теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

где $a$, $b$ и $c$ – длины сторон треугольника, $\theta$ – угол, лежащий против стороны $c$.

22. (II) Векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ лежат в плоскости $xy$, и их скалярное произведение равно 24,6. Если вектор $\mathbf{A}$ составляет угол 30° с осью $x$ и его длина равна 11,7, то что можно сказать про вектор $\mathbf{B}$?

23. (III) Покажите, что скалярное произведение обладает свойством дистрибутивности, т.е. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$. (*Подсказка*: используйте диаграмму, на которой изобразите эти три вектора лежащими в плоскости и укажите на диаграмме скалярные произведения.)

Раздел 6.3

24. (I) Коэффициент жесткости пружины равен $k = 74$ Н/м. Используя график, такой, как на рис. 6.8, определите работу, совершаемую при растягивании пружины от $x = 3{,}0$ см до $x = 5{,}5$ см. (Считайте, что $x = 0$ соответствует нерастянутому состоянию пружины.)

25. (I) Вращая педали велосипеда, велосипедист во время каждого нажатия на педали действует на них с силой 85 Н, направленной вниз. Если диаметр окружности, описываемой каждою педалью, равен 36 см, то какая работа совершается при каждом нажатии на педаль?

26. (II) На частицу действует сила, которая линейно возрастает от нулевого значения при $x = 0$ до 24,0 Н при $x = 3{,}0$ м. Она остается постоянной и равной 24,0 Н при изменении $x$ от 3,0 до 8,0 м, а затем линейно уменьшается до нулевого значения при $x = 11{,}0$. Определите графически работу, совершенную силой при перемещении частицы от $x = 0$ до $x = 11{,}0$ м, рассчитав площадь под кривой зависимости $F$ от $x$.

27. (II) Покажите, что ответ в примере 6.1 не изменится, если профиль горы будет иметь не такой вид, как на рис. 6.3, а более сложный (рис. 6.16). Иными словами, покажите, что работа силы тяжести зависит только от высоты горы, а не от ее формы или пройденного пути.

28. (II) Сила, необходимая для того, чтобы удержать пружину в сжатом состоянии, когда длина ее уменьшена на величину $x$ по сравнению с ее нормальной длиной, записывается в виде $F = kx + ax^3 + bx^4$. Какая работа совершается при сжатии пружины на величину $x$?

29. (II) Предположите, что на рис. 6.6, *а* шкала расстояний линейна и что $l_a = 4{,}0$ м, а $l_b = 28{,}5$ м. Оцените приближенно работу, совершаемую этой силой при перемещении тела массой 25 кг из точки $l_a$ в точку $l_b$.

30. (III) Космический корабль массой 1400 кг падает вертикально с высоты 2500 км над поверхностью Земли. а) Найдите работу, совершаемую при этом силой тяжести, построив график зависимости силы $F$ от расстояния $r$ между космическим кораблем и центром Земли [с помощью формулы (5.1)]; определите из

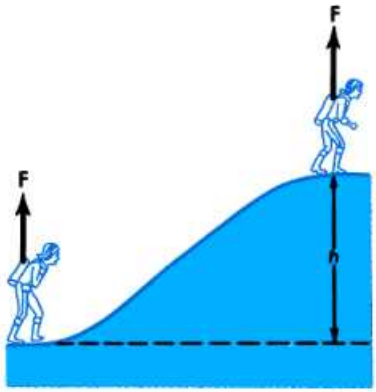



Рис. 6.16.

этого графика работу с точностью до 3%. б) Повторите расчет, используя интегральное исчисление.

Раздел 6.4

**31.** (I) Атом углерода массой $1{,}99 \cdot 10^{-26}$ кг имеет кинетическую энергию $4{,}64 \cdot 10^{-19}$ Дж. Чему равна скорость его движения?

**32.** (I) Какая совершается работа, когда автомобиль массой 1000 кг, имевший скорость 90 км/ч, тормозится до 30 км/ч?

**33.** (I) Чему равна работа, совершаемая при ускорении электрона ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг) из состояния покоя до скорости $2{,}10 \cdot 10^{6}$ м/с?

**34.** (I) а) Саранча массой 3,0 г в прыжке развивает скорость 3,40 м/с. Чему равна ее кинетическая энергия при этой скорости? б) Если саранча преобразует энергию с КПД = 40%, то сколько энергии она затрачивает на этот прыжок?

**35.** (I) Автомобиль массой 1250 кг, движущийся по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 40$ км/ч, сталкивается с горизонтальной пружиной и, сжимая ее, останавливается через 2,5 м. Чему равен коэффициент упругости пружины?

**36.** (I) Бейсбольный мяч массой $m = 140$ г, движущийся со скоростью 30 м/с, попав в руку ловящего его игрока, сдвигает ее назад на 35 см. Чему равна средняя сила, действующая на руку игрока со стороны мяча?

**37.** (II) Сила, необходимая для сжатия горизонтальной пружины на величину $x$, записывается в виде $F = 230x + 2{,}7x^3$, где $x$ выражается в метрах, а $F$ – в ньютонах. Если пружина была сжата на 2,0 м, то какую скорость она сообщит (после того, как ее отпустят) помещенному перед ней шарику массой 3,0 кг?

**38.** (II) Если скорость автомобиля удвоится, то во сколько раз увеличится его минимальный тормозной путь (считайте, что, кроме этого, ничего не изменится)?

**39.** (II) Масса одного автомобиля в два раза больше массы другого, а его кинетическая энергия равна половине кинетической энергии второго автомобиля. Когда оба автомобиля увеличили свою скорость на 3,0 м/с, их кинетическая энергия стала одинаковой. Каковы были начальные скорости каждого из автомобилей?

**40.** (II) Груз массой 130 кг поднимается вертикально вверх на высоту 30 м одиночным тросом с ускорением $a = 0{,}15g$. Вычислите а) натяжение троса; б) полную работу, совершаемую над грузом; в) работу, совершаемую тросом над грузом; г) работу, совершаемую над грузом силой тяжести; д) конечную скорость груза, считая, что его начальная скорость равна нулю.

**41.** (II) Трос лифта обрывается, когда лифт массой 750 кг находится на высоте 25 м над мощной пружиной ($k = 4{,}0 \cdot 10^4$ Н/м), находящейся на дне шахты лифта. Вычислите: а) работу, совершаемую силой тяжести, действующей на лифт до того, как он ударится о пружину; б) скорость лифта сразу перед соударением с пружиной; в) величину сжатия пружины (заметим, что при этом совершается работа как пружиной, так и силой тяжести).

**42.** (III) Чему равен коэффициент упругости пружины $k$, если с ее помощью нужно остановить автомобиль массой 1500 кг, который ехал со скоростью 90 км/ч, чтобы пассажиры автомобиля испытали ускорение не более $1{,}5g$?

Раздел 6.5

**43.** (I) Коэффициент упругости пружины $k$ равен 320 Н/м. Насколько нужно сжать пружину, чтобы в ней была запасена энергия 50 Дж?

**44.** (I) Обезьянка массой 4,2 кг перепрыгивает с одной ветки на другую, расположенную на 1,7 м выше первой. На сколько при этом изменится потенциальная энергия обезьянки?

**45.** (I) Человек ростом 1,80 м поднимает книгу массой 230 г на высоту 2,15 м над полом. Чему равна потенциальная энергия книги относительно а) пола; б) макушки человека? в) Какую человек совершит работу в соответствии с ответами на вопросы «а» и «б»?

**46.** (I) Путешественник массой 65 кг начинает восхождение с высоты 1500 м и покоряет вершину 2600 м. а) На сколько при этом изменится потенциальная энергия путешественника? б) Какая минимальная работа совершается при этом? в) Может ли реально совершенная рабо-

та быть больше этого значения? Объясните.

47. (II) а) Пружина с коэффициентом упругости $k$ сжата относительно своего недеформированного состояния на величину $x_0$. На сколько изменится потенциальная энергия пружины, если ее сжать на величину $x$ относительно недеформированного состояния? б) Пружину *растянули* на расстояние $x_0$ относительно недеформированного состояния. Чему равно изменение потенциальной энергии пружины по сравнению с тем, когда она была сжата на $x_0$ относительно недеформированного состояния?

48. (II) Сила электростатического притяжения, действующая между двумя заряженными частицами, изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между ними: $F = C/r^2$, где $C$ – постоянная. Определите а) работу, когда расстояние между частицами увеличивается от $r_1$ до $r_2 = r_1 + \Delta r$; б) потенциальную энергию $U$ как функцию величины $r$, полагая $U = 0$ при $r = \infty$.

49. (III) Велосипедист массой $m$ действует на педали со средней силой $0{,}90mg$. Педали велосипеда при вращении описывают окружности радиусом 18 см, радиусы колес равны 34 см, а передняя и задняя звездочки, на которых крепится цепь, имеют 42 и 27 зубцов соответственно. Определите максимальную крутизну горы, на которую велосипедист может въехать с постоянной скоростью. Считайте, что масса велосипеда равна 12 кг, а масса велосипедиста 60 кг. Пренебрегите трением. Предположите, что сила прикладывается к педалям а) вертикально вниз; б) по касательной к окружности, по которой движутся педали.

Численные расчеты на программируемом микрокалькуляторе (см. разд. 2.10)

*50. (II) Результирующая сила, действующая на движущуюся по прямой частицу массой 480 г, измеряется через каждый интервал длиной 10 см, начиная с точки $x = 0{,}0$. Полученные значения $F$ равны: 26,0; 28,5; 35,6; 29,6; 32,8; 40,1; 46,6; 42,2; 48,8; 52,6; 55,8; 60,2; 60,6; 58,2; 53,7; 50,3; 45,6; 45,2; 43,2; 38,9; 35,1; 30,8; 27,2; 21,0; 22,2; 18,6. Определите полную работу, совершаемую над частицей при ее полном перемещении.

*51. (III) Сила, действующая на частицу массой 150 г, записывается в виде

$$F = \frac{848}{x^2 + 14{,}0x},$$

где $F$ измеряется в ньютонах, а $x$ – в метрах. Для приближенного расчета (с точностью до 2%) работы, совершаемой силой при перемещении частицы из точки с координатой $x = 2{,}00$ м в точку с координатой $x = 6{,}50$ м, используйте методы численного интегрирования. (*Подсказка*: при расчетах воспользуйтесь программируемым калькулятором или компьютером.)

*52. (III) В задаче 54 гл. 4 оцените (с точностью до 2%) полную работу, совершаемую над прыгающим лыжником, за промежуток времени 15,0 с.

# 7 Сохранение энергии

В настоящей главе мы продолжим рассмотрение работы и энергии, начатое в предыдущей главе. Эти величины, особенно энергия, играют важную роль, и это в конечном счете объясняется свойством сохранения энергии: полная энергия сохраняется постоянной в любых процессах. Существование величин, сохранение которых подтверждается самыми точными современными экспериментами, является одним из самых замечательных свойств природы. Сохранение энергии – это один из великих универсальных и объединяющих законов науки.

Благодаря этому закону мы получаем еще один метод решения задач. Существует много случаев, когда решить ту или иную задачу, основываясь на законах Ньютона, трудно или невозможно (силы могут быть неизвестны или недоступны для измерений). Тогда мы можем использовать закон сохранения энергии, а в некоторых случаях и другие законы сохранения (например, закон сохранения импульса), которые будут рассмотрены в последующих главах.

## 7.1. Консервативные силы и теорема о связи работы и энергии

Силы можно разделить на два класса – консервативные и неконсервативные силы. Любая сила называется **консервативной**, если а) *она зависит только от положения тела, на которое действует,* и б) *производимая ею работа над частицей, перемещающейся между любыми двумя точками в пространстве, зависит только от начального и конечного положений частицы* и, следовательно, *не зависит от ее траектории.*

Примером консервативной силы является сила тяжести. В разд. 6.5 мы показали, что работа, совершаемая силой тяжести $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ при перемещении тела (вблизи поверхности Земли) из одной точки в другую, не зависит от пути, по которому перемещалась частица. Например, при вертикальном подъеме груза с высоты $y_1$ на высоту $y_2$ сила тяжести совершает работу, которая будет одной и той же независимо от того, по какой кривой перемещается при этом частица. Следовательно, сила тяжести является консервативной.

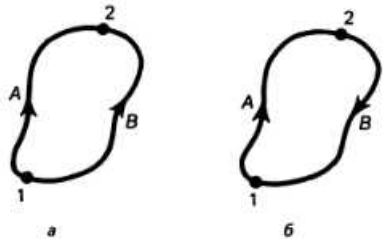



Рис. 7.1. *а* – частица перемещается из точки 1 в точку 2 двумя различными путями *A* и *B*; *б* – частица перемещается по замкнутому контуру из точки 1 в точку 2 по пути *A* и обратно из точки 2 в точку 1 по пути *B*.

Имеется еще одно эквивалентное определение *консервативной силы: это такая сила, работа которой над телом при его перемещении по любой замкнутой траектории, когда тело возвращается в исходное положение, всегда равна нулю.* (Такое перемещение можно назвать «кругосветным путешествием».) Чтобы доказать, что это определение эквивалентно данному ранее, рассмотрим частицу, перемещающуюся из точки 1 в точку 2 по двум путям, обозначенным *A* и *B* на рис. 7.1, *а*. Если мы предположим, что на частицу действует консервативная сила, то, согласно первому определению, работа, совершаемая ею при перемещении частицы по пути *A*, такая же, как и по пути *B*. Обозначим эту работу по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 через *W*. Пусть теперь частица движется по замкнутому пути (рис. 7.1, *б*). Из точки 1 в точку 2 частица движется по пути *A*, причем сила совершает работу *W*. Далее частица возвращается из точки 2 в точку 1 по пути *B*. Какую работу совершает при этом сила? При перемещении частицы из точки 1 в точку 2 по пути *B* производится работа, которая по определению равна $\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$. При обратном движении частицы из точки 2 в точку 1 сила $\mathbf{F}$ в каждой точке та же самая, что и при перемещении из 1 в 2, но при этом направление $d\mathbf{l}$ меняется на обратное. Следовательно, в каждой точке произведение $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ имеет противоположный знак, т. е. работа на обратном пути из точки 2 в точку 1 равна $-W$. Таким образом, полная работа, совершаемая при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 и обратно, равна $W + (-W) = 0$, что доказывает эквивалентность двух приведенных выше определений консервативной силы[1)].

Второе определение консервативной силы выявляет важное ее свойство: *работа консервативной силы является обратимой* в том смысле, что если на каком-либо участке пути *частицей* совершается работа над другими телами, то на обратном пути на этом участке будет совершена точно такая же работа *над* нашей частицей.

Выше отмечалось, что сила тяжести консервативна. Нетрудно показать (см. задачи в настоящей главе), что сила упругости ($F = kx$) также консервативна. Но не все

[1)] Для полного доказательства эквивалентности двух определений требуется еще доказать обратное утверждение, т. е. что из второго определения следует первое.– *Прим. ред.*

силы консервативны. К *неконсервативным* относится сила трения. Работа, совершаемая при перемещении тяжелого ящика вдоль горизонтального пола, равна произведению силы трения на полный *путь, пройденный* ящиком, поскольку сила трения в каждой точке траектории направлена точно против движения. Следовательно, работа силы трения при перемещении тела из одной точки в другую вдоль прямой, соединяющей эти точки, меньше, чем работа, совершаемая при перемещении тела по искривленной траектории, например по полуокружности.

Заметим также, что в случае, когда мы имеем дело с трением скольжения, сила трения всегда направлена в сторону, противоположную перемещению, и работа, совершаемая над телом при его перемещении, отрицательна. Поэтому, когда тело перемещается по замкнутому пути, например из точки 1 в точку 2 и обратно из точки 2 в точку 1, полная работа, совершаемая силой трения, никогда не будет равна нулю – она всегда отрицательна. Таким образом, работа, совершаемая неконсервативной силой, не является обратимой, как в случае консервативной силы.

То, что мы делаем различие между консервативными и неконсервативными силами, весьма важно и объясняется главным образом тем, что *потенциальная энергия может быть определена только для консервативной силы*. В этом можно убедиться из определения потенциальной энергии [формула (6.13)]:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Интеграл здесь можно вычислить, только если $\mathbf{F}$ является функцией положения. Иными словами, интеграл

$$\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l}$$

(который равен выполненной работе) имеет единственное значение, если он зависит лишь от положения начальной и конечной точек 1 и 2 и не зависит от пути интегрирования. В случае консервативной силы этот интеграл будет зависеть не только от пространственного положения точек 1 и 2, но и от контура интегрирования, соединяющего точки 1 и 2. Величина $\Delta U$ при этом зависела бы от пути, и нельзя было бы утверждать, что $U$ имеет определенное значение в каждой точке пространства. Отсюда следует, что для неконсервативной силы понятие потенциальной энергии теряет смысл.

В одномерном случае, когда консервативная сила может быть записана как функция одной пространственной координаты (например, $x$), потенциальная энергия запишется в виде

$$U(x) = -\int F(x)\,dx.$$

Это выражение показывает, каким образом, если известна сила $F(x)$, можно вычислить потенциальную энергию

$U(x)$. Если, наоборот, задана $U(x)$, то, обращая это выражение, можно вычислить силу $F(x)$. Для этого необходимо взять производную от обеих частей, вспоминая, что интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями:

$$\frac{d}{dx}\int F(x)\,dx = F(x).$$

Таким образом,

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{7.1}$$

В трехмерном случае это соотношение запишется в виде

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Здесь производные $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ называются частными производными; например, производная $\partial/\partial x$ означает, что, хотя потенциальная энергия $U$ может быть функцией от $x$, $y$ и $z$ [что записывается как $U(x, y, z)$], производная берется только по переменной $x$, а все остальные переменные считаются при этом постоянными. Проекции силы $\mathbf{F}$ записываются следующим образом:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

**Пример 7.1.** Предположим, что $U(x) = -ax/(b^2 + x^2)$, где $a$ и $b$ – постоянные. Найдите зависимость $F$ от переменной $x$.

**Решение.** Так как $F(x) = -dU/dx$,

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{ax}{b^2 + x^2}\right) = \frac{a}{b^2 + x^2} - \frac{ax}{(b^2 + x^2)^2}\cdot 2x = \frac{a(b^2 - x^2)}{(b^2 + x^2)^2}.$$

Теперь мы можем сформулировать **теорему о связи работы и энергии** (обсуждавшуюся выше в разд. 6.4), включив в нее потенциальную энергию. Предположим, что на тело действуют несколько сил и некоторые из них являются консервативными: для этих консервативных сил можно записать потенциальную энергию в виде функции $U$. Тогда *работа $W'$, совершаемая всеми остальными силами, действующими на тело, будет равна суммарному изменению кинетической и потенциальной энергий тела:*

$$W' = \Delta\text{КЭ} + \Delta U. \tag{7.2}$$

То, что это так, можно показать, вспоминая формулы (6.13) и (6.7):

$$\Delta U = -\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -W_c;$$

здесь $-W_c$ есть отрицательная работа, совершаемая консервативными силами. Если в правую часть формулы (7.2) вместо изменения потенциальной энергии $\Delta U$ подставить его значение $-W_c$ и затем перенести этот член в левую часть, то получим

$$W' + W_c = \Delta\text{КЭ},$$

где сумма $W' + W_c$ представляет собой работу, совершаемую *всеми* силами, действующими на тело, т. е. *полную работу*. Последнее выражение есть не что иное, как теорема о связи работы и энергии в ее первоначальном виде [формула (6.9)]. Таким образом, мы доказали справедливость выражения (7.2).

Необходимо подчеркнуть, что в формулу (7.2) должны быть включены все силы, действующие на тело: либо в правую часть – в изменение потенциальной энергии, либо в левую часть – в $W'$ (но не в обе части одновременно!). Безразлично, будет ли консервативная сила рассматриваться как совершающая работу (и, следовательно, включаться в $W'$) или учитываться через изменение потенциальной энергии, в то время как неконсервативные силы (такие, как трение) должны быть включены в $W'$.

## 7.2. Механическая энергия и ее сохранение

Рассмотрим теперь систему частиц, между которыми действуют лишь консервативные силы и в системе возможен переход энергии из кинетической в потенциальную и обратно.

Мы рассматриваем именно систему частиц, а не одиночную частицу, поскольку изолированная частица не имеет потенциальной энергии: потенциальная энергия связана с силой, действующей на частицу, а эта сила вызывается всегда каким-то другим телом. Таким образом, потенциальная энергия – это свойство системы как целого. Потенциальная энергия системы, состоящей из пружины и закрепленного на ее конце тела массой $m$, при растяжении пружины на длину $x$ увеличивается на $kx^2/2$; эта энергия обусловлена силой упругой деформации $F = -kx$, действующей со стороны пружины на тело. Аналогично, когда тело поднимается на высоту $y$ над поверхностью Земли, потенциальная энергия изменяется на величину $mgy$; здесь система состоит из тела и Земли.

Предположим, что мы имеем консервативную систему (это означает, что в ней действуют только консервативные силы). Это может быть, например, пружина с закрепленным на ее конце телом массой $m$ или тело, помещенное в поле тяготения Земли. Поскольку в системе действуют только консервативные силы, в формуле (7.2) все силы можно включить только в член, описывающий потенциальную энергию. Следовательно, $W' = 0$, и мы

имеем

$$\Delta КЭ + \Delta U = 0 \quad \text{[только консервативные силы]}. \qquad (7.3)$$

Отсюда следует, что в любом процессе, если кинетическая энергия увеличивается на какую-то величину, потенциальная энергия уменьшается на такую же величину, и обратно. Определим **полную механическую энергию** $E$ системы как сумму кинетической энергии[1] тела массой $m$ и потенциальной энергии $U$:

$$E = (1/2)mv^2 + U.$$

При этом для консервативной системы из формулы (7.3) получаем

$$E = (1/2)mv^2 + U = \text{const} \quad \text{[только консервативные силы]}. \qquad (7.4)$$

Иными словами, любое увеличение или уменьшение кинетической энергии сопровождается соответствующим уменьшением или увеличением потенциальной энергии $U$, т. е. *полная механическая энергия консервативной системы сохраняется постоянной*. Это называется **законом сохранения механической энергии в системе, где действуют только консервативные силы.** Теперь становится понятным смысл названия «консервативные силы»: для таких сил механическая энергия сохраняется[2]. Сохранение механической энергии – это частный случай более общего закона сохранения энергии (мы рассмотрим его в следующем разделе), который справедлив для любого вида энергии.

Обозначим через $v_1$ и $U_1$ соответственно скорость и потенциальную энергию в некоторый момент времени, а через $v_2$ и $U_2$ те же величины в другой момент времени. Тогда выражение (7.4) можно переписать в виде

$$(1/2)mv_1^2 + U_1 = (1/2)mv_2^2 + U_2 \quad \text{[консервативная система]}. \qquad (7.5)$$

Это просто другая запись того факта, что сумма кинетической и потенциальной энергий консервативной системы остается постоянной величиной. Выражение (7.5) еще раз подтверждает, что для потенциальной энергии не имеет значения выбор начала отсчета: добавляя постоянную величину к $U$ (как обсуждалось в разд. 6.5), мы просто добавляем к обеим частям записанного выше выражения одинаковые постоянные члены, которые сокращаются. Постоянная добавка не влияет также и на силу $F = -dU/dx$ в формуле (7.1), поскольку, дифференцируя

---

[1] При этом мы предполагаем, что в системе не имеется другой существенной кинетической энергии. Например, если в случае тела массой $m$, закрепленного на конце пружины, мы не можем пренебречь массой пружины, то необходимо учесть еще кинетическую энергию пружины.

[2] От англ. conserve – сохранять, сберегать. – *Прим. ред.*




Рис. 7.2. При падении камня его потенциальная энергия переходит в кинетическую.

постоянную величину, мы получаем нуль. Вследствие того что мы имеем дело лишь с изменением потенциальной энергии, абсолютная величина $U$ не играет роли.

Рассмотрим некоторые примеры использования закона сохранения механической энергии для консервативных систем. Таким образом, мы пренебрегаем трением и другими неконсервативными силами. Рассмотрим сперва камень, падающий под действием силы тяжести (рис. 7.2). В исходном положении он обладает только потенциальной энергией. При падении камня потенциальная энергия уменьшается, но увеличивается кинетическая энергия камня, которая компенсирует это уменьшение таким образом, что сумма этих двух энергий остается постоянной. В любой точке вдоль пути полная механическая энергия равна $(1/2)mv^2 + mgy$, где $y$ – высота над поверхностью Земли, а $v$ – скорость камня на этой высоте. Если индексом 1 отметить все физические величины в какой-либо точке вдоль траектории камня, скажем в его начальном положении, а индексом 2 – величины в другой точке вдоль траектории, то в соответствии с формулой (7.5) мы получим

$$(1/2)mv_1^2 + mgy_1 = (1/2)mv_2^2 + mgy_2$$

[только сила тяжести]. (7.6)

Для того чтобы показать практическую значимость этого равенства, предположим, что в начальный момент времени камень находился на высоте $y_1 = 3{,}0$ м (рис. 7.2), и вычислим его скорость в тот момент времени, когда при своем падении он достигнет высоты 1,0 м над поверхностью Земли. При этом, поскольку $v_1 = 0$ в момент времени, когда камень выпускают из рук, $y_2 = 1{,}0$ м и $g = 9{,}8$ м/с$^2$, из (7.6) находим

$$0 + (m)(9{,}8\text{ м/с}^2)(3{,}0\text{ м}) = (1/2)mv_2^2 + (m)(9{,}8\text{ м/с}^2)(1{,}0\text{ м}).$$

Отсюда, сокращая массу $m$, находим $v_2^2 = 2[(9{,}8\text{ м/с}^2) \times (3{,}0\text{ м}) - (9{,}8\text{ м/с}^2)(1{,}0\text{ м})] = 39{,}2\text{ м}^2/\text{с}^2$ и $v_2 = \sqrt{39{,}2} = 6{,}3$ м/с.

Равенство (7.6) можно применять для любого тела, движущегося под действием силы тяжести без трения, поскольку, как мы показали, потенциальная энергия зависит только от положения тела (в данном случае от высоты $y$, на которой находится тело) и не зависит от того, по какому пути движется тело. Например, автомобиль на рис. 7.3, находившийся в состоянии покоя на вершине холма, съезжает с выключенным двигателем без трения к подножию холма, а затем взбирается по инерции на соседний холм. В исходном положении автомобиля мы имеем лишь потенциальную энергию. По мере того как автомобиль спускается с холма, потенциальная энергия уменьшается, но увеличивается кинетическая энергия автомобиля, так что сумма энергий сохраняется постоянной. У подножия холма автомобиль имеет максимальную кинетическую энергию и вкатывается по инерции на другой холм; при этом кинетическая энергия переходит об-



Рис. 7.3. Иллюстрация закона сохранения энергии на примере автомобиля, съезжающего с холма.

ратно в потенциальную. Когда автомобиль снова остановится, вся энергия станет только потенциальной. Поскольку потенциальная энергия пропорциональна высоте, на которой находится автомобиль, а энергия автомобиля сохраняется, автомобиль остановится на высоте, равной первоначальной. В случае когда высота обоих холмов одинакова, автомобиль остановится, едва достигнув вершины второго холма. Если же высота второго холма меньше, то не вся кинетическая энергия автомобиля преобразуется в потенциальную и автомобиль пересечет вершину и скатится с противоположного склона второго холма. Если второй холм выше первого, то автомобиль сможет достичь лишь высоты, равной высоте первого холма. При этом ни профиль склона холма, ни его крутизна не играют роли, так как потенциальная энергия зависит только от высоты.

**Пример 7.2.** Предположив, что высота холма на рис. 7.3 равна 40 м, вычислите а) скорость автомобиля у подножья холма и б) высоту, на которой скорость автомобиля равна половине этой скорости.

**Решение.** а) Применяя закон сохранения механической энергии, в формуле (7.6) положим $v_1 = 0$, $y_1 = 40$ м и $y_2 = 0$. Тогда

$$0 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(40\ \text{м}) = (1/2)mv_2^2 + 0.$$

Сокращая $m$, находим $v_2 = 28$ м/с.

б) Воспользуемся той же формулой, но учтем, что $v_2 = 14$ м/с и $y_2$ – неизвестная величина:

$$0 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(40\ \text{м}) = (1/2)(14\ \text{м/с})^2 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(y_2).$$

Сокращая множитель $m$, отсюда находим $y_2 = 30$ м. Таким образом, скорость 14 м/с автомобиль будет иметь на высоте 30 м, отсчитываемой по вертикали относительно самой нижней точки его траектории как в случае, когда автомобиль съезжает с левого холма, так и в случае, когда он въезжает на правый холм.

В легкой атлетике существует множество интересных примеров, иллюстрирующих закон сохранения энергии. Одним из них является прыжок с шестом, как показано на рис. 7.4. С энергетической точки зрения в процессе прыжка происходит следующее: кинетическая энергия бегущего легкоатлета превращается в упругую потенциальную энергию, связанную с изгибом шеста, а при отрыве ног легкоатлета от земли – в гравитационную потенциальную энергию; затем, когда шест распрямляется, человек достигает планки, и вся энергия переходит в гравитационную потенциальную энергию. (Мы пренебрегаем небольшой скоростью прыгуна в момент преодоления планки.) Шест не производит никакой работы, но он выступает как очень удобное приспособление, *запасающее* энергию, и таким

образом способствует переходу кинетической энергии в потенциальную энергию гравитационного поля, что мы и получаем в конечном счете. Энергия, которая требуется для преодоления планки, зависит от того, как высоко должен располагаться центр масс[1] (ЦМ) прыгуна. Изгибая свое тело, прыгун с шестом может добиться того, что его ЦМ будет располагаться столь низко, что фактически окажется немного ниже планки; тем самым прыгун способен преодолеть более высокую планку, чем это было бы возможно при ином способе прыжка.

**Пример 7.3.** Вычислите кинетическую энергию и скорость прыгуна с шестом массой 70 кг, необходимую для того, чтобы он преодолел планку на высоте 5,0 м. Считайте, что ЦМ прыгуна перед прыжком располагается на высоте 0,90 м над поверхностью земли и достигает максимальной высоты на уровне планки.

**Решение.** Приравняем полную энергию прыгуна, которую он имеет непосредственно перед тем, как воткнуть шест в землю (шест начинает при этом изгибаться и запасать потенциальную энергию), полной энергии, которой он обладает в момент преодоления планки (при этом мы пренебрегаем малой величиной кинетической энергии). Таким образом,

$$(1/2)mv^2 + 0 = 0 + mgy$$

и

$$КЭ = (1/2)mv^2 = mgy =$$
$$= (70\text{ кг})(9{,}8\text{ м/с}^2)(4{,}1\text{ м}) = 2{,}8 \cdot 10^3\text{ Дж}.$$

Искомая скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{2КЭ}{m}} = \sqrt{\frac{2(2800\text{ Дж})}{70\text{ кг}}} = 8{,}9\text{ м/с}.$$

Заметим, что при рассмотрении простого случая падающего камня [см. сразу после формулы (7.6)] мы могли бы использовать уравнения кинематики (2.9), справедливые при постоянном ускорении, но их нельзя использовать для решений примеров 7.2 и 7.3, поскольку в этих случаях ускорение не является постоянным. Эти примеры продемострировали нам высокую эффективность применения закона сохранения энергии. Несмотря на то что этот закон соответствует второму закону Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (и может быть выведен из него)[2], его применение для решения задач позволило избежать необходимости использовать силы и ускорения, которые в этих случаях изменяются сложным образом.

В качестве другого примера сохранения механической энергии рассмотрим груз массой $m$, укрепленный на пружине (собственной массой которой мы пренебрегаем) с коэффициентом упругости $k$. Груз обладает в любой

[1] Центр масс (ЦМ) – это такая точка, в которой можно считать сосредоточенной всю массу тела. Центр масс используется для описания поступательного движения тела, которое при этом рассматривается как материальная точка (подробнее об этом см. в гл. 8).

[2] Это уже сделано с помощью теоремы о связи работы и энергии (разд. 6.4, 7.1 и 7.2).

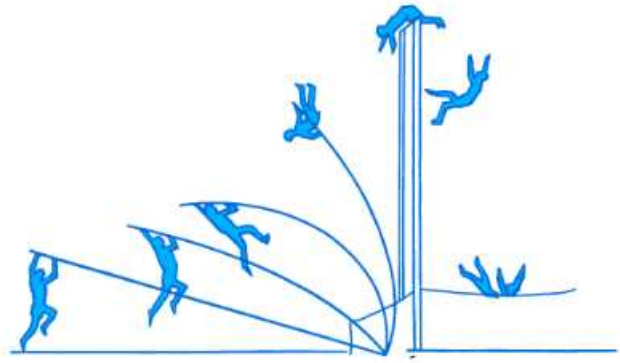


Рис. 7.4. Преобразование энергии при выполнении прыжка с шестом.

момент скоростью $v$, причем потенциальная энергия системы равна $kx^2/2$, где $x$ – смещение пружины из своего недеформированного состояния. Если на груз не действует ни сила трения, ни какая-либо другая сила, то закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{[упругая сила]}; \qquad (7.7)$$

здесь индексы 1 и 2 относятся к скорости и смещению в два различных момента времени.

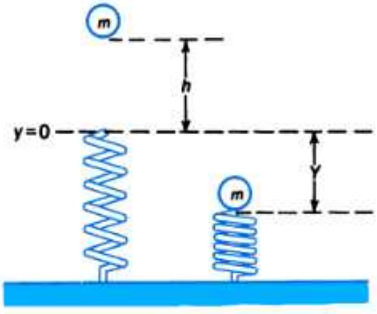



Рис. 7.5. Пример 7.4.

**Пример 7.4.** Шар массой $m = 2{,}6$ кг падает без начальной скорости с высоты $h = 55$ см на расположенную вертикально пружину, которая при ударе сжимается (рис. 7.5). Если у пружины коэффициент упругости $k = 72$ Н/м, то на какую максимальную длину сожмется пружина? Все расстояния будем измерять от точки соприкосновения шара с недеформированной пружиной.

**Решение.** Поскольку мы рассматриваем движение по вертикали, вместо координаты $x$ будем использовать $y$ (положительное направление оси $y$ вверх). Обозначим максимальную величину деформации пружины через $Y$. Полная энергия системы шар – пружина в исходном состоянии равна

$$E_1 = mgh.$$

При максимальном сжатии пружины полная энергия запишется в виде

$$E_2 = (1/2)kY^2 - mgY.$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения представляет собой упругую, а второе слагаемое – гравитационную потенциальную энергию; здесь учтено, что шар, прежде чем он упадет на пружину, пролетает расстояние $h$ по вертикали ($y = 0$ в верхней точке недеформированной пружины), а затем проходит еще расстояние $Y$, когда пружина сжимается (поскольку $Y > 0$, то $y_2 = -Y$); в конечной точке гравитационная потенциальная энергия равна $-mgY$. В точках 1 и 2 мы имеем нулевую кинетическую энергию, которая в промежуточных точках отлична от нуля. Поскольку полная энергия сохраняется,

т.е. $E_1 = E_2$, можно написать следующее равенство:

$$mgh = (1/2)kY^2 - mgY$$

или

$$(1/2)kY^2 - mgY - mgh = 0.$$

Отсюда по известной формуле для корней квадратного уравнения находим $Y$:

$$Y = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k} = 1{,}1 \text{ м}.$$

Мы выбираем корень со знаком плюс, поскольку по предположению $Y > 0$. Корень со знаком минус $Y = -0{,}36$ м соответствует тому, что связанные между собой шар и пружина подпрыгнули вверх на расстояние 0,36 м от недеформированного положения ($y = 0$) пружины.

## 7.3. Закон сохранения энергии

Учтем теперь неконсервативные силы, такие, как сила трения, поскольку в реальных ситуациях они играют немаловажную роль. Рассмотрим, например, вновь движение автомобиля (рис. 7.3), но теперь учтем наличие трения. Из-за трения автомобиль уже не сможет достичь на втором холме той же самой высоты, на которой он находился на первом холме.

В этом и других реально происходящих процессах сумма кинетической и потенциальной энергий не остается постоянной, а уменьшается, или диссипирует. Поэтому сила трения называется *диссипативной силой*[1]. Исторически именно несохранение полной механической энергии явилось одним из факторов, помешавших сформулировать всеобщий закон сохранения энергии вплоть до середины 19 в. До этого времени теплота, всегда выделяющаяся в процессе трения (попробуйте потереть ладонь о ладонь), не связывалась с энергией. Исследования ученых 19 в. показали (гл. 19), что на создание определенного количества теплоты всегда тратится одна и та же работа. Стало понятным, что тепло, производимое в процессе трения, может рассматриваться как новая форма энергии, которую мы называем *тепловой энергией*. Например, тело, свободно скользящее по столу, из-за трения останавливается. При этом его начальная кинетическая энергия переходит в тепловую энергию, вследствие чего и тело, и стол немного нагреются. Более наглядным примером перехода кинетической энергии в тепловую может служить забивание гвоздя сильным ударом молотка. Если вы слегка прикоснетесь пальцами к гвоздю, то почувствуете, как он нагрелся.

Согласно атомной теории, тепловая энергия представляет собой кинетическую энергию быстро движущихся молекул. В гл. 18 мы покажем, что рост температуры соответствует увеличению средней кинетической энергии молекул. Поскольку тепловая энергия представляет собой

[1] От англ. dissipation – уменьшение, рассеяние. – *Прим. ред.*

энергию атомов и молекул, из которых состоит тело, ее часто называют *внутренней энергией*. С точки зрения атомной теории внутренняя энергия[1)] может включать в себя не только кинетическую энергию молекул, но и их потенциальную энергию (электрическую по природе), обусловленную взаимным расположением атомов в молекулах. С точки зрения макроскопической теории внутренняя энергия обусловлена неконсервативными силами, такими, как сила трения; на микроскопическом же (атомном) уровне, поскольку эта энергия состоит из кинетической и потенциальной энергий атомов и молекул, ей соответствуют главным образом консервативные силы.

Для того чтобы сформулировать более общий закон сохранения энергии, физикам 19 в. помимо тепловой пришлось признать существование электрической, химической и других видов энергии, а также выяснить, действительно ли учет этих видов энергии приводит к выполнению закона сохранения энергии. Было обнаружено, что для каждого класса сил – консервативных или неконсервативных – можно определить вид энергии, соответствующей работе, произведенной этими силами. При этом экспериментально было установлено, что полная энергия $E$ в любом случае сохраняется постоянной. Иными словами, изменение полной энергии, являющейся суммой кинетической, потенциальной и других видов энергии, равно нулю:

$$\Delta\text{КЭ} + \Delta U + (\text{изменение всех остальных видов энергии}) = 0. \tag{7.8}$$

Это один из наиболее важных законов физики. Он называется **законом сохранения энергии** и может быть сформулирован следующим образом:

> **При любых процессах полная энергия не увеличивается и не уменьшается. Энергия может превращаться из одного вида в другой и передаваться от одного тела другому, но ее полная величина сохраняется постоянной.**

Для консервативных механических систем этот закон можно вывести из законов Ньютона (разд. 7.2) и, следовательно, он эквивалентен последним. Однако во всей своей общности закон сохранения энергии основывается на экспериментальном наблюдении. И хотя установлено, что законы Ньютона не выполняются в субмикроскопическом мире атомов, закон сохранения энергии справедлив и в этом случае, что подтверждается во всех без исключения выполненных до сих пор экспериментах.

В разд. 7.2 мы рассмотрели несколько примеров, ил-

---

[1)] Под *внутренней энергией* мы можем понимать также кинетическую и потенциальную энергии отдельных частей, из которых состоит тело (например, энергию колебаний этих частей). Этим термином мы пользуемся, когда нас интересует движение тела как целого.

люстрирующих закон сохранения энергии для консервативных систем. Приведем теперь ряд примеров, в которых участвуют и неконсервативные силы.

Предположим, что автомобиль, движущийся по холмам на рис. 7.3, испытывает действие сил трения. При перемещении из некоторой точки 1 в точку 2 работа, совершаемая силой трения $\mathbf{F}_{тр}$ над автомобилем, равна $W' = \int_1^2 \mathbf{F}_{тр} \cdot d\mathbf{l}$. Если сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ постоянна по величине, то $W' = -F_{тр}l$, где $l$ – расстояние, фактически пройденное автомобилем вдоль траектории при перемещении его из точки 1 в точку 2. (Знак минус обусловлен здесь тем, что сила трения $F_{тр}$ всегда направлена в сторону, противоположную вектору $d\mathbf{l}$). Из теоремы о связи работы и энергии [формула (7.2)] мы имеем

$$W' = -F_{тр}l = \Delta КЭ + \Delta U = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgy_2 - mgy_1),$$

или

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + F_{тр}l.$$

Произведение $F_{тр}l$ представляет собой внутреннюю энергию $U_{внутр}$, создаваемую силой трения и равную работе, совершенной против этой силы. Таким образом, $U_{внутр} = -W' = F_{тр}l$, так что можно записать

$$КЭ_1 + U_1 = КЭ_2 + U_2 + U_{внутр}.$$

Иными словами, полная начальная энергия автомобиля $КЭ_1 + U_1$ равна сумме кинетической и потенциальной энергий автомобиля (в любой произвольно выбранной точке его траектории) и внутренней (или тепловой) энергии, создаваемой в процессе перемещения автомобиля.

**Пример 7.5.** Установлено, что автомобиль в примере 7.2, прежде чем он остановится, достигнет на втором холме лишь высоты 25 м. При этом он проедет 400 м. Вычислите среднюю величину силы трения, действующей на автомобиль, если масса автомобиля 1000 кг.

**Решение.** Пусть движение автомобиля начинается из точки 1, а в точке 2 автомобиль останавливается. Таким образом, $v_1 = 0$, $y_1 = 40$ м, $v_2 = 0$, $y_2 = 25$ м и $l = 400$ м. Следовательно,

$$0 + (1000 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2)(40 \text{ м}) = 0 + (1000 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2)(25 \text{ м}) + F_{тр}(400 \text{ м}).$$

Отсюда находим, что сила трения $F_{тр}$ равна 370 Н.

Рассмотрим еще одну неконсервативную силу, а именно силу, с которой человек медленно перемещает груз маятника (рис. 6.9).

**Пример 7.6.** Вычислите работу, совершаемую горизонтальной силой $\mathbf{F}$ при медленном перемещении груза маятника, как показано на рис. 6.9, из положения $\theta = 0$ в положение $\theta = \theta_0$. (Это уже делалось в примере 6.3.)

**Решение.** Поскольку перемещение про-

исходит медленно, кинетическая энергия, по существу, равна нулю в любой точке траектории маятника. Из закона сохранения энергии [или из теоремы о связи работы и энергии; формула (7.2)] работа, совершаемая силой **F**, должна быть равна увеличению потенциальной энергии груза. (Других видов энергии или работы в задаче нет, поскольку сила натяжения **T** действует перпендикулярно направлению движения и, следовательно, не совершает работы.) Таким образом, если груз маятника находится (рис. 6.9) на высоте $y_0 = L(1 - \cos\theta_0)$, то

$$W = \Delta\text{ПЭ} = mgy_0 = mgL(1 - \cos\theta_0).$$

Заметим здесь, сколь просто по сравнению с примером 6.3 мы получили ответ с помощью рассмотрения энергии.

## 7.4. Значение закона сохранения энергии

Большая роль закона сохранения энергии определяется двумя его аспектами. Во-первых, с его помощью можно решать задачи, которые другими методами трудно или невозможно решить. Во-вторых, это всеобщий закон, который объясняет нам порядок, существующий в окружающем мире; следовательно, с его помощью мы узнаем о мире нечто очень существенное[1].

Понятие энергии и ее сохранения играет очень важную роль не только во всех областях физики, но и в других науках. Оно служит нитью, связывающей воедино многие науки.

Заметим, что закон сохранения энергии не является открытием в том смысле, в котором, например, в Калифорнии в 1848 г. были открыты залежи золота. Само понятие энергии было введено человеком и является продуктом его мыслительной деятельности. Энергия – не вещественная субстанция, а атрибут материи, количественная мера ее движения, т. е. в конечном счете одно из наиболее общих понятий в физике. Некоторые ученые полагают, что энергия – всего лишь некая математическая функция, что, разумеется, ни в коей мере не умаляет важности этого понятия. Его введение потребовало творческой активности многих ученых. Это понятие (математическое, если угодно) позволяет утверждать, что в любой системе, принадлежащей физическому миру, энергия сохраняется при любых процессах.

Важно отличать значение слова «сохранение», используемого в повседневной жизни, от специального его смысла в физике. В повседневной жизни под сохранением мы понимаем сбережение или экономное расходование чего-то; например, мы должны разумно расходовать, сохранять энергию. (В действительности это означает, что мы должны сохранять *топливо* и тем самым сберечь энергию.)

---

[1] Как известно, закон сохранения энергии является количественным проявлением одного из важнейших методологических положений диалектического материализма о неуничтожимости материи и ее движения. – *Прим. ред.*

В физике же смысл слова «сохранение» заключается в том, что сохраняющаяся величина всегда остается строго *постоянной*. Для ясности мы говорим, что энергия сохраняется (причем нам не приходится вмешиваться в это). Хотя в повседневной жизни мы должны стараться «сохранять» наши топливные ресурсы, чтобы они не оказались израсходованы слишком быстро.

## 7.5. Гравитационная потенциальная энергия и вторая космическая скорость; центральные силы

До сих пор в этой главе мы рассматривали гравитационную потенциальную энергию, считая силу тяжести $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ постоянной. Это предположение вполне корректно для обычных тел вблизи поверхности Земли. Однако для более общего анализа гравитации необходимо учесть, что сила тяжести, действующая со стороны Земли на частицу массой $m$, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния $r$ от центра Земли. Точное выражение дается законом всемирного тяготения Ньютона (разд. 5.2 и 5.3):

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM_3}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

где $M_3$ – масса Земли, $\hat{\mathbf{r}}$ – единичный вектор с началом в месте нахождения частицы, направленный по радиусу от центра Земли; знак минус указывает на то, что действующая на тело сила направлена к центру Земли (т. е. противоположно $\hat{\mathbf{r}}$). Это выражение можно также применять для описания силы тяжести вблизи других небесных тел

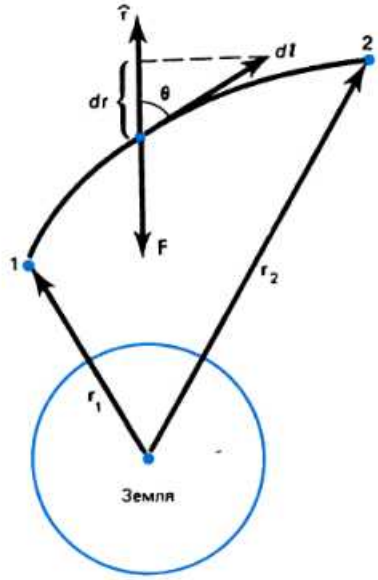



Рис. 7.6. Произвольная траектория частицы массой $m$, движущейся из точки 1 в точку 2.

(например, Луны, планет или Солнца); в этом случае $M_3$ следует заменить на массу соответствующего небесного тела.

Пусть тело массой $m$ перемещается из одного положения в другое по произвольному пути (рис. 7.6), причем его расстояние от центра Земли изменяется от $r_1$ до $r_2$. Работа, совершаемая силой тяготения, запишется в виде

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -GmM_3 \int_1^2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}}{r^2},$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор бесконечно малого перемещения. Поскольку $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = dr$ представляет собой приращение проекции вектора $d\mathbf{l}$ на $\hat{\mathbf{r}}$ (рис. 7.6), мы имеем

$$W = -GmM_3 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GmM_3 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

или

$$W = \frac{GmM_3}{r_2} - \frac{GmM_3}{r_1} \qquad \text{[гравитация]}.$$

Поскольку интеграл зависит лишь от положений начальной и конечной точек ($r_1$ и $r_2$), а не от выбранного пути, сила тяготения должна быть консервативной. Следовательно, для силы тяготения можно использовать понятие потенциальной энергии. Изменение потенциальной энергии в любом случае определяется (см. разд. 6.5) как взятая с обратным знаком работа силы. Таким образом,

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\frac{GmM_3}{r_2} + \frac{GmM_3}{r_1}. \tag{7.9}$$

Отсюда следует, что на любом расстоянии $r$ от центра Земли гравитационную потенциальную энергию можно записать в виде.

$$U(r) = -\frac{GmM_3}{r} + C,$$

где $C$ – произвольная постоянная. Обычно выбирают $C = 0$, и тогда

$$U(r) = -\frac{GmM_3}{r} \qquad \text{[гравитация]}. \tag{7.10}$$

При таком выборе $C$ имеем $U = 0$ при $r = \infty$. Когда тело приближается к Земле, его потенциальная энергия убывает, оставаясь все время отрицательной.

Полная энергия частицы массой $m$, испытывающей действие только силы тяжести со стороны Земли, сохраняется, поскольку эта сила является консервативной. Следовательно, мы имеем

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM_3}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_3}{r_2} = \text{const}$$

[действие только силы тяжести]. (7.11)

**Пример 7.7.** Из ракеты, движущейся со скоростью 1800 м/с на высоте 1600 км над поверхностью Земли, выпадает груз, который в конечном счете падает на Землю. Какова скорость груза непосредственно перед падением на Землю? Сопротивлением воздуха пренебрегите.

**Решение.** Начальная скорость груза относительно Земли равна скорости ракеты, из которой он выпадает. Таким образом, $v_1 = 1{,}80 \cdot 10^3$ м/с, $r_1 = 1{,}60 \cdot 10^6$ м $+ 6{,}40 \times$ $\times 10^6$ м $= 8{,}00 \cdot 10^6$ м и $r_2 = 6{,}40 \cdot 10^6$ м (радиус Земли). Чтобы найти искомую скорость $v_2$, воспользуемся законом сохранения энергии, т. е. выражением (7.11), из которого получаем

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2GM_3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{(1{,}80 \cdot 10^3 \text{ м/с})^2 - 2(6{,}67 \times}$$

$$\overline{\times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2) \times (5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ кг}) \times}$$

$$\overline{\times \left(\frac{1}{8{,}00 \times 10^6 \text{ м}} - \frac{1}{6{,}40 \times 10^6 \text{ м}}\right)} =$$

$$= 5310 \text{ м/с}.$$

В действительности из-за сопротивления воздуха скорость груза при падении будет несколько меньше. Заметим кстати, что направление скорости груза нигде не учитывалось в ходе решения задачи – в этом состоит одно из преимуществ энергетического метода.

Если тело запустить с Земли в воздух, то оно вернется обратно при условии, разумеется, что его скорость не будет слишком велика. Однако если скорость окажется *достаточно большой*, то тело будет продолжать двигаться от Земли и не вернется к ней (если не учитывать действия других сил или столкновений с другими телами). Минимальная начальная скорость, необходимая для того, чтобы тело никогда не вернулось на Землю, называется *второй космической скоростью* и обозначается $v_{\text{II}}$. Чтобы найти $v_{\text{II}}$ для Земли (пренебрегая сопротивлением воздуха), положим в (7.11) $v_1 = v_{\text{II}}$ и $r_1 = R_3 = 6{,}40 \cdot 10^6$ м. Поскольку нас интересует минимальное значение скорости, при которой тело выйдет из области притяжения Земли, необходимо, чтобы на расстоянии $r_2 = \infty$ у тела была нулевая скорость, т. е. $v_2 = 0$. Подставляя эти значения в формулу (7.11), имеем

$$\frac{1}{2}mv_{\text{II}}^2 - G\frac{mM_3}{R_3} = 0 + 0,$$

или

$$v_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2GM_3}{R_3}} = 1{,}12 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Таким образом, вторая космическая скорость равна 11,2 км/с. Следует заметить, что, хотя тело может навсегда покинуть область притяжения Земли (или Солнечной системы), сила тяготения Земли ни при каких конечных значениях $r$ не обратится в нуль (на очень больших расстояниях эта сила, безусловно, становится очень небольшой и ею обычно пренебрегают).

Можно показать, что вблизи поверхности Земли изме-

нение гравитационной потенциальной энергии [выражение (7.9)] сводится к обычному выражению $mg(y_2 - y_1)$ (см. задачу 29).

Сила тяготения принадлежит к так называемым *центральным силам*. *Центральная сила* – это любая сила, величина которой зависит только от расстояния $r$ до некоторой выделенной точки, называемой началом (как правило, в этой точке помещается другая частица или центр другого тела), а действует она в направлении либо к началу, либо от него. В общем виде центральную силу можно записать в виде

$$\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}.$$

Если использовать те же рассуждения, которые привели нас к выражению (7.9), и еще раз заметить из рис. 7.6, что $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = dr$, то можно определить функцию потенциальной энергии, которая играет важную роль в физике:

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 F(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr;$$

здесь мы учли, что значение последнего интеграла зависит только от начальной $r_1$ и конечной $r_2$ точек. Таким образом, мы приходим к выводу, что любая центральная сила является консервативной независимо от вида функции $F(r)$. Потенциальная энергия центральной силы зависит только от $r$, т.е. $U = U(r)$. Другим примером центральной силы является электростатическая сила, которую мы рассмотрим ниже.

## *7.6. Кривые потенциальной энергии; устойчивое и неустойчивое равновесие

Предположим, что в поле консервативных сил задана потенциальная энергия частицы массой $m$ как функция положения, и мы хотим выяснить, как движется частица во времени. Пусть движение будет одномерным (скажем, вдоль оси $x$). Таким образом, задана функция $U(x)$, а нужно найти $x(t)$. Мы рассматриваем случай, когда все действующие силы являются консервативными и включены в данную потенциальную энергию. Следовательно, полная механическая энергия $E$ является постоянной, и мы можем записать

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E = \text{const}.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}. \tag{7.12}$$

Разделяя затем переменные ($x$ и $t$) и интегрируя, получаем

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = \int_0^t dt = t;$$

здесь мы предположили, что частица в момент времени $t = 0$ находилась в точке $x_0$. Если интегрирование можно выполнить[1)] аналитически, то мы получим искомое соотношение между $x$ и $t$.

Во многих случаях указанный интеграл трудно (или невозможно) вычислить аналитически. Однако здесь все же можно получить значительную информацию о движении, если построить кривую потенциальной энергии (потенциальную кривую), т. е. построить зависимость $U(x)$. Такой график во многих случаях полезен даже тогда, когда интегрирование может быть выполнено аналитически. Пример подобного построения приведен на рис. 7.7. В этом случае кривая потенциальной энергии $U(x)$ имеет весьма сложный вид. Полная энергия $E$ постоянна, поэтому на графике ее можно представить горизонтальной линией. На рисунке явно отмечены четыре различных возможных значения $E$, а именно $E_0$, $E_1$, $E_2$ и $E_3$. Каким будет на самом деле значение $E$ для данной системы, зависит от начальных условий. (Например, полная энергия $E$ груза, колеблющегося на конце пружины, зависит от величины начальной деформации пружины – растяжения или сжатия.) Важно помнить, что величина $E$ остается неизменной до тех пор, пока на груз не действуют какие-либо дополнительные силы. Из выражения (7.12) ясно, что во всех случаях $U(x)$ должна быть меньше или равна $E$:

$$U(x) \leqslant E.$$

В противном случае скорость $v$ окажется мнимой величиной (квадратный корень из отрицательной величины), которая не имеет физического смысла. Таким образом, минимальное значение, которое может принимать полная энергия при заданной на рис. 7.7 потенциальной энергии, равно $E_0$. При этом значении $E$ частица может только

---

[1)] Согласно второму закону Ньютона,

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Чтобы найти $x(t)$, когда известна величина $F$, необходимо выполнить *два* интегрирования, поскольку справа стоит вторая производная. Однократное интегрирование второго закона Ньютона:

$$\int dv = \int \frac{F}{m}\, dt$$

соответствует выражению (7.12), а для получения $x$ необходимо провести еще одно интегрирование.

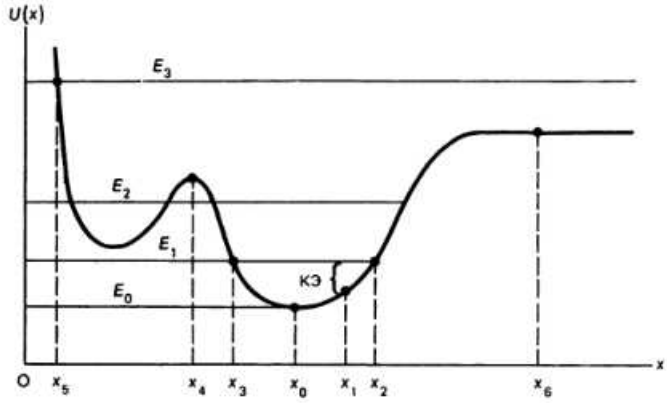



Рис. 7.7. Потенциальная кривая.

находиться в покое в точке $x = x_0$, т. е. мы имеем здесь лишь потенциальную энергию, а кинетическая энергия равна нулю.

Если полная энергия $E$ частицы превышает $E_0$, скажем равна значению $E_1$ на рис. 7.7, то у частицы может быть как потенциальная, так и кинетическая энергия. Поскольку полная энергия $E = \text{КЭ} + \text{ПЭ}$ сохраняется, мы имеем $\text{КЭ} = E - U(x)$.

Таким образом, в то время как потенциальная кривая дает значение $U(x)$ в каждой точке $x$, кинетическая энергия при любом $x$ представляется расстоянием между горизонтальной прямой, соответствующей значению $E$, и кривой $U(x)$. На рис. 7.7 указана кинетическая энергия (КЭ) в точке $x_1$, когда полная энергия равна $E_1$. Частица с энергией $E_1$ может осциллировать только между точками $x_2$ и $x_3$, так как при значениях $x > x_2$ и $x < x_3$ потенциальная энергия превысила бы полную энергию, что означало бы отрицательную кинетическую энергию ($\text{КЭ} < 0$) и, как следствие, мнимое значение $v$, что невозможно. В точках $x_2$ и $x_3$ скорость обращается в нуль, поскольку в этих точках $E = U$. Точки $x_2$ и $x_3$ называют *точками поворота* движения. Действительно, пусть частица находится в точке $x_0$ и движется, например, вправо; тогда ее кинетическая энергия (и скорость) в точке $x = x_2$ уменьшается до нуля. При этом направление движения частицы меняется на обратное и она движется влево со все возрастающей скоростью до точки $x_0$. В точке $x_0$ скорость частицы достигает максимального значения, и она продолжает двигаться (теперь уже с уменьшающейся скоростью) до тех пор, пока не достигнет точки $x = x_3$, в которой скорость частицы опять обращается в нуль; в этой точке направление движения частицы снова изменится на обратное.

Если полная энергия равна $E_2$ (рис. 7.7), то мы имеем уже не две, а четыре точки поворота. Частица может двигаться лишь в одной из двух потенциальных ям (или

долин), в зависимости от того, в какой из них она находилась первоначально. Перейти из одной ямы в другую частица не может: этому препятствует существующий между ними потенциальный барьер, такой, например, как в точке $x_4$, где $U > E_2$, а это значит, что скорость $v$ должна быть мнимой[1]. В случае, когда полная энергия равна $E_3$, имеется лишь одна точка поворота $x_5$, поскольку $U(x) < E_3$ для всех $x > x_5$; при этом скорость частицы, если она движется влево, изменяется по мере прохождения частицей различных потенциальных ям; затем частица останавливается в точке $x = x_5$ и поворачивает в другую сторону, начиная движение слева направо, которое продолжается неограниченно долго: частица никогда не возвращается назад.

Откуда нам известно, что направление движения частицы действительно изменяется на противоположное в точках поворота? Мы узнаем это благодаря тому, что нам известно, какая сила действует на частицу. Сила $F$ связана с потенциальной энергией $U$ выражением (7.1):

$$F = -\frac{dU}{dx}.$$

Иными словами, сила $F$ в любой точке равна (с обратным знаком) производной величины $U$ по $x$, т. е. тангенсу угла наклона кривой $U(x)$. Например, в точке $x = x_2$ эта производная положительна, так что сила отрицательна, т. е. действует влево (в направлении уменьшения координаты $x$); в точке $x = x_3$ производная отрицательна, так что сила положительна, т. е. действует вправо. В обоих случаях сила действует в направлении, противоположном направлению движения частицы.

При $x = x_0$ производная функции $U(x)$ равна нулю, так что сила тоже равна нулю. Говорят, что в этой точке частица находится в *равновесии*. Это означает, что результирующая сила, действующая на частицу, равна нулю. Следовательно, ускорение частицы при этом также равно нулю, и если частица первоначально находилась в покое, то она сохранит свое состояние покоя. Если бы частица, находившаяся в покое в точке $x = x_0$, переместилась немного влево или вправо, то на нее подействовала бы отличная от нуля сила, направленная таким образом, чтобы вернуть частицу обратно в точку $x_0$. Иными словами, если бы частица сместилась немного, например, влево от $x_0$, то сила была бы направлена вправо, поскольку $dU/dx < 0$; при смещении же частицы вправо сила изменила бы направление на противоположное. В случае,

---

[1] Последнее утверждение справедливо лишь в рамках механики Ньютона. Согласно современной квантовой механике, частица может «туннелировать» сквозь такой барьер, что действительно наблюдается на микроскопическом (атомном и субатомном) уровнях.

когда при небольшом смещении из положения равновесия частица вновь возвращается к нему, говорят, что частица находится в *устойчивом равновесии*. Любой *минимум* потенциальной кривой предоставляет собой точку устойчивого равновесия.

В точке $x = x_4$ частица также будет находиться в равновесии, поскольку $F = -dU/dx = 0$. Если частица хотя бы немного сместится из этого положения влево или вправо, на нее подействует сила, еще более удаляющая частицу от точки равновесия. Точки, подобные $x_4$, в которых потенциальная кривая имеет максимум, являются точками *неустойчивого равновесия*. Частица, находящаяся в одной из этих точек, не возвращается в нее при небольших смещениях, а еще дальше уходит от нее.

В случае когда частица находится в области, где потенциальная энергия $U$ постоянна (например, $x = x_0$ на рис. 7.7), то действующая на нее сила равна нулю во всей такой области. Частица в любой точке этой области находится в равновесии, и если сместить ее немного в любую сторону, то действующая сила по-прежнему будет равна нулю. В этом случае говорят, что частица находится в *безразличном равновесии*.

Следует заметить, что описанное выше движение очень сходно (или даже полностью совпадает) с движением шара, скользящего по горке, форма которой такая же, как и у кривой $U(x)$. Попробуйте заново прочесть вышеизложенный материал, имея в виду эту аналогию.

Из приведенного выше анализа [по существу, уже из выражения (7.1)] становится ясно, что сила всегда действует в таком направлении, чтобы понизить потенциальную энергию частицы.

**Пример 7.8.** Постройте потенциальную кривую и проанализируйте движение груза массой $m$, закрепленного на конце горизонтально расположенной пружины с коэффициентом упругости $k$ и скользящего без трения по горизонтальному столу (рис. 7.8, *а*). Первоначально груз смещается вправо, так что пружина растягивается на расстояние $x_0$; затем груз отпускают (без начальной скорости).

**Решение.** В этом случае потенциальная энергия имеет вид

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Соответствующая потенциальная кривая изображена на рис. 7.8, *б*. В начальном состоянии $x = x_0$ и $v = 0$, и, следовательно, полная энергия равна $E = (1/2)kx_0^2$. Поскольку полная энергия сохраняется, в любой точке $x$ мы имеем

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Из этого выражения можно найти скорость $v$ в любом положении $x$. На рис. 7.8, *б* указаны кинетическая и потенциальная энергии в точке $x = x_1$, и их можно найти из графика. После того как груз отпускают в точке $x = x_0$, на него влево будет действовать сила $F = -dU/dx = -kx$; груз ускоряется влево, и его скорость увеличивается до тех пор, пока он не пройдет точку $x = 0$. Начиная с этой точки, груз замедляется (теперь сила $F$ стала положительной и действует вправо) и в конце концов останавливается в точке $x = -x_0$. Однако все еще действует сила $F = -kx$, которая ускоряет груз вправо.

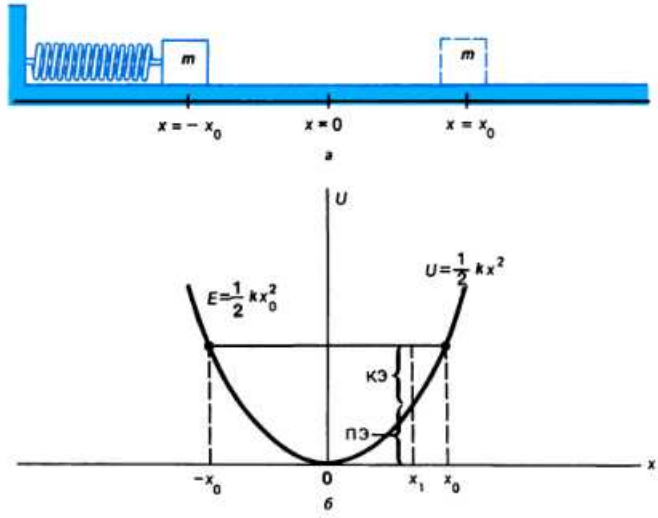



Рис. 7.8. *а* – тело массой $m$, колеблющееся на пружине; *б* – кривая потенциальной энергии для этого тела.

Таким образом, груз совершает колебания между точками $x_0$ и $-x_0$. Наибольшую скорость и, следовательно, кинетическую энергию груз имеет в той точке, где потенциальная энергия $U$ минимальна, а именно в точке $x = 0$.

## 7.7. Мощность

**Мощность** определяется как скорость, с которой совершается работа. Если работа $W$ производится за время $t$, то *средняя мощность* $\bar{P}$ равна

$$\bar{P} = \frac{W}{t}.$$

*Мгновенная мощность* дается формулой

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Работа, совершаемая в каком-то процессе, равна количеству энергии, преобразуемой из одной формы в другую. Следовательно, можно также сказать, что мощность равна скорости преобразования энергии:

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

Мощность лошади определяют как механическую работу, которую лошадь может выполнить в единицу времени. Когда говорят о мощности двигателя, то имеют в виду количество химической или электрической энергии, которое с его помощью можно преобразовать в механическую энергию в единицу времени. В системе единиц СИ мощность измеряется в джоулях в секунду, и эта единица измерения имеет специальное название ватт (Вт); причем,

1 Вт = 1 Дж/с. С ваттом мы больше всего знакомы как с характеристикой электрической лампочки накаливания или электронагревателя, которые преобразуют электрическую энергию в световую или тепловую, однако эта единица измерения используется и для других видов преобразования энергии. Для практических целей нередко используют более крупную единицу мощности, а именно *лошадиную силу* (л. с.). Существует британская лошадиная сила[1] (л. с.), которая равна 746 Вт. В метрической системе 1 л. с. равна 735,5 Вт, так что отличие метрической и британской лошадиных сил не превышает 1%.

Чтобы понять, чем различаются энергия и мощность, рассмотрим следующий пример. Человек ограничен в величине производимой им работы не только требуемой для этого полной энергией, но и скоростью использования этой энергии, т. е. мощностью. Например, человек может пройти большое расстояние или преодолеть лестницу со многими ступеньками, прежде чем он будет вынужден остановиться из-за того, что израсходовал слишком много энергии. Однако, если человек очень быстро пробежит по лестнице, он может упасть в изнеможении, преодолев всего лишь один-два пролета. В этом случае ограничение ставит величина затрачиваемой мощности, т. е. скорости, с которой человек за счет биохимических процессов преобразует химическую энергию пищи в механическую энергию.

**Пример 7.9.** Человек массой 70 кг взбегает вверх по длинной лестнице за 4,0 с. Высота лестницы по вертикали составляет 4,5 м. Вычислите развиваемую при этом человеком среднюю мощность (в ваттах и лошадиных силах).

**Решение.** Человек совершает работу против силы тяжести. Следовательно, развиваемая им средняя мощность равна

$$\bar{P} = \frac{mgh}{t} = \frac{(70\text{ кг})(9{,}8\text{ м/с}^2)(4{,}5\text{ м})}{4{,}0\text{ с}} = 770\text{ Вт}.$$

Поскольку 1 л. с. = 735,5 Вт, человек совершает работу с такой скоростью, что развивает мощность, несколько превышающую 1 л. с. Следует заметить, что на таком уровне мощности человек, как правило, долго работать не сможет.

При движении автомобиля совершается работа по преодолению силы трения (и сопротивления воздуха), по

---

[1] Эта единица впервые была установлена Джеймсом Уаттом (1736–1819), которому необходимо было характеризовать мощность недавно изобретенных паровых двигателей. Уатт обнаружил экспериментально, что хорошая лошадь может работать весь день с определенной средней мощностью. Для того чтобы не быть обвиненным в завышении возможностей своих паровых двигателей, он увеличил найденное им значение примерно в 1,5 раза и таким образом определил британскую лошадиную силу равной 746 Вт.

преодолению подъемов, а также для ускорения (разгона). У автомобиля (точнее, его двигателя) также имеется предел мощности, которую он в состоянии развить, и ее обязательно указывают в техническом паспорте (ранее в лошадиных силах, теперь в киловаттах). Автомобилю необходимо развивать большую мощность, когда он поднимается на возвышенность или когда он ускоряется (например, при обгоне). В следующем примере мы вычислим мощность, которая требуется в этих ситуациях для автомобиля среднего класса. Даже если автомобиль едет по ровной дороге, ему необходимо затрачивать мощность, чтобы преодолеть силы трения и сопротивления воздуха; эти силы зависят от конкретных условий, но обычно их величина лежит в диапазоне 400–1000 Н.

Во многих случаях мощность удобно выражать через результирующую силу **F**, приложенную к телу, и скорость **v** этого тела. Поскольку $P = dW/dt$, а из (6.7) мы имеем $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, то

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt},$$

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \qquad (7.13)$$

**Пример 7.10.** Требуется вычислить мощность, необходимую для движения автомобиля массой 1400 кг в следующих условиях: а) автомобиль въезжает на холм под углом 10° к горизонту с постоянной скоростью 80 км/ч (рис. 7.9); б) автомобиль ускоряется от 90 до 110 км/ч за 6,0 с с целью обгона другого автомобиля. Будем считать, что сила трения, действующая на автомобиль, равна 700 Н.

**Решение.** а) Для движения с постоянной скоростью вверх по склону холма автомобилю требуется развить силу тяги, равную сумме силы трения и составляющей силы тяжести, параллельной склону холма и равной $mg \sin 10° = (1400 \text{ кг}) \times (9{,}8 \text{ м/с}^2)(0{,}174) = 2400$ Н. Поскольку $v = 80$ км/ч $= 22$ м/с, причем скорость параллельна силе **F**, имеем

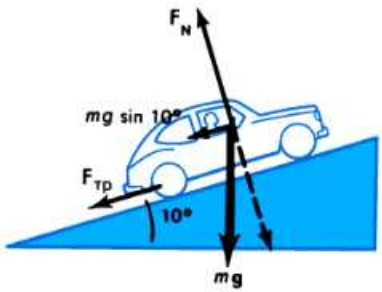



Рис. 7.9. К расчету мощности, необходимой для подъема автомобиля на холм (пример 7.10).

$$P = Fv = (2400 \text{ Н} + 700 \text{ Н})(22 \text{ м/с}) =$$

$$= 6{,}8 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 91 \text{ л.с.}$$

б) Автомобиль ускоряется от 90 до 110 км/ч (или от 25,0 до 30,6 м/с). Таким образом, сила тяги автомобиля должна преодолеть сумму силы трения 700 Н и силы, необходимой для получения ускорения $a = (30{,}6 \text{ м/с} - 25{,}0 \text{ м/с})/(6{,}0 \text{ с}) = 0{,}93 \text{ м/с}^2$. Поскольку масса автомобиля равна 1400 кг, требуемая для ускорения сила равна $F = ma = (1400 \text{ кг})(0{,}93 \text{ м/с}^2) = 1300$ Н, так что результирующая сила будет 2000 Н. Учитывая, что средняя скорость равна $v = 27{,}8$ м/с, из (7.13) получаем необходимую среднюю мощность

$$\bar{P} = (2000 \text{ Н})(27{,}8 \text{ м/с}) =$$

$$= 5{,}6 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 75 \text{ л.с.}$$

Учитывая тот факт, что только 60–80% мощности двигателя передается на колеса автомобиля, из проведенных выше вычислений ясно, что двигатель мощностью 100–150 л.с. вполне годится для практического использования в автомобилях среднего класса. Как по экономическим (расход горючего), так и по экологическим (загрязнение окружающей среды) требованиям применение более мощных двигателей – это излишество, которое общество не должно поощрять[1].

## Заключение

*Консервативная сила* зависит только от положения тела, на которое она действует; работа, совершаемая этой силой при перемещении тела из одного положения в другое, зависит только от этих двух положений и не зависит от пути перемещения. Работа, совершаемая консервативной силой, является механически обратимой, что не имеет места для неконсервативной силы, такой, как сила трения. Потенциальная энергия $U$ может быть определена только для консервативных сил; в одномерном случае она связана с силой выражением $F = -dU/dx$.

Если на тело действуют только консервативные силы, то его полная механическая энергия $E$, определяемая как сумма кинетической и потенциальной энергий, сохраняется:

$$E = \text{КЭ} + U = \text{const}.$$

В случае же, когда на тело действуют также неконсервативные силы, в игру вступают кроме механической также и другие формы энергии (например, тепловая). Экспериментально установлено, что если учесть все формы энергии, то полная энергия будет оставаться неизменной. В этом состоит *закон сохранения энергии*.

Гравитационная сила, описываемая законом всемирного тяготения Ньютона, является консервативной силой. Потенциальная энергия частицы массой $m$, обусловленная полем тяготения Земли, дается выражением $U(r) = -GmM_3/r$, где $M_3$ – масса Земли, $r$ – расстояние тела от центра Земли (разумеется, превосходящее радиус Земли или равное ему).

*Мощность* определяется как скорость, с которой совершается работа или с которой энергия преобразуется из одной формы в другую.

---

[1] Однако заметим, что производители автомобилей нередко указывают завышенное значение мощности двигателя по сравнению с тем, что потом проявляется при эксплуатации автомобиля.

## Вопросы

1. Перечислите некоторые неконсервативные силы, встречающиеся в повседневной жизни, и объясните, почему они являются таковыми.
2. Вы поднимаете книги со стола на высокую полку. Перечислите силы, действующие при этом на книгу, и определите, какие из них являются консервативными, а какие нет.
3. Результирующая сила, действующая на частицу, консервативна и увеличивает ее кинетическую энергию на 300 Дж. Каково при этом изменение а) потенциальной энергии частицы; б) ее полной энергии?
4. Имеет ли физический смысл следующее утверждение: использование шестов из фибергласа в прыжках в высоту привело к росту результатов благодаря тому, что бóльшая его гибкость дает дополнительную потенциальную энергию, преобразуемую в гравитационную потенциальную энергию? Объясните.
5. Имеется наклонная плоскость высотой $h$. Тело массой $m$ скатывается (без начальной скорости) из верхней точки. Зависит ли скорость этого тела у основания наклонной плоскости от угла, который она составляет с горизонтом, если а) трение отсутствует; б) трение имеется?
6. Почему так утомительно с большой силой давить на твердую стенку, хотя при этом никакой работы не производится?
7. Проанализируйте движение простого колеблющегося маятника с точки зрения энергии в случаях, когда а) пренебрегается трением; б) трение учитывается. Объясните, почему старинные часы необходимо заводить.
8. Если уронить очень упругий мяч, сможет ли он подпрыгнуть на высоту, большую, чем та, на которой он находился?
9. Правильно ли утверждение, что камень, брошенный с некоторой начальной скоростью с вершины скалы в море, войдет в воду со скоростью, которая будет одна и та же как в случае, когда его бросают горизонтально, так и при броске под углом к горизонту? Объясните.
10. Спиральная пружина массой $m$ покоится в вертикальном положении на столе. Сможет ли пружина, подпрыгнув, оторваться от стола, после того как вы сожмете ее, надавив сверху, а затем отпустите? Объясните свой ответ, используя закон сохранения энергии.
11. Что происходит с потенциальной энергией, которую имела вода в верхней части водопада, когда вода достигает его основания?
12. Опытные туристы предпочитают перешагивать через упавшее бревно, а не, наступив на него, спрыгивать с противоположной стороны. Объясните, почему.
13. Два наблюдателя находятся на разных платформах, которые движутся относительно друг друга со скоростью $v$. Они наблюдают за телом, которое тянут по шероховатой горизонтальной поверхности. Совпадут ли полученные этими наблюдателями значения а) кинетической энергии тела; б) полной работы, совершаемой над телом; в) механической энергии, перешедшей в тепловую из-за наличия трения? Не противоречит ли ответ на вопрос «в» ответам на вопросы «а» и «б»? Объясните.
14. а) Откуда берется кинетическая энергия автомобиля при равномерном его ускорении из состояния покоя? б) Как связать возрастание кинетической энергии с наличием силы трения, с которой дорога действует на шины автомобиля?
15. Зимой Земля приближается к Солнцу на кратчайшее расстояние. Когда гравитационная потенциальная энергия Земли достигает своего наибольшего значения?
16. Назовите состояния равновесия, в которых находится каждый из шариков на рис. 7.10.
17. Может ли полная механическая энергия $E = КЭ + U$ когда-либо быть отрицательной? Объясните.
18. а) Подробно опишите изменения скорости частицы, у которой на рис. 7.7 энергия равна $E_3$ и которая перемещается сначала из точки $x_6$ в точку $x_5$, а затем обратно в точку $x_6$. б) В каких точках кинетическая энергия частицы наибольшая, а в каких наименьшая?
19. Приведите примеры устойчивого, неустойчивого и безразличного равновесий.
20. В каком состоянии равновесия находится

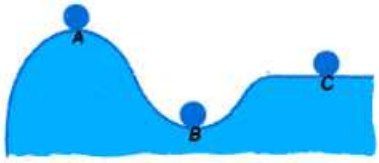



Рис. 7.10.

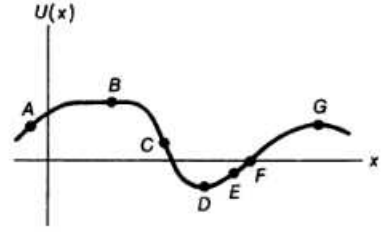



Рис. 7.11.

куб, когда он а) покоится на одной из граней; б) покоится на ребре?

21. На рис. 7.11 приведена кривая потенциальной энергии $U(x)$. а) В какой точке сила является наибольшей? б) Для каждой из обозначенных буквами точек укажите, в каком направлении действует сила: влево, вправо, или же она равна нулю. в) Какая точка соответствует состоянию равновесия и какого типа это равновесие?

22. Почему перегруженный автомобиль с трудом поднимается на крутой холм?

23. Предположим, что вы поднимаете чемодан с пола на стол. Зависит ли работа, совершаемая вами над чемоданом: а) от того, поднимаете ли вы его вертикально вверх, или по более сложному пути; б) от времени, которое вы на это затрачиваете; в) от высоты стола; г) от массы чемодана?

24. Ответьте на вопросы п. 23, заменив «работу» на «мощность».

25. Почему легче подниматься в гору по зигзагообразному пути, а не прямо к вершине?

## Задачи

### Раздел 7.1

1. Если потенциальная энергия равна $U = x^2 + 2xy + 4y^2z$, то чему будет равна сила $\mathbf{F}$?

2. (II) Покажите, что сила упругости идеальной пружины $F = -kx$ является консервативной.

3. (II) Сила упругости некоторой пружины записывается в виде $\mathbf{F} = (-kx + ax^2 + bx^4)\mathbf{i}$. а) Является ли эта сила консервативной? Объясните. б) Если эта сила консервативна, то найдите вид функции потенциальной энергии.

4. (II) Ядерная сила взаимодействия между двумя нейтронами в ядре приближенно описывается потенциалом Юкавы:

$$U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0},$$

где $r$ – расстояние между нейтронами, а величины $U_0$ и $r_0 \approx 10^{-15}$ м являются постоянными. а) Найдите силу $F(r)$. б) Чему равно отношение $F(3r_0)/F(r_0)$? в) Рассчитайте это же отношение для силы взаимодействия двух заряженных частиц, для которых $U(r) = -C/r$, где $C$ – постоянная. Почему силы Юкавы называют короткодействующими?

5. (II) Силу сопротивления воздуха можно считать пропорциональной скорости $v$ тела: $F = -kv$. Консервативна ли такая сила? Объясните.

6. (III) Покажите, что сила $\mathbf{F} = F(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ неконсервативная; здесь $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – единичный вектор в полярных координатах (приложение В), перпендикулярный $\hat{\mathbf{r}}$. (*Подсказка:* выберите конкретный путь.) В разд. 7.5 было показано, что сила $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$ консервативна.

### Раздел 7.2

7. (I) С какой скоростью лосось должен выпрыгнуть из воды, если ему необходимо преодолеть водопад высотой 2,8 м? (Используйте закон сохранения энергии.)

8. (I) При прыжке в высоту (без помощи шеста) кинетическая энергия прыгуна переходит в гравитационную потенциальную энергию. Если прыгун отрывается от Земли со скоростью 5,0 м/с и преодолевает планку со скоростью 1,2 м/с, то на какую высоту при этом был поднят его ЦМ?

9. (I) В джунглях герой приключенческого фильма Тарзан разбегается до максимальной скорости 8,0 м/с и цепляется за лиану, свешивающуюся вертикально вниз с высокого дерева. На какую максимальную высоту поднимется Тарзан, раскачиваясь на лиане? Повлияет ли на ответ длина лианы?

10. (I) Тело массой $m$ закреплено на конце пружины с коэффициентом жесткости $k$. Тело смещают на расстояние $x_0$, после чего оно начинает колебаться туда и обратно. Напишите формулу для полной механической энергии тела $E$ (пренебрегая трением) в любой точке $x$, заключенной между $-x_0$ и $x_0$, через заданные величины.

11. (II) На столе помещена вертикально пружина с коэффициентом упругости 850 Н/м, которую сжимают на длину 0,400 м (массой пружины пренебрегите). а) Какую скорость может сообщить пружина шарику массой 0,3 кг, когда ее отпускают (шарик находится на конце пружины)? б) На какую высоту поднимется шарик из своего первоначального положения (когда пружина сжата)?

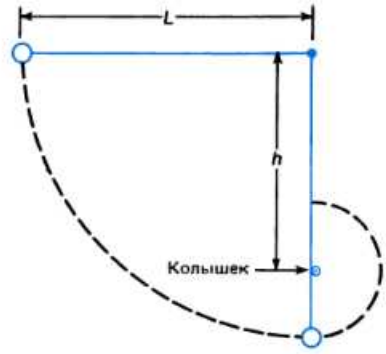



Рис. 7.12.

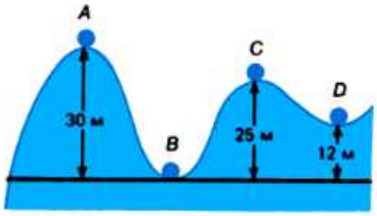



Рис. 7.13.

**12.** (II) К одному из концов шнура длиной $L$ в горизонтальной плоскости привязан шарик, а другой конец шнура жестко закреплен (рис. 7.12). а) Если отпустить шарик, то какой будет его скорость в низшей точке траектории (см. рисунок)? б) На расстоянии $h$ под гочкой закрепления шнура вбит небольшой колышек. Какова будет скорость шарика, когда он достигнет верхней точки своей круговой траектории вокруг колышка, если $h = 0{,}75L$?

**13.** (II) На рис. 7.13 изображен аттракцион, известный под названием «американские горы». Предполагая отсутствие трения, вычислите скорость любителя этого аттракциона в точках $B$, $C$ и $D$, если известно, что в точке $A$ его скорость равна 2,30 м/с.

**14.** (II) Футбольный мяч брошен с начальной скоростью 12,5 м/с под углом 30° к горизонту. а) Какова его скорость в высшей точке подъема? б) На какую высоту поднимется мяч? Для ответа на вопросы используйте закон сохранения энергии.

**15.** (II) Тело массой $m$ подвешено снизу к вертикальной пружине с коэффициентом упругости $k$. а) Найдите расстояние, на которое тело опустится сразу после его прикрепления к пружине, если оно движется медленно и останавливается в положении равновесия? б) Если дать телу возможность свободно падать после закрепления, то каково будет максимальное растяжение пружины?

**16.** (III) Небольшое тело массой $m$ без трения соскальзывает по желобу, изображенному на рис. 7.14. а) Если тело не должно отрываться от внутренней поверхности желоба даже в верхней точке его круговой части (радиусом $r$), то с какой минимальной высоты $h_m$ оно должно быть отпущено (без начальной скорости)?




Рис. 7.14.

б) Если тело отпустить с высоты $h = 0{,}80h_m$, то на какой высоте произойдет его отрыв от желоба (т.е. потеря контакта с его поверхностью)?

**17.** (II) Велосипедист собирается въехать на холм высотой 100 м и уклоном 10°. а) Считая массу велосипедиста вместе с машиной равной 80 кг, вычислите работу, которую необходимо совершить против силы тяжести. б) Если при каждом полном обороте педалей велосипед должен продвигаться вперед на 5,1 м, то какую среднюю силу нужно приложить к педалям по касательной к их движению по окружности? Трением и другими источниками потерь энергии пренебрегите. Педали вращаются по окружности диаметром 36 см.

**18.** (III) Частица массой $m$ начинает движение из состояния покоя в верхней точке твердой сферы радиусом $r$ и соскальзывает вниз без трения по ее поверхности (рис. 7.15). а) При каком значении угла $\theta$ частица сорвется со сферы? б) Если бы трение учитывалось, то как изменился бы угол отрыва – стал больше или меньше?

**19.** (III) В боровской модели атома водорода электрон удерживается на круговой орбите радиусом $r$ вокруг ядра силой $F = -C/r^2$, где $C$ – постоянная величина. Если электрон переходит с одной круговой орбиты радиусом $r = r_0$ на другую круговую орбиту радиусом $r = n^2 r_0$, где $n$ – целое положительное число ($n > 1$), то чему будет равно изменение его полной механической энергии?

**20.** (III) Инженер рассчитывает пружину, которую необходимо поместить на дно шахты лифта, чтобы при обрыве троса лифта на высоте $h$ над верхним концом пружины пассажиры при торможении не испытывали перегрузок больше $10g$. Пусть полная масса лифта вместе с пассажирами равна $M$. Каким должен быть при этом коэффициент жесткости пружины $k$?

**21.** (III) Покажите, что для того, чтобы шарик на рис. 7.12 совершил полный оборот вокруг колышка, должно выполняться условие $h \geqslant 0{,}60L$.

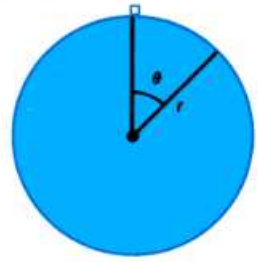



Рис. 7.15.

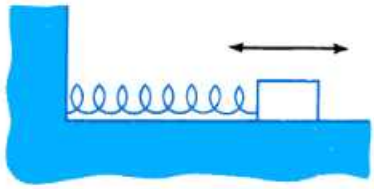


Рис. 7.16.

Раздел 7.3

22. (I) Ребенок массой 17 кг съезжает с горки высотой 4,6 м и оказывается внизу, имея скорость 2,2 м/с. Какое количество теплоты выделилось при этом?

23. (I) Бейсбольный мяч массой 145 г уронили с дерева высотой 22 м. а) С какой скоростью он ударится о Землю, если пренебречь сопротивлением воздуха? б) Если измеренное значение этой скорости равно 9,0 м/с, то чему была равна средняя сила сопротивления воздуха, действовавшая на шарик при падении?

24. (II) Лыжник, идущий по ровной лыжне со скоростью 12,6 м/с, достигает подножья горы, склон которой составляет угол 20° с горизонтом, а затем проезжает вверх по склону 11,4 м. Чему равен средний коэффициент трения лыж о склон?

25. (II) Лыжник скатывается с холма с нулевой начальной скоростью и проезжает 30 м вниз по склону, составляющему 18° с горизонтом. а) Чему равна скорость лыжника у подножья холма, если коэффициент трения равен 0,080? б) Если у подножья холма имеется горизонтальная площадка, покрытая снегом с тем же коэффициентом трения, то на какое расстояние по ней укатится лыжник? Используйте энергетические соображения.

26. (II) В аттракционе на рис. 7.13 кресло с любителем покататься проходит точку $A$ со скоростью 1,2 м/с. Какая будет у него скорость в точке $B$, если средняя сила трения составляет одну пятую веса кресла с человеком? Пройденное при этом расстояние равно 70 м.

27. (III) Деревянный брусок массой 200 г укреплен на горизонтальной пружине (рис. 7.16). Брусок может скользить по столу с коэффициентом трения 0,40. На пружину действует сила 10 Н, которая сжимает ее на 18 см. Затем пружину с бруском отпускают. а) На какое расстояние от положения равновесия отклонится пружина при первом колебании? б) Какое расстояние пройдет брусок до полной остановки? в) Какое количество тепловой энергии будет произведено к этому моменту?

Раздел 7.5

28. (II) Найдите вторую космическую скорость выхода из области притяжения Солнца для тела, находящегося а) на поверхности Солнца ($R = 7{,}0 \cdot 10^5$ км, $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг); б) на расстоянии, равном среднему расстоянию от Солнца до Земли, т. е. $1{,}49 \cdot 10^8$ км. Сравните скорость в последнем случае со скоростью обращения Земли вокруг Солнца.

29. (II) Покажите, что выражение (7.9) для изменения гравитационной потенциальной энергии сводится к выражению (6.11): $\Delta U = mg \times (y_2 - y_1)$, справедливому для тел, находящихся вблизи поверхности Земли.

30. (II) Покажите, что изменение потенциальной энергии тела, перемещаемого с поверхности Земли на высоту $h$ над ней, записывается

$$\Delta U = mgh/(1 + h/r_3),$$

где $r_3$ – радиус Земли; при этом величина $h$ не обязательно мала.

31. (II) а) Покажите, что полная механическая энергия спутника массой $m$, обращающегося по орбите радиусом $r$ вокруг Земли (масса Земли $M_3$), дается выражением

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GmM_3}{r}.$$

б) Покажите, что, хотя трение приводит к постепенному уменьшению $E$ с течением времени, кинетическая энергия фактически должна возрастать (если только орбита остается круговой). в) Покажите, что $v = \sqrt{GM/r}$.

32. (II) Покажите, что вторая космическая скорость для любого спутника в $\sqrt{2}$ раз превышает его первую космическую (орбитальную) скорость.

33. (II) Расстояние между Землей и Солнцем в течение года изменяется в пределах $1{,}471 \cdot 10^8$ – $1{,}521 \cdot 10^8$ км. Каким при этом будет общее изменение а) потенциальной энергии; б) кинетической энергии; в) полной энергии?

34. (II) Учитывая суточное вращение Земли (с частотой 1 об/сут), найдите скорость относительно Земли, которую необходимо сообщить ракете, стартующей с экватора в направлении а) на восток; б) на запад; в) вертикально вверх, с тем чтобы ракета покинула поле притяжения Земли.

35. (II) а) Выведите формулу для максимальной высоты $h$, которую достигнет ракета, если запустить ее вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью $v_0$, которая меньше второй космической. Выразите величину $h$ через $v_0$, $r_3$, $M_3$ и $G$. б) На какую высоту поднимется ракета, если $v_0 = 8{,}2$ км/с? Пренебрегите сопротивлением воздуха и вращением Земли.

**36.** (II) а) Определите, как быстро меняется вторая космическая скорость $v_{II}$ в зависимости от высоты $r$ запуска ракеты вблизи Земли, т. е. найдите производную $dv_{II}/dr$. б) Найдите вторую космическую скорость спутника, обращающегося вокруг Земли по орбите на высоте 300 км, используя приближенное выражение $\Delta v \approx (dv/dr)\,\Delta r$.

**37.** (II) Метеор на высоте 720 км над поверхностью Земли имел скорость 85,1 м/с. После падения на Землю вертикально вниз он остановился, зарывшись в песок на глубину 3,25 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите: а) скорость метеора в момент времени непосредственно перед ударом о песок; б) работу, которую произвел песок при торможении метеора (масса метеора 575 кг); в) среднюю силу, действовавшую на метеор со стороны песка; г) количество произведенной тепловой энергии.

**38.** (II) Для того чтобы покинуть пределы Солнечной системы, межпланетный корабль должен преодолеть гравитационное притяжение как Земли, так и Солнца. Пренебрегая влиянием других небесных тел Солнечной системы, найдите: а) скорость, необходимую для того, чтобы выйти за пределы Солнечной системы; б) полную энергию, которая потребовалась бы для этого космическому кораблю массой $5{,}0 \cdot 10^5$ кг, стартующему с поверхности Земли.

**39.** (II) а) Предположим, что три тела массой соответственно $m_1$, $m_2$ и $m_3$ в начальный момент времени были удалены на бесконечно большое расстояние друг от друга. Затем они сблизились и заняли положения, указанные на рис. 7.17. Покажите, что работа, затрачиваемая на приведение их в эти положения, записывается в виде

$$W = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right).$$

б) Можно ли считать, что эта формула описывает потенциальную энергию системы тел? Или это формула для потенциальной энергии одного или двух тел, входящих в систему?

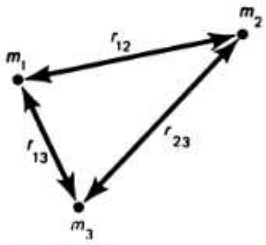



Рис. 7.17.

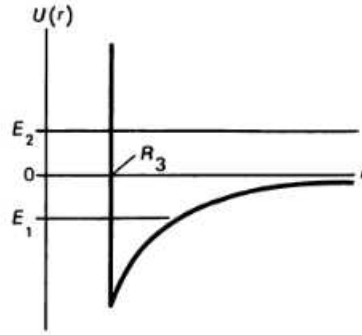



Рис. 7.18.

в) Равняется ли работа $W$ энергии связи системы (энергия связи – это энергия, которая требуется для того, чтобы разнести тела на бесконечно большие расстояния)? Дайте объяснение.

**40.** (III) Сфера радиусом $r_1$ имеет концентрическую полость радиусом $r_2$. Предположим, что этот сферический слой толщиной $r_1 - r_2$ однородно заполнен веществом, полная масса которого равна $M$. Покажите, что гравитационная потенциальная энергия взаимодействия тела массой $m$ с этим сферическим слоем на расстоянии $r$ от его центра ($r > r_1$) дается выражением

$$U = -\frac{GmM}{r}.$$

* Раздел 7.6

***41.** (II) а) Покажите, что кривая потенциальной энергии для частицы, находящейся вблизи Земли и подверженной действию земного тяготения, имеет вид, изображенный на рис. 7.18. В частности, покажите, почему она почти вертикальна при $r = R_3$ ($R_3$ – радиус Земли). б) Опишите движение частицы, когда полная энергия равна $E_1$ и когда она равна $E_2$ (эти значения указаны на рисунке). в) Какая энергия соответствует второй космической скорости?

**42.** (III) Потенциальную энергию взаимодействия атомов в двухатомной молекуле можно записать в виде

$$U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}},$$

где $r$ – расстояние между двумя атомами, а $a$ и $b$ – положительные постоянные. а) При каких значениях $r$ функция $U(r)$ имеет минимум? максимум? б) При каких значениях $r$ выполняется условие $U(r) = 0$? в) Постройте зависи-

мость $U(r)$, когда $r$ изменяется от нуля до достаточно больших значений, и укажите на графике все найденные выше характерные точки. г) Опишите движение одного атома относительно другого, когда $E < 0$ и когда $E > 0$. д) Пусть $F$ – сила, с которой один атом действует на другой. Для каких значений $r$ мы имеем $F > 0$, $F < 0$, $F = 0$? е) Найдите $F$ как функцию величины $r$.

*43. (III) *Энергия связи* системы из двух частиц определяется как энергия, необходимая для разделения обеих частиц из состояния, соответствующего минимуму энергии их взаимодействия, в состояние, соответствующее их бесконечному удалению друг от друга ($r = \infty$). Найдите энергию связи для молекулы в задаче 42.

Раздел 7.7

44. (I) Сколько времени потребуется для того, чтобы с помощью подъемного устройства мощностью 1,25 л.с. поднять пианино массой 325 кг в окно шестого этажа, расположенное на высоте 16 м над тротуаром?

45. (I) Покажите, что 1 л.с. = 735,5 Вт.

46. (I) Электроэнергию часто измеряют в киловатт-часах. Покажите, что киловатт-час (кВт·ч) действительно является единицей энергии и равен $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж.

47. (I) Футболист массой 80 кг, бегущий со скоростью 5 м/с, останавливается защитником другой команды в течение 1,0 с. а) Какова была первоначальная кинетическая энергия футболиста? б) Какая средняя мощность потребовалась, чтобы остановить его?

48. (I) Автомобилю для равномерного движения со скоростью 90 км/ч необходимо развить мощность 15 л.с. Найдите среднюю силу, действующую на автомобиль за счет трения и сопротивления воздуха.

49. (I) Толкатель ядра сообщает ядру массой 7,3 кг такое ускорение, что скорость ядра за 2,0 с становится равной 15 м/с. Какую среднюю мощность он для этого развил?

50. (II) Какую минимальную мощность (в л.с.) нужно развить, чтобы передвигать по полу ящик массой 200 кг со скоростью 1,22 м/с, если коэффициент трения равен 0,45?

51. (II) Альпинист массой 70 кг взбирается на вершину горы высотой 3120 м. Восхождение совершается в течение 4,0 ч со стартовой площадки, находящейся на высоте 1850 м. Вычислите: а) работу, совершаемую против силы тяжести; б) среднюю мощность, развиваемую альпинистом в ваттах и лошадиных силах; в) требуемую скорость поступления энергии, считая, что КПД человеческого организма составляет 15%.

52. (II) С какой скоростью должен въезжать велосипедист на склон холма с углом наклона 12°, чтобы сохранить развиваемую им мощность на уровне 0,20 л.с.? Пренебрегите трением и считайте, что масса велосипедиста вместе с велосипедом равна 85 кг.

53. (II) Насос должен поднимать 5,0 кг воды ежеминутно на высоту 4,2 м. Какого порядка должна быть мощность двигателя у насоса?

54. (II) Автомобиль массой 1200 кг замедляется от скорости 90 км/ч до скорости 70 км/ч примерно за 5,0 с, при этом рычаг коробки передач находится в нейтральном положении. Какая приблизительно мощность (в лошадиных силах) необходима для того, чтобы автомобиль двигался с постоянной скоростью 80 км/ч?

55. (II) Велосипедист съезжает с холма, имеющего уклон 6°, с постоянной скоростью 7 км/ч. Считая полную массу велосипедиста вместе с велосипедом равной 75 кг, найдите мощность, которую нужно развить велосипедисту для того, чтобы с той же скоростью въехать на холм?

56. (II) Автомобиль массой 1250 кг может развить максимальную мощность 90 л.с. Какова крутизна склона, который автомобиль сумеет преодолеть с постоянной скоростью 60 км/ч, если результирующая сила трения равна 450 Н?

57. (II) Вода течет через плотину с расходом 750 кг/с и падает вертикально вниз на 130 м, прежде чем она ударяется о лопатки турбин. Вычислите: а) скорость воды непосредственно перед соударением с лопатками турбин; б) скорость, с которой механическая энергия падения передается лопаткам турбины. Считайте, что при соударении с лопатками вода теряет 80% своей скорости, причем 12% первоначальной энергии преобразуются в тепловую.

58. (III) Велосипедист, масса которого вместе с машиной равна 80 кг, может съезжать по уклону, составляющему относительно горизонта угол 4°, с постоянной скоростью 6,0 км/ч. Активно работая педалями, велосипедист может при спуске повысить эту скорость до 40 км/ч. Какой скорости может достичь велосипедист, развивая ту же мощность при подъеме вверх по этому же уклону? Считайте, что сила трения прямо пропорциональна скорости $v$, т.е. $F_{тр} = bv$, где $b$ – постоянная величина.

59. (III) Положение частицы массой 280 г дается выражением $x = 6{,}2t^3 - 3{,}0t^2 - 88t$, где время $t$ измеряется в секундах, а $x$ – в метрах. Вычислите результирующую скорость, с которой должна совершаться над этой частицей работа а) в момент времени $t = 2{,}0$ с и б) в момент времени $t = 4{,}0$ с. в) Какой была скорость притока энергии (средняя входная мощность) за этот промежуток времени?

# 8 Сохранение импульса; системы многих тел и столкновения

Закон сохранения энергии, который обсуждался в предыдущей главе, лишь один из великих законов сохранения в физике. Импульс, момент импуяьса (или угловой момент) и электрический заряд также являются сохраняющимися величинами. Ниже мы обсудим эти величины, поскольку законы сохранения для них играют очень важную роль в науке. В настоящей главе мы рассмотрим импульс и его сохранение; законами сохранения импульса и энергии мы воспользуемся для анализа и решения важного класса задач, связанных со столкновениями тел.

Закон сохранения импульса широко применяется для описания движения двух и более тел. До сих пор наше изучение ограничивалось главным образом рассмотрением движения отдельной материальной точки (частицы). В этой главе мы рассмотрим задачу о движении двух и более материальных точек, а также движение протяженных тел, которые можно рассматривать как совокупность частиц. Для этого рассмотрения большое значение имеет понятие центра масс, к изучению которого мы теперь и приступим.

## 8.1. Центр масс

Как уже упоминалось, мы рассматривали до сих пор движение отдельной материальной точки. При описании движения протяженного тела (т. е. тела, имеющего линейные размеры) мы предполагали, что оно представляет собой материальную точку или что оно участвует только в поступательном движении. Однако реальные «протяженные» тела могут участвовать также во вращательном и других видах движения. Например, на рис. 8.1, *а* прыгунья в воду участвует только в поступательном движении (все части ее тела перемещаются по одинаковым траекториям), в то время как на рис. 8.1, *b* она участвует в поступательном и вращательном движении. Протяженное тело может колебаться, а различные составляющие его части могут при этом двигаться сложным образом (см., например, движение рук прыгуньи). Назовем движение, которое не является чисто поступательным, *общим движением*.

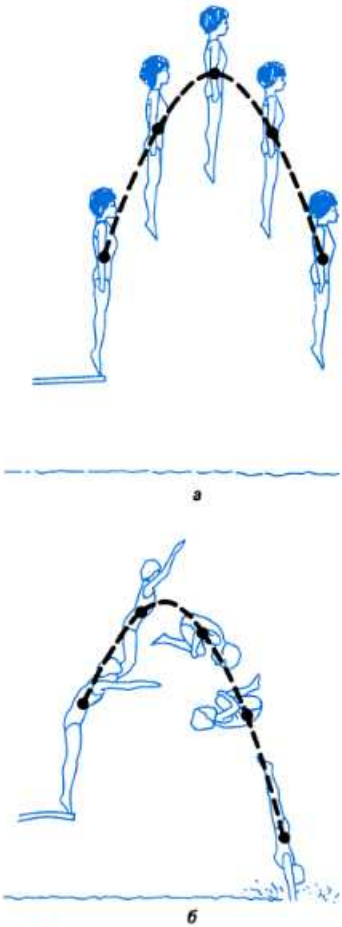


Рис. 8.1. Движение прыгуньи в воду. *а* – только поступательное движение; *б* – поступательное и вращательное движение.

Можно показать, что даже если тело вращается или имеется система тел, движущихся относительно друг друга, то у тела (или группы тел) имеется точка, которая двигалась бы по той же траектории, что и материальная точка, если бы на нее действовала такая же результирующая сила. Эта точка называется **центром масс** (ЦМ). Общее движение протяженного тела или системы тел можно рассматривать как сумму поступательного движения их ЦМ и вращательного, колебательного или другого вида движения относительно ЦМ.

В качестве примера рассмотрим движение центра масс прыгуньи в воду (рис. 8.1). Ее ЦМ движется по параболической траектории, если прыгунья вращается, как показано на рис. 8.1, *б*. Это та же параболическая траектория, по которой движется снаряд, когда на него действует лишь сила тяжести (это движение тела, брошенного под углом к горизонту, или баллистическое движение). Другие точки тела вращающейся прыгуньи движутся по более сложным траекториям.

Вычислим теперь положение ЦМ. Любое протяженное тело можно представить как совокупность очень маленьких частиц. Однако рассмотрим сначала систему, состоящую всего из двух частиц с массами соответственно $m_1$ и $m_2$. Выберем систему координат таким образом, чтобы обе части находились на оси $x$. Пусть координаты частиц равны $x_1$ и $x_2$ соответственно (рис. 8.2). Тогда положение $x_{\text{ЦМ}}$ центра масс системы запишется в виде

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M},$$

где $M = m_1 + m_2$ – полная масса системы. Центр масс лежит на прямой, соединяющей частицы $m_1$ и $m_2$. Если массы частиц одинаковы ($m_1 = m_2 = m$), то их ЦМ лежит посередине между ними, так как $x_{\text{ЦМ}} = m(x_1 + x_2)/2m = (x_1 + x_2)/2$. Если масса одной из частиц больше другой (например, $m_1 > m_2$), то ЦМ расположен ближе к большей массе. Если вся масса сосредоточена в одной точке, например с координатой $x_2$, т. е. $m_1 = 0$, то, как и следовало ожидать, $x_{\text{ЦМ}} = (0x_1 + m_2 x_2)/(0 + m_2) = x_2$.

Рассмотрим систему из $n$ частиц, где $n$ может быть очень большим; это может быть протяженное тело, которое мы рассматриваем как состоящее из $n$ маленьких

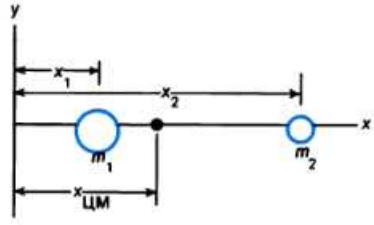



Рис. 8.2. Центр масс системы из двух частиц располагается на прямой, соединяющей эти две частицы.

частиц. Если $n$ частиц расположены вдоль одной прямой (совпадающей с выбранной осью $x$), то положение ЦМ дается выражением

$$x_{\text{цм}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},$$

где $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$ – массы частиц, а $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ – их координаты; символ $\sum_{i=1}^{n}$ означает суммирование по всем частицам, где индекс $i$ принимает целые значения от 1 до $n$. (Во многих случаях мы будем писать просто $\sum m_i x_i$, опуская индексы суммирования от $i = 1$ до $i = n$.) Полная масса системы равна $M = \sum m_i$. В случае двух или трех измерений (как это имеет место для протяженного тела) координаты ЦМ запишутся в виде

$$x_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i z_i}{M}, \tag{8.1}$$

где $x_i$, $y_i$, $z_i$ – координаты частицы массой $m_i$, а $M = \sum m_i$ – полная масса системы.

Исходя из практических соображений, обычно вычисляют координаты ЦМ [формула (8.1)], но иногда удобно (например, для получения общих выводов) записать (8.1) в векторном виде. Если $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ – радиус-вектор (вектор, проведенный из начала координат в точку, где находится частица) $i$-й частицы, а $\mathbf{r}_{\text{цм}} = x_{\text{цм}}\mathbf{i} + y_{\text{цм}}\mathbf{j} + z_{\text{цм}}\mathbf{k}$ – радиус-вектор центра масс системы, то

$$\mathbf{r}_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{8.2}$$

Протяженные тела во многих случаях удобно рассматривать как такие тела, в которых вещество является непрерывно распределенным. Иными словами, предполагается, что тело составлено из $n$ частиц, причем $n$ стремится к бесконечности. При этом в формулах (8.1) и (8.2) суммы заменяются интегралами:

$$x_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int x\, dm; \quad y_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int y\, dm; \quad z_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int z\, dm. \tag{8.3}$$

В векторном виде это выражение запишется следующим образом:

$$\mathbf{r}_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm. \tag{8.4}$$

Символ $dm$ используется для формального описания бесконечно малого элемента массы; при расчетах он обычно записывается через геометрические (пространственные) переменные, что мы покажем в следующем разделе.

## 8.2. Нахождение положения центра масс

Рассмотрим, как можно вычислить положение ЦМ для некоторых систем частиц или тел.

**Пример 8.1.** Три частицы массой 2,50 кг каждая расположены в вершинах прямоугольного треугольника с катетами, равными 2,00 и 1,50 м (рис. 8.3). Найдите положение центра масс системы.

**Решение.** Чтобы упростить расчеты, выберем систему координат так, как показано на рис. 8.3, где частица массой $m_1$ расположена в начале координат, а частица массой $m_2$ – на оси $x$. Тогда частица $m_1$ имеет координаты $x_1 = y_1 = 0$, а у частицы $m_2$ имеем $x_2 = 2{,}0$ м, $y_2 = 0$; координаты частицы $m_3$ равны $x_3 = 2{,}0$ м, $y_3 = 1{,}5$ м. Таким образом, из формулы (8.1) находим

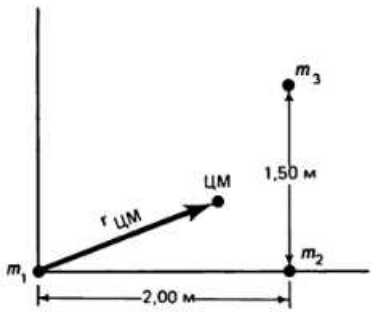



Рис. 8.3. Пример 8.1.

$$x_{ЦМ} = \frac{(2{,}50\text{ кг})(0) + (2{,}50\text{ кг})(2{,}00\text{ м})}{3(2{,}50\text{ кг})} + \frac{(2{,}50\text{ кг})(2{,}00\text{ м})}{3(2{,}50\text{ кг})} = 1{,}33\text{ м},$$

$$y_{ЦМ} = \frac{(2{,}50\text{ кг})(0) + (2{,}50\text{ кг})(0)}{7{,}50\text{ кг}} + \frac{(2{,}50\text{ кг})(1{,}50\text{ м})}{7{,}50\text{ кг}} = 0{,}50\text{ м}.$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}_{ЦМ}$ и положение ЦМ показаны на рис. 8.3.

У однородных тел симметричной формы, таких, как сферы, цилиндры или тела прямоугольной формы, ЦМ располагается в геометрическом центре тела. Для того чтобы проиллюстрировать правильность этого утверждения, рассмотрим однородный круговой цилиндр (например, твердый диск). Мы предполагаем, что ЦМ будет расположен в центре круга. Поэтому выберем систему координат таким образом, чтобы ее начало совпало с этой точкой, а ось $z$ направим перпендикулярно плоскости диска (рис. 8.4). При вычислении суммы $\sum m_i x_i$ в формуле (8.1) учтем, что если в точке с координатой $+x_i$ сосредоточена некоторая масса, то такая же масса сосредоточена и в точке с координатой $-x_i$. Это приведет к взаимному сокращению всех членов суммы, и, следовательно, $x_{ЦМ} = 0$; аналогично получаем $y_{ЦМ} = 0$. В вертикальном ($z$) направлении ЦМ должен лежать посередине

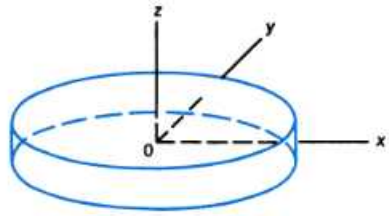



Рис. 8.4. Цилиндр с началом координат, помещенным в его геометрический центр.

между центрами окружностей верхнего и нижнего оснований диска, поскольку если мы выберем начало координат в этой точке, то любому количеству массы, сосредоточенной в слое с координатой $+z_i$, соответствует такое же количество массы в слое с координатой $-z_i$; поэтому $z_{\text{цм}} = 0$. Для других однородных тел симметричной формы можно провести аналогичное доказательство и получить, что ЦМ должен располагаться на оси симметрии. Если тело симметричной формы *неоднородно*, то приведенные выше аргументы теряют силу. Например, ЦМ диска, утяжеленного с одной стороны, располагается не в геометрическом центре, а ближе к утяжеленной стороне.

**Пример 8.2.** Определим положение ЦМ однородного конуса высотой $h$ и радиусом основания $R$.

**Решение.** Выберем систему координат так, чтобы начало отсчета совпадало с вершиной конуса, а ось $z$ была направлена вдоль оси симметрии (рис. 8.5). При этом $x_{\text{цм}} = y_{\text{цм}} = 0$, поскольку, согласно приведенным выше соображениям, ЦМ должен располагаться на оси симметрии. Чтобы найти координату $z_{\text{цм}}$, разобьем конус на бесконечное число цилиндров высотой $dz$; один из этих цилиндров показан на рис. 8.5. Масса каждого бесконечно малого цилиндра равна $dm = \rho\, dV = \rho\pi r^2 dz$, где $\rho$ – плотность вещества (масса единицы объема), которая постоянна, поскольку мы считаем, что конус однородный, и $dV = \pi r^2 dz$ – объем очень низкого цилиндра. Выполним интегрирование, используя формулы (8.3):

$$z_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int z\, dm = \frac{1}{M}\int_0^h z\rho\pi r^2\, dz.$$

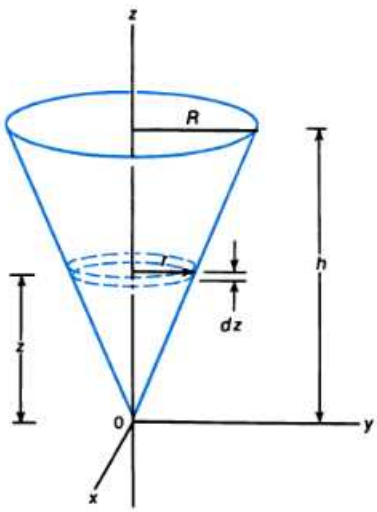



Рис. 8.5. Положение центра масс (ЦМ) однородного конуса.

Так как $r$ (радиус любого бесконечно малого цилиндра) связан с $z$ отношением $r/z = R/h$, т. е. $r = Rz/h$, мы имеем

$$z_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int_0^h \frac{\rho\pi R^2}{h^2} z^3\, dz = \frac{\rho\pi R^2}{Mh^2}\frac{z^4}{4}\bigg|_0^h = \frac{\rho\pi R^2 h^2}{4M}.$$

Полная масса конуса $M$ равна плотности $\rho$, умноженной на полный объем конуса $\pi R^2 h/3$; следовательно, $M = \rho\pi R^2 h/3$ и

$$z_{\text{цм}} = \frac{3}{4}h.$$

Таким образом, ЦМ расположен на высоте $(3/4)h$ от вершины конуса, или на расстоянии $(1/4)h$ от его основания.

Чтобы найти положение ЦМ совокупности протяженных тел, можно использовать формулы (8.1), где $m_i$ – масса, а $x_i$, $y_i$, $z_i$ – координаты ЦМ каждого из тел. Для доказательства этого рассмотрим два протяженных тела $A$ и $B$. Допустим, что масса тела $A$ равна $M_A$ и оно состоит из $n_A$ частиц, а тело $B$ имеет массу $m_B$ и состоит из $n_B$ частиц; полное число частиц равно $n = n_A + n_B$. Из

формулы (8.1) получаем следующее выражение для координаты $x_{\text{ЦМ}}$:

$$Mx_{\text{ЦМ}} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \sum_{i=1}^{n_A} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n_B} m_i x_i,$$

где $M = M_A + M_B$ – полная масса системы. Два члена в правой части представляют собой суммы по частицам, принадлежащим по отдельности телу $A$ и телу $B$. Но из (8.1) мы видим, что для каждого тела можно написать соотношения

$$\sum_{i=1}^{n_A} m_i x_i = M_A x_{A\text{ЦМ}}, \qquad \sum_{i=1}^{n_B} m_i x_i = M_B x_{B\text{ЦМ}}.$$

Подставляя эти соотношения в предыдущую формулу, получаем

$$Mx_{\text{ЦМ}} = M_A x_{A\text{ЦМ}} + M_B x_{B\text{ЦМ}},$$

или

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{M_A x_{A\text{ЦМ}} + M_B x_{B\text{ЦМ}}}{M}.$$

Последнее выражение – это не что иное, как формула (8.1) для двух тел. Те же рассуждения, что и выше, можно применить к координатам $y$ и $z$, причем в рассмотрение можно включить большее число тел. Таким образом, мы видим, что ЦМ системы нескольких протяженных тел можно найти, рассматривая каждое тело как частицу, вся масса которой сосредоточена в ее центре масс.

**Пример 8.3.** Найдем ЦМ однородного плоского тела, имеющего форму прямого угла и небольшую толщину (рис. 8.6).

**Решение.** Представим это тело в виде двух прямоугольников: прямоугольника $A$ размером 2,06 × 0,20 м и прямоугольника $B$ размером 1,48 × 0,20 м. В системе координат с началом в точке O, как показано на рис. 8.6, координаты ЦМ прямоугольника $A$ равны $x_A = 1{,}03$ м, $y_A = 0{,}10$ м, а у прямоугольника $B$ $x_B = 1{,}96$ м, $y_B = -0{,}74$ м. Масса прямоугольника $A$ равна $M_A = (2{,}06\text{ м})(0{,}20\text{ м})(t)(\rho) = (0{,}412\text{ м}^2)(\rho t)$, где $\rho$ и $t$ – соответственно плотность и толщина тела. Масса прямоугольника $B$ равна $(1{,}48\text{ м})(0{,}20\text{ м})(\rho t) = (0{,}296\text{ м}^2)(\rho t)$. Следовательно, полная масса $M = (0{,}708\text{ м}^2)(\rho t)$. Таким образом,

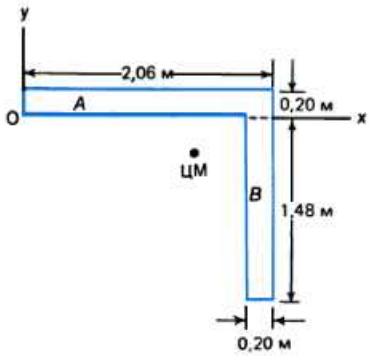



Рис. 8.6. Пример 8.3.

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{M_A x_A + M_B x_B}{M} =$$

$$= \frac{(0{,}412\text{ м}^2)(1{,}03\text{ м}) + (0{,}296\text{ м}^2)(1{,}96\text{ м})}{(0{,}708\text{ м}^2)} =$$

$$= 1{,}42\text{ м};$$

мы видим, что здесь в числителе и знаме-

нателе произведения $\rho t$ сократились. Аналогично

$$y_{\text{цм}} = \frac{(0{,}412\ \text{м}^2)(0{,}10\ \text{м}) + (0{,}296\ \text{м}^2)(-0{,}74\ \text{м})}{(0{,}708\ \text{м}^2)} =$$

$$= -0{,}25\ \text{м}.$$

Центр масс находится приблизительно в точке, показанной на рис. 8.6 и обозначенной ЦМ.

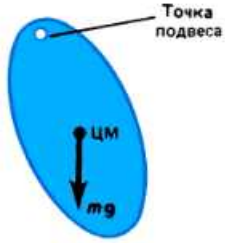



Рис. 8.7. Определение положения ЦМ тела неправильной формы.

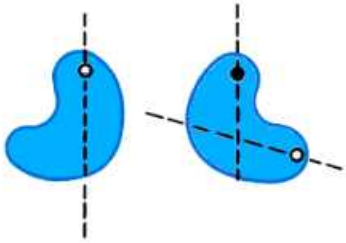


Рис. 8.8. Нахождение положения ЦМ тела.

Следует заметить, что в последнем примере ЦМ располагается *вне* тела. Другим примером может быть бублик, у которого ЦМ находится в центре полости.

Для тел неправильной формы часто бывает трудно выполнить суммирование в формулах (8.1) или интегрирование в формулах (8.3). Однако с помощью изложенного ниже метода его можно найти из эксперимента. Рассмотрим плоское однородное тело, положение ЦМ которого известно, например предмет овальной формы на рис. 8.7. Это тело подвешено в точке, расположенной вблизи его края (пусть оно подвешено на гвозде); в положении, изображенном на рис. 8.7, ЦМ тела смещен в сторону от положения равновесия. Можно считать, что вся масса тела сосредоточена в ЦМ, т. е. мы имеем математический маятник (рис. 6.9), и точно так же, как маятник может находиться в покое только в положении, когда его груз находится на вертикальной линии под точкой подвеса, протяженное тело, свободно закрепленное в одной из своих точек, будет в покое, только если его ЦМ расположится прямо под точкой подвеса.

Этот факт можно использовать для определения ЦМ любого тела неправильной формы, т. е. можно считать, что его ЦМ находится на проходящей через точку подвеса вертикальной линии ниже этой точки. Если тело двумерное или у него есть плоскость симметрии, то необходимо просто закрепить тело по очереди в двух различных точках и в каждом положении равновесия провести вертикальную линию через точку подвеса. Центр масс тела будет лежать на пересечении этих линий (рис. 8.8). Если тело подвесить в третьей точке, то вертикальная линия, проведенная через точку подвеса, также пройдет через ЦМ. Если у тела нет плоскости симметрии, то ЦМ можно найти, закрепляя тело по крайней мере в трех точках, не лежащих в одной плоскости.

## 8.3. Центр масс и поступательное движение

Важная роль понятия центра масс, как мы упомянули в начале настоящей главы, состоит в том, что во многих случаях движение ЦМ системы частиц (или протяженного тела) можно описать простым способом, поскольку оно связано с равнодействующей всех сил, приложенных к системе. Покажем это. Рассмотрим движение системы,

состоящей из $n$ частиц с общей массой $M$, которая, как мы предполагаем, сохраняется постоянной. Из формулы (8.2) имеем

$$M\mathbf{r}_{\text{ЦМ}} = \sum m_i \mathbf{r}_i.$$

Продифференцировав это соотношение по времени, получим

$$M = \frac{d\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt},$$

или

$$M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}} = \sum m_i \mathbf{v}_i, \tag{8.5}$$

где $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ – скорость $i$-й частицы массой $m_i$, а $\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$ – скорость движения ЦМ. Дифференцируя (8.5) еще раз по времени, находим

$$M\frac{d\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum m_i \mathbf{a}_i,$$

где $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$ – ускорение $i$-й частицы. Здесь $d\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}/dt = \mathbf{a}_{\text{ЦМ}}$ – ускорение ЦМ. Согласно второму закону Ньютона, $m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$, где $\mathbf{F}_i$ – результирующая сила, действующая на $i$-ю частицу. Следовательно,

$$M\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i. \tag{8.6}$$

Таким образом, *произведение полной массы системы на ускорение ее центра масс равно векторной сумме всех сил, действующих на систему*. Заметим, что наша система из $n$ частиц могла быть системой из $n$ частиц, составляющих одно или несколько протяженных тел.

Силы $\mathbf{F}_i$, действующие на частицы системы, могут быть двух типов: 1) силы, вызванные телами, не принадлежащими системе (например, сила тяжести Земли), которые мы называем *внешними силами*, и 2) силы, с которыми одни частицы, принадлежащие системе, действуют на другие частицы этой же системы (например, электрические и гравитационные силы, или силы, обусловленные упругими связями между различными частицами системы); такие силы называются *внутренними силами*. Согласно третьему закону Ньютона, внутренние силы рассматриваются «парами»; если одна частица действует на другую с некоторой силой, то вторая частица действует на первую с силой, равной по величине, но противоположной по направлению. При суммировании всех сил в формуле (8.6) эти внутренние силы попарно сократятся. Таким образом, в правой части выражения (8.6) останутся только внешние силы, и, следовательно,

$$M\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \tag{8.7}$$

где $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему, т. е. *результирующая сила*, действующая на систему. Поскольку выражение (8.7) то же самое, что и

второй закон Ньютона для частицы, можно заключить, что *центр масс системы частиц (или протяженного тела массой M) движется как отдельная частица массой M, на которую действует сила, равная равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему (или тело)*. Это полезный вывод. Из него следует, что система движется так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в ЦМ и все внешние силы были бы приложены в этой точке. Таким образом, поступательное движение любого тела или любой системы тел можно рассматривать как движение частицы. (В действительности в предыдущих главах мы так и поступали.) Эта теорема упрощает анализ движения сложных систем или протяженных тел (таких, как на рис. 8.1, *б*). Несмотря на то что движение различных частей системы может быть очень сложным, для решения многих задач достаточно знать лишь то, как движется ЦМ системы. На следующем примере мы покажем, что с помощью этой теоремы можно весьма просто решать некоторые задачи.

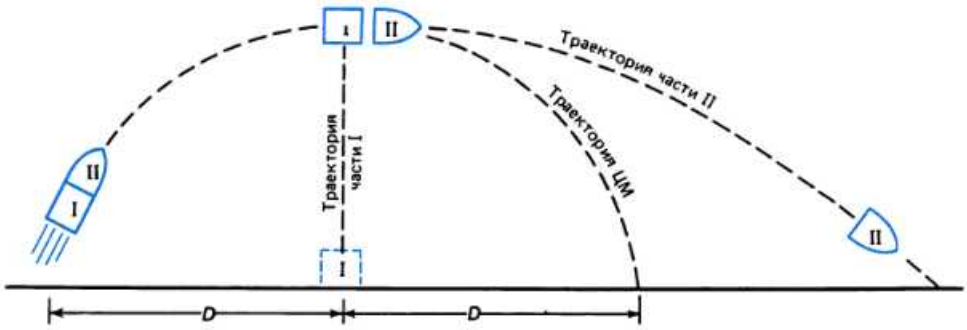



Рис. 8.9. Пример 8.4.

**Пример 8.4.** Ракета запускается в воздух, как показано на рис. 8.9. В верхней точке траектории, находящейся на расстоянии $D$ по горизонтали от точки запуска, она разделяется на две равные по массе части I и II. Часть I падает вертикально вниз на Землю. Где приземлится часть II? Считайте, что $\mathbf{g} = \text{const}$.

**Решение.** Центр масс ракеты движется по той же траектории, что и тело, брошенное под углом к горизонту, на которое действует только сила тяжести. Следовательно, ЦМ ракеты достигнет Земли в точке, удаленной от точки запуска на расстояние $2D$. Поскольку массы частей I и II одинаковы, ЦМ расположен посредине между ними. Следовательно, часть II приземлится на расстоянии $3D$ от точки запуска. (Если части I будет сообщен дополнительный импульс вверх или вниз, вместо того чтобы предоставить ей возможность свободно падать только под действием силы тяжести, ответ будет несколько более сложным.)

## 8.4. Импульс и его связь с силой

**Импульс (количество движения)** $\mathbf{p}$ материальной точки определяется как произведение ее массы $m$ на скорость $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{8.8}$$

Импульс – векторная величина, поскольку это произведение скаляра на вектор; его направление совпадает с направлением скорости $\mathbf{v}$, а его величина равна $p = mv$. Так как скорость $\mathbf{v}$ зависит от системы отсчета, необходимо всегда указывать систему отсчета. Единица измерения импульса равна единице измерения массы, умноженной на единицу измерения скорости; в системе единиц СИ импульс измеряется в единицах кг·м/с. Импульс $\mathbf{p}$ следует отличать от момента импульса (углового момента), который мы рассмотрим в гл. 9.

В повседневной жизни мы тоже пользуемся словом *импульс* в том же смысле, как мы его определили выше.

В соответствии с определением (8.8) импульс у быстро движущегося автомобиля будет больше, чем у медленно движущегося автомобиля той же массы. Импульс тяжелого грузовика больше, чем у небольшого автомобиля, движущегося с той же скоростью. Чем больше у тела импульс, тем труднее его остановить и тем серьезнее будут последствия, если его остановка будет вызвана ударом или столкновением. Более вероятно, что футболист будет сбит с ног, если с ним столкнется игрок другой команды, бегущий с высокой скоростью, чем если он столкнется с более легким или медленнее бегущим игроком. И тяжелый, быстро едущий грузовик нанесет больший ущерб при аварии, чем медленно движущийся более легкий автомобиль.

Для того чтобы изменить импульс тела, на него необходимо подействовать силой независимо от того, увеличиться должен импульс или уменьшиться (как в случае остановки тела) или должно измениться его направление. Первоначально Ньютон вывел второй закон с помощью понятия импульса (сам Ньютон называл произведение $mv$ количеством движения). В переводе на современный язык второй закон можно сформулировать следующим образом: скорость изменения импульса материальной точки пропорциональна результирующей силе, приложенной к ней. Аналитическая запись этого закона имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \tag{8.9}$$

где $\mathbf{F}$ – результирующая сила, приложенная к материальной точке. Из формулы (8.9) нетрудно получить запись второго закона в виде $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, которой мы пользовались ранее. Для этого предположим, что масса $m$ постоянна, и запишем ускорение в виде $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Таким об-

разом,

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Ньютоновская формулировка (8.9) является более общей, чем знакомая нам ранее ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), поскольку она включает в себя случай переменной массы. Примеры, в которых масса изменяется, встречаются редко; мы их рассмотрим в разд. 8.12 (ракеты, масса которых уменьшается при сгорании топлива) и в гл. 39 (теория относительности).

Формула (8.9) записана для отдельной материальной точки. Рассмотрим систему из $n$ частиц полной массой $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Предположим, что импульсы частиц равны $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{p}_n = m_n\mathbf{v}_n$, где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ – скорости отдельных частиц. Тогда *полный импульс* системы $\mathbf{P}$ запишется следующим образом:

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n = \sum \mathbf{p}_i. \tag{8.10}$$

Из выражения (8.5) ($M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}} = \sum m_i\mathbf{v}_i$) мы имеем

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}. \tag{8.11}$$

Таким образом, *полный импульс системы частиц равен произведению полной массы системы $M$ и скорости ЦМ системы*. Иначе говоря, *импульс протяженного тела равен произведению массы тела и скорости его ЦМ*.

Если продифференцировать обе части равенства (8.11) по времени, то при условии, что $M$ постоянна, получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \tag{8.12}$$

где $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ – результирующая внешняя сила, приложенная к системе; здесь при выводе мы использовали выражение (8.7). Формула (8.12) – это **второй закон Ньютона для системы частиц**. Она эквивалентна выражению (8.9) для отдельной частицы и справедлива для любой конечной системы частиц. Формулу (8.12) можно также применять с целью описания систем, масса которых изменяется, однако при этом необходимо соблюдать некоторую осторожность (этот вопрос мы обсудим ниже в настоящей главе).

**Пример 8.5.** Из шланга вытекает вода со скоростью 50 м/с и расходом 5,0 кг/с. Ударяясь о стену, вода останавливается. (Отражением струи от стены пренебрегаем.) Какова сила ее действия на стену?

**Решение.** Каждую секунду вода с импульсом (5,0 кг)·(50 м/с) = 250 кг·м/с тормозится и приходит в состояние покоя. Чтобы импульс воды изменился от этой величины до нуля, необходимо приложить силу, предполагаемую постоянной, которая равна по величине

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{0 - 250 \text{ кг}\cdot\text{м/с}}{1{,}0 \text{ с}} = -250 \text{ Н}.$$

Знак минус указывает на то, что сила, приложенная к воде, должна быть направлена противоположно начальной скорости воды. Чтобы остановить воду, стена действует на нее с силой 250 Н; но по третьему закону Ньютона с такой же силой 250 Н вода действует на стену.

## 8.5. Сохранение импульса

В случае когда результирующая внешняя сила, действующая на систему частиц, равна нулю, выражение (8.12) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{P} = \text{const} \quad [\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0]. \tag{8.13}$$

Таким образом:

**Когда результирующая внешняя сила, действующая на систему, равна нулю, импульс системы остается постоянным.**

Это **закон сохранения импульса**. Его можно также сформулировать следующим образом: *полный импульс замкнутой системы тел сохраняется постоянным*. Под **замкнутой системой** мы понимаем систему, на которую не действуют никакие внешние силы – в ней действуют только силы взаимодействия между частицами системы.

Важная роль понятия импульса, как и в случае энергии, состоит в том, что при достаточно общих условиях импульс сохраняется. Хотя закон сохранения импульса, как мы видели, следует из второго закона Ньютона, он имеет, по существу, более общий характер, чем законы Ньютона. В микроскопическом мире атомов второй закон Ньютона не выполняется, а великие законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда продолжают выполняться, что подтверждается всеми проводимыми экспериментальными проверками. Именно поэтому законы сохранения рассматриваются как более фундаментальные, чем законы Ньютона.

Рассмотрим в качестве примера лобовое соударение (столкновение) двух бильярдных шаров (рис. 8.10). Хотя после соударения импульс каждого из шаров изменяется, *сумма* их импульсов до и после соударения остается одной и той же. Если $m_1\mathbf{v}_1$ – импульс шара 1 и $m_2\mathbf{v}_2$ – импульс шара 2, измеренные до соударения, то полный импульс этих двух шаров до соударения равен $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$. После соударения скорость и импульс каждого шара изменятся. Обозначим скорости и импульсы шаров после соударения соответствующими буквами со штрихом, т. е. для каждого шара мы имеем $m_1\mathbf{v}'_1$ и $m_2\mathbf{v}'_2$. Тогда

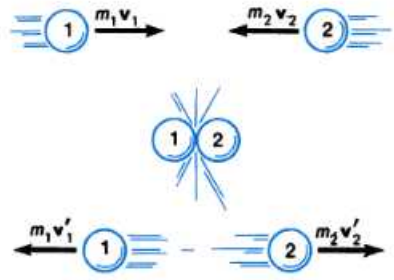



Рис. 8.10. **При соударении двух шаров импульс сохраняется.**

полный импульс после соударения равен $m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2$. Независимо от того, чему равны скорости и массы рассматриваемых тел, установлено, что полный импульс системы до соударения шаров совпадает с полным импульсом системы после соударения, причем несущественно, было ли оно лобовым или нет:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 \qquad \text{[соударение]}. \qquad (8.14)$$

Иными словами, полный импульс двух шаров сохраняется. Формулу (8.14) можно переписать в виде

$$m_1\mathbf{v}'_1 - m_1\mathbf{v}_1 = -(m_2\mathbf{v}'_2 - m_2\mathbf{v}_2).$$

Отсюда следует, что если импульс одного шара уменьшится на некоторую величину, то импульс другого увеличится на такую же величину. Полный импульс системы, таким образом, остается постоянным.

**Пример 8.6.** Железнодорожный вагон массой 10 000 кг, движущийся со скоростью 24,0 м/с, сталкивается с таким же вагоном, находящимся в покое. Если после столкновения вагоны сцепятся, то чему будет равна при этом их общая скорость?

**Решение.** Вычислим начальный импульс системы:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (10\,000 \text{ кг})(24{,}0 \text{ м/с}) + (10\,000 \text{ кг})(0 \text{ м/с}) = 2{,}40 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

После столкновения полный импульс останется таким же, но распределится между вагонами. Поскольку оба вагона оказываются сцепленными, они будут двигаться с одной и той же скоростью, которую мы обозначим через $v'$. Таким образом,

$$(m_1 + m_2)\,v' = 2{,}40 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

$$v' = \frac{2{,}40 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}}{2{,}00 \cdot 10^4 \text{ кг}} = 12 \text{ м/с}.$$

Закон сохранения импульса полезно применять, в частности, когда мы имеем дело со сравнительно простыми системами, например при столкновениях и некоторых типах взрывов. Скажем, движение ракеты, которое, как мы показали в гл. 4, можно понять исходя из действия и противодействия, можно также объяснить на основе сохранения импульса: до запуска ракеты полный импульс системы, состоящей из ракеты и запаса топлива, равен нулю. После включения двигателей, когда из ракеты стали выходить газы, полный импульс системы не изменился, т. е. импульс истекающих газов, направленный вниз, в точности компенсируется импульсом ракеты, направленным вперед. Аналогично можно объяснить отдачу ружья и движение лодки при выбрасывании груза.

**Пример 8.7.** Рассчитайте скорость отдачи винтовки массой 4,0 кг, которая выстреливает пулю массой 0,050 кг со скоростью 280 м/с.

**Решение.** Полный импульс системы сохраняется. Обозначим скорость после выстрела буквой $v$ со штрихом $v'$. Таким образом, мы имеем

$$m_{\text{пуля}}\,v_{\text{пуля}} + m_{\text{винт}}\,v_{\text{винт}} = m_{\text{пуля}}\,v'_{\text{пуля}} + m_{\text{винт}}\,v'_{\text{винт}},$$

$$0 + 0 = (0{,}050 \text{ кг})(280 \text{ м/с}) + (4{,}0 \text{ кг})(v'_{\text{винт}}),$$

$$v'_{\text{винт}} = -3{,}5 \text{ м/с}.$$

Поскольку масса винтовки много больше массы пули, ее скорость много меньше, чем скорость пули. Знак минус у $v'_{\text{винт}}$ указывает на то, что скорость (и импульс) винтовки направлена в противоположную сторону относительно скорости пули. Заметим, что это *векторная сумма* импульсов, которая сохраняется.

Если на систему действует отличная от нуля внешняя сила, то закон сохранения импульса не будет выполняться. Однако в некоторых случаях в систему можно включить другие тела таким образом, что при этом снова будет выполняться закон сохранения импульса. Например, если рассмотреть падающую глыбу, то импульс глыбы не сохраняется: он будет увеличиваться по мере падения глыбы на Землю. Увеличение импульса глыбы обусловлено действием внешней силы, в данном случае силы тяжести Земли. Однако если мы учтем вместе с рассматриваемой глыбой Землю, то получим систему, полный импульс которой в инерциальной системе отсчета сохраняется. Разумеется, это означает, что Земля движется навстречу падающей на нее глыбе. Однако, поскольку масса Земли велика, ее скорость, направленная вверх, очень мала.

## 8.6. Столкновения и импульс силы

В предыдущем разделе мы показали на примерах, что закон сохранения импульса весьма удобно использовать для описания столкновительных процессов. Со столкновениями (или соударениями) мы часто встречаемся в повседневной жизни, например удары теннисной ракеткой, бейсбольной битой или клюшкой для гольфа по мячу, соударение двух бильярдных шаров или железнодорожных вагонов, удар молотком по гвоздю. На атомном и субатомном уровнях ученые изучают строение атомов, ядер и природу действующих в этом микромире сил с помощью тщательного изучения столкновений атомов и ядер.

Что мы подразумеваем под столкновением? Взаимодействие между двумя телами называется столкновением, если оно происходит за очень короткое время и силы взаимодействия между сталкивающимися телами при этом столь велики, что можно пренебречь всеми остальными силами. Обычно время столкновения много меньше по сравнению со временем нашего наблюдения, так что мы можем четко различать состояния до столкновения и после, когда силы, возникающие при столкновении, не действуют. При игре в теннис, например, существуют определенные периоды до и после каждого соударения мяча с ракеткой, во время которых мяч свободно движется как тело, брошенное под углом к горизонту, под действием сил тяжести и сопротивления воздуха. Однако, когда ракетка ударяет по мячу, эти силы играют незна-

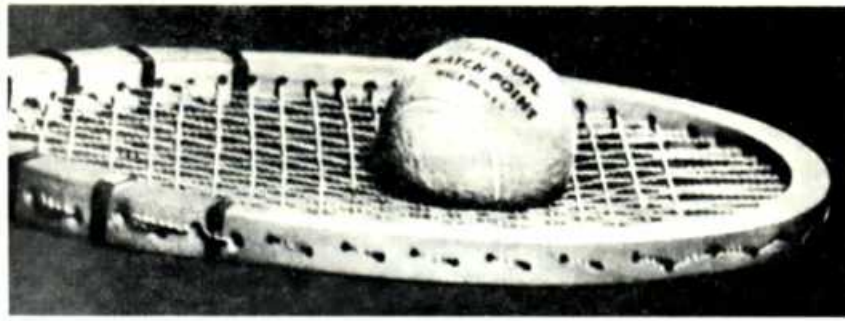


Рис. 8.11. Удар теннисной ракетки по мячу. Обратите внимание на деформацию как ракетки, так и мяча благодаря действию большой силы со стороны мяча на ракетку и со стороны ракетки на мяч. (Фото выполнено Рус Кинн, Photo Researchers, Inc.)

чительную роль; резкое изменение характера движения мяча обусловлено почти целиком действующей на него весьма короткое время, но очень большой силой со стороны ракетки. Резкое изменение движения по крайней мере одного из тел (а нередко и обоих тел) характерно для большинства соударений. Из-за больших сил взаимодействия оба тела при столкновении деформируются и во многих случаях значительно (рис. 8.11).

Рассмотрим теперь процесс столкновения более подробно. До сих пор мы предполагали, что массы частиц сохраняются постоянными и ни одна из скоростей не близка к скорости света, так что релятивистскими эффектами можно пренебречь (гл. 39). Рассмотрим движение ЦМ каждого из тел, участвующих в столкновении. Импульс ЦМ тела будем обозначать через **p**.

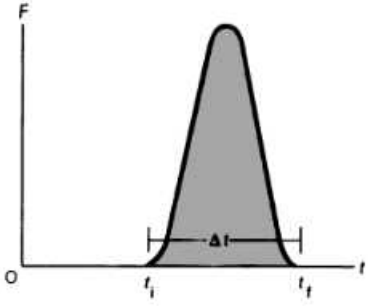



Рис. 8.12. Зависимость силы от времени при типичном столкновении.

Когда происходит столкновение между простыми телами, сила взаимодействия за очень короткое время обычно нарастает от нулевого значения в момент контакта до очень большой величины, а затем вновь резко спадает до нулевого значения. На рис. 8.12 приведена типичная зависимость величины силы, с которой одно тело действует на другое при столкновении, от времени. Интервал времени $\Delta t = t_f - t_i$, где $t_i$ – «начальный» момент времени (когда начала действовать сила) и $t_f$ – «конечный» момент времени (когда сила перестала действовать), обычно можно определить с большой точностью (как правило, он очень короткий).

Из второго закона Ньютона следует, что *результирующая* сила, действующая на тело, равна скорости изменения его импульса:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

(Эта формула применима *к каждому* из участвующих в столкновении тел.) В течение бесконечно малого временного интервала $dt$ импульс изменяется на величину

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt.$$

Проинтегрировав это равенство по времени, в течение

которого происходит столкновение, получим

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{p_i}^{p_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt,$$

где $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$ – импульсы тела соответственно перед столкновением и после него. Интеграл от силы по времени, в течение которого она действует, называется **импульсом силы J**:

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt.$$

Таким образом, изменение импульса тела $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ равно импульсу силы, действующей на него:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{J}. \qquad (8.15)$$

Единицы измерения импульса силы и импульса совпадают, т. е. в системе СИ мы имеем единицы кг·м/с (или Н·с). Поскольку $\mathbf{J} = \int \mathbf{F}\, dt$, импульс силы $J$ равен площади под кривой, описывающей зависимость величины силы $F$ от $t$ (рис. 8.12).

Формула (8.15) справедлива, только если $\mathbf{F}$ является равнодействующей всех сил, действующих на тело. Она справедлива для любой равнодействующей силы $\mathbf{F}$, причем импульсы $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$ точно соответствуют моментам времени $t_i$ и $t_f$. Особенно полезным понятие импульса силы оказывается при рассмотрении так называемых *импульсных сил*; это силы, характер изменения которых во времени аналогичен изображенному на рис. 8.12, когда сила имеет очень большую величину в течение очень короткого интервала времени, вне которого она, по существу, равна нулю. Для большинства столкновений импульсная сила значительно превышает любую из действующих на тело сил, так что изменение импульса тела в процессе столкновения мы можем считать обусловленным действием только импульсной силы. Для такой импульсной силы интервал времени, по которому проводится интегрирование в (8.15), не обязательно должен совпадать с промежутком времени от $t_i$ до $t_f$, поскольку сила $\mathbf{F}$, по существу, равна нулю за пределами интервала $\Delta t = t_f - t_i$. (Разумеется, если выбранный интервал времени слишком велик, то становится существенным влияние других сил, например полет теннисного мяча после выполнения удара ракеткой, когда он медленно падает под действием силы тяжести.)

В некоторых случаях удобно использовать среднюю силу $\bar{\mathbf{F}}$, действующую во время столкновения. Она определяется как такая постоянная сила, которая действует в течение того же промежутка времени $\Delta t = t_f - t_i$, что и реальная сила, создает тот же импульс силы и, следо-

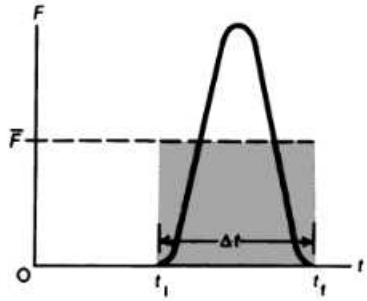



Рис. 8.13. Средняя сила $\bar{F}$ за промежуток времени $\Delta t$ создает тот же импульс силы ($\bar{F}\Delta t$), что и реально действующая сила.

вательно, то же изменение импульса. Таким образом,

$$\mathbf{F}\,\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt.$$

На рис. 8.13 указана величина средней силы $\bar{\mathbf{F}}$, соответствующей импульсной силе на рис. 8.12. Площадь прямоугольника $\bar{\mathbf{F}}\Delta t$ равна площади под кривой, описывающей зависимость импульсной силы от времени.

**Пример 8.8.** а) Вычислите импульс силы, который испытал человек массой 70 кг, приземлившись на твердую землю после прыжка с высоты 5,0 м. Найдите при этом среднюю силу, действовавшую на ноги человека, если он приземлился б) на прямых и в) на согнутых ногах. Предположим, что в случае п. «а» ЦМ тела во время удара о землю перемещается на 1,0 см, а в случае п. «б» на 50 см.

**Решение.** а) Поскольку сила $F$ нам не известна, по формуле

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F}\,dt$$

мы не можем вычислить импульс силы. Поэтому воспользуемся тем фактом, что импульс силы равен изменению импульса тела. После того как человек достигнет земли, прыгая с высоты 5,0 м, его скорость можно найти с помощью кинематического уравнения в случае равнопеременного движения [формула (2.9в)], записанного для вертикального (вдоль оси $y$) направления, с ускорением $a = g = 9{,}8$ м/с$^2$ и начальной скоростью $v_0 = 0$:

$$v = \sqrt{2a(y - y_0)} = \sqrt{2(9{,}8\ \text{м/с}^2)(5{,}0\ \text{м})} = 9{,}9\ \text{м/с}.$$

После соударения с землей импульс тела быстро спадает до нулевого значения (рис. 8.14). Следовательно, импульс силы, действующей на человека во время приземления, равен

$$J = \bar{F}\,\Delta t = \Delta p = p_f - p_i =$$
$$= 0 - (70\ \text{кг})(9{,}9\ \text{м/с}) = -690\ \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Знак минус указывает здесь на то, что сила должна быть направлена противоположно начальному импульсу.

б) Прежде чем остановиться, ЦМ замедляется от скорости 9,9 м/с до нуля и проходит расстояние $D = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м. Средняя скорость ЦМ за этот промежуток времени равна (9,9 м/с + 0 м/с)/2 =

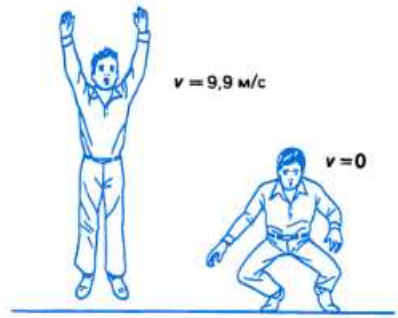



Рис. 8.14. Положение тела человека, когда действует импульс силы (пример 8.8).

$= 5{,}0$ м/с, так что время соударения составляет $\Delta t = D/\bar{v} = (1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{м})/(5{,}0\ \text{м/с}) = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ с. При этом средняя результирующая сила равна

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{690\ \text{Н} \cdot \text{с}}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{с}} = 3{,}5 \cdot 10^{5}\ \text{Н}.$$

Эта средняя результирующая сила $\bar{F}$ (направленная вверх) равна разности направленной вверх средней силы $F_1$, действующей на ноги человека со стороны земли, и действующей вниз силы тяжести $mg$, т. е. $\bar{F} = F_1 - mg$. Таким образом, $F_1 = \bar{F} + mg = 3{,}5 \cdot 10^5$ Н $+ 690$ Н $\approx 3{,}5 \times 10^5$ Н.

в) Решение аналогично решению в п. «б», за исключением того, что теперь $D = 0{,}50$ м; следовательно, $\Delta t = (0{,}50\ \text{м})/(5{,}0\ \text{м/с}) = 0{,}10$ с и

$$\bar{F} = (690\ \text{Н} \cdot \text{с})/(0{,}10\ \text{с}) = 6{,}9 \cdot 10^3\ \text{Н}.$$

Тогда средняя сила, действующая вверх на ноги человека, равна $\bar{F}_1 = 6{,}9 \cdot 10^3$ Н $+ 690$ Н $= 7{,}6 \cdot 10^3$ Н. Ясно, что сила, действующая на ступни и ноги, значительно меньше в том случае, когда ноги согнуты в коленях. Действительно, максимальная сила, которую выдерживает кость ноги (табл. 11.2), не столь велика, чтобы она выдержала вычисленную в п. «б» силу. Поэтому несомненно, что при таком приземлении человек сломал бы ногу; этого не случилось бы в условиях приземления п. «в».

## 8.7. Сохранение импульса и энергии при столкновениях

Для большинства столкновительных процессов нам обычно неизвестно, как изменяется во времени сила взаимодействия при столкновении. Тем не менее мы все же можем определить некоторые детали движения после столкновения, если нам известна динамика движения до столкновения; в этом нам помогают законы сохранения импульса и энергии. Мы по-прежнему придерживаемся разумного предположения о том, что импульсные силы, действующие во время столкновения, значительно превосходят остальные силы.

Рассмотрим два тела, масса одного из которых равна $m_1$, а другого $m_2$. Пусть импульсы каждого из этих тел равны соответственно $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ до столкновения и $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ после столкновения (рис. 8.15). Штрихами отметим величины, которые относятся к моменту времени *после* столкновения. Пусть в процессе столкновения в любой момент времени тело 1 действует на тело 2 с силой $\mathbf{F}$; при этом по третьему закону Ньютона тело 2 действует на тело 1 с силой $-\mathbf{F}$. Мы предполагаем, что в течение очень короткого времени столкновения импульсная сила $\mathbf{F}$ значительно превосходит любые другие (внешние) силы, так что в очень хорошем приближении силу $\mathbf{F}$ можно рассматривать как результирующую. Следовательно, изменение импульса тела 2 запишется в виде

$$\Delta\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt,$$

а для тела 1 мы имеем

$$\Delta\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt.$$

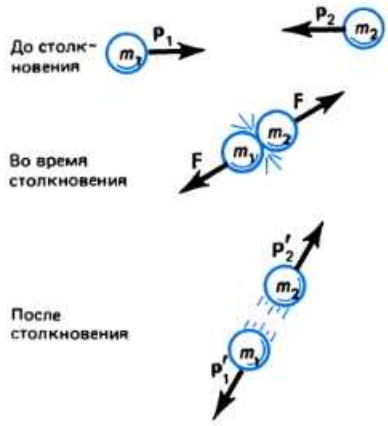



Рис. 8.15. Столкновение двух тел. Импульсы тел до столкновения равны соответственно $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, а после столкновения равны $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$. В процессе столкновения в любой момент времени каждое тело действует на другое с силой, равной и противоположно направленной силе, с которой другое тело действует на первое.

Сравнивая два этих выражения, находим

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2,$$

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2).$$

Перегруппировка слагаемых в последнем выражении дает

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \tag{8.16}$$

Таким образом, полный импульс до столкновения в точности равен полному импульсу после столкновения. *Полный импульс сохраняется.* Разумеется, мы пришли к закону сохранения импульса, который, как мы теперь видим, с высокой точностью выполняется, даже когда действуют внешние силы (требуется только, чтобы эти внешние силы были значительно меньше, чем импульсная сила, действующая в течение времени столкновения). Изменение импульса, обусловленное силой взаимодействия при столкновении, столь велико по сравнению с изменением импульса за счет внешних сил, что последним можно пренебречь. В случае когда внешние силы значительны, необходимо проявлять осторожность; при этом величины, входящие в формулу (8.16), следовало бы рассматривать непосредственно до столкновения и непосредственно после него, поскольку, если величины $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ измерять задолго до столкновения и спустя длительное время после столкновения, они могут существенно измениться под действием внешних сил вследствие того, что интеграл $\int \mathbf{F}\,dt = \Delta\mathbf{p}$ за большой промежуток времени изменит свое значение. Примером этого (уже упоминавшимся выше) может служить действие силы тяжести на летящий теннисный мяч после удара по нему ракеткой. Таким образом, мы можем применить закон сохранения импульса к столкновению только в том случае, когда импульсные силы значительно больше, чем внешние. Мы считаем, что это условие выполняется для рассматриваемых здесь столкновений (на самом деле именно так мы определяем само понятие столкнове-

ния). Следует заметить, что мы должны не только определить импульсы в моменты времени, непосредственно примыкающие к времени столкновения, так чтобы внешние силы не могли повлиять существенно на импульсы, но и быть уверенными также в том, что измеренные нами скорости получены только после того, как импульсные силы между телами прекратили свое действие.

Согласно закону сохранения энергии, полная энергия рассматриваемых нами двух тел будет также сохраняться при столкновении. Но поскольку при столкновении энергия может переходить в различные формы, этот закон не всегда используется. Однако в некоторых столкновениях сохраняется полная *кинетическая* энергия двух частиц; такие столкновения называют **упругими**, и для них можно написать следующее равенство:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

[упругое столкновение]. (8.17)

Разумеется, в течение короткого времени, когда два тела находятся в контакте, кинетическая энергия частично (или полностью) мгновенно переходит в потенциальную энергию (упругую, электрическую или какую-либо иную). Однако полная кинетическая энергия до столкновения в точности равна полной кинетической энергии после столкновения.

Столкновения, происходящие на атомном уровне, т. е. столкновения между атомами, ядрами и элементарными частицами, во многих случаях можно считать упругими. Однако в макроскопическом мире, с которым мы имеем дело повседневно, упругое столкновение – это практически недостижимый идеальный случай, который никогда полностью не реализуется[1)], поскольку в процессе столкновения по крайней мере небольшая часть энергии всегда переходит в тепловую энергию (возможно, также в энергию звука или другие аналогичные формы энергии). Тем не менее столкновение двух упругих твердых (т. е. обладающих очень малой деформацией) шаров, таких, как бильярдные шары, можно считать упругим, и это столкновение нередко рассматривают в качестве примера упругого столкновения.

## 8.8. Упругие столкновения в одном измерении

Применим теперь законы сохранения импульса и кинетической энергии к лобовому упругому столкновению двух частиц, так что все движение происходит вдоль

[1)] Это связано с чрезвычайно большим числом степеней свободы у макроскопических тел, а также с отсутствием для них условий квантования энергии. – *Прим. ред.*

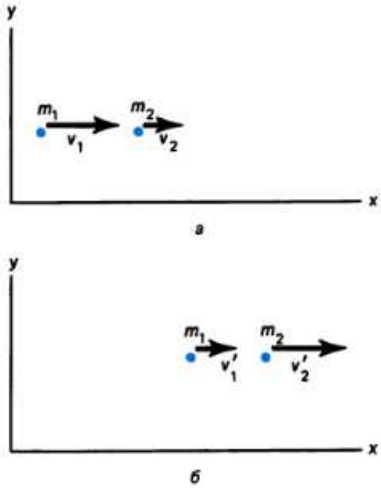



Рис. 8.16. Две частицы, одна из которых имеет массу $m_1$, а другая $m_2$. *а* – до столкновения; *б* – после столкновения.

одной линии. Для общности предположим, что обе частицы первоначально двигались со скоростями $v_1$ и $v_2$ вдоль оси $x$ (рис. 8.16, *а*); после столкновения их скорости стали равны $v'_1$ и $v'_2$ (рис. 8.16, *б*). При любом значении $v>0$ частица движется вправо (координата $x$ возрастает), в то время как при $v<0$ частица движется влево и координата $x$ уменьшается.

Из закона сохранения импульса имеем

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 .$$

Поскольку столкновение предполагается упругим, кинетическая энергия также сохраняется:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 .$$

Таким образом, мы имеем два уравнения для двух неизвестных. Если заданы массы и начальные скорости частиц, то мы можем найти скорости этих частиц $v'_1$ и $v'_2$ после столкновения. Ниже мы выполним этот расчет для некоторых частных случаев, но прежде всего получим полезную теорему. Для этого перепишем первое уравнение, выражающее закон сохранения импульса, в виде

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2), \qquad (8.18а)$$

а второе уравнение, выражающее закон сохранения кинетической энергии, – в виде

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

или

$$m_1 (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2)(v'_2 + v_2). \qquad (8.18б)$$

Разделив затем уравнение (8.18б) на (8.18а) (в предполо-

жении, что $v_1 \neq v_1'$ и $v_2 \neq v_2'$)[1], получим

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 . \qquad (8.18в)$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' . \qquad (8.19)$$

Это и есть теорема, которую мы стремились доказать. Она представляет собой интересный результат: относительная скорость двух частиц после столкновения в точности равна их относительной скорости до столкновения; это верно для любого лобового упругого столкновения независимо от того, какие массы имеют частицы.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи лобового упругого столкновения. Будем считать при этом, что значения $v_1$, $v_2$, $m_1$ и $m_2$ нам известны и нас интересуют скорости $v_1'$ и $v_2'$ частиц после столкновения.

**1.** Частицы с одинаковыми массами ($m_1 = m_2$). Из закона сохранения импульса имеем

$$v_1 + v_2 = v_1' + v_2' .$$

Поскольку неизвестных величин две, необходимо еще одно уравнение. Можно было бы использовать закон сохранения кинетической энергии, но проще применить уравнение (8.19), согласно которому относительные скорости частиц до и после столкновения одинаковы:

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' .$$

Сумма этих двух уравнений дает

$$v_2' = v_1 ,$$

а их разность –

$$v_1' = v_2 .$$

Таким образом, в результате столкновения частицы обмениваются скоростями; частица 2 приобретает после столкновения скорость, которую имела частица 1 до столкновения, и наоборот. Если частица 2 первоначально покоилась ($v_2 = 0$), то мы имеем

$$v_2' = v_1 , \quad v_1' = 0.$$

Иными словами, частица 1 полностью теряет свою скорость и останавливается, в то время как частица 2 приобретает скорость, которую имела частица 1 до столкновения. Этот эффект хорошо известен опытным игрокам на бильярде.

---

[1] Заметим, что уравнениям (8.18а) и (8.19б), выражающим законы сохранения импульса и кинетической энергии, удовлетворяет следующее решение $v_1' = v_1$ и $v_2' = v_2$. Это решение правильное, но оно не очень интересно. Оно соответствует случаю, когда столкновение вообще отсутствует, т. е. обе частицы проходят мимо друг друга.

**2.** Частица 2 первоначально покоится ($v_2 = 0$). Эта ситуация часто встречается на практике, когда движущееся тело сталкивается с неподвижным. Объединяя уравнение сохранения импульсов с полученными выше соотношениями для $v_2'$ и $v_1'$, получаем

$$v_2' = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right), \quad v_1' = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

Представляют интерес некоторые частные случаи:
**а.** $v_2 = 0$, $m_1 = m_2$. Здесь мы имеем $v_2' = v_1$ и $v_1' = 0$. Этот случай рассмотрен выше в п. 1, и мы приходим к тому же результату: если сталкиваются частицы одинаковой массы, одна из которых первоначально покоилась, то скорость налетающей частицы полностью передается покоившейся частице.
**б.** $v_2 = 0$, $m_1 \gg m_2$. Это случай, когда очень массивная налетающая частица сталкивается с легкой покоящейся частицей. Используя приведенные выше соотношения, имеем

$$v_2' \approx 2v_1, \quad v_1' \approx v_1.$$

Таким образом, скорость массивной налетающей частицы практически не изменяется, в то время как первоначально покоившаяся легкая частица приобретает скорость, равную удвоенной скорости налетающей частицы. Например, скорость массивного шара при игре в кегли практически не изменяется при столкновении со значительно более легкими кеглями.
**в.** $v_2 = 0$, $m_1 \ll m_2$. Движущееся легкое тело сталкивается с очень массивным покоящимся телом. В этом случае

$$v_2' \approx 0, \quad v_1' \approx -v_1.$$

Массивное тело практически остается в покое, тогда как очень легкое налетающее тело отскакивает практически с той же по величине (но противоположно направленной) скоростью, которую оно имело до столкновения. Например, если теннисный мяч сталкивается в «лоб» с покоящимся шаром для игры в кегли, то шар практически не «почувствует» этого, в то время как мяч «отразится» от него почти с не изменившейся по величине скоростью, как если бы он столкнулся с твердой неподвижной стенкой.

Нетрудно показать (см. задачу 50), что для любого лобового упругого столкновения выполняются следующие соотношения:

$$v_2' = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right), \tag{8.20а}$$

$$v_1' = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right). \tag{8.20б}$$

Разумеется, эти общие соотношения не следует стараться запомнить: при необходимости их всегда можно быстро вывести из законов сохранения. При решении многих задач проще всего исходить из условий, характерных именно для данной задачи, и повторить вывод с самого начала, как это было сделано в рассмотренных выше частных случаях; продемонстрируем это на следующем примере.

**Пример 8.9.** Протон массой 1,01 а. е. м. (атомная единица массы), движущийся со скоростью $3{,}60 \cdot 10^4$ м/с, испытывает лобовое упругое столкновение с первоначально покоящимся ядром гелия (He) ($m_{He} = 4{,}00$ а. е. м.). Чему равны скорости протона и ядра гелия после столкновения?

**Решение.** В разд. 4.3 мы показали, что 1 а. е. м. $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг, но нам это соотношение единиц не понадобится. Мы имеем $v_2 = v_{He} = 0$, $v_1 = v_p = 3{,}60 \times 10^4$ м/с. Требуется найти скорости $v'_p$ и $v'_{He}$ после столкновения. Запишем закон сохранения импульса:

$$m_p v_p + 0 = m_p v'_p + m_{He} v'_{He}.$$

Из закона сохранения кинетической энергии имеем

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 + 0 = \frac{1}{2} m_p v_p'^2 + \frac{1}{2} m_{He} v_{He}'^2.$$

Первое уравнение дает

$$v'_p = v_p - \left(\frac{m_{He}}{m_p}\right) v'_{He}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, находим

$$(v'_{He})^2 - (v'_{He})\left(\frac{2m_p v_p}{m_p + m_{He}}\right) = 0.$$

Последнее уравнение имеет два решения:

$$v'_{He} = 0, \qquad v'_{He} = \frac{2m_p v_p}{m_p + m_{He}} = 1{,}45 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Этим скоростям соответствуют скорости протона

$$v'_p = v_p - \left(\frac{m_{He}}{m_p}\right) v'_{He} = v_p = 3{,}60 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

и

$$v'_p = v_p - \left(\frac{m_{He}}{m_p}\right)\left(\frac{2m_p v_p}{m_p + m_{He}}\right) = -0{,}597 v_p = -2{,}15 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Первое решение $v'_{He} = 0$, $v'_p = v_p$ соответствует отсутствию столкновения. Интерес представляет именно второе решение: $v'_{He} = 1{,}45 \cdot 10^4$ м/с, $v'_p = -2{,}15 \cdot 10^4$ м/с. Заметим, что протон изменяет направление своего движения после столкновения, причем величина его скорости меньше первоначальной.

**Пример 8.10.** В ядерном реакторе происходит высвобождение нейтронов (и энергии), когда ядра[1] урана ($_{92}U^{235}$) испытывают деление (распад на части). Процесс деления происходит с заметной скоростью лишь при условии, что ядра $_{92}U^{235}$ сталкиваются с очень медленно движущимися нейтронами. Нейтроны, испущенные в предшествующих актах деления, движутся быстро; поэтому для поддержания цепной реакции нейтроны должны быть быстро замедлены, прежде чем они покинут топливные урановые стержни. Вещество, используемое для замедления нейтронов, называется *замедлителем*. Какое вещество (или класс веществ) наилучшим образом отвечает этой цели?

[1] Левый нижний индекс 92 указывает число протонов в ядре, правый верхний индекс 235 указывает полное число нуклонов (протонов и нейтронов) и примерно совпадает с массой ядра, выраженной в а.е.м. (см. гл. 42 в т. 2 настоящей книги).

**Решение.** Можно считать, что атомы замедлителя практически покоятся. Это означает, что $v_2 = 0$, если принять, что скорость нейтрона равна $v_1$; данный случай соответствует рассмотренному нами выше случаю 2. В частности, мы показали, что если $m_2$ (масса атомов замедлителя) будет значительно больше (или значительно меньше) массы нейтрона $m_1$, то скорость нейтрона не будет заметно уменьшена. Но если замедлитель изготовить из вещества, у которого атомная масса близка к массе нейтрона ($m_1 \approx m_2$), то скорость нейтрона после лобового столкновения уменьшится фактически до нуля ($v_1' \approx 0$). У самого легкого атома, а именно у атома водорода ${}_1H^1$, масса почти точно совпадает с массой нейтрона; таким образом, водород был бы идеальным замедлителем. К сожалению, обычный водород имеет сильную тенденцию к поглощению нейтронов и потому бесполезен для целей замедления. Однако изотоп водорода, у которого масса вдвое больше (${}_1H^2$, так называемый *дейтерий*, или *тяжелый водород*) не поглощает большого количества нейтронов и потому является практически наилучшим замедлителем. Обычно атомы дейтерия вводят в состав молекул воды $H_2O$, которая в этом случае называется тяжелой водой. В качестве замедлителя часто используется также углерод (${}_6C^{12}$), масса которого не слишком велика, причем он обладает рядом других практических преимуществ. Этому вопросу посвящена задача 51.

## *8.9. Упругие столкновения в двух и трех измерениях

Законы сохранения импульса и энергии можно применить также к столкновениям в двух или трех измерениях. В этих случаях приходится учитывать векторный характер импульса. Чаще всего рассматриваются два случая столкновений: 1) одна частица (называемая налетающей частицей или снарядом) ударяется в другую частицу, находившуюся первоначально в покое (называемую мишенью), и 2) начальные импульсы обеих частиц направлены вдоль одной прямой (обычно навстречу друг другу). В любом случае, если столкновение не является лобовым, конечные импульсы (после столкновения) будут направлены иначе, чем начальные, так что столкновение является, по существу, двумерным, поскольку траектории обеих частиц будут лежать в плоскости, определяемой начальным и конечным импульсами (см. вопрос 29).

Рассмотрим упругое столкновение первого типа: налетающая частица сталкивается с неподвижной мишенью. (Предположение о неподвижности мишени не является слишком ограничивающим, поскольку система отсчета определяется нашим выбором, и мы всегда ее можем выбрать таким образом, чтобы $v_2 = 0$.) Такие столкновения являются типичными для экспериментов в атомной и ядерной физике. Налетающие частицы, образовавшиеся вследствие радиоактивного распада или разгона в ускорителе на высокие энергии, сталкиваются с покоящимся ядром – мишенью.

На рис. 8.17 показано лобовое столкновение налетающей частицы 1 (массой $m_1$), движущейся вдоль оси $x$, с покоящейся частицей 2 (массой $m_2$). После их столкновения эти частицы, например бильярдные шары, рас-

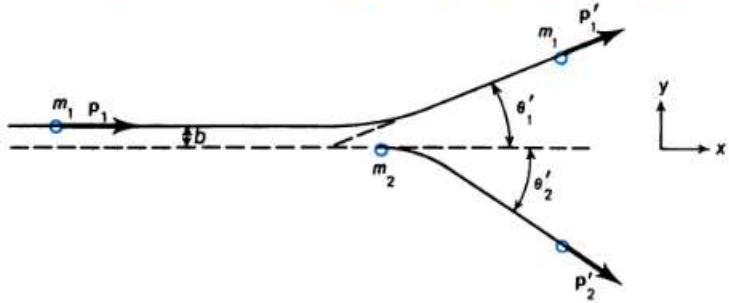



Рис. 8.17. Налетающая частица 1 сталкивается с частицей 2 (мишенью); прицельный параметр равен $b$. После столкновения частицы разлетаются с импульсами соответственно $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ под углами $\theta'_1$ и $\theta'_2$.

ходятся под углами $\theta'_1$ и $\theta'_2$ относительно направления первоначального движения частицы 1 (оси $x$). Если частицы электрически заряжены или же являются ядерными частицами, то они могут начать отклоняться еще до непосредственного столкновения между собой благодаря силе (электрической или ядерной), действующей между ними. (Можно представлять себе, например, два магнита ориентированных таким образом, что они отталкивают друг друга; когда один из них движется по направлению к другому, второй будет удаляться от него прежде, чем они придут в соприкосновение друг с другом.)

Расстояние $b$ на рис. 8.17 называется *прицельным параметром*. Эта величина определяется как расстояние по перпендикуляру между первоначальной траекторией налетающей частицы и параллельной ей линией, проходящей через центр частицы-мишени; величина $b$ является мерой отклонения столкновения от лобового (при $b = 0$ оно является лобовым).

Применим теперь законы сохранения импульса и кинетической энергии к упругому столкновению, такому, как на рис. 8.17. Согласно закону сохранения кинетической энергии (с учетом $v_2 = 0$), мы имеем

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 . \tag{8.21а}$$

Пусть как начальный, так и конечный импульсы расположены в плоскости $xy$. Поскольку импульс является векторной величиной, его сохранение означает неизменность его проекций по осям $x$ и $y$. Таким образом, в направлении оси $x$ имеем

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2 . \tag{8.21б}$$

Поскольку вдоль оси $y$ движение первоначально отсутствует, составляющая полного импульса вдоль оси $y$ равна нулю:

$$0 = m_1 v'_1 \sin\theta'_1 + m_2 v'_2 \sin\theta'_2 . \tag{8.21в}$$

Таким образом, мы имеем три независимых уравнения[1].

[1] Заметим, что уравнения (8.21б) и (8.21в) справедливы даже в том случае, когда столкновение является неупругим и кинетическая энергия сохраняется.

Это значит, что мы можем найти самое большее три неизвестные величины. Если заданы $m_1$, $m_2$, $v_1$ (а в общем случае и $v_2$, если оно не равно нулю), то мы не можем однозначно определить четыре конечных значения $v'_1$, $v'_2$, $\theta'_1$ и $\theta'_2$, т.е. при определенных значениях трех из них четвертое (например, $\theta'_2$) может быть произвольным. Однако если мы измерим одну из этих величин (например, $\theta'_1$), то остальные три могут быть найдены с помощью записанных выше трех уравнений. При этом следует быть уверенным в том, что все скорости и углы измеряются значительно раньше (или значительно позже) столкновения, так чтобы сила между частицами еще не начала (или уже перестала) действовать.

**Пример 8.11.** Протон, движущийся со скоростью $8{,}2 \cdot 10^5$ м/с, упруго сталкивается с покоящимся протоном водородной мишени. Согласно наблюдению, один из протонов отклонился на 60° от направления движения налетающего протона. Под каким углом будет наблюдаться второй протон, и каковы будут скорости обоих протонов после столкновения?

**Решение.** Поскольку $m_1 = m_2$, уравнения (8.21а)–(8.21в) принимают соответственно вид

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2,$$
$$v_1 = v'_1 \cos\theta'_1 + v'_2 \cos\theta'_2,$$
$$0 = v'_1 \sin\theta'_1 + v'_2 \sin\theta'_2,$$

где $v_1 = 8{,}2 \cdot 10^5$ м/с и $\theta'_1 = 60°$ заданы. Во втором и третьем уравнениях перенесем члены, содержащие $v'_1$, в левую часть и возведем оба уравнения в квадрат:

$$v_1^2 - 2v_1 v'_1 \cos\theta'_1 + v_1'^2 \cos^2\theta'_1 = v_2'^2 \cos^2\theta'_2,$$
$$v_1'^2 \sin^2\theta'_1 = v_2'^2 \sin^2\theta'_2.$$

Складывая два последних уравнения и используя тождество $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, получаем

$$v_1^2 - 2v_1 v'_1 \cos\theta'_1 + v_1'^2 = v_2'^2.$$

Подставляя в это уравнение выражение $v_2'^2 = v_1^2 - v_1'^2$, полученное из первого уравнения, находим

$$2v_1'^2 = 2v_1 v'_1 \cos\theta'_1,$$

или

$$v'_1 = v_1 \cos\theta'_1 = (8{,}2 \cdot 10^5 \text{ м/с})(\cos 60°) = 4{,}1 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Для нахождения $v'_2$ используем вновь первое уравнение (закон сохранения кинетической энергии):

$$v'_2 = \sqrt{v_1^2 - v_1'^2} = 7{,}1 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Наконец, из третьего уравнения имеем

$$\sin\theta'_2 = -\frac{v'_1}{v'_2}\sin\theta'_1 = -\left(\frac{4{,}1 \cdot 10^5 \text{ м/с}}{7{,}1 \cdot 10^5 \text{ м/с}}\right)(0{,}866) = -0{,}50,$$

откуда находим $\theta'_2 = -30°$. (Знак минус здесь означает лишь то, что частица 2

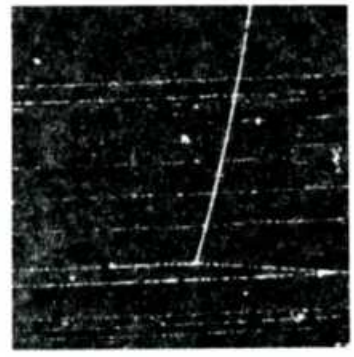


Рис. 8.18. Фото столкновения протона с протоном в пузырьковой камере, наполненной водородом (этот прибор позволяет сделать видимыми траектории элементарных частиц). Множество линий представляют собой траектории входящих в камеру протонов, которые могут столкнуться с протонами водорода в пузырьковой камере. (С разрешения Брукхейвенской национальной лаборатории.)

движется под углом ниже оси $x$, когда частица 1 движется выше оси $x$, как показано на рис. 8.17). Пример рассмотренного здесь столкновения изображен на фото, полученном в пузырьковой камере (рис. 8.18). Заметим, что после столкновения частиц обе траектории направлены друг к другу под прямым углом. Можно показать, что это утверждение сохраняет силу и в общем случае любых (отличных от лобовых) столкновений двух частиц одинаковых масс, одна из которых до столкновения находилась в покое (см. задачи).

Поскольку при анализе скоростей и направлений движения сталкивающихся частиц силы сами по себе не рассматриваются, этот анализ иногда называют кинематикой столкновений.

## *8.10. Система отсчета, связанная с центром масс (СЦМ)

В любом столкновении, будь оно упругим или неупругим, когда внешними силами можно пренебречь, полный импульс $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ сохраняется, т. е. вектор $\mathbf{P}$ один и тот же как до столкновения, так и после него. Это утверждение сохраняет силу в любой системе координат и в любой системе отсчета, которую мы захотим выбрать. Однако, несмотря на сохранение самого вектора $\mathbf{P}$, его величина зависит от выбора системы отсчета.

Столкновения можно рассматривать во многих системах отсчета. Однако среди них имеется система отсчета, в которой такой анализ провести наиболее просто: в этой системе отсчета полный импульс $\mathbf{P}$ равен нулю. Такая система отсчета называется *системой центра масс* (СЦМ), поскольку в ней центр масс двух сталкивающихся частиц, определяемый выражением

$$\mathbf{r}_{\text{цм}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

должен оставаться в покое. Это следует из того, что, согласно определению СЦМ, полный импульс двух частиц в этой системе

$$\mathbf{P}_{\text{цм}} = (m_1 + m_2)\frac{d\mathbf{r}_{\text{цм}}}{dt} = \left(m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right) = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

должен быть равен нулю:

$$m_1\mathbf{v}_1^* + m_2\mathbf{v}_2^* = 0 \qquad \text{[СЦМ]}.$$

Звездочкой здесь и далее обозначаются величины, рассматриваемые в СЦМ.

В системе центра масс, которую мы рассмотрим здесь лишь кратко, две частицы движутся навстречу друг другу с равными по величине и противоположно направленными импульсами ($\mathbf{p}_1^* = -\mathbf{p}_2^*$), поскольку $\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = \mathbf{P} = 0$. Если столкновение упругое и лобовое, то обе частицы «отражаются» друг от друга и удаляются в направлениях, откуда они пришли, с теми же величинами скоростей.

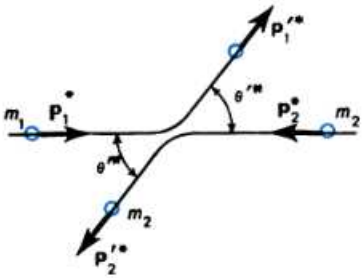



Рис. 8.19. Упругое столкновение в СЦМ: $p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*$.

Если столкновение не лобовое, то частицы сохраняют те же самые скорости, что и до столкновения, но отражаются под некоторым углом $\theta'^*$. Как показано на рис. 8.19, частицы движутся в противоположных направлениях (поскольку $\mathbf{p}_1'^* + \mathbf{p}_2'^* = \mathbf{P}'^* = 0$), так что направление движения частиц после столкновения определяется всего лишь одним углом $\theta'^*$. Даже если столкновение неупругое, по-прежнему $\mathbf{p}_1'^* = -\mathbf{p}_2'^*$, т.е. импульсы после столкновения равны по величине и противоположны по направлению. При упругом столкновении величины импульсов не изменяются, и мы имеем $p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*$. Как при упругих, так и при неупругих столкновениях в этой системе отсчета импульсы не зависят от угла, как это имеет место в других системах отсчета (например, на рис. 8.17). Траектория в конечном состоянии является, по существу, одномерной, хотя и повернута на угол $\theta'^*$ от линии первоначального движения. Таким образом, в СЦМ картина столкновений характеризуется высокой степенью симметрии, и поэтому анализ движения в ней осуществить проще, чем в любой другой системе отсчета.

Система центра масс позволяет не только получить наиболее простое кинематическое описание столкновений, но в этой системе проще всего выглядят и теории, развитые физиками для объяснения ядерных сил. По этим причинам (а также ввиду различия лабораторных систем отсчета) столкновения ядерных и других элементарных частиц общепринято рассматривать в СЦМ. Хотя некоторые физические эксперименты с элементарными частицами действительно проводятся в СЦМ (к ним относятся, в частности, эксперименты на накопительных кольцах, где частицы заставляют двигаться навстречу друг другу с равными по величине, но противоположно направленными импульсами), многие эксперименты выполняются в условиях, когда одна из частиц (мишень) покоится, а другая (налетающая) частица с высокой скоростью сталкивается с ней; этот случай показан на рис. 8.17. Последняя ситуация типична для обычных лабораторных установок, и соответствующую систему отсчета, в которой одна частица (мишень) покоится, называют, как правило, *лабораторной системой отсчета* (лаб. системой отсчета). Результаты измерений, полученные в лаб. системе отсчета, можно по определенным правилам перевести в СЦМ. Этот вопрос рассматривать здесь подробно мы не будем, а оставим его для задач.

## *8.11. Неупругие столкновения

Столкновения, в которых кинетическая энергия частиц не сохраняется, называются *неупругими столкновениями*. В таких столкновениях часть начальной кинетической энергии преобразуется в другие формы энергии, например в

тепловую или потенциальную, так что после столкновения полная кинетическая энергия оказывается меньше, чем до столкновения. Может быть и обратная картина, когда при столкновении высвобождается потенциальная энергия (такая, как химическая или ядерная); в этом случае полная кинетическая энергия после столкновения может быть больше исходной. Если в результате столкновения два тела «слипаются», т. е. движутся далее как одно целое, то такие столкновения называются *полностью неупругими*. Примерами могут служить два сталкивающихся пластилиновых шара или два железнодорожных вагона, сцепляющихся в ходе столкновения (пример 8.6). При неупругом столкновении кинетическая энергия не обязательно полностью превращается в другие формы энергии. Так, в примере 8.6 мы видели, что, когда движущийся железнодорожный вагон сталкивается с покоящимся, сцепленная пара продолжает движение с определенной кинетической энергией. Несмотря на то что в неупругих столкновениях кинетическая энергия не сохраняется, полная энергия сохраняется; сохраняется также и вектор полного импульса.

**Пример 8.12.** Какая часть начальной кинетической энергии переходит в тепловую или другие формы энергии в полностью неупругом столкновении, рассмотренном в примере 8.6?

**Решение.** Первоначально кинетическая энергия была равна $(1/2)\,m_1 v_1^2 = (1/2) \times$ $\times\,(10\,000\text{ кг})\,(24{,}0\text{ м/с})^2 = 2{,}88 \cdot 10^6$ Дж. После столкновения полная кинетическая энергия составляет $(1/2)\,(20\,000\text{ кг}) \times$ $\times\,(12{,}0\text{ м/с})^2 = 1{,}44 \cdot 10^6$ Дж. Следовательно, энергия, преобразованная в другие формы, равна $2{,}88 \cdot 10^6$ Дж $- 1{,}44 \cdot 10^6$ Дж $=$ $= 1{,}44 \cdot 10^6$ Дж.

**Пример 8.13.** *Баллистический маятник* – это устройство, предназначенное для измерения скорости летящего тела (например, пули). Тело массой $m$ «выстреливается» в большой брусок (из дерева или другого материала массой $M$), подвешенный подобно маятнику. (Величина $M$, как правило, несколько больше $m$). В результате столкновения центр масс баллистического маятника (вместе с застрявшим в нем телом) отклоняется вверх на максимальную высоту $h$ (рис. 8.20). Найдите соотношение между начальной скоростью тела $v$ и высотой $h$.

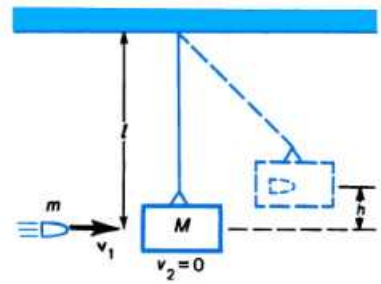



Рис. 8.20. Баллистический маятник.

**Решение.** Решать эту задачу будем в два этапа, а именно рассмотрим сначала само столкновение, а затем последующее движение маятника от вертикального положения до высоты $h$. На первом этапе решения предположим, что время столкновения очень мало, так что налетающее тело остановится по времени раньше, чем брусок заметно сдвинется из своего первоначального положения, в котором его ЦМ находится строго под точкой подвеса. Поскольку результирующая внешняя сила отсутствует, полный импульс сохраняется:

$$m v_1 = (m + M)\, v';$$

здесь $v'$ – скорость бруска (вместе с застрявшим в нем телом) сразу после столкновения, т. е. до того, как они заметно сдвинутся. Как только маятник начинает двигаться, возникает результирующая внешняя сила (сила тяжести, стремящаяся вернуть маятник в его исходное вертикальное положение). Поэтому при решении второй части задачи мы не сможем применить закон сохранения импульса. Однако в этом случае мы сможем использовать закон сохранения механической энергии, поскольку сразу после столкновения кинетическая энергия полностью преобразуется в гравитационную потенциальную энергию[1)], когда маятник достигает своей максимальной высоты $h$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = (m+M)gh.$$

Отсюда находим $v' = \sqrt{2gh}$. (Почему при этом работа, совершаемая силой натяжения нити, поддерживающей маятник, равна нулю?) Объединяя записанные нами выше два выражения, приходим к окончательному результату:

$$v_1 = \frac{m+M}{m}v' = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}.$$

При получении этого результата нам пришлось учитывать соответствующие обстоятельства и использовать подходящие законы сохранения: в первой части решения мы могли использовать только закон сохранения импульса, поскольку столкновение является неупругим и механическая энергия в нем не сохраняется; во второй части справедлив закон сохранения механической энергии, но не импульса. Если во время замедления налетающей частицы в бруске маятник заметно сдвигается, то в течение первого этапа *действует* внешняя сила, так что закон сохранения импульса не выполняется, и это необходимо учитывать.

## *8.12. Системы с переменной массой

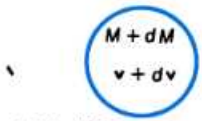
Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае проще всего обратиться к формуле (8.12): $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}$, где $\mathbf{P}$ – полный импульс системы, а $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ – результирующая внешняя сила, действующая на систему. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса. Важным примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса $M$ ракеты во время движения уменьшается, т. е. $dM/dt < 0$. Другой пример систем с переменной массой представляет собой погрузка сыпучих или иных материалов на транспортерную ленту конвейера; при этом масса $M$ нагруженного конвейера возрастает, т. е. $dM/dt > 0$.

Общий случай системы с переменной массой можно исследовать на примере системы, изображенной на рис. 8.21. В некоторый момент времени $t$ система имеет

[1)] При этом неявно предполагается, что трением в точке подвеса и другими потерями механической энергии можно пренебречь. – *Прим. ред.*




*а* $P = Mv + dMu$, в момент времени $t$




*б* $P = (M + dM)(v + dv)$, в момент времени $t + dt$

Рис. 8.21. *а* – в момент времени $t$ тело массой $dM$ близко к тому, чтобы войти в систему массой $M$; *б* – в момент времени $t + dt$ тело массой $dM$ вошло в систему.

массу $M$ и импульс $M\mathbf{v}$; по направлению к ней движется со скоростью $\mathbf{u}$ небольшое (бесконечно малое) тело массой $dM$, которое находится в состоянии, близком к тому, чтобы войти в рассматриваемую систему. Для простоты будем называть этот процесс «столкновением». За бесконечно малый промежуток времени $dt$ к массе системы $M$ добавится масса $dM$. Таким образом, через время $dt$ масса нашей системы изменится от $M$ до $M + dM$. (Заметим, что $dM$ может быть отрицательной величиной, например для ракеты, летящей вперед за счет выброшенных газов.)

Для того чтобы применить формулу $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}$ (8.12), необходимо рассмотреть определенную фиксированную систему частиц. Иными словами, изменение импульса $d\mathbf{P}$ мы должны рассматривать у одних и тех же частиц как до столкновения, так и после него. *Полную систему* мы определим как включающую в себя массы $M$ и $dM$. Тогда в исходном состоянии, т. е. в момент времени $t$, ее полный импульс равен $M\mathbf{v} + \mathbf{u}\,dM$. В момент времени $t + dt$ (после того как масса $dM$ присоединилась к массе $M$) скорость системы в целом становится равной $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, а ее полный импульс равен $(M + dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Таким образом, изменение импульса $d\mathbf{P}$ запишется в виде

$$d\mathbf{P} = (M + dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (M\mathbf{v} + \mathbf{u}\,dM) =$$

$$= M\,d\mathbf{v} + \mathbf{v}\,dM + dM\,d\mathbf{v} - \mathbf{u}\,dM.$$

При этом в соответствии с формулой (8.12) имеем

$$\mathbf{F}_{\text{внешн}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{M\,d\mathbf{v} + \mathbf{v}\,dM - \mathbf{u}\,dM}{dt},$$

или

$$\mathbf{F}_{\text{внешн}} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathbf{u} - \mathbf{v})\frac{dM}{dt}. \qquad (8.22a)$$

При написании этих формул мы опустили слагаемое $dM\,d\mathbf{v}/dt$, поскольку в пределе бесконечно малых величин оно равно нулю. Заметим, что разность $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ есть не что иное, как скорость $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ тела массой $dM$ относительно

скорости тела $M$. Таким образом,

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

– это скорость, с которой масса $dM$ входит в систему с точки зрения наблюдателя, связанного с массой $M$. Уравнение (8.22а) можно переписать теперь в виде

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}} + \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dM}{dt}. \qquad (8.22б)$$

Первое слагаемое в правой части $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ описывает внешнюю силу, действующую на систему в целом (в случае ракеты в нее следует включить силу тяжести и силу сопротивления воздуха). В нее *не* входит сила, с которой тело массой $dM$ действует на тело массой $M$ в результате их столкновения, поскольку для системы в целом (полной системы) эта сила является внутренней. Второе слагаемое в правой части $\mathbf{v}_{\text{отн}}(dM/dt)$ описывает скорость, с которой импульс передается системе (или уносится из нее) благодаря добавлению к ней или выносу из нее массы. Это слагаемое можно поэтому рассматривать как своего рода силу, которая обусловлена добавлением (или выбрасыванием) массы и действует на систему массой $M$. Для ракеты это слагаемое называют силой *реактивной тяги*, так как оно описывает силу, возникающую в результате выбрасывания продуктов сгорания и действующую на ракету.

**Пример 8.14.** Полностью заправленная топливом ракета имеет массу 21 000 кг, из которых 15 000 кг приходится на топливо. Расход топлива в процессе сгорания составляет 190 кг/с, а скорость вылета продуктов сгорания относительно ракеты равна 2800 м/с. При условии что ракету запускают вертикально вверх, вычислите: а) силу реактивной тяги, действующую на ракету; б) результирующую силу, действующую на ракету в момент запуска, а также в момент, предшествующий полному выгоранию топлива; в) скорость ракеты в момент выгорания топлива. Мы пренебрежем сопротивлением воздуха и будем считать, что ускорение свободного падения постоянно и равно $g = 9{,}80$ м/с$^2$.

**Решение.** а) Сила реактивной тяги равна

$$v_{\text{отн}}\frac{dM}{dt} = (2800\text{ м/с})(190\text{ кг/с}) = 5{,}3\cdot 10^5\text{ Н}.$$

б) Внешняя сила $F_{\text{внешн}}$ равна $Mg = (2{,}1\cdot 10^4\text{ кг})(9{,}80\text{ м/с}^2) = 2{,}1\cdot 10^5$ Н в начальный момент и $(6{,}0\cdot 10^3\text{ кг})\times(9{,}80\text{ м/с}^2) = 5{,}9\cdot 10^4$ Н к моменту выгорания топлива. Следовательно, в момент поджига топлива результирующая сила равна

$$5{,}3\cdot 10^5\text{ Н} - 2{,}1\cdot 10^5\text{ Н} = 3{,}2\cdot 10^5\text{ Н} \quad \text{(поджиг)},$$

тогда как непосредственно перед выгоранием она равна

$$5{,}3\cdot 10^5\text{ Н} - 5{,}9\cdot 10^4\text{ Н} = 4{,}7\cdot 10^5\text{ Н} \quad \text{(выгорание)}.$$

*После* выгорания результирующая сила равна, разумеется, силе тяжести, действующей на ракету без топлива, т. е. $-5{,}9\cdot 10^4$ Н.

в) Из (8.22б) имеем

$$dv = \frac{F_{\text{внешн}}}{M}dt + v_{\text{отн}}\frac{dM}{M},$$

где $F_{\text{внешн}} = -Mg$, причем $M$ – масса ракеты, зависящая от времени. Поскольку скорость $v_{\text{отн}}$ постоянная, это уравнение

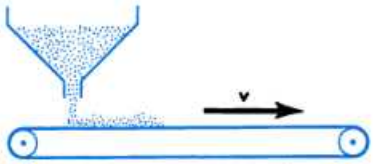



Рис. 8.22. Гравий высыпается на ленту транспортера из бункера.

нетрудно проинтегрировать:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_{0}^{t} g\,dt + v_{\text{отн}} \int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M},$$

откуда находим

$$v = v_0 - gt + v_{\text{отн}} \ln \frac{M}{M_0}.$$

Здесь $v$ – скорость, а $M$ – масса ракеты в любой момент времени $t$. Заметим, что $v_{\text{отн}}$ – отрицательная величина (в нашем случае равная $-2800$ м/с), поскольку она направлена в сторону, противоположную направлению движения; величина $\ln(M/M_0)$ также отрицательна вследствие того, что $M_0 > M$; поэтому у последнего слагаемого, обусловленного силой тяги, знак положительный, и эта сила способствует увеличению скорости. Время, необходимое для полного выгорания топлива (массой 15 000 кг), при условии его расхода 190 кг/с составляет

$$t = \frac{1{,}50 \cdot 10^4 \text{ кг}}{190 \text{ кг/с}} = 79{,}0 \text{ с}.$$

Если принять $v_0 = 0$, то

$$v = -(9{,}80 \text{ м/с}^2)(79 \text{ с}) + \\ + (-2800 \text{ м/с})\left(\ln \frac{6000 \text{ кг}}{21\,000 \text{ кг}}\right) = 2830 \text{ м/с},$$

поскольку $\ln(6/21) = -\ln 3{,}50 = -1{,}25$.

**Пример 8.15.** Из бункера на ленту транспортера высыпается гравий со скоростью 75,0 кг/с (рис. 8.22). Какая сила необходима для того, чтобы обеспечить движение ленты с постоянной скоростью $v = 2{,}20$ м/с? Трением пренебречь.

**Решение.** Будем считать, что бункер находится в покое, т.е. $u = 0$, а лента транспортера пришла в движение, как только начали высыпать гравий, так что $dM/dt = 75{,}0$ кг/с. Поскольку лента перемещается с постоянной скоростью ($dv/dt = 0$), из уравнения (8.22а) имеем

$$F_{\text{внешн}} = M\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dM}{dt} = \\ = 0 - (0 - 2{,}20 \text{ м/с})(75{,}0 \text{ кг/с}) = 165 \text{ Н}.$$

Если бы трением не пренебрегалось, то следовало бы написать $F_{\text{внешн}} = F_{\text{двиг}} - F_{\text{тр}} = 165$ Н, где $F_{\text{двиг}}$ – сила тяги, развиваемая двигателем; знак минус перед $F_{\text{тр}}$ указывает на то, что трение всегда препятствует движению.

## Заключение

*Центр масс* (ЦМ) системы частиц или протяженного тела (которое можно рассматривать как предельный случай непрерывного распределения вещества) определяется следующим образом:

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \qquad y_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \qquad z_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i z_i}{M},$$

или

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \quad y_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int y\,dm, \quad z_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int z\,dm;$$

здесь $M$ – полная масса системы. Важная роль центра масс системы состоит в том, что эта точка движется подобно частице массой $M$, на которую действует та же результирующая внешняя сила $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$. Для системы частиц (или

протяженного тела) это записывается математически в виде второго закона Ньютона:

$$M\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}},$$

где $M$ – полная масса системы (тела), $\mathbf{a}_{\text{ЦМ}}$ – ускорение центра масс системы, $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ – полная (результирующая) внешняя сила, действующая на все части системы. Это же уравнение может быть записано через полный импульс системы $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$ в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}.$$

Если результирующая внешняя сила, действующая на систему, равна нулю, то полный импульс системы сохраняется постоянным. В этом и состоит *закон сохранения импульса*. Его можно сформулировать иначе: полный импульс изолированной системы частиц является постоянным.

Закон сохранения импульса очень полезен при рассмотрении целого класса явлений, называемых *столкновениями*. При столкновении два (или более) тела взаимодействуют друг с другом в течение очень короткого времени; при этом сила, действующая между ними в течение этого времени, очень велика по сравнению с любыми другими действующими силами. *Импульс* такой силы, действующий на тело, определяется следующим образом:

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F}\, dt;$$

он равен изменению импульса тела:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{J}.$$

Импульс сохраняется при любом столкновении. Полная энергия тоже сохраняется, но этот закон приносит пользу лишь в случае, когда в преобразовании участвует только кинетическая энергия. В этом случае кинетическая энергия сохраняется и столкновение называется *упругим;* в противном случае (если кинетическая энергия не сохраняется) столкновение называется *неупругим*.

## Вопросы

1. Почему ЦМ трубки длиной 1 м находится посередине трубки, а для вашей руки или ноги это не так?
2. Покажите на рисунке, как смещается ваш ЦМ, когда вы меняете положение с лежачего на сидячее.
3. Опишите способ аналитического определения ЦМ произвольной тонкой пластинки треугольной формы.
4. Станьте у края открытой двери так, чтобы ноги стояли по обе стороны двери, а живот и кончик носа касались края двери. Попытайтесь стать на цыпочки, не отрывая от двери живота и кончика носа. Почему это не получается?
5. Почему труднее сесть из лежачего положения, когда ваши колени согнуты, чем когда ваши ноги вытянуты вперед?
6. Почему невозможно подняться со стула непосредственно из положения «с прямой спи-

ной», а необходимо предварительно наклониться вперед?

7. Объясните, почему однородный прямоугольный брусок можно поместить на стол только так, чтобы над столом выступало не больше половины его длины?

8. Почему вы стремитесь отклониться назад, когда несете в руках тяжелый груз?

9. Проанализируйте движение катушки с ниткой (рис. 8.23), когда вы тянете нитку а) прямо вверх; б) горизонтально. Как повлияет на движение катушки сила, с которой вы будете тянуть нить?

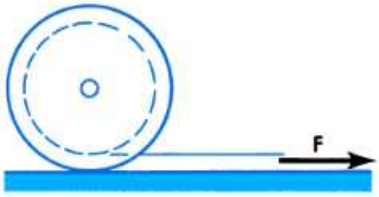



Рис. 8.23. Катушка ниток.

10. Если импульс центра масс тела может измениться лишь под действием внешней силы, то каким образом внутренняя сила, развиваемая двигателем, может ускорять автомобиль?

11. Каким образом можно изменять направление движения ракеты, когда она находится далеко в космическом пространстве в условиях вакуума?

12. Может ли тело иметь импульс и не иметь при этом энергии? А наоборот может быть? Объясните.

13. Мы утверждаем, что импульс сохраняется. Однако большинство движущихся тел в конце концов замедляется и останавливается. Объясните.

14. Два бруска массами $m_1$ и $m_2$, соединенные пружиной, покоятся на столе в отсутствие трения с его поверхностью. Бруски удаляют друг от друга путем растяжения пружины и высвобождают. Опишите последующее движение брусков.

15. Ракета, движущаяся в воздухе по параболической траектории, внезапно разрывается на множество частей (осколков). Что можно сказать о движении этой «системы» осколков?

16. Кинетические энергии легкого и тяжелого тела одинаковы. У какого из них больше импульс?

17. Что происходит с импульсом человека в момент, когда он спрыгивает с дерева на землю?

18. С помощью закона сохранения импульса объясните, каким образом передвигается в воде рыба, совершая маховые движения хвостом?

19. Почему, когда вы отпускаете надутый шар, он начинает летать по комнате?

20. По одной из легенд один богач, имевший при себе мешок с золотыми монетами, однажды замерз и умер, оказавшись на поверхности заледеневшего озера. Он не смог достичь берега, поскольку лед был очень гладкий и трение отсутствовало. Что следовало бы сделать богачу, чтобы спасти свою жизнь, если бы он не был столь жадным?

21. Если бы падающий мяч испытал упругое столкновение с полом, то отразился бы он на исходную высоту? Объясните.

22. Согласно выражению (8.15), чем короче время столкновения, тем больше должна быть сила при данном импульсе силы и, следовательно, больше деформация тела, на которое действует сила. Объясните на основе этого принцип действия «воздушного мешка» – устройства пассивной безопасности, которое надувается во время столкновения автомобилей и уменьшает возможность разрушения техники и гибели людей.

23. В каком случае на тело будет действовать больший импульс силы – когда приложенная сила мала или когда она велика?

24. Каким образом сила может привести к нулевому значению импульса тела за конечный промежуток времени, если сама эта сила отлична от нуля по крайней мере в течение части этого промежутка времени?

25. Какой вариант столкновения автомобилей вы считаете более опасным (в смысле возможных повреждений) для находящихся в них пассажиров – когда автомобили после столкновения разлетаются в стороны или когда они продолжают движение как единое целое? Объясните.

26. Очень упругий мяч отпускают с высоты $h$, и он падает на твердую стальную плиту, укрепленную на земле, так что мяч отскакивает от плиты со скоростью, почти равной его начальной. а) Сохраняется ли импульс мяча на всех стадиях этого процесса? б) Если считать мяч и землю одной системой, то во время каких стадий процесса импульс сохраняется? в) Ответьте на вопрос «б», если вместо мяча будет кусок замазки, падающий на стальную плиту и прилипающий к ней?

27. Поток воды на гидроэлектростанции направляется так, чтобы с высокой скоростью попасть на лопатки турбин, которые связаны с валом, вращающим электрический генератор. Как, по вашему мнению, следует конструировать лопатки – чтобы вода полностью останавливалась при соприкосновении с ними или чтобы она отражалась при этом назад?

*28. Наблюдения показывают, что в процессе β-распада электрон и ядро отдачи часто не разъединяются, а движутся как одно целое. С помощью закона сохранения импульса в двух измерениях объясните, почему при этом обязательно испускается по крайней мере еще одна частица.

*29. Используя закон сохранения (вектора) импульса, покажите, что столкновение двух частиц происходит в плоскости, если а) одна из частиц первоначально покоилась; б) две частицы имеют импульсы в одном (или противоположных) направлении.

*30. При каких начальных условиях возможно (и возможно ли вообще) столкновение двух частиц, которое потребовало бы трехмерного описания? Объясните. Рассмотрите также случай столкновения в СЦМ.

*31. Объясните, каким образом СЦМ может находиться в покое, когда два сталкивающихся тела движутся.

32. Можно ли выбрать систему отсчета, в которой ЦМ двух сталкивающихся тел движется со скоростью, превышающей скорость каждого из тел?

## Задачи

Разделы 8.1 и 8.2

1. (I) Расстояние между атомом углерода ($m$ = = 12 а. е. м.) и атомом кислорода ($m$ = = 16 а. е. м.) в молекуле CO равно $1{,}13 \times 10^{-10}$ м. На каком удалении от атома кислорода расположен центр масс этой молекулы?

2. (I) Определите положение центра масс а) вытянутой руки; б) руки, согнутой под прямым углом; используйте при этом табл. 8.1.

3. (I) Пользуясь данными табл. 8.1, найдите высоту над поверхностью земли центра масс тела человека ростом 1,75 м.

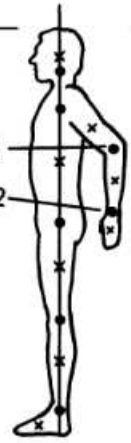
4. (I) Центр масс незагруженного автомобиля массой 1500 кг расположен на расстоянии 3,10 м от передней оси. Как изменится это расстояние, если в автомобиль сядут пять пассажиров: двое на переднее сидение на расстоянии 2,60 м от переднего края автомобиля, а трое на заднее сидение на расстоянии 3,85 м от переднего края. Масса каждого пассажира предполагается равной 65 кг.

5. (II) Вычислите, насколько ниже медианы торса будет находится ЦМ прыгуна в высоту, когда он находится в такой фазе прыжка, что его ноги и руки располагаются вертикально, а шея и туловище – горизонтально. Будет ли этот ЦМ находиться вне тела? При решении используйте табл. 8.1.

6. (II) Квадратная однородная платформа размером 30 × 30 м и массой 7400 кг используется в качестве парома, перевозящего автомобили через реку в направлении на север. а) Где будет располагаться ЦМ загруженного тремя автомобилями парома, если каждый автомобиль имеет массу 1400 кг и находится соответственно в северо-восточном, юго-восточном и

*Таблица 8.1.* Положения центров масс различных частей тела среднего мужчины[1)]

| Расстояние от пола до суставов, % полного роста | Суставы (●) (соединения) | Расстояние от пола до центра масс различных частей тела (×), % полного роста | | Процент массы тела |
|---|---|---|---|---|
| 91,2 | Позвонок у основания черепа | Голова | 93,5 | 6,9 |
| 81,2 | Плечевой сустав | Туловище и шея | 71,1 | 46,1 |
| | | Верхняя часть рук | 71,7 | 6,6 |
| | Локоть 62,2 | | | |
| | Запястье 46,2 | Нижняя часть рук | 55,3 | 4,2 |
| 52,1 | Тазобедренный сустав | Кисти рук | 43,1 | 1,7 |
| 28,5 | Коленный сустав | Верхняя часть ног (бедра) | 42,5 | 21,5 |
| | | Нижняя часть ног | 18,2 | 9,6 |
| 4,0 | Лодыжка | Ступни | 1,8 | 3,4 |
| | | | 58,0 | 100,0 |



[1)] Данные приведены из «Справочника по биоастронавтике» (НАСА, Вашингтон, округ Колумбия).

юго-западном углах парома? б) Если автомобиль в юго-западном углу парома получит ускорение 1,80 м/с$^2$ в направлении на север, то где окажется ЦМ парома через 4,0 с?

**7.** (II) Имеется тонкий однородный провод в виде полуокружности радиусом $r$. Найдите ЦМ провода в системе отсчета с началом в центре «полной» окружности.

**8.** (II) Три сферы радиусами $r_0$, $2r_0$ и $3r_0$ помещены одна за другой и соприкасаются друг с другом так, что их центры расположены на одной прямой линии, проходящей через центр второй сферы радиусом $r = 2r_0$. Где находится ЦМ такой системы?

**9.** (III) Определите ЦМ однородной тонкой полукруглой пластины.

**10.** (III) Найдите положение ЦМ однородной треугольной пирамиды, у которой все четыре треугольные грани имеют одинаковые ребра длиной $s$.

Раздел 8.3

**11.** (I) Массы Земли и Луны равны соответственно $5{,}98 \cdot 10^{24}$ и $7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг; расстояние между этими планетами около $3{,}80 \cdot 10^8$ м. а) Где расположен ЦМ этой системы? б) Что можно сказать о движении системы Земля–Луна, а также о движении по отдельности каждой из этих планет относительно Солнца?

**12.** (I) Два тела массой по 35 кг имеют скорости (в метрах в секунду) $\mathbf{v}_1 = 12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}_2 = -20\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$. Определите импульс ЦМ этой системы.

**13.** (II) а) Если в примере 8.4 (рис. 8.9) положить $m_{II} = 3m_I$, то где тогда приземлится тело массой $m_{II}$? б) Ответьте на этот же вопрос в случае, когда $m_I = 3m_{II}$.

**14.** (II) На гладкой ледяной поверхности стоят девушка и юноша; массы их равны соответственно 50 и 70 кг, а расстояние между ними составляет 8,0 м. а) На каком расстоянии от девушки расположен их общий ЦМ? б) Если оба возьмутся за концы веревки и юноша, дернув за веревку, переместится на расстояние 2,2 м, то на каком расстоянии от девушки он окажется? в) На какое расстояние переместился бы юноша, если бы он столкнулся с девушкой?

**15.** (II) Воздушный шар, наполненный гелием, вместе с кабиной имеет массу $M$ и покоится относительно Земли. Пассажир вылезает из кабины и начинает спускаться по веревке, свешивающейся с шара, со скоростью $v$ относительно шара. С какой скоростью и в каком направлении (относительно Земли) будет двигаться при этом шар? Что произойдет, если пассажир остановится?

**16.** (III) Платформа длиной 20 м и массой 200 кг движется со скоростью 6,0 м/с по горизонтальным рельсам без трения. Человек массой 75 кг начинает движение из одного конца платформы к другому в направлении ее движения со скоростью 2,5 м/с относительно платформы. На какое расстояние переместится платформа за то время, которое требуется человеку для перехода из одного ее конца до другого?

Раздел 8.4

**17.** (I) Импульс частицы (в системе СИ) дается выражением $\mathbf{p} = 4{,}0t^2\mathbf{i} - 2{,}6\mathbf{j} - 3{,}9t\mathbf{k}$. Как зависит от времени сила, действующая на частицу?

**18.** (II) Воздушная масса, движущаяся с ураганной скоростью 200 км/ч, ударяется в стену строения размером 30 м × 20 м, причем за каждую секунду ураган приносит воздушную массу $5{,}4 \cdot 10^4$ кг. Вычислите результирующую силу, действующую на стену, если сразу после удара вся воздушная масса останавливается.

**19.** (II) Чему равен импульс воробья массой 50 г, летящего со скоростью 15 м/с? Каков будет его импульс спустя 12 с, если на него действует сила сопротивления воздуха $2{,}0 \times 10^{-2}$ Н?

**20.** (II) Сила, действующая на частицу массой $m$, дается формулой $\mathbf{F} = 26\mathbf{i} - 12t^2\mathbf{j}$ (в ньютонах). Каково будет изменение импульса частицы за промежуток времени от 1,0 до 3,0 с?

**21.** (II) Бейсбольный мяч массой 145 г, движущийся вдоль оси $x$ со скоростью 30 м/с, ударяется о забор под углом 45° и отскакивает вдоль оси $y$ с той же самой по величине скоростью. Запишите изменение импульса мяча через единичные векторы по осям координат.

**22.** (II) Ракета массой 7200 кг движется в космическом пространстве со скоростью 150 м/с в направлении к Солнцу. Предположим, что понадобилось изменить направление движения на 30°, и это можно осуществить лишь за счет кратковременного выброса продуктов сгорания в направлении, перпендикулярном первоначальному движению. Если газы из ракеты выбрасываются со скоростью 2400 м/с, то какая масса газов должна быть при этом выброшена?

Раздел 8.5

**23.** (I) Защитник массой 140 кг при игре в хоккей, движущийся со скоростью 3,0 м/с, встречает нападающего массой 90 кг, набравшего скорость 7,5 м/с, и применяет к нему силовой прием. Какова будет совместная скорость этой пары непосредственно после столкновения?

24. (I) Покоящееся атомное ядро испытывает радиоактивный распад на альфа-частицу и меньшее ядро. Какова будет скорость этого ядра отдачи, если скорость альфа-частицы $6{,}2 \times 10^5$ м/с? Считайте, что масса исходного ядра в 57 раз больше массы альфа-частицы.

25. (I) Открытый товарный вагон массой 12 000 кг движется по горизонтальному железнодорожному полотну без трения с постоянной скоростью 15,0 м/с. Внезапно начинает идти снег, падающий вертикально вниз, который заполняет вагон со скоростью 3,00 кг/мин. Чему будет равна скорость вагона через час?

26. (I) Товарный вагон массой 10 000 кг движется по горизонтальному железнодорожному полотну без трения с постоянной скоростью 22 м/с. В вагон забрасывается дополнительный груз массой 5000 кг. Чему после этого будет равна скорость вагона?

27. (II) Пуля массой 44 г попадает в деревянный брусок массой 15,4 кг на горизонтальной поверхности прямо напротив ствола оружия. Коэффициент динамического трения между бруском и поверхностью равен 0,28. После застревания пули брусок, прежде чем остановиться, проходит расстояние 18,0 м. Найдите начальную скорость пули при вылете из ствола.

28. (II) В результате взрыва покоящийся предмет разделяется на два фрагмента, один из которых приобретает вдвое большую кинетическую энергию. Каково отношение масс этих фрагментов? У какого из них масса больше?

29. (II) Частица массой $m$, движущаяся со скоростью $v_0$ вдоль оси $x$, внезапно «выстреливает» треть своей массы в направлении оси $y$ со скоростью $2v_0$. Запишите вектор скорости оставшейся части, выразив его через единичные векторы **i**, **j** и **k**.

30. (II) Распад нейтрона на протон, электрон и антинейтрино (так называемый бета-распад) является примером трехчастичного процесса. Используя тот факт, что импульс – векторная величина, покажите, что если нейтрон первоначально покоился, то векторы всех трех распадных частиц должны лежать в одной плоскости. В том случае, когда распадных частиц будет больше трех, это не справедливо.

31. (II) Два груза массами $m_1$ и $m_2$ связаны между собой растянутой пружиной и лежат на гладком столе без трения. Грузы отпускают. а) Существует ли результирующая внешняя сила, действующая на систему? б) Найдите отношение скоростей грузов $v_1/v_2$. в) Чему равно отношение их кинетических энергий? г) Как будет двигаться ЦМ этой системы? д) Как изменятся ответы на поставленные выше вопросы, если вы учтете трение?

32. (II) Радиоактивное покоящееся ядро распадается на другое ядро, электрон и нейтрино. Последние две частицы испускаются под прямым углом друг к другу и имеют импульсы соответственно $8{,}6 \cdot 10^{-23}$ и $6{,}2 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с. Каковы величина и направление импульса ядра отдачи?

33. (II) Двухступенчатая ракета массой 940 кг движется со скоростью $6{,}2 \cdot 10^3$ м/с относительно Земли. Затем происходит запланированный взрыв, в результате которого ракета разделяется на две части одинаковой массы, движущиеся с относительной скоростью $2{,}4 \cdot 10^3$ м/с вдоль линии первоначального движения ракеты. а) Чему равны и как направлены скорости каждой части сразу после взрыва? б) Какое количество энергии выделилось при взрыве? (*Подсказка*: сравните величины кинетической энергии до и после взрыва системы.)

34. (III) Снаряд массой 300 кг, выпущенный с начальной скоростью 130 м/с под углом 45° к горизонту, в верхней точке своей траектории распадается на три части одинаковой массы. Две из них сразу после взрыва продолжают лететь с одинаковыми скоростями (одна падает вертикально вниз, другая движется горизонтально). Если взрыв добавляет каждому из фрагментов $5{,}0 \cdot 10^5$ Дж кинетической энергии, то какой будет скорость третьего фрагмента сразу после взрыва?

Раздел 8.6

35. (I) Теннисный мяч при сильной подаче может отлететь от ракетки со скоростью 65 м/с. Чему равна средняя сила, действующая на мяч во время удара, если масса мяча равна 0,060 кг, а время контакта с ракеткой составляет 0,030 с? Достаточна ли эта сила для того, чтобы приподнять над землей человека средних размеров?

36. (I) Бейсбольный мяч массой 0,145 кг, которому сообщили скорость 35 м/с, отбивается битой и летит обратно со скоростью 50 м/с. Пусть время контакта между битой и мячом составляет $5{,}0 \cdot 10^{-4}$ с. Вычислите силу их взаимодействия, считая ее постоянной.

37. (II) Космонавт, масса которого в скафандре равна 150 кг, отталкивается ногами от стенок космического корабля массой 2200 кг и приобретает скорость 2,5 м/с. а) Каково при этом изменение скорости корабля? б) Если отталкивание длится 0,40 с, то какова средняя сила взаимодействия между астронавтом и кораблем? Используйте систему отсчета, связанную с кораблем до отталкивания. в) Какова

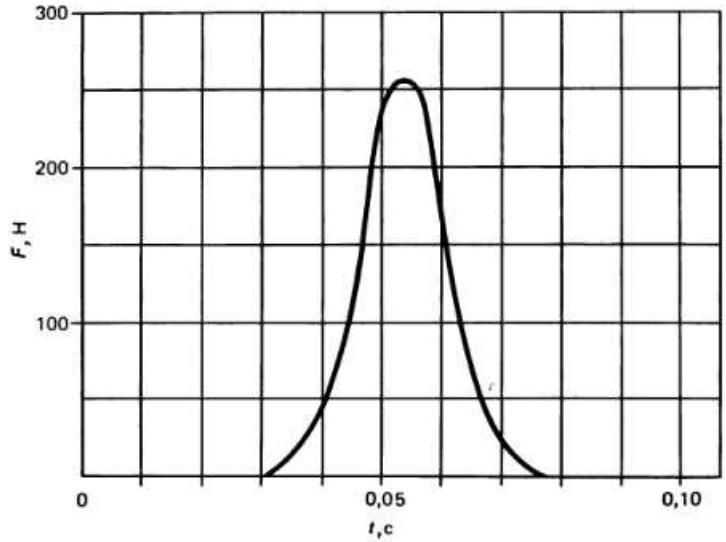



Рис. 8.24.

кинетическая энергия отдельно астронавта и корабля после отталкивания?

38. (II) Теннисный мяч массой $m$, летящий со скоростью $v$, ударяется о стенку под углом 45° и отражается от нее с той же скоростью и под тем же углом. Какой импульс получила при этом стенка?

39. (II) Вода ударяет в лопасти турбины генератора так, что скорость частиц воды после отражения имеет ту же величину, но обратное направление. Если удельный расход воды составляет 60 кг/с, а скорость потока равна 16 м/с, то чему равна средняя сила, действующая на лопасти?

40. (II) а) Молекула массой $m$, имеющая скорость $v$, ударяется о стенку сосуда под прямым углом и отражается с той же скоростью. Чему равна средняя сила, с которой молекула действует на стенку во время столкновения, если время столкновения равно $\Delta t$? б) Ответьте на тот же вопрос, если о стенку ударяются много молекул того же типа, что и в п. «а», причем время столкновения со стенкой равно $t$ и усреднение следует вести по достаточно продолжительному времени.

41. (II) Предположим, что сила, действующая на теннисный мяч массой 0,060 кг, зависит от времени так, как показано на рис. 8.24. Пользуясь графическим методом, оцените а) величину полного импульса, сообщаемого мячу; б) скорость мяча после удара, считая, что до удара он находился в покое.

42. (II) Сила, действующая на пулю, описывается зависимостью $F = 480 - 1{,}6 \cdot 10^5\, t$ в течение интервала времени от $t = 0$ до $t = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ с; в этой формуле $t$ измеряется в секундах, а сила $F$ – в ньютонах. а) Постройте график зависимости силы $F$ от времени $t$ на указанном промежутке времени. б) Пользуясь графическим методом, оцените импульс, полученный пулей. в) Вычислите аналитически (посредством интегрирования) импульс, полученный пулей. г) Если в результате пуля приобретает скорость 320 м/с, то какова должна быть масса пули?

43. (III) С какой максимальной высоты может прыгнуть человек массой 60 кг, с тем чтобы избежать перелома кости голени, имеющей поперечное сечение $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ м$^2$? Пренебрегите сопротивлением воздуха и считайте, что ЦМ человека перемещается на расстояние 0,60 м из положения стоя в положение сидя (при амортизации прыжка). Предположите, что максимальное давление, которое может выдержать кость (сила, приходящаяся на единицу площади; см. разд. 11.4), составляет $170 \cdot 10^6$ Н/м$^2$.

44. (III) Весы отградуированы так, что они дают нулевые показания, когда на них помещается большая плоская кювета. На кювету с высоты $h = 3{,}0$ м направляется поток воды с расходом массы $R = 0{,}20$ кг/с. Найдите: а) выражение для показаний весов как функции времени $t$; б) показание весов в момент времени $t = 15$ с. в) Ответьте на те же вопросы, но для случая, когда на весы помещают высокий узкий цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения $A = 20$ см$^2$.

Раздел 8.8

45. (I) Два бильярдных шара с одинаковыми массами испытывают абсолютно упругое

столкновение. Если скорость первого шара до столкновения была 2,0 м/с, а второго 3,0 м/с, причем скорость второго шара была направлена противоположно скорости первого, то чему будут равны их скорости после столкновения?

**46.** (II) Шар массой 0,60 кг ударяется о второй шар, первоначально покоящийся, причем предполагается, что удар является лобовым и абсолютно упругим. Второй шар при этом отскакивает со скоростью, равной половине начальной скорости первого шара до соударения. а) Чему равна масса второго шара? б) Какая доля первоначальной кинетической энергии первого шара передастся при соударении второму шару?

**47.** (II) Шар массой $m$ испытывает лобовое упругое соударение с другим шаром (покоившимся до удара) и отлетает от него в противоположную первоначальному движению сторону со скоростью, равной одной трети начальной. Чему равна масса второго шара?

**48.** (II) Покоящаяся частица массой $m_2$ испытывает лобовое соударение с частицей массой $m_1$, движущейся со скоростью $v_1$. Какой должна быть масса $m_1$ (в единицах $m_2$) при данном значении $v_1$, чтобы налетающая частица имела наибольшие возможные значения: а) скорости; б) кинетической энергии; в) импульса? Ответьте на те же вопросы применительно к наименьшему возможному значению этих величин. Считайте, что столкновение является упругим.

**49.** (II) Груз массой $m = 2{,}0$ кг скользит вниз по наклонной плоскости с углом 30° и высотой 3,6 м. У основания наклонной плоскости он сталкивается с другим грузом массой $M = 6{,}0$ кг, покоящимся на горизонтальной плоскости (рис. 8.25). Если столкновение происходит упруго, а трением можно пренебречь, то чему будут равны а) скорости обоих грузов после столкновения; б) высота, на которую вернется меньший из грузов вверх по наклонной плоскости?

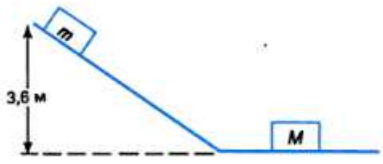



Рис. 8.25.

**50.** (II) Покажите, что в общем случае при любом лобовом одномерном упругом столкновении скорости после него имеют следующие значения:

$$v_2' = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

и

$$v_1' = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

**51.** (II) Рассмотрите пример 8.10. Определите долю кинетической энергии, потерянной нейтроном ($m_1 = 1{,}01$ а. е. м.) при упругом лобовом столкновении со следующими ядрами: а) ${}_1H^1$ ($m = 1{,}01$ а. е. м.); б) ${}_1H^2$ (тяжелый водород, или дейтерий, $m = 2{,}01$ а. е. м.); в) ${}_6C^{12}$ ($m = 12{,}00$ а. е. м.); г) ${}_{82}Pb^{208}$ (свинец, $m = 208$ а. е. м.). Обсудите пригодность каждого из этих ядер в качестве замедлителя в ядерном реакторе (пример 8.10).

**52.** (III) Какую максимальную массу $m$ может иметь частица в задаче 49 (рис. 8.25), чтобы после соударения с частицей массой $M$ и последующего подъема и спуска по наклонной плоскости она вновь испытала соударение с частицей массой $M$?

**53.** (III) Груз массой 3,5 кг скользит по поверхности стола без трения со скоростью 8,0 м/с по направлению к другому (покоящемуся) грузу массой 6,0 кг. Ко второму грузу прикреплена пружина (подчиняющаяся закону Гука с коэффициентом упругости $k = 750$ Н/м) таким образом, что при соударении обоих грузов пружина сжимается (рис. 8.26). а) Каково при этом максимальное сжатие пружины? б) Чему равны конечные скорости грузов после соударения? в) Было ли соударение упругим?

*Раздел 8.9

***54.** (II) Частица массой $m$, движущаяся со скоростью $v$, упруго соударяется с покоящейся частицей-мишенью массой $2m$ и отражается (рассеивается) под углом 90° относительно направления ее первоначального движения. а) Под каким углом будет двигаться мишень после соударения? б) Каковы конечные скорости обеих частиц? в) Какая доля начальной кинетической энергии налетающей частицы передается частице-мишени?

***55.** (II) Два бильярдных шара с одинаковыми массами движутся под прямым углом друг к другу и сталкиваются в начале системы координат $xy$. Одна из частиц двигалась до этого со скоростью 3,0 м/с вверх вдоль оси $y$, другая – вправо вдоль оси $x$ со скоростью 4,8 м/с. После столкновения второй шар движется вдоль положительного направления оси $y$. В каком направлении движется после соударения




Рис. 8.26.

первый шар и чему равны при этом скорости обоих шаров?

*56. (II) Бильярдный шар массой $M_A = 0{,}40$ кг сталкивается с покоящимся шаром массой $M_B = 0{,}60$ кг. В результате этого упругого столкновения шар А отклоняется от направления своего движения на 30°, а шар В – на 53°. Каково отношение скоростей шаров после столкновения?

*57. (II) Покажите, что при упругом столкновении между двумя частицами равной массы, рассмотренном в примере 8.11 (одна из частиц до столкновения покоится), сумма углов, образуемых скоростями после столкновения с направлением начальной скорости, всегда равна 90°, т.е. $\theta'_1 + \theta'_2 = 90°$. Считайте, что столкновение не является лобовым.

*58. (III) Нейтрон упруго сталкивается с покоящимся ядром гелия, масса которого в четыре раза превосходит массу нейтрона; ядро гелия после столкновения регистрируется под углом $\theta'_2 = 36°$ относительно направления движения нейтрона. Найдите соответствующий угол $\theta'_1$ для нейтрона, а также скорости нейтрона $v'_n$ и ядра гелия $v'_{He}$ после столкновения. Начальную скорость нейтрона принять равной $6{,}8 \cdot 10^5$ м/с.

*59. (III) Покажите, что при упругом столкновении налетающей частицы массой $m_1$ с покоящейся частицей-мишенью массой $m_2$ угол отклонения (рассеяния) $\theta'_1$ налетающей частицы а) может принимать любые значения от 0 до 180° при $m_1 < m_2$, причем б) его максимальное значение $\varphi$ определяется выражением $\cos^2 \varphi = 1 - (m_2/m_1)^2$ при $m_1 > m_2$.

*Раздел 8.10

*60. (I) Прежде чем столкнуться, две частицы с массами $m_1$ и $m_2$ движутся в одном и том же направлении со скоростями соответственно $v_1$ и $v_2$. Чему равна скорость движения их центра масс?

*61. (II) Найдите скорость ЦМ частицы 2 (т.е. величины $v'^*_2$ и $\theta'^*_2$) после столкновения, описанного в примере 8.11.

*62. (II) В лаб. системе отсчета частица с импульсом $m_1 v_1$ сталкивается с покоящейся частицей массой $m_2$ ($v_2 = 0$). а) Покажите, что скорость СЦМ относительно лаб. системы отсчета равна $\mathbf{v}_{ЦМ} = m_1 \mathbf{v}_1/(m_1 + m_2)$. б) Покажите, что скорость любой частицы в СЦМ дается выражением $\mathbf{v}^*_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{ЦМ}$, где $\mathbf{v}_i$ – скорость этой частицы в лаб. системе отсчета, причем индекс $i$ принимает значение либо 1, либо 2.

*63. (II) При столкновении протона с протоном в СЦМ полная кинетическая энергия равна $3{,}2 \cdot 10^{-10}$ Дж. Какую кинетическую энергию имел налетающий протон в лаб. системе отсчета, в которой второй протон покоился?

*64. (III) Снаряд выпущен из орудия со скоростью 450 м/с под углом 45°. После 60 с полета он разлетается на три осколка с одинаковыми массами и одинаковыми скоростями относительно скорости снаряда, которую он имел непосредственно перед взрывом. Наблюдатель на земле видит, как один из осколков падает вертикально на землю, тогда как второй движется горизонтально непосредственно после взрыва. На каком расстоянии от точки выстрела упадет третий осколок?

*Раздел 8.11

*65. (II) Метеор массой около $10^8$ кг сталкивается с Землей ($M_З = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг) при скорости около 15 м/с и застревает в толще Земли. а) Какова скорость «отдачи», полученная Землей? б) Какая доля кинетической энергии метеора перешла в кинетическую энергию Земли? в) На какую величину изменилась кинетическая энергия Земли в результате этого столкновения?

*66. (II) Орел массой $m_1 = 6{,}6$ кг, летящий со скоростью $v_1 = 12{,}4$ м/с, сталкивается с другим орлом массой $m_2 = 8{,}3$ кг, летящим со скоростью $v_2 = 9{,}1$ м/с в перпендикулярном первому орлу направлении. После столкновения они летят вместе как одно целое; в каком направлении и с какой скоростью это будет происходить?

*67. (II) В результате взрыва тело распадается на две части, масса одной из которых в 1,5 раза больше другой. Какую кинетическую энергию преобретает каждая часть, если в процессе взрыва выделилась энергия 4500 Дж?

*68. (II) а) Получите формулу для доли потерянной кинетической энергии (ΔКЭ/КЭ) для баллистического маятника в примере 8.13. б) Вычислите эту величину для случая $m = 10{,}0$ г и $M = 105$ г.

*69. (II) В результате полностью неупругого столкновения между двумя телами с одинаковыми массами и одинаковыми начальными

скоростями $v$ до столкновения оба тела начинают двигаться со скоростью $v/3$. Чему был равен угол между направлениями их скоростей до столкновения?

*70. (III) Определите точность приближения в задаче о баллистическом маятнике, когда мы пренебрегли движением груза массой $M$ во время столкновения. Используйте обозначения, применяемые в примере 8.13 и на рис. 8.20, и предположите, что налетающая частица равномерно замедляется внутри маятника на расстоянии $d$. Найдите: а) время столкновения $\Delta t$; б) степень несохранения импульса $\Delta \mathbf{p}$ благодаря действию результирующей внешней силы во время столкновения; в) величину, на которую вычисленное значение скорости пули будет отклоняться от истинного значения, если использовать соотношение, приведенное в примере 8.13.

*Раздел 8.12

*71. (II) Пусть в примере 8.15 лента транспортера испытывает тормозящее действие силы трения 140 Н. Найдите необходимую выходную мощность (в лошадиных силах) двигателя как функцию времени, начиная с момента $t = 0$, когда гравий начинает высыпаться на ленту, до момента времени $t = 3$ с, когда гравий начнет ссыпаться с конца ленты, расположенного в 20 м от дна бункера.

*72. (II) а) Покажите, что мощность, развиваемая силой, действующей на ленту транспортера (см. задачу 71), равна $P = v^2(dM/dt) = 2(d/dt)$КЭ; иными словами, покажите, что энергия сообщается этой ленте со скоростью, которая *в два раза* превосходит скорость изменения ее кинетической энергии (с учетом возрастания ее массы). б) На что расходуется вторая половина сообщенной энергии?

*73. (II) Рассмотрите товарный вагон из задачи 25, который медленно заполняется снегом. а) Найдите зависимость скорости вагона от времени. б) Используя формулы (8.22), найдите скорость вагона по прошествии 60 мин. Совпадает ли этот результат с более простым расчетом (задача 25), выполненным с помощью разд. 8.5?

*74. (II) В реактивный двигатель самолета поступает 100 кг воздуха, которые сгорают ежесекундно вместе с 4,2 кг топлива. Продукты сгорания в виде газов выбрасываются из сопла со скоростью 550 м/с (относительно самолета). Если самолет движется со скоростью 270 м/с, то чему равны а) результирующая сила тяги двигателя; б) развиваемая двигателем мощность (в лошадиных силах)?

*75. (II) На ракете, находящейся на высоте 6400 км от Земли и удаляющейся от нее со скоростью 1850 м/с, запускаются двигатели, которые выбрасывают газы со скоростью 1200 м/с (относительно ракеты). Каков должен быть расход газов (в килограммах в секунду), если масса ракеты к этому моменту достигла значения 25 000 кг, чтобы получить ускорение 1,7 м/с$^2$?

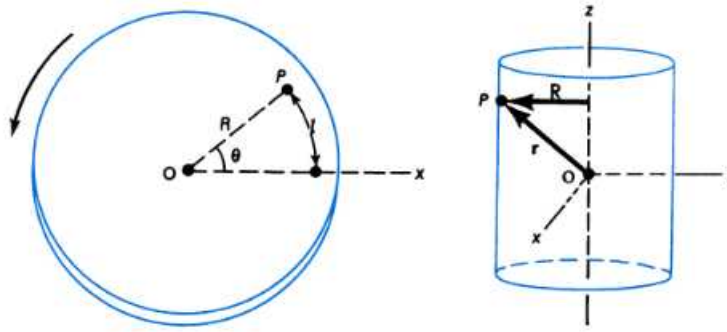
*76. (II) Ракету массой 2500 кг необходимо разогнать при старте с ускорением $3{,}0g$. С какой скоростью следует выбрасывать газы, если их расход составляет 30 кг/с?

77. (II) Сани, наполненные песком, скользят без трения под уклон 30°. Песок высыпается из отверстия со скоростью 2,0 кг/с. Если движение начинается из состояния покоя с полной массой 40,0 кг, то какое время понадобится на то, чтобы сани прошли расстояние 120 м по наклонной плоскости?

# Вращательное движение тела вокруг оси

До сих пор мы рассматривали поступательное движение отдельных частиц или систем частиц. В этой и последующих главах мы перейдем к рассмотрению вращательного движения. Хотя объектом изучения будут и системы, состоящие из конечного числа частиц, в основном мы будем говорить о движении твердых тел. Под *твердым телом* мы понимаем тело, имеющее определенную форму, которая сохраняется неизменной, т. е. составляющие тело частицы остаются в неизменном положении относительно друг друга (сохраняют постоянное относительное расположение). В действительности любое тело под действием внешних сил способно испытать деформации или начать колебаться, но обычно эти эффекты очень малы, и понятие идеально твердого тела широко используется как хорошее приближение во многих случаях.

Движение твердого тела (как это упоминалось ранее и будет доказано в гл. 10) можно рассматривать как сумму поступательного движения его ЦМ и вращательного движения относительно оси, проходящей через его ЦМ. Поступательное движение уже было детально рассмотрено нами, так что в данной главе мы сосредоточим внимание на чисто вращательном движении. *Чисто вращательное движение* – это такое движение тела, при котором все его точки движутся по окружностям (как, например, точка $P$ вращающегося колеса на рис. 9.1, *а*), причем все центры окружностей лежат на одной линии,




*а* *б*

Рис. 9.1. *а* – вид сверху на колесо, вращающееся против часовой стрелки относительно оси (перпендикулярной плоскости рисунка), проходящей через центр колеса O. *б* – различие между векторами **r** и **R** для точки $P$, лежащей на боковой поверхности цилиндра, вращающегося вокруг оси $z$.

называемой **осью вращения**. Будем считать, что в инерциальной системе отсчета ось вращения неподвижна и что она не обязательно должна проходить через ЦМ тела.

## 9.1. Угловые переменные

Мы собираемся рассматривать трехмерное твердое тело, вращающееся относительно закрепленной оси. При этом удобно использовать величину $R$, которая представляет собой расстояние *по перпендикуляру от оси вращения до рассматриваемой точки или частицы*. Мы ввели это новое обозначение, чтобы отличить $R$ от $r$, поскольку через $r$ будем по-прежнему обозначать величину радиуса-вектора частицы относительно начала некоторой системы координат[1]. Разница между этими величинами показана на рис. 9.1, *б*. В частном случае, когда мы имеем дело с плоским, очень тонким телом, таким, как диск, если начало системы координат находится в плоскости тела на оси вращения (в центре диска для рассматриваемого примера), величина $R$ будет совпадать с $r$.

Каждая частица тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, движется по окружности радиусом $R$, центр которой лежит на оси вращения. Линия, проведенная перпендикулярно оси вращения к любой точке тела, за одинаковые промежутки времени поворачивается на один и тот же угол $\theta$. Чтобы определить положение тела или угол, на который оно повернется, угол $\theta$ для каждой такой линии будем отсчитывать от некоторой опорной линии, например от оси $x$ (рис. 9.1, *а*). Частица, принадлежащая телу (например, $P$ на рис. 9.1, *а*), перемещается на угол $\theta$ и проходит при этом расстояние $l$, измеряемое вдоль ее траектории, которая представляет собой окружность. Углы принято измерять в градусах, но математические выражения, описывающие вращательное движение, выглядят проще, если измерять углы в *радианах*. Один *радиан* (рад) определяется как угол, стягиваемый дугой, длина которой равна радиусу окружности. (Например, на рис. 9.1, *а* частица $P$ находится на расстоянии $R$ от оси вращения и проходит расстояние $l$ вдоль дуги окружности; если $l = R$, то угол $\theta$ точно равен 1 рад.) В общем случае любой угол $\theta$ (в радианах) определяется выражением

$$\theta = l/R, \tag{9.1}$$

где $R$ – радиус окружности, а $l$ – длина дуги, стягиваемой углом $\theta$. Радианы можно связать с градусами следующим

[1] В некоторых книгах вместо $R$ используется буква $\rho$. Мы используем $\rho$ для обозначения плотности (массы единицы объема). Поэтому, чтобы избежать путаницы, будем обозначать расстояние от точки до оси вращения буквой $R$.

образом. Полная окружность соответствует углу 360°, что, разумеется, должно соответствовать дуге, длина которой равна длине окружности $l = 2\pi R$. Тогда угол, соответствующий полной окружности, равен $\theta = l/R = 2\pi R/R = 2\pi$ рад; отсюда находим, что

$$360° = 2\pi \text{ рад}.$$

Следовательно, один радиан равен $360°/2\pi = 360°/6{,}28 = 57{,}3°$.

**Пример 9.1.** Зрение некоторых птиц устроено так, что они могут различать предметы, которые разнесены на минимальный угол $3 \cdot 10^{-4}$ рад (запишите этот угол в градусах). Какой наименьший по величине предмет птица может разглядеть на Земле, пролетая на высоте 100 м?

**Решение.** Из формулы (9.1) следует, что $l = R\theta$. Строго говоря, $l$ – это длина дуги, но для малых углов длина хорды, стягивающей дугу, приближенно совпадает с длиной дуги[1]. Так как $R = 100$ м и $\theta = 3 \cdot 10^{-4}$ рад, находим $l$:

$$l = (100 \text{ м})(3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

Если бы угол был задан в градусах, необходимо было бы сначала перевести его в радианы, а затем провести аналогичный расчет.

Следует заметить, что в этом примере мы воспользовались тем, что радиан является безразмерным, поскольку он представляет собой отношение двух длин.

**Угловая скорость** определяется по аналогии с линейной скоростью, но вместо линейного перемещения используется угловое. Пусть углы $\theta_1$ и $\theta_2$ – это угловые положения тела в моменты времени соответственно $t_1$ и $t_2$. Тогда величина **средней угловой скорости** (обозначается греческой буквой $\omega$ (омега)) определяется как

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

где $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ – угловое перемещение тела за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Определим величину **мгновенной угловой скорости** как предел этого отношения при $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (9.2)$$

Угловая скорость измеряется, как правило, в радианах в секунду (рад/с). Заметим, что все точки тела вращаются с одной и той же угловой скоростью. Это следует из того факта, что все точки за одинаковые промежутки времени поворачиваются на один и тот же угол.

**Угловое ускорение** по аналогии с линейным ускорением определяется как отношение изменения угловой

[1] Даже для таких углов, как 15°, ошибка в этом приближении составляет лишь 1%; но для больших по сравнению с этим углов ошибка быстро возрастает.

скорости к промежутку времени, за которое это изменение произошло. Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ – величины мгновенной угловой скорости в моменты времени $t_1$ и $t_2$ соответственно. Тогда величина **среднего углового ускорения**, обозначаемого греческой буквой $\alpha$ (альфа), определяется как

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Определим величину **мгновенного углового ускорения** как предел этого отношения при $\Delta t \to 0$:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{9.3}$$

Поскольку угловая скорость $\omega$ одинакова для всех точек вращающегося тела, из выражения (9.3) следует, что угловые ускорения $\alpha$ всех точек тела также одинаковы. Если угловая скорость $\omega$ измеряется в радианах в секунду, а время $t$ – в секундах, то угловое ускорение измеряется в радианах в секунду в квадрате (рад/с$^2$).

Каждая частица или точка вращающегося твердого тела в любой момент времени имеет линейную скорость $v$ и линейное ускорение $a$. Для любой частицы линейные величины $v$ и $a$ можно связать с угловыми величинами $\omega$ и $\alpha$ вращающегося тела как целого. Рассмотрим частицу, расположенную на расстоянии $R$ от оси вращения. Если тело вращается с угловой скоростью $\omega$, то линейная скорость любой частицы тела будет направлена по касательной к описываемой ею круговой траектории. Величину линейной скорости $v$ можно вычислить по формуле (9.1). Для этого запишем формулу в виде $l = R\theta$ и продифференцируем ее по времени, учитывая тот факт, что линейная скорость равна $v = dl/dt$. Таким образом, мы имеем

$$v = \frac{dl}{dt} = R\frac{d\theta}{dt},$$

$$v = R\omega; \tag{9.4}$$

здесь мы воспользовались тем, что для любой рассматриваемой частицы радиус равен $R = \text{const}$, поскольку каждая частица тела вращается по окружности постоянного радиуса. Таким образом, хотя угловые скорости $\omega$ всех точек вращающегося тела в любой момент времени одинаковы, линейная скорость $v$ больше у тех точек, которые отстоят дальше от оси вращения.

Угловое ускорение $\alpha$ связано с касательным (тангенциальным) линейным ускорением $a_\tau$ частицы следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt},$$

$$a_\tau = R\alpha. \tag{9.5}$$

Здесь мы воспользовались формулой (9.4). В выражении (9.5) $R$ – радиус окружности, по которой вращается частица, а индекс Т в обозначении $a_т$ указывает на то, что ускорение «тангенциальное», так как рассматриваемое здесь ускорение направлено по касательной к окружности. Полное линейное ускорение частицы записывается в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_т + \mathbf{a}_ц,$$

где $\mathbf{a}_ц$ – радиальная составляющая линейного ускорения, т. е. «центростремительное» ускорение, направленное к центру окружности, по которой вращается частица. В гл. 3 было показано, что $a_ц = v^2/R$; переписывая эту формулу с помощью (9.4) через угловую скорость ω, получаем

$$a_ц = v^2/R = \omega^2 R. \tag{9.6}$$

Выражения (9.4) – (9.6) связывают угловые величины, описывающие вращение тела, с линейными величинами, описывающими движение каждой частицы тела.

Иногда полезно выразить угловую скорость через частоту вращения $f$. Под частотой мы будем понимать число полных оборотов (об), сделанных в секунду. Один оборот (например, колеса) соответствует углу $2\pi$ радиан, и, таким образом, 1 об/с $= 2\pi$ рад/с; следовательно, в общем случае частота $f$ дается формулой

$$f = \omega/2\pi$$

или

$$\omega = 2\pi f.$$

**Пример 9.2.** Чему равна линейная скорость точки на краю вращающейся с постоянной частотой 33 об/мин грампластинки, если ее диаметр равен 30 см?

**Решение.** Найдем сначала угловую скорость пластинки, выразив ее в радианах в секунду: частота вращения $f =$ $= 33$ об/мин $= (33$ об$)/(60$ с$) = 0{,}55$ об/с; следовательно, $\omega = 2\pi f = 3{,}5$ рад/с. Поскольку радиус $R$ пластинки равен 0,15 м, скорость $v$ на краю пластинки равна

$$v = R\omega = (0{,}15 \text{ м})(3{,}5 \text{ рад/с}) = 0{,}52 \text{ м/с}.$$

**Пример 9.3.** Каково ускорение пылинки на краю диска в примере 9.2?

**Решение.** Из примера 9.2 $\omega = 3{,}5$ рад/с и $v = 0{,}52$ м/с. Поскольку $\omega = \text{const}$, $\alpha = 0$, так что $a_т = 0$. Из (9.6) имеем $a_ц = \omega^2 R =$ $= (3{,}5 \text{ рад/с})^2 (0{,}15 \text{ м}) = 1{,}8 \text{ м/с}^2$; или $a_ц =$ $= v^2/R = (0{,}52 \text{ м/с})^2/(0{,}15 \text{ м}) = 1{,}8 \text{ м/с}^2$, т. е мы получили то же значение.

**Пример 9.4.** Ротор центрифуги, находившейся в покое и завращавшейся затем с ускорением, через 5,0 мин достигает частоты вращения 20 000 об/мин. Чему равно среднее угловое ускорение ротора?

**Решение.**

$$\omega = (20\,000 \text{ об/мин}) \left(\frac{2\pi \text{ рад/об}}{60 \text{ с/мин}}\right) =$$

$$= 2100 \text{ рад/с}.$$

Это конечная угловая скорость, а поскольку начальная угловая скорость равна нулю, среднее угловое ускорение будет равно

$$\bar{\alpha} = \frac{2100 \text{ рад/с} - 0}{300 \text{ с}} = 7{,}0 \text{ рад/с}^2.$$

## 9.2. Кинематические уравнения для вращательного движения с постоянным угловым ускорением

В гл. 2 мы привели важные уравнения (2.9), которые связывают между собой ускорение, скорость и перемещение в случае движения с постоянным линейным ускорением. Эти уравнения были получены из определений линейной скорости и линейного ускорения в предположении, что ускорение постоянно. Определения угловой скорости и углового ускорения аналогичны определениям линейной скорости и линейного ускорения, необходимо только заменить перемещение $x$ на угол $\theta$, линейную скорость $v$ на угловую скорость $\omega$, а линейное ускорение $a$ на угловое ускорение $\alpha$. Таким образом, уравнения для угловых переменных при постоянном угловом ускорении будут аналогичны уравнениям (2.9), если заменить $x$ на $\theta$, $v$ на $\omega$ и $a$ на $\alpha$, и их можно вывести таким же способом, как уравнения (2.9). Выпишем эти уравнения вместе с их линейными аналогами:

| **Угловые** | **Линейные** | | |
|---|---|---|---|
| $\omega = \omega_0 + \alpha t,$ | $v = v_0 + at$ | [постоянные $\alpha, a$], | (9.7а) |
| $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$ | $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | [постоянные $\alpha, a$], | (9.7б) |
| $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta,$ | $v^2 = v_0^2 + 2ax$ | [постоянные $\alpha, a$]. | (9.7в) |

Заметим, что для простоты мы выбрали начальные условия таким образом, что $\theta_0 = 0$ (также $x_0 = 0$). В этих уравнениях $\omega_0$ – угловая скорость в момент времени $t = 0$, а $\theta$ и $\omega$ – соответственно угловое перемещение и угловая скорость в момент времени $t$. Поскольку угловое ускорение постоянно, то $\alpha = \bar{\alpha}$. Эти уравнения справедливы также в случае движения с постоянной угловой скоростью; при этом $\alpha = 0$, и мы имеем $\omega = \omega_0$, $\theta = \omega_0 t$ и $\bar{\omega} = \omega$.

**Пример 9.5.** Сколько оборотов совершит ротор центрифуги из примера 9.4 за время своего ускорения? Считайте, что ротор вращается с постоянным угловым ускорением.

**Решение.** Из примера 9.4 известно, что $\omega_0 = 0$, $\omega = 2100$ рад/с, $\alpha = \bar{\alpha} = 7{,}0$ рад/с$^2$ и $t = 300$ с. Воспользуемся уравнением (9.7б) или (9.7в); первое из них дает

$$\theta = 0 + \frac{1}{2}(7{,}0 \text{ рад/с}^2)(300 \text{ с})^2 =$$
$$= 3{,}2 \cdot 10^5 \text{ рад}.$$

Чтобы найти полное число оборотов, разделим угол $\theta$ на $2\pi$ и получим $5{,}0 \cdot 10^4$ оборотов. (Чтобы не ошибиться в том, делить или умножать на $2\pi$, полезно помнить, что радианов всегда больше, чем оборотов, так как $2\pi$ рад = 1 об).

**Пример 9.6.** Требуется получить уравнения (9.7а) и (9.7б) с помощью математических выкладок.

**Решение.** Поскольку $\alpha = d\omega/dt$, причем $\alpha = \text{const}$, мы можем написать

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt,$$
$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$

или $\omega = \omega_0 + \alpha t$, что совпадает с уравне-

нием (9.7а). Используя затем определение угловой скорости: $\omega = d\theta/dt$, которое можно переписать в виде $d\theta = \omega\, dt = (\omega_0 + \alpha t)\, dt$, после интегрирования получаем

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\, dt, \qquad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Последнее уравнение есть не что иное, как уравнение (9.7б).

## 9.3. Векторные свойства угловых величин

Такие линейные величины, как перемещение, скорость и ускорение, являются векторами. В этом разделе мы покажем, что угловая скорость и угловое ускорение тоже должны рассматриваться как векторы; угловое же перемещение $\theta$ не является вектором.

Сначала убедимся в том, что угловое перемещение не может быть вектором. Одним из свойств векторов является то, что сложение любых двух векторов дает один и тот же результат независимо от того, в каком порядке их складывают. Иными словами, если мы имеем два вектора $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, то

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1.$$

[Это коммутативный закон сложения; см. формулу (3.1а)]. Предположим теперь, что мы поворачиваем книгу на угол $\theta_1 = 90°$ вокруг оси $x$, а затем поворачиваем ее на угол $\theta_2 = 90°$ вокруг оси $y$ (рис. 9.2, *а*). Если вместо этого вначале повернуть книгу на угол $\theta_2 = 90°$ вокруг оси $y$, а потом на угол $\theta_1 = 90°$ вокруг оси $x$ (рис. 9.2, *б*), то для обоих случаев мы *не* получим один и тот же результат!

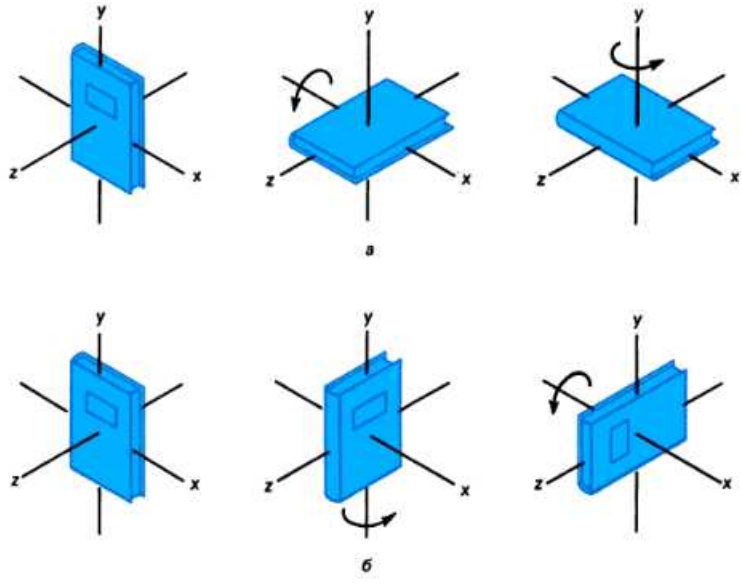



Рис. 9.2. Книга поворачивается на 90° против часовой стрелки: *а* – вокруг оси $x$ и затем вокруг оси $y$; *б* – вокруг оси $y$ и затем вокруг оси $x$.

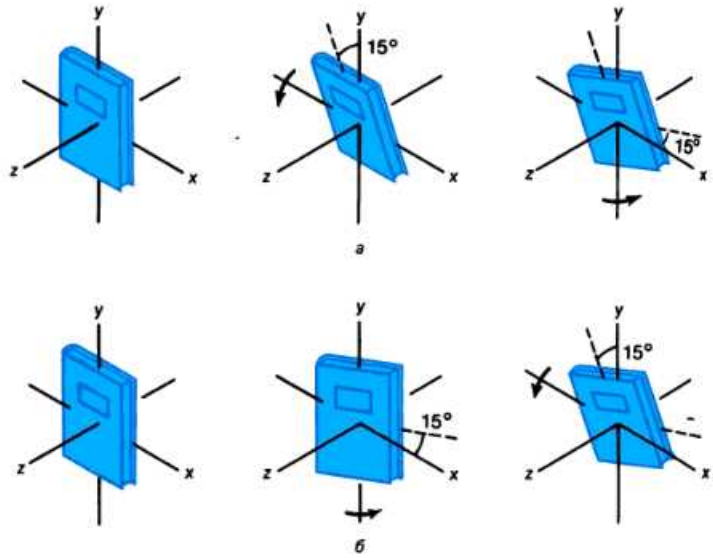



Рис. 9.3. Книга поворачивается на угол 15° против часовой стрелки: *а* – вокруг оси *x* и затем вокруг оси *y*; *б* – вокруг оси *y* и затем вокруг оси *x*.

Иными словами, $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$. Следовательно, $\theta$ не может быть вектором.

Рассмотрим теперь поворот на угол $\theta_1 = 15°$ вокруг оси *x* и на угол $\theta_2 = 15°$ вокруг оси *y*. В этом случае приближенно (но не точно) $\theta_1 + \theta_2$ равняется $\theta_2 + \theta_1$ (рис. 9.3). Однако в пределе бесконечно малых углов поворота равенство $d\theta_1 + d\theta_2 = d\theta_2 + d\theta_1$ является точным. Мы получим один и тот же результат при сложении двух бесконечно малых поворотов независимо от очередности, в которой они производятся. Следовательно, бесконечно малые углы поворота $d\theta$ представляют собой векторы, в то время как конечные углы поворота таковыми не являются.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ должна быть также вектором, поскольку произведение вектора $d\boldsymbol{\theta}$ на скаляр $1/dt$ есть вектор:

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt.$$

Аналогично, поскольку $\boldsymbol{\omega}$ – вектор, угловое ускорение тоже является вектором:

$$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt.$$

Мы показали, что $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ – векторы. Но как направлены эти векторы? Рассмотрим вращающийся диск, показанный на рис. 9.4, *а*. Линейные скорости различных частиц диска направлены по-разному. Единственным направлением в пространстве, связанным с вращательным движением, является направление вдоль оси вращения, перпендикулярное реальному движению. Выберем поэтому ось вращения за направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. На самом деле такое определение направления $\boldsymbol{\omega}$ все еще

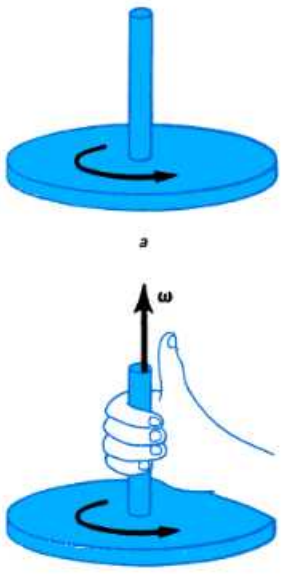



Рис. 9.4. *а* – вращающийся диск; *б* – правило правой руки для определения направления угловой скорости $\omega$.

неоднозначно, поскольку $\boldsymbol{\omega}$ может иметь два направления вдоль оси вращения (вверх или вниз на рис. 9.4, *а*). Поэтому мы воспользуемся соглашением, называемым *правилом правой руки*, которое заключается в следующем: если пальцы правой руки охватывают ось вращения в направлении вращения, то отогнутый большой палец укажет направление вектора $\boldsymbol{\omega}$. Это иллюстрирует рис. 9.4, *б*. Следует отметить, что направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта, когда он поворачивается в направлении вращения. Таким образом, если диск на рис. 9.4, *б* вращается против часовой стрелки, то вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вверх, как показано на рис. 9.4, *б*; если же диск вращается по часовой стрелке, то вектор направлен в противоположную сторону, т. е. вниз[1]. Следует заметить, что никакая часть вращающегося тела не движется в направлении вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Если ось вращения тела неподвижна, то угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ может изменяться только по величине. Следовательно, вектор углового ускорения $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ тоже должен быть направлен вдоль оси вращения. Если вращение происходит против часовой стрелки, как на рис. 9.4, *а*, и модуль угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ возрастает, то вектор $\boldsymbol{\alpha}$ направлен вверх; если же модуль угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ убывает (диск тормозится), то вектор $\boldsymbol{\alpha}$ направлен вниз. В случае когда вращение происходит по часовой стрелке, вектор углового ускорения $\boldsymbol{\alpha}$ будет направлен вниз, если модуль угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ возрастает, и вверх – если $|\boldsymbol{\omega}|$ убывает.

Таким образом, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ всегда

---

[1] Строго говоря, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ не являются векторами. Проблема состоит в том, что при отражении они не ведут себя как обычные векторы. Предположим, что мы смотрим прямо в зеркало на частицу, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ вправо перед зеркалом параллельно его поверхности. В зеркальном отражении скорость также будет направлена вправо. Таким образом, истинный вектор, такой, как вектор скорости, помещенный параллельно поверхности зеркала, имеет то же направление, что и его отражение. Рассмотрим теперь диск, вращающийся перед зеркалом таким образом, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ направлен вправо. (Мы смотрим на край диска.) В зеркале мы увидим, что диск вращается в противоположную сторону; таким образом, отраженный вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ направлен в противоположную сторону (влево). Из-за такого отличия при отражении вектора $\boldsymbol{\omega}$ от истинных векторов вектор $\boldsymbol{\omega}$ называют *псевдовектором*, – или *аксиальным вектором*. Угловое ускорение $\boldsymbol{\alpha}$ также является псевдовектором, как и все векторные произведения истинных векторов (разд. 10.1). В классической физике отличие истинных векторов от псевдовекторов не играет роли, и в этой книге мы не будем делать различия между ними. Разница между ними существенна при изучении некоторых аспектов физики субатомных частиц.

направлен вдоль оси вращения. Если ось вращения изменяет свое направление, изменяет направление и вектор $\boldsymbol{\omega}$. В этом случае вектор углового ускорения уже не направлен вдоль оси вращения. Такие примеры мы рассмотрим в гл. 10, в данной же главе мы будем рассматривать вращение тела только относительно неподвижной оси, когда оба вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ направлены вдоль оси вращения.

## 9.4. Момент силы

До сих пор в этой главе мы обсуждали кинематику вращательного движения, т. е. описание вращательного движения с помощью понятий углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения. Рассмотрим теперь динамику, т. е. то, что приводит к вращательному движению. Точно так же, как существует аналогия между уравнениями кинематики поступательного и вращательного движений, имеются вращательные эквиваленты и для динамики. Например, первый закон Ньютона для вращательного движения гласит, что свободно вращающееся тело будет сохранять состояние вращения с постоянной угловой скоростью до тех пор, пока на него не действуют какие-либо внешние силы (или, как мы скоро увидим, моменты сил), стремящиеся изменить это движение. Более трудным оказался вопрос об установлении вращательного эквивалента второго закона Ньютона, т. е. вопрос о том, что же приводит к угловому ускорению. Ясно, что для того, чтобы тело начало вращаться относительно оси, необходимо наличие силы. Но каким при этом будет направление силы, а также где приложена эта сила? Рассмотрим пример с дверью (рис. 9.5). Если вы приложите силу $\mathbf{F}_1$ к двери так, как показано на рисунке, то увидите, что, чем больше сила $\mathbf{F}_1$, тем быстрее дверь откроется. Но если теперь вы приложите силу $\mathbf{F}_2$ той же величины, что и $\mathbf{F}_1$, в точке, расположенной ближе к

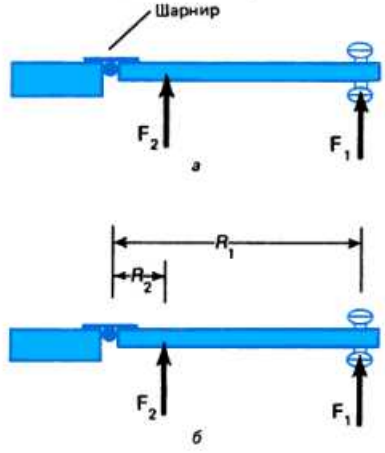



Рис. 9.5. Одинаковые силы, действующие на тело, с разными плечами $R$ относительно оси вращения.

косяку с петлями (рис. 9.5), то обнаружите, что дверь уже не так быстро откроется: эффект от приложения силы стал меньше.

Таким образом, угловое ускорение двери пропорционально не только величине силы. Если в данном случае ограничиться рассмотрением только этой силы (пренебрегая силой трения в петлях и т. п.), то угловое ускорение пропорционально также расстоянию по перпендикуляру от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила. Таким образом, если расстояние $R_1$ на рис. 9.5, *б* в три раза больше расстояния $R_2$, то угловое ускорение двери при действии силы $\mathbf{F}_1$ будет в три раза больше (разумеется, если величины сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ одинаковы). Иными словами, если $R_1 = 3R_2$, то сила $F_2$ должна быть в три раза больше силы $F_1$, чтобы сообщить двери такое же угловое ускорение. Расстояния $R_1$ и $R_2$ называются *плечами* соответствующих сил. Таким образом, угловое ускорение пропорционально произведению величины силы на ее плечо. Это произведение называется *моментом силы* относительно оси (или **вращающим моментом**) и обозначается греческой буквой τ (тау). Установлено, что угловое ускорение α прямо пропорционально моменту силы τ:

$$\alpha \sim \tau.$$

Таким образом, мы видим, что момент силы приводит к угловому ускорению. Это и есть вращательный аналог второго закона Ньютона: $a \sim F$. (В разд. 9.5 мы увидим, какой коэффициент здесь необходимо ввести, чтобы от знака пропорциональности перейти к знаку равенства.)

Мы определяем *плечо силы* как *длину перпендикуляра*, опущенного от оси вращения на линию действия силы (воображаемую линию, проведенную вдоль направления действия силы); сделали это мы для того, чтобы рассмотреть действие силы, приложенной под углом. Ясно, что сила, приложенная под углом, такая, как $\mathbf{F}_3$ на рис. 9.6, приведет к меньшему действию, чем сила той же величины, приложенная под прямым углом, такая, как $\mathbf{F}_1$ на рис. 9.6, *а*. Если же вы будете нажимать на край двери так, что сила будет действовать в направлении к петлям (т. е. к оси вращения), например как сила $\mathbf{F}_4$ на рис. 9.6, то дверь вообще не будет двигаться.

Плечо силы, такой, как $\mathbf{F}_3$, можно найти, если провести линию вдоль направления $\mathbf{F}_3$ (это «линия действия»

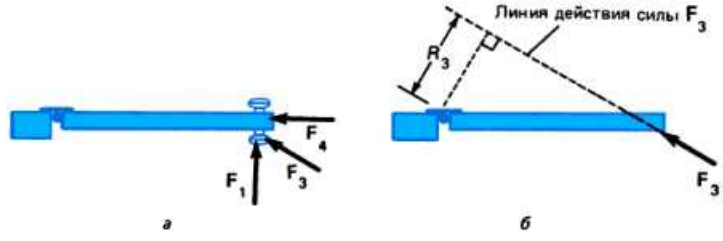



Рис. 9.6. *а* – силы, действующие под различными углами; *б* – плечо силы определяется как расстояние по перпендикуляру от оси вращения до линии действия силы.

силы $\mathbf{F}_3$) и опустить на нее перпендикуляр из точки, лежащей на оси вращения (он также будет перпендикулярен оси вращения). Длина этого перпендикуляра равна длине плеча силы $\mathbf{F}_3$ и обозначается $R_3$ на рис. 9.6, *б*.

Таким образом, момент силы $\mathbf{F}_3$ равен произведению[1] $R_3 F_3$. Небольшая длина плеча силы и соответственно меньшее значение момента силы $\mathbf{F}_3$ согласуются с тем, что наблюдается в действительности: с помощью силы $\mathbf{F}_3$ дверь открыть труднее, чем с помощью силы $\mathbf{F}_1$. При таком определении плеча силы из эксперимента следует, что соотношение $\alpha \sim \tau$ справедливо в общем случае. Из рис. 9.6, *а* мы видим, что линия действия силы $\mathbf{F}_4$ проходит через петли двери, и, следовательно, ее плечо равно нулю. Таким образом, сила $\mathbf{F}_4$ создает нулевой момент силы, который не приводит к возникновению углового ускорения, что согласуется с нашим повседневным опытом.

В общем случае момент силы относительно данной оси мы должны записать как

$$\tau = R_\perp F, \tag{9.8а}$$

где $R_\perp$ – плечо силы, а знак перпендикулярности ($\perp$) в индексе напоминает нам, что это плечо рассматривается как расстояние от оси вращения до линии действия силы (рис. 9.7, *а*), измеряемое вдоль перпендикуляра к линии действия силы. Другой эквивалентный способ определения момента силы состоит в разложении силы на составляющие, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна линии, соединяющей точку приложения силы с

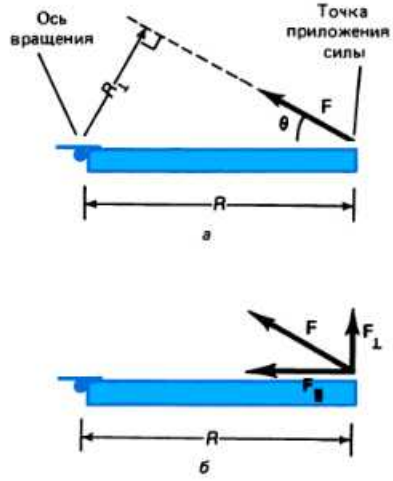
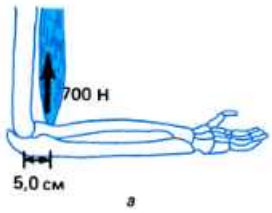



Рис. 9.7. Момент силы $R_\perp F = RF_\perp$.

[1] По существу, на протяжении всей гл. 9 речь идет о величинах векторов момента силы и момента импульса. – *Прим. ред.*



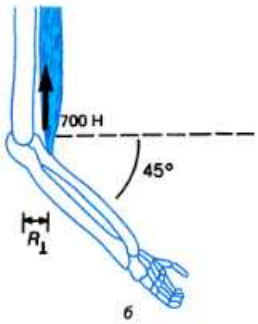




Рис. 9.8. Пример 9.7.

осью вращения (рис. 9.7, *б*). При этом момент силы равен произведению составляющей $F_\perp$ на расстояние $R$ от оси вращения до точки приложения силы:

$$\tau = RF_\perp. \qquad (9.8б)$$

То, что это приводит к такому же результату, как и (9.8а), становится ясным, если написать $F_\perp = F\sin\theta$ и $R_\perp = R\sin\theta$. Таким образом,

$$\tau = RF\sin\theta. \qquad (9.8в)$$

Для расчета момента силы можно использовать любую из формул (9.8) в зависимости от того, какая из них проще для данной задачи.

Поскольку момент силы равен произведению силы на расстояние, единицей его измерения является ньютон-метр (Н·м) в системе СИ[1] и дин·см в СГС.

**Пример 9.7.** Какие моменты силы создает бицепс, действующий на нижнюю часть руки а) на рис. 9.8, *а* и б) на рис. 9.8, *б*? Ось вращения проходит через локтевой сустав, а мышца прикреплена на расстоянии 5,0 см от него.

**Решение.** а) $F = 700$ Н, $R_\perp = 0{,}050$ м; следовательно, $\tau = (0{,}050\text{ м})(700\text{ Н}) = 35$ Н·м.

б) $F = 700$ Н, $R_\perp = (0{,}050\text{ м})(\sin 45°)$; следовательно, $\tau = (0{,}050\text{ м})(0{,}71) \times (700\text{ Н}) = 25$ Н·м.

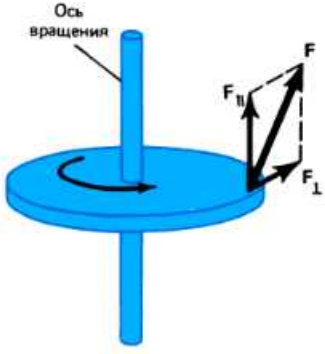



Рис. 9.9. Только составляющая $\mathbf{F}_\perp$ силы $\mathbf{F}$ в плоскости, перпендикулярной оси вращения, вызывает вращение колеса вокруг оси. Составляющая $\mathbf{F}_\parallel$, параллельная оси вращения, должна была бы перемещать саму ось вращения, которую мы считаем неподвижной.

В настоящей главе мы изучаем вращение относительно неподвижной оси; поэтому мы имеем дело лишь с силами, действующими в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Если же возникнет сила (или составляющая силы), действующая параллельно оси вращения, то она будет поворачивать ось вращения (например, составляющая $\mathbf{F}_\parallel$ на рис. 9.9). Поскольку мы считаем, что ось остается неподвижной и сохраняет свое направление, либо таких сил не должно быть вовсе, либо ось должна быть закреплена на опорах (или петлях), создающих компенсирующий момент силы, чтобы ось оставалась неподвижной. Таким образом, только сила или составляющая силы ($\mathbf{F}_\perp$ на рис. 9.9), лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения, приводят к вращению относительно оси, и в данной главе мы будем рассматривать только эти силы.

[1] Заметим, что единица измерения момента силы (Н·м в системе СИ) аналогична единице измерения энергии. Но эти величины сильно отличаются друг от друга. Очевидное различие состоит в том, что энергия является скалярной величиной, а момент силы, как мы увидим, – векторной. Специальная единица *джоуль* (1 Дж = 1 Н·м) используется только для измерения энергии (и работы), а не момента силы.

## 9.5. Динамика вращательного движения: момент силы и момент инерции

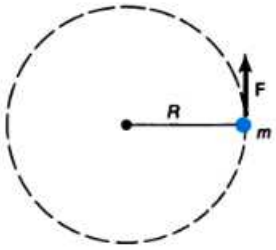



Рис. 9.10. Тело массой $m$, вращающееся по окружности радиусом $R$ относительно неподвижной точки.

Угловое ускорение $\alpha$ вращающегося тела, как мы показали выше, пропорционально моменту силы $\tau$, приложенного к телу:

$$\alpha \sim \tau.$$

Это соответствует второму закону Ньютона ($a \sim F$) для поступательного движения, причем момент силы соответствует силе, а угловое ускорение $\alpha$ – линейному ускорению $a$. В случае поступательного движения ускорение не только пропорционально равнодействующей приложенных к телу сил, но и обратно пропорционально мере инертности тела, которую мы называем массой $m$; таким образом, мы могли бы написать $a = F/m$. Но что играет роль массы в случае вращательного движения? Именно это нам предстоит определить. Одновременно мы увидим, что соотношение $\alpha \sim \tau$ является прямым следствием второго закона Ньютона: $F = ma$.

Рассмотрим вначале очень простой случай: частица массой $m$ вращается по окружности радиусом $R$ на конце нити или стержня, массой которых можно пренебречь (рис. 9.10). Момент силы, который приводит к угловому ускорению частицы, равен $\tau = RF$. Используя второй закон Ньютона ($F = ma$) для линейных величин и формулу (9.5), связывающую угловое ускорение с тангенциальным линейным ускорением ($a_\tau = R\alpha$), получаем

$$F = ma = mR\alpha.$$

Умножив обе части этого выражения на $R$, получим

$$\tau = RF = mR^2\alpha \quad \text{[одиночная частица]}. \tag{9.9}$$

Это есть не что иное, как соотношение, связывающее непосредственно угловое ускорение с приложенным моментом силы $\tau$. Величина $mR^2$ является *мерой инертности* частицы во вращательном движении и называется *моментом инерции*.

Рассмотрим вращающееся твердое тело, например цилиндр, который мы можем представить как совокупность множества частиц, расположенных на разных расстояниях от оси вращения. Для каждой частицы тела мы можем воспользоваться выражением (9.9) и затем просуммировать его по всем частицам. Сумма моментов сил равна полному моменту, который мы можем обозначить $\tau$. Таким образом, мы имеем следующее выражение:

$$\tau = \left(\sum m_i R_i^2\right)\alpha \quad \text{[ось неподвижна]}, \tag{9.10}$$

где угловое ускорение вынесено за знак суммы, поскольку оно одинаково для всех частиц тела. Результирующий момент сил $\tau$ представляет собой сумму всех моментов внутренних сил, с которыми каждая частица действует на

другие, и моментов внешних сил; но из третьего закона Ньютона следует, что сумма моментов внутренних сил равна нулю[1]. Следовательно, полный момент сил $\tau$ представляет собой сумму *моментов внешних сил.*

Сумма $\sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots + m_n R_n^2$ в выражении (9.10) равна сумме произведений массы каждой частицы тела на расстояние от частицы до оси вращения. Эта величина называется **моментом инерции** тела $I$:

$$I = \sum m_i R_i^2 . \qquad (9.11)$$

Объединяя выражения (9.10) и (9.11), мы имеем

$$\tau = I\alpha \qquad \text{[неподвижная ось]}. \qquad (9.12)$$

Это вращательный эквивалент второго закона Ньютона. Формула (9.12) справедлива для случая, когда рассматривается вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси[2]. Можно показать (гл. 10), что эта формула применима также и тогда, когда тело движется поступательно с ускорением, но только если момент инерции $I$ и угловое ускорение $\alpha$ вычисляются относительно ЦМ тела, а ось вращения, проходящая через ЦМ, не меняет своего направления. Таким образом,

$$\tau_{\text{цм}} = I_{\text{цм}}\alpha_{\text{цм}} \qquad \text{[фиксированное направление оси]}. \qquad (9.13)$$

Отсюда следует, что момент инерции $I$, который является мерой инертности тела при его вращении, играет ту же роль, что и масса при поступательном движении. Согласно выражению (9.11), момент инерции зависит не только от массы тела, но и от того, как эта масса распределена. Например, цилиндр большого диаметра будет иметь больший момент инерции, чем цилиндр той же массы, но меньшего диаметра (поэтому такой цилиндр длиннее) (рис. 9.11). Первый цилиндр труднее привести в состояние вращения и остановить. Чем дальше от оси вращения сконцентрирована масса тела, тем больше его

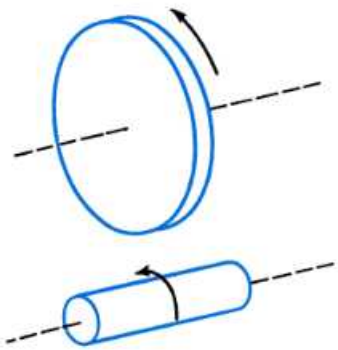


Рис. 9.11. Момент инерции цилиндра большого диаметра больше, чем цилиндра такой же массы, но меньшего диаметра.

---

[1] Это является следствием так называемой «строгой» формулировки третьего закона Ньютона, в которой утверждается не только то, что сила, с которой одна частица действует на вторую, равна и противоположна по направлению силе, с которой вторая частица действует на первую, но и то, что обе силы действуют вдоль одной прямой. Строгая формулировка третьего закона Ньютона выполняется для большинства сил, но не справедлива для некоторых электромагнитных сил. Тем не менее даже в последнем случае можно показать, что сумма моментов внутренних сил равна нулю.

[2] То есть ось вращения неподвижна относительно тела и неподвижна в некоторой инерциальной системе отсчета. Такое рассмотрение включает в себя случай, когда ось вращения движется с постоянной скоростью в инерциальной системе отсчета, поскольку можно найти другую инерциальную систему отсчета, в которой ось будет неподвижна, причем эта вторая система отсчета движется относительно первой.

момент инерции. Для вращательного движения массу тела *нельзя* считать сконцентрированной в его центре масс.

В любом случае, когда применяется выражение (9.12), необходимо помнить, что угловое ускорение измеряется в рад/с$^2$, а другие величины измеряются в соответствующей системе единиц. В системе СИ единицей измерения момента инерции $I$ является кг·м$^2$.

**Пример 9.8.** Две частицы массами 5,0 и 7,0 кг закреплены на легком стержне, массой которого можно пренебречь, на расстоянии 4,0 м друг от друга, как показано на рис. 9.12. Вычислите момент инерции системы при ее вращении а) относительно оси, проходящей посередине между телами (рис. 9.12, *а*) и б) относительно оси, расположенной на 0,50 м левее частицы с массой 5 кг (рис. 9.12, *б*).

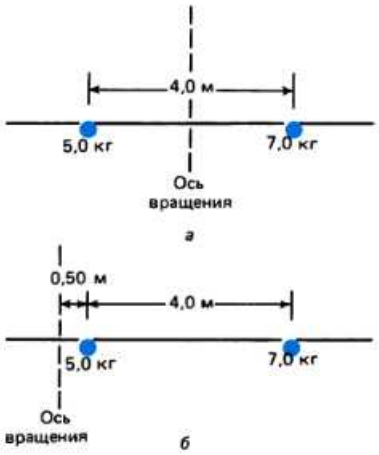



Рис. 9.12. К вычислению момента инерции (пример 9.8).

**Решение.** а) Обе частицы находятся на одинаковом расстоянии 2,0 м от оси вращения. Следовательно,

$$I = \sum m_i R_i^2 = (5{,}0\ \text{кг})(2{,}0\ \text{м})^2 + (7{,}0\ \text{кг})(2{,}0\ \text{м})^2 = 48\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

б) Частица массой 5,0 кг отстоит от оси вращения на 0,50 м, а частица массой 7,0 кг – на 4,50 м. Таким образом,

$$I = \sum m_i R_i^2 = (5{,}0\ \text{кг})(0{,}50\ \text{м})^2 + (7{,}0\ \text{кг})(4{,}5\ \text{м})^2 = 1{,}3\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 + 142\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 = 143\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Этот пример выявляет две важные особенности. Во-первых, одно и то же тело имеет разные моменты инерции относительно различных осей вращения. Во-вторых, из п. «б» примера следует, что тело, расположенное ближе к оси вращения, дает меньший вклад в полный момент инерции; мы видим, что тело массой 5,0 кг дает в полный момент инерции вклад, не превышающий 1%.

Для большинства тел масса распределена непрерывно, и сумма $\sum m_i R_i^2$ в некоторых случаях может быть вычислена с помощью методов математического анализа (разд. 9.6). При этом можно получить формулы для моментов инерции различных тел правильной формы, выразив их через линейные размеры этих тел. На рис. 9.13 представлены моменты инерции некоторых твердых тел относительно указанных осей. Единственным случаем, когда момент инерции вычисляется совсем просто, является тонкое кольцо радиусом $R_0$, вращающееся вокруг оси, проходящей через центр кольца. Для этого тела вся масса распределена равномерно по окружности на рас-

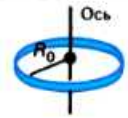
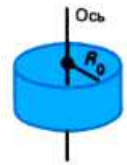
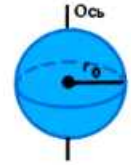
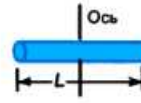
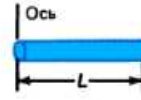
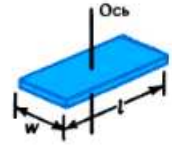
| Тело | Положение оси вращения | | Момент инерции | Радиус инерции |
|---|---|---|---|---|
| а) Тонкое кольцо радиусом $R_0$ | Через центр |   | $MR_0^2$ | $R_0$ |
| б) Тонкое кольцо радиусом $R_0$ и шириной $w$ | По диаметру |   | $\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$ | $\sqrt{\frac{R_0^2}{2} + \frac{w^2}{12}}$ |
| в) Твердый цилиндр радиусом $R_0$ | Через центр |   | $\frac{1}{2}MR_0^2$ | $\frac{R_0}{\sqrt{2}}$ |
| г) Полый цилиндр с внутренним радиусом $R_1$ и внешним радиусом $R_2$ | Через центр |   | $\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ | $\sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}$ |
| д) Твердая сфера радиусом $r_0$ | Через центр |   | $\frac{2}{5}Mr_0^2$ | $\sqrt{\frac{2}{5}}r_0$ |
| е) Тонкий стержень длиной $L$ | Через центр |   | $\frac{1}{12}ML^2$ | $\frac{L}{\sqrt{12}}$ |
| ж) Тонкий стержень длиной $L$ | Через конец |   | $\frac{1}{3}ML^2$ | $\frac{L}{\sqrt{3}}$ |
| з) Тонкая прямоугольная пластинка длиной $l$ и шириной $w$ | Через центр |   | $\frac{1}{12}M(l^2 + w^2)$ | $\sqrt{\frac{l^2 + w^2}{12}}$ |

Рис. 9.13. Моменты инерции различных тел однородного состава.

стоянии $R_0$ от оси вращения. Таким образом, $\sum m_i R_i^2 = (\sum m_i) R_0^2 = MR_0^2$, где $M$ – полная масса кольца.

Моменты инерции тел удобно вычислить, используя *радиус инерции* $k$, который представляет собой усредненную величину. Радиус инерции тела определяется таким образом, что если бы вся масса тела была сосредоточена

на этом расстоянии от оси, то мы имели бы тот же самый момент инерции, что и у исходного тела. Например (рис. 9.13), радиус инерции сплошного цилиндра равен $(1/\sqrt{2})\,R_0 \approx 0{,}71\,R_0$; это означает, что сплошной цилиндр радиусом 10,0 см имеет тот же момент инерции, что и тонкое кольцо такой же массы радиусом 7,1 см. Момент инерции любого тела можно записать через радиус инерции следующим образом:

$$I = Mk^2.$$

Радиус инерции удобно использовать для тел необычной или неправильной формы.

**Пример 9.9.** К веревке, намотанной вокруг колеса массой $M = 4{,}00$ кг и радиусом $R_0 = 33{,}0$ см приложена сила $T = 15{,}0$ Н. Радиус инерции колеса $k = 30{,}0$ см (рис. 9.14). Если момент сил трения в ступице колеса равен $\tau_{тр} = 1{,}10$ Н·м, то с каким угловым ускорением вращается колесо?

**Решение.** Вычислим сначала момент инерции колеса $I$:

$$I = Mk^2 = (4{,}00\text{ кг})\,(0{,}300\text{ м})^2 =$$

$$= 0{,}360\text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

На колесо действуют два момента, один из которых обусловлен силой $T = 15{,}0$ Н и равен по величине $(0{,}330\text{ м})\,(15{,}0\text{ Н}) = 4{,}95$ Н·м, и другой противоположно направленный момент силы за счет трения $\tau_{тр} = 1{,}10$ Н·м. Таким образом, используя формулу (9.12), находим

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR_0 - \tau_{тр}}{I} =$$

$$= \frac{(4{,}95\text{ Н}\cdot\text{м}) - (1{,}10\text{ Н}\cdot\text{м})}{0{,}360\text{ кг}\cdot\text{м}^2} = 10{,}7\text{ рад/с}^2.$$

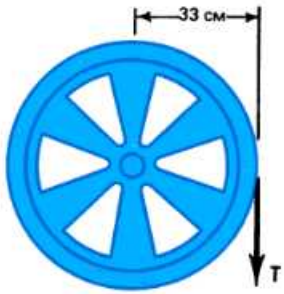



Рис. 9.14. Пример 9.9.

**Пример 9.10.** Предположим, что на рис. 9.14 к веревке на колесе, вместо того чтобы на нее действовать постоянной силой 15,0 Н, прикреплен груз весом 15,0 Н (массой $m = 1{,}53$ кг). Веревку будем считать невесомой и нерастяжимой. Необходимо найти: а) угловое ускорение колеса $\alpha$ и линейное ускорение груза массой $m$, а также б) угловую скорость $\omega$ колеса и линейную скорость $v$ груза в момент времени $t = 3{,}00$ с, если колесо начинает двигаться из состояния покоя в момент времени $t = 0$.

**Решение.** а) Обозначим через $T$ силу натяжения веревки. При этом сила $T$ действует на край колеса. Таким образом, мы имеем (см. пример 9.9)

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR_0 - \tau_{тр}}{I}.$$

На груз $m$ действуют две силы: сила тяжести $mg$, направленная вниз, и сила натяжения веревки $T$, направленная вверх. Поскольку $F = ma$, мы имеем

$$ma = mg - T.$$

Следует заметить, что сила натяжения $T$, которая действует на край колеса, в общем случае не равна силе тяжести, действующей на груз ($mg = 15{,}0$ Н); это обусловлено тем, что груз движется с ускорением, а из последнего уравнения получаем $T = mg - ma$. Для вычисления $\alpha$ исключим $T$ из двух уравнений, написанных выше, и воспользуемся соотношением (9.5):

$$a = R_0\,\alpha,$$

которое мы имеем полное право применять, так как тангенциальное ускорение точек, принадлежащих краю (ободу), будет тем же, что и ускорение груза (если, конечно, веревка не растягивается и не проскальзывает). Таким образом, мы имеем следующее уравнение:

$$\alpha = \frac{(mg - mR_0\alpha)R_0 - \tau_{тр}}{I},$$

решив которое относительно α, получим

$$\alpha = \frac{mgR_0 - \tau_{тр}}{I + mR_0^2} = \frac{(15{,}0\ \text{Н})(0{,}330\ \text{м}) - 1{,}10\ \text{Н}\cdot\text{м}}{0{,}360\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 + (1{,}53\ \text{кг})(0{,}330\ \text{м})^2} = 7{,}31\ \text{рад/с}^2.$$

Угловое ускорение колеса в этом случае несколько меньше, чем в примере 9.9; объясняется это тем, что сила натяжения $T$ несколько меньше, чем сила тяжести $mg$, действующая на груз. Линейное ускорение груза равно

$$a = R_0\alpha = (0{,}330\ \text{м})(7{,}31\ \text{рад/с}^2) = 2{,}41\ \text{м/с}^2.$$

б) Поскольку угловое ускорение тела постоянно, для угловой скорости находим

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (7{,}31\ \text{рад/с}^2)(3{,}00\ \text{с}) = 21{,}9\ \text{рад/с}.$$

Линейная скорость груза такая же, как и у точек на ободе колеса:

$$v = R_0\omega = (0{,}330\ \text{м})(21{,}9\ \text{рад/с}) = 7{,}23\ \text{м/с}.$$

Скорость $v$ можно также вычислить, используя линейное выражение $v = v_0 + at$; подставляя в него соответствующие значения, получаем $0 + (2{,}41\ \text{м/с}^2)(3{,}00\ \text{с}) = 7{,}23\ \text{м/с}$.

## *9.6. Вычисление моментов инерции

Момент инерции любого тела относительно произвольной оси можно найти экспериментально посредством измерения полного момента силы τ, необходимого для сообщения телу углового ускорения α. При этом из формулы (9.12) имеем $I = \tau/\alpha$.

Можно вычислить моменты инерции многих тел или систем частиц. Простой иллюстрацией такого расчета является пример 9.8. Большинство тел можно рассматривать как непрерывное распределение массы. При этом выражение (9.11) для момента инерции принимает вид

$$I = \int R^2\,dm, \qquad (9.14)$$

где $dm$ – масса любой бесконечно малой частицы тела, а $R$ – ее расстояние по перпендикуляру от оси вращения; интеграл берется по всему объему тела. Этот интеграл нетрудно вычислить лишь для тел простой геометрической формы.

**Пример 9.11.** Покажем, что момент инерции однородного полого цилиндра (внутренний радиус $R_1$, внешний радиус $R_2$) массой $M$ равен $I = (1/2)M(R_1^2 + R_2^2)$, как это следует из рис. 9.13, если ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра.

**Решение.** Разобьем цилиндр на концентрические цилиндрические кольца (или обручи) толщиной $dR$, как показано на рис. 9.15. Если плотность (масса единицы объема) вещества равна ρ, то

$$dm = \rho\,dV;$$

здесь $dV$ – объем бесконечно тонкого кольца радиусом $R$, толщиной $dR$ и высотой $h$.

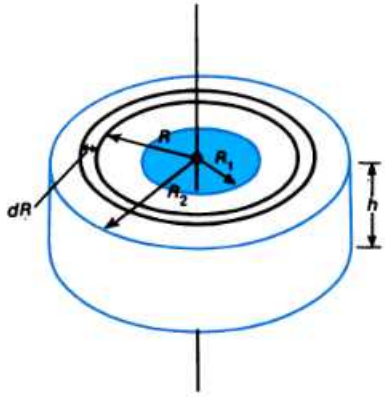



Рис. 9.15. Определение момента инерции полого цилиндра (пример 9.11).

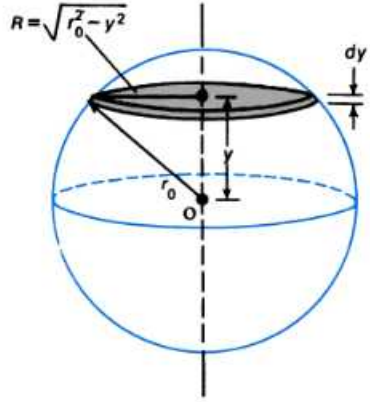



Рис. 9.16. Определение момента инерции шара радиусом $r_0$ (пример 9.12).

Поскольку $dV = (2\pi R)(dR)(h)$, мы имеем $dm = 2\pi\rho h R\, dR$.

Таким образом, момент инерции получается посредством интегрирования (суммирования) по всем этим кольцам:

$$I = \int R^2\, dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h R^3\, dR =$$

$$= 2\pi\rho h\left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right];$$

мы предположили здесь, что цилиндр имеет постоянную плотность во всех точках, т. е. $\rho = \text{const}$. (Если бы это было не так, то нам пришлось бы учитывать зависимость $\rho$ от $R$, прежде чем выполнять интегрирование.) Объем $V$ рассматриваемого нами полого цилиндра равен $V = (\pi R_2^2 - \pi R_1^2)h$, так что его масса равна $M = \rho V = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)h$.

Поскольку $R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$, имеем

$$I = \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

в соответствии с выражением на рис. 9.13. Заметим, что для сплошного цилиндра $R_1 = 0$, и мы получаем, полагая $R_2 = R_0$,

$$I = \frac{1}{2}MR_0^2,$$

что вновь совпадает с соответствующим выражением на рис. 9.13 для сплошного цилиндра массой $M$ и радиусом $R_0$.

**Пример 9.12.** Вычислим момент инерции однородного твердого шара радиусом $r_0$ относительно оси, проходящей через его центр.

**Решение.** Разобьем шар на бесконечно малые цилиндры высотой $dy$, как показано на рис. 9.16. Каждый такой цилиндр имеет радиус

$$R = \sqrt{r_0^2 - y^2}$$

и массу

$$dm = \rho\, dV = \rho\pi R^2\, dy = \rho\pi(r_0^2 - y^2)\, dy.$$

Следовательно, момент инерции любого бесконечно малого цилиндра можно записать в виде

$$dI = \frac{1}{2}dmR^2 = \frac{\rho\pi}{2}(r_0^2 - y^2)^2\, dy =$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}(r_0^4 - 2r_0^2y^2 + y^4)\, dy.$$

Суммирование (точнее, интегрирование) по всем этим бесконечно малым цилинд-

рам дает

$$I = \int dI = \frac{\rho\pi}{2} \int_{-r_0}^{r_0} (r_0^4 - 2r_0^2 y^2 + y^4)\, dy =$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\left(r_0^4 y - \frac{2}{3} r_0^3 y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-r_0}^{r_0} = \frac{8}{15}\rho\pi r_0^5.$$

Поскольку объем шара равен $V = (4/3)\pi r_0^3$, мы имеем $M = \rho V = (4/3)\pi\rho r_0^3$; следовательно,

$$I = \frac{2}{5} M r_0^2,$$

что совпадает с соответствующим выражением на рис. 9.13.

Существуют две простые теоремы, которые помогают при вычислении моментов инерции. Первая из них называется *теоремой о параллельном переносе оси вращения* (теоремой о параллельных осях). Она утверждает, что если $I$ – момент инерции тела массой $M$ относительно некоторой оси вращения, а $I_{\text{цм}}$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной первой оси, отстоящей от нее на расстояние $h$, то[1)]

$$I = I_{\text{цм}} + Mh^2. \tag{9.15}$$

Таким образом, если известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, то нетрудно вычислить момент инерции относительно любой параллельной ей оси. Доказательство этой теоремы проводится следующим образом. Выберем систему координат таким образом, чтобы ее начало приходилось на центр масс, и пусть $I_{\text{цм}}$ – момент инерции относительно оси $z$. На рис. 9.17 изображено поперечное сечение тела произвольной формы в плоскости $xy$. Обозначим через $I$ момент инерции тела относительно оси, параллельной оси $z$ и проходящей через точку $A$ (на рис. 9.17) с координатами $x_A$ и $y_A$. Пусть $x_i$, $y_i$ – координаты, а $m_i$ – масса произвольной материальной точки, принадлежащей телу. Квадрат расстояния от этой материальной точки до точки $A$

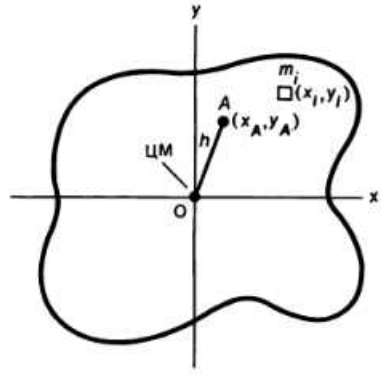



Рис. 9.17. К доказательству теоремы о параллельных осях.

[1)] Эта теорема называется также теоремой Штейнера.– *Прим. ред.*

равен $(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2$. Таким образом, момент инерции $I$ относительно оси, проходящей через точку $A$, запишется следующим образом:

$$I = \sum m_i[(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2] = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) - \\ - 2x_A\sum m_i x_i - 2y_A\sum m_i y_i + (\sum m_i)(x_A^2 + y_A^2).$$

Первый член в правой части этого равенства совпадает с $I_{\text{цм}} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$, поскольку по условию ЦМ тела расположен в начале координат. Второй и третий члены равны нулю в соответствии с определением центра масс: $\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0$, так как $x_{\text{цм}} = y_{\text{цм}} = 0$. Последний член равен $Mh^2$, поскольку $\sum m_i = M$ и $(x_A^2 + y_A^2) = h^2$, где $h$ – расстояние от точки $A$ до ЦМ. Таким образом, мы доказали соотношение $I = I_{\text{цм}} + Mh^2$, т.е. выражение (9.15).

Теорема о параллельном переносе осей может быть применена к любому телу. Другая теорема – *теорема о перпендикулярных осях* – может быть применена лишь к плоским фигурам, т.е. к двумерным телам, или телам постоянной толщины, которой можно пренебречь по сравнению с другими размерами. Согласно этой теореме, сумма моментов инерции плоского тела относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей в плоскости этого тела равна моменту инерции относительно оси, проходящей через точку пересечения перпендикулярно плоскости тела. Точнее говоря, если тело расположено в плоскости $xy$, то

$$I_z = I_x + I_y \qquad [\text{тело в плоскости } xy]. \qquad (9.16)$$

Здесь $I_z$, $I_x$, $I_y$ – моменты инерции относительно осей $z$, $x$ и $y$ соответственно. Доказательство этой теоремы не составляет труда и основано на том, что по определению $I_x = \sum m_i y_i^2$, $I_y = \sum m_i x_i^2$, $I_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$, откуда сразу следует формула (9.16).

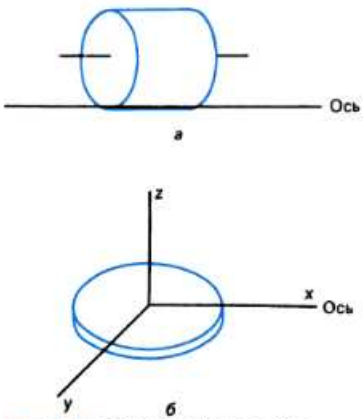



Рис. 9.18. К определению моментов инерции тел в примерах 9.13 и 9.14.

**Пример 9.13.** Найдем момент инерции сплошного цилиндра радиусом $R_0$ и массой $M$ относительно оси, тангенциальной к его краю и параллельной его оси симметрии (рис. 9.18, *а*).

**Решение.** Воспользуемся теоремой о параллельном переносе осей и учтем, что $I_{\text{цм}} = (1/2)MR_0^2$ (см. на рис. 9.13, *в*). Тогда, поскольку $h = R_0$, мы имеем

$$I = I_{\text{цм}} + Mh^2 = \frac{3}{2}MR_0^2.$$

**Пример 9.14.** Определим момент инерции тонкого круглого диска (цилиндра очень малой высоты) относительно оси, проходящей через его центр в плоскости $xy$ (рис. 9.18, *б*).

**Решение.** Применим теорему о перпендикулярных осях и вычислим момент инерции относительно оси $x$ (рис. 9.18, *б*). Из рис. 9.13, *в* имеем $I_z = (1/2)MR_0^2$, а вследствие симметрии $I_x = I_y$. Следовательно, $2I_x = I_z$, откуда $I_x = (1/2)I_z = (1/4)MR_0^2$.

## *9.7. Почему катящийся шар замедляется?

Шар массой $M$ и радиусом $r_0$, катящийся по горизонтальному гладкому и плоскому столу, в конце концов останавливается. Какая же сила вынуждает его к этому? Можно было бы подумать, что это сила трения, однако даже простой анализ явления указывает на то, что здесь имеется серьезное противоречие.

Предположим, что шар катится влево, как показано на рис. 9.19, и при этом замедляется. Согласно второму закону Ньютона ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), должна существовать сила $\mathbf{F}$ (по всей вероятности, что-то вроде силы трения), действующая вправо, как показано на рисунке, так что ускорение $\mathbf{a}$ будет также направлено вправо и скорость $v$ шара будет уменьшаться. Однако весьма примечательно, что если мы посмотрим теперь на уравнение динамики вращательного движения $\tau = I\alpha$ (момент силы вычислен относительно центра масс шара), обнаружим, что сила $\mathbf{F}$ способствует увеличению углового ускорения $\alpha$ и, следовательно, *увеличению* линейной скорости шара. Здесь налицо явное противоречие! Сила $\mathbf{F}$ стремится замедлить шар, если мы рассматриваем поступательное движение, но в то же время стремится ускорить его, если мы рассматриваем вращательное движение.

Разрешить этот кажущийся парадокс можно, если предположить, что здесь действуют некоторые другие силы. Единственными другими силами, действующими на шар, являются сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила нормальной реакции $\mathbf{F}_N (= -m\mathbf{g})$. Эти силы действуют по вертикали и потому не влияют на горизонтальное поступательное движение. Если считать как шар, так и поверхность стола, по которой он катится, абсолютно твердыми, т. е. контакт между ними имеет место лишь в одной точке, то эти силы не приводят к какому-либо моменту относительно ЦМ, поскольку линия их действия проходит через него.

Единственная возможность разрешения возникшего противоречия состоит в отказе от идеализированного

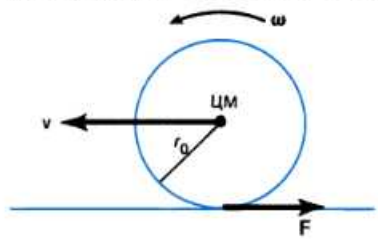



Рис. 9.19. Шар, катящийся в левую сторону.

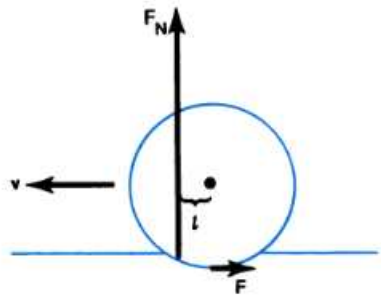



Рис. 9.20. Нормальная сила реакции $\mathbf{F}_N$ вызывает момент силы, замедляющий движение катящегося шара.

предположения об абсолютной твердости участвующих в движении тел. Действительно, все тела без исключения деформируемы в той или иной степени, так что наш шар слегка уплощается, а поверхность стола немного прогибается в месте контакта с шаром. Следовательно, мы имеем дело с некоторой конечной *областью* контакта, а не с точкой. Но если это так, то в области контакта может возникнуть момент силы, действующий в противоположном направлении по сравнению с моментом силы, обусловленным силой $\mathbf{F}$, и, следовательно, может действовать так, что шар будет замедляться. Этот момент силы можно связать с нормальной силой $\mathbf{F}_N$, с которой поверхность стола действует на шар во всей области их контакта. В результате мы получим, что силу $\mathbf{F}_N$ можно рассматривать как действующую вертикально на расстоянии $l$ перед центром масс (по направлению движения), как показано на рис. 9.20 (на этом рисунке деформация изображена весьма преувеличенной).

Правильно ли то, что нормальная сила $\mathbf{F}_N$ должна действовать *впереди* положения ЦМ, как показано на рис. 9.20? Да, конечно. Дело в том, что, когда шар катится, его передний край ударяется о поверхность стола и получает небольшой импульс силы. Следовательно, поверхность стола действует вверх на переднюю часть шара немного сильнее, чем в случае, когда шар покоится. Что касается задней части области контакта, то шар здесь начинает двигаться вверх, и, следовательно, поверхность стола действует на него вверх несколько слабее, чем в случае покоящегося шара. Таким образом, поверхность стола действует с большей силой на переднюю часть шара в области его контакта со столом и с меньшей силой на заднюю его часть, что приводит к возникновению момента силы и подтверждает то, что точка приложения силы $\mathbf{F}_N$ должна находиться перед центром масс шара.

Очевидно, что момент силы

$$\tau_N = lF_N$$

приводит к уменьшению угловой скорости катящегося

шара, а тем самым и к его замедлению[1]. Действительно, и величину $\tau_N$ можно выразить либо через $F$, либо через $a$. Из уравнения динамики вращательного движения $\tau = I\alpha$ имеем

$$\tau_N - r_0 F = I\alpha = I\frac{a}{r_0},$$

поскольку угловое ускорение $\alpha$ связано с линейным $a$ соотношением $\alpha = a/r_0$. Таким образом,

$$\tau_N = I\frac{a}{r_0} + r_0 F.$$

Для поступательного (горизонтального) движения следует учитывать лишь действие силы $F$, так что $F = Ma$, и, следовательно,

$$\tau_N = I\frac{F}{Mr_0} + r_0 F = F\left(\frac{I}{Mr_0} + r_0\right),$$

или

$$\tau_N = I\frac{a}{r_0} + r_0 Ma = a\left(\frac{I}{r_0} + r_0 M\right).$$

Для шара момент инерции равен $I = (2/5)Mr_0^2$, так что окончательно находим

$$\tau_N = \frac{7}{5}Fr_0 = \frac{7}{5}Mr_0 a.$$

Таким образом, действующий на шар момент силы за счет $\mathbf{F}_N$ в 7/5 раза больше момента силы, обусловленного силой трения $\mathbf{F}$, независимо от того, сколь быстро происходит замедление движения. Для очень твердых поверхностей скорость торможения практически равна нулю, так что $\tau_N = 0$, откуда следует, что $l \approx 0$ и линия действия силы $\mathbf{F}_N$ проходит очень близко к центру масс.

**Пример 9.15.** Шар массой 2,6 кг и радиусом $r_0 = 35$ см катится по плоской поверхности со скоростью $v = 0{,}40$ м/с и, пройдя 80 м, останавливается. Нужно найти силу $F$ и расстояние $l$.

**Решение.** Из уравнения (2.9в) имеем $a = (v^2 - v_0^2)/2x = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ м/с$^2$. Следовательно, $F = Ma = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ Н. Поскольку $\tau_N = (7/5)Fr_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Н·м, находим $l = \tau_N/F_N = \tau_N/Mg = 5 \cdot 10^{-5}$ м = = 0,05 мм, т.е. очень малое расстояние. Заметим, что невозможно определить $\tau_N$ или $l$ до тех пор, пока не измерено значение $a$ (или $F$).

---

[1] Угловые и линейные скорости и ускорения шара связаны между собой условием качения $v = \omega r_0$ (или $a = \alpha r_0$), основанным на неподвижности точки контакта (в противном случае имеет место качение с проскальзыванием или чистое скольжение).– *Прим. ред.*

В присутствии других сил незначительным моментом силы, обусловленным $\mathbf{F}_N$, во многих случаях можно пренебречь. Например, когда шар или цилиндр скатывается по наклонной плоскости, сила тяжести дает значительно больший вклад, чем $\tau_N$, так что последним можно пренебречь. Таким образом, для большинства задач можно считать, что абсолютно твердый шар соприкасается с абсолютно твердой поверхностью, по существу, в одной точке.

## 9.8. Момент импульса и его сохранение

Уравнение [см. (9.12) и (9.13)]

$\tau = I\alpha$

описывает вращение твердого тела относительно фиксированной оси (или оси, которая движется поступательно, но не меняет своего направления и проходит через ЦМ тела). Это уравнение является вращательным аналогом второго закона Ньютона ($F = ma$) для поступательного движения. Последнее уравнение можно также записать в виде $F = dp/dt = d(mv)/dt$, где $p$ – линейный импульс. Аналогичное соотношение можно записать и для вращательного движения твердого тела. Поскольку в соответствии с (9.3) угловое ускорение равно $\alpha = d\omega/dt$, мы имеем

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}.$$

(Этот простой вывод предполагает, что момент инерции $I$ сохраняется постоянным. Однако полученное выражение справедливо, даже если момент инерции изменяется; это мы покажем в гл. 10.) Величина $I\omega$ называется **моментом импульса** (моментом количества движения, угловым моментом) $L$ тела относительно его оси вращения[1]:

$$L = I\omega. \tag{9.17}$$

Таким образом, второй закон Ньютона для вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси (или оси, проходящей через центр масс тела и перемещающейся вместе с ним поступательно без изменения направления) имеет вид

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}. \tag{9.18}$$

[1] В гл. 10 мы покажем, что момент импульса является вектором и что рассматриваемая здесь величина $L = I\omega$ является его проекцией на ось вращения (при этом могут быть и другие проекции).

Выражение (9.18) – это просто иная запись формул (9.12) и (9.13) (при соблюдении упомянутых выше ограничений).

Заметим, что момент импульса твердого тела $L = I\omega$ полностью аналогичен импульсу $p = mv$. Момент инерции $I$, характеризующий инертность при вращательном движении, является аналогом массы $m$ (меры инертности при поступательном движении); угловая скорость $\omega$ – это аналог обычной скорости $v$.

Момент импульса является очень важным понятием в физике. В гл. 10 мы рассмотрим момент импульса более подробно для более общих случаев с учетом его векторной природы. Теперь же займемся изучением одного из наиболее важных свойств этой величины, а именно того, что при определенных условиях момент импульса, как энергия и импульс, является *сохраняющейся* величиной. Что же это за условия, при которых сохраняется момент импульса? Из формулы (9.18) ясно, что если результирующий момент силы $\tau$, действующий на вращающееся тело, равен нулю, то

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad L = I\omega = \text{const}.$$

В этом состоит **закон сохранения момента импульса** для вращающегося тела, который можно сформулировать так:

> **Полный момент импульса вращающегося тела остается постоянным, если результирующий момент сил, действующий на него, равен нулю.**

Этот закон, особенно в его более общей форме (см. гл. 10), является одним из великих законов сохранения в физике[1)].

Если результирующий момент силы, действующей на тело, равен нулю, а тело вращается вокруг неподвижной оси (или оси, проходящей через его ЦМ и движущейся поступательно без изменения своего направления), то

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{const};$$

здесь $I_0$ и $\omega_0$ – соответственно момент инерции и угловая скорость относительно оси в какой-либо начальный момент времени ($t = 0$), а $I$ и $\omega$ – значения этих величин в какой-либо другой момент времени. Взаимное расположение различных частей тела может изменяться, так что момент инерции $I$ изменяется; изменяется также и угловая скорость $\omega$, но при этом произведение $I\omega$ остается постоянным.

---

[1)] Подобно другим законам сохранения, закон сохранения момента импульса отражает фундаментальные свойства симметрии пространства и времени, а именно инвариантность пространства по отношению к операции поворота и равноправие всех направлений (изотропность пространства). – *Прим. ред.*

На основе закона сохранения момента импульса можно объяснить многие интересные явления повседневной жизни. Например, фигурист, выполняющий «волчок» на льду, вращается со сравнительно низкой угловой скоростью, когда его руки разведены в стороны. Прижимая руки к себе, фигурист сразу начинает вращаться со значительно более высокой угловой скоростью. Вспоминая определение момента инерции $I = \sum_i m_i R_i^2$, легко убедиться, что при приближении рук к оси вращения момент инерции уменьшается. Поскольку момент импульса $I\omega$ остается неизменным (малым моментом сил трения мы пренебрегаем), то при уменьшении $I$ величина $\omega$ должна возрастать. Так, если момент инерции фигуриста уменьшается в два раза, то во столько же раз увеличивается его угловая скорость.

Аналогичный пример мы имеем в случае с прыгуном в воду на рис. 9.21. Толчок, испытываемый им в момент отрыва от гибкой доски, «закручивает» его, т. е. сообщает прыгуну начальный запас момента импульса относительно его ЦМ. Прежде чем прыгнуть в воду, прыгун совершает один или несколько оборотов с большой угловой скоростью; затем он вытягивает руки, увеличивая тем самым свой момент инерции и, следовательно, снижая свою угловую скорость до совсем небольшой величины перед входом в воду. Момент инерции при этом может измениться в 3,5 раза.

**Пример 9.16.** Шарик массой $m$, укрепленный на конце нити, вращается по окружности на гладкой (без трения) поверхности стола. Другой конец нити пропущен сквозь отверстие в столе (рис. 9.22). Первоначально шарик вращается с линейной скоростью $v_1 = 2{,}4$ м/с по окружности радиусом $R_1 = 0{,}80$ м. Затем нить начинает медленно протягиваться через отверстие так, что радиус окружности уменьшается до значения $R_2 = 0{,}48$ м. Чему становится равной скорость шарика $v_2$?

**Решение.** Сила, действующая со стороны нити на шарик массой $m$, не изменяет его момента импульса, поскольку

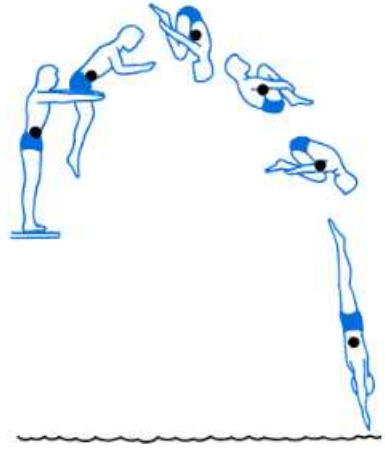


Рис. 9.21. Прыгун в воду вращается быстрее, когда его руки и ноги согнуты и прижаты к телу, чем когда они вытянуты. Момент импульса прыгуна сохраняется.

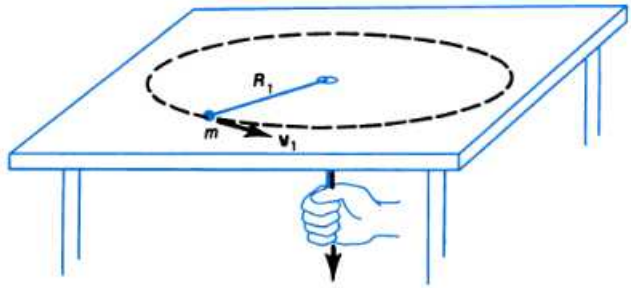



Рис. 9.22. Пример 9.16.

линия ее действия совпадает с осью вращения; поэтому $\tau = 0$. Следовательно, применяя закон сохранения момента импульса, мы можем записать

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2,$$
$$mR_1^2 \omega_1 = mR_2^2 \omega_2.$$

Здесь мы учли, что момент инерции одной частицы относительно оси, отстоящей от нее на расстояние $R$, равен $I = mR^2$. Поскольку $v = R\omega$, мы имеем

$$v_2 = R_2 \omega_2 = R_2 \omega_1 \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = R_2 \frac{v_1}{R_1}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) =$$
$$= v_1 \frac{R_1}{R_2} = (2{,}4 \text{ м/с})\left(\frac{0{,}80 \text{ м}}{0{,}48 \text{ м}}\right) = 4{,}0 \text{ м/с}.$$

Хотя в настоящей главе мы не собираемся подробно рассматривать векторную природу момента импульса, все же некоторые простые случаи сохранения момента импульса с учетом векторного характера величин можно обсудить. Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, направление вектора момента импульса можно выбрать таким образом, что оно будет совпадать с направлением вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, так что

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}.$$

Это равенство верно лишь в том случае[1)], когда ось вращения является осью симметрии тела, или тонкое и плоское тело вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости (например, колесо, вращающееся вокруг своей оси).

В качестве простого примера рассмотрим человека, стоящего на горизонтальной круглой платформе, способной вращаться без трения вокруг оси, проходящей вертикально через ее центр (простейшая модель карусели). Если человек начинает идти вдоль края платформы, последняя приходит в состояние вращения в противоположном направлении. Объяснить это можно на основе закона сохранения момента импульса. Если человек начинает идти против часовой стрелки, то его момент импульса направ-

[1)] Для более сложных случаев вращения тел вокруг неподвижных осей будет существовать лишь *составляющая* вектора $\mathbf{L}$ вдоль направления $\boldsymbol{\omega}$ (возможно, и другие составляющие), равная по величине $I\omega$. Если полный момент импульса сохраняется, то сохраняется и любая его составляющая, так что сказанное в этом разделе может быть применено к вращению вокруг любой неподвижной оси.

лен вверх вдоль оси вращения (вспомните в связи с этим определение вектора $\omega$ с помощью правила правой руки в разд. 9.3). Величина момента импульса, связанного с движением человека, равна $L = I\omega = (mR^2)(v/R)$, где $v$ – линейная скорость человека (относительно земли, а не платформы), $R$ – его расстояние от оси вращения, $m$ – его масса. Величина $mR^2$ – момент инерции человека относительно оси вращения, если рассматривать человека как материальную точку. Поскольку платформа вращается в обратном направлении (т. е. по часовой стрелке), ее момент импульса направлен вниз вдоль оси вращения. Если начальный момент импульса был равен нулю (человек и платформа покоились), то он останется равным нулю и после того, как человек начнет свое движение. Это означает, что направленный вверх момент импульса человека в точности компенсируется направленным вниз моментом импульса платформы, так что вектор полного момента импульса остается по-прежнему равным нулю. Несмотря на то что человек действует с определенной силой (и, следовательно, моментом) на платформу, а платформа – на человека, эти силы и моменты являются внутренними (по отношению к системе, состоящей из платформы и человека); какие-либо внешние моменты сил отсутствуют (если пренебречь трением в подшипниках оси платформы), так что в соответствии с формулой (9.18) момент импульса сохраняется неизменным.

## 9.9. Кинетическая энергия вращения

Величина $(1/2)mv^2$ называется кинетической энергией тела, участвующего в поступательном движении. Если тело вращается вокруг оси, то говорят, что оно обладает **кинетической энергией вращения**. По аналогии с кинетической энергией поступательного движения можно было бы ожидать, что кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, должна описываться формулой $(1/2)I\omega^2$, где $I$ – момент инерции тела относительно оси вращения, а $\omega$ – угловая скорость. Можно показать, что кинетическая энергия вращения действительно описывается этой формулой. Рассмотрим вращающееся тело как состоящее из очень небольших частиц, каждая из которых имеет массу $m_i$. Если $R_i$ – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до любой такой частицы, то линейная скорость частицы $v_i = R_i\omega$. Полная кинетическая энергия всего тела равна сумме кинетических энергий всех составляющих его частиц:

$$\text{КЭ} = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i^2\right)\omega^2,$$

где мы вынесли за знак суммы множители 1/2 и $\omega^2$, поскольку они одинаковы для всех частиц. Поскольку

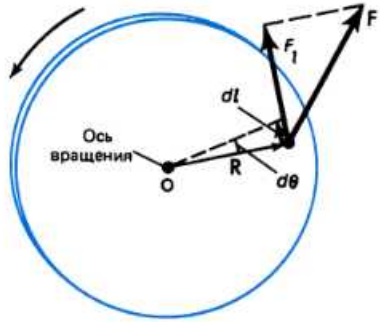



Рис. 9.23. К вычислению работы, совершаемой моментом силы, действующим на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

$\sum m_i R_i^2 = I$ – это момент инерции тела, мы видим, что кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, как и следовало ожидать, равна

$$\text{КЭ вращения} = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \text{[неподвижная ось]}. \tag{9.19}$$

Если ось вращения не закреплена, то кинетическая энергия вращения может принимать более сложный вид.

Работа, совершаемая над телом, вращающимся вокруг неподвижной оси, может быть выражена через угловые величины. Пусть сила **F** приложена в точке, расположенной на расстоянии $R$ по перпендикуляру от оси вращения. Работа, совершаемая этой силой, запишется в виде

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int F_t R\, d\theta,$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор бесконечно малого перемещения, перпендикулярного линии, соединяющей ось вращения и частицу (и, следовательно, направлен по движению). Величина этого вектора равна $dl = R\, d\theta$, а $F_t$ представляет собой величину составляющей силы **F**, параллельную вектору $d\mathbf{l}$ (рис. 9.23). Но $F_t R$ есть момент силы $\tau$ относительно оси, так что

$$W = \int \tau\, d\theta. \tag{9.20}$$

Скорость совершения работы, или мощность $P$, можно записать в виде

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega. \tag{9.21}$$

Теорема о связи энергии и работы применима и в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. В соответствии с формулой (9.12) имеем

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta};$$

здесь мы использовали дифференцирование по промежуточному аргументу и определение $\omega = d\theta/dt$. Таким обра-

зом, $\tau\, d\theta = I\,\omega\, d\omega$ и

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\,\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_1^2 .$$

В этом и состоит теорема о связи энергии и работы для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; она гласит, что работа, совершаемая при вращении тела на угол $\theta_2 - \theta_1$ вокруг неподвижной оси, равна изменению кинетической энергии его вращательного движения.

Если тело вращается и при этом его центр масс перемещается поступательно, то оно имеет кинетическую энергию как поступательного, так и вращательного движения. *Полная кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения его ЦМ и кинетической энергии его вращения относительно центра масс.* Это общая теорема, которую мы здесь докажем. Пусть $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}} = x_{\text{ЦМ}}\mathbf{i} + y_{\text{ЦМ}}\mathbf{j} + z_{\text{ЦМ}}\mathbf{k}$ – радиус-вектор центра масс в любой момент времени относительно некоторой инерциальной системы отсчета, $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ – радиус-вектор $i$-й частицы массой $m_i$ в той же системе отсчета, а $\mathbf{r}_i^* = x_i^*\mathbf{i} + y_i^*\mathbf{j} + z_i^*\mathbf{k}$ – радиус-вектор той же частицы в СЦМ (вообще говоря, не являющейся инерциальной). Таким образом (рис. 9.24),

$$x_i = x_{\text{ЦМ}} + x_i^*, \quad y_i = y_{\text{ЦМ}} + y_i^*, \quad z_i = z_{\text{ЦМ}} + z_i^* .$$

Скорость $i$-й частицы в инерциальной системе отсчета имеет вид

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{ЦМ}} + \mathbf{v}_i^* ,$$

где $\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$ – скорость ЦМ в инерциальной системе отсчета, а $\mathbf{v}_i^*$ – скорость $i$-й частицы относительно ЦМ. Полная кинетическая энергия может быть записана в виде (с учетом

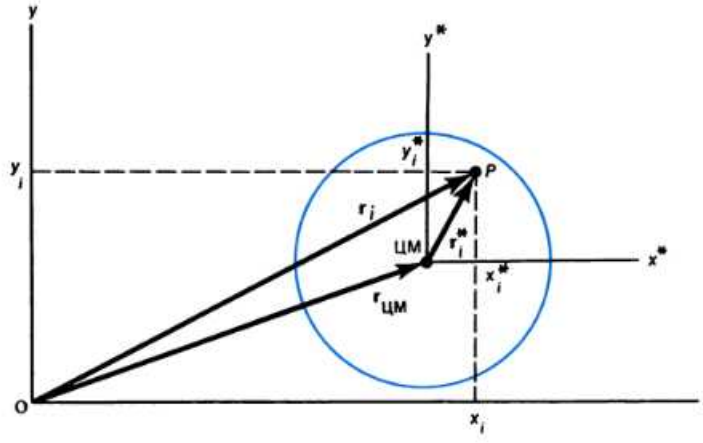



Рис. 9.24. Точка $P$ в инерциальной системе отсчета с началом в точке O имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_i$ с координатами $x_i$, $y_i$, $z_i$, а в СЦМ ее радиус-вектор равен $\mathbf{r}_i^*$ с координатами $x_i^*$, $y_i^*$, $z_i^*$.

свойства скалярного произведения $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$)

$$КЭ = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2}\sum m_i (\mathbf{v}_{цм} + \mathbf{v}_i^*)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i v_{цм}^2 + \mathbf{v}_{цм}\left(\sum m_i v_i^*\right) + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2}.$$

Поскольку $\sum m_i = M$ – полная масса тела и по определению центра масс $\sum m_i v_i^* = 0$ [для доказательства следует продифференцировать обе части выражения $r_{цм} = (1/m)\sum m_i r_i^* = 0$], имеем

$$КЭ = \frac{1}{2} M v_{цм}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2}. \tag{9.22}$$

Таким образом, мы доказали, что полная кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс $(1/2) M v_{цм}^2$ и кинетической энергии движения относительно центра масс.

Вывод формулы (9.22) справедлив в общем случае. Эту формулу можно применять при рассмотрении движения твердого тела, которое движется в плоскости подобно скатывающемуся с холма колесу. В последнем случае направление оси вращения не меняется (оно перпендикулярно плоскости, в которой движется тело), хотя ось вращения перемещается вместе с центром масс и, следовательно, ее положение не является постоянным. Для каждой частицы $v_i^* = \omega R_i^*$, где $R_i^*$ – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до линии, проходящей через ЦМ перпендикулярно плоскости движения $i$-й частицы. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i^{*2}\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{цм}\omega^2$$

и

$$КЭ = \frac{1}{2} M v_{цм}^2 + \frac{1}{2} I_{цм}\omega^2 \quad \begin{bmatrix}\text{твердое тело с постоянным} \\ \text{направлением оси вращения}\end{bmatrix}. \tag{9.23}$$

В выражении (9.23) $I_{цм}$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через ЦМ перпендикулярно плоскости движения. Следовательно, кинетическая энергия тела, движущегося в плоскости как поступательно, так и вращательно (причем ось вращения не меняет своего направления), равна сумме кинетических энергий поступательного движения ЦМ и вращательного движения относительно ЦМ [последнее слагаемое $(1/2) I_{цм}\omega^2$].

**Пример 9.17.** Твердый шар массой $M$ и радиусом $r_0$ скатывается (без проскальзывания) с наклонной плоскости из состояния покоя, когда он находится на высоте $H$ по вертикали (рис. 9.25). Чему будет равна скорость этого шара у основания наклонной плоскости? Потерями за счет тормозящих сил пренебречь.

**Решение.** Используем закон сохранения энергии, в котором теперь необходи-

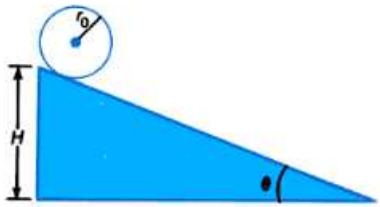



Рис. 9.25. Пример 9.17.

мо учесть кинетическую энергию вращательного движения. Полная энергия на любом расстоянии по вертикали $y$ над основанием наклонной плоскости равна

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{цм}}\omega^2 + Mgy.$$

Приравняем полную энергию на вершине наклонной плоскости ($y = H$ и $v = \omega = 0$) полной энергии у основания ($y = 0$):

$$0 + 0 + MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{цм}}\omega^2 + 0.$$

Из рис.9.13 находим, что момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его ЦМ, равен $I_{\text{цм}} = (2/5)Mr_0^2$. Поскольку шар скатывается без проскальзывания, скорость поступательного движения его центра масс $v$ относительно точки контакта (которая в любой момент времени имеет равную нулю мгновенную скорость относительно наклонной плоскости) равна скорости любой точки на поверхности шара относительно его центра, откуда $\omega = v/r_0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mr_0^2\right)(v^2/r_0^2) = MgH.$$

Сокращая величины $M$ и $r_0$, находим

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)v^2 = gH,$$

или

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}\,.$$

Этот результат можно сравнить со скоростью тела, которое скользит по наклонной плоскости с той же высоты без вращения и без трения; в этом случае, как известно, скорость равна $v = \sqrt{2gH}$, что больше полученной нами величины.

Если бы в примере 9.17 отсутствовало трение между шаром и плоскостью, то шар, вместо того чтобы катиться, скользил бы по наклонной плоскости. Шар будет катиться только в том случае, когда имеется трение. Однако в законе сохранения энергии нам не нужно было учитывать трение, поскольку в данном случае имеет место трение скольжения, при котором работа не производится. Действительно, если шар находится в контакте с плоскостью в точке, то сила трения действует параллельно плоскости (рис. 9.26); при этом точка контакта на шаре в любой момент времени не скользит, а движется вверх (перпендикулярно плоскости), когда шар катится. Таким образом, поскольку направления силы и перемещения взаимно перпендикулярны, никакая работа не совершается. (Ситуация становится более сложной, если мы учитываем замедляющие силы, обусловленные упругой дефор-

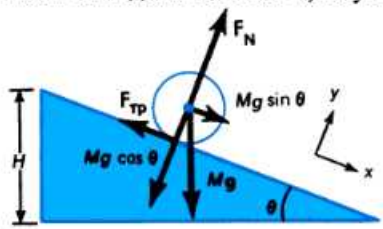



Рис. 9.26. Пример 9.18.

мацией, как в разд. 9.7.) Если нас интересуют трение и другие силы, входящие в задачу, то мы должны использовать динамическое рассмотрение, как в следующем примере.

**Пример 9.18.** Проанализируем движение катящегося шара из примера 9.17 (рис. 9.25), используя силы и моменты силы; в частности, найдем его скорость $v$ и величину силы трения покоя $F_{тр}$ (рис. 9.26).

**Решение.** Движение шара в целом можно представить как поступательное движение ЦМ плюс вращательное движение относительно ЦМ. Используя формулу $F = ma$, для поступательного движения вдоль оси $x$ имеем следующее уравнение:

$$Mg\sin\theta - F_{тр} = Ma,$$

а вдоль оси $y$

$$F_N - Mg\cos\theta = 0,$$

поскольку в направлении, перпендикулярном плоскости движения, ускорение отсутствует. Из последнего уравнения получаем

$$F_N = Mg\cos\theta.$$

Для вращательного движения относительно ЦМ воспользуемся формулой $\tau = I\alpha$:

$$F_{тр}r_0 = \left(\frac{2}{5}Mr_0^2\right)\alpha;$$

другие силы ($\mathbf{F}_N$ и $M\mathbf{g}$) не входят в это выражение, поскольку они имеют равные нулю плечи. В примере 9.17 мы показали, что угловая скорость равна $\omega = v/r_0$, где $v$ – скорость ЦМ. Дифференцируя это выражение для $\omega$ по времени, находим $\alpha = a/r_0$; подставляя этот результат в формулу для $F_{тр}$, получаем

$$F_{тр} = \frac{2}{5}Ma.$$

Подстановка этого выражения для силы трения в первое уравнение, записанное в этом примере, дает

$$Mg\sin\theta - \frac{2}{5}Ma = Ma,$$

или

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta.$$

Таким образом, мы убедились в том, что ускорение ЦМ шара, катящегося по наклонной плоскости, меньше, чем ускорение тела, скользящего по ней без трения ($a = g\sin\theta$). Для того чтобы найти скорость $v$ у основания наклонной плоскости, используем формулу (2.9в), в которой полное пройденное вдоль плоскости расстояние равно $x = H/\sin\theta$, где $H$ – высота наклонной плоскости (рис. 9.26). Таким образом,

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2\left(\frac{5}{7}g\sin\theta\right)\left(\frac{H}{\sin\theta}\right)} = \sqrt{\frac{10}{7}gH}.$$

Мы пришли к тому же результату, что и в примере 9.17, однако здесь для этого понадобилось меньше усилий. Чтобы найти величину силы трения, используем записанные выше выражения:

$$F_{тр} = \frac{2}{5}Ma = \frac{2}{5}M\left(\frac{5}{7}g\sin\theta\right) = \frac{2}{7}Mg\sin\theta.$$

Если коэффициент трения покоя достаточно мал или угол $\theta$ достаточно велик, так что $F_{тр} > \mu_s F_N$ (при этом $\operatorname{tg}\theta > (7/2)\,\mu_s$), то шар будет не только скатываться с плоскости, но и одновременно скользить по ней.

**Заключение**

Когда твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, каждая точка этого тела движется по круговой траектории. Линии, соединяющие ось вращения с различными точками тела, поворачиваются на один и тот же угол $\theta$ за любой данный промежуток времени. Углы удобно из-

мерять в *радианах* (1 радиан – это угол, стягиваемый дугой, длина которой равна радиусу окружности).

*Угловая скорость* $\omega$ определяется как быстрота изменения углового положения тела:

$$\omega = d\theta/dt.$$

Все части твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, в любой момент времени имеют одну и ту же угловую скорость. *Угловое ускорение* $\alpha$ определяется как быстрота изменения угловой скорости:

$$\alpha = d\omega/dt.$$

Линейные скорость и ускорение любой точки тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, связаны с угловыми скоростью и ускорением соотношениями

$$v = R\omega, \quad a_T = R\alpha, \quad a_c = v^2/R = \omega^2 R,$$

где $R$ – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до данной точки, $a_T$ и $a_c$ – соответственно тангенциальное и центростремительное ускорения. Если твердое тело вращается с постоянным ускорением ($\alpha = \text{const}$), то это вращение описывается уравнениями, аналогичными уравнениям для поступательного движения.

Несмотря на то что угол $\theta$ не вектор, угловая скорость и угловое ускорение являются векторами. В случае когда твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, как скорость $\boldsymbol{\omega}$, так и ускорение $\boldsymbol{\alpha}$ направлены вдоль оси вращения в соответствии с правилом правой руки.

*Момент силы*, создаваемый силой **F**, действующей на твердое тело, записывается в виде

$$\tau = R_\perp F = RF_\perp = RF\sin\theta,$$

где $R_\perp$ – расстояние, называемое *плечом силы* и измеряемое по перпендикуляру от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила; $\theta$ – угол между векторами **F** и **R**.

Вращательный аналог второго закона Ньютона имеет вид

$$\tau = I\alpha,$$

где $I = \sum m_i R_i^2$ – *момент инерции* тела относительно оси вращения. Это выражение применимо к случаям, когда твердое тело вращается вокруг оси, закрепленной в какой-либо инерциальной системе отсчета, или когда величины $\tau$, $I$ и $\alpha$ вычисляются относительно ЦМ тела, даже если ЦМ движется.

*Момент импульса* (момент количества движения, угловой момент) тела относительно неподвижной оси определяется выражением

$$L = I\omega.$$

Вращательный аналог второго закона Ньютона, выраженный через момент импульса, принимает вид

$$\tau = dL/dt.$$

Если результирующий момент силы, действующий на тело, равен нулю, то $dL/dt = 0$, так что $L = \text{const}$. Это *закон сохранения момента импульса* для вращающегося тела.

*Кинетическая энергия вращения* тела вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega$ записывается следующим образом:

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Если тело одновременно вращается и движется поступательно[1], то его полная кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии движения ЦМ тела и кинетической энергии вращения тела вокруг его ЦМ:

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2} M v_{\text{цм}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{цм}} \omega^2,$$

при условии, что направление вращения сохраняется неизменным.

## Вопросы

1. Представьте себе, что вы находитесь на некотором известном вам расстоянии от статуи Свободы. Опишите, каким образом вы могли бы определить ее высоту, располагая лишь масштабной линейкой и не делая ни шагу со своего места.
2. Велосипедный счетчик пройденного расстояния (одометр) прикрепляется рядом с осью колеса и рассчитан на колеса диаметром 70 см. Что произойдет, если вы поставите этот счетчик на велосипед с диаметром колес 60 см?
3. Диск проигрывателя вращается с постоянной угловой скоростью. С каким ускорением движутся его краевые точки – с радиальным (нормальным) и (или) тангенциальным? Ответьте на тот же вопрос, если диск вращается равномерно ускоренно. В каких случаях величина каждого из этих линейных ускорений изменяется?
4. Как изменились бы выражения (9.7) для равномерно ускоренного вращательного движения, если бы угловые величины $\theta$, $\omega$ и $\alpha$ были выражены не в радианах, а в градусах?
5. В какую сторону вдоль оси вращения направлен вектор угловой скорости Земли при ее суточном вращении?
6. Угловая скорость колеса, вращающегося вокруг горизонтальной оси, направлена на запад. В каком направлении ориентирована линейная скорость верхней точки обода колеса? А как направлено линейное тангенциальное ускорение при условии, что угловое ускорение направлено на восток? Увеличивается или уменьшается при этом угловая скорость?
7. Может ли меньшая сила создать больший момент силы?
8. Если сила **F** действует на тело таким образом, что ее плечо равно нулю, то будет ли она оказывать влияние на движение тела?
9. Относительно какой из осей вращения книга, которую вы держите в руках, будет иметь наименьший момент инерции?
10. Два однородных диска одной толщины и одинаковой массы вращаются вокруг осей, проходящих через их центры. Если они изготовлены из материалов с различными плотностями, то у какого из них момент инерции будет больше?
11. Какой цели служит палка, которую берут с собой при прогулке по пересеченной местности (неровной дороге)? Постарайтесь дать по возможности более точный ответ.
12. Почему труднее подняться, держа руки за головой, чем при вытянутых перед собой руках? Чтобы ответить на этот вопрос, сделайте рисунок.
13. Опытные велосипедисты пользуются сильно облегченными «цельнокроенными» шинами (однотрубками). Они утверждают, что уменьшить массу покрышек значительно важнее, чем уменьшить на ту же величину массу какой-либо

[1] Такое движение, если ось вращения все время сохраняет одно и то же направление, принято называть плоским. – *Прим. ред.*

другой части велосипеда. Объясните, почему это утверждение правильное.

14. У млекопитающих, существование которых зависит от умения быстро бегать, форма ног такова, что внизу они довольно тонкие, а мясо и мышцы сосредоточены высоко наверху (вблизи лопаток). Объясните с точки зрения динамики вращательного движения, почему такое распределение массы у животных целесообразно.

15. Почему канатоходцы держат в руках длинный тонкий шест?

16. Почему передняя часть мотоцикла задирается вверх, когда мотоциклист в прыжке отрывается от поверхности земли (перед этим водитель дает полный газ, и заднее колесо мотоцикла продолжает вращаться в полете)?

17. Игрок в гандбол взмывает в воздух, чтобы сделать дальнюю передачу. Когда он бросает мяч, верхняя часть его корпуса поворачивается; если быстро взглянуть на него, можно заметить, что его бедра и ноги поворачиваются в противоположном направлении. Объясните это наблюдение.

18. Если бы вдруг произошла значительная миграция населения в сторону экватора, то как это сказалось бы на продолжительности суток?

19. По наклонной плоскости скатываются шар, цилиндр и обруч, имеющие одинаковые диаметры. Какое тело прибудет к основанию наклонной плоскости первым? А какое последним?

20. Имеются две наклонные плоскости одинаковой высоты, но с разными углами наклона. Если один и тот же стальной шар скатывается с этих плоскостей, то на какой из них он достигнет основания за меньшее время? Для какой из них скорость шара у основания будет наибольшей? Объясните. Если бы шар был изготовлен из мягкого материала и имелось значительное трение, то как бы повлияло это на результат?

21. Два шара покоятся на вершине наклонной плоскости. У одного из них радиус и масса в два раза больше, чем у другого. Какой шар достигнет основания плоскости первым? Какой шар будет иметь наибольшую скорость? А какой наибольшую кинетическую энергию?

22. Шар и цилиндр с одинаковыми радиусами и массами начинают скатываться из состояния покоя с вершины наклонной плоскости. Какое тело достигнет основания наклонной плоскости первым? Какое из них будет иметь наибольшую скорость у основания плоскости? А наибольшую кинетическую энергию у основания?

23. Полная кинетическая энергия системы частиц равна сумме кинетической энергии поступательного движения ЦМ системы и кинетической энергии движения относительно ЦМ [формула (9.22)]. Возможно ли (и полезно ли) сформулировать подобное утверждение относительно полного импульса системы частиц?

## Задачи

Раздел 9.1

1. (I) Эйфелева башня имеет высоту 300 м. Вы находитесь в Париже. Если из той точки, где вы стоите, Эйфелева башня видна под углом 5°, то на каком расстоянии от нее вы находитесь?

2. (I) Велосипедист проехал расстояние 2,0 км на велосипеде, у которого диаметр покрышки колеса равен 68 см. Сколько оборотов совершили при этом колеса велосипеда?

3. (I) Точильное колесо диаметром 20 см вращается, совершая 2000 об/мин (оборотов в минуту). Вычислите: а) его угловую скорость в единицах рад/с; б) линейную скорость точки на ободе точильного колеса.

4. (I) Оцените приближенно угол, под которым видна Луна, используя линейку и собственный палец или другой предмет, отбрасывающий тень в лунном свете. Опишите ваши измерения и полученный результат и затем используйте это для оценки диаметра Луны. Учтите, что Луна находится на расстоянии 384 000 км от Земли.

5. (I) Бобина большого диаметра с тросом, намотанным на нее, лежит на Земле, причем конец троса находится на верхнем крае бобины. Человек берется за конец троса и, держась за трос, отходит от бобины на расстояние $L$. Бобина катится за ним без проскальзывания. Какова длина части троса, которая смотается с бобины? На какое расстояние переместится ЦМ бобины?

6. (I) Вычислите угловую скорость Земли а) при ее движении по орбите вокруг Солнца; б) относительно ее собственной оси вращения.

7. (I) Чему равна линейная скорость точки, связанная с вращением Земли, если она находится а) на земном экваторе; б) на 50° северной широты? (См. решение предыдущей задачи.)

8. (I) Диск проигрывателя радиусом $R_1$ приводится в движение с помощью резинового ролика радиусом $R_2$, соприкасающегося с внешней стороной диска. Чему равно отношение угловых скоростей диска и ролика $\omega_1/\omega_2$?

9. (II) За время $t$ колесо поворачивается на угол $\theta$, зависящий от времени по закону $\theta = 5{,}0t + 3{,}0t^2 - 4{,}5t^4$, причем $\theta$ измеряется в радианах, а $t$ – в секундах. Чему равны а) средняя скорость колеса; б) среднее угловое ускорение за промежуток времени от $t = 2{,}0$ с до $t = 3{,}0$ с? Получите выражение в) для мгновенной угловой скорости $\omega$; г) для мгновенного

углового ускорения α. д) Вычислите значения мгновенной угловой скорости ω и мгновенного углового ускорения α в момент времени $t = 3{,}0$ с.

**10.** (II) Зависимость углового ускорения α колеса от времени $t$ записывается в виде $\alpha = 8{,}0t - 2{,}5t^2$, где угловое ускорение α выражено в радианах в секунду в квадрате (рад/с$^2$), а $t$ – в секундах. Колесо начинает вращаться из состояния покоя ($\theta = 0$, $\omega = 0$ при $t = 0$). Выведите формулу, описывающую зависимость от времени а) угловой скорости ω; б) угла поворота колеса θ. в) Вычислите угловую скорость ω и угол поворота θ в момент времени $t = 2{,}0$ с.

**11.** (II) Колесо диаметром 40 см с постоянным ускорением вращается так, что за 3,6 с частота вращения возрастает от 80 до 300 об/мин. Вычислите: а) угловое ускорение колеса; б) радиальную и тангенциальную составляющие вектора линейного ускорения точки на ободе колеса через 2,0 с после начала ускоренного движения колеса.

Раздел 9.2

**12.** (I) Маховик автомобильного двигателя за 6,5 с замедляет свое вращение от 4500 до 1000 об/мин. Вычислите: а) угловое ускорение маховика; б) полное число оборотов, совершенное маховиком за этот промежуток времени.

**13.** (I) Выведите уравнения (9.7в).

**14.** (I) Диск проигрывателя достигает установленной частоты вращения 33 об/мин после 1,5 оборота. Чему равно его угловое ускорение?

**15.** (II) Два резиновых диска расположены рядом друг с другом так, что их края соприкасаются. Диск 1 радиусом $R_1 = 3{,}0$ см начинает вращаться с угловым ускорением 0,88 рад/с$^2$ и заставляет вращаться диск 2 радиусом $R_2 = 5{,}0$ см, причем колесо 2 вращается относительно диска 1 без проскальзывания. а) Если в начальный момент второй диск покоился, то за какой промежуток времени диск 2 достигнет угловой скорости 33 об/мин? б) Чему равно угловое ускорение диска 2?

**16.** (II) Колесо начинает вращаться из состояния покоя с угловым ускорением α относительно неподвижной оси вращения. а) Запишите выражения для составляющих линейного ускорения $a_T$ и $a_c$ точки $P$ на колесе, расположенной на расстоянии $R$ от оси вращения, в зависимости от α, $R$ и времени $t$. б) Пусть ϕ – угол между направлением вектора линейного ускорения **a** и прямой, проходящей через точку $P$ и ось вращения в плоскости колеса. Выразите ϕ через полное число оборотов колеса $N$.

**17.** (II) Колеса автомобиля совершают 55 оборотов за промежуток времени, в течение которого скорость равномерно уменьшилась от 80 до 55 км/ч. Диаметр колеса равен 1,0 м. а) Чему было равно угловое ускорение колеса? б) Если автомобиль продолжает замедляться с тем же ускорением, то сколько времени ему понадобится до полной остановки?

**18.** (II) Велосипед за 10,0 с разгоняется из состояния покоя до скорости 12 м/с. С какой скоростью будет двигаться верхняя точка покрышки колеса (диаметр покрышки 68 см) через 4,0 с после начала движения? (*Подсказка*: в любой момент времени нижняя точка колеса соприкасается с землей и, следовательно, в этот момент времени покоится относительно земли.)

Раздел 9.3

**19.** (II) Ось колеса закреплена в опорах, которые покоятся относительно поворотного круга, как показано на рис. 9.27. Колесо вращается



Рис. 9.27.

с угловой скоростью $\omega_1 = 60$ рад/с относительно его оси, а поворотный круг вращается со скоростью $\omega_2 = 45$ рад/с вокруг вертикальной оси. (Направления движения указаны на рисунке стрелками.) а) Как направлены угловые скорости $\omega_1$ и $\omega_2$? б) Чему равна результирующая угловая скорость колеса с точки зрения внешнего наблюдателя в тот момент времени, когда система находится в положении, изображенном на рисунке? Вычислите величину и укажите направление угловой скорости. в) Каковы величина и направление углового ускорения в этот момент времени?

Раздел 9.4

**20.** (I) Чему равен наибольший момент силы, создаваемый велосипедистом массой 60 кг, когда он поднимается в гору и давит на каждую педаль всем своим весом? Каждая педаль при вращении описывает окружность радиусом 18 см.

**21.** (II) Колесо диаметром 24,0 единицы вращается в плоскости $xy$ относительно оси $z$, которая проходит через его центр. В некоторый

момент времени к точке на ободе колеса, которая в данный момент времени находится на оси $x$, прикладывается сила $\mathbf{F} = -41{,}2\mathbf{i} + 30{,}6\mathbf{j}$. Чему равен момент силы относительно оси вращения в это время?

Раздел 9.5

**22.** (I) Точильный камень массой 4 кг в форме цилиндра радиусом 0,10 м из состояния покоя необходимо ускорить при постоянном по величине угловом ускорении до частоты вращения 1800 об/с за промежуток времени 5,0 с. Найдите момент силы, который должен при этом создавать двигатель.

**23.** (I) Четыре одинаковых тела (массой $M$ каждое) расположены на плоскости в вершинах квадрата со стороной $s$. Чему равен момент инерции этой системы относительно оси, проходящей через одно из тел перпендикулярно плоскости?

**24.** (I) Человек действует с силой 18 Н на край двери шириной 84 см. Чему равна величина момента этой силы, если сила действует а) перпендикулярно двери; б) под углом 60° к плоскости двери?

**25.** (I) Вычислите момент инерции твердого шара массой 10 кг и радиусом 0,20 м относительно оси вращения, проходящей через его центр.

**26.** (I) Твердое цилиндрическое колесо диаметром 12,0 м и массой 200 кг из состояния покоя за 3,0 мин достигает частоты вращения 200 об/мин. Вычислите: а) угловое ускорение колеса; б) силу, действующую на колесо со стороны веревки, намотанной вокруг него.

**27.** (II) Шар массой 2,4 кг, закрепленный на конце легкого стержня, вращается по горизонтальной окружности радиусом 1,2 м. Вычислите: а) момент инерции шара; б) момент силы, необходимой для того, чтобы шар вращался с постоянной угловой скоростью, если со стороны воздуха на шар действует сила сопротивления 0,020 Н.

**28.** (II) Точильный камень выполнен в виде однородного цилиндра радиусом 8,2 см и массой 0,88 кг. Вычислите: а) его момент инерции; б) момент силы, необходимый для того, чтобы покоящийся в начальный момент камень ускорить за 4,0 с таким образом, чтобы его частота вращения стала равной 1200 об/мин, если на камень действует также момент силы трения 0,014 Н·м.

**29.** (II) Чему равен радиус инерции колеса массой 13,6 кг, если под действием момента силы 3,2 Н·м оно из состояния покоя за 10 с ускоряется до 600 об/мин?

**30.** (II) Твердый шар диаметром 0,84 м под действием момента силы 12,3 Н·м равномерно ускоряется из состояния покоя за 15,0 с и совершает при этом 180 полных оборотов вокруг оси, проходящей через центр шара. Чему равна масса шара?

**31.** (II) Карусель из состояния покоя ускоряется за 34 с до угловой скорости 3,0 рад/с. Предполагая, что карусель представляет собой однородный диск радиусом 8,0 м и массой 31 000 кг, вычислите необходимый для этого момент сил.

**32.** (II) Четыре одинаковых тела (масса каждого $M$) укреплены на прямом невесомом вертикальном стержне на равных расстояниях $L$ друг от друга. Система вращается относительно оси, проходящей через тело, закрепленное на нижнем конце стержня, перпендикулярно стержню. а) Чему равен момент инерции системы относительно этой оси? б) Чему равна наименьшая сила, которую нужно приложить к наиболее удаленной от оси вращения массе, чтобы сообщить системе угловое ускорение $\alpha$? Каково направление этой силы?

**33.** (II) Колесо массой $M$ и радиусом $R_0$ стоит вертикально на полу перед ступенькой высотой $h (h < R_0)$ таким образом, что касается ее. Какую минимальную силу $F$ в горизонтальном направлении нужно приложить к оси колеса, чтобы оно вкатилось на ступеньку?

**34.** (II) Пусть сила $T$ натяжения нити, намотанной вокруг колеса в примере 9.9 (рис. 9.14) зависит от времени по закону $T = 3{,}00t - 0{,}20t^2$, где $T$ измеряется в ньютонах, а время $t$ – в секундах. Если в начальный момент времени колесо покоилось, то чему будет равна линейная скорость точки обода через 8,0 с после начала вращения колеса?

**35.** (II) Ротор центрифуги, вращавшийся с частотой 10 000 об/мин, останавливается под действием момента силы трения 0,20 Н·м. Если масса ротора 4,3 кг, а радиус инерции 0,070 м, то сколько оборотов совершит ротор до полной остановки? За какой промежуток времени произойдет полная остановка?

**36.** (II) На рис. 9.28 изображено предплечье руки, сообщающей шару массой 10 кг угловое ускорение 8,0 м/с$^2$ за счет действия трехглавой мышцы (трицепса). Вычислите: а) момент силы, необходимый, чтобы сообщить шару такое угловое ускорение; б) силу, которую создает трицепс. Массой руки можно пренебречь.

**37.** (III) Через блок перекинута веревка, на концах которой закреплены грузы массами 3,20 и 3,40 кг. Блок представляет собой однородный цилиндр радиусом 3,0 см и массой 0,80 кг. а) Если бы блок вращался без трения, то какое ускорение было бы у обоих грузов? б) Чему равен средний момент силы трения в блоке,

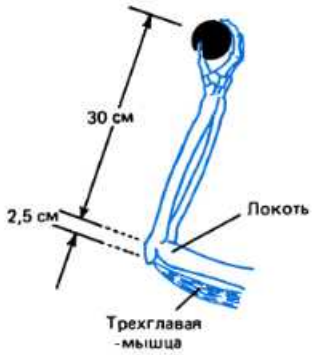



Рис. 9.28.

если известно, что более тяжелый груз, движущийся с направленной вниз скоростью 0,20 м/с, приходит в состояние покоя через 6,2 с?

38. (III) Тонкий стержень длиной $L$ установлен вертикально на столе. Стержень начинает падать, но его нижний конец при этом не скользит. а) Выразите угловую скорость стержня как функцию угла ф, который он составляет с поверхностью стола. б) Чему была равна скорость верхнего конца стержня непосредственно перед тем, как он коснулся стола?

39. (III) Предположим, что бросок мяча массой 1,0 кг совершается исключительно за счет предплечья, которое вращается относительно локтевого сустава под действием трехглавой мышцы (рис. 9.28). Первоначально покоящийся мяч достигает скорости 10,0 м/с за время $t = 0{,}22$ с и в этот момент отпускается. Вычислите: а) угловое ускорение предплечья; б) силу, создаваемую трехглавой мышцей. Предположите, что масса предплечья равна 3,2 кг и оно вращается как однородный стержень относительно оси, проходящей через его конец.

40. (III) Метатель молота за четыре оборота сообщает первоначально покоящемуся молоту массой 7,3 кг скорость 27,2 м/с, после чего его бросает. Предположив, что угловая скорость молота увеличивается равномерно и радиус окружности, описываемый молотом, равен 2,0 м, вычислите: а) угловое ускорение; б) (линейное) тангенциальное ускорение; в) центростремительное (радиальное) ускорение молота непосредственно перед его бросанием; г) результирующую силу, действующую на молот со стороны атлета непосредственно перед бросанием; д) угол, который эта сила составляет с радиусом окружности, проведенным через точку, в которой молот был брошен.

* Раздел 9.6

41. (I) Вычислите момент инерции колеса велосипеда диаметром 67 см. Масса обода колеса с покрышками составляет 1,3 кг. Почему при расчете можно пренебречь массой ступицы колеса?

*42. (I) Молекула кислорода состоит из двух атомов кислорода общей массой $5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг, момент инерции которых относительно оси, перпендикулярной прямой, соединяющей атомы, и проходящей через середину этой прямой, равен $1{,}9 \cdot 10^{-46}$ кг·м$^2$. С помощью этих данных получите оценку эффективного расстояния между атомами кислорода в молекуле.

*43. (I) Докажите с помощью теоремы о параллельных осях, что момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов, равен $I = (1/3)ML^2$. Учтите при этом, что если ось проходит через центр стержня, то момент инерции равен $I = (1/12)ML^2$ (см. выражения на рис. 9.13, *е* и *ж*).

*44. (II) Используя теорему о перпендикулярных осях и рис. 9.13, *з*, найдите выражение для момента инерции тонкой квадратной пластинки (со стороной $s$) относительно оси вращения, проходящей через ее центр а) вдоль диагонали пластинки; б) параллельно одной из сторон пластинки.

*45. (II) Вычислите момент инерции тонкого обруча радиусом $R_0$ и массой $M$ относительно а) оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости обруча; б) оси, касательной к внешнему краю обруча.

*46. (II) Две однородные твердые сферы массой $M$ и радиусом $r_0$ каждая соединены между собой тонким невесомым стержнем длиной $r_0$ таким образом, что центры сфер находятся друг от друга на расстоянии $3r_0$. а) Чему равен момент инерции системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему? б) Какая относительная ошибка возникла бы при вычислении, если бы мы рассматривали массу каждой сферы сосредоточенной в ее центре, что значительно упростило бы расчеты?

*47. (II) Два однородных цилиндрических диска радиусами $R_1$ и $R_2$ помещены друг за другом так, что соприкасаются плоскими поверхностями и их центры совмещены. Диски имеют одинаковую толщину и изготовлены из материала одной и той же плотности. Найдите выражение для момента инерции системы относительно оси, проходящей через центры дисков перпендикулярно их плоским поверхнос-

тям, через радиусы $R_1$, $R_2$ и полную массу системы $M$.

*48. (II) На тонкое колесо массой 3,0 кг и радиусом 26 см помещен на расстоянии 22 см от центра колеса небольшой груз массой 0,50 кг. Вычислите: а) положение центра масс колеса с грузом; б) момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр колеса перпендикулярно его плоской поверхности.

*49. (III) Рассчитайте момент инерции однородного тонкого стержня длиной $L$ относительно оси, проходящей через центр стержня перпендикулярно ему (рис. 9.13, *e*).

*50. (III) а) Вычислите момент инерции однородной плоской прямоугольной пластинки размером $l \times w$ (рис. 9.13, *з*) относительно оси, проходящей через центр пластинки перпендикулярно ее плоскости. б) Чему равны моменты инерции относительно каждой из осей, проходящих через центр пластинки и параллельных ее сторонам?

*51. (III) Определите момент инерции однородного куба с ребром длиной $s$ относительно оси, проходящей через ЦМ куба и перпендикулярной одной из его граней.

*52. (III) Плотность материала, из которого изготовлен стержень длиной $L$, равномерно возрастает от значения $\rho_0$ на одном конце стержня до $2\rho_0$ на другом конце. Вычислите момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его геометрический центр.

Раздел 9.8

53. (I) а) Чему равен момент импульса точильного камня массой 2,3 кг, выполненного в виде однородного цилиндра радиусом 12 см, когда он вращается со скоростью 1500 об/мин? б) Какой момент силы нужно приложить к этому камню, чтобы остановить его за 7,0 с?

54. (I) Вычислите момент импульса Земли: а) относительно собственной оси вращения (предполагая, что Земля – это однородная сфера); б) при ее движении по орбите вокруг Солнца.

55. (I) Человек стоит с вытянутыми в горизонтальном направлении руками на платформе, которая вращается со скоростью 1,20 об/с. Если человек поднимает руки вверх, то скорость вращения уменьшается до 0,80 об/с. а) Почему уменьшается скорость? б) Что вызывает изменение момента инерции человека?

56. (I) Прыгун в воду, изображенный на рис. 9.21, может уменьшить свой момент инерции примерно в 3,5 раза, если он согнется из распрямленного состояния. Если в согнутом состоянии он совершает два оборота за 1,5 с, то чему равна его угловая скорость (в об/с), когда он находится в распрямленном состоянии?

57. (II) Карусель диаметром 4,5 м свободно вращается с угловой скоростью 0,70 рад/с; ее полный момент инерции равен 1750 кг·м$^2$. Стоящие на земле четыре человека массой по 65 кг одновременно прыгают на край карусели. Чему после этого будет равна угловая скорость карусели? Какой была бы угловая скорость карусели, если бы люди, стоящие вначале на карусели, в некоторый момент спрыгнули на землю?

58. (II) Предположим, что человек массой 60 кг стоит на краю поворотного круга карусели диаметром 6,0 м, которая может вращаться без трения вокруг своей оси и имеет момент инерции 1800 кг·м$^2$. В начальный момент времени поворотный круг карусели находился в покое, но, когда человек начинает бежать со скоростью 4,2 м/с (относительно поворотного круга) по его периметру, карусель начинает вращаться в противоположную сторону. Вычислите угловую скорость поворотного круга карусели.

59. (II) Игрушечный поезд может двигаться в горизонтальной плоскости по колее в виде окружности радиусом $R$, проложенной по краю круглого дощатого диска, имеющего массу $M$ и постоянную толщину. Диск может свободно вращаться без трения относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. В начальный момент времени система находится в покое. Какую массу должен иметь поезд, чтобы он оставался в одном положении относительно поверхности земли независимо от того, какова скорость его движения относительно колеи?

Раздел 9.9

60. (I) Вычислите скорость поступательного движения цилиндра у основания наклонной плоскости высотой 18 м. Считайте, что в начальный момент времени цилиндр покоился в верхней точке наклонной плоскости и скатывался без проскальзывания.

61. (I) Момент инерции ротора центрифуги равен $4{,}0 \cdot 10^{-2}$ кг·м$^2$. Какое количество энергии потребуется, чтобы из состояния покоя привести его во вращение с частотой 10 000 об/мин?

62. (I) Карусель имеет массу 1500 кг и радиус инерции 18 м. Какую работу нужно затратить, чтобы из состояния покоя привести карусель во вращение с частотой один оборот за 7,0 с?

63. (I) Маховик двигателя автомобиля при частоте вращения 4000 об/мин развивает момент силы 280 Н·м. Чему равна мощность двигателя в лошадиных силах?

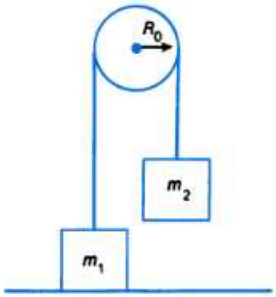



Рис. 9.29.

64. (I) Оцените приближенно кинетическую энергию Земли относительно Солнца, представив кинетическую энергию в виде суммы двух членов: а) энергии, возникающей из-за вращения Земли относительно собственной оси с периодом, равным суткам; б) энергии, обусловленной обращением Земли вокруг Солнца с периодом, равным году. (Считайте, что Земля является однородным шаром массой $6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг и радиусом $6{,}4 \cdot 10^6$ м, а расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км.)

65. (II) При выключении двигателя однородная цилиндрическая платформа массой 180 кг и радиусом 4,5 м замедляется, и за 18 с угловая скорость платформы уменьшается от 3,2 об/с до нуля. Вычислите приближенно мощность двигателя (в л. с.), необходимую для поддержания постоянной скорости вращения 3,2 об/с.

66. (II) Два тела массами соответственно $m_1 = 25$ кг и $m_2 = 32$ кг соединены веревкой, перекинутой через блок, как показано на рис. 9.29. Блок представляет собой цилиндр радиусом 0,30 м и массой 8,8 кг. В начальный момент времени тело массой $m_1$ находится на поверхности земли, а тело массой $m_2$ на высоте 2,5 м от земли. Систему затем предоставляют самой себе. С помощью закона сохранения энергии вычислите скорость тела массой $m_2$ непосредственно перед соударением с Землей. Считайте, что трение в блоке отсутствует.

67. (II) Шест высотой 5,0 м удерживается в равновесии, стоя вертикально на одном из своих концов. Чему будет равна скорость верхнего конца шеста непосредственно перед тем, как он коснется земли? Считайте, что нижний конец шеста не скользит.

68. (II) Тонкий однородный стержень длиной $L$ и массой $M$ свободно подвешен за один конец. Его отводят на угол $\theta$ и отпускают. Чему будут равны угловая скорость стержня и линейная скорость свободного конца стержня в низшей точке его траектории, если трением можно пренебречь?

69. (II) Одной из возможностей конструирования экологически чистого автомобиля является использование запасающего энергию тяжелого маховика. Предположим, что масса автомобиля с маховиком равна 1400 кг, диаметр однородного цилиндрического маховика равен 1,50 м, масса его равна 240 кг. Автомобиль должен проходить расстояние 300 км, не нуждаясь в «раскрутке» маховика. а) Сделайте следующие разумные предположения: средняя тормозящая сила трения равна 500 Н; разгон из состояния покоя до скорости 90 км/ч требует 20 оборотов маховика с ускорением, причем затраты энергии маховика при подъеме автомобиля вверх равны по величине возврату энергии маховику при спуске. Покажите, что при этом полная энергия, которую следует запасти в маховике, составляет около $1{,}6 \cdot 10^8$ Дж. б) Чему равна угловая скорость маховика, когда он полностью «заряжен» энергией? в) Какое время (примерно) понадобится на то, чтобы полностью «зарядить» маховик энергией перед поездкой, используя двигатель мощностью 150 л. с.?

70. (II) Узкая сплошная катушка ниток имеет массу $M$ и радиус $R$. Если вы тянете за нитку вверх так, что ЦМ катушки остается на месте (т. е. «зависает» в воздухе), то а) какую силу следует приложить к нити? б) Какую работу вы совершите за то время, пока катушка вращается с угловой скоростью $\omega$?

71. (II) Полый цилиндр (или обруч) катится по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 3{,}4$ м/с и достигает основания наклонной плоскости с углом наклона 20°. а) Как далеко вкатится цилиндр на наклонную плоскость? б) Как долго он будет находиться на наклонной плоскости, прежде чем скатится с нее назад к основанию?

72. (II) Покажите, что шар в примере 9.18 будет соскальзывать, если угол наклонной плоскости превысит значение $\theta = \operatorname{arctg}(7\mu_s/2)$, где $\mu_s$ – коэффициент трения покоя.

73. (II) а) Вычислите в примере 9.16 работу, которую должен совершить человек, чтобы уменьшить радиус круговой траектории от значения $R_1$ до $R_2$. (Для этого потребуется интеграл.) б) Определите изменение кинетической энергии тела массой $m$ за это время и сравните ее с работой, вычисленной в п. «а» задачи.

74. (II) Человек массой 70 кг стоит на небольшой вращающейся платформе с вытянутыми в стороны руками. а) Оцените момент инерции человека, рассматривая его тело (включая голову и ноги) в виде цилиндра массой 60 кг, радиусом 12 см и высотой 1,70 м, а руки в виде тонких стержней массой 5,0 кг и длиной 60 см

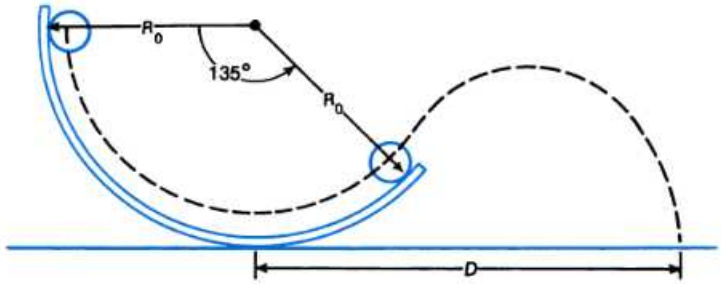



Рис. 9.30.

каждый, прикрепленных к цилиндру под прямым углом. б) Используя то же приближение, оцените момент инерции в случае, когда руки человека опущены и прижаты к бокам. в) Если в положении с вытянутыми руками период обращения равен 1,5 с, то каков будет этот период в положении с руками, опущенными по бокам? Моментом инерции платформы пренебрегите. г) Определите изменение кинетической энергии, когда человек поднимает руки, переводя их из вертикального в горизонтальное положение. д) На основании ответа на вопрос «г» укажите, в каком случае человеку труднее поднять руки – когда он вращается или когда он покоится?

**75.** (II) Пусть в задаче 74 человек держит в каждой руке гирю массой 15 кг. Чему равно отношение угловых скоростей для двух положений, когда руки человека подняты горизонтально и опущены вниз, т. е. прижаты к телу?

**76.** (II) Небольшой шар радиусом $r = 5{,}0$ см катится без скольжения по круговому желобу (рис. 9.30) радиусом $R_0 = 30{,}0$ см. Шар начинает скатываться с высоты $R_0$ над поверхностью земли, которой касается дно желоба. На каком расстоянии $D$ от дна желоба упадет шар на землю, если он отрывается от желоба, пройдя по нему дугу, стягиваемую углом 135°?

**77.** (III) В примерах 9.17 и 9.18 предположите, что шар не только катится, но и скользит. Для определенности считайте, что $\theta = 30°$, а $\mu = \mu_s = \mu_k = 0{,}10$; высота наклонной плоскости равна $H = 2{,}0$ см, а шар имеет радиус $r_0 = 10$ см и массу 850 г. Скатывание начинается из состояния покоя на вершине наклонной плоскости. Определите: а) скорость ЦМ шара в момент времени, когда он достигает основания наклонной плоскости; б) полную кинетическую энергию шара у основания; в) потерю механической энергии. г) Определите те же величины для случая, когда $\mu = 0{,}30$ и проскальзывание отсутствует; сравните полученные вами результаты.

**78** (III) Нить одним из своих концов прикреплена к грузу, который может скользить по наклонной плоскости; другой ее конец намотан вокруг цилиндра, покоящегося в углублении на вершине наклонной плоскости (рис. 9.31). Определите скорость груза после того, как он пройдет расстояние 1,20 м вдоль наклонной плоскости, если он начинает движение из состояния покоя. Считайте при этом, что а) трение отсутствует и б) коэффициент трения между всеми поверхностями одинаков и равен $\mu = 0{,}15$. (*Подсказка*: в случае «б» определите сначала нормальную силу, действующую на цилиндр, и сделайте любые необходимые разумные предположения.)

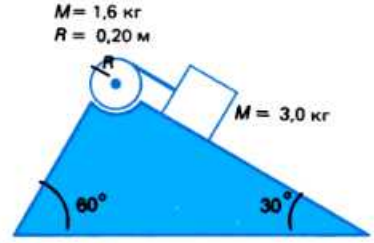



Рис. 9.31.

# 10 Вращательное движение; общий случай

В гл. 9 мы рассмотрели кинематику и динамику вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси в инерциальной системе отсчета. Мы изучали это движение с помощью законов, аналогичных законам Ньютона для поступательного движения, а также на основе понятий момента импульса и кинетической энергии вращения. При этом оказалось, что момент силы играет для вращательного движения ту же роль, что и сила для поступательного.

Для того чтобы ось вращающегося тела оставалась неподвижной, обычно требуется закрепить ее с помощью внешних опор (например, в подшипниках на концах оси). Если это условие не выполнено, то описание движения тела оказывается значительно более сложным. Полный анализ вращательного движения тела (или системы тел) в пространстве в общем случае слишком громоздок и сложен, и мы не будем обсуждать его в данной книге. Тем не менее в этой главе мы рассмотрим некоторые особенности вращательного движения в общем случае. Нами будет доказано несколько общих теорем, которые мы применим для описания некоторых интересных и не слишком сложных видов движения. В частности, мы обсудим векторный характер момента силы и момента импульса.

Значительную часть этой главы можно рассматривать как повторение материала гл. 9. Но внимательный читатель обнаружит, что применяемый в ней подход является более общим и полезным рассмотрением вращательного движения. Он основан на использовании векторного характера величин, описывающих вращательное движение, и позволяет вывести многие утверждения гл. 9. Материал, излагаемый в настоящей главе, играет важную роль и несколько превосходит по сложности большую часть этой книги. За исключением очень существенного разд. 10.1, посвященного векторному произведению, материал гл. 10 не связан с остальной частью книги и поэтому может рассматриваться как факультативный.

## 10.1. Векторное произведение

Для рассмотрения момента импульса и момента силы в общем случае необходимо ввести понятие *векторного произведения*.

**Векторным произведением** двух векторов **A** и **B** называется **вектор** $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, *длина которого равна*

$$C = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin\theta, \tag{10.1}$$

где $\theta$ – *угол* ($< 180°$) *между векторами* **A** и **B**, *и который направлен перпендикулярно как вектору* **A**, *так и вектору* **B** *в соответствии с правилом правой руки* (рис. 10.1). Согласно этому правилу (см. рисунок), правую руку направляют вдоль вектора **A** таким образом, чтобы, сгибая пальцы, можно было направить их вдоль вектора **B**. Если рука будет расположена в соответствии с этим правилом, то большой палец укажет направление вектора $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Векторное произведение двух векторов, определяемое выражением (10.1), представляет собой вторую полезную операцию умножения двух векторов. Первая операция умножения векторов, рассмотренная в разд. 6.2, является скалярным произведением $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$. Хотя произведение двух векторов можно определить и другими способами, эти две операции имеют большое практическое значение для физики, поскольку многие физические величины можно представить в виде либо скалярного, либо векторного произведения двух других векторных величин.

Запишем некоторые свойства векторного произведения:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0, \tag{10.2а}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \tag{10.2б}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad \text{[дистрибутивный закон]}, \tag{10.2в}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{10.2г}$$

Равенство (10.2а) следует из выражения (10.1) (поскольку $\theta = 0$); то же относится к (10.2б), так как величина векторного произведения $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ точно такая же, как и произведения $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, но, согласно правилу правой руки,

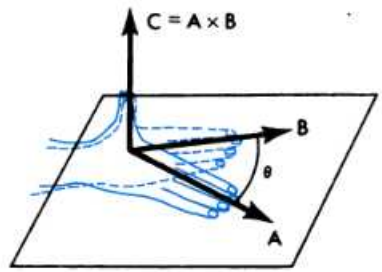



Рис. 10.1. Вектор $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости, проведенной через векторы **A** и **B**; его направление определяется по правилу правой руки.

эти векторы направлены в противоположные стороны. Таким образом, для векторного произведения существенно, в каком порядке располагаются в нем векторы; изменение относительного расположения векторов приводит к изменению результата. Это означает, что свойство перестановочности (коммутативности), справедливое для скалярного произведения двух векторов и для произведения скаляров, *не* выполняется в случае векторного произведения. Доказательство соотношений (10.2в) и (10.2г) мы предлагаем читателю в качестве упражнения. Заметим, что в силу равенства (10.2б) порядок сомножителей в двух произведениях в правой части соотношения (10.2г) менять нельзя.

## 10.2. Момент силы

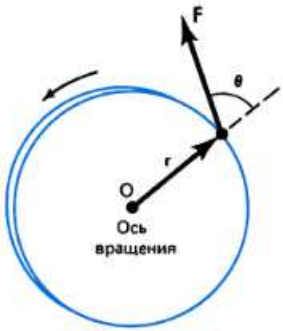



Рис. 10.2. Момент силы, создаваемый силой **F**, заставляет диск вращаться против часовой стрелки, так что векторы угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\alpha}$ направлены на читателя.

Одним из примеров величин, описываемых с помощью векторного произведения, является момент силы. Чтобы показать это, рассмотрим тонкий диск, изображенный на рис. 10.2, который может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр в точке O. Сила **F** действует на край диска в точке, положение которой относительно точки O определяется радиус-вектором **r**, как показано на рис. 10.2. Сила **F** стремится повернуть диск (который, как мы считаем, первоначально находился в покое) против часовой стрелки, так что угловая скорость $\omega$ будет направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читателя (вспомните правило правой руки из разд. 9.3). Момент силы за счет **F** увеличивает угловую скорость $\omega$, поэтому угловое ускорение $\alpha$ также направлено в сторону читателя вдоль оси вращения. В гл. 9 мы установили, что угловое ускорение тела, вращающегося относительно неподвижной оси, и приложенный к нему момент силы связаны соотношением

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\alpha,$$

где $L$ – момент импульса тела, а $I$ – момент инерции [см. формулы (9.18) и (9.12)]. Это скалярное выражение является вращательным аналогом формулы $F = dp/dt$, и можно было бы получить вращательный аналог векторного выражения $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. В примере на рис. 10.2 для этого мы должны направить вектор $\boldsymbol{\tau}$ вдоль оси вращения в сторону читателя, поскольку так направлен вектор $\alpha$ ($\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$), а величина момента силы должна быть равна [см. формулы (9.8) и рис. 10.2] $\tau = rF_\perp = rF\sin\theta$. Эти свойства вектора $\boldsymbol{\tau}$ можно обеспечить, если представить его как векторное произведение радиус-вектора **r** и силы **F**:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \qquad (10.3)$$

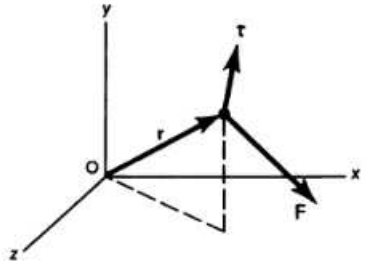



Рис. 10.3. $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор.

Согласно определению векторного произведения (10.1), величина (длина) вектора $\boldsymbol{\tau}$ равна $rF\sin\theta$, а направлен он вдоль оси вращения, как и должно быть в этом частном случае.

В разд. 10.3–10.6 мы покажем, что если выражение (10.3) рассматривать как общее определение момента силы, то векторное соотношение $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ будет справедливо в общем случае. Таким образом, мы установили здесь, что выражение (10.3) представляет собой общее определение момента силы. Оно содержит информацию как о величине, так и о направлении вектора $\boldsymbol{\tau}$. Следует заметить, что в это определение входит радиус-вектор $\mathbf{r}$ (относительно начала системы координат), а *не* расстояние $R$ (расстояние, измеренное по перпендикуляру от оси вращения), которое использовалось при определении момента инерции. Иными словами, момент силы вычисляется относительно точки.

Для частицы массой $m$, к которой приложена сила $\mathbf{F}$, момент силы относительно точки O записывается в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы относительно точки O (рис. 10.3). Если имеется система частиц (которые могут образовывать твердое тело), то полный момент сил $\boldsymbol{\tau}$ такой системы равен сумме моментов сил, действующих на каждую частицу:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор $i$-й частицы, а $\mathbf{F}_i$ – сила, приложенная к $i$-й частице.

## 10.3. Момент импульса частицы

В наиболее общем виде второй закон Ньютона для поступательного движения частицы (или системы частиц) можно записать через импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ с помощью формулы (8.9) [или (8.12)]:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt.$$

Вращательным аналогом импульса является *момент импульса*. Точно так же, как импульс $\mathbf{p}$ связан с силой $\mathbf{F}$,

можно ожидать, что момент импульса связан с моментом силы. Действительно, в гл. 9 мы установили, что это имеет место для частного случая твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Теперь мы убедимся в том, что эта связь существует и в общем случае. Рассмотрим сначала отдельную частицу.

Пусть частица массой $m$ имеет импульс $\mathbf{p}$, а ее положение в некоторой инерциальной системе отсчета характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$ относительно начала координат O. Тогда момент импульса $\boldsymbol{l}$ частицы относительно точки O дается векторным произведением векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$:

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{[частица]}. \tag{10.4}$$

Момент импульса является вектором[1]. Он перпендикулярен как вектору $\mathbf{r}$, так и вектору $\mathbf{p}$, и его направление определяется правилом правой руки (рис. 10.4), а его длина дается выражением

$$l = rp\sin\theta$$

или

$$l = rp_\perp = r_\perp p,$$

где $\theta$ – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$, а $p_\perp (= p\sin\theta)$ и $r_\perp$ $(= r\sin\theta)$ являются составляющими векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ и перпендикулярны соответственно $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$.

Найдем теперь соотношение между моментом импульса частицы и моментом силы, действующим на нее. Вычисляя производную от момента импульса $\boldsymbol{l}$ по времени, имеем

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = 0,$$

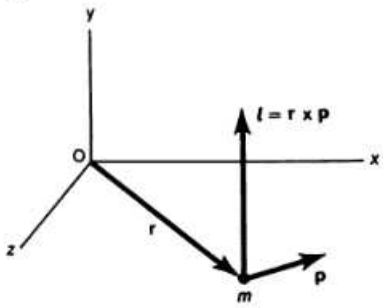



Рис. 10.4. Момент импульса частицы массой $m$ равен $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$.

[1] В действительности момент импульса $\boldsymbol{l}$ является псевдовектором (см. примечание в разд. 9.3). Заметим также, что как в предыдущей главе, так и в этой мы используем строчную букву $\boldsymbol{l}$ для обозначения момента импульса частицы, а прописную $\mathbf{L}$ – для системы частиц или тела.

поскольку в этом случае $\sin\theta = 0$. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Если обозначить результирующую силу, действующую на частицу, через $\mathbf{F}$, то в инерциальной системе отсчета $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ и

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}.$$

Но $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$ – это результирующий момент силы, действующий на частицу. Следовательно,

$$\tau = d\mathbf{l}/dt \qquad \text{[частица; инерциальная система отсчета]}. \tag{10.5}$$

Скорость изменения момента импульса частицы равна результирующему моменту силы, приложенному к этой частице! Уравнение (10.5) является вращательным аналогом второго закона Ньютона для частицы, записанным в его наиболее общем виде. Оно справедливо только в инерциальной системе отсчета, поскольку лишь в этом случае выполняется соотношение $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, которое было использовано при доказательстве.

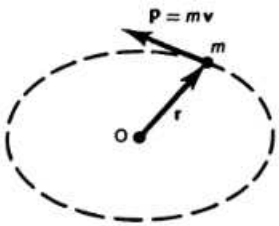



Рис. 10.5. Момент импульса частицы массой $m$, вращающейся по окружности радиусом $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$, равен $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ (пример 10.1).

**Пример 10.1.** Найдите момент импульса частицы массой $m$, движущейся со скоростью $v$ по окружности радиусом $r$ против часовой стрелки.

**Решение.** Значение момента импульса зависит от выбора начала координат O. Вычислим момент импульса $\mathbf{l}$ относительно центра окружности (рис. 10.5). Поскольку вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{p}$, то $l = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = rmv$. Вектор $\mathbf{l}$ в соответствии с правилом правой руки перпендикулярен плоскости окружности и направлен в сторону читателя. Поскольку $v = \omega r$, можно написать

$$l = mvr = mr^2\omega = I\omega;$$

здесь мы учли, что момент инерции частицы, вращающейся относительно оси на расстоянии $r$ от нее, равен $I = mr^2$.

## 10.4. Момент импульса и момент силы для системы частиц; общий случай движения

Рассмотрим систему $n$ частиц, которые имеют моменты импульса $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Взаимное положение этих частиц может быть произвольным – от строго фиксированного относительно друг друга, как в твердом теле, до полностью независимого, как в системе невзаимодействующих частиц. Полный момент импульса $\mathbf{L}$ определяется

как векторная сумма моментов импульса всех частиц системы:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i. \tag{10.6}$$

Результирующий момент сил, действующий на систему, равен сумме моментов сил, действующих на каждую частицу:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i.$$

В эту сумму входят 1) внутренние моменты сил, создаваемые силами взаимодействия между частицами системы, и 2) внешние моменты сил, создаваемые внешними силами, действующими на систему. Согласно третьему закону Ньютона в его строгой форме (см. примечание в разд. 9.5), любая частица действует на другую частицу с силой, равной по величине и противоположной по направлению той силе, с которой вторая частица действует на первую; следовательно, сумма всех внутренних моментов сил равна нулю, а

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{\text{внешн}}.$$

Возьмем теперь производную по времени от обеих частей выражения (10.6) и, воспользовавшись соотношением (10.5) для каждой частицы, получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau},$$

или

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad \text{[инерциальная система отсчета]}. \tag{10.7а}$$

(Для удобства мы опустили нижний индекс у момента сил $\boldsymbol{\tau}_{\text{внешн}}$.) Этот фундаментальный результат устанавливает, что скорость изменения полного момента импульса системы частиц (или твердого тела) равна результирующему (полному) моменту внешних сил, действующему на систему. Соотношение (10.7а) является вращательным аналогом соотношения (8.12) ($d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}$) для поступательного движения и справедливо, когда векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\tau}$ вычисляются относительно точки, неподвижной в инерциальной системе отсчета. [При выводе соотношения (10.7а) мы использовали формулу (10.5), которая справедлива только в этом случае.] Соотношение (10.7а) справедливо также и в случае, когда $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$ вычисляются относительно точки, которая движется равномерно и прямолинейно в инерциальной системе отсчета, поскольку такая точка может рассматриваться как начало отсчета в другой инерциальной системе отсчета. Однако соотношение (10.7а) *не* справедливо в общем случае, когда $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$

вычисляются относительно точки, которая движется ускоренно, за исключением одного частного (но очень важного) случая, а именно когда эта точка является центром масс системы:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ЦМ}}. \qquad (10.7б)$$

Это соотношение справедливо независимо от того, как движется ЦМ системы. Вектор $\boldsymbol{\tau}_{\text{ЦМ}}$ – это результирующий момент внешних сил относительно ЦМ.

Формула (10.7б), в справедливости которой мы убедимся ниже, позволяет описывать произвольное движение частиц как сумму *поступательного* движения ЦМ и вращательного движения относительно ЦМ [1]. Мы уже использовали это выше (см. пример 9.18). В следующем (факультативном) разделе мы получим формулу (10.7б) с помощью законов Ньютона.

## *10.5. Доказательство общего соотношения между τ и L

Займемся теперь выводом формулы (10.7б). Пусть $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор $i$-й частицы в инерциальной системе отсчета, а $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}$ – радиус-вектор ЦМ частицы в той же системе отсчета. Положение $i$-й частицы относительно ЦМ определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_i^*$ (рис. 10.6):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{ЦМ}} + \mathbf{r}_i^*.$$

Взяв здесь производную по времени, получим

$$\mathbf{p}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i^* + \mathbf{r}_{\text{ЦМ}}) = \mathbf{p}_i^* + m_i \mathbf{v}_{\text{ЦМ}}.$$

Момент импульса относительно ЦМ можно записать в

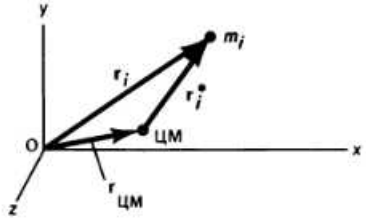



Рис. 10.6. Положение частицы массой $m_i$ описывается в инерциальной системе отсчета радиус-вектором $\mathbf{r}_i$, а в СЦМ – радиус-вектором $\mathbf{r}_i^*$ (ЦМ системы может двигаться с ускорением); при этом $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^* + \mathbf{r}_{\text{ЦМ}}$, где $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}$ – радиус-вектор ЦМ системы в инерциальной системе отсчета.

[1] Из выражения (9.22) или (9.23) следует, что полная кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии ЦМ и кинетической энергии вращения, т. е. $\text{КЭ} = \text{КЭ}_{\text{ЦМ}} + \text{КЭ}_{\text{вращ}}$. Это утверждение справедливо только для энергии, но не для других величин, описывающих движение. Формула (10.7б) в совокупности с (8.12) ($d\mathbf{P}_{\text{ЦМ}}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}$) обеспечивает более общее описание движения.

виде

$$\mathbf{L}_{\text{ЦМ}} = \sum_i (\mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^*) = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times (\mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{\text{ЦМ}}).$$

Дифференцируя это равенство по времени, имеем

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum_i \left( \frac{d\mathbf{r}_i^*}{dt} \times \mathbf{p}_i^* \right) + \sum_i \left( \mathbf{r}_i^* \times \frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt} \right).$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения обращается в нуль: $\mathbf{v}_i^* \times m\mathbf{v}_i^* = 0$, поскольку $\mathbf{v}_i^*$ параллельна самой себе. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{\text{ЦМ}}) =$$

$$= \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} - \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i^* \right) \times \frac{\mathbf{dv}_{\text{ЦМ}}}{dt}.$$

Здесь второе слагаемое в правой части обращается в нуль, так как в соответствии с (8.2) мы имеем $\sum m_i \mathbf{r}_i^* = M\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}^*$, а по определению $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}^* = 0$, поскольку положение ЦМ выбрано за начало отсчета системы координат. Кроме того, согласно второму закону Ньютона, мы имеем

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i,$$

где $\mathbf{F}_i$ – сила, действующая на $i$-ю частицу массой $m_i$. (Заметим, что $d\mathbf{p}_i^*/dt \neq \mathbf{F}_i$, так как ЦМ может двигаться с ускорением и второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета не выполняется.) Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{\tau}_i)_{\text{ЦМ}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ЦМ}};$$

здесь $\boldsymbol{\tau}_{\text{ЦМ}}$ – результирующий внешний момент сил, действующий на всю систему и вычисленный относительно ее ЦМ. Как уже отмечалось, при суммировании моментов сил $\boldsymbol{\tau}_i$, согласно третьему закону Ньютона, взаимно сокращаются моменты внутренних сил, действующих в системе. Последнее из полученных соотношение совпадает с уравнением (10.7б); следовательно, наше доказательство завершено.

Подводя итог, отметим, что соотношение

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

в общем случае *несправедливо*. Оно справедливо только при условии, что $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$ вычисляются либо 1) относительно начала инерциальной системы отсчета, либо 2) относительно ЦМ системы частиц (или твердого тела).

## 10.6. Момент импульса и момент силы для твердого тела

Рассмотрим теперь вращение твердого тела относительно оси, которое имеет фиксированное направление в пространстве. Воспользуемся общими принципами, развитыми ранее в этой главе, для обоснования частных утверждений, которые были использованы нами в гл. 9.

Вычислим проекцию момента импульса тела на ось вращения. Обозначим эту проекцию через $L_\omega$, поскольку угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль оси вращения. Для каждой частицы твердого тела имеем

$$\boldsymbol{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i .$$

Если угол между моментом импульса $\boldsymbol{l}_i$ и осью вращения тела обозначить через $\theta$ (рис. 10.7), то проекция вектора $\boldsymbol{l}_i$ на ось вращения запишется в виде

$$l_{i\omega} = r_i p_i \cos\theta = m_i v_i r_i \cos\theta ,$$

где $m_i$ – масса, а $v_i$ – скорость $i$-й частицы. Далее, скорость $v_i$ связана с угловой скоростью вращения тела $\omega$ соотношением $v_i = R_i\omega$, где $R_i$ – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до частицы массой $m_i$. Кроме того, из рис. 10.7 мы видим, что $R_i = r_i \cos\theta$. Таким образом,

$$l_{i\omega} = m_i v_i (r_i \cos\theta) = m_i R_i^2 \omega .$$

После суммирования по всем частицам системы находим

$$L_\omega = \sum_i l_{i\omega} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega .$$

Учитывая далее, что $\sum_i m_i R_i^2$ – это момент инерции $I$ тела относительно данной оси вращения, проекцию полного

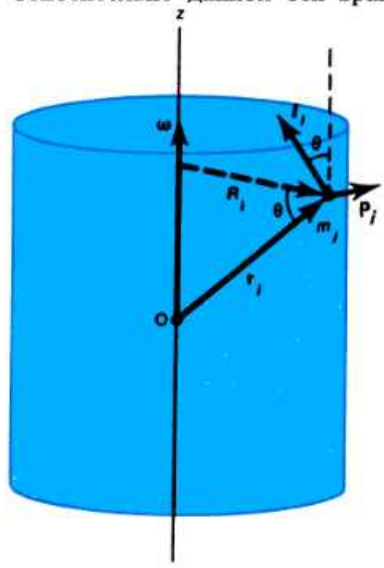



Рис. 10.7. К расчету вектора $\mathbf{L}_z = \sum (\boldsymbol{l}_z)_i$.

момента импульса тела на ось вращения тела можно записать в виде

$$L_\omega = I\omega. \tag{10.8}$$

Заметим, что при выводе формулы (10.8) не имеет значения, где мы выбираем начало отсчета O (для измерения $\mathbf{r}_i$), если оно находится на оси вращения. Выражение (10.8) совпадает с формулой (9.17), но теперь оно получено с помощью общего определения момента импульса.

Выражение (10.7) представляет собой соотношение между моментом импульса и моментом силы:

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$ вычисляются относительно либо начала инерциальной системы отсчета, либо системы ЦМ. Это векторное соотношение, и, следовательно, оно справедливо для любой проекции. Таким образом, для твердого тела проекция момента импульса на ось вращения запишется в виде

$$\tau_\omega = \frac{dL_\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha.$$

Это выражение справедливо для вращательного движения твердого тела относительно закрепленной по отношению к нему оси, которая либо неподвижна в инерциальной системе отсчета, либо проходит через ЦМ этого тела. Полученное выражение эквивалентно формулам (9.12) и (9.13), которые, как мы теперь установили, являются частными случаями уравнения (10.7): $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$.

В случае когда тело вращается относительно оси симметрии, проходящей через ЦМ тела, можно написать

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad \text{[ось вращения совпадает с осью симметрии, проходящей через ЦМ тела];} \tag{10.9}$$

здесь $\mathbf{L}$ измеряется относительно ЦМ тела. Чтобы показать правильность такой записи, обратимся снова к рис. 10.7. Хотя $\boldsymbol{l}_i$ (момент импульса $i$-частицы) не направлен вдоль оси вращения тела, но при сложении его с моментом импульса такой же частицы, расположенной точно напротив $i$-й частицы по другую сторону оси вращения, вектор суммы моментов импульса будет направлен вдоль оси вращения. Поскольку симметричное тело состоит из таких пар частиц, сумма моментов импульсов по всем парам будет также направлена вдоль оси вращения. Следовательно, для тела, вращающегося относительно оси симметрии, момент импульса направлен вдоль оси вращения и поэтому $L = L_\omega$; таким образом, выражение (10.9) доказано.

**Пример 10.2.** *Машина Атвуда* состоит из двух тел массами $m_1$ и $m_2$, подвешенных на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. 10.8.). Найдем ускорение тел $m_1$ и $m_2$, если радиус блока равен $R_0$, а его момент инерции относительно оси вращения равен $I$, и сравним полученный результат со значениями ускорений, когда моментом инерции блока пренебрегают.

**Решение.** Вычислим момент импульса системы относительно оси, проходящей через центр блока (точка O). Момент импульса блока равен $I\omega$, где $\omega = v/R_0$ и $v$ – скорость тел $m_1$ и $m_2$ в любой момент времени. Моменты импульса тел $m_1$ и $m_2$ равны соответственно $R_0 m_1 v$ и $R_0 m_2 v$. Полный момент импульса системы записывается в виде

$$L = (m_1 + m_2) v R_0 + I(v/R_0).$$

Результирующий момент внешних сил дается выражением

$$\tau = m_2 g R_0 - m_1 g R_0,$$

в котором мы учли, что момент внешней силы реакции, действующей на блок со стороны оси, равен нулю, поскольку плечо этой силы относительно оси вращения равно нулю. Используя формулу (10.7а):

$$\tau = dL/dt,$$

находим

$$(m_2 - m_1) g R_0 = (m_1 + m_2) R_0 \frac{dv}{dt} + \frac{I}{R_0}\frac{dv}{dt}.$$

Отсюда получим следующее выражение для $a$:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(m_2 - m_1) g}{(m_1 + m_2) + I/R_0^2}.$$

Если пренебречь моментом инерции блока $I$, то ускорение равно $a = (m_2 - m_1) g / (m_2 + m_1)$. Отсюда мы видим, что наличие у блока момента инерции приводит к замедлению системы. Это именно тот результат, который мы ожидали.

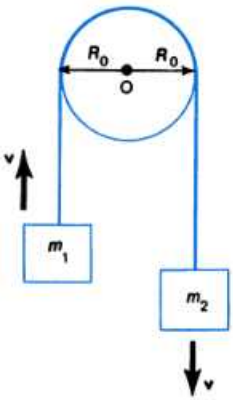



Рис. 10.8. Машина Атвуда.

Хотя формула (10.9) во многих случаях оказывается очень полезной, в общем случае ее применять нельзя. Тем не менее можно показать, что любое твердое тело независимо от того, какова у него форма, имеет три «главные оси», относительно которых формула (10.9) справедлива (мы не будем здесь подробно останавливаться на этом вопросе). В качестве примера, когда формула (10.9) не справедлива, рассмотрим несимметричное тело на рис. 10.9. Оно состоит из двух шаров с массами $m_1$ и $m_2$ (причем $m_1 = m_2$), закрепленных на концах твердого невесомого стержня, составляющего угол $\theta$ с осью вращения. Вычислим момент импульса этого тела относительно ЦМ, расположенного в точке O. В тот момент времени, когда тело расположено так, как показано на рисунке, шар $m_1$ движется к наблюдателю, а шар $m_2$ – от наблюдателя. Таким образом, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1$ и $\mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$. Очевидно, что суммарный момент импульса $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ *не* направлен вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$, поскольку рассматриваемое тело *не*

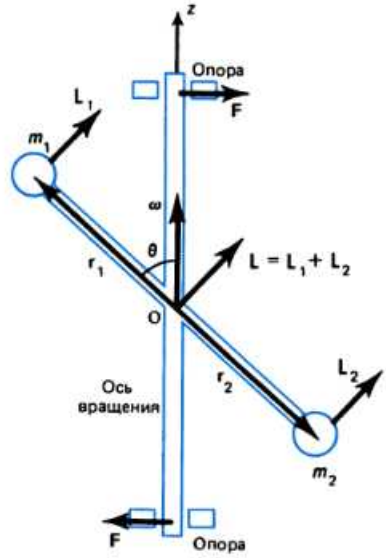



Рис. 10.9. Система, для которой момент импульса **L** и угловая скорость **ω** не параллельны. Эта система является примером вращательного дисбаланса.

симметрично. Неудивительно, что формула (10.9) не справедлива в этом случае.

## *10.7. Вращательный дисбаланс

Продолжим рассмотрение системы, изображенной на рис .10.9, поскольку она хорошо иллюстрирует связь момента сил и момента импульса, описываемую формулой $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$. Если система вращается с постоянной угловой скоростью **ω**, то величина момента импульса **L** не меняется, а направление его меняется. Когда стержень с закрепленными на нем двумя шарами вращается относительно оси $z$, вектор **L** тоже вращается относительно этой же оси. В тот момент времени, когда система приходит в положение, показанное на рис. 10.9, вектор **L** находится в плоскости рисунка. Через промежуток времени $dt$ стержень повернется на угол $d\theta = \omega\, dt$; вектор **L** также повернется относительно оси на угол $d\theta$, оставаясь перпендикулярным стержню. При этом у вектора **L** появится составляющая $d\mathbf{L}$, перпендикулярная плоскости рисунка и направленная от читателя. Так же будет направлена и производная вектора $d\mathbf{L}/dt$. Поскольку

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt\,,$$

мы видим, что момент сил в момент времени, соответствующий рис. 10.9, направлен перпендикулярно плоскости рисунка от читателя и должен быть приложен к оси, на которой закреплен стержень. Момент сил приложен к оси со стороны опор (или других связей), расположенных на концах оси. Силы **F**, действующие на ось со стороны

опор, показаны на рис. 10.9. Во время вращения системы направление сил **F** тоже меняется, причем они всегда остаются в плоскости векторов **L** и **ω**. Если бы вращающий момент, создаваемый силами **F**, не действовал на систему, то вращение системы относительно закрепленной оси было бы невозможным.

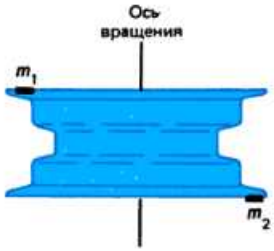



Рис. 10.10. Несбалансированное автомобильное колесо.

Согласно третьему закону Ньютона, ось действует на опоры с силами $-\mathbf{F}$. Следовательно, ось стремится двигаться в направлении вектора $-\mathbf{F}$ и, таким образом, при вращении системы расшатывает опоры. С этим явлением мы часто сталкиваемся на практике, например при возникновении вибрации автомобиля, колеса которого не сбалансированы. Рассмотрим автомобильное колесо, которое было бы полностью симметричным, если бы не два дополнительных тела $m_1$ и $m_2$, укрепленных на ободе колеса с противоположных сторон, как показано на рис. 10.10. Вследствие несимметричного расположения тел $m_1$ и $m_2$ подшипники колеса должны действовать на ось колеса с некоторой силой, параллельной плоскости колеса, таким образом, чтобы ось вращения сохраняла свое положение, как и в случае системы на рис. 10.9. При этом подшипники быстро изнашиваются, колесо расшатывается и начинает болтаться, что ощущают пассажиры автомобиля. Если же колеса сбалансированы, то они вращаются плавно без биений. Вот почему так важна «динамическая балансировка» колес и шин автомобиля. Колесо на рис. 10.10 хорошо сбалансировано *статически*. Если теперь к колесу добавить тела с одинаковыми массами $m_3$ и $m_4$, расположив их симметрично ниже тела $m_1$ и выше тела $m_2$, то колесо будет сбалансировано и динамически. При этом момент импульса **L** будет параллелен угловой скорости **ω**, так что момент внешних сил $\tau_{\text{внешн}} = 0$.




Рис. 10.11. Изменение вектора момента импульса системы, наблюдаемого на рис. 10.9 снизу вдоль оси вращения системы, за промежуток времени $dt$ при вращении системы.

**Пример 10.3.** Найдем величину момента сил $\tau$, необходимую для того, чтобы система на рис. 10.9 вращалась относительно неподвижной оси.

**Решение.** На рис. 10.11 показан отдельно вектор момента импульса системы, указанной на рис. 10.9. Ориентация вектора соответствует тому, что при вращении системы мы смотрим на рис. 10.9 сверху перпендикулярно оси вращения. Проекция вектора **L** на направление, перпендикулярное оси вращения системы, равна $L\cos\theta$. За промежуток времени $dt$ величина вектора **L** изменится на

$$dL = (L\cos\theta)\,d\theta = L\cos\theta\,\omega\,dt.$$

Следовательно,

$$\tau = dL/dt = \omega L\cos\theta.$$

Учитывая, что $L = L_1 + L_2 = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2 = r_1 m_1 (\omega r_1 \sin\theta) + r_2 m_2 (\omega r_2 \sin\theta) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\,\omega \sin\theta = I\omega/\sin\theta$, получим

для момента сил выражение

$$\tau = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega^2 \sin\theta\cos\theta = I\omega^2/\mathrm{tg}\,\theta,$$

где $I = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\sin^2\theta$ – момент инерции системы относительно оси вращения.

Пример на рис. 10.9 иллюстрирует важную роль векторного характера момента силы и момента импульса. Если ограничиться рассмотрением только составляющих момента импульса и момента сил, параллельных оси вращения, то мы не смогли бы вычислить момента сил, создаваемого опорами, поскольку силы **F** действуют на ось вращения и, следовательно, не создают момента сил относительно оси вращения. Используя понятие о векторном моменте импульса, мы имеем весьма мощный метод для изучения законов вращательного движения и решения соответствующих задач.

## 10.8. Сохранение момента импульса

В гл. 8 мы показали, что в наиболее общей форме второй закон Ньютона для поступательного движения частицы или системы частиц можно записать в виде

$$\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt,$$

где **P** – импульс системы, равный $m\mathbf{v}$ для частицы и $M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$ для системы частиц общей массой $M$, ЦМ которой движется со скоростью $\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$, а **F** – результирующая всех сил, действующих на частицу или систему частиц. Это соотношение справедливо только в инерциальной системе отсчета.

В настоящей главе мы найдем аналогичное соотношение, описывающее общее вращательное движение системы частиц (включая твердое тело):

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – результирующий момент сил, действующий на систему, а **L** – полный момент импульса системы. Это соотношение справедливо в случае, когда $\boldsymbol{\tau}$ и **L** вычисляются относительно точки, неподвижной в инерциальной системе отсчета, или относительно ЦМ системы. Для твердого тела, вращающегося относительно оси, направление которой остается неизменным, момент импульса относительно этой оси записывается в виде [(10.8)]

$$L = I\omega,$$

где $I$ – момент инерции тела относительно этой оси вращения.

В случае поступательного движения, если результирующая сил, действующих на систему, равна нулю, мы имеем $d\mathbf{P}/dt = 0$, так что полный импульс системы сохраняется. Это свойство называется законом сохранения импульса. В случае вращательного движения, если

результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю, то

$$d\mathbf{L}/dt \equiv 0 \text{ и } \mathbf{L} = \text{const} \quad [\tau_{\text{рез}} = 0]. \tag{10.10}$$

*Полный момент импульса системы сохраняется постоянным, если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю.* Этот закон называется *законом сохранения момента импульса*. Он играет такую же важную роль, как и законы сохранения энергии и импульса (а также другие законы сохранения, которые мы обсудим ниже), и является одним из важнейших законов сохранения в физике. В гл. 9 мы уже рассмотрели некоторые примеры применения этого важного закона для частного случая твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Здесь мы его изучим в наиболее общей форме. А теперь применим этот закон для одного интересного случая.

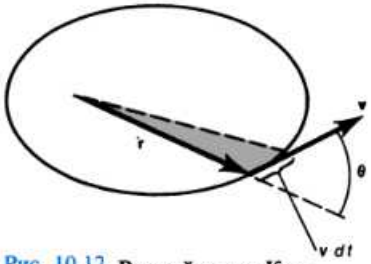



Рис. 10.12. Второй закон Кеплера для движения планет (пример 10.4).

**Пример 10.4.** Из *второго закона Кеплера* следует, что каждая планета Солнечной системы движется так, что линия, соединяющая Солнце и планету, за равные промежутки времени заметает равные площади (разд. 5.7). Воспользуемся законом сохранения момента импульса, чтобы доказать это.

**Решение.** Планета движется по эллипсу, как показано на рис. 10.12. За промежуток времени $dt$ она проходит расстояние $v\,dt$, и линия, соединяющая планету и Солнце, заметет за это время площадь треугольника $dA$ с основанием, равным $r$, и высотой $v\,dt \sin\theta$ (на рис. 10.12 эта площадь $dA$ затенена). Следовательно,

$$dA = (1/2)(r)(v\,dt \sin\theta)$$

и

$$dA/dt = (1/2)rv \sin\theta.$$

Величина момента импульса $\mathbf{L}$ планеты относительно Солнца дается выражением

$$L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = mrv \sin\theta.$$

Подставляя это в предыдущее выражение, получаем

$$dA/dt = (1/2m)\,L.$$

Но величина момента импульса сохраняется: $L = \text{const}$, поскольку сила тяготения $\mathbf{F}$ направлена к Солнцу (мы пренебрегаем притяжением других планет), так что $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Следовательно, $dA/dt = \text{const}$, что и требовалось доказать.

## 10.9. Вращающееся колесо

Рассмотрим теперь довольно простой опыт, который дает несколько неожиданный результат, иллюстрирующий векторный характер соотношения

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt.$$

Предположим, что вы держите рукоятку, жестко со-

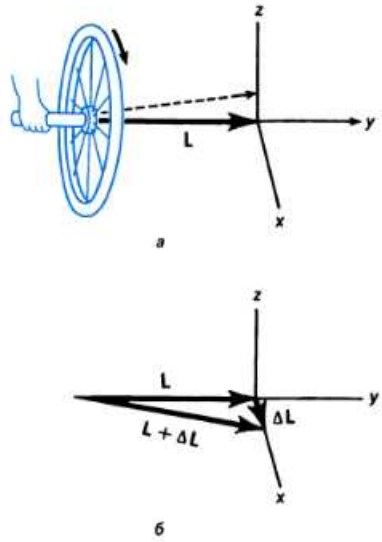



Рис. 10.13. Когда вы пытаетесь изменить направление оси вращения велосипедного колеса так, чтобы она перемещалась вверх, ось вращения отклоняется в сторону.

единенную с осью быстро вращающегося велосипедного колеса (рис. 10.13,*а*). Момент импульса колеса **L** направлен по горизонтали, как показано на рисунке. Попытаемся резко толкнуть колесо, чтобы ось вращения сместилась вверх так, как показано штриховой линией на рис. 10.13, *а* (при этом ЦМ сдвинется в вертикальном направлении). Вы ожидаете, что ось колеса пойдет вверх, однако вопреки ожиданию она сместится вправо. Чтобы объяснить такое «странное» поведение колеса, достаточно просто воспользоваться соотношением $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$. В течение короткого промежутка времени $\Delta t$ вы прикладывали к оси момент силы $\boldsymbol{\tau}$ (относительно оси, проходящей через запястье вашей руки), направленный вдоль $x$ перпендикулярно **L**. Таким образом, момент импульса изменился на

$$\Delta \mathbf{L} \approx \boldsymbol{\tau}\, \Delta t,$$

так что изменение момента импульса $\Delta\mathbf{L}$ тоже должно быть направлено (приблизительно) вдоль оси $x$, поскольку именно такое направление имеет вектор $\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, новый момент импульса $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$ сместится вправо от **L**. Поскольку направление момента импульса, который теперь равен $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$, совпадает с направлением оси вращения колеса, ось колеса должна переместиться вправо, что и наблюдается на опыте.

Заметим, что если бы колесо не вращалось, т. е. в начальный момент времени мы имели бы $\mathbf{L} = 0$, то изменение момента импульса $\Delta\mathbf{L}$ было бы по-прежнему направлено вдоль оси $x$ и соответствовало бы вращательному движению колеса относительно оси $x$ (проходящей через запястье). Это означает, что ось отклонилась бы вверх, как ожидалось, и не произошло бы никакого отклонения оси колеса в сторону.

## *10.10. Вращающийся волчок

Интересным примером вращательного движения и применения векторного соотношения

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

является движение быстро вращающегося игрушечного волчка. Рассмотрим симметричный волчок массой $M$, быстро вращающийся вокруг оси симметрии, как показано на рис. 10.14. При вращении волчок опирается острием на горизонтальную плоскость $xy$ в точке O, которая выбрана за начало некоторой инерциальной системы отсчета. Если ось вращения волчка составляет угол $\theta$ с вертикалью (осью $z$), то при предоставлении волчка самому себе его ось будет описывать в пространстве конус, ось которого совпадает с вертикалью. Этот конус изображен на рис. 10.14 штриховыми линиями. Такой тип движения, когда под действием момента сил ось вращения меняет свое направление, называется *прецессией*, а скорость, с которой ось вращения движется относительно вертикальной ($z$) оси, называется угловой скоростью прецессии и обозначается буквой $\boldsymbol{\Omega}$ (прописная греческая буква омега). Попытаемся разобраться в том, почему возникает такое движение, а также рассчитаем угловую скорость прецессии $\boldsymbol{\Omega}$.

Если бы волчок не вращался, он сразу же упал бы на землю под действием силы тяжести. Кажущаяся «загадка» волчка состоит в том, что, вращаясь, он не падает сразу под действием силы тяжести, а вместо этого прецессирует, т. е. отклоняется в разные стороны. Однако такое движение волчка перестает быть загадочным, если рассмотреть его с точки зрения момента импульса волчка и момента сил, приложенных к нему относительно точки O. Когда волчок вертится с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно оси симметрии, его момент импульса $\mathbf{L}$ будет направлен вдоль оси его вращения, как показано на рис. 10.14. (Существует также момент импульса, связанный с прецессией волчка, поэтому полный момент импульса $\mathbf{L}$ направлен не точно вдоль оси волчка; однако если справедливо неравенство $\Omega \ll \omega$, что часто имеет место, то этим отклонением можно пренебречь). Далее, чтобы изменить момент импульса, к волчку необходимо приложить момент силы. Если бы на волчок не действовал никакой момент силы, то его момент импульса $\mathbf{L}$ оставался бы постоянным по величине и направлению; волчок не падал бы и не прецессировал. Однако на волчок действует момент силы тяжести относительно точки O, равный $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times M\mathbf{g}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор ЦМ волчка относительно точки O. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ перпендикулярен как вектору $\mathbf{r}$, так и вектору $M\mathbf{g}$ и в соответствии с правилом правой руки располагается в горизонтальной ($xy$) плоскости, как показано на рис. 10.14. Изменение момента

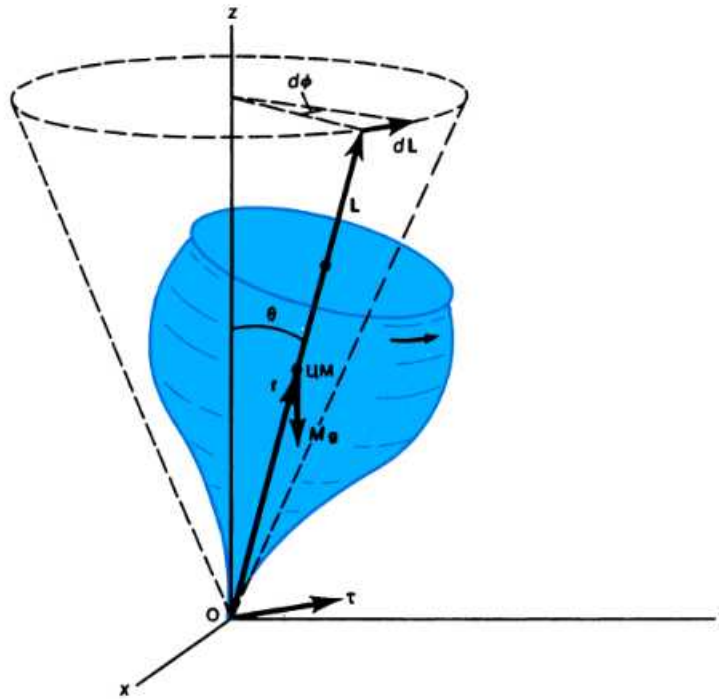



Рис. 10.14. Вращающийся волчок.

импульса $\mathbf{L}$ за время $dt$ дается выражением

$$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\, dt .$$

Это изменение перпендикулярно вектору $\mathbf{L}$, т. е. имеет горизонтальное направление (рис. 10.14). Поскольку вектор $d\mathbf{L}$ перпендикулярен $\mathbf{L}$, величина вектора $\mathbf{L}$ не изменяется, а меняется лишь его направление. Момент импульса $\mathbf{L}$ всегда направлен вдоль оси вращения волчка, поэтому при изменении его направления на рис. 10.14 мы видим, что ось волчка перемещается вправо; иными словами, верхний конец оси движется в горизонтальном направлении перпендикулярно вектору $\mathbf{L}$. Это объясняет то, почему волчок прецессирует, а не падает. Конец вектора $\mathbf{L}$ и верхняя точка оси волчка движутся вместе по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. При этом векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $d\mathbf{L}$ также поворачиваются, оставаясь горизонтальными и перпендикулярными вектору $\mathbf{L}$.

Для того чтобы найти $\Omega$, заметим, что угол поворота оси волчка $d\phi$ в горизонтальной плоскости на рис. 10.14 связан с $dL$ следующим соотношением:

$$dL = L \sin\theta \, d\phi ,$$

поскольку вектор $\mathbf{L}$ составляет с осью $z$ угол $\theta$. По определению угловая скорость прецессии дается выражением

$$\Omega = d\phi/dt ,$$

которое после подстановки в него выражения для $d\phi$ из предыдущей формулы принимает вид

$$\Omega = \frac{1}{L\sin\theta}\frac{dL}{dt} = \frac{\tau}{L\sin\theta} \qquad \text{[вращающийся волчок]}. \quad (10.11а)$$

Учитывая, что $\tau = |\mathbf{r} \times M\mathbf{g}| = rMg\sin\theta$ [поскольку $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$], мы можем также записать следующее выражение:

$$\Omega = Mgr/L \qquad \text{[вращающийся волчок]}. \quad (10.11б)$$

Таким образом, скорость прецессии не зависит от угла наклона волчка $\theta$; она обратно пропорциональна моменту импульса волчка. Чем быстрее вращается волчок, тем больше $L$ и тем медленнее он прецессирует.

## Заключение

*Векторным произведением* двух векторов **A** и **B** называется вектор $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, который по абсолютной величине (модулю) равен $AB\sin\theta$ и направлен перпендикулярно как вектору **A**, так и вектору **B** в соответствии с правилом правой руки.

*Момент силы* $\tau$, создаваемый силой **F**, является векторной величиной и всегда вычисляется относительно некоторой точки O начала системы отсчета:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где **r** – радиус-вектор точки, в которой приложена сила **F**.

*Момент импульса* также является вектором. Для частицы с импульсом $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ момент импульса $\boldsymbol{l}$ относительно некоторой точки O записывается в виде

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

где **r** – радиус-вектор, описывающий положение частицы относительно точки O в любой момент времени. Результирующий момент силы $\tau$, действующий на частицу, связан с моментом импульса следующим соотношением:

$$\tau = d\boldsymbol{l}/dt.$$

Для системы частиц полный момент импульса равен $\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{l}_i$. Полный момент импульса системы связан с результирующим моментом силы $\tau$, действующим на систему, соотношением

$$\tau = d\mathbf{L}/dt.$$

Последнее соотношение является вращательным аналогом второго закона Ньютона, записанным в векторной форме. Оно справедливо в случае, когда **L** и $\tau$ вычисляются относительно точки, фиксированной в инерциальной системе отсчета или помещенной в ЦМ системы. Для твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси, проекция момента импульса на ось вращения

дается выражением $L_\omega = I\omega$. Если тело вращается относительно собственной оси симметрии, то имеет место следующее соотношение: $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, которое в общем случае не справедливо.

Если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю, то полный момент импульса системы $\mathbf{L}$ сохраняется постоянным; это важное свойство называется *законом сохранения момента импульса*. Он формулируется для векторной величины момента импульса $\mathbf{L}$ и, следовательно, выполняется для любой проекции момента импульса на некоторую ось.

## Вопросы

1. Если поменять направления всех проекций векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ на противоположные, то как изменится направление произведения $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$?
2. Назовите три различных условия, которые могли бы привести к равенству $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = 0$.
3. Сила $\mathbf{F} = \mathbf{j}F$ приложена к телу в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, причем начало системы отсчета помещено в ЦМ тела. Зависит ли момент силы $\mathbf{F}$ относительно ЦМ от координаты $x$? От координаты $y$? От координаты $z$?
4. Частица движется с постоянной скоростью вдоль прямой линии. Как изменяется с течением времени момент импульса частицы, вычисленный относительно любой точки, не лежащей на этой прямой?
5. Две частицы, имеющие одинаковые импульсы $\mathbf{p}$, расположены в различных точках. Можно ли выбрать начало отсчета О таким образом, чтобы моменты импульса этих частиц были одинаковы? Каков будет ваш ответ, если у одной частицы импульс равен $\mathbf{p}$, а у другой он равен $-\mathbf{p}$?
6. Если равнодействующая всех сил, действующих на систему, равна нулю, то равен ли нулю результирующий момент сил? Если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю, равна ли нулю результирующая сила?
7. Палка стоит вертикально на гладкой горизонтальной поверхности без трения. Опишите движение палки, когда она слегка наклонится в одну из сторон и упадет.
8. Посмотрите на циферблат часов с секундной стрелкой. Как направлен момент импульса секундной стрелки?
9. Попробуйте вращать сырое и хорошо сваренное яйца. Почему в одном случае яйцо вращается легко, а в другом с трудом?
10. Одна из игрушек представляет собой фигуру неправильной формы, изготовленную из легкого пластика, заполненного воздухом. Объясните, почему ребенок ударяет по ней ладонью несколько раз подряд, чтобы игрушка «взлетела» повыше.
11. Объясните, почему для описания положения твердого тела в пространстве необходимо задать шесть переменных. Сколько переменных потребуется для описания положения твердого тела, которое перемещается только в плоскости?
12. Велосипедист преодолевает вершину холма. Каким при этом является его движение? Оно вращательное, поступательное или представляет собой комбинацию вращательного и поступательного движений?
13. Рассмотрите несимметричную систему, показанную на рис. 10.9. Существует ли такая точка, что момент импульса $\mathbf{L}$, вычисленный относительно нее, будет направлен параллельно вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$? Каким будет ответ на этот вопрос, если в системе отлична от нуля только одна масса (скажем, $m_2 = 0$)? Если хотя бы в одном случае вы ответили на вопрос утвердительно, то объясните, почему в обоих случаях на опоры оси действуют силы и требуется соблюдение условия $\tau = d\mathbf{L}/dt$.
14. Мы утверждаем, что импульс и момент импульса сохраняются. Тем не менее большинство движущихся поступательно или вращающихся тел со временем замедляются и останавливаются. Объясните.
15. С помощью закона сохранения момента импульса выясните, почему вертолет должен иметь больше одного пропеллера. Укажите один или более способов размещения второго пропеллера, функция которого состоит в сообщении вертолету устойчивости.
16. Футболист производит удар по мячу «через себя». Сохраняется ли момент импульса мяча, вычисленный относительно его ЦМ, когда мяч находится в воздухе? Сохраняется ли момент импульса мяча относительно исходного положения носка бутсы футболиста?

17. Сохраняется ли момент импульса системы, если на нее действует центральная сила $\mathbf{F} = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}$ (разд. 7.5)? Справедлив ли второй закон Кеплера для произвольной центральной силы?

18. Колесо свободно вращается относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Колесо понемногу крошится, и от него отлетают обломки. Как это повлияет на скорость вращения колеса? Сохраняется ли при этом его момент импульса? Сохраняется ли кинетическая энергия? Объясните.

19. Имеется следующий набор векторных величин: перемещение, скорость, ускорение, импульс, момент импульса, момент силы. а) Какие из этих величин не зависят от выбора начала системы отсчета? (Рассмотрите в качестве начала системы отсчета различные точки, которые покоятся относительно друг друга.) б) Какие из этих величин не зависят от скорости системы отсчета?

20. Справедливо ли для частицы, движущейся с постоянным импульсом $\mathbf{p}$, утверждение, что она заметает равные площади за равные промежутки времени? Объясните.

21. Вычислите момент силы, который должен приложить человек (рис. 10.13), чтобы повернуть ось колеса строго вверх, без отклонений в сторону.

22. Как автомобиль совершает поворот вправо? Что создает момент силы, необходимый для поворота?

23. Предположите, что вы стоите на поворотном круге, который может свободно вращаться. Если вы держите над головой вращающееся велосипедное колесо таким образом, что его ось вертикальна, то вы будете находиться в покое. Если вы теперь перемещаете колесо так, что его ось вращения становится горизонтальной, то что происходит с вами? Что произойдет, если вы затем направите ось колеса вертикально вниз?

*24. Ось вращения Земли прецессирует с периодом 25 000 лет. Прецессия Земли во многом схожа с прецессией волчка. Объясните, каким образом вспучивание Земли на экваторе приводит к возникновению момента сил, действующего на Землю со стороны Солнца. Воспользуйтесь при этом рис. 10.15, на котором изображено расположение планет при зимнем солнцестоянии (21 декабря). Вокруг какой оси будет прецессировать ось вращения Земли в результате действия этого момента силы? Будет ли существовать этот момент силы через 3 месяца после дня зимнего солнцестояния? Объясните.

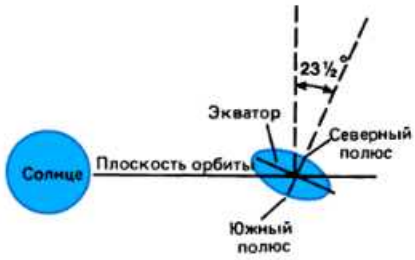



Рис. 10.15.

## Задачи

Раздел 10.1

1. (I) Покажите, что а) $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$; б) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$.

2. (I) Рассмотрите частицу твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Покажите, что тангенциальная (касательная) и радиальная составляющие вектора линейного ускорения равны соответственно

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

3. (II) Используя процедуру нахождения пределов, изложенную в гл. 2, в частности в примере 2.3, получите соотношение (10.2г).

4. (II) Докажите дистрибутивный (переместительный) закон для векторного произведения [соотношение (10.2в)].

5. (II) а) Покажите, что векторное произведение двух векторов

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \text{ и } \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

записывается в виде

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}.$$

б) Покажите, что векторное произведение можно представить в виде

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

где используется правило вычисления определителя матрицы. (Заметим, однако, что, строго говоря, это не определитель, а просто некое правило, облегчающее запоминание.)

6. (III) Покажите, что скорость $\mathbf{v}$ любой точки, принадлежащей твердому телу, вращающемуся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси, может быть записана в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор этой точки относительно начала отсчета O, расположенного на оси вра-

щения. Может ли при этом O находиться в любой точке, принадлежащей оси? Выполняется ли равенство $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, если начало отсчета O расположено в точке, не принадлежащей оси вращения?

7. (III) Пусть заданы три вектора **A**, **B**, **C**, не лежащие в одной плоскости (некомпланарные векторы). Покажите, что справедливы следующие равенства: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$. *Подсказка*: обратитесь к решению предыдущей задачи.

Раздел 10.2

8. (II) Начало системы координат помещено в центре колеса. Колесо может вращаться в плоскости $xy$ вокруг оси, проходящей через начало координат. В точке с координатами $x = 10$ см, $y = 35$ см к колесу приложена сила $F = 83$ Н, направленная под углом 30° к оси $x$. Чему равна величина и как направлен момент этой силы относительно оси вращения?

9. (II) Тонкое колесо диаметром 30 см может вращаться вокруг оси, проходящей через его центр, направление которой выберем за ось $z$ (колесо вращается в плоскости $xy$). К точке обода колеса, которая находится точно на оси $x$, приложена сила $\mathbf{F} = 26\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ (в ньютонах). а) Найдите момент этой силы (его величину и направление) относительно центра колеса. б) Параллельно ли направление этого момента силы угловому ускорению $\boldsymbol{\alpha}$? Если нет, то объясните, каким образом вектор момента силы $\boldsymbol{\tau}$ может быть пропорционален $\boldsymbol{\alpha}$.

Раздел 10.3

10. (I) Найдите $x$-, $y$- и $z$-составляющие вектора момента импульса частицы, расположенной в точке $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и имеющей импульс $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$.

11. (I) Покажите, что кинетическая энергия частицы массой $m$, движущейся по круговой траектории, равна $l^2/2I$, где $l$ – величина ее момента импульса, а $I$ – ее момент инерции относительно оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости.

12. (II) Две одинаковые частицы имеют равные по величине, но противоположные по направлению импульсы $\mathbf{p}$ и $-\mathbf{p}$ и движутся не по одной прямой. Покажите, что полный момент импульса этой системы не зависит от выбора начала координат.

13. (II) Две частицы находятся на краю стола на расстоянии $d$ друг от друга. Одна из частиц массой $m$ соскальзывает со стола и падает вертикально вниз. Совместив начало системы координат с оставшейся на столе частицей, вычислите а) момент силы $\tau$, действующей на падающую частицу, как функцию времени (до ее удара о поверхность земли); б) момент импульса $l$ как функцию времени. в) Покажите, что выполняется равенство $\tau = dl/dt$.

14. (III) В боровской модели атома водорода электрон массой $m$ удерживается на круговой орбите вокруг ядра (протона) электрической силой $F = ke^2/r^2$ (где $e$ – электрический заряд электрона или протона, а $k$ – постоянный коэффициент). В этой модели разрешены не все орбиты, а лишь те, для которых момент импульса $l$ электрона составляет целое кратное $n$ величины $h/2\pi$, где $h$ – постоянная Планка; точнее, $l = nh/2\pi$, где $n$ – целое положительное число. Покажите, что возможные радиусы орбит электрона даются выражением

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 kme^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Для этого покажите сначала, что радиус орбиты равен $r = ke^2/mv^2$, а затем примените соотношение $l = nh/2\pi$.

Разделы 10.4 – 10.6

15. (II) Четыре одинаковые частицы массами $m$ каждая укреплены на тонком стержне длиной $L$ и массой $M$ на равных расстояниях друг от друга, причем на каждом конце стержня имеется по одной частице. Система вращается с угловой скоростью $\omega$ вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через одну из концевых масс. Определите: а) кинетическую энергию и б) момент импульса системы.

16. (II) Воспользуйтесь в примере 9.10 для определения ускорения груза соотношением $\tau = dL/dt$.

17. (II) Луна обращается по орбите вокруг Земли таким образом, что к Земле обращена всегда одна ее сторона. Найдите отношение собственного момента импульса Луны (при вращении вокруг ее собственной оси) к ее орбитальному моменту импульса.

18. (III) Тонкая нить намотана на сплошную цилиндрическую катушку радиусом $R$ и массой $M$. Один конец нити закреплен, и катушка может падать вертикально (без начальной скорости) по мере раскручивания нити. а) Вычислите момент импульса катушки относительно оси, проходящей через ее центр масс, как функцию времени. б) Как зависит от времени натяжение нити?

19 (III) Однородный тонкий стержень длиной 80 см и массой 400 г лежит на гладком (без трения) горизонтальном столе. По стержню ударяют в точке, расположенной на расстоянии

20 см от одного из его концов, причем удар производится в направлении, перпендикулярном самому стержню. Опишите результирующее движение стержня, если импульс силы равен 8,5 Н·с.

**20.** (III) Тонкая прямоугольная пластинка с длинами сторон $a$ и $b$ вращается относительно оси, проходящей вдоль ее диагонали. Определите величину и направление момента импульса $\mathbf{L}$ пластинки.

**21.** (III) Велосипедист, движущийся со скоростью $v = 5{,}2$ м/с по горизонтальной дороге, делает поворот по дуге окружности радиусом $r = 3{,}8$ м. На велосипедиста и велосипед со стороны дороги действуют сила нормальной реакции $\mathbf{F}_N$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, приложенные к шинам, а также сила тяжести $m\mathbf{g}$, где $m$ – полная масса велосипеда и велосипедиста. а) Подробно объясните, почему угол $\theta$, который велосипед составляет с вертикалью (рис. 10.16) при условии, что велосипедист находится в равновесии, дается соотношением $\operatorname{tg}\theta = F_{тр}/F_N$. б) Вычислите угол $\theta$ для значений параметров, заданных в условии. (*Подсказка*: рассмотрите поступательное движение по окружности велосипеда и велосипедиста.) Если коэффициент статического трения между шинами и дорогой равен $\mu_s = 0{,}65$, то чему будет равен минимальный радиус поворота?

**22.** (III) Покажите, что полный момент импульса $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ системы частиц, вычисленный относительно начала инерциальной системы отсчета, может быть представлен в виде суммы момента импульса $\mathbf{L}^*$ относительно ЦМ системы (собственный момент импульса) и момента импульса ЦМ системы относительно начала координат (орбитальный момент импульса):

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{r}_{ЦМ} \times M\mathbf{v}_{ЦМ}.$$

(*Подсказка*: см. вывод выражения (9.22).)

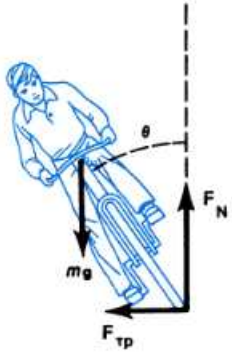



Рис. 10.16.

* Раздел 10.7

***23.** (I) Чему равна величина силы $\mathbf{F}$, действующей со стороны каждой из опор на рис. 10.9 (пример 10.3)? Расстояние между опорами равно $d$.

***24.** (II) Предположите, что на рис. 10.9 $m_2 = 0$; иными словами, имеется только одна масса $m_1$. Учитывая, что опоры разнесены на расстояние $d$ друг от друга, найдите силы $F_1$ и $F_2$, действующие на верхнюю и нижнюю опоры соответственно. (*Подсказка*: выберите начало отсчета, отличающееся от точки O на рис. 10.9, причем таким образом, чтобы вектор $\mathbf{L}$ был параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$.)

***25.** (II) Однородный диск цилиндрической формы диаметром 60 см и массой 18 кг вращается относительно оси, проходящей через точку, смещенную на 1,0 см от его центра. а) Если опоры установлены на расстоянии 9,5 см друг от друга, то чему равны силы, действующие на них, когда диск вращается с частотой 12 об/с? б) Куда нужно поместить массу 1,00 кг, чтобы уравновесить диск?

Раздел 10.8

**26.** (II) На платформе, которая может свободно вращаться без трения (но в данный момент находится в покое), стоит человек, обладающий моментом инерции $I_p$. В руках человек держит вращающееся велосипедное колесо, ось которого горизонтальна, как показано на рис. 10.13. Колесо с моментом инерции $I_w$ вращается с угловой скоростью $\omega_w$. Чему будет равна угловая скорость платформы $\omega$, если человек перемещает ось колеса так, что а) она остается направленной вертикально вверх; б) отклоняется на 60° от вертикали; в) становится направленной вертикально вниз? г) Чему




Рис. 10.17. Колесо, вращающееся относительно горизонтальной оси, закрепленной в опоре на одном конце, прецессирует.

будет равна угловая скорость вращения ω, если в положении «а» человек достанет рукой до колеса и затормозит его?

*Раздел 10.10

*27. (II) Волчок массой 120 г вращается с частотой 26 об/с, причем ось волчка составляет угол 30° с вертикалью и прецессирует с частотой 1 оборот за 8 с. Чему равен момент инерции волчка, если его ЦМ находится на расстоянии 3,5 см от острия (кончика) волчка вдоль оси симметрии волчка?

*28. (II) Твердое колесо на рис. 10.17 вращается вокруг своей оси со скоростью 25 рад/с, а его радиус равен 6,0 см. Колесо насажено в центре тонкой горизонтальной оси длиной 20 см. Какова скорость прецессии оси?

*29. (II) Как изменится скорость прецессии в том случае, если в условии задачи 28 на свободный конец оси поместить тело, масса которого равна половине массы колеса?

# 11 Равновесие, упругость и разрушение тел

## 11.1. Статика; равновесие сил

В настоящей главе мы изучим частный случай движения, когда равнодействующие сил и моментов, приложенные к телу или системе тел, равны нулю. В этом случае тело (или система тел) либо покоится, либо его центр масс движется с постоянной скоростью. Мы рассмотрим здесь лишь первый случай, когда тело (или система тел) покоится. Вам может показаться, что изучение покоящихся тел не представляет особого интереса – ведь такие тела не обладают ни скоростью, ни ускорением, а результирующая сила и результирующий момент силы для них равны нулю. Но именно этим и интересна изучаемая нами здесь дисциплина, называемая *статикой*; действительно, результирующая сила, действующая на тело, равна нулю, но это вовсе не означает, что на тело (или систему тел) не действуют силы. Вообще говоря, невозможно найти тело, на которое не действовали бы силы. На окружающие нас в повседневной жизни тела действует по меньшей мере одна сила, а именно сила тяжести; поэтому, чтобы тела оставались неподвижными, на них должны действовать еще какие-то силы, так чтобы полная результирующая сила была равна нулю. На тело, например книгу, покоящееся на столе, действуют две силы: одна из них – это направленная вниз сила тяжести и другая – направленная вверх сила, с которой поверхность стола действует на книгу (рис. 11.1). Поскольку результирующая сила здесь равна нулю, сила, действующая вверх со стороны поверхности стола, должна быть равна по величине силе тяжести, направленной вниз. (Не следует путать это с равными по величине и противоположными по направлению силами в третьем законе Ньютона, которые действуют на различные тела; здесь же силы приложены к одному и тому же телу.) В таком случае говорят, что тело, испытывающее действие двух сил, находится в **равновесии**[1].

Статика занимается изучением сил, действующих на тела, находящиеся в состоянии равновесия. Методы статики применяются в самых различных областях деятель-

[1] Равновесие покоящегося тела называется *статическим*; если же тело движется равномерно с постоянной скоростью, то оно находится в *динамическом равновесии*. В этой главе мы будем рассматривать главным образом статическое равновесие.

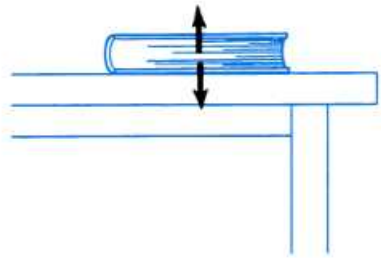


Рис. 11.1. Книга находится в равновесии; результирующая сила, действующая на нее, равна нулю.

ности человека. Архитекторы и инженеры должны уметь рассчитывать силы, действующие на конструкционные элементы зданий, мостов, станков, автомобилей, космических кораблей и других объектов, поскольку любой материал может деформироваться или разрушиться, если приложить к нему слишком большую силу. Знание сил, действующих в мышцах и суставах человека, очень важно для медицины (и прежде всего для лечения травм) и не менее важно для научного подхода к занятиям спортом.

## 11.2. Центр тяжести

Одной из сил, действующих на различные конструкции, является сила тяжести. Наше рассмотрение в этой главе существенно упростится, если ввести понятие центра тяжести. Любое тело можно считать состоящим из множества частиц, каждая массой $m_i$. Хотя сила тяжести действует на каждую из частиц, можно показать, что сумма всех этих отдельных сил эквивалентна одной силе, приложенной в точке тела, называемой его **центром тяжести** (ЦТ); эта сила равна $M\mathbf{g}$, где $M = \sum m_i$ – полная масса тела, а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. Если $\mathbf{g}$ во всех точках тела одинаково, как это обычно и бывает, то ЦТ совпадает с центром масс (ЦМ) тела. Докажем эти утверждения.

Полная сила тяжести, действующая на тело, состоящее из $n$ частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, запишется в виде

$$\mathbf{F} = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g} + \ldots + m_n\mathbf{g} = \sum_i m_i\mathbf{g} = M\mathbf{g},$$

где $M$ – полная масса всего тела, а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, которое, как мы считаем, одно и то же для всех точек тела. Согласно второму закону Ньютона, одна сила $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$ вызывает такое же поступательное движение тела, как и сумма всех сил тяжести, действующих на частицы тела. Но где должна быть приложена эта сила, чтобы то же утверждение было справедливо и в отношении вращательного движения? Чтобы определить это, вычислим сумму всех моментов силы, действующих на тело относительно некоторой произвольной точки O, как показано на рис. 11.2. Если $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор $i$-й частицы

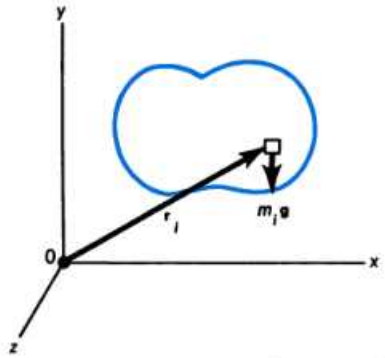



Рис. 11.2. Определение момента силы тяжести относительно начала координат O.

относительно точки O, то сумма всех моментов сил тяжести, действующих на частицы тела, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{g} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{g} + \ldots + \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{g} = \sum (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g}.$$

Такой же момент может быть создан одной силой $M\mathbf{g}$, если ее приложить в точке, радиус-вектор $\mathbf{r}_{\text{ЦТ}}$ которой дается выражением

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_{\text{ЦТ}} \times (M\mathbf{g}).$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, находим

$$\mathbf{r}_{\text{ЦТ}} = (\sum m_i \mathbf{r}_i)/M.$$

Мы видим, что это выражение совпадает с определением центра масс [формула (8.2)]; следовательно, $\mathbf{r}_{\text{ЦТ}} = \mathbf{r}_{\text{ЦМ}}$. Таким образом, сила $M\mathbf{g}$, приложенная к ЦМ, создает такую же силу, и следовательно, оказывает такое же действие на поступательное и вращательное движение, как и сумма сил тяжести, действующая на все частицы тела, и мы показали, что в постоянном поле силы тяжести ЦТ совпадает с ЦМ.

Если ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ не одно и то же в различных точках тела, а это возможно, так как, согласно закону всемирного тяготения Ньютона, $\mathbf{g}$ зависит от расстояния до притягивающего тела (разд. 5.2), то вышеприведенные выражения придется слегка изменить. При этом для каждой частицы тела мы должны заменить $\mathbf{g}$ на $\mathbf{g}_i$, т. е. на значение ускорения свободного падения в точке, в которой находится $i$-я частица. В этом случае ЦТ уже не будет совпадать с ЦМ. Для того чтобы это различие оказалось существенным в поле тяготения Земли, рассматриваемое тело должно быть очень велико.

## 11.3. Условия равновесия

Для того чтобы тело находилось в равновесии, *векторная сумма всех внешних сил, действующих на тело, должна быть равна нулю*:

$$\sum \mathbf{F} = 0. \qquad (11.1a)$$

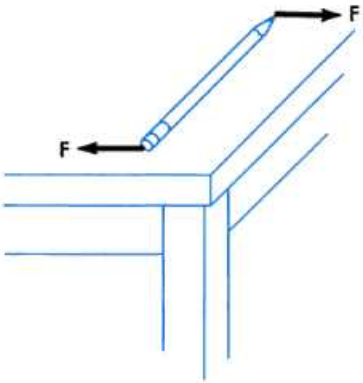



Рис. 11.3. Две одинаковые по величине силы, действующие в противоположных направлениях и приложенные к разным точкам тела так, как показано на рисунке, называются *парой сил*.

Это условие называется *первым условием равновесия*, и его можно записать в виде следующих трех условий для проекций силы:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0. \tag{11.1б}$$

Из выражений (11.1) следует, что ускорение ЦМ тела равно нулю: $\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = 0$. Если тело первоначально находилось в покое ($\mathbf{v}_{\text{ЦМ}} = 0$), то оно будет продолжать покоиться.

Для того чтобы тело находилось в равновесии, одного лишь первого условия еще не достаточно. Сумма сил, действующих, например, на карандаш на рис. 11.3, равна нулю, но карандаш не находится в равновесии, поскольку он может вращаться. *Второе условие равновесия* состоит в том, что *векторная сумма всех внешних моментов сил, действующих на тело, должна быть равна нулю*:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = 0. \tag{11.2}$$

Отсюда следует, что угловое ускорение $\boldsymbol{\alpha}$ относительно любой точки будет равно нулю; если тело не имело вращательного движения ($\omega = 0$), то оно не приобретет его и в дальнейшем. Выражения (11.1) и (11.2) являются необходимыми и достаточными условиями равновесия тела.

Условие (11.2) также можно расписать по проекциям:

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0.$$

Моменты вычисляются относительно некоторой точки O, а $\tau_x$, $\tau_y$ и $\tau_z$ – проекции моментов сил на три выбранные оси. Однако в остальной части этой главы мы ограничимся рассмотрением более простого случая, когда все внешние силы действуют в плоскости. Если выбрать в качестве этой плоскости плоскость $xy$, то у нас остается лишь два уравнения для сил:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

и одно уравнение для моментов силы: $\sum \tau_z = 0$.

Момент силы вычисляется относительно оси, перпендикулярной плоскости $xy$, причем эту ось можно выбрать произвольным образом. Поскольку для твердого тела $\tau = I\alpha$ относительно любой фиксированной оси [формула (9.12)], то, если тело находится в равновесии ($\alpha = 0$), $\tau = 0$ относительно любой фиксированной оси. Поэтому, выбирая соответствующим образом ось вращения, мы можем облегчить расчет.

Имея три уравнения, можно решать задачи не более чем с тремя неизвестными. Если неизвестных больше, то удается иногда отыскать дополнительные соотношения между ними (например, соотношения, описывающие упругие свойства материалов), но здесь мы не будем рассматривать такие случаи из-за их большой сложности.

В ряде случаев некоторые силы можно определить экспериментально на самой конструкции или на ее модели с помощью датчиков напряжений.

Важная роль статики состоит в том, что ее методы позволяют рассчитать силы, действующие на конструкцию снаружи или изнутри, когда некоторые из этих сил уже известны. Не существует единого метода решения задач статики, но полезно придерживаться следующего порядка действий: 1) выбрать для рассмотрения одно тело и изобразить на диаграмме (диаграмме сил) все действующие на тело силы и точки, в каких они приложены; 2) выбрать удобную систему координат и разложить силы на их составляющие; 3) обозначить неизвестные соответствующими буквами, записать уравнения для суммы сил $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ и моментов $\sum \tau_z = 0$ и решить их. Несомненно, самым трудным является первая операция, в которой необходимо учесть все силы, действующие на тело, и исключить те силы, с которыми оно действует на другие тела.

Приведем несколько примеров на вычисление сил в конструкциях, которые находятся в состоянии равновесия.

**Пример 11.1.** Вычислим силы натяжения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ двух шнуров, на которых подвешена люстра массой 200 кг (рис. 11.4).

**Решение.** В точке, где сходятся три шнура, приложены три силы: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и вес люстры. Для этой точки (пусть это будет узел, которым связаны шнуры) можно написать, что $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$. (Заметим, что мы не рассматриваем здесь саму люстру, поскольку на нее действуют лишь две силы: сила тяжести, направленная вниз, и равная ей и противоположно направленная сила со стороны шнура, причем каждая из них имеет величину $mg =$ = 1960 Н.) Поскольку теперь мы, по существу, имеем дело с точкой, моменты сил отсутствуют. Неизвестных величин две, и их можно найти из уравнения $\sum \mathbf{F} = 0$. Разложим $\mathbf{F}_1$ на горизонтальную ($x$) и вертикальную ($y$) составляющие. Хотя величина силы $\mathbf{F}_1$ неизвестна, можно написать ее проекции: $F_{1x} = F_1 \cos 60°$, $F_{1y} = F_1 \sin 60°$. Сила $\mathbf{F}_2$ не имеет вертикальной составляющей, и потому $F_{2y} = 0$, $F_{2x} = F_2$. В вертикальном направлении действуют вес люстры (200 кг)($g$) вниз и вертикальная составляющая силы $\mathbf{F}_1$ вверх. Поскольку $\sum F_y = 0$, мы имеем

$$\sum F_y = F_1 \sin 60° - (200 \text{ кг})(g) = 0,$$

откуда находим

$$F_1 = \frac{(200 \text{ кг})(g)}{\sin 60°} = (230 \text{ кг})(g) = 2260 \text{ Н}.$$

В горизонтальном направлении

$$\sum F_x = F_2 - F_1 \cos 60° = 0.$$

Таким образом,

$$F_2 = F_1 \cos 60° = (230 \text{ кг})(g)(0{,}500) = = (115 \text{ кг})g = 1130 \text{ Н}.$$

Величины $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ определяют прочность,

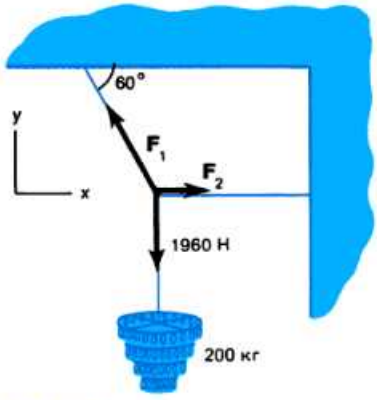



Рис. 11.4. Пример 11.1.

которой должен обладать шнур или провод. В данном случае шнур должен выдерживать вес, обусловленный массой не менее 230 кг. Обратите внимание, что при решении мы не подставляли численное значение ускорения свободного падения до самого конца и записали силу через массу с соответствующим числом килограммов (которые, возможно, более привычны, чем ньютоны).

**Пример 11.2.** На однородной балке массой 1200 кг установлен механизм массой 15 000 кг (рис. 11.5). Вычислим силу, действующую на каждую из вертикальных опор.

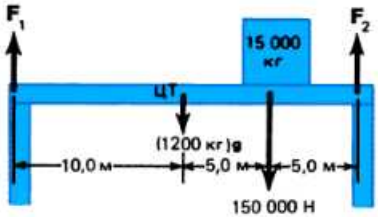



Рис. 11.5. Балка массой 1200 кг удерживает механизм массой 15 000 кг (пример 11.2).

**Решение.** Рассмотрим силы, действующие на концы балки, так как они равны по величине (и противоположны по направлению) силам, с которыми концы балки действуют на опоры. Обозначим эти силы через $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 11.5). Сила тяжести балки приложена к ее центру тяжести, т. е. посередине балки (на расстоянии 10 м от каждого из концов). Поскольку условие равновесия для моментов сил можно записывать относительно любой точки, мы можем выбрать любую точку, которая нам удобна. Если вычислять моменты сил относительно точки приложения силы $\mathbf{F}_1$, то момент этой силы равен нулю (поскольку равно нулю ее плечо), и у нас останется лишь одна неизвестная величина $F_2$. Таким образом, записывая условие $\sum \tau = 0$, получаем

$$-(10\text{ м})(1200\text{ кг})(g) - (15\text{ м}) \times \\ \times (15\,000\text{ кг})(g) + (20\text{ м})F_2 = 0.$$

Отсюда находим $F_2 = (12\,000\text{ кг})(g) = 118\,000$ Н. Силу $F_1$ найдем из условия равновесия сил: $\sum F_y = 0$:

$$\sum F_y = F_1 - (1200\text{ кг})(g) - (15\,000\text{ кг})(g) + \\ + F_2 = 0.$$

Подставляя сюда $F_2 = (12\,000\text{ кг})(g)$, получаем $F_1 = (4200\text{ кг})(g) = 41\,200$ Н.

**Пример 11.3.** Однородная балка длиной 2,20 м и массой $m = 25{,}0$ кг прикреплена с помощью шарнира к стене, как показано на рис. 11.6. Балка удерживается в горизонтальном положении тросом, составляющим с ней угол $\theta = 30°$. К концу балки подвешен груз массой $M = 280$ кг. Необходимо найти составляющие силы $\mathbf{F}$, действующей на балку в шарнире, и составляющие силы натяжения $\mathbf{T}$ удерживающего троса.

**Решение.** Сумма сил в вертикальном ($y$) направлении запишется в виде

$$F_y + T_y - mg - Mg = 0, \qquad \text{(I)}$$

а в горизонтальном ($x$) направлении мы имеем

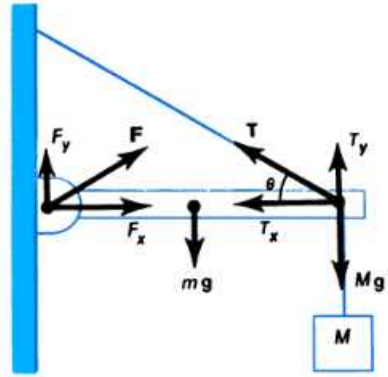



Рис. 11.6. Пример 11.3.

$$F_x - T_x = 0. \qquad \text{(II)}$$

При записи условия равновесия для моментов сил выберем за точку, относительно которой вычисляются моменты сил, ту точку, где приложены силы $\mathbf{T}$ и $M\mathbf{g}$ (при этом в соответствующее уравнение будет входить только одна неизвестная и его легче можно решить):

$$-(F_y)(2{,}20\text{ м}) + (mg)(1{,}10\text{ м}) = 0 \qquad \text{(III)}$$

(здесь мы учли, что центр тяжести одно-

родной балки находится посередине). Известно, что

$$mg = (25{,}0\text{ кг})(9{,}80\text{ м/с}^2) = 245\text{ Н},$$

$$Mg = (280\text{ кг})(9{,}80\text{ м/с}^2) = 2740\text{ Н},$$

но по-прежнему мы имеем лишь три уравнения и четыре неизвестные ($F_x$, $F_y$, $T_x$, $T_y$). Может показаться, что мы могли бы получить четвертое уравнение, приравняв нулю сумму моментов относительно какой-нибудь другой точки, скажем шарнира: $T_y(2{,}20\text{ м}) - (Mg)(2{,}20\text{ м}) - (mg)(1{,}10\text{ м}) = 0$. Однако это уравнение не является независимым – в действительности это лишь линейная комбинация уже имеющихся трех уравнений. В случае когда силы лежат в одной плоскости, можно записать только три независимых уравнения ($\sum \boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{F} = 0$). Нам известно еще одно обстоятельство: если бы у силы $\mathbf{T}$ имелась составляющая, перпендикулярная тросу, то трос прогнулся бы. Таким образом, сила $\mathbf{T}$ должна действовать только вдоль троса (в примере 11.1 мы уже воспользовались аналогичным соображением, не упомянув об этом), что дает нам четвертое уравнение:

$$T_y = T_x \operatorname{tg}\theta = 0{,}577\,T_x \qquad \text{(IV)}$$

(здесь мы учли, что $\theta = 30°$ и $\operatorname{tg} 30{,}0° = 0{,}577$). Из уравнения (III) находим

$$F_y = mg/2 = 122\text{ Н},$$

а из (I), (II) и (IV) имеем

$$T_y = (m + M)g - F_y = 2870\text{ Н},$$

$$T_x = T_y/0{,}577 = 4970\text{ Н},$$

$$F_x = T_x = 4970\text{ Н}.$$

Следовательно, натяжение троса равно $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 5730$ Н.

Рассмотрим теперь пример, который иллюстрирует силы, действующие в костях, мышцах и суставах человека.

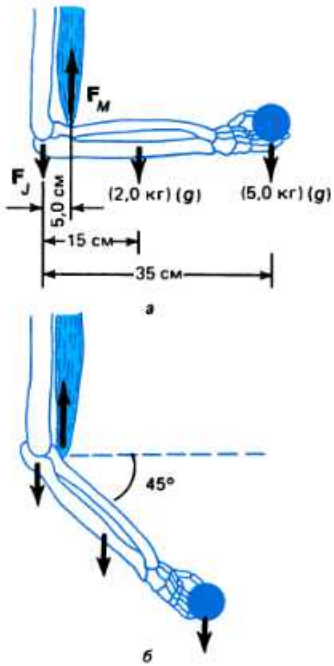



Рис. 11.7. Пример 11.4.

**Пример 11.4.** Какую силу должен развивать бицепс (двуглавая мышца плеча), чтобы человек удерживал в ладони груз массой 5,0 кг а) в руке, согнутой в локте под прямым углом (рис. 11.7, *а*); б) в руке, согнутой под углом 45° (рис. 11.7, *б*)? Будем считать общую массу кисти и предплечья равной 2,0 кг; положение центра тяжести показано на рисунке.

**Решение.** а) Силы, действующие на предплечье, показаны на рис. 11.7, *а*, и они включают в себя силу $\mathbf{F}_\text{м}$ со стороны бицепса и силу $\mathbf{F}_\text{Ј}$ со стороны плечевой кости в локтевом суставе. Нам нужно найти $F_\text{м}$; проще всего сделать это, используя условие равновесия для моментов сил, вычисляемых относительно локтевого сустава, чтобы исключить из рассмотрения силу $F_\text{Ј}$:

$$(0{,}050\text{ м})(F_\text{м}) - (0{,}15\text{ м})(2{,}0\text{ кг})(g) - (0{,}35\text{ м})(5{,}0\text{ кг})(g) = 0.$$

Отсюда находим $F_\text{м} = (41\text{ кг})(g) = 400$ Н.

б) В этом случае плечо силы $F_\text{м}$ уменьшилось до $(0{,}050\text{ м})\sin 45° = 0{,}035$ м. Но в таком же отношении уменьшились и плечи сил, направленных вниз, так что окончательный результат остается прежним: $F_\text{м} = 400$ Н. Заметим, что в каждом случае сила, создаваемая бицепсом, много

больше веса поднимаемого предмета. Вообще силы в мышцах и суставах человека довольно велики. Позиция, в которой мышца крепится к кости, у разных людей немного различна. Но даже небольшое увеличение плеча силы (скажем, с 5,0 до 5,5 см) может заметно сказаться на способности человека поднимать тяжести или, допустим, метать копье. Замечено, что у выдающихся спортсменов мышцы нередко крепятся к кости дальше от сустава, чем у обычных людей.

## 11.4. Упругость и модули упругости; напряжение и деформация

В начале этой главы мы узнали, как рассчитываются силы, действующие на тело в равновесии. В данном разделе изучим результаты действия этих сил, поскольку любое тело под действием приложенных к нему сил меняет свою форму. Если же силы достаточно велики, то тело может поломаться или *разрушиться*; вопрос о разрушении мы рассмотрим в разд. 11.5.

Если на тело, например на вертикально подвешенный металлический стержень на рис. 11.8, действует сила, то его длина изменяется. Опыт показывает, что если изменение длины $\Delta L$ мало по сравнению с длиной тела, то это изменение пропорционально приложенной силе (в данном случае весу подвешенного тела). На это впервые обратил внимание Роберт Гук (1635–1703). Такую пропорциональность можно записать в виде соотношения, которое иногда называют законом Гука:

$$F = k\Delta L. \tag{11.3}$$

Здесь $F$ – сила, растягивающая тело (в частности, вес другого тела), $\Delta L$ – приращение длины, а $k$ – коэффициент пропорциональности. Соотношение (11.3) справедливо почти для любого твердого тела, будь то железный стержень или кость, но лишь до определенного предела. Если сила слишком велика, то тело получит столь сильное растяжение, что в конечном счете разорвется. На рис. 11.9 приведен типичный график зависимости удлинения от величины приложенной силы. Вплоть до точки, назы-

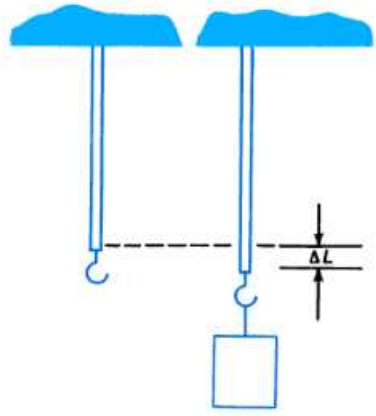



Рис. 11.8. Закон Гука: удлинение $\Delta L$ пропорционально приложенной силе.




Рис. 11.9. Связь между силой и удлинением для твердого тела.

ваемой *пределом упругости*, длина тела после прекращения действия силы снова возвратится к первоначальной. Эта область называется *областью упругости* (или упругих деформаций). За пределом упругости деформация становится полностью или частично необратимой[1]. Для большинства материалов линейность сохраняется почти до предела упругости, и график в этой области идет по прямой. За пределом упругости график отклоняется от прямой и $\Delta L$ уже не связано с $F$ простым соотношением (11.3). Если тело продолжать растягивать далеко за пределом упругости, то оно разорвется. Максимальная сила, которую можно приложить к телу, не разрушив его, называется *пределом прочности* материала, из которого изготовлено тело.

Удлинение тела, такого, как стержень на рис. 11.8, зависит не только от приложенной силы, но и от материала, из которого оно изготовлено, а также от его геометрических размеров. Эти факторы можно учесть в формуле (11.3), если включить их в постоянную $k$. Сравнивая стержни, изготовленные из одного и того же материала, но имеющие различные длины и поперечные сечения, обнаружим, что при одной и той же приложенной силе удлинение (которое по-прежнему предполагается малым по сравнению с длиной стержня) пропорционально первоначальной длине и обратно пропорционально площади поперечного сечения стержня. Иными словами, чем длиннее тело, тем больше оно удлинится при данной величине силы, а чем толще тело, тем меньше его удлинение. Эти экспериментальные факты с учетом соотношения (11.3) можно выразить следующим образом:

$$\Delta L = \frac{1}{E}\frac{F}{A}L_0, \tag{11.4}$$

где $L_0$ – первоначальная длина тела, $A$ – площадь поперечного сечения, а $\Delta L$ – изменение длины тела под действием приложенной силы $F$. Коэффициент пропор-

[1] Здесь мы вступаем в область *пластических деформаций*.– *Прим. ред.*

*Таблица 11.1.* Модули упругости ($10^9$ Н/м$^2$)

| Материал | Модуль Юнга $E$ | Модуль сдвига $G$ | Модуль объемной упругости $B$ |
|---|---|---|---|
| *Твердые тела* | | | |
| Чугун | 100 | 40 | 90 |
| Сталь | 200 | 80 | 140 |
| Бронза | 100 | 35 | 80 |
| Алюминий | 70 | 25 | 70 |
| Бетон | 20 | | |
| Кирпич | 14 | | |
| Мрамор | 50 | | 70 |
| Гранит | 45 | | 45 |
| Дерево (сосна) | | | |
| вдоль волокон | 10 | | |
| поперек волокон | 1 | | |
| Найлон | 5 | | |
| Кость (конечности) | 15 | 80 | |
| *Жидкости* | | | |
| Вода | | | 2,0 |
| Спирт (этиловый) | | | 1,0 |
| Ртуть | | | 2,5 |

циональности[1] $E$ известен как *модуль продольной упругости*, или *модуль Юнга*. Его значение зависит только от материала, из которого изготовлено тело. В табл. 11.1 приведены значения модуля Юнга для некоторых материалов. Поскольку $E$ зависит только от материала и не зависит от формы и размеров тела, для практических расчетов более полезно применять формулу (11.4), чем (11.3). Из (11.4) видно, что изменение длины тела прямо пропорционально длине тела $L_0$ и отношению силы к площади поперечного сечения $F/A$. Отношение $F/A$ называют *механическим напряжением* (или просто *напряжением*):

$$\text{Напряжение} = \frac{\text{Сила}}{\text{Площадь}} = \frac{F}{A}.$$

Отношение изменения длины к первоначальной длине называется *относительным удлинением*:

$$\text{Относительное удлинение} = \frac{\text{Изменение длины}}{\text{Первоначальная длина}} = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Таким образом, относительное удлинение характеризует степень изменения длины и является мерой деформации рассматриваемого нами стержня. Выражение (11.4) можно

[1] Исторически сложилось так, что $E$ входит в знаменатель; подлинным коэффициентом пропорциональности является величина $1/E$.

переписать в виде

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L_0}, \tag{11.5}$$

или

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{\text{Напряжение}}{\text{Относительное удлинение}}.$$

Мы видим, что относительное удлинение прямо пропорционально напряжению.

**Пример 11.5.** Рояльная проволока имеет диаметр 0,20 см и длину 1,60 м. Какое натяжение испытывает проволока, когда при закреплении в инструменте ее удлиняют на 0,30 см?

**Решение.** Запишем выражение для $F$ из (11.4) и заметим, что площадь поперечного сечения проволоки $A = \pi r^2 = (3{,}14) \times (0{,}0010\ \text{м})^2 = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2$. Таким образом, мы имеем

$$F = E\frac{\Delta L}{L_0}A = (2{,}0 \cdot 10^{11}\ \text{Н/м}^2)\left(\frac{0{,}0030\ \text{м}}{1{,}60\ \text{м}}\right) \times (3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2) = 1200\ \text{Н}$$

(значение $E$ мы взяли из табл. 11. 1).

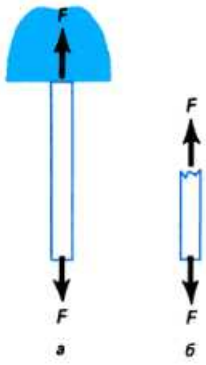



Рис. 11.10. Напряжение существует *внутри* твердого тела.



Рис. 11.11. Греческий храм (Пест, Италия).

Стержень на рис. 11.8 испытывает *растягивающее напряжение*. Действительно, на стержень действует не только сила, приложенная к его нижнему концу и действующая вниз, но, поскольку стержень находится в равновесии, еще и равная по величине и направленная вверх сила со стороны подвеса (рис. 11.10, *а*)[1]. Растягивающее напряжение существует во всем объеме материала стержня. Рассмотрим, например, нижнюю половину стержня, подвешенного так, как показано на рис. 11.10, *б*. Эта нижняя половина находится в равновесии, поэтому на нее должна действовать направленная вверх сила, уравновешивающая силу, приложенную к нижнему концу стержня. Что создает эту силу? Она может действовать только со стороны верхней половины стержня. Мы видим, таким образом, что приложенные к телу внешние силы создают внутри него внутренние силы (точнее, внутренние напряжения).

Относительное удлинение, вызванное растягивающим напряжением,– это лишь один из видов деформации, которой могут подвергаться материалы. Имеются еще два наиболее распространенных типа напряжений – *напряжение сжатия* и *напряжение сдвига*. *Напряжение сжатия* прямо противоположно растягивающему напряжению. Материал при этом не растягивается, а сжимается: силы, приложенные к телу, действуют внутрь тела. Напряжение сжатия испытывают любые поддерживающие какую-либо конструкцию колонны, например колонны греческого храма (рис. 11.11). Формулы (11.4) и (11.5) одинаково применимы как к растяжению, так и к сжатию, причем в обоих случаях значения $E$, как правило, одни и те же.

[1] Мы пренебрегаем здесь весом стержня.

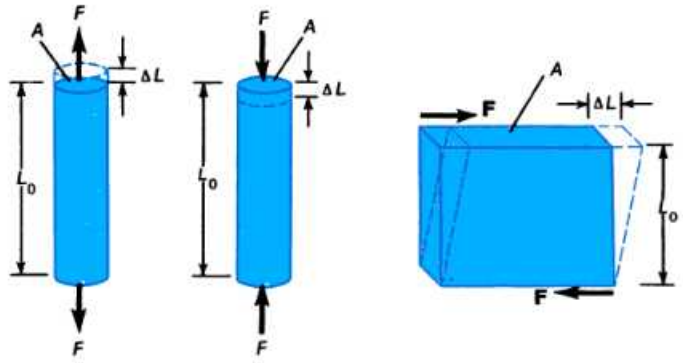



Рис. 11.12. Три типа напряжений. *а* – растяжение; *б* сжатие; *в* – сдвиг.

На рис. 11.12 иллюстрируются напряжение растяжения и напряжение сжатия, а также третий тип напряжения – напряжение сдвига. *Напряжение сдвига* тело испытывает в случае, когда две равные по величине и противоположные по направлению силы приложены *навстречу* друг другу к двум противоположным сторонам тела. Примером могут служить книга или кирпич на поверхности стола, когда их пытаются припечатать к столу, прикладывая к верхней грани параллельную этой грани силу. При этом на нижнюю грань будет действовать равная по величине и противоположно направленная сила со стороны стола. Хотя размеры тела заметно не изменяются, оно деформируется, как показано на рис. 11.12, *в*. Для расчета деформации сдвига пользуются формулой, аналогичной (11.4):

$$\Delta L = \frac{1}{G}\frac{F}{A}L_0, \qquad (11.6)$$

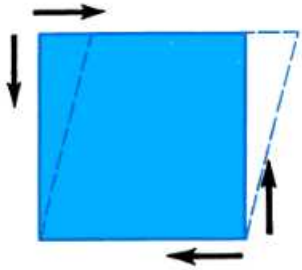


Рис. 11.13. Равновесие сил и моментов сил при напряжении сдвига.

но теперь величины $\Delta L$, $L_0$ и $A$ имеют несколько иной смысл (рис. 11.12, *в*). Обратите внимание, что $A$ – площадь поверхности, *параллельной* приложенной силе (а не перпендикулярной, как в случае растяжения и сжатия), в то время как величина $\Delta L$ *перпендикулярна* $L_0$. Коэффициент пропорциональности $G$ называется *модулем сдвига* и составляет обычно от $^1/_2$ до $^1/_3$ значения модуля упругости $E$ (табл. 11.1).

На рис. 11.12, *в* тело прямоугольной формы, испытывающее напряжение сдвига, не находится, вообще говоря, в равновесии, поскольку в этом случае имеется результирующий момент сил. Если же тело фактически находится в равновесии, то должны существовать еще две силы, действие которых компенсирует результирующий момент силы. Как показано на рис. 11.13, одна из них действует вертикально вверх (справа), а другая – вниз (слева). Такая картина является обычной при напряжении сдвига. В нашем примере с кирпичом или книгой, лежащими на столе, эти две дополнительные силы создаются

столом и тем телом, которое действует на верхнюю грань предмета на столе.

Если тело подвергается сжатию со всех сторон, то его объем уменьшается. Такое сжатие испытывают, например, тела в жидкости: жидкость, как мы покажем в гл. 12, оказывает давление со всех сторон на погруженное в нее тело. Давление определяется как сила, действующая на единицу площади поверхности и, таким образом, эквивалентная напряжению. Установлено на опыте, что изменение объема $\Delta V$ пропорционально изменению давления $\Delta P$ и первоначальному объему $V_0$. Математически это описывается соотношением, аналогичным (11.4), но теперь коэффициент пропорциональности называется *модулем объемной упругости* (иногда модулем всестороннего сжатия) $B$:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{B}\Delta P,$$

или

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0}. \qquad (11.7а)$$

Знак минус здесь означает, что объем *уменьшается* с увеличением давления. Модуль объемной упругости иногда определяют в более общем виде через производную давления по объему:

$$B = -V\frac{dP}{dV}. \qquad (11.7б)$$

Значения модуля объемной упругости также приведены в табл. 11.1. Поскольку жидкости и газы не имеют определенной формы, для них применимо только понятие модуля объемной упругости.

## 11.5. Разрушение тел

Если механическое напряжение, приложенное к телу, слишком велико, то тело сломается или разрушится (рис. 11.14). В табл. 11.2 приведены значения пределов прочности на растяжение, сжатие и сдвиг для различных материалов. Указанные в таблице значения соответствуют максимальному напряжению соответствующего типа, которое тело может выдержать не разрушаясь. Однако эти значения следует рассматривать лишь как ориентировочные: истинное значение для данного образца может существенно отличаться от табличного. Поэтому в расчеты необходимо закладывать трехкратный, а возможно, и десятикратный запас прочности, т. е. реальные напряжения в конструкции должны быть в 3–10 раз меньше указанных в таблице. Иногда можно встретить теблицы «допустимых напряжений», в которых приводятся значения напряжений с учетом необходимого запаса прочности.

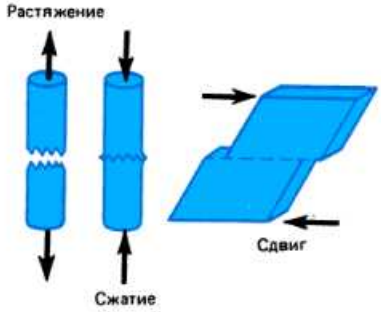



Рис. 11.14. Разрушение тела при трех типах напряжения.

*Таблица 11.2.* Пределы прочности (предельные напряжения) некоторых материалов ($10^6$ Н/м$^2$)

| Материал | Растяжение | Сжатие | Сдвиг |
|---|---|---|---|
| Чугун | 170 | 550 | 170 |
| Сталь | 500 | 500 | 250 |
| Бронза | 250 | 250 | 200 |
| Алюминий | 200 | 200 | 200 |
| Бетон | 2 | 20 | 2 |
| Кирпич | | 35 | |
| Мрамор | | 80 | |
| Гранит | | 170 | |
| Дерево (сосна) | | | |
| вдоль волокон | 40 | 35 | 5 |
| поперек волокон | | 10 | |
| Найлон | 500 | | |
| Кость (конечности) | 130 | 170 | |

**Пример 11.6.** а) Какое минимальное поперечное сечение должны иметь опоры, удерживающие балку в примере 11.2 (рис. 11.5), если они изготовлены из бетона, а запас прочности принят равным 6? б) Насколько сожмутся опоры под указанной в примере 11.2 нагрузкой?

**Решение.** а) На правую опору действует бóльшая сила, равная $1{,}2 \cdot 10^5$ Н. Очевидно, что опора испытывает напряжение сжатия. Из табл. 11.2 находим, что предел прочности бетона на сжатие составляет $2{,}0 \cdot 10^7$ Н/м$^2$. При шестикратном запасе прочности максимальное допустимое напряжение равно $3{,}3 \cdot 10^6$ Н/м$^2$. Таким образом, поскольку $F/A = 3{,}3 \cdot 10^6$ Н/м$^2$ и $F = 1{,}2 \cdot 10^5$ Н, мы находим

$$A = \frac{1{,}2 \cdot 10^5 \text{ Н}}{3{,}3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 3{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 360 \text{ см}^2.$$

Можно использовать опоры сечением $18 \times 20$ см$^2$.

б) Из (11.5) имеем

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{A} = \left(\frac{1}{2{,}0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2}\right)(3{,}3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2) = 1{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, если высота опоры $L_0 = 5{,}0$ м, то $\Delta L = 0{,}85 \cdot 10^{-3}$ м $\approx 1$ мм. Мы провели этот расчет для правой опоры, где нагрузка больше. Если левая опора имеет такое же поперечное сечение, то она сожмется меньше, и это необходимо учитывать.

Как видно из табл. 11.2, бетон (подобно камню и кирпичу) имеет большую прочность на сжатие, но чрезвычайно непрочен

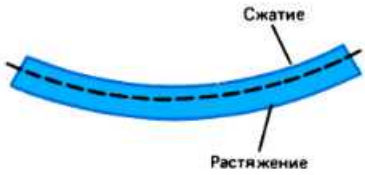



Рис. 11.15. Балка хотя бы немного прогибается даже под действием собственного веса (на рисунке прогиб показан в увеличенном масштабе). Форма балки, таким образом, изменяется, причем в верхней части она сжимается, а в нижней растягивается; внутри балки существует также напряжение сдвига.

на растяжение. Поэтому бетон можно использовать для изготовления вертикальных колонн, испытывающих сжатие, но из него нельзя делать балки, в которых возникают растягивающие напряжения (рис. 11.15). Железобетон, внутри которого содержатся стальные стержни, значительно прочнее и более устойчив, однако с нижней стороны нагруженной балки бетон из-за малой прочности на растяжение все равно растрескивается. Создание предварительно напряженного железобетона позволило разрешить эту проблему; в этот бетон также закладываются стальные стержни или сетка из проволоки, которые во время заливки бетоном держат в напряженном состоянии. После того как бетон затвердеет, напряжение со стержней снимается, и они сами начинают сжимать бетон, в который были заложены. Величина создаваемого арматурой напряжения сжатия заранее тщательно рассчитывается таким образом, чтобы при действии на балку нагрузки сжатие с нижней стороны балки значительно ослаблялось, а бетон никогда не подвергался растягивающим напряжениям.

## Заключение

Тело (или система тел) находится в *равновесии*, если сумма сил и моментов сил, приложенных к телу (системе тел), равна нулю. Раздел физики, который изучает силы, действующие на тело извне (или внутри его), когда тело находится в состоянии равновесия и покоится, называется *статикой*.

Сила тяжести, действующая на все частицы тела, влияет на поступательное и вращательное движение точно так же, как одна сила, приложенная в *центре тяжести* (ЦТ) тела (в предположении, что вектор $\mathbf{g}$ является постоянным). Величина этой силы равна произведению полной массы тела на ускорение свободного падения, т. е. величине $M\mathbf{g}$. Если значения ускорения свободного падения одинаковы во всех точках тела, то центр тяжести совпадает с центром масс.

Чтобы тело находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма всех сил и всех моментов сил, действующих на тело, была равна нулю:

$$\sum \mathbf{F} = 0, \quad \sum \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Эти два векторных уравнения эквивалентны шести скалярным уравнениям для проекций полных сил и моментов (по осям соответственно $x$, $y$ и $z$). Если все силы действуют в одной плоскости (скажем, в плоскости $xy$), то система уравнений сводится лишь к трем уравнениям:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0.$$

Все материалы в той или иной степени обладают упругостью: Материалы могут подвергаться *растягивающему напряжению*, *напряжению сжатия* или *напряжению сдвига*. *Напряжение* каждого типа определяется как сила, действующая на единицу площади, а вызываемое им *относительное удлинение* – как отношение изменения дли-

ны к первоначальной длине тела. До тех пор пока не превышен *предел упругости*, относительное удлинение пропорционально напряжению. Когда напряжение превышает предел прочности вещества, тело разрушается.

## Вопросы

1. Что имеют в виду, когда говорят о центре тяжести Луны?
2. Предположим, что ЦМ и ЦТ тела не совпадают. Как в этом случае будет двигаться тело, брошенное вертикально вверх без начального вращения? Объясните ответ и сравните со случаем, когда ЦТ и ЦМ совпадают.
3. Приведите несколько примеров, когда тело не находится в равновесии, хотя действующая на него результирующая сила равна нулю.
4. В некоторых заповедниках для того, чтобы уберечь запасы провизии от медведей, делают приспособления типа изображенного на рис. 11.16. Объясните, почему, чем выше поднимаешь тело (в данном случае рюкзак), тем большую силу приходится прикладывать.

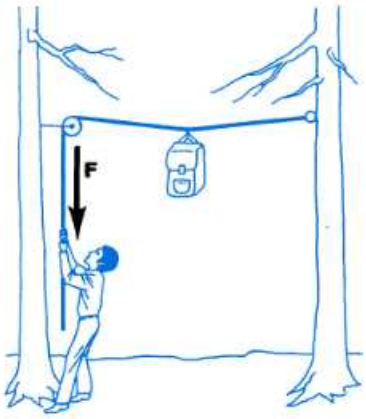



Рис. 11.16.

5. Лестница, приставленная к стене, составляет угол 60° с поверхностью земли. Когда больше опасность, что лестница соскользнет, — когда человек стоит на верхней или на нижней ступеньке?
6. Если сумма моментов сил относительно некоторой точки O равна нулю, то обязательно ли она равна нулю относительно другой точки O'?
7. Объясните, почему нижняя часть позвоночника испытывает меньшую нагрузку, когда вы достаете руками носки ног сидя на полу и вытянув ноги, чем когда вы делаете это стоя? Используйте рисунок.
8. На рис. 11.17, *а* изображена подпорная стенка. Грунт, в особенности влажный, может действовать на стенку со значительной силой **F**. а) Какая сила создает момент, предотвращающий опрокидывание стенки? б) Почему конструкция подпорной стенки на рис. 11.17, *б* значительно более устойчива к опрокидыванию?

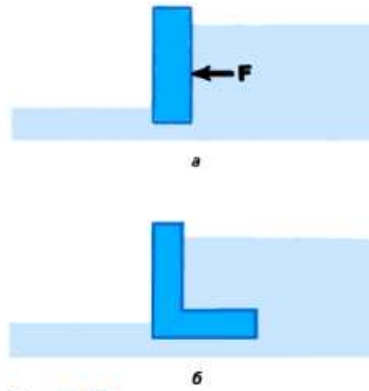



Рис. 11.17.

9. Объясните, как действуют ножницы, когда ими разрезают картон.
10. Такие материалы, как обычный бетон и камень, плохо выдерживают растяжение и сдвиг. Разумно ли использовать подобный материал для любой из опор консоли на рис. 11.18? Если ответ утвердительный для одной опоры, то для какой именно?

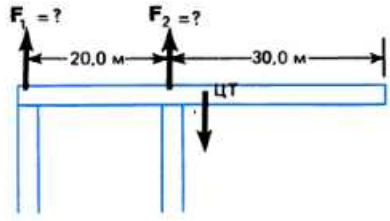



Рис. 11.18. Консоль (балка, выходящая за пределы опоры).

## Задачи

Раздел 11.3

1. (I) Каким должно быть натяжение проволоки в корригирующем зубном протезе на

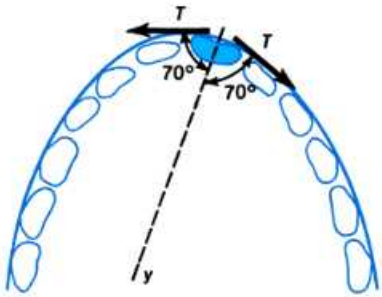



Рис. 11.19.

рис. 11.19, чтобы на выделенный зуб действовала в указанном направлении результирующая сила 0,60 Н?

2. (I) Горизонтальная балка массой 150 кг лежит обоими концами на опорах. На балке на расстоянии в четверть ее длины от одного из концов установлено пианино массой 200 кг. Какова вертикальная сила, действующая на опоры?

3. (I) Люстра подвешена на двух шнурах, как и на рис. 11.4, с той лишь разницей, что верхний шнур теперь составляет угол 45° с потолком. Какой может быть предельная масса люстры, если шнуры способны выдержать натяжение 1000 Н?

4. (I) а) Вычислите силу $\mathbf{F}_M$, которую должна создавать дельтовидная мышца, чтобы удерживать вытянутую руку в горизонтальном положении (рис. 11.20). Масса всей руки равна

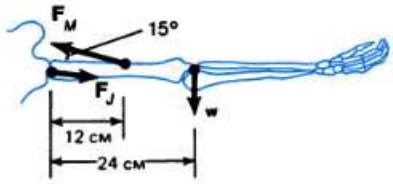



Рис. 11.20.

2,8 кг. б) Чему равна $\mathbf{F}_M$, когда в руке держат гантель массой 10 кг (на расстоянии 50 см от плечевого сустава)?

5. (II) Вычислите в задаче 4 для случаев «а» и «б» величину и направление силы $\mathbf{F}_J$, действующей на плечевую кость в суставе со стороны лопатки.

6. (II) Шар массой 9,1 кг подвешен к потолку на шнуре *A*. Шнур *B* тянет шар вниз и вбок. Найдите натяжения шнуров *A* и *B*, если шнур *A* составляет с вертикалью угол 20°, а шнур *B* – угол 50°.

7. (II) Дверь высотой 2,35 м и шириной 1,10 м имеет массу 13,0 кг. Вес двери поровну распределен между двумя петлями, расположенными на расстоянии 0,35 м от нижней и верхней сторон двери. Считая, что центр тяжести находится в геометрическом центре двери, вычислите вертикальные и горизонтальные составляющие сил, действующих со стороны петли на дверь.

8. (II) Вычислите силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ для консольной балки из однородного материала массой 11 000 кг, показанной на рис. 11.18. (Определите величину и направление обеих сил.)

9. (II) Рассчитайте силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действующие со стороны опор на трамплин для прыжков в воду (рис. 11.21), если на его конце стоит человек массой 60 кг. Решите задачу для случаев, когда а) масса трамплина не учитывается и б) масса трамплина равна 35 кг, а его ЦТ расположен в геометрическом центре трамплина.

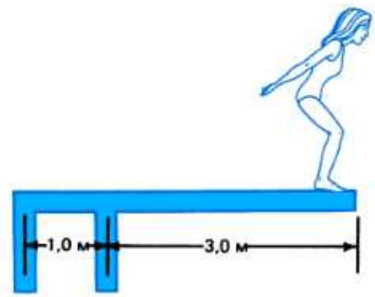



Рис. 11.21.

10. (II) Туго натянутая над землей проволока имеет длину 50 м и провисает на 3,8 м, когда канатоходец массой 60 кг стоит на ее середине. а) Чему равно натяжение проволоки? б) Возможно ли натянуть проволоку столь сильно, чтобы она совсем не провисала?

11. (II) Дверь сарая приперта тяжелой доской массой 80 кг, которая составляет с дверью угол 45° и упирается в край двери на расстоянии 2,6 м от оси дверных петель. Какую силу должен приложить к краю двери в горизонтальном направлении человек, стоящий внутри, чтобы открыть дверь? Считайте, что трение между доской и дверью пренебрежимо мало; конец доски, стоящий на земле, закреплен, так что проскальзывание отсутствует.

12. (II) Решите предыдущую задачу, считая коэффициент трения между доской и дверью равным 0,45.

13. (II) Человек ростом 160 см лежит на легкой доске с пренебрежимо малой массой, установленной на двух весах таким образом, что одни

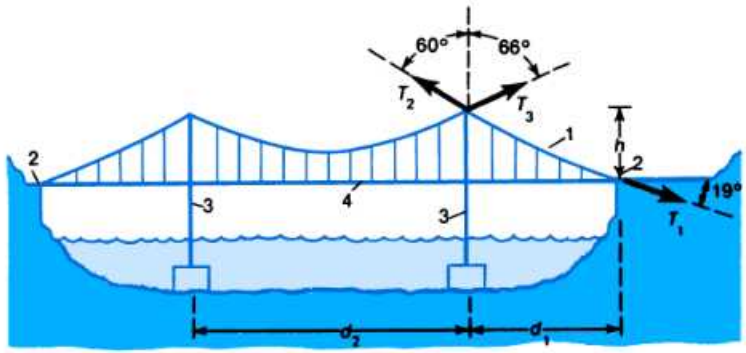



Рис. 11.22.

весы находятся под макушкой, а другие – под ступнями ног лежащего. Показания весов равны соответственно 32,8 и 29,8 кг. Где находится центр тяжести лежащего человека?

**14.** (II) Расстояние между деревьями на рис. 11.16 равно 12,5 м. Вычислите величину силы **F**, которую должен приложить человек для того, чтобы удержать сумку с провизией массой 15,0 кг на веревке, а веревка при этом провисла в середине на а) 2,0 м; б) 0,20 м.

**15.** (II). На рис. 11.22 показаны силы, действующие на северном участке висячего моста «Золотые ворота» в Сан-Франциско, который имеет длину $d_1 = 343$ м. Пусть центр тяжести этого участка находится посередине между анкерной опорой 2 и пилоном 3. Определите силы $T_1$ и $T_2$ (действующие на северный участок троса 1) и выразите их через $mg$ (вес северного участка мостового полотна 4); вычислите высоту $h$, при которой система находится в равновесии. Считайте, что мостовое полотно свободно подвешено к тросу 1. (*Подсказка:* сила $T_3$ на рассматриваемый участок не действует.)

**16.** (II) Представьте себе, что однопролетный висячий мост, подобный мосту «Золотые ворота», имеет конфигурацию, показанную на рис. 11.22. Считайте, что мостовое полотно (4) является однородным по всей длине моста и что каждый из трех участков мостового полотна целиком удерживается лишь соответствующим участком находящегося под ним троса. Концы троса закреплены в анкерных опорах (2) и не соединены с мостовым полотном. Чему должно быть равно отношение $d_1/d_2$, чтобы со стороны троса на пилоны (3) не действовала горизонтальная составляющая силы? Пренебрегите массой троса и отклонением мостового полотна от строго горизонтального.

**17.** (II) Лестница длиной 9,5 м и массой 16,0 кг прислонена к гладкой вертикальной стене (так что сила $\mathbf{F}_w$ со стороны стены перпендикулярна стене), а другим концом упирается в землю. Лестница составляет угол 20° со стеной; проскальзывание по поверхности земли отсутствует. а) Вычислите составляющие силы, действующей со стороны поверхности земли на основание лестницы. б) Каким должен быть коэффициент трения между основанием лестницы и поверхностью земли, чтобы лестница не соскользнула, когда на лестнице на уровне 3/4 ее высоты стоит человек массой 75 кг?

**18.** (II) До какой высоты может подняться человек по лестнице в предыдущей задаче, прежде чем она начнет проскальзывать по поверхности земли, если коэффициент трения между лестницей и землей равен 0,40?

**19.** (II) На рис. 11.23,*а* показана круглая арка, а на рис. 11.23,*б* – стрельчатая (готическая) арка. Обе имеют одинаковую ширину пролета 8,0 м и поддерживают вышележащую часть стены и крышу здания. Рассматривайте каждую арку составленной как бы из двух «полуарок», соединенных (шарнирно) в верхней точке; нагрузка со стороны верхней стенки на каждую полуарку указана на рисунке отдельной стрелкой, направленной вниз. а) Покажите, что для предотвращения падения арки на нее должна действовать со стороны опоры горизонтальная сила $F_H$. б) Покажите, что при одной и той же нагрузке на арку сверху горизонтальная сила, действующая со стороны опоры на готическую арку, вдвое меньше, чем действующая на круглую. в) Что можно сказать о технических преимуществах готической арки?

**20.** (II) Однородный гибкий стальной трос массой $m$ закреплен на одинаковой высоте на двух опорах и благодаря провисанию составляет в точках подвеса угол $\theta$ с горизонталью. Определите натяжение троса а) в нижней точке провисания; б) в точках крепления к опорам. Как направлена сила натяжения в каждом из этих случаев?

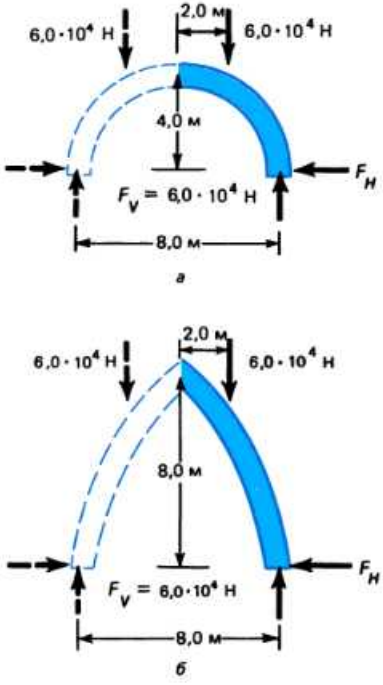



Рис. 11.23.

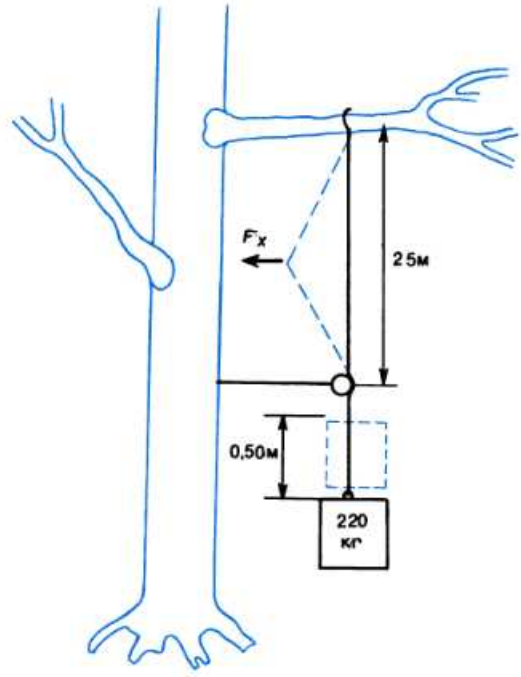



Рис. 11.24.

**21.** (II) Проектируется 50-этажное здание высотой 210 м с площадью основания 40 м × × 70 м. Его полная масса равна примерно $1,60 \cdot 10^7$ кг. Считайте, что центр тяжести здания совпадает с его геометрическим центром. а) Опрокинется ли здание под напором ветра скоростью 200 км/ч, направленного перпендикулярно стене шириной 70 м? (*Подсказка:* считайте здание свободно стоящим на земле; ветер, налетая на стену, полностью тормозится; плотность воздуха 1,29 кг/м$^3$.) б) При какой наименьшей скорости ветра здание опрокинется?

**22.** (II) Автолюбителю необходимо снять со своей машины двигатель массой 220 кг. Его план таков: натянуть веревку вертикально вверх от двигателя к ветке дерева на высоте 25 м (рис. 11.24), причем веревку несколько выше двигателя перекинуть через жестко закрепленный блок таким образом, чтобы, когда автолюбитель заберется на дерево до середины его высоты и начнет тянуть веревку за ее середину в горизонтальном направлении, двигатель поднялся из-под капота автомобиля. Какую силу должен приложить автолюбитель, чтобы поднять двигатель на 0,50 м?

**23.** (II) От вершины стойки высотой 2,4 м, на которой закреплена волейбольная сетка, идут две проволочные оттяжки, прикрепленные к земле на расстоянии 2 м от основания стойки и в 2 м одна от другой. Натяжение каждой проволоки составляет 65 Н. Каково натяжение сетки, если считать, что она натянута горизонтально и закреплена в вершине стойки?

**24.** (II) Круглый стол массой 30 кг имеет три ножки, расположенные по краю стола на одинаковых расстояниях друг от друга. Чему равна минимальная масса тела, которое нужно положить на край стола, чтобы он опрокинулся?

**25.** (II) Человек передвигает по полу торшер массой 9,6 кг. Считайте, что сила со стороны человека приложена на высоте 60 см от пола, а коэффициент трения между основанием торшера и полом равен 0,20. а) Будет ли торшер скользить по полу или он опрокинется (рис. 11.25)? б) На какой максимальной высоте от пола человек должен приложить силу, чтобы торшер скользил по полу не опрокидываясь?

**26.** (III) При ходьбе человек всем своим весом опирается в течение небольшого промежутка времени лишь на одну из своих ног, и центр тяжести тела находится над ступней этой ноги. На рис. 11.26 показаны соответствующие силы, действующие на ногу. Вычислите силу со стороны приводящей мышцы бедра $\mathbf{F}_M$, а также

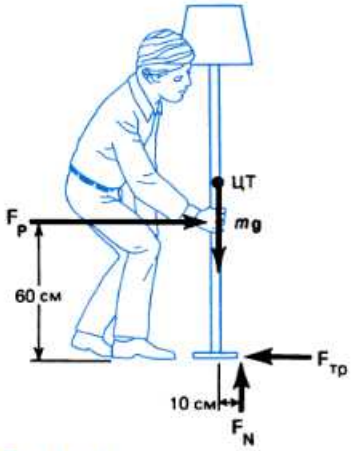



Рис. 11.25.

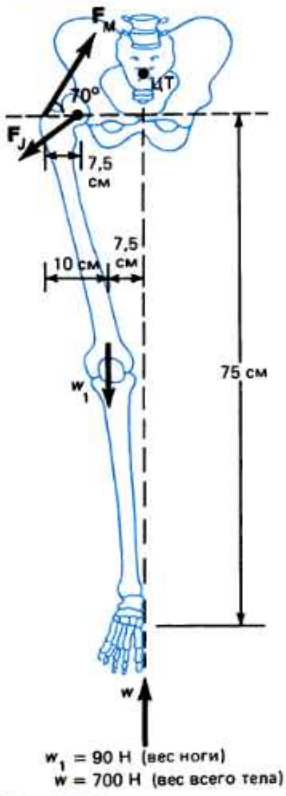



Рис. 11.26.

$x$- и $y$-проекции силы $\mathbf{F}_J$, действующей на головку бедра со стороны отводящей мышцы бедра. Рассматривайте ногу в этой задаче как единое целое.

**27.** (III) а) Пользуясь данными из условия задачи 26, вычислите силы $\mathbf{F}_M$ и $\mathbf{F}_J$ (рис. 11.26) в случае, когда человек несет в каждой руке по чемодану массой 20 кг каждый. Считайте, что ЦТ каждого чемодана расположен точно под нижним концом бедренной кости. б) Рассчитайте $\mathbf{F}_M$ и $\mathbf{F}_J$ для правой ноги человека, несущего один такой же чемодан в левой руке. (*Подсказка:* сначала определите положение ЦТ системы «человек + чемодан»; эта точка будет находиться выше ступни, и соответственно изменятся расстояния по горизонтали, указанные на рис. 11.26. Заметьте, что эти силы оказываются больше, когда человек несет один чемодан, чем когда у него в каждой руке по такому же чемодану!)

**28.** (III) На краю стола укладывают стопкой четыре кирпича таким образом, что каждый следующий выступает над нижними, причем самый верхний кирпич выступает над краем стола на максимально возможное расстояние. а) Покажите, что стопка кирпичей не опрокинется, если каждый кирпич будет нависать над нижележащим не более чем (начиная с верхнего) на 1/2, 1/4, 1/6, 1/8 своей длины. б) Окажется ли верхний кирпич полностью за краем стола? в) Выведите общую формулу для максимального расстояния, на которое стопка из $n$ кирпичей может выходить за край стола, не теряя устойчивости.

## Раздел 11.4

**29.** (I) Мраморная колонна с площадью поперечного сечения 2,0 м$^2$ удерживает тело массой 30 000 кг. а) Чему равно механическое напряжение внутри колонны? б) Каково относительное удлинение колонны? в) На сколько укорачивается колонна, если ее высота под нагрузкой становится равной 10,5 м?

**30.** (II) Какую силу нужно приложить, чтобы вытянуть рояльную проволоку диаметром 0,052 см на 0,015% ее первоначальной длины?

**31.** (II) Какое давление нужно создать, чтобы уменьшить объем железного слитка на 0,11%? Выразите ответ в Н/м$^2$ и сравните полученное значение давления с атмосферным ($1{,}0 \times 10^5$ Н/м$^2$).

**32.** (II) Один литр (1000 см$^3$) этилового спирта в мягком сосуде погружают на дно моря, где давление равно $2{,}8 \cdot 10^6$ Н/м$^2$. Чему здесь равен объем спирта?

**33.** (II) Сухожилие животного длиной 16 см под действием силы 12,4 Н удлиняется на 3,3 мм. Сухожилие можно считать круглым в сечении с диаметром 8,6 мм. Рассчитайте модуль упругости этого сухожилия.

**34.** (II) Моллюск морской гребешок открывает свою раковину с помощью упругого вещества

абдуктина, модуль упругости которого примерно равен $2{,}0 \cdot 10^6$ Н/м$^2$. Какую потенциальную энергию запасает кусочек абдуктина толщиной 3,0 мм и площадью сечения 0,50 см$^2$ при сжатии его на 1,0 мм?

**35.** (III) К фасаду магазина торцом прикреплен горизонтально длинный шест. К шесту на расстоянии 2,1 м от стены подвешена вывеска массой 4,5 кг. а) Какой вращающий момент создает вес вывески относительно точки, где шест крепится к стене? б) Чтобы шест не опрокинулся, на него должен действовать некоторый компенсирующий момент силы. Чем создается этот момент силы? Покажите на рисунке, как должен возникнуть этот момент. в) Какие деформации (сжатие, растяжение, сдвиг) существенны при ответе на вопрос «б»?

Раздел 11.5

**36.** (I) Средняя площадь сечения бедренной кости человека равна 3,0 см$^2$. Какую силу сжатия может выдержать кость не разрушаясь?

**37.** (II) Какую минимальную площадь поперечного сечения должна иметь стальная проволока, на которой вертикально подвешивается люстра массой 280 кг? Считайте, что запас прочности равен 5,0.

**38.** (II) Две стальные пластины соединяются друг с другом стальным болтом. Болт должен выдерживать нагрузки до 2500 Н. Вычислите минимальный диаметр болта, заложив в расчет запас прочности 4,5.

**39.** (II) В примере 8.8 были рассчитаны импульс и средняя сила для ноги человека, прыгающего на землю с высоты 5,0 м. В предположении, что ноги при приземлении не сгибаются и перемещение тела при столкновении с землей составляет только $d = 1{,}0$ см, а) вычислите механическое напряжение в берцовой кости (площадь поперечного сечения $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ м$^2$) и б) определите, сломается кость или нет. в) Ответьте на эти же вопросы, если человек при приземлении сгибает ноги в коленях ($d =$ = 50,0 см).

**40.** (II) Опоры консоли массой 11 000 кг на рис. 11.18 изготовлены из дерева. Рассчитайте минимальное допустимое в этом случае поперечное сечение каждой опоры с запасом прочности 8,5.

**41.** (III) Потолочное перекрытие в классной комнате размером 7,5 м × 10,0 м должно помимо собственной массы 4100 кг выдерживать равномерно распределенную нагрузку массой 10 000 кг (133 кг/м$^2$). Предполагается, что перекрытие поддерживается деревянными стойками, каждая с поперечным сечением 4,0 см × × 9,0 см, установленными вдоль более длинных стен. Сколько стоек и на каком расстоянии друг от друга нужно поставить с каждой стороны? Считайте стойки работающими только на сжатие; запас прочности равен 15.

**42.** (II) Существует максимальная высота однородной вертикальной колонны из любого материала, не зависящая от площади поперечного сечения (почему?), при превышении которой колонна разрушится. Вычислите эту высоту для колонны из а) стали (плотность $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м$^3$) и б) гранита (плотность 2,7 × × $10^3$ кг/м$^3$).

**43.** (II) Стальной трос удерживает кабину лифта, масса которой в нагруженном состоянии не должна превышать 2500 кг. Если максимальное ускорение лифта равно 1,5 м/с$^2$, то каким должен быть диаметр троса при запасе прочности 5,0?

**44.** (III) С какой высоты нужно уронить кирпич размером 15,0 см × 6,0 см × 4,0 см и массой 1,2 кг на жесткий стальной пол, чтобы кирпич разбился? Считайте, что кирпич падает плашмя и что сжатие кирпича при ударе гораздо больше, чем сжатие пола (т. е. сжатием стали можно пренебречь).

# 12 Гидростатика и аэростатика (покоящиеся жидкости и газы)

Нам известны три обычных агрегатных состояния, или *фазы*, вещества: твердое, жидкое и газообразное, которые различаются следующим образом. *Твердое тело* сохраняет постоянными объем и форму; объем и форму твердого тела трудно изменить, даже прикладывая к нему значительную силу. *Жидкости* не противостоят напряжениям сдвига и не сохраняют определенной формы: они принимают форму сосуда, в котором находятся, но, как и твердые тела, жидкости практически не поддаются сжатию, и объем их можно изменить лишь с помощью очень большой силы. *Газы* не обладают ни определенной формой, ни определенным объемом: они полностью заполняют сосуды, в которые их заключают. Например, когда мы накачиваем автомобильную шину, воздух не собирается в нижней части камеры, как это случилось бы с жидкостью, а заполняет весь объем камеры. Не обладая определенной формой, жидкости и газы способны течь. Это общее свойство объединяет их.

Провести строгую грань между фазами не всегда просто. Куда, например, отнести сливочное масло? Кроме того, выделяют также и четвертое состояние, называемое *плазмой*. Плазма существует лишь при очень высоких температурах, когда атомы теряют часть своих электронов и превращаются в ионы. Некоторые ученые считают, что коллоидные растворы (взвесь мельчайших частиц в жидкости) должны быть выделены в отдельное агрегатное состояние. Однако здесь мы рассмотрим три основных агрегатных состояния вещества. В предшествующих главах мы изучали движение твердых тел (в частности, в гл. 11) и некоторые их физические свойства. В настоящей главе обсудим свойства покоящихся жидкостей и газов, а в следующей главе рассмотрим их свойства, когда они находятся в движении.

## 12.1. Плотность вещества

Иногда говорят, что железо «тяжелее» дерева. Это, разумеется, неверно; ведь большое бревно весит куда больше, чем железный гвоздь. Следовало бы сказать, что *плотность* железа больше плотности дерева.

*Таблица 12.1.* Плотности различных веществ *

| Вещество | Плотность ρ, кг/м³ |
|---|---|
| *Твердые тела* | |
| Алюминий | $2{,}70 \cdot 10^3$ |
| Железо и сталь | $7{,}8 \cdot 10^3$ |
| Медь | $8{,}9 \cdot 10^3$ |
| Свинец | $11{,}3 \cdot 10^3$ |
| Золото | $19{,}3 \cdot 10^3$ |
| Бетон | $2{,}3 \cdot 10^3$ |
| Гранит | $2{,}7 \cdot 10^3$ |
| Дерево | $(0{,}3–0{,}9) \cdot 10^3$ |
| Стекло (обычное оконное) | $(2{,}4–2{,}8) \cdot 10^3$ |
| Лед | $0{,}917 \cdot 10^3$ |
| Кость животного | $(1{,}7–2{,}0) \cdot 10^3$ |
| *Жидкости* | |
| Вода (4 °C) | $1{,}00 \cdot 10^3$ |
| Плазма крови | $1{,}03 \cdot 10^3$ |
| Кровь | $1{,}05 \cdot 10^3$ |
| Морская вода | $1{,}025 \cdot 10^3$ |
| Ртуть | $13{,}6 \cdot 10^3$ |
| Спирт (этиловый) | $0{,}79 \cdot 10^3$ |
| Бензин | $0{,}68 \cdot 10^3$ |
| *Газы* | |
| Воздух | 1,29 |
| Гелий | 0,179 |
| Углекислый газ | 1,98 |
| Водяной пар (100 °C) | 0,598 |

* Там, где не отмечено особо, плотности измерены при температуре 0 °C и давлении 1 атм.

**Плотность** ρ вещества определяется как масса единицы его объема:

$$\rho = m/V, \tag{12.1}$$

где $m$ – масса определенного количества вещества, а $V$ – его объем. Плотность является характерным свойством вещества; предметы, сделанные из данного вещества, например из железа, могут иметь различные размеры и массу, но плотность у всех будет одинакова.

В системе СИ плотность измеряется в кг/м³. Иногда ее указывают также в г/см³. Чтобы перевести плотность из г/см³ в единицы СИ, нужно умножить ее значение на 1000, поскольку 1 кг/м³ = (1000 г)/(100 см)³ = $10^{-3}$ г/см³. Таким образом, например, плотность алюминия равна ρ = = 2,70 г/см³ = 2700 кг/м³. Плотности ряда веществ приведены в табл. 12.1 Плотность зависит от температуры и давления (хотя для твердых веществ и жидкостей эта зависимость незначительна), поэтому в табл. 12.1 указаны условия, при которых измерена плотность.

**Пример 12.1.** Чему равна масса свинцового шара радиусом 0,500 м?

**Решение.** Объем шара равен

$$V = (4/3)\pi r^3 = (4/3)(3{,}14)(0{,}500\ \text{м})^3 = 0{,}523\ \text{м}^3.$$

Из табл. 12.1 находим плотность свинца ρ = 11 300 кг/м³ и по формуле (12.1) вычисляем

$$m = \rho V = (11\,300\ \text{кг/м}^3)(0{,}523\ \text{м}^3) = 5910\ \text{кг}.$$

**Относительная плотность** вещества определяется как отношение его плотности к плотности воды при температуре 4,0 °C. Эта величина является безразмерной. Поскольку плотность воды равна 1,00 г/см³ = $1{,}00 \cdot 10^3$ кг/м³, относительная плотность любого вещества численно равна его плотности в г/см³, или в $10^3$ раз меньше плотности, выраженной в кг/м³. Например, относительная плотность свинца равна 11,3, а спирта – 0,79 (табл. 12.1).

## 12.2 Давление в жидкостях и газах

**Давление** – это сила, действующая на единицу площади поверхности в перпендикулярном к поверхности направлении:

$$\text{Давление} = P = F/A, \tag{12.2}$$

где $A$ – площадь поверхности. В системе СИ давление измеряется в Н/м²; эта единица называется паскаль (Па); 1 Па = 1 Н/м². Однако для простоты мы будем исполь-

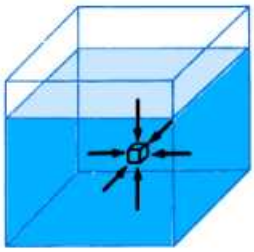


Рис. 12.1. Давление в жидкости (газе) на данной глубине одинаково во всех направлениях; в противном случае жидкость пришла бы в движение.

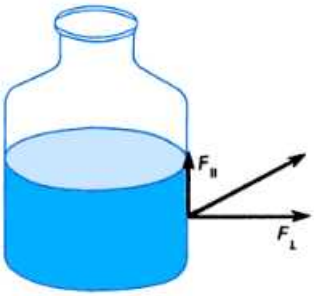



Рис. 12.2. Сила, с которой неподвижная жидкость действует на поверхность твердого тела, перпендикулярна поверхности, т. е. $F_\parallel = 0$.

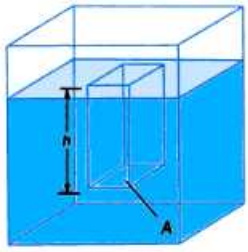



Рис. 12.3. К вычислению давления на глубине $h$ в жидкости.

зовать главным образом Н/м$^2$. Давление иногда измеряют в дин/см$^2$ и кгс/см$^2$ (1 кгс/см$^2$ = 9,8 Н/см$^2$ = 9,8 $\times$ $\times$ 10$^4$ Н/м$^2$). Последнюю единицу нередко можно увидеть на шкалах манометров для определения давления в шинах автомобилей. Вскоре мы встретимся и с другими единицами давления.

В качестве примера вычислим давление, которое оказывает на землю человек массой 60 кг, подошвы которого занимают площадь 500 см$^2$. По формуле (12.2) имеем $F/A = mg/A = (60\text{ кг})(9{,}8\text{ м/с}^2)/(0{,}050\text{ м}^2) = 12 \cdot 10^3$ Н/м$^2$. Если бы человек стоял на одной ноге, то сила осталась бы прежней, а площадь уменьшилась бы вдвое, так что давление станет в два раза больше, т. е. равным 24 $\times$ $\times$ 10$^3$ Н/м$^2$. С понятием давления мы сталкиваемся особенно часто при изучении гидро- и аэродинамики; вот почему оно вводится в этой главе.

Опытным путем установлено, что *жидкости и газы создают давление во всех направлениях*. Этот факт хорошо известен пловцам и ныряльщикам, которые испытывают в воде давление на их тело со всех сторон. В любой точке внутри покоящейся жидкости (или газа) давление одинаково во всех направлениях. Это легко понять из рис. 12.1. Выделим внутри жидкости маленький кубик (кубический элемент), настолько малый, что действием на него силы тяжести можно пренебречь. Давление на одну из граней этого кубика должно быть равно давлению на противоположную грань. Если бы это было не так, то результирующая сила, действующая на кубик, не равнялась бы нулю и кубик двигался бы до тех пор, пока давления с противоположных граней не стали бы одинаковыми. Но жидкость неподвижна, и, следовательно, давления равны друг другу.

Еще одним важным свойством покоящейся жидкости (газа) является то, что сила, вызванная давлением, действует всегда *перпендикулярно* поверхности, с которой эта среда соприкасается. Если бы сила имела составляющую, параллельную поверхности (рис. 12.2), то по третьему закону Ньютона сила реакции поверхности также имела бы параллельную составляющую, под действием которой жидкость начала бы течь, что противоречит исходному предположению о том, что жидкость покоится.

Проведем количественный расчет того, как изменяется с глубиной давление в жидкости постоянной плотности. Рассмотрим точку на глубине $h$ от поверхности (иными словами, поверхность жидкости находится на высоте $h$ от выбранной точки), как показано на рис. 12.3. Давление внутри жидкости на глубине $h$ обусловлено весом столба жидкости над выбранной точкой[1]. Таким образом, сила,

[1] В свою очередь вес (покоящегося) столба жидкости численно равен действующей на него силе тяжести $mg$ ($m$ – масса столба). – *Прим. ред.*

действующая на площадь $A$, равна $F = mg = \rho Ahg$, где $Ah$ – объем столба, $\rho$ – плотность жидкости, а $g$ – ускорение свободного падения. Таким образом, мы имеем

$$P = F/A = \rho Ahg/A,$$

$$P = \rho gh \qquad \text{[жидкость или газ]}. \qquad (12.3)$$

Отсюда мы видим, что давление прямо пропорционально плотности жидкости и глубине погружения. В частности, в однородной жидкости на одной и той же глубине давления одинаковы.

Формула (12.3) определяет давление, существующее в жидкости на глубине $h$ и обусловленное самой жидкостью. Но что призойдет, если на поверхность жидкости действует дополнительное давление, например атмосферное? А что будет, если плотность жидкости или газа не постоянна? Сжимаемость газов велика, и поэтому их плотность может существенно меняться с глубиной; жидкости также сжимаемы, хотя изменением плотности часто можно пренебречь (исключение составляют лишь океанские глубины, где вес вышележащей толщи воды приводит к значительному сжатию и увеличивает существенно плотность воды в нижних слоях). Рассмотрим поэтому более общий случай того, как давление жидкости или газа изменяется с глубиной.

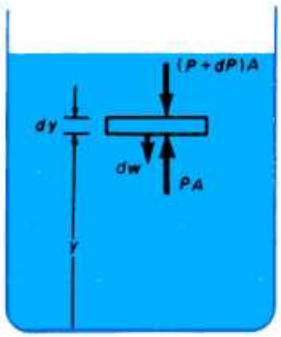



Рис. 12.4. К определению давления $P$ на высоте $y$ в жидкости; силы, действующие на плоский элемент объема жидкости.

Рассмотрим произвольную жидкую среду и определим давление на высоте $y$ над некоторой точкой отсчета (рис. 12.4). Внутри жидкости на уровне $y$ рассмотрим небольшой элемент объема жидкости, имеющий вид плоскопараллельной пластины площадью $A$ и бесконечно малой толщиной $dy$, как показано на рисунке. Пусть давление, действующее вверх на нижнюю поверхность элемента (на высоте $y$), равно $P$; тогда давление, действующее вниз на верхнюю поверхность (на высоте $y + dy$), можно обозначить через $P + dP$. Таким образом, на выбранный элемент объема жидкость давит вверх с силой $PA$ и вниз с силой $(P + dP)A$; кроме того, на него в вертикальном направлении действует сила тяжести $dw$, которую можно записать в виде

$$dw = (dm)g = \rho g\, dV = \rho gA\, dy,$$

где $\rho$ – плотность жидкости на уровне $y$. Поскольку жидкость по предположению покоится, элемент объема жидкости находится в равновесии, так что результирующая всех сил равна нулю. Следовательно,

$$PA - (P + dP)A - \rho gA\, dy = 0,$$

что можно записать в более простом виде:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g. \qquad (12.4)$$

Это соотношение описывает изменение давления с высотой внутри жидкости или газа. Знак минус указывает на

уменьшение давления с увеличением высоты или, что то же самое, на увеличение давления с глубиной.

Если внутри жидкости или газа давления равны $P_1$ и $P_2$ соответственно на высотах $y_1$ и $y_2$, то уравнение (12.4) можно проинтегрировать следующим образом:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy,$$

$$P_2 - P_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy. \qquad (12.5)$$

Это общее соотношение применим теперь к двум частным случаям, когда рассматриваются 1) давление в жидкости (или газе) постоянной плотности и 2) вариации давления в атмосфере Земли.

Для жидкостей и газов, в которых изменением плотности можно пренебречь, мы имеем $\rho = \text{const}$, и, таким образом, интеграл (12.5) нетрудно вычислить:

$$P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1). \qquad (12.6а)$$

Обычно мы сталкиваемся с ситуацией, когда жидкость в открытом сосуде – в бассейне, озере, море – имеет свободную поверхность, от которой и удобно измерять расстояние. Иными словами, на рис. 12.5 мы называем величину $h = y_2 - y_1$ *глубиной* в жидкости. Если $y_2$ – это координата уровня верхней поверхности жидкости, то $P_2$ равно атмосферному давлению $P_0$. При этом в соответствии с (12.6а) давление $P (= P_1)$ на глубине $h$ в жидкости запишется в виде

$$P = P_0 + \rho g h. \qquad (12.6б)$$

Заметим, что это соотношение совпадает с формулой (12.3) для давления внутри жидкости, но учитывает еще атмосферное давление $P_0$ над жидкостью.

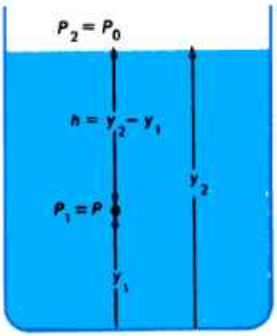



Рис. 12.5. Давление на глубине $h = y_2 - y_1$ в жидкости плотностью $\rho$ равно $P = P_0 + \rho g h$, где $P_0$ – внешнее давление на уровне верхней поверхности жидкости.

**Пример 12.2** Поверхность воды в водонапорной башне находится на 30 м выше кухонного водопроводного крана. Необходимо вычислить давление воды в кране.

**Решение.** Атмосферное давление действует как на поверхность воды в водонапорной башне, так и на вытекающую из крана воду. Разность давлений внутри крана и снаружи равна $\Delta P = \rho g h = (1{,}0 \times 10^3 \text{ кг/м}^3)(9{,}8 \text{ м/с}^2)(30 \text{ м}) = 2{,}9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Высоту $h$ иногда называют *напором*. В нашем случае напор воды составляет 30 м.

Применим теперь формулу (12.4) или (12.5) к газам. Плотность газов обычно очень мала, поэтому разностью давлений на разных уровнях можно пренебречь, если разность $y_2 - y_1$ не слишком велика (вот почему в примере 12.2 не учитывалась разница в атмосферном давлении на вершине водонапорной башни и у кухонного крана). Действительно, для большинства употребляемых в повседневной жизни баллонов с газом можно считать, что давление по всему объему баллона одинаково. Однако

если разность $y_2 - y_1$ очень велика, то это допущение неверно. Интересным примером этого является земная атмосфера, давление которой на уровне моря равно примерно $1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м$^2$ и постепенно уменьшается с высотой.

**Пример 12.3.** а) Определим атмосферное давление как функцию высоты $y$ над уровнем моря, считая $g$ постоянной величиной, а плотность воздуха пропорциональной давлению. (Последнее допущение не слишком корректно, так как плотность зависит и от температуры.) б) На какой высоте давление воздуха вдвое меньше, чем на уровне моря?

**Решение.** а) Поскольку $\rho$ пропорционально $P$, мы имеем

$$\rho/\rho_0 = P/P_0,$$

где $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м$^2$ – атмосферное давление на уровне моря, а $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м$^3$ – плотность воздуха на уровне моря при температуре 0 °С (табл. 12.1). Из уравнения (12.4) находим

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g = -P\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right) g,$$

откуда

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g\, dy.$$

Проинтегрируем последнее уравнение справа от $y = 0$ до высоты $y$, а слева от $P_0$ до $P$:

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \int_0^y dy; \quad \ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0}{P_0} g\, dy,$$

или

$$P = P_0 e^{-(\rho_0 g/P_0)y}.$$

Таким образом, в рамках наших исходных предположений мы нашли, что давление воздуха экспоненциально уменьшается с высотой. (Следует заметить, что атмосфера не имеет четкой верхней границы; поэтому естественного уровня, от которого можно было бы отсчитывать глубину, как в жидкости, здесь нет.)

б) Постоянная $\rho_0 g/P_0$ в показателе экспоненты равна $(1{,}29$ кг/м$^3)(9{,}80$ м/с$^2)/$ $/(1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м$^2) = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$. Полагая $P = P_0/2$, имеем

$$1/2 = e^{-(1.25 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^{-1})y}$$

или

$$y = (\ln 2{,}00)/(1{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^{-1}) = 5550\ \text{м},$$

поскольку $\ln 2 = 0{,}693$. Таким образом, давление воздуха уменьшается вдвое по сравнению с давлением на уровне моря на высоте 5550 м. Не удивительно, что альпинисты, поднимаясь высоко в горы, берут с собой кислородные приборы.

## 12.3. Атмосферное давление и избыточное давление

Как мы видели, атмосферное давление изменяется с высотой. Но даже в одном и том же месте (на одной и той же высоте) оно может изменяться в зависимости от погоды. В среднем же давление атмосферы на уровне моря составляет $1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м$^2$. Это значение нередко используется в качестве самостоятельной единицы давления – *атмосферы* (атм):

$$1\ \text{атм} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Н/м}^2 = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Па}.$$

В метеорологии используется и другая единица давления – *бар*, причем 1 бар $= 1{,}00 \cdot 10^5$ Н/м$^2$; таким образом,

стандартное атмосферное давление (физическая атмосфера) чуть больше 1 бар.

Давление, обусловленное весом земной атмосферы, испытывают все предметы, погруженные в этот огромный воздушный океан, включая и наши тела. Как же человеческий организм выдерживает столь значительное внешнее давление? Ответ прост: внешнее давление компенсируется внутренним давлением, которое поддерживается в живых клетках. Точно так же давление внутри воздушного шара уравновешивает наружное давление атмосферы. В автомобильной шине благодаря ее жесткости давление может быть намного выше наружного.

При определении давления в шинах или в газовых баллонах следует иметь в виду, что автомобильные и многие другие измерители давления (манометры) в действительности определяют разность между измеряемым давлением и давлением атмосферы. Эта величина называется *избыточным давлением*. Таким образом, чтобы получить абсолютное значение давления $P$, нужно к измеренному давлению $P_и$ прибавить атмосферное давление $P_а$:

$$P = P_а + P_и.$$

Если, например, автомобильный манометр показывает 220 кПа, то действительное значение давления в шине равно 220 кПа + 100 кПа = 320 кПа, или примерно 3,2 атм (2,2 атм избыточного давления).

## 12.4. Измерение давления

Для измерения давления изобретено много приборов; некоторые из них показаны на рис. 12.6. Простейшим является открытый манометр (рис. 12.6,*а*), U-образная трубка которого частично заполняется жидкостью (обычно водой или ртутью). Измеряемое давление $P$ связано с разностью уровней жидкости в коленах трубки соотношением

$$P = P_0 + \rho gh,$$

где $P_0$ – атмосферное давление, а $\rho$ – плотность жидкости. Заметим, что величина $\rho gh$ представляет собой избыточное давление, т.е. величину, на которую измеряемое давление $P$ превышает атмосферное (разд. 12.3). Если уровень жидкости в левом колене ниже, чем в правом, то $P$ окажется меньше атмосферного давления, а величина $h$ будет отрицательной.

Часто вместо того, чтобы вычислять произведение $\rho gh$, указывают просто высоту $h$. Давление при этом измеряют в миллиметрах ртутного столба (мм рт. ст.) или в миллиметрах водяного столба (мм вод. ст.); 1 мм рт. ст. эквивалентен давлению 133 Н/м$^2$, поскольку

$$\rho gh = (13{,}6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3)(9{,}8 \text{ м/с}^2)(1{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ м}) = 1{,}33 \cdot 10^2 \text{ Н/м}^2.$$

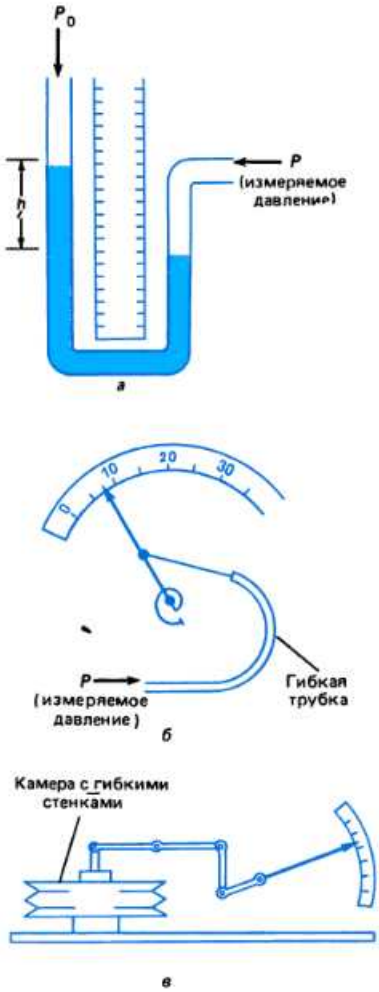



Рис. 12.6. Измерители давления. *а* – U-образный манометр; *б* – трубка Бурдона; *в* – анероид (используется в основном для измерения атмосферного давления).

В честь Эванджелисты Торричелли (1608 – 1647), который изобрел барометр (см. ниже), мм рт. ст. присвоено наименование торр. В табл. 12.2 указаны переводные коэффициенты для различных единиц измерения давления. Важно заметить, что если все остальные величины выражены в единицах СИ, то в вычислениях должна использоваться только единица давления в СИ, а именно $Н/м^2 = Па$.

К другим типам измерителей давления относятся трубка Бурдона (рис. 12.6,*б*), в котором под действием давления сгибается или разгибается тонкая изогнутая трубка, соединенная со стрелкой-указателем, а также анероид (рис. 12.6,*в*), в котором стрелка соединена с гибкой крышкой откачанной герметичной коробки из тонкого металла. В более сложных датчиках измеряемое давление изгибает тонкую металлическую мембрану, деформация которой преобразуется в электрический сигнал с помощью так называемого тензодатчика (см. гл. 27 в т. 2 настоящей книги).

*Таблица 12.2.* Переводные коэффициенты между различными единицами измерения давления

| В единицах 1 Па = 1 $Н/м^2$ | | Для 1 атм |
|---|---|---|
| 1 атм | $= 1{,}013 \cdot 10^5$ $Н/м^2$ | 1 атм $= 1{,}013 \cdot 10^5$ $Н/м^2$ |
| | $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Па | $= 1{,}013$ бар |
| | $= 101{,}3$ кПа | $= 1{,}013 \cdot 10^6$ $дин/см^2$ |
| 1 бар | $= 1{,}000 \cdot 10^5$ $Н/м^2$ | $= 1{,}03$ $кгс/см^2$ |
| 1 $дин/см^2$ | $= 0{,}1$ $Н/м^2$ | $= 76$ см рт. ст. |
| 1 $кгс/см^2$ | $= 9{,}85 \cdot 10^4$ $Н/м^2$ | $= 760$ мм рт. ст. |
| 1 см рт. ст. | $= 1{,}33 \cdot 10^3$ $Н/м^2$ | $= 760$ торр |
| 1 мм рт. ст. | $= 133$ $Н/м^2$ | $= 1{,}03 \cdot 10^4$ мм вод. ст. (4 °C) |
| 1 торр | $= 133$ $Н/м^2$ | |
| 1 мм вод. ст. (4 °C) | $= 9{,}81$ $Н/м^2$ | |

Для измерения атмосферного давления часто применяется ртутный манометр с запаянной трубкой. Его называют ртутным *барометром* (рис. 12.7). Стеклянная трубка заполняется ртутью и опускается открытым концом в чашку со ртутью. Если трубка достаточно длинная, то уровень ртути в ней опускается и в верхней части трубки создается вакуум, поскольку атмосферное давление может удержать столбик ртути высотой всего около 76 см (точно 76,0 см при нормальном атмосферном давлении). Иными словами, давление столба ртути высотой 76 см равно атмосферному. Действительно, из формулы $P = \rho g h$, полагая $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ $кг/м^3$ и $h = 76{,}0$ см, мы имеем

$$P = (13{,}6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3)(9{,}80 \text{ м/с}^2)(0{,}760 \text{ м}) =$$
$$= 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2 =$$
$$= 1{,}00 \text{ атм}.$$

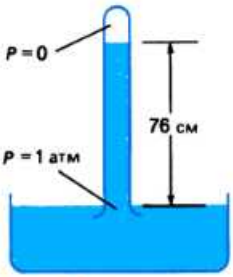



Рис. 12.7. Ртутный барометр (давление воздуха в этом случае равно 760 мм рт. ст.).

В быту используются обычно барометры анероидного типа (рис. 12.6, *в*).

Аналогичный расчет показывает, что атмосферное давление может удерживать в запаянной и вакуумированной с одного конца трубке столб воды высотой 10,3 м. Несколько столетий назад людей удивляло и доводило почти до отчаяния то, что каким бы хорошим ни был всасывающий насос, он не мог поднять воду на высоту больше 10 м. Большие практические трудности представляло, например, откачивание воды из глубоких шахтных выработок, где приходилось делать это в несколько стадий, если глубина шахты превышала 10 м. Над этой проблемой думал Галилей, причину же первым понял Торричелли. Дело в том, что не насос втягивает воду вверх по трубе, а атмосферное давление поднимает воду, когда в верхнем конце трубы создается вакуум, точно так же, как оно поднимает (или удерживает) уровень ртути в барометре на высоте 76 см.

## 12.5. Закон Паскаля

Земная атмосфера оказывает давление на все тела, находящиеся в ней, в том числе и на другие газы и жидкости. Атмосферное давление, действующее на жидкость (или газ), передается по всему объему этой жидкости. Например, согласно уравнению (12.6б), давление воды в озере на глубине 100 м равно $P = \rho gh = (1000\ \text{кг/м}^3)(9{,}8\ \text{м/с}^2) \times$ $\times (100\ \text{м}) = 9{,}8 \cdot 10^5\ \text{Н/м}^2$, или 9,7 атм; полное же давление на этой глубине складывается из давления воды и находящегося над ней воздуха; если поверхность озера находится почти на уровне моря, то полное давление равно 9,7 атм + 1,0 атм = 10,7 атм. Это лишь один пример общего закона, открытие которого приписывается французскому философу и ученому Блезу Паскалю (1623–1662). **Закон Паскаля** гласит, что *давление, приложенное к жидкости и газу, находящимся в ограниченном объеме, передается во все точки внутри объема без изменения.*

На законе Паскаля основано действие ряда практических механизмов. Два примера – гидравлическая тормозная система автомобиля и гидравлический подъемник – приведены на рис. 12.8. В гидравлическом подъемнике небольшая сила преобразуется в значительное усилие благодаря тому, что площадь одного поршня (на выходе) сделана большей, чем площадь другого (на входе). Если входные параметры обозначить индексом $i$, а выходные – индексом $o$, то, согласно закону Паскаля,

$$P_o = P_i, \quad F_o/A_o = F_i/A_i,$$

или

$$F_o/F_i = A_o/A_i.$$

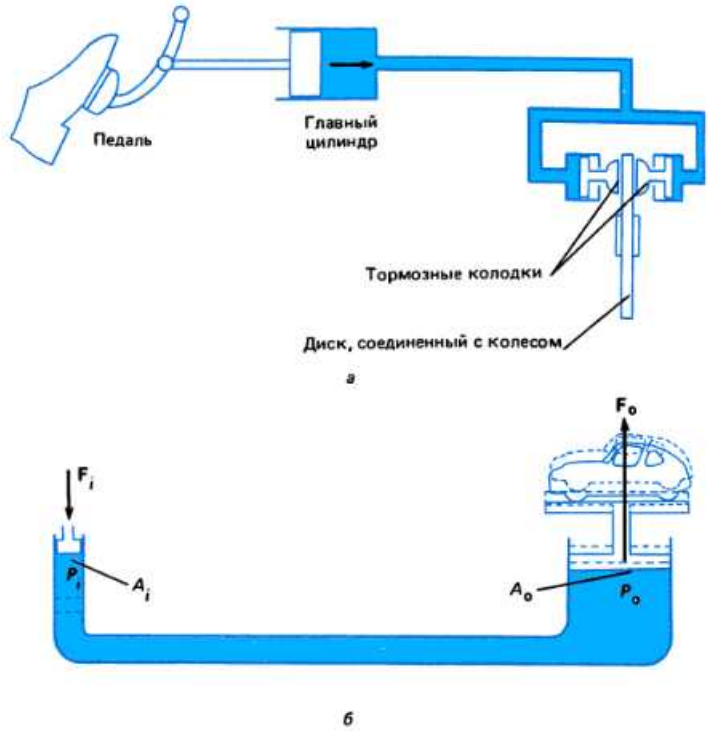



Рис. 12.8. Применения закона Паскаля. *а* – гидравлический тормоз автомобиля; *б* – гидравлический подъемник.

Величина $F_o/F_i$, определяющая выигрыш в силе, который дает гидравлическая машина, равна отношению площадей поршней. Если, например, площадь поршня в выходном цилиндре в 20 раз больше, чем во входном, то мы имеем двадцатикратный выигрыш в силе; положив на один поршень груз 100 кг, мы сможем поднять двухтонный автомобиль.

## 12.6. Выталкивающая сила и закон Архимеда

Тела, погруженные в жидкость или газ, очевидно, теряют в весе. Например, вы без труда поднимаете со дна ручья камень, который на земле поднять было бы не так просто; когда же камень показывается над поверхностью воды, он сразу становится тяжелее. Многие тела, скажем деревянные, плавают на поверхности воды. В рассмотренных двух примерах проявляется действие *выталкивающей силы*. Во всех этих случаях на тело действует сила тяжести, направленная вниз, но в дополнение к ней в жидкости или газе на тело действует выталкивающая сила, направленная вверх.

Выталкивающая сила возникает потому, что давление в жидкости (газе) возрастает с глубиной. Таким образом, направленное вверх давление на нижнюю поверхность погруженного тела оказывается больше, чем давление

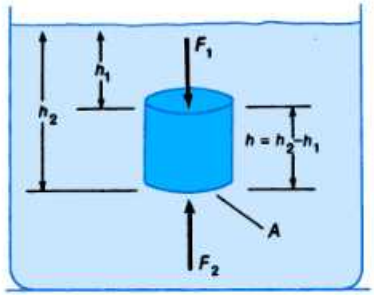
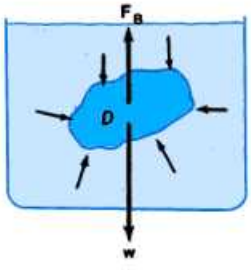



Рис. 12.9. К определению выталкивающей силы.

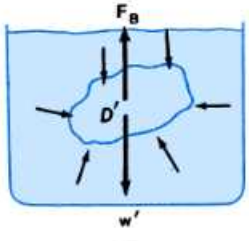
вниз на верхнюю поверхность. Рассмотрим для наглядности цилиндр высотой $h$, торцы которого имеют каждый площадь $A$ и который полностью погружен в жидкость (газ) с плотностью $\rho_f$, как показано на рис. 12.9. На верхний торец цилиндра среда оказывает давление $P_1 = \rho_f g h_1$; соответствующая сила, направленная вниз, равна $F_1 = P_1 A = \rho_f g h_1 A$. Снизу на цилиндр действует сила $F_2 = P_2 A = \rho_f g h_2 A$. Равнодействующая этих двух сил и есть *выталкивающая сила* $F_в$; она направлена вверх и равна

$$F_в = F_2 - F_1 = \\ = \rho_f g A (h_2 - h_1) = \rho_f g A h = \\ = \rho_f g V,$$

где $V = Ah$ – объем цилиндра. Поскольку $\rho_f$ есть плотность жидкости (газа), произведение $\rho_f g V = m_f g$ численно равно силе тяжести среды, занимающей объем, равный объему цилиндра. Таким образом, действующая на цилиндр выталкивающая сила равна по величине весу жидкости, вытесненной[1] цилиндром. Это справедливо независимо от формы тела. Закон этот был впервые открыт Архимедом (287?–212 в. до н. э.) и называется **законом Архимеда:** *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной телом.*




*а*




*б*

Рис. 12.10. Закон Архимеда.

Закон Архимеда можно вывести в общем виде с помощью следующего простого и изящного рассуждения. На тело неправильной формы $D$ (рис. 12.10,*а*) действуют сила тяжести $w$ и выталкивающая сила $F_в$. Если на тело не действует никакая другая сила (например, рука, которая тянет его вверх), то тело на рисунке будет двигаться вниз, поскольку $w > F_в$. Нам необходимо определить $F_в$; для этого мысленно заменим погруженное тело объемом $D'$ (рис. 12.10,*б*) той же жидкости такой же формы и таких размеров на той же глубине; этот объем можно пред-

[1] Под «вытесненной жидкостью» мы понимаем объем жидкости (газа), равный объему тела или, если тело плавает, той его части, которая погружена в жидкость (газ). Если тело погружается, скажем, в стакан, заполненный водой до краев, то «вытесненный объем» будет равен объему воды, перелившейся через край.

ставить себе как бы отделенным от остальной среды прозрачной воображаемой пленкой. На выделенный объем будет действовать такая же выталкивающая сила, как и на погруженное тело, поскольку окружающая жидкость, создающая эту силу, в обоих случаях имеет точно ту же конфигурацию. Выделенный объем жидкости $D'$ находится в равновесии (жидкость в целом покоится); поэтому $F_в = w'$, где $w'$ – вес выделенного объема жидкости. Следовательно, выталкивающая сила $F_в$ равна весу жидкости, объем которой равен объему погруженного тела, как и утверждает закон Архимеда.

**Пример 12.4.** Камень массой 70 кг лежит на дне озера. Его объем равен $3{,}0 \cdot 10^4$ см$^3$. Какая сила необходима, чтобы оторвать его от дна?

**Решение.** Действующая на камень в воде выталкивающая сила равна весу воды объемом $3{,}0 \cdot 10^{-2}$ м$^3$:

$$F_в = \rho_{H_2O} g V = (1{,}0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3)(9{,}8 \text{ м/с}^2)(3{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3) = 2{,}9 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Вес камня равен $mg = (70 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2) = 6{,}9 \cdot 10^2$ Н. Следовательно, необходимая для подъема камня сила равна 690 Н – 290 Н = 400 Н. Это то же самое, как если бы камень имел массу не 70 кг, а лишь (400 Н)/(9,8 м/с$^2$) = 41 кг.

Рассказывают, что Архимед открыл этот закон, лежа в ванне и размышляя над тем, как определить, из чистого ли золота сделана новая корона царя или из поддельного. Относительная плотность золота равна 19,3 и значительно больше, чем у большинства других металлов. Однако определить плотность материала короны затруднительно, так как трудно определить объем тела сложной формы. Если же определить вес предмета в воздухе ($w$), а затем в воде ($w'$), то, пользуясь законом Архимеда, можно найти плотность; это можно проиллюстрировать на следующем примере.

**Пример 12.5.** Корона массой 14,7 кг имеет под водой вес, соответствующий массе 13,4 кг. Золотая ли она?

**Решение.** Вес тела, погруженного в жидкость, равен весу вне жидкости $w$ за вычетом выталкивающей силы $F_в$:

$$w' = w - F_в = \rho_o g V - \rho_f g V,$$

где $V$ – объем тела, $\rho_o$ – его плотность, а $\rho_f$ – плотность жидкости (в нашем случае воды). Таким образом, мы можем написать

$$\frac{w}{w - w'} = \frac{\rho_o g V}{\rho_f g V} = \frac{\rho_o}{\rho_f}.$$

[Отсюда следует, что $w/(w - w')$ равно относительной плотности, если жидкость, в которую погружено тело, – вода.] Для короны имеем

$$\frac{\rho_o}{\rho_{H_2O}} = \frac{w}{w - w'} = \frac{14{,}7 \text{ кг}}{1{,}3 \text{ кг}} = 11{,}3,$$

т. е. плотность равна 11 300 кг/м$^3$. Похоже, что корона из свинца!

Закон Архимеда применим также и к плавающим телам, таким, как дерево. Вообще говоря, *тело плавает в том случае, если его плотность меньше плотности жидкости* (газа). Например, бревно, относительная плотность которого равна 0,60, а объем – 2,0 м$^3$, имеет массу 1200 кг. Если бревно полностью погрузить в воду, то оно вытеснит $m = \rho V = (1000 \text{ кг/м}^3)(2{,}0 \text{ м}^3) = 2000$ кг воды. Следовательно, выталкивающая сила будет больше веса бревна, и оно всплывет на поверхность. Равновесие наступит, когда бревно будет вытеснять 1200 кг воды, т. е. когда под водой будет находиться 1,2 м$^3$, или 0,60 общего объема бревна. И вообще доля объема плавающего тела, находящаяся под водой, равна отношению плотностей тела и жидкости (газа).

**Пример 12.6.** Ареометр – это простой прибор, предназначенный для измерения плотности жидкостей. Пусть ареометр (рис. 12.11) представляет собой стеклянную трубку с грузом в нижнем конце; длина трубки 25,0 см, площадь поперечного сечения 2,00 см$^2$, масса 45,0 г. На каком расстоянии от нижнего конца должна находиться метка плотности 1,000?



Рис. 12.11. Ареометр.

**Решение.** Плотность ареометра в целом равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{45{,}0 \text{ г}}{(2{,}00 \text{ см}^2)(25{,}0 \text{ см})} = 0{,}900 \text{ г/см}^3.$$

Будучи опущен в воду, он будет находиться в равновесии, когда в воду погрузится 0,900 его объема. Поскольку поперечное сечение трубки не меняется, она погрузится на 0,900 своей длины, т. е. на (0,900)(25,0 см) = 22,5 см. Таким образом, деление 1,000, соответствующее относительной плотности воды, должно находиться в 22,5 см от нижнего конца ареометра.

В воздухе на тело тоже действует выталкивающая сила. Любые тела весят в воздухе меньше, чем в вакууме. Однако плотность воздуха очень мала, поэтому для большинства тел мы не замечаем этой разницы (см. в связи с этим задачи в конце главы). Существуют все же тела, плавающие в воздухе; к ним относятся, например, наполненные гелием воздушные шары.

**Пример 12.7.** Каким должен быть объем гелия в воздушном шаре, чтобы поднять груз массой 800 кг (включая массу оболочки)?

**Решение.** Для того чтобы шар поднялся в воздух, необходимо, чтобы действующая на гелий выталкивающая сила, равная весу вытесненного воздуха, была по меньшей мере равна весу гелия и груза:

$$F_в = (m_{He} + 800 \text{ кг})g,$$

где $g$ – ускорение свободного падения. Это выражение можно переписать через плотности газов:

$$\rho_{возд} Vg = (\rho_{He} V + 800 \text{ кг})g.$$

Отсюда мы находим $V$:

$$V = \frac{800\ \text{кг}}{\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{He}}} = \frac{800\ \text{кг}}{1{,}29\ \text{кг/м}^3 - 0{,}18\ \text{кг/м}^3} = 720\ \text{м}^3.$$

## *12.7. Поверхностное натяжение

До сих пор в настоящей главе мы говорили в основном о том, что происходит внутри объема жидкости или газа. Однако поверхность жидкости сама по себе обладает интересными свойствами. Повседневные наблюдения показывают, что поверхность жидкости ведет себя как натянутая эластичная пленка. Капли воды, стекающие из водопроводного крана, капли утренней росы на травинках имеют близкую к сферической форму, как если бы это были маленькие воздушные шарики, наполненные водой. Стальную иголку можно пустить плавать на поверхности воды, хотя плотность стали больше плотности воды. Поверхность жидкости напоминает натянутую пленку, и это натяжение, действующее параллельно поверхности, возникает из-за существующих между молекулами жидкости сил притяжения. Этот эффект называется *поверхностным натяжением*. Количественно он описывается величиной *поверхностного натяжения*, которая обозначается греческой буквой $\gamma$ (гамма). Эта величина определяется как сила $F$, приходящаяся на единицу длины линии $L$, действующая перпендикулярно любой линии, проведенной на поверхности, и стремящаяся стянуть поверхность по этой линии:

$$\gamma = F/L. \qquad (12.7)$$

Для того чтобы лучше понять сказанное, рассмотрим проволочную рамку, в которую заключена тонкая пленка жидкости (рис. 12.12). Одна из сторон рамки сделана подвижной. Из-за наличия поверхностного натяжения, для того чтобы сместить подвижную сторону рамки и тем самым увеличить поверхность жидкости, необходимо приложить

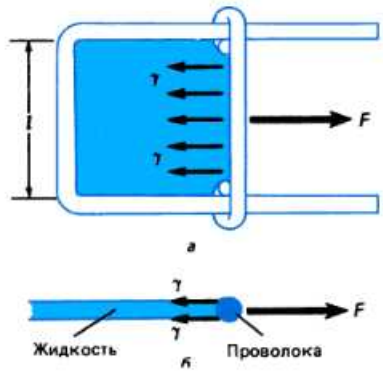



Рис. 12.12. Подвижная U-образная рамка с натянутой пленкой жидкости для измерения поверхностного натяжения ($\gamma = F/2l$). *а* – вид сверху; *б* – вид сбоку (в увеличенном масштабе).

*Таблица 12.3.* Поверхностное натяжение $\gamma$ некоторых веществ

| Вещество | $\gamma$, Н/м |
|---|---|
| Ртуть (20 °С) | 0,44 |
| Кровь (37 °С) | 0,058 |
| Плазма крови (37 °С) | 0,073 |
| Спирт этиловый (20 °С) | 0,023 |
| Вода (0°С) | 0,076 |
| (20 °С) | 0,072 |
| (100 °С) | 0,059 |
| Бензин (20 °С) | 0,029 |
| Мыльный раствор (20 °С) | $\approx$ 0,025 |
| Кислород (– 193 °С) | 0,016 |



Рис. 12.13. К объяснению поверхностного натяжения с помощью молекулярной теории. Изображены лишь силы притяжения, действующие на молекулу на поверхности и в глубине жидкости.

Рис. 12.14. На молекулу, переходящую изнутри жидкости на поверхность, при увеличении площади поверхности действуют значительные силы со стороны поверхностных молекул. В свою очередь, по третьему закону Ньютона на молекулы действует противоположно направленная сила, равная силе поверхностного натяжения.

некоторую силу $F$. Натянутая на рамку пленка жидкости ограничена двумя поверхностями (верхней и нижней); поэтому длина линии, на которой действует сила, растягивающая поверхность, равна $2l$. Таким образом, для поверхностного натяжения имеем $\gamma = F/2l$. Такой прибор позволяет измерять поверхностное натяжение различных жидкостей. Поверхностное натяжение воды составляет 0,072 Н/м при температуре 20 °С. В табл. 12.3 приведены значения $\gamma$ для различных жидкостей. Следует заметить, что температура оказывает очень большое влияние на поверхностное натяжение.

Существование поверхностного натяжения можно объяснить с помощью молекулярной теории. Между молекулами жидкости действуют силы притяжения; на рис. 12.13 эти силы показаны для молекулы в глубине жидкости и для молекулы на поверхности. Молекула внутри жидкости находится в равновесии, так как силы со стороны других молекул действуют на нее во всех направлениях и взаимно компенсируются. Молекула на поверхности тоже находится в равновесии (жидкость покоится), даже если на молекулу действуют силы со стороны молекул, находящихся под нею или на одном с ней уровне. Следовательно, возникает направленная в глубь жидкости результирующая сила, приводящая к небольшому стягиванию поверхностного слоя, но лишь до такой степени, когда силы притяжения компенсируются силами отталкивания, возникающими при более тесном сближении молекул[1]. Такое стягивание поверхности можно истолковать в том смысле, что жидкость стремится к состоянию, в котором площадь ее поверхности минимальна. Вот почему капли воды имеют сферическую форму: при одинаковом объеме шар имеет наименьшую из всех тел площадь поверхности.

Для увеличения поверхности жидкости необходимо




[1] Находящиеся над жидкостью молекулы воздуха тоже создают силы, но эффект этот мал из-за большого расстояния между молекулами газа. Поверхностное натяжение зависит от того, что находится над поверхностью жидкости; поэтому правильнее было бы указывать его для границы раздела между двумя веществами. Если второе вещество не указано, то обычно считают, что это воздух при нормальном давлении.

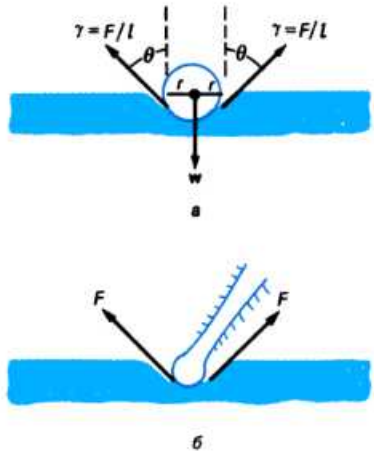



Рис. 12.15. Обусловленные поверхностным натяжением силы, действующие на сферу (*а*) и на лапку насекомого (*б*).

приложить силу; совершаемая работа затрачивается на перенос молекул из глубины жидкости на ее поверхность (рис. 12.14). При этом увеличивается потенциальная энергия молекул, которую называют *поверхностной энергией*. Чем больше площадь поверхности, тем больше поверхностная энергия.

Работу, необходимую для увеличения площади поверхности, можно рассчитать по формуле (12.7) с помощью рис. 12.12:

$$W = F\,\Delta x = \\ = \gamma L\,\Delta x = \\ = \gamma\,\Delta A,$$

где $\Delta x$ – перемещение подвижной стороны рамки, а $\Delta A$ – изменение площади поверхности (с обеих сторон рамки). Отсюда мы получаем

$$\gamma = W/\Delta A.$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения $\gamma$ можно определить не только как силу на единицу длины, но и как работу, необходимую для того, чтобы увеличить площадь поверхности жидкости на единицу. Следовательно, $\gamma$ измеряется либо в Н/м, либо в Дж/м$^2$. Благодаря поверхностному натяжению некоторые насекомые могут скользить по воде; тела, плотность которых больше плотности воды (стальная иголка), могут лежать на поверхности. На рис. 12.15, *а* показано, каким образом сила поверхностного натяжения не дает телу погрузиться под воду. Здесь $w$ – вес тела в жидкости, равный разности силы тяжести и выталкивающей силы (ведь тело частично находится в жидкости). Если тело имеет сферическую форму, например кончик лапки насекомого (рис. 12.15, *б*), то сила поверхностного натяжения действует во всех точках по окружности радиусом $r$. Вес же тела уравновешивается вертикальной составляющей $\gamma \cos\theta$. Соответ-

ственно вертикальная составляющая силы поверхностного натяжения равна $2\pi r\gamma\cos\theta$.

**Пример 12.8.** Кончик лапки насекомого имеет близкую к сферической форму радиусом $2{,}0\cdot10^{-5}$ м. Масса насекомого равна 0,0030 г, и его вес равномерно распределен между шестью лапками. Необходимо найти угол $\theta$ (рис. 12.15, *а*), если температура воды равна 20 °С.

**Решение.** Поскольку

$$2\pi r\gamma\cos\theta = w,$$

где $w$ – одна шестая веса насекомого с шестью лапками, мы имеем

$$(6{,}28)\,(2{,}0\cdot10^{-5}\text{ м})\,(0{,}072\text{ Н/м})\cos\theta = \frac{1}{6}(3{,}0\cdot10^{-6}\text{ кг})\,(9{,}8\text{ м/с}^2),$$

$$\cos\theta = \frac{0{,}49}{0{,}90} = 0{,}54, \qquad \theta = 57°.$$

Заметим, что если бы $\cos\theta$ оказался больше единицы, то это значило бы, что поверхностное натяжение недостаточно для того, чтобы удержать насекомое на поверхности воды.

Точность подобных расчетов невысока, поскольку радиус $r$ «лунки» на поверхности не равен в точности радиусу тела. Однако этот метод позволяет получить приближенную оценку того, будет ли тело удерживаться на поверхности жидкости.

Мыло и стиральные порошки уменьшают поверхностное натяжение воды. Это облегчает мытье и стирку, так как высокое поверхностное натяжение чистой воды не дает ей проникать в промежутки между волокнами ткани и в мелкие поры. Вещества, понижающие поверхностное натяжение, называются *поверхностно-активными веществами* (сокращенно ПАВ).

## *12.8. Капиллярность

Вы, конечно, замечали, что вода в стеклянном сосуде немного поднимается там, где она касается стенок (рис. 12.16, *а*). Говорят, что вода смачивает стекло. Ртуть, наоборот, не смачивает стекло; ее поверхность у стенок опускается (рис. 12.16, *б*). Смачивается ли жидкостью твердое тело или нет, зависит от того, что сильнее: взаимодействия между молекулами жидкости (когезия) или взаимодействия между молекулами жидкости, с одной стороны, и молекулами твердого тела – с другой (адгезия). (Силы *когезии* удерживают вместе одинаковые молекулы, а силы *адгезии* действуют между молекулами разнородных веществ.) Вода смачивает стекло потому, что молекулы воды сильнее притягиваются молекулами стекла, чем молекулами самой воды. Для ртути наблюдается обратное: когезия оказывается сильнее адгезии.

Угол между касательной к поверхности жидкости и поверхностью твердого тела называется *краевым углом* ф. Его величина зависит от соотношения сил когезии и адгезии (см. рис. 12.16 и табл. 12.4). В случае когда

*Таблица 12.4.* Значения краевого угла для некоторых веществ

| Вещество | Краевой угол |
|---|---|
| Вода – стекло | 0° |
| Органические жидкости (большинство) – стекло | 0° |
| Ртуть – стекло | 140° |
| Вода – парафин | 107° |
| Керосин – стекло | 26° |

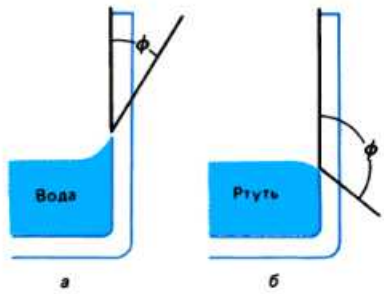



Рис. 12.16. Вода (*а*) смачивает поверхность стекла, в то время как ртуть (*б*) ее не смачивает.

$\phi < 90°$, жидкость смачивает твердое тело; когда же $\phi > 90°$, смачивания не происходит.

В трубках малого диаметра можно наблюдать, как столбик жидкости поднимается или опускается относительно уровня окружающей жидкости. Это явление называется *капиллярностью*, а тонкие трубки – капиллярами. Соотношение сил когезии и адгезии определяет, будет ли жидкость в капилляре подниматься или опускаться (рис. 12.17). В стеклянном капилляре вода поднимается, а ртуть опускается. Высота $h$ поднятия (опускания) жидкости в капилляре зависит от поверхностного натяжения (именно оно не дает поверхности разорваться), а также от краевого угла $\phi$ и радиуса капилляра $r$. Для того чтобы вычислить $h$, обратимся к рис. 12.18. Поверхностное натяжение $\gamma$ действует под углом $\phi$ по всей окружности радиусом $r$. В соответствии с формулой (12.7) вертикальная составляющая силы поверхностного натяжения равна $F = (\gamma \cos \phi)(L)$. Поскольку $L = 2\pi r$, мы имеем $F = 2\pi r \gamma \cos \phi$. Эта сила уравновешивается весом столбика жидкости, который можно считать цилиндром высотой $h$ и объемом $V = \pi r^2 h$. Следовательно, можно написать, что

$$\begin{aligned} 2\pi r \gamma \cos \phi &= mg = \\ &= \rho V g = \\ &= \rho \pi r^2 h g, \end{aligned}$$

где $\rho$ – плотность жидкости. Отсюда находим следующее выражение для $h$:

$$h = \frac{2\gamma \cos \phi}{\rho g r}. \tag{12.8}$$

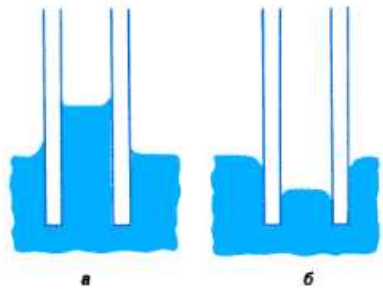



Рис. 12.17. Капиллярность. *а* стеклянный капилляр в воде; *б* – стеклянный капилляр в ртути.

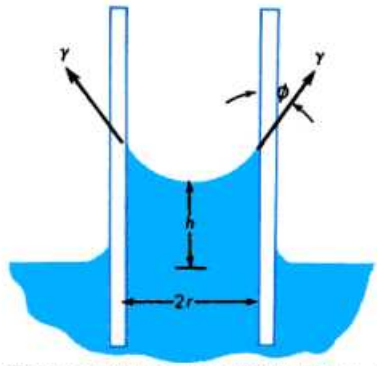



Рис. 12.18. Жидкость в капилляре поднимается на высоту $h = 2\gamma \cos\phi/\rho g r$ (см. текст).

Для многих жидкостей, таких, как вода в стекле, краевой угол $\phi$ близок к нулю, и, поскольку $\cos 0° = 1$, формула (12.8) принимает более простой вид: $h = 2\gamma/\rho g r$.

Формула (12.8) справедлива также в случае, когда жидкость в капилляре опускается; это имеет место, например, для ртути в стеклянной трубке. В этом случае $\phi > 90°$, и косинус принимает отрицательные значения. Знак минус у величины $h$ означает, что жидкость в капилляре опускается. Из формулы (12.8) следует, между прочим, что высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре тем больше, чем меньше радиус капилляра.

**Пример 12.9.** Если радиус капилляров ксилемы (системы трубочек, по которым переносятся питательные вещества внутри растений) составляет 0,0010 см, то на какую высоту может подняться в них вода под действием сил поверхностного натяжения? Будем считать $\phi = 0°$.

**Решение.** Полагая в (12.8) $\gamma = 0{,}072$ Н/м, находим

$$h = \frac{(2)(0{,}072\ \text{Н/м})(1)}{(1{,}0\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(1{,}0\cdot 10^{-5}\ \text{м})} = 1{,}5\ \text{м}.$$

## * 12.9. Отрицательное давление и когезия воды

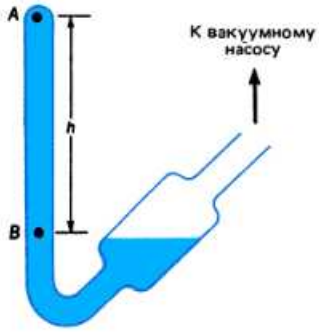



Рис. 12.19. Создание отрицательного давления в жидкости.

Жидкости и газы, как правило, оказывают давление на стенки сосуда, а реакция стенок сосуда направлена внутрь жидкости и газа. Давление может быть различным – от нуля до очень высоких положительных значений. Но может ли оно быть отрицательным? Как ни странно, может: при определенных обстоятельствах в жидкости (но не в газе) существует отрицательное давление.

Получить отрицательное давление непросто. Для этой цели служит установка, показанная на рис. 12.19. Закрытая с верхнего конца трубка заполняется жидкостью, а затем из правого резервуара вакуумным насосом откачивается воздух. В соответствии с формулой (12.6а) разность давлений в точках $A$ и $B$ равна

$$P_B - P_A = \rho g h,$$

где $\rho$ – плотность жидкости. Когда давление в резервуаре

над жидкостью становится близким к нулю, то $P_B = 0$, так как точка $B$ находится на том же уровне, что и поверхность жидкости в резервуаре. Но тогда давление в точке $A$ должно иметь отрицательное значение:

$$P_A = -\rho g h.$$

Естественно было бы ожидать, что по мере откачивания резервуара жидкость в трубке опустится. Но если трубка идеально чиста, а жидкость полностью свободна от примесей, то жидкость может остаться в трубке. Этим способом удавалось достигнуть отрицательных давлений до $-270$ атм. При отрицательном давлении жидкость неустойчива, и при малейшем возмущении она распадается на капли, причем уровень в трубке опускается.

Жидкость при отрицательном давлении как бы стягивает на себя стенки сосуда; натяжение существует во всем объеме жидкости, а не только на ее поверхности: в этом состоянии столб жидкости во многом подобен канату, который тянут за оба конца. Как это происходит? Жидкость остается сплошной средой благодаря действию сил когезии между молекулами жидкости и адгезии между молекулами жидкости и стенками сосуда. Силы когезии между молекулами воды чрезвычайно велики: прочность воды на разрыв доходит до $30 \cdot 10^6$ Н/м$^2$. Это те же самые силы, которые связывают воду при низких температурах в лед. Разница в том, что в жидкости молекулы обладают значительной кинетической энергией и могут свободно перемещаться по отношению друг к другу. Поэтому вода обычно не проявляет той прочности, какая наблюдается у льда: малейшие включения примесей (таких, как пузырьки воздуха) позволяют воде течь и принимать новую форму; столб жидкости при этом может падать под действием силы тяжести.

Людей давно интересовал вопрос, каким образом вода подается в верхушки высоких деревьев, таких, как вечнозеленые секвойи, имеющие порой высоту более 100 м. Вода с растворенными в ней минеральными веществами поднимается вверх по капиллярам (ксилеме). Радиус капилляров составляет от 0,01 до 0,3 мм. Как мы видели в примере 12.9, даже в самых тонких капиллярах поверхностное натяжение может поднять воду не более чем на 1,5 м. Под действием же атмосферного давления вода не поднимется выше 10 м, даже если в верхнем конце трубки создать вакуум (разд. 12.4). Поэтому нельзя объяснить подъем воды по стволу высокого дерева ни тем, ни другим явлением. В настоящее время принято считать, что, хотя указанные явления дают определенный вклад, основной механизм – в особенности для очень высоких деревьев – действует за счет сил когезии между молекулами воды и отрицательного давления. Эта теория впервые была выдвинута в конце прошлого века, но до недавних пор имела много противников. Однако в послед-

ние годы были осуществлены прямые измерения давления в ксилеме; оказалось, что давление в капиллярах действительно отрицательное и достигает иногда $-25$ атм у верхушки дерева. По мере испарения воды с листьев на место уходящих молекул приходят новые, и силы когезии протягивают воду снизу вверх.

## Заключение

Известны три обычных агрегатных состояния (фазы) вещества: твердое, жидкое и газообразное. Как жидкости, так и газы характеризуются способностью течь (текучестью). *Плотность* вещества определяется как масса на единицу объема. *Относительная плотность* показывает, во сколько раз плотность данного вещества больше плотности воды (при температуре 4 °C).

*Давление* определяется как сила, действующая на единицу площади. В покоящихся жидкости и газе давление внутри в любой точке одинаково во всех направлениях. В жидкости и газе постоянной плотности $\rho$ давление на глубине $h$ от поверхности равно $\rho gh$, где $g$ – ускорение свободного падения. Если плотность жидкости (газа) не постоянна, то давление $P$ изменяется с высотой $y$ по закону $dP/dy = -\rho g$. Внешнее давление, действующее на поверхность жидкости в открытом сосуде (например, атмосферное давление на поверхность озера), передается по всему объему жидкости без изменения; это называется *законом Паскаля*.

Давление измеряется манометрами различного типа. Прибор для измерения атмосферного давления называют барометром. За стандартное атмосферное давление на уровне моря принято значение $1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м$^2$. *Избыточным давлением* называется разность между истинным и атмосферным давлением.

*Закон Архимеда* утверждает, что на тело, полностью или частично погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости (газа). На этом законе основан практический способ определения плотности; этим же объясняется способность тел, плотность которых меньше плотности жидкости или газа, плавать в данной среде.

## Вопросы

1. Чему равна относительная плотность а) воздуха; б) льда; в) золота?
2. Если плотность одного вещества больше плотности другого, то означает ли это, что масса молекулы первого вещества больше, чем второго?
3. Придумайте простой способ определения плотности своего тела в плавательном бассейне.
4. Пассажиры самолетов часто замечают после полета, что флакончики с духами и косметикой «подтекают». В чем причина этого явления?
5. Три сосуда на рис. 12.20 заполнены водой до одного и того же уровня; площадь дна у всех трех сосудов одна и та же. Следовательно, давление воды, а также полная сила, действующая на дно каждого сосуда, одинаковы. Однако вес воды во всех сосудах различен. Как объяснить этот «гидростатический парадокс»?



Рис. 12.20.

6. Представьте, что вы прижали к руке с одинаковой силой тупой конец карандаша и иголку. Что скорее поранит кожу? Что здесь существенно – давление или результирующая сила?

7. Пробка плавает в бутылке с водой, горлышко которой открыто. Если с помощью насоса сжимать воздух в верхней части бутылки, можно ли утопить пробку? Объясните.

8. Придумайте способ, с помощью которого можно было бы определить в плавательном бассейне массу одной из ваших ног.

9. Объясните сущность промывки золота, пользуясь полученными в этой главе сведениями.

10. Почему в морской воде держаться на поверхности легче, чем в пресной?

11. Будет ли выталкивающая сила, действующая на водолазный колокол, в точности одинаковой как на глубине, так и вблизи от поверхности? Объясните.

12. Может ли воздушный шар подняться в атмосфере на неограниченную высоту? Объясните.

13. Баржа, груженная камнем, чуть-чуть не проходит под низким мостом. Что нужно сделать – нагрузить ее сильнее или убрать часть груза?

14. Когда труднее вынуть пробку из сливного отверстия в ванне – когда ванна наполнена водой или пустая? Не противоречит ли ваш ответ закону Архимеда? Объясните.

15. Кубик льда плавает в наполненном до краев стакане. Перельется ли вода через край, когда кубик растает?

16. Почему деревянный карандаш плавает в воде горизонтально, а не вертикально? Объясните, почему он будет плавать стоймя, если к одному его концу прикрепить достаточно тяжелый грузик?

17. Стакан с водой на горизонтальной поверхности получает направленное вправо постоянное ускорение. Почему поверхность воды при этом располагается под углом к горизонтали? В какую сторону она наклонена?

18. а) Покажите, что выталкивающая сила, действующая на частично погруженное тело, приложена к той точке, где находился бы центр тяжести вытесненной жидкости. Эта точка называется *центром плавучести*. б) Где должен находиться центр плавучести, чтобы судно было устойчиво, – выше центра тяжести, ниже его или в той же точке? Объясните.

19. Одинаково ли весят пустой воздушный шарик и надутый воздухом? Объясните.

20. Наполненный гелием воздушный шарик привязан на недлинной нитке к сиденью автомобиля. Куда он полетит, когда автомобиль будет делать левый поворот?

21. Почему тонущее судно иногда, прежде чем погрузиться, опрокидывается набок? (*Подсказка*: см. вопрос 18.)

22. Справедлив ли закон Архимеда в лифте, который а) движется с ускорением $g/2$? б) свободно падает?

23. Кусок дерева, плавая в ванне, погружается в воду на 60% своего объема, когда ванна стоит на земле. Будет ли этот кусок плавать или тонуть, если ванна находится в лифте, который а) движется с ускорением $g/2$, направленным вверх; б) движется с ускорением $g/2$, направленным вниз; в) свободно падает?

24. Небольшое количество воды доводят до кипения в жестяной 5-литровой банке из-под машинного масла. Затем жестянку снимают с огня и закрывают крышкой. Вскоре после этого банка сплющивается. В чем тут дело?

25. Иногда можно услышать, что «вода свой уровень найдет». Как это понимать?

26. Существуют ли предельная глубина, до которой ныряльщик может дышать через трубку воздухом с поверхности? Объясните.

27. Объясните, каким образом вода по сифону (рис. 12.21) может переливаться из верхнего сосуда в нижний, несмотря на то что часть пути ей приходится проделывать вверх. (Заметим, что для работы сифона нужно, чтобы трубка была вначале заполнена жидкостью.) Почему жидкость из каждого колена трубки не стекает вниз в сосуд?

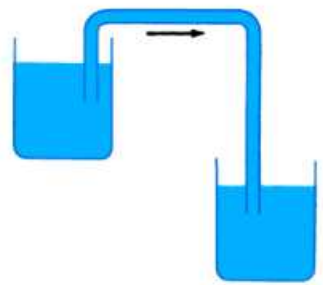


Рис. 12.21. Сифон.

28. На какую примерно высоту поднимется ртуть в барометре, находящемся на искусственном спутнике Земли на высоте 6400 км?

29. Почему при измерении артериального давления манжета, соединенная с манометром, одевается на руку примерно на уровне сердца?

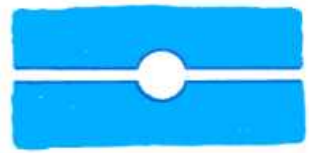


Рис. 12.22.

*30. Зачем на оконной раме делают желобок, как показано на рис. 12.22?

*31. Утка плавает на воде потому, что, чистя перья, она покрывает их слоем жира. Объясните, каким образом увеличенное поверхностное натяжение позволяет утке плавать?

## Задачи

Раздел 12.1

1. (I) Объем гранитной скалы Эль-Капитан в Иосемитском национальном парке равен приблизительно $10^8$ м$^3$. Какова ее масса?

2. (I) Чему равна масса воздуха в комнате размером 6,8 × 3,4 × 2,8 м?

3. (I) К 5,5 л антифриза ($\rho = 800$ кг/м$^3$) прибавляют 4,5 л воды, чтобы получить 10,0 л смеси. Какова плотность полученной смеси?

4. (I) Масса пустой бутылки равна 31,20 г; когда она заполнена водой, ее масса становится 98,44 г. При заполнении ее некоторой другой жидкостью масса составляет 88,78 г. Чему равна относительная плотность жидкости?

Раздел 12.2

5. (I) Головка звукоснимателя действует на грампластинку с силой (1,0 г) $g$. Какое давление оказывает игла на пластинку, если диаметр острия равен 0,0013 см. Выразите результат в единицах Н/м$^2$ и атм.

6. (I) На какую величину отличается давление крови на уровне макушки и у подошвы человека ростом 1,60 м, стоящего прямо?

7. (I) Какова приблизительно разность давлений воздуха на первом этаже и на крыше здания Центра международной торговли в Нью-Йорке, высота которого равна 410 м и которое расположено на уровне моря? Выразите полученный результат в процентах к нормальному атмосферному давлению на уровне моря.

8. (I) Когда вы быстро едете на машине в гору или спускаетесь с горы, вам случается ощущать щелчки в ушах. Это происходит в тот момент, когда давление за барабанной перепонкой уравнивается с наружным давлением. Если бы этого не происходило, то какая сила действовала бы на барабанную перепонку площадью 0,50 см$^2$ при подъеме (спуске) на 1000 м?

9. (II) Покажите, что работа, совершаемая постоянным давлением $P$ по перемещению объема жидкости (газа) $\Delta V$, равна $W = P\Delta V$.

10. (II) Оцените давление воздуха на вершине горы Эверест (8850 м над уровнем моря).

11. (II) С какой силой действует вода на прямоугольную плотину высотой 75 м и шириной 120 м, когда водохранилище заполнено водой доверху?

12. (II) Одно колено U-образной трубки (открытой с обоих концов) заполнено водой, другое – спиртом. Если граница раздела двух жидкостей находится точно в нижней точке U-образной трубки и столбик спирта имеет высоту 18,0 см, то какую высоту имеет столбик воды?

13. (II) Рассчитайте полную массу земной атмосферы, пользуясь известным значением атмосферного давления на уровне моря.

14. (II) Оцените плотность воды на глубине 10,0 км в океане (см. разд. 11.4 и табл. 11.1). На какую долю полученное значение отличается от плотности воды у поверхности моря?

15. (II) Выведите общую формулу для давления $P$ на глубине $h$ в жидкости с плотностью $\rho$, если жидкость вместе с сосудом движется а) с ускорением $a$, направленным вверх; б) с ускорением $a$, направленным вниз; в) с ускорением $g$, направленным вниз (свободное падение).

16. (II) Цилиндрическое ведро с жидкостью (плотность $\rho$) вращается относительно своей оси симметрии, которая направлена вертикально. Покажите, что давление на расстоянии $r$ от оси вращения записывается в виде

$$P = P_a + (1/2)\rho\omega^2 r^2,$$

где $\omega$ – угловая скорость вращения, а $P_a$ – давление на оси на той же глубине.

17. (II) Чистая вода устанавливается на одинаковом уровне в двух коленах U-образной трубки, концы которой сообщаются с атмосферой. В одно из колен трубки наливается другая жидкость, не смешивающаяся с водой. Вода в другом колене поднимается на 8,3 см, а ее уровень оказывается на 2,1 см выше уровня налитой жидкости. Какова плотность второй жидкости?

18. (III) Сосуд с жидкостью, находящийся в покое, получает на горизонтальной поверхности ускорение $a$ вправо. а) Покажите, что поверхность жидкости располагается под углом $\theta = \text{arctg}(a/g)$ к горизонту. б) В какую сторону наклонена поверхность жидкости? в) По какому закону изменяется давление в жидкости с глубиной, отсчитываемой от поверхности жидкости?

19. (III) Уровень воды за горизонтальной плотиной постоянной ширины $b$ находится на высоте $h$. а) Используя интегрирование, покажите, что вода действует на плотину с силой $F_T = (1/2)\rho g h^2 b$. б) Покажите, что обусловленный этой силой вращающий момент, действующий на плотину, имеет плечо $h/3$. в) Какую минимальную толщину $t$ (постоянную по всему телу плотины) должна иметь свободно стоящая бетонная плотина высотой $h$, чтобы не опрокинуться? Нужно ли здесь учитывать атмосферное давление? Объясните.

Разделы 12.3 и 12.4

**20.** (I) Нормальное систолическое артериальное давление равно 120 мм рт. ст. Переведите это значение в единицы а) торр; б) Н/м$^2$; в) атм.

**21.** (I) а) С какой силой атмосфера давит на крышку стола размером 3,2 × 1,2 м? б) Чему равна сила, действующая на ту же крышку стола снизу?

**22.** (I) Какое минимальное избыточное давление должно быть в водопроводе, подводящем снизу воду к зданию, чтобы вода текла из крана на 12-м этаже, на высоте 40 м?

**23.** (I) Левый желудочек сердца, сокращаясь, прогоняет кровь по системе кровообращения. Считая площадь внутренней поверхности желудочка равной 85 см$^2$, а максимальное давление крови 120 мм рт. ст., рассчитайте полную силу, развиваемую мышцами желудочка в момент, когда давление максимально.

**24.** (II) Предположим, что человек может понизить давление в легких на 80 мм рт. ст. ниже атмосферного. На какую высоту ему удастся втянуть воду по соломинке?

**25.** (II) Для измерения давления в резервуаре с кислородом используют ртутный манометр с открытой трубкой. Чему равно абсолютное давление (в паскалях) в резервуаре, если атмосферное давление составляет 1040 мбар, а уровень ртути в открытой трубке а) на 28,0 см выше и б) на 4,2 см ниже, чем в трубке, соединенной с резервуаром?

**26.** (II) При внутренних вливаниях иглу, введенную в руку, нередко соединяют трубочкой с сосудом, наполненным жидкостью и находящимся на некоторой высоте. Если плотность жидкости равна 1,00 г/см$^3$, то на какой высоте должен находиться сосуд, чтобы давление жидкости составляло а) 60 мм рт. ст.; б) 600 мм вод. ст.? Если давление крови в вене на 18 мм рт. ст. выше атмосферного, то на какой высоте должен находиться сосуд, чтобы жидкость начала поступать в вену? Под высотой $h$ мы будем понимать расстояние по вертикали от иглы до поверхности жидкости в сосуде.

**27.** (II) Избыточное давление в каждой из четырех шин автомобиля массой 1800 кг равно 210 кН/м$^2$. Какова площадь контакта каждой шины с поверхностью земли?

**28.** (II) При каждом сокращении сердце прокачивает примерно 70 см$^3$ крови под средним давлением 105 мм рт. ст. Рассчитайте мощность сердца в ваттах при 60 ударах пульса в минуту.

**29.** (II) Какой будет высота столба спирта в барометре при нормальном атмосферном давлении?

Раздел 12.5

**30.** (I) Избыточное давление в гидравлическом подъемнике равно 16 атм. Какую наибольшую массу (в кг) может иметь поднимаемый автомобиль, если диаметр поршня в рабочем цилиндре равен 17 см?

**31.** (II) К поршню медицинского шприца приложена сила 3,0 Н. Если диаметр поршня 1,0 см, а диаметр канала иглы 0,20 мм, то а) какую силу жидкость должна преодолеть, чтобы выйти из иглы? б) какую силу нужно приложить к поршню, чтобы ввести жидкость в вену, в которой избыточное давление 18 мм рт. ст.?

**32.** (II) Для доказательства своего закона Паскаль осуществил впечатляющий опыт, показывающий, какую значительную силу может создать гидростатическое давление. Он присоединил к крышке, закрывающей винный бочонок радиусом 20 см, длинную трубку с внутренним радиусом 0,30 см. Бочонок заполнялся водой, и, когда вода в трубке доходила до уровня 12 м, бочонок разрывался. Вычислите: а) массу воды в трубке; б) результирующую силу, действующую на крышку бочонка.

Раздел 12.6

**33.** (I) Ареометр, описанный в примере 12.6 и помещенный в бродильный чан, погружается на глубину 22,3 см. Какова плотность жидкости в чане?

**34.** (I) Геолог обнаружил, что образец лунной породы массой 7,20 кг при погружении в воду имеет «кажущуюся»[1] массу 5,88 кг. Какова плотность образца?

**35.** (I) Чему равна выталкивающая сила, действующая в атмосфере на резервуар с водой объемом 4700 м$^3$?

**36.** (I) На какую долю объема погружается кусок железа, плавающий в ртути?

**37.** (II) Кусок дерева массой 0,40 кг плавает в воде, но тонет в спирте ($\rho = 790$ кг/м$^3$), в котором имеет «кажущуюся» массу 0,020 кг. Чему равна плотность дерева?

**38.** (II) Пользуясь табл. 12.1, определите, на какую долю объема кубик чистого льда погружается в стакане а) с чистой водой; б) с морской водой. в) Каким будет ответ, если опыт проводить на Луне, где ускорение свободного падения в шесть раз меньше, чем на Земле?

---

[1] Здесь автор вводит не совсем удачное понятие «кажущейся» массы $m'$, определяемой через вес тела $P'$ в жидкости: $P' \equiv m'g = mg - P_{\text{Apx}}$, откуда ясно, что в жидкости всегда $m' < m$. – *Прим. ред.*

г) Будут ли ваши ответы на вопросы „а" или „б" справедливы для айсберга в океане? Если да, то какой именно?

39. (II) Ведро с водой движется с направленным вверх ускорением $3{,}5g$. Какая выталкивающая сила действует на находящийся в воде кусок гранита ($\rho = 2700$ кг/м$^3$) массой 1,0 кг? Всплывет или не всплывет камень? Почему?

40. (II) Деревянный куб массой 4,0 кг плавает в озере, погрузившись на 50% своего объема. Какую работу нужно совершить, чтобы погрузить его полностью под воду?

41. (II) Площадь поперечного сечения грузового судна по ватерлинии 3100 м$^2$. Осадка судна после загрузки 6,1 м. Какова масса груза?

42. (II) Животное массой 25 кг плавает в воде, причем над водой остается объем его тела, равный 2,0 см$^3$. Чему равна относительная плотность тела животного?

43. (II) Небольшое тело находится во взвешенном состоянии (т. е. плавающим при полном погружении) в смеси 18% (массовых) спирта и 82% воды. Чему равна плотность тела?

44. (II) Шлюпка имеет объем 1,5 м$^3$ и массу 35 кг. Сколько пассажиров (масса каждого 70 кг) может выдержать шлюпка не затонув?

45. (II) Закон Архимеда можно применить не только для определения относительной плотности твердого тела с помощью жидкости известной плотности (пример 12.5), но и для решения обратной задачи. а) Рассчитайте для примера плотность жидкости, в которой алюминиевый шар массой 12,00 кг имеет «кажущуюся» массу 9,40 кг. б) Выведите простую формулу для определения плотности жидкости таким образом.

46. (II) Вычислите истинную массу (в вакууме) куска алюминия, который, будучи взвешен в воздухе, имеет массу 2,0000 кг.

47. (II) Кусок дерева ($\rho = 500$ кг/м$^3$) массой 520 г плавает в воде. Какой минимальной массы кусок свинца нужно привязать к нему снизу на нитке, чтобы дерево утонуло?

48. (II) Если тело плавает в воде, то его плотность можно определить, привязав к нему «грузило», достаточно тяжелое, чтобы тело утонуло. Покажите, что относительная плотность (в единицах плотности воды) тела равна $w/(w_1 - w_2)$, где $w$ – вес тела в воздухе, $w_1$ – вес тела с грузилом, когда в воду погружено только грузило, и $w_2$ – вес тела с грузилом, когда они оба погружены.

49. (III) Два сплошных деревянных куба каждый объемом 1,00 м$^3$, изготовленные один из древесины плотностью 350 кг/м$^3$, а другой из древесины плотностью 600 кг/м$^3$, склеены бок о бок между собой. Если всю конструкцию погрузить в воду и удерживать так, чтобы она плавала горизонтально (т. е. плоскость склейки вертикальна), то какой момент силы будет действовать на нее?

*Раздел 12.7

*50. (I) Вычислите поверхностное натяжение $\gamma$ жидкости, если сила $F$, необходимая для перемещения подвижной стороны рамки ($l = 0{,}075$ м) на рис. 12.12, равна $6{,}4 \cdot 10^{-3}$ Н.

*51. (II) Поверхностное натяжение жидкости можно определить, измеряя силу $F$, необходимую для того, чтобы оторвать от поверхности жидкости круглое платиновое кольцо радиусом $r$. а) Получите формулу для $\gamma$ через $F$ и $r$. б) Вычислите $\gamma$ исследуемой жидкости, если $F = 9{,}40 \cdot 10^{-3}$ Н и $r = 3{,}5$ см (при 30 °C).

*52. (II) Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить диаметр мыльного пузыря от 3,0 до 5,0 см (см. табл. 12.3)?

*53. (II) Небольшая лужица воды на столе разбивается на 50 капель. Во сколько раз изменяется поверхностная энергия? Считайте, что лужица является плоской и имеет высоту $h$, а капли – это полусферы радиусом $h$.

*54. (III) Покажите, что внутри мыльного пузыря существует избыточное давление $\Delta P = 4\gamma/R$, где $R$ – радиус пузыря, а $\gamma$ – поверхностное натяжение. (*Подсказка*: рассматривайте пузырь в виде двух полусфер и не забудьте, что у пленки две поверхности – внешняя и внутренняя.) Этот результат справедлив для любой пленки, у которой $T = 2\gamma$ есть натяжение на единицу длины.

*Раздел 12.8

*55. (I) На какую высоту поднимается вода в стеклянном капилляре радиусом 0,12 мм?

*56. (I) Стеклянная трубка с внутренним диаметром 0,85 мм вводится в сосуд с ртутью. На какой высоте над уровнем ртути в сосуде расположится уровень ртути в трубке?

*57. (I) Когда стеклянную трубку опускают в сосуд с этиловым спиртом, уровень спирта в трубке поднимается на 3,4 мм. Чему равен диаметр трубки?

*58. (II) Карандаш диаметром 1,0 см вводят вертикально в стакан с водой. Вода смачивает карандаш, так что краевой угол равен 0°. Вычислите величину и направление действующей на карандаш силы, обусловленной поверхностным натяжением.

*59. (II) Каким должен быть диаметр капилляров ксилемы, чтобы вода поднималась на 100 м вверх по стволу дерева только за счет капиллярности?

*60. (II) На какую высоту поднимется вода за счет капиллярности между двумя плоскими стеклянными пластинками, опущенными вертикально в воду с зазором между ними 0,11 мм?

# 13 Гидродинамика (движущиеся жидкости и газы)

Перейдем теперь от рассмотрения покоящихся жидкостей и газов к рассмотрению более сложного предмета, изучающего движение жидкости или газа и называемого **гидродинамикой**. Многие аспекты гидродинамики до сих пор еще до конца не объяснены; тем не менее при некоторых упрощающих предположениях удается получить хорошее представление о гидродинамических явлениях.

Один из методов изучения потоков жидкости (газа) состоит в рассмотрении движения отдельных частиц (или крошечных элементов объема). Движение каждой частицы подчиняется законам Ньютона, и его можно в принципе рассчитать, однако расчет оказывается исключительно сложным и громоздким. Вместо этого используют иной путь (которому последуем и мы), заключающийся в том, что свойства жидкости рассматривают в каждой точке пространства. Иначе говоря, вместо того чтобы следить за траекторией движения каждой частицы в жидкости, мы будем описывать параметры движения жидкости в каждой точке пространства, выражая скорость и плотность для каждой точки как функции времени.

## 13.1. Характеристики течения

Различают два основных типа течений жидкостей и газов. Если течение плавное и смежные слои как бы скользят друг относительно друга, то его называют **ламинарным** или **слоистым**. Характерная особенность ламинарного течения в том, что каждая частица жидкости (газа) движется по гладкой траектории и траектории разных частиц не пересекаются (рис. 13.1,*а*). Когда скорость течения превышает определенный предел, зависящий, как мы увидим ниже, от ряда факторов, течение становится турбулентным. **Турбулентное течение** характеризуется наличием беспорядочных маленьких «водоворотов», называемых вихрями (рис. 13.1,*б*). Вихри поглощают огромное количество энергии, и, хотя внутреннее трение, называемое *вязкостью*, существует и в ламинарном течении, в турбулентном течении вязкость оказывается значительно большей. Ламинарное течение легко

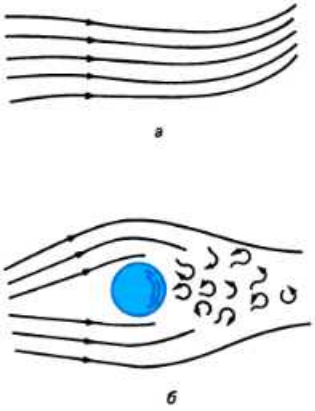


Рис. 13.1. *а* – ламинарное течение; *б* – турбулентное течение.

отличить от турбулентного, капнув в движущуюся жидкость немного чернил или пищевой краски.

Как для ламинарного, так и для турбулентного течения можно выделить четыре важнейшие характеристики. 1) Жидкость (газ) можно рассматривать либо как *сжимаемую*, либо как *несжимаемую*. Хотя не существует веществ, которые были бы абсолютно несжимаемы, течение многих жидкостей таково, что изменения плотности в нем очень малы и ими можно пренебречь, а это значительно упрощает рассмотрение. 2) *Вязкость*, или внутреннее трение, имеет место в любом течении жидкости (газа), однако вязкостью тоже часто можно пренебречь. В начале настоящей главы мы будем рассматривать *невязкое* (идеальное) течение, а затем уже изучим влияние вязкости. 3) Течение может быть *установившимся (стационарным)*. Скорость такого течения в любой точке пространства не изменяется во времени (это не значит, что она не может быть разной в различных точках пространства). Если скорость в данной точке изменяется со временем, то такое течение называется *нестационарным*; это течение наблюдается, например, когда мы только что открыли водопроводный кран и потекла вода. Нас будут интересовать главным образом стационарные течения. 4) Течение может быть *вихревым* и *безвихревым* (потенциальным). В безвихревом течении полный момент импульса жидкости относительно любой точки равен нулю. Иначе говоря, если бы мы ввели куда-либо в течение крошечную вертушку с лопастями, то она не стала бы вращаться. Если бы вертушка закрутилась, как в воронке или водовороте, то течение было бы вихревым. Эту довольно сложную характеристику течения мы здесь рассматривать непосредственно не будем.

## 13.2. Поток жидкости и уравнение неразрывности

В установившемся ламинарном потоке жидкости (газа) траектория, по которой движется данная частица, называется **линией тока** (рис. 13.1,*а*). Скорость жидкости в любой точке направлена по касательной к линии тока. В принципе линию тока можно провести через любую точку жидкости, однако обычно изображают лишь несколько линий тока. Линии тока не пересекаются друг с другом, так как в противном случае в точке их пересечения скорость оказалась бы неоднозначной.

Пучок линий тока, такой, как на рис. 13.2, называют *трубкой тока*. Поскольку линии тока представляют траектории частиц, жидкость не может втекать или вытекать через боковую поверхность трубки тока.

Рассмотрим теперь установившееся ламинарное течение в пределах трубки тока и выясним, как изменяется скорость жидкости в зависимости от поперечных разме-

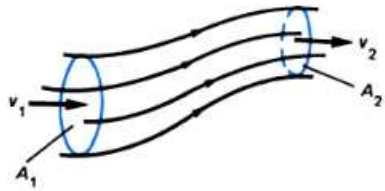



Рис. 13.2. Трубка тока.

ров трубки. Выберем трубку тока, достаточно малую для того, чтобы скорость жидкости в любом поперечном сечении была постоянной[1]. На рис. 13.2 $v_1$ и $v_2$ – скорости, с которыми жидкость движется соответственно через сечения площадью $A_1$ и $A_2$. *Массовый расход* определяют как массу $\Delta m$ жидкости (газа), проходящую через данное поперечное сечение за единицу времени: $\Delta m/\Delta t$. На рис. 13.2 объем жидкости, проходящий через поперечное сечение $A_1$ за время $\Delta t$, равен $A_1\Delta l_1$, где $\Delta l_1$ – длина пути, который проходит выделенная частица жидкости за время $\Delta t$. Поскольку скорость жидкости в $A_1$ равна $v_1 = \Delta l_1/\Delta t$, массовый расход $\Delta m/\Delta t$ через площадку $A_1$ равен

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho_1 \Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 \Delta l_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1,$$

где $\Delta V_1 = A_1\Delta l_1$ – объем, соответствующий массе $\Delta m$. Аналогично, в сечении $A_2$ массовый расход равен $\rho_2 A_2 v_2$. Поскольку перенос жидкости через стенки трубки тока отсутствует, массовые расходы в сечениях $A_1$ и $A_2$ одинаковы, так что мы имеем

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2.$$

Это выражение называется **уравнением неразрывности**. Если среда несжимаема (что в подавляющем большинстве случаев справедливо для жидкостей, а часто также и для газов), то $\rho_1 = \rho_2$, и уравнение неразрывности принимает вид

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{[несжимаемая жидкость]}. \tag{13.1}$$

Заметим, что произведение $Av$ есть *объемный* расход, или поток жидкости (объем жидкости, проходящей через данное сечение в единицу времени), так как $\Delta V/\Delta t = A\Delta l/\Delta t = Av$. Из уравнения (13.1) видим, что в том месте, где сечение трубки тока (или реальной трубы) большое, скорость меньше, а там, где сечение мало, скорость значительная. В справедливости этого вывода можно убедиться, наблюдая за течением реки; она спокойно несет свои воды, широко разлившись по равнине, но ускоряется до головокружительной быстроты, оказавшись в узком

[1] Реальные жидкости имеют заметную вязкость, и это внутреннее трение приводит к тому, что различные слои движутся с разными скоростями. В таком случае можно считать, что $v_1$ и $v_2$ – это средние скорости в каждом поперечном сечении.

ущелье. Из рис. 13.2 и уравнения (13.1) можно заметить, что, чем теснее расположены линии тока, тем выше скорость течения.

Уравнение (13.1) можно применить к рассмотрению движения крови в нашем организме. Из сердца кровь поступает в аорту, а оттуда распределяется по главным артериям, затем по более мелким и в конце концов расходится по миллионам крошечных капилляров. По венам кровь возвращается в сердце.

**Пример 13.1.** Радиус аорты равен примерно 1,0 см; кровь движется в аорте со скоростью около 30 см/с. Вычислим скорость тока крови в капиллярах, если известно, что суммарная площадь сечения капилляров составляет около 2000 см$^2$ (хотя каждый капилляр имеет диаметр всего $8 \cdot 10^{-4}$ см, количество их исчисляется буквально миллиардами).

**Решение.** Скорость тока крови в капиллярах равна

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{(0{,}30 \text{ м/с})\,(3{,}14)\,(0{,}010 \text{ м})^2}{(2 \cdot 10^{-1} \text{ м}^2)} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$$

или 0,5 мм/с.

Рассмотрим еще пример на использование уравнения неразрывности.

**Пример 13.2.** Какой радиус поперечного сечения должен иметь воздуховод отопления, чтобы воздух в комнате объемом 300 м$^3$ полностью обновлялся каждые 15 мин? Скорость движения воздуха в воздуховоде 3,0 м/с. Будем считать, что плотность воздуха остается постоянной.

**Решение.** Для того чтобы применить уравнение неразрывности (13.1), будем рассматривать комнату как участок воздуховода большого сечения (отметим его индексом 2). Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (13.1), и заменяя $\Delta t$ на $t$, находим $A_2 v_2 = A_2 l_2 / t = V_2 / t$, где $V_2$ – объем комнаты. Таким образом, $A_1 v_1 = A_2 v_2 = V_2 / t$ и

$$A_1 = \frac{V_2}{v_1 t} = \frac{300 \text{ м}^3}{(3{,}0 \text{ м/с})\,(900 \text{ с})} = 0{,}11 \text{ м}^2.$$

Поскольку мы предполагаем, что сечения круглые, т. е. $A = \pi r^2$, находим, что радиус поперечного сечения воздуховода должен быть равен 0,19 м, или 19 см.

## 13.3. Уравнение Бернулли

Задавались ли вы вопросом, за счет чего проветривается нора луговой собачки? Почему дым в печной трубе поднимается? Отчего на большой скорости надувается брезентовый верх автомобиля? Все это примеры действия закона, открытого Даниилом Бернулли (1700–1782) в первой половине 18 в. Согласно *закону Бернулли, давление в потоке выше там, где скорость меньше, и наоборот.* Если бы мы, например, измерили давления в сечениях $A_1$ и $A_2$ на рис. 13.2, то давление в сечении $A_2$, где скорость больше, оказалось бы ниже, чем в $A_1$, где скорость меньше. На первый взгляд это может показаться странным; казалось бы, давление должно быть выше в сечении $A_2$, где больше скорость. Но это не так. Если бы давление в сечении $A_2$ было выше, чем в $A_1$, то движение жидкости замедлилось бы, в то время как на самом деле жидкость ускоряется, и этому способствует пониженное давление в сечении $A_2$.

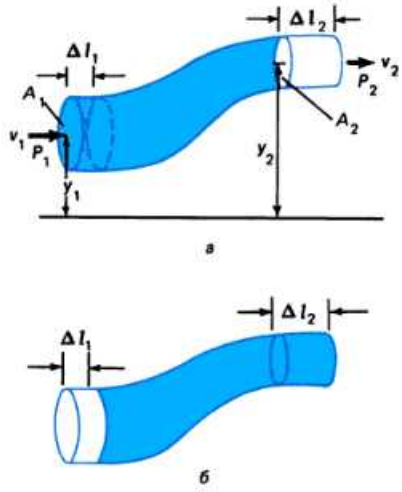



Рис. 13.3. К выводу уравнения Бернулли.

Бернулли вывел уравнение, которое выражает этот закон в количественном виде. Для получения уравнения Бернулли будем считать течение стационарным и ламинарным, жидкость несжимаемой, а вязкость пренебрежимо малой. Для большей общности рассмотрим трубку тока переменного поперечного сечения, высота которой к тому же меняется, начиная с некоторой точки отсчета (рис. 13.3). Вычислим работу, необходимую для перемещения закрашенного на рисунке объема жидкости из положения на рис. 13.3, *а* в положение на рис. 13.3, *б*. При этом жидкость в сечении $A_1$ перемещается вправо на расстояние $\Delta l_1$, что вынуждает жидкость в сечении $A_2$ перемещаться на расстояние $\Delta l_2$. Жидкость, находящаяся слева от $A_1$, создает давление $P_1$ на жидкость в трубке и совершает работу $W_1 = F_1 \Delta l_1 = P_1 A_1 \Delta l_1$. В сечении $A_2$ совершаемая работа равна $W_2 = -P_2 A_2 \Delta l_2$; знак минус здесь стоит потому, что направление силы, действующей на жидкость, противоположно направлению ее движения (закрашенная на рис. 13.3, *а* жидкость совершает работу над жидкостью справа от $A_2$). При этом совершается также работа в поле силы тяжести; в результате процесса, изображенного на рис. 13.3, участок жидкости массой $m$ и соответствующим объемом $A_1 \Delta l_1 (= A_2 \Delta l_2)$ переносится из сечения $A_1$ в $A_2$, и работа в поле силы тяжести запишется в виде

$$W_3 = -mg(y_2 - y_1).$$

Заметим, что в случае, показанном на рис. 13.3, работа является отрицательной, так как движение направлено вверх, т. е. против силы тяжести. Таким образом, полная работа, совершаемая над жидкостью, равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3,$$

$$W = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mgy_2 + mgy_1.$$

Согласно теореме о связи работы и энергии (разд. 6.4), совершенная над системой работа равна изменению ее кинетической энергии. Таким образом,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = P_1A_1\Delta l_1 - P_2A_2\Delta l_2 - mgy_2 + mgy_1 .$$

Участок жидкости массой $m$ занимает объем $A_1\Delta l_1 = A_2\Delta l_2$, поэтому мы можем подставить $m = \rho A_1\Delta l_1 = \rho A_2\Delta l_2$, и, разделив все на $A_1\Delta l_1 = A_2\Delta l_2$, после соответствующего преобразования получим

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 . \qquad (13.2)$$

Это и есть **уравнение Бернулли**. Поскольку сечения $A_1$ и $A_2$ могут быть выбраны произвольно вдоль трубки тока, уравнение Бернулли можно записать в виде

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{const}$$

в любой точке жидкости (вдоль линии тока).

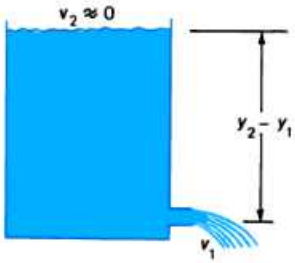



Рис. 13.4. Теорема Торричелли.

Область применения уравнения Бернулли очень широка. Для примера рассчитаем скорость $v_1$ жидкости, вытекающей из отверстия в нижней части бачка (рис. 13.4). В качестве $A_2$ в уравнении (13.2) выберем верхний уровень жидкости в бачке; если диаметр бачка велик по сравнению с диаметром отверстия, то можно положить $v_2 = 0$. Давление в сечении $A_1$ (отверстие) и $A_2$ (поверхность жидкости) равно атмосферному, так что $P_1 = P_2$. Таким образом, уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \rho g y_2 ,$$

откуда находим

$$v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} . \qquad (13.3)$$

Хотя, как мы видим, этот результат является следствием закона Бернулли, его называют *теоремой Торричелли* в честь Торричелли, сформулировавшего его за 100 лет до Бернулли. Обратим внимание, что жидкость покидает отверстие с той же скоростью, какую имело бы свободно падающее тело при той же разности высот. Это неудивительно, так как в обоих случаях происходит переход потенциальной энергии в кинетическую в соответствии с законом сохранения энергии, на котором основан вывод уравнения Бернулли.

С другим частным случаем закона Бернулли мы сталкиваемся, когда течение жидкости (газа) происходит на практически неизменном уровне, т.е. $y_1 = y_2$. При этом уравнение (13.2) принимает вид

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 . \qquad (13.4)$$

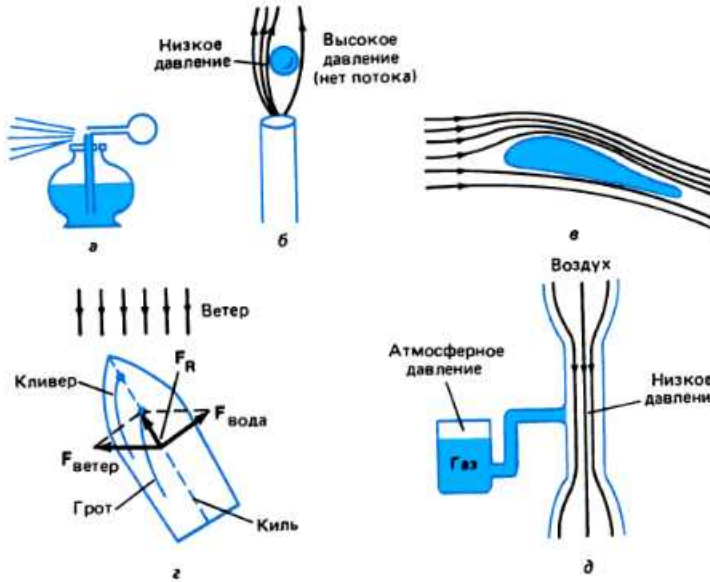



**Рис. 13.5. Примеры проявления закона Бернулли.**

Эта формула количественно отражает тот факт, что в точках, в которых скорость больше, давление ниже и наоборот. Несколько хорошо известных явлений, связанных с действием этого закона, иллюстрируются на рис. 13.5. Давление в струе воздуха, проходящей с большой скоростью над вертикальной трубкой в пульверизаторе для одеколона (рис. 13.5, *а*), ниже, чем атмосферное давление, действующее на поверхность жидкости во флаконе. Благодаря этому жидкость выталкивается вверх по трубке. Шарик для пинг-понга устойчиво парит в вертикальной струе воздуха (для этой цели у некоторых пылесосов шланг можно переключить на выдувание); рис. 13.5, *б*. Давление воздуха вне струи выше, чем в струе, поэтому шарик возвращается в струю, если он начинает выходить из нее.

Профиль крыла самолета и других «несущих плоскостей» рассчитывается так, что течение сохраняется в основном слоистым, но линии тока с верхней стороны проходят гуще, чем с нижней (рис. 13.5, *в*). Точно так же, как бóльшая плотность линий тока в сужении трубы указывает на то, что скорость течения повышается, сгущение линий тока над крылом показывает нам, что скорость потока сверху крыла больше, чем снизу. Следовательно, давление воздуха над крылом ниже, чем под ним, так что имеется результирующая сила, направленная вверх; эта сила называется аэродинамической *подъемной силой*. В действительности закон Бернулли определяет лишь часть полной подъемной силы, действующей на крыло. Крылу обычно придается некоторый наклон вверх (угол атаки), так что набегающий на нижнюю поверхность крыла поток воздуха отклоняется вниз; импульсы молекул воз-

духа изменяются, в результате чего на крыло действует направленная вверх дополнительная сила. Важную роль в создании подъемной силы играет и турбулентность.

Парусная яхта может идти против ветра (рис. 13.5, *г*), и этому во многом помогает закон Бернулли, если поставить паруса таким образом, чтобы воздух в узком промежутке между ними ускорялся. [Нормальное давление позади основного паруса (грота) выше, чем пониженное давление с его передней стороны, и возникающая благодаря этому сила продвигает судно вперед.] При движении против ветра основной парус ставится примерно по биссектрисе угла между направлением встречного ветра и осью судна (килевой линии). Сила, с которой ветер действует на парус (изменение импульса ветра при отклонении его парусом), в сумме с силой, обусловленной законом Бернулли, действует почти перпендикулярно парусу ($\mathbf{F}_{\text{ветер}}$). Из-за этого яхта двигалась бы вбок, если бы не киль; вода действует на киль с силой $\mathbf{F}_{\text{вода}}$ почти перпендикулярно оси судна. Результирующая этих двух сил $\mathbf{F}_R$ направлена вперед почти вдоль оси яхты (рис. 13.5, *г*).

*Трубка Вентури* представляет собой отрезок трубы с сужением (диффузором) посередине. Примером использования трубки Вентури является карбюратор в автомобиле (рис. 13.5, *д*). Проходя через диффузор, поток воздуха в соответствии с уравнением (13.1) ускоряется и таким образом создается область пониженного давления. Бензин, находящийся в поплавковой камере карбюратора под атмосферным давлением, всасывается через жиклер в воздушную струю и перемешивается с воздухом, прежде чем попасть в цилиндр двигателя.

Используют *трубку Вентури* и для измерения скорости потока жидкости или газа (рис. 13.6). Можно показать (см. задачи), что скорость потока определяется по формуле

$$v_1 = A_2\sqrt{2(P_1 - P_2)/\rho(A_1^2 - A_2^2)},$$

где $\rho$ – плотность жидкости (газа), а $P_1$ и $P_2$ – показания манометров в сечениях $A_1$ и $A_2$, где площади сечения трубки равны соответственно $A_1$ и $A_2$. Если используется

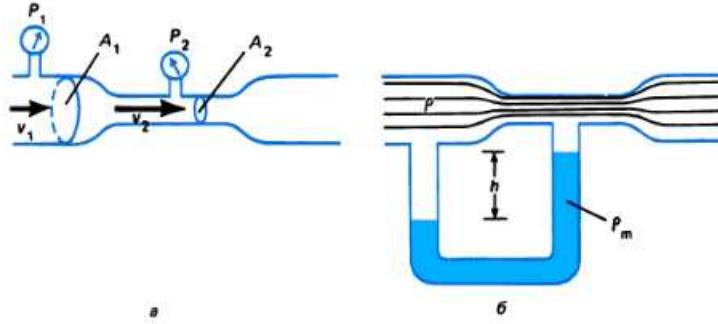



Рис. 13.6. Трубка Вентури. *а* – обычная схема; *б* – манометрическая схема.

такой манометр, как на рис. 13.6, *б*, то в формулу для $v_1$ вместо разности $P_1 - P_2$ входит величина $(\rho_m - \rho)gh$, где $\rho_m$ – плотность жидкости в манометре. Трубки Вентури созданы даже для измерения скорости тока крови в сосудах. С помощью подобных датчиков можно измерять и объемный расход, т. е. поток жидкости, который равен $v_1 A_1$.

Отчего поднимается дым в печной трубе? Отчасти потому, что плотность теплого воздуха меньше, чем холодного, и поэтому нагретый воздух по закону Архимеда поднимается вверх. Но закон Бернулли здесь также дает свой вклад. Из-за ветра, дующего над выходным отверстием трубы, давление там ниже, чем в доме. Поэтому в трубе создается тяга. Даже в, казалось бы, безветренную ночь движение воздуха оказывается достаточным, чтобы дым шел вверх.

Чтобы гоферы[1)], луговые собачки, кроты и другие животные, живущие под землей, не погибали от удушья, их норы должны проветриваться. Любая нора имеет по меньшей мере два входа. Потоки воздуха над разными входами всегда немного различны. Из-за этого возникает небольшая разность давлений, благодаря которой в норе, прорытой с учетом закона Бернулли, циркулирует воздух. Поток воздуха будет сильнее, если входы сделаны на разных уровнях (как это обычно и бывает), поскольку скорость ветра имеет тенденцию увеличиваться с высотой.

**Пример 13.3.** Вода циркулирует в отопительной системе. Если в подвале дома вода поступает в трубу диаметром 4,0 см со скоростью 0,50 м/с под давлением 3,0 атм, то каковы скорость течения и давление в трубе диаметром 2,6 см на втором этаже, расположенном на 5,0 м выше?

**Решение.** Вычислим сначала с помощью уравнения неразрывности (13.1) скорость $v_2$:

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = (0{,}50\ \text{м/с})\,\frac{(\pi)\,(0{,}020\ \text{м})^2}{(\pi)\,(0{,}013\ \text{м})^2} = 1{,}2\ \text{м/с}.$$

Для того чтобы найти давление, воспользуемся уравнением Бернулли:

$$P_2 = P_1 + \rho g(y_1 - y_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) =$$

$$= (3{,}0\cdot 10^5\ \text{Н/м}^2) + (1{,}0\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3)\times$$

$$\times (9{,}8\ \text{м/с}^2)(-5{,}0\ \text{м}) + \frac{1}{2}(1{,}0\times$$

$$\times 10^3\ \text{кг/м}^3)[(0{,}50\ \text{м/с})^2 - (1{,}2\ \text{м/с})^2] =$$

$$= 3{,}0\cdot 10^5\ \text{Н/м}^2 - 4{,}9\cdot 10^4\ \text{Н/м}^2 -$$

$$- 6{,}0\cdot 10^2\ \text{Н/м}^2 = 2{,}5\cdot 10^5\ \text{Н/м}^2.$$

Заметим, что в этом случае вклад от слагаемого, содержащего скорость, очень мал.

В уравнении Бернулли совсем не учитывается влияние трения (вязкости), а также сжимаемость жидкости или газа. Величину энергии, переходящей во внутреннюю (или потенциальную) энергию благодаря сжатию, а также в

[1)] Гофер – американский грызун, землеройка. – *Прим. перев.*

тепловую энергию за счет трения, можно учесть, добавляя соответствующие слагаемые в правую часть уравнения (13.2). Эти слагаемые довольно трудно вычислить теоретически, и их обычно определяют на опыте. Мы не будем рассматривать здесь эти вопросы; заметим лишь, что учет этих слагаемых не повлияет существенно на приведенные выше объяснения различных явлений.

## 13.4. Вязкость

Как мы уже упоминали, в реальных жидкостях и газах существует внутреннее трение, называемое **вязкостью**. Вязкость можно представить себе как трение при движении слоев среды относительно друг друга. В жидкости вязкость обусловлена силами когезии между молекулами, а в газах – столкновениями атомов или молекул.

Вязкость различных сред неодинакова: сироп более вязок, чем вода; консистентная смазка более вязка, чем картерное масло; жидкости, вообще говоря, обладают большей вязкостью, чем газы. Количественным выражением вязкости является *коэффициент вязкости* $\eta$ (греческая строчная буква «эта»), который определяется следующим образом. Между двумя плоскими пластинами находится слой жидкости (газа). Одна пластина удерживается неподвижно, а другая перемещается параллельно первой, как показано на рис. 13.7. Слои, непосредственно прилегающие к пластинам, удерживаются силами адгезии, действующими между молекулами среды и молекулами вещества пластин. Поэтому верхний слой жидкости движется с той же скоростью $v$, что и верхняя пластина, а нижний слой вместе с нижней пластиной остается неподвижным. Неподвижный слой тормозит движение вышележащего слоя, тот – следующего вышележащего и т. д. При этом скорость движения жидкости (газа) изменяется линейно от 0 до $v$, как показано на рисунке. Изменение скорости, деленное на расстояние между пластинами, т. е. отношение $v/l$, называется *градиентом скорости*. Чтобы переместить верхнюю пластину, требуется сила, в чем легко убедиться, двигая плоскую пластинку по лужице сиропа, налитой на стол. Для конкретной жидкости эта сила $F$ оказывается пропорциональной площади пластинки $A$ и скорости $v$ и обратно пропорциональной расстоянию между пластинами $l$; таким образом, $F \sim vA/l$. Если сравнивать различные жидкости, то при прочих равных условиях эта сила тем больше, чем выше вязкость жидкос-




Рис. 13.7. Определение вязкости.

ти. Коэффициент пропорциональности в последней формуле и есть *коэффициент вязкости* $\eta$:

$$F = \eta A v / l . \qquad (13.5а)$$

Отсюда $\eta = Fl/vA$. Следовательно, коэффициент вязкости в системе СИ измеряется в $Н \cdot с/м^2 = Па \cdot с$ (паскаль-секунда). В системе СГС коэффициент вязкости измеряется в $дин \cdot с/см^2$; эта единица называется *пуаз* (П). Значения коэффициента вязкости часто приводятся в *сантипуазах* (сП); $1\ сП = 10^{-2}$ П. В табл. 13.1 приведены коэффициенты вязкости различных жидкостей и газов; здесь же указана температура, при которой измерялась вязкость, так как температура оказывает весьма значительное влияние на вязкость; например, вязкость картерного масла с повышением температуры резко уменьшается.

*Таблица 13.1.* Коэффициенты вязкости некоторых жидкостей и газов

| Жидкость или газ | Температура, °С | Коэффициент вязкости $\eta$, $10^{-3}$ Па·с* |
|---|---|---|
| Вода | 0 | 1,8 |
| | 20 | 1,0 |
| | 100 | 0,3 |
| Кровь | 37 | $\approx 4$ |
| Плазма крови | 37 | $\approx 1{,}5$ |
| Этиловый спирт | 20 | 1,2 |
| Масло для двигателя (марки SAE 10) | 30 | 200 |
| Глицерин | 20 | 1500 |
| Воздух | 20 | 0,018 |
| Водород | 0 | 0,009 |
| Водяной пар | 100 | 0,013 |

* $1\ Па \cdot с = 10\ П = 1 \cdot 10^3\ сП$.

Формула (13.5а) справедлива, когда градиент скорости является постоянной величиной. В общем же случае градиент скорости может меняться, и тогда формула (13.5а) принимает вид

$$F = \eta A (dv/dy) , \qquad (13.5б)$$

где градиент скорости $dv/dy$ представляет собой производную скорости по координате в направлении, перпендикулярном скорости.

Прямая пропорциональность между силой и скоростью, которая предполагается в формуле (13.5а), имеет место не для всех жидкостей и газов (среды, для которых это справедливо, называются *ньютоновскими*). Для неньютоновских жидкостей коэффициент вязкости $\eta$ сам зависит от скорости; примерами таких жидкостей являются кровь (содержащая взвешенные частицы) и другие суспензии.

## *13.5. Ламинарное течение в трубах; формула Пуазейля

Если бы жидкость (газ) не обладала вязкостью, то для ее течения по горизонтальной трубе не требовалось бы прилагать никакую силу. Но благодаря вязкости стационарное течение любой реальной жидкости в трубе возможно лишь тогда, когда между концами трубы создана разность давлений – будь то вода в водопроводной трубе, нефть в нефтепроводе или кровь в системе кровообращения человека.

Объемный расход, или поток жидкости (т.е. объем жидкости), протекающей через поперечное сечение круглой трубы в единицу времени, зависит от вязкости жидкости, разности давлений и размеров трубы. Французский ученый Ж.-Л. Пуазейль (1799–1869), который занимался физическими аспектами кровообращения (и в честь которого названа единица вязкости пуаз), исследовал зависимость от этих параметров величины потока несжимаемой жидкости при ламинарном течении в цилиндрической трубе. Полученное им выражение называется **формулой Пуазейля**:

$$Q = \pi R^4 (P_1 - P_2)/8\eta L, \qquad (13.6)$$

где $R$ – внутренний радиус трубы, $L$ – длина трубы, $P_1 - P_2$ – разность давлений на концах трубы, $\eta$ – вязкость, а $Q$ – объемный расход, или поток жидкости.

Выведем формулу Пуазейля. Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости (газа) внутри цилиндрической трубы с внутренним радиусом $R$ (рис. 13.8). Благодаря адгезии между жидкостью и стенками трубы скорость жидкости у стенок равна (или почти равна) нулю. Будем считать поэтому, что скорость цилиндрического слоя жидкости, прилегающего к внутренней стенке трубы, равна нулю. Скорость каждого следующего слоя[1] из-за вязкого трения между ними лишь немного больше, чем скорость предыдущего слоя. Таким образом, скорость увеличивается к центру трубы и достигает максимума на осевой линии. Этот градиент скорости схематически показан на рис. 13.8. Определим сначала $v$ как функцию от $r$ для сплошного цилиндра жидкости радиусом $r$ ($r < R$),

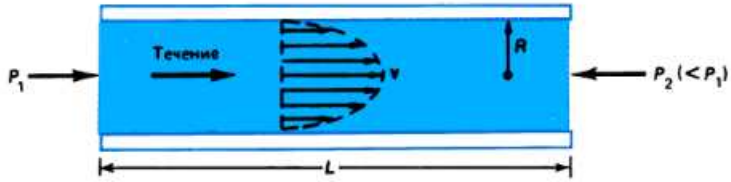



Рис. 13.8. Жидкость плотностью $\rho$ и вязкостью $\eta$, текущая по трубе радиусом $R$ вправо. Стрелками показаны значения скорости потока жидкости по сечению трубы.

[1] Слово «ламинарный» означает «слоистый». Таким образом, в нашей модели «ламинарное течение» мы понимаем как течение жидкости, разделенной на слои.

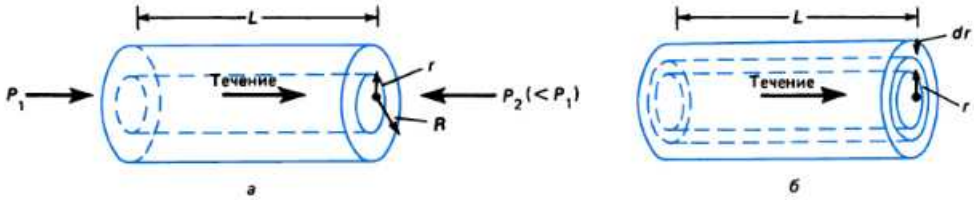



Рис. 13.9. К выводу формулы Пуазейля. Поток жидкости представляется в виде: *а* – сплошного цилиндра радиусом *r*; *б* – набора кольцевых цилиндров радиусом *r* и шириной *dr* (см. текст).

ось которого совпадает с осью трубы, как показано на рис. 13.9, *а*. На этот цилиндр за счет разности давлений на концах трубы действует следующая сила:

$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2,$$

где $\pi r^2$ – площадь торца цилиндра. Движение цилиндра жидкости тормозится силой вязкого трения между ним и прилегающим к нему слоем; величина этой силы дается формулой (13.5б), где в качестве $A$ нужно взять площадь боковой поверхности цилиндра $A = (2\pi r)(L)$:

$$F = -\eta(2\pi rL)(dv/dr);$$

здесь знак минус означает, что сила направлена противоположно движению. Поскольку мы рассматриваем стационарное течение, ускорение равно нулю. Следовательно, эти две силы взаимно компенсируются:

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -2\pi r\eta L(dv/dr).$$

Отсюда находим следующее выражение для градиента скорости:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}.$$

Проинтегрируем это выражение и найдем $v$ как функцию от $r$, где $r$ – расстояние от оси трубы (с учетом того, что $v = 0$ при $r = R$):

$$\int_0^v dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L}\int_R^r r\,dr,$$

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r,$$

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2). \qquad (13.7)$$

Как и следовало ожидать, наибольшая скорость достигается на оси трубы ($r = 0$); она пропорциональна квадрату радиуса трубы, а также *градиенту давления* $\Delta P/\Delta L = (P_1 - P_2)/L$.

Зная теперь $v$ как функцию от $r$, можно определить полный поток (объемный расход) $Q$ в трубе: $Q = dV/dt$. Поскольку скорость $v$ в поперечном сечении непостоянна, нельзя записать просто $Q = Av$, как в формуле (13.1). Поэтому разделим поперечное сечение трубы на узкие кольца шириной $dr$ (рис. 13.9, *б*), вычислим величину пото-

ка жидкости для каждого из этих колец и просуммируем по всем кольцам, чтобы получить полный поток. Площадь узкого кольца на рис. 13.9, *б* равна произведению длины окружности $2\pi r$ на ширину $dr$:

$$dA = 2\pi r\, dr.$$

Так как скорость жидкости зависит только от $r$ [выражение (13.7)], в пределах одного кольца ее можно считать постоянной. Таким образом, поток через узкое кольцо запишется в виде

$$dQ = v\, dA = \\ = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)\, 2\pi r\, dr.$$

Суммирование по всем кольцам дает полный поток в трубе:

$$Q = \int_{r=0}^{r=R} dQ = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = \\ = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \\ = \frac{\pi(P_1 - P_2)R^4}{8\eta L}.$$

Мы видим, что последнее выражение для полного потока жидкости совпадает с формулой (13.6). Таким образом, мы вывели формулу Пуазейля в предположении, что течение жидкости (или газа) в трубе является ламинарным.

**Пример 13.4.** Масло для двигателя (марки SAE 10 из табл. 13.1) пропускается в экспериментальной модели по тонкой трубочке диаметром 1,80 мм. Длина трубки 5,5 см. Какой должна быть разность давлений, чтобы поддерживать поток жидкости на уровне 5,6 мл/мин?

**Решение.** В единицах СИ поток равен $Q = (5{,}6\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3)/(60\ \text{с}) = 9{,}3\cdot 10^{-8}\ \text{м}^3/\text{с}$. Переведя и остальные данные в систему СИ, подставим соответствующие значения в формулу (13.6):

$$P_1 - P_2 = \frac{8\eta LQ}{\pi R^4} = \\ = \frac{8(2{,}0\cdot 10^{-1}\ \text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2)(5{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{м})(9{,}3\cdot 10^{-8}\ \text{м}^3/\text{с})}{3{,}14(0{,}90\cdot 10^{-3}\ \text{м})^4} = \\ = 4{,}0\cdot 10^3\ \text{Н}/\text{м}^2,$$

что дает около 0,040 атм.

Согласно формуле Пуазейля, поток жидкости $Q$ пропорционален градиенту давления $(P_1 - P_2)/L$ и обратно пропорционален вязкости жидкости (газа). Это как раз то, чего и следовало ожидать. Однако может показаться удивительным, что $Q$ зависит от *четвертой* степени радиуса трубы. Это означает, что при одном и том же градиенте давления увеличение радиуса трубы вдвое приведет к увеличению потока в шестнадцать раз! Таким образом, даже небольшое изменение радиуса трубы приводит к значительному изменению потока; для того же,

чтобы поддерживать поток на прежнем уровне, пришлось бы заметно изменить разность давлений.

Интересный пример зависимости вида $R^4$ можно найти в системе кровообращения человеческого организма. Однако, поскольку формула Пуазейля справедлива лишь для ламинарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью $\eta$, она не может в точности выполняться для крови; дело в том, что течение крови не вполне ламинарно, кровь содержит взвешенные частицы (диаметр которых почти равен диаметру капилляров), а ее вязкость $\eta$ зависит от скорости течения $v$. Тем не менее и в этом случае формула Пуазейля является хорошим приближением в первом порядке. Поток крови в организме регулируется крошечными мышцами, окружающими сосуды. При сокращении этих мышц диаметр сосуда уменьшается и поток, который в соответствии с формулой (13.6) пропорционален $R^4$, резко уменьшается уже при небольшом уменьшении радиуса. Таким образом, едва заметными сокращениями этих мышц очень точно контролируется поступление крови к различным органам. Однако если, скажем, вследствие атеросклероза (затвердевания стенок сосудов) и отложений холестерина радиус сосудов уменьшается, то для поддержания нормального кровотока требуется более высокий градиент давления. Если радиус сосудов уменьшится вдвое, то сердцу придется увеличить давление в 16 раз. В таких условиях сердце работает с перегрузкой, но, как правило, уже не может обеспечить требуемую величину потока, т. е. нормальное кровообращение. Таким образом, повышенное артериальное давление указывает и на то, что сердце работает с перегрузкой, и на то, что поток крови через артерии ниже нормы.

## *13.6. Турбулентное течение в трубах; число Рейнольдса

Если скорость течения велика, то течение в трубе становится турбулентным и формула Пуазейля уже не справедлива. При данной разности давлений поток $Q$ в турбулентном течении оказывается меньше, чем рассчитанный по формуле (13.6). Это объясняется тем, что при турбулентном течении трение значительно выше, чем при ламинарном.

Возникновение турбулентности часто бывает внезапным и определяется так называемым *числом Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = 2\bar{v}r\rho/\eta, \qquad (13.8)$$

где $\bar{v}$ – средняя скорость течения жидкости (газа)[1], $\rho$ – плотность, $\eta$ – вязкость, $r$ – радиус трубы. Опыты показы-

[1] Средняя скорость $\bar{v}$ определяется как скорость течения, которая, будучи постоянной по всему сечению трубы, обеспечивала бы такую же величину потока жидкости $Q$.

вают, что обычно при Re < 2000 течение ламинарное, а при Re > 2000 оно становится турбулентным.

**Пример 13.5.** Средняя скорость крови в аорте ($r = 1{,}0$ см) в фазе расслабления равна примерно 30 см/с. Является ли течение крови ламинарным или турбулентным?

**Решение.** Чтобы ответить на этот вопрос, найдем число Рейнольдса, пользуясь значениями $\rho$ и $\eta$ из табл. 12.1 и 13.1:

$$\mathrm{Re} = \frac{(2)(0{,}30\ \text{м/с})(0{,}010\ \text{м})(1{,}05\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3)}{(4{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{Н}\cdot\text{с/м}^2)} = 1600.$$

Течение, по-видимому, будет ламинарным, но близким к возникновению турбулентности.

Из этого примера видно, что, поскольку 1 Н = 1 кг·м/с$^2$, число Рейнольдса не имеет размерности. Это *безразмерная величина*, значение которой не зависит от выбора системы единиц измерения.

## *13.7. Движение тела в жидкости; осаждение частиц и лобовое сопротивление

В предыдущем разделе мы узнали, какое влияние оказывает вязкость (вместе с другими факторами) на движение жидкости (газа) в трубе. Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию, а именно движение тела внутри жидкости или газа. Этим телом может быть препятствие в потоке жидкости (например, утес посреди реки) или же какой-либо предмет, движущийся в жидкой или газовой среде: автомобиль или планер, подводная лодка или, возможно, молекула, осаждаемая на центрифуге.

Когда тело движется относительно жидкости (газа), на него действует сила со стороны среды. Эта сила называется *силой лобового сопротивления*; она возникает благодаря вязкости среды, а также (при больших скоростях) вследствие возникновения турбулентности позади тела.

Для описания движения тела относительно жидкости или газа удобно ввести еще одно число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}' = vL\rho/\eta, \qquad (13.9)$$

где $\rho$ и $\eta$ – плотность и вязкость жидкости, $v$ – скорость тела относительно среды, а $L$ – характерная длина тела. Следует четко отличать это число Рейнольдса от числа Рейнольдса для течения жидкости (газа) в трубе; хотя они и похожи по виду, но относятся к разным явлениям.

Когда число Рейнольдса в рассматриваемом теперь случае меньше единицы[1)], обтекающий тело поток являет-

[1)] Число Рейнольдса равно единице для тела длиной 1 мм, движущегося в воде со скоростью 1 мм/с, или для тела длиной 2 мм, движущегося в воздухе со скоростью 7 мм/с. Таким образом, наше рассмотрение связано главным образом с малыми телами: дождевыми каплями, частицами цветочной пыльцы и молекулами в центрифуге.

ся, по существу, ламинарным; опытным путем установлено, что сила вязкого трения $F_в$ прямо пропорциональна скорости объекта:

$$F_в = kv. \qquad (13.10)$$

Значение коэффициента $k$ зависит от размеров и формы тела, а также от вязкости жидкости (газа). В частности, для сферы радиусом $r$ мы имеем

$k = 6\pi r\eta$ [сфера].

Таким образом, сила вязкого трения, действующая на малое сферическое тело в ламинарном потоке, дается формулой Стокса:

$F_в = 6\pi r\eta v$ [для сферы].

При бóльших значениях числа Рейнольдса (обычно в интервале 1–10) в потоке позади тела возникает турбулентное течение, называемое спутным следом (см. рис. 13.1, *б*), и для сферы сила лобового сопротивления будет больше, чем это предсказывает формула Стокса. Однако для тел обтекаемой формы турбулентность слабее, и, следовательно, сила сопротивления уменьшается. При наличии турбулентности лобовое сопротивление, как показывает опыт, растет уже пропорционально квадрату скорости: $F_в \sim v^2$. Таким образом, лобовое сопротивление увеличивается гораздо быстрее с возрастанием скорости, чем при ламинарном обтекании. Когда число Рейнольдса достигает значения порядка $10^6$, лобовое сопротивление резко возрастает; при этом турбулентность возникает не только позади тела, но и в прилегающем к нему слое жидкости (газа) – в так называемом *пограничном слое* – вдоль всей поверхности тела.

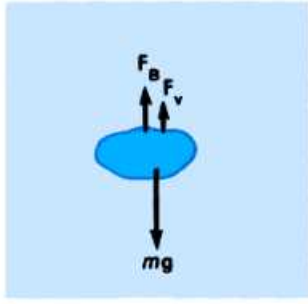



Рис. 13.10. Силы, действующие на небольшое тело, свободно падающее в жидкости.

Под *осаждением (седиментацией)* понимают падение малых тел в жидкой или газообразной среде. Так осаждаются в океане частицы, образующие донные отложения, или красные кровяные тельца в плазме крови в лаборатории.

На тело массой $m$, падающее в жидкости или газе в поле силы тяжести, действует несколько сил (рис. 13.10): сила тяжести $mg$, выталкивающая сила $F_в$ со стороны жидкости и сила вязкого сопротивления $F_в$. Согласно второму закону Ньютона, сумма этих сил равна произведению массы тела на его ускорение:

$$mg - F_в - F_в = ma.$$

Выталкивающая сила $F_в$ равна весу вытесненной жидкости: $F_в = \rho_f Vg$, где $\rho_f$ – плотность жидкости (газа), $V$ – объем тела (равный объему вытесненной жидкости), а $g$ – ускорение свободного падения. Мы можем также написать $mg = \rho_0 Vg$, где $\rho_0$ – плотность тела. Используя (13.10), уравнение для сил можно переписать в виде

$$(\rho_0 - \rho_f)Vg - kv = ma. \qquad (13.11)$$

Первый член представляет собой эффективный вес тела в жидкости. Когда скорость тела увеличивается, сила вязкого сопротивления возрастает, до тех пор пока она не уравняется с эффективным весом тела. При этом ускорение становится равным нулю и рост скорости прекращается. Это максимальное значение $v_т$ скорости называется *установившейся скоростью* или *скоростью осаждения*; ее можно найти из выражения (13.11), полагая в нем $a = 0$:

$$v_т = \frac{(\rho_0 - \rho_f) Vg}{k}. \tag{13.12}$$

Скорость осаждения малых тел, таких, как макромолекулы и другие составные части клеток, очень невелика. Ее можно увеличить с помощью центрифуги (гл. 5), поскольку в центрифуге на частицу действует такая сила, как если бы ускорение свободного падения увеличилось до значения $\omega^2 r$ [см. выражение (9.6)]; здесь $\omega$ – угловая скорость вращения ротора центрифуги, а $r$ – расстояние от тела (частицы) до оси вращения. Таким образом, формулу (13.12) можно применить и к условиям центрифуги, заменив ускорение свободного падения $g$ на ускорение $\omega^2 r$:

$$v_т = \frac{(\rho_0 - \rho_f) V\omega^2 r}{k}. \tag{13.13}$$

Центрифугирование используется часто для разделения сходных, но различающихся немного частиц или макромолекул (например, двух типов нуклеиновых кислот), а также для получения ценной информации о размерах и массе частиц.

**Заключение**

Течение жидкости, при котором слои жидкости (газа) скользят упорядоченно и плавно вдоль так называемых линий тока, называется *ламинарным*. Если же течение является неупорядоченным и содержит завихрения, оно называется *турбулентным*. *Вязкость* относится к внутреннему трению, препятствующему свободному течению жидкости. Вязкое трение можно представить себе как трение между смежными слоями жидкости, движущимися относительно друг друга.

*Объемный (массовый) расход*, или поток жидкости (газа), определяется как объем (масса) жидкости, проходящей через данное поперечное сечение в единицу времени. *Уравнение неразрывности* утверждает, что для установившегося ламинарного потока жидкости (газа) в трубе со стенками (необязательно постоянного сечения) массовый расход (произведение плотности среды, скорости и площади поперечного сечения трубы) есть величина постоянная во всех точках трубы: $\rho A v = \text{const}$. Если среда несжимаема, то $Av = \text{const}$.

*Закон Бернулли* утверждает, что давление ниже в том месте, где скорость течения больше, и наоборот. *Уравне-*

*ние Бернулли* для стационарного ламинарного течения несжимаемой жидкости в трубке тока (непостоянного поперечного сечения и переменного уровня по высоте) имеет вид

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

для любой пары точек вдоль трубки тока.

## Вопросы

1. Может ли ламинарный поток быть сжимаемым или несжимаемым? Вязким или невязким? Стационарным или нестационарным? Вихревым или безвихревым? Для каждого положительного ответа приведите пример, отрицательный ответ объясните.
2. Может ли турбулентный поток быть сжимаемым или несжимаемым? Вязким или невязким? Стационарным или нестационарным? Вихревым или безвихревым? Для каждого положительного ответа приведите пример, отрицательный ответ объясните.
3. Под действием каких сил жидкость на рис. 13.2 ускоряется при переходе от сечения $A_1$ к сечению $A_2$?
4. Почему струя воды из крана сужается книзу?
5. Если держать на весу две полоски бумаги в нескольких сантиметрах друг от друга (рис. 13.11) и подуть между ними, то как будут



Рис. 13.11.

двигаться полоски? Проделайте этот опыт и объясните его результат.
6. Во время игры в бейсбол питчер (метающий) при подаче придает мячу закрутку, чтобы мяч летел по дуге. Используя уравнение Бернулли, разберите обстоятельно причину искривления траектории мяча. Объясните, почему закрученный мяч с гладкой поверхностью отклоняется в противоположную сторону, нежели мяч с ворсистой обшивкой (такой, как бейсбольный или теннисный).
7. Почему самолеты обычно взлетают против ветра?
8. Детей предупреждают, чтобы они не стояли близко к краю платформы, когда мимо проходит поезд, поскольку поток воздуха может втянуть под колеса. Возможно ли это? Объясните.
9. Во время бури или смерча с домов иногда срывает крыши. Используя уравнение Бернулли, объясните, отчего это происходит.
10. Почему брезентовый верх автомобиля раздувается при быстрой езде?
11. Если два судна, идущие параллельным курсом, проходят близко друг от друга, они рискуют столкнуться. Почему?
12. Объясните, почему скорость ветра увеличивается с увеличением расстояния от поверхности земли. (*Подсказка*: см. рис. 13.7.) Какую пользу извлекает из этого крот, нора которого имеет два входа на разных уровнях?
13. Одинаковые стальные шарики опускают в одинаковые сосуды с водой. В одном сосуде температура воды 10 °C, в другом 40 °C. В каком сосуде шарик скорее достигнет дна?
14. Почему машинное масло (и любая другая жидкость) выливается из жестянки быстрее и ровнее, если в крышке банки проделано не одно отверстие, а два с противоположных сторон? При каких условиях струя будет плавной, когда в крышке сделано одно отверстие?
15. Когда колибри парит над цветком, она затрачивает в 20 раз больше энергии, чем в свободном полете. Почему?

*16. Кровяные тельца стремятся двигаться вместе с током крови ближе к оси сосудов. Почему?

*17. Покажите, что течение вязкой жидкости в трубе (рис. 13.8) является вихревым.

## Задачи

Раздел 13.2

1. (I) Пользуясь данными примера 13.1, рассчитайте среднюю скорость кровотока в крупных

артериях, суммарная площадь поперечного сечения которых равна примерно 2,0 см$^2$.

2. (I) С помощью воздуховода радиусом 15 см воздух в комнате размером 10 м × 5,1 м × 3,2 м полностью обновляется за 10 мин. Какова средняя скорость воздушного потока в трубе?

3. (I) Сколько времени потребуется, чтобы заполнить водой бассейн глубиной 3,1 м, шириной 9,5 м и длиной 21,0 м, если вода поступает из шланга диаметром 1,9 см со скоростью 1,5 м/с?

4. (II) Струя воды из крана сужается книзу. Выведите формулу для диаметра струи в зависимости от расстояния $y$ до крана. Начальная скорость воды при вытекании из крана равна $v_0$, а диаметр отверстия крана $D$.

Раздел 13.3

5. (I) Покажите, что в отсутствие течения ($v_1 = v_2 = 0$) уравнение Бернулли превращается в формулу (12.6) для гидростатического давления.

6. (I) С какой скоростью вытекает вода из отверстия в дне бака, наполненного до высоты 4,6 м? Вязкость не учитывать.

7. (I) Каким должно быть избыточное давление в водопроводе, чтобы струя из пожарного шланга била на высоту 25 м?

8. (I) Каким должен быть напор (в метрах), чтобы вода вытекала из крана со скоростью 8,0 м/с? Вязкость не учитывать.

9. (II) Если скорость ветра над вашим домом равна 25 м/с, то какая сила действует на крышу площадью 250 м$^2$?

10. (II) Если давление (абсолютное) воды в водопроводе на уровне земли равно 2,75 × × 10$^5$ Н/м$^2$, то достаточно ли этого давления, чтобы подать воду на верхний этаж проектируемого здания высотой 50 м? Если не достаточно, то какую максимальную высоту может иметь здание?

11. (II) Чему равен объемный расход, или поток воды, вытекающей из водопроводного крана диаметром 1,8 см при напоре 10 м?

12. (II) Чему равна подъемная сила крыла, обусловленная эффектом Бернулли, если площадь крыла равна 50 м$^2$, а скорости потока воздуха над крылом и под ним равны соответственно 320 и 290 м/с?

13. (II) Покажите, что мощность, необходимая для прокачивания жидкости по трубе, равна произведению объемного расхода (потока) $Q$ на разность давлений $P_1 - P_2$.

14. (II) Вода из водопроводной магистрали диаметром 5,0 см на уровне земли поступает в административное здание под давлением 3,3 атм со скоростью 0,50 м/с. На верхнем этаже на высоте 25 м труба сужается до диаметра 2,5 см. Вычислите скорость течения и давление в трубе на верхнем этаже. (Вязкость не учитывать.)

15. (II) Масса самолета равна 2,0·10$^6$ кг. Скорость воздушного потока под крылом площадью 1200 м$^2$ составляет 100 м/с. Какой должна быть скорость потока над крылом, чтобы самолет держался в воздухе? Рассмотрите только эффект Бернулли.

16. (II) Рабочий объем четырехцилиндрового автомобильного двигателя равен 2000 см$^3$; примерно таков объем воздуха, засасываемого во все четыре цилиндра за один оборот коленчатого вала. Если двигатель развивает 1500 об/мин, а радиус диффузора в карбюраторе равен 2,5 см, то а) с какой скоростью движется воздух в диффузоре (трубка Вентури)? б) Чему равно в диффузоре давление (в атмосферах)?

17. (II) Покажите, что если учесть скорость снижения уровня в баке на рис. 13.4, то скорость жидкости, вытекающей из отверстия внизу, равна

$$v_1 = \sqrt{2gh/(1 - A_1^2/A_2^2)},$$

где $h = y_2 - y_1$, а $A_1$ и $A_2$ – площади соответственно отверстия и поверхности жидкости в баке.

18. (II) Пусть на поверхность жидкости в сосуде на рис. 13.4 действует внешнее давление $P_0$. а) Выведите формулу для скорости $v_1$, с которой жидкость вытекает из отверстия внизу, где

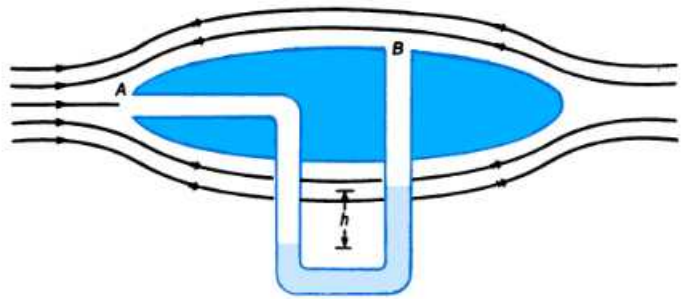



Рис. 13.12. Трубка Пито.

давление $P_A$ равно атмосферному. (Считайте скорость снижения уровня $v_2$ равной нулю.) б) Найдите $v_1$ для воды, если $P_0 = 0{,}85$ атм, а $y_2 - y_1 = 2{,}1$ м.

19. (II) *Трубка Пито* – это устройство для измерения скорости потока (рис. 13.12). Жидкость (газ) проходит мимо отверстия $B$ со скоростью $v$, а у отверстия $A$ находится в покое. Разность давлений $P_A - P_B$ измеряется манометром. а) Запишите выражение для скорости $v$ через плотность движущейся среды $\rho_f$, манометрическую разность высот $h$ и плотность жидкости в манометре $\rho_M$. б) Миниатюрная трубка Пито с ртутным манометром используется для измерения скорости кровотока. Чему равна эта скорость, если $h = 20$ мм?

20. (II) Труба диаметром 6,0 см, плавно сужаясь, переходит в трубу диаметром 4,0 см. Когда по трубе идет вода, избыточное давление в этих сечениях равно соответственно 32 и 24 кПа. Чему равен поток, или объемный расход?

21. (II) *Реактивная тяга*. а) Пользуясь уравнением Бернулли и уравнением неразрывности, покажите, что скорость истечения газов из ракеты дается выражением

$$v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho},$$

где $\rho$ – плотность газа, $P$ – давление газа внутри ракеты, $P_0$ – атмосферное давление сразу за выходным отверстием. Считайте, что плотность газа остается постоянной, площадь $A_0$ выходного отверстия (сопла) много меньше площади поперечного сечения $A$ ракеты (пусть она представляет собой большой цилиндр), а скорость газа не столь велика, чтобы возникла заметная турбулентность. б) Покажите, что тяга, создаваемая выходящими из ракеты газами, равна

$$F = 2A_0(P - P_0).$$

22. (II) а) Покажите, что скорость потока, измеряемая с помощью трубки Вентури, дается выражением

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

(рис. 13.6, *а*). б) Для манометра, показанного на рис. 13.6, *б*, выразите скорость потока $v_1$ через $h$ и другие параметры. в) Трубка Вентури используется для измерения скорости течения воды. Диаметр самой трубки равен 3,0 см, а диаметр сужения 1,0 см. Измеренная разность давлений $P_1 - P_2$ равна 18 мм рт. ст. Вычислите скорость потока воды.

23. (III) Пусть отверстие в баке на рис. 13.4 располагается на высоте $h_1$ от дна, а поверхность жидкости – на высоте $h_2$ от дна. Бак стоит на земле на горизонтальной площадке. а) На каком расстоянии от стенки бака струя попадет на площадку? б) На какой высоте $h_1'$ нужно проделать второе отверстие, чтобы струя из него попала в ту же точку?

24. (III) а) Покажите, что уровень жидкости в баке на рис. 13.4 $h = y_2 - y_1$ опускается со скоростью

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{2ghA_1^2}{A_2^2 - A_1^2}},$$

где $A_1$ и $A_2$ – площади соответственно отверстия и поверхности жидкости (вязкость не учитывается). б) Интегрируя выражение в п. «а», найдите $h$ как функцию времени. Положите $h = h_0$ при $t = 0$. в) За какое время выльется вода из цилиндра высотой 9,4 см, в которой налито 1,0 л воды, если отверстие находится у самого дна и имеет диаметр 0,50 см?

Раздел 13.4

25. (II) Вискозиметр (прибор для измерения вязкости) состоит из двух концентрических цилиндров диаметром 10,20 и 10,60 см. Исследуемую жидкость наливают в зазор между цилиндрами до уровня 12,0 см. Внешний цилиндр закрепляется, а внутренний вращается с частотой 62 об/мин, причем вращающий момент сил равен 0,024 Н·м. Какова вязкость жидкости?

26. (II) а) Покажите, что вязкая жидкость на рис. 13.7 испытывает деформацию сдвига, во многом аналогичную твердому телу (разд. 11.4). б) Покажите, что скорость изменения во времени деформации сдвига равна $v/l$. в) Покажите, что коэффициент вязкости определяется как

$$\eta = \frac{\text{Напряжение сдвига}}{\text{Скорость изменения деформации сдвига}}.$$

*Раздел 13.5

*27. (I) Оцените объемный расход (поток) воды в трубе диаметром 1,0 см и длиной 15 м, если разность давлений на ее концах равна 0,35 атм, а температура 20 °С.

*28. (I) Садовник решил, что поливка сада с помощью шланга диаметром 1 см занимает слишком много времени. Во сколько раз быстрее он сможет полить сад из шланга диаметром 1,6 см, если все остальное останется без изменения?

*29. (II) Пользуясь данными примера 13.1 и табл. 13.1, вычислите перепад давлений вдоль аорты на длине, равной 1 см.

*30. (II) Если градиент давления является постоянным, то во сколько раз должен уменьшиться диаметр кровеносного сосуда, чтобы

поток крови (объемный расход) уменьшился на 80%?

*31. (II) Пациенту делают переливание крови. Кровь поступает по трубке из поднятого вверх сосуда в иглу, введенную в вену. Внутренний диаметр иглы 0,50 мм, длина иглы 4,0 см; требуется вводить 4,0 $см^3$ крови в минуту. На какой высоте от иглы должен находиться сосуд? Значения $\rho$ и $\eta$ возьмите из табл. 12.1 и 13.1. Давление крови в вене превышает атмосферное на 20 мм рт. ст.

*32. (II) а) Чему должна равняться разность давлений на концах двухкилометрового нефтепровода диаметром 40 см, чтобы нефть ($\rho$ = = 950 $кг/м^3$, $\eta$ = 2,0 П) поступала в количестве 400 $см^3/с$? б) Какое количество тепловой энергии выделяется при этих условиях в единицу времени?

*33. (II) Какой диаметр должен иметь воздуховод длиной 30 м, чтобы вентиляционно-отопительная система полностью обновляла воздух в помещении размером 10 × 18 × 4,0 м каждые 10 мин? Насос системы создает избыточное давление $4{,}0 \cdot 10^{-4}$ атм.

*34. (II) Воду необходимо подавать по трубе диаметром 10,0 см на расстояние 300 м. Дальний конец трубы на 20 м выше насоса и открывается в атмосферу. Какое избыточное давление должен создавать насос, чтобы вода вообще текла по трубе?

*35. (II) Покажите, что кривая зависимости $v$ от $r$ (скорости ламинарного течения от расстояния до центра трубы) представляет собой параболу [см. рис. 13.8 и формулу (13.7)].

*36. (II) Скорость течения воды в центре трубы диаметром 5,2 см и длиной 20 м равна 18 см/с. Определите: а) разность давлений на концах трубы; б) объемный расход (поток).

*37. (II) Вязкая жидкость течет по круглой трубе (рис. 13.8). Покажите, что средняя скорость течения (скорость, постоянная по поперечному сечению, при которой объемный расход был бы прежним) равна половине скорости течения в центре трубы (т. е. половине максимальной скорости).

*38. (II) Вода в фонтане бьет на 14,6 м вверх из трубы диаметром 1,0 см. Какое давление должен создавать насос, находящийся под землей на глубине 4,2 м от выпускного отверстия? (Учтите вязкость, а сопротивлением воздуха пренебрегите.) Отметьте любые сделанные вами упрощающие предположения.

*39. (II) С помощью сифона переливают воду при температуре 20 °С из одного сосуда в другой (рис. 12.21). а) Определите объемный расход, если диаметр шланга равен 1,2 см, а разность уровней воды в сосудах 64 см. б) На какую максимальную высоту можно поднять изгиб шланга, чтобы сифон еще действовал?

*Раздел 13.6

*40. (I) При большой физической нагрузке скорость кровотока иногда увеличивается вдвое. Пользуясь данными примера 13.5, рассчитайте число Рейнольдса и определите, турбулентным или ламинарным будет течение крови в аорте.

*41. (I) Рассчитайте число Рейнольдса для течения крови в капилляре, если скорость течения равна $4{,}7 \cdot 10^{-2}$ см/с.

*42. (II) Чему равен максимальный объемный расход воды $Q$ в трубе диаметром 10 см, при котором еще не возникает турбулентность?

*Раздел 13.7

*43. (I) Чему равна установившаяся скорость всплытия воздушного пузырька радиусом 1,0 мм (считая радиус постоянным) в масле вязкостью $\eta$ = 0,20 Па · с и плотностью $\rho$ = = 900 $кг/м^3$?

*44. (I) Чему равна установившаяся скорость стального шарика радиусом 2,0 см, падающего в воздухе (обтекание считать ламинарным)?

*45. (II) В ультрацентрифуге, ротор которой вращается с частотой 30 000 об/мин, частица, находящаяся в среднем на расстоянии 8,0 см от оси вращения, осаждается за 30 мин. Какое время потребовалось бы для ее осаждения под действием силы тяжести в той же пробирке, установленной в лаборатории вертикально?

46. (II) а) Покажите, что установившаяся скорость падения маленького шарика плотностью $\rho_0$ в жидкости (газе) с плотностью $\rho_f$ и вязкостью $\eta$ дается выражением

$$v_T = \frac{2}{9}\frac{(\rho_0 - \rho_f) r^2 g}{\eta}.$$

б) Чему равна установившаяся скорость падения сферической дождевой капли радиусом $r$ = 0,020 см в воздухе?

*47. (II) Вязкость $\eta$ жидкости можно определить, измеряя установившуюся скорость падения $v_T$ маленького шарика в жидкости. Найдите выражение для $\eta$ через радиус $r$, плотность $\rho$ шарика и плотность $\rho_f$ жидкости. Предположите, что турбулентности не возникает.

48. (II) а) Покажите, что выталкивающая сила, действующая на небольшое тело в жидкости внутри центрифуги, дается выражением

$$F_в = \rho_f V \omega^2 r,$$

где $\omega$ – угловая скорость вращения ротора центрифуги, $V$ – объем тела, $r$ – расстояние до оси вращения, а $\rho_f$ – плотность жидкости. б) Сравните зависимость $F_в$ от положения частицы с такой же зависимостью выталкивающей

силы, действующей на частицу, осаждаемую в поле силы тяжести.

**49.** (II) Покажите, что давление в жидкости во вращающейся центрифуге на расстоянии $r$ от оси вращения дается выражением

$$P = (1/2)\,\rho_f\,\omega^2\,(r^2 - r_0^2),$$

где $\rho_f$ – плотность жидкости, $r_0$ – расстояние от оси вращения до поверхности жидкости в пробирке, а $\omega$ – угловая скорость вращения ротора центрифуги.

# 14 Колебания

Многие тела способны колебаться, или осциллировать: груз на конце пружины, камертон, колесико балансира в часах, маятник, пластмассовая линейка, крепко прижатая одним концом к краю стола, струны гитары или фортепиано. Пауки обнаруживают попавшую в их сети добычу по дрожанию паутины, корпус автомобиля колеблется вверх-вниз на рессорах, когда автомобиль проезжает неровности, дома и мосты дрожат при проезде тяжелых грузовиков и даже при сильном ветре. Вообще, поскольку твердые тела в большинстве своем упруги (см. гл. 11), почти все материальные предметы колеблются (хотя бы недолго), после того как на них подействует импульс силы. Электрические колебания происходят в радиоприемниках и телевизорах. На атомном уровне атомы колеблются в молекулах, а в твердом теле атомы совершают колебания относительно своих фиксированных положений в решетке. Колебательное движение имеет огромную важность, поскольку оно широко распространено и встречается во многих разделах физики. Его не следует рассматривать как какой-то «новый» раздел физики, поскольку ньютонова механика дает полное описание колебаний механических систем.

## 14.1. Колебания пружины

Говоря о *колебаниях*, или *осцилляциях*, тела, мы подразумеваем повторяющееся движение его туда и обратно по одной и той же траектории. Иными словами, движение является **периодическим**. Простейшим примером периодического движения служат колебания груза на конце пружины. Многие другие виды колебательных движений проявляют большое сходство с этими колебаниями; поэтому мы разберем этот пример подробно. Будем считать, что массой пружины можно пренебречь и что пружина установлена горизонтально, как показано на рис. 14.1, *а*. К одному концу пружины прикреплен груз массой $m$, который движется без трения по горизонтальной поверхности. Любая пружина имеет определенное значение длины, при котором с ее стороны на груз не действует сила; в этом случае говорят, что пружина

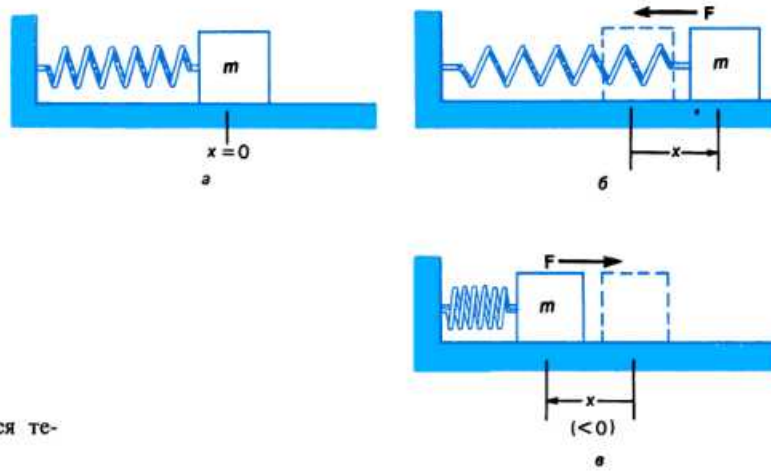



Рис. 14.1. Колеблющееся тело на конце пружины.

находится в **положении равновесия**. Если сдвинуть груз вправо, растягивая пружину, или влево, сжимая ее, то пружина действует на груз с силой, которая стремится вернуть его в положение равновесия; такую силу называют возвращающей. Для нашей системы возвращающая сила $F$ прямо пропорциональна расстоянию $x$, на которое сжимается или растягивается пружина (рис. 14.1, *б* и *в*):

$$F = -kx. \tag{14.1}$$

Формула (14.1) справедлива до тех пор, пока пружина не сжимается настолько, что ее витки приходят в соприкосновение, или не растягивается сверх предела упругости (рис. 11.9). Знак минус означает, что возвращающая сила всегда противоположна по направлению перемещению $x$. Если на рис. 14.1 мы направим ось, например, вправо, то при растягивании пружины $x$ будет положительным, а возвращающая сила $F$ будет направлена влево. Заметим, что положение равновесия мы выбрали в точке $x = 0$. Когда пружину сжимают, сила направлена вправо (рис. 14.1, *в*). Постоянная $k$ в формуле (14.1) называется жесткостью пружины. Для того чтобы растянуть пружину на длину $x$, к ней необходимо приложить внешнюю силу, равную по меньшей мере $F = +kx$. Чем больше значение $k$, тем бóльшая сила необходима для растягивания пружины на одну и ту же длину. Иными словами, чем жестче пружина, тем больше постоянная $k$.

Что же произойдет, если пружину растянуть на длину $x = A$, как показано на рис. 14.2, *а*, и затем отпустить? Пружина действует на груз с силой, которая стремится вернуть его в положение равновесия. Но поскольку эта сила сообщает грузу ускорение, груз приходит в положение равновесия со значительной скоростью. Заметим, что в положении равновесия сила, действующая на груз, уменьшается до нуля, а скорость его в этой точке макси-

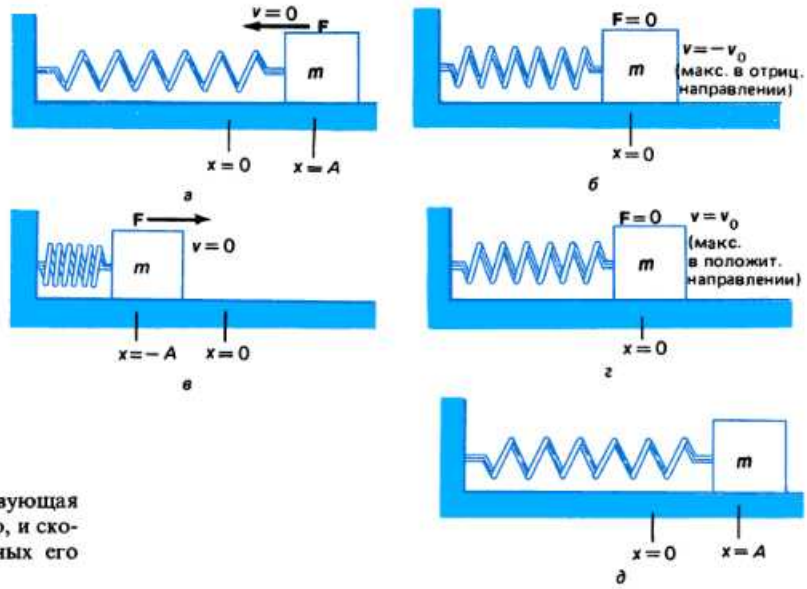



Рис. 14.2. Сила, действующая на колеблющееся тело, и скорость тела в различных его положениях.

мальна (рис. 14.2, *б*). Когда груз, проскочив положение равновесия, движется влево, сила со стороны пружины замедляет его, и в точке $x = -A$ груз на мгновение останавливается (рис. 14.2, *в*), а затем начинает двигаться в противоположном направлении (рис. 14.2, *г*), пока не придет в точку $x = A$ (рис. 14.2, *д*), откуда он начал движение. Затем весь этот процесс повторяется.

Для изучения колебательного движения нам придется ввести несколько терминов. Расстояние $x$ груза от положения равновесия до точки, в которой в данный момент времени находится груз, называют **смещением**. Максимальное смещение – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется **амплитудой** и обозначается, как правило, буквой $A$. Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от $x = A$ к $x = -A$ и обратно в $x = A$, называется *полным колебанием*. **Период** $T$ – это время, за которое совершается одно полное колебание. Наконец, **частота** $f$ определяется как число полных колебаний в 1 с. Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 герц = 1 полное колебание в секунду. Очевидно, что

$$f = 1/T, \quad T = 1/f. \tag{14.2}$$

Например, если частота равна 5 Гц, то период колебаний составляет 1/5 с.

Колебания пружины, подвешенной вертикально, по существу, ничем не отличаются от колебаний горизонтальной пружины. Из-за действия силы тяжести длина вертикальной пружины в положении равновесия будет больше, чем если бы та же пружина была установлена горизонтально. Однако если смещение отсчитывать от

нового положения равновесия, то формулу (14.1) для этой пружины можно использовать без изменений с тем же значением $k$. (Доказать это мы предлагаем читателю в задаче 9, помещенной в конце настоящей главы.)

## 14.2. Гармонические колебания

Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком [например, $F = -kx$ в формуле (14.1)], совершает **гармонические колебания**. Саму такую систему часто называют **гармоническим осциллятором**. В гл. 11 (разд. 11.4) мы показали, что при не слишком больших смещениях сжатие и растяжение многих твердых тел происходит в соответствии с формулой (14.1). Поэтому колебания в природе чаще всего бывают гармоническими или близкими к гармоническим.

Определим теперь, как изменяется смещение $x$ в зависимости от времени. Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона: $F = ma$. Поскольку ускорение равно $a = d^2x/dt^2$, мы можем записать уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \tag{14.3а}$$

где $m$ – масса колеблющегося тела[1]. Преобразуя это уравнение, его можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{14.3б}$$

Уравнение (14.3б) называется *уравнением движения* гармонического осциллятора. В математике это уравнение называется *дифференциальным уравнением*, поскольку в него входят производные. Нам необходимо выяснить, какая функция времени $x(t)$ удовлетворяет данному уравнению. Вид решения подсказывает такой опыт: если к колеблющемуся грузу прикрепить карандаш (рис. 14.3) и протягивать под ним с постоянной скоростью лист бумаги, то карандаш вычертит кривую, показанную на рисунке. Эта кривая является *синусоидой* (график синуса или косинуса в зависимости от положения груза в момент времени $t = 0$), умноженной на амплитуду $A$. Действительно, из (14.3а) видно, что вторая производная от $x$ равна величине $x$ с обратным знаком, умноженной на

[1] При наличии груза массой $m'$ на конце пружины сама пружина также совершает колебания, и по крайней мере часть ее массы мы должны учесть в уравнении; действительно, можно показать (см. задачи в конце настоящей главы), что необходимо учесть приблизительно треть массы пружины $m_s$. Таким образом, в записанном нами уравнении $m = m' + m_s/3$. Во многих случаях масса $m_s$ достаточно мала, так что ею можно пренебречь.

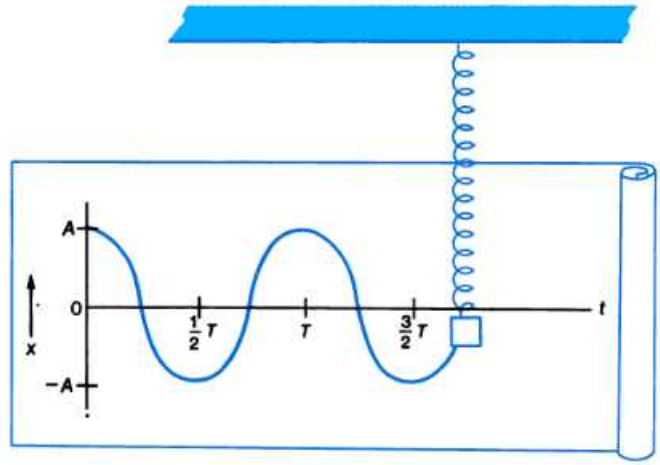



Рис. 14.3. Синусоидальный характер гармонических колебаний; здесь $x = A\cos(2\pi t/T)$.

коэффициент $k/m$; этим же свойством обладают и синус, и косинус:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\omega t) = -\omega^2 \sin\omega t,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos\omega t) = -\omega^2 \cos\omega t,$$

где $\omega$ – постоянная величина. Таким образом, уравнению (14.3а) или (14.3б) удовлетворяют как $x = \sin\omega t$, так и $x = \cos\omega t$, если постоянная $\omega$ выбрана правильно. Однако для общности попробуем записать решение $x(t)$ в общем виде:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

где $a$ и $b$ – произвольные постоянные. Продифференцируем это решение дважды:

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

Подставляя записанные выражения для $x$ и $d^2x/dt^2$ в уравнение (14.3б), получаем

$$-\omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + \frac{k}{m}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = 0,$$

или

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = 0.$$

Таким образом, наше предполагаемое решение удовлетворяет уравнению движения при любых $t$, если

$$k/m - \omega^2 = 0,$$

или

$$\omega^2 = k/m. \tag{14.4}$$

Таким образом,

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{14.5}$$

есть решение уравнения движения в том и только в том случае, когда выполняется соотношение (14.4).

Выражение (14.5) представляет собой общее решение, поскольку оно содержит две произвольные постоянные $a$ и $b$. Эти две постоянные действительно необходимы, поскольку в уравнение (14.3) входит вторая производная $d^2x/dt^2$, и, следовательно, для получения $x(t)$ нужно выполнить два интегрирования, каждое из которых порождает одну произвольную постоянную. В реальных физических задачах постоянные $a$ и $b$ определяются **начальными условиями**. Если, например, груз отвели в положение его максимального смещения $x = A$ и отпустили без толчка, то движение происходит по косинусоиде[1] (как на рис. 14.3), причем $a = A$ и $b = 0$:

$$x = A\cos\omega t.$$

Если же предположить, что в момент времени $t = 0$ груз находился в точке $x = 0$ и по нему ударили, придав ему начальную скорость в положительном направлении $x$, то в (14.5) мы должны положить $a = 0$ (поскольку $x = 0$ при $t = 0$), а $b$ положить равной $A$, так что выражение (14.5) примет вид

$$x = A\sin\omega t.$$

Могут иметь место и другие случаи, когда ни $a$, ни $b$ не равны нулю; например, если при $t = 0$ пружину оттянуть на некоторое расстояние, а затем груз толкнуть, то значение $x$ при $t = 0$ окажется меньше $A$. Но в любом случае постоянные $a$ и $b$ однозначно определяются заданием каких-либо двух параметров в данный момент времени, например заданием смещения и скорости.

Решение (14.5) можно записать в следующем более удобном виде:

$$x = A\cos(\omega t + \phi). \tag{14.6}$$

То, что выражения (14.6) и (14.5) эквивалентны друг другу, следует из тригонометрического тождества

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi;$$

постоянные $A$ и $\phi$ в (14.6) связаны с постоянными $a$ и $b$ в (14.5) соотношениями $A\cos\phi = a$ и $-A\sin\phi = b$. Выражение (14.6) имеет более простую физическую интерпретацию, чем (14.5). Как видно из рис. 14.4, величина $A$

---

[1] Дифференцируя (14.5) по времени, мы имеем $v = -a\sin\omega t + b\cos\omega t = b$ при $t = 0$, так что $b = 0$, если $v(t = 0) = 0$.

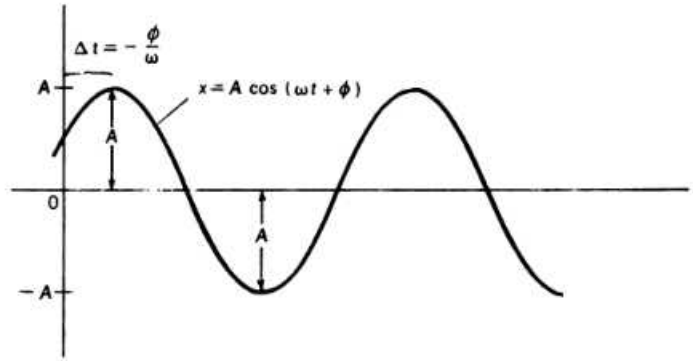



Рис. 14.4. Смещение $x = A\cos(\omega t + \phi)$ при $\phi < 0$.

представляет собой амплитуду [значение, которое достигается в те моменты времени, когда косинус в (14.6) имеет максимальную величину, т. е. равен единице], величина $\phi$, называемая **начальной фазой**, показывает отставание или опережение, с которым достигается максимальное смещение $A$ по отношению к моменту времени $t = 0$. При $\phi = 0$ мы имеем $x = A\cos\omega t$, как на рис. 14.3, а при $\phi = -\pi/2$

$$x = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin\omega t,$$

т. е. мы имеем чистую синусоиду.

Заметим, что величина $\phi$ не влияет на форму кривой $x(t)$, а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени $t$, скажем $t = 0$. Таким образом, гармоническое колебание является всегда *синусоидальным*. Действительно, гармоническое колебание часто *определяется* как движение, траектория которого является чисто синусоидальной.

Поскольку движение колеблющегося тела повторяется с периодом, равным $T$, в момент времени $t = T$ тело должно находиться в той же точке и двигаться в том же направлении, что и в момент времени $t = 0$. А поскольку синус и косинус это функции, которые изменяются с периодом $2\pi$ рад, из (14.6) мы имеем

$$\omega T = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f,$$

где $f$ частота колебаний. (Величину $\omega$ называют *круговой* или *циклической* частотой колебаний, чтобы отличить ее от частоты $f$.) Выражение (14.6) можно, таким образом, переписать в виде

$$x = A\cos(2\pi t/T + \phi), \qquad (14.7а)$$

или

$$x = A\cos(2\pi f t + \phi), \qquad (14.7б)$$

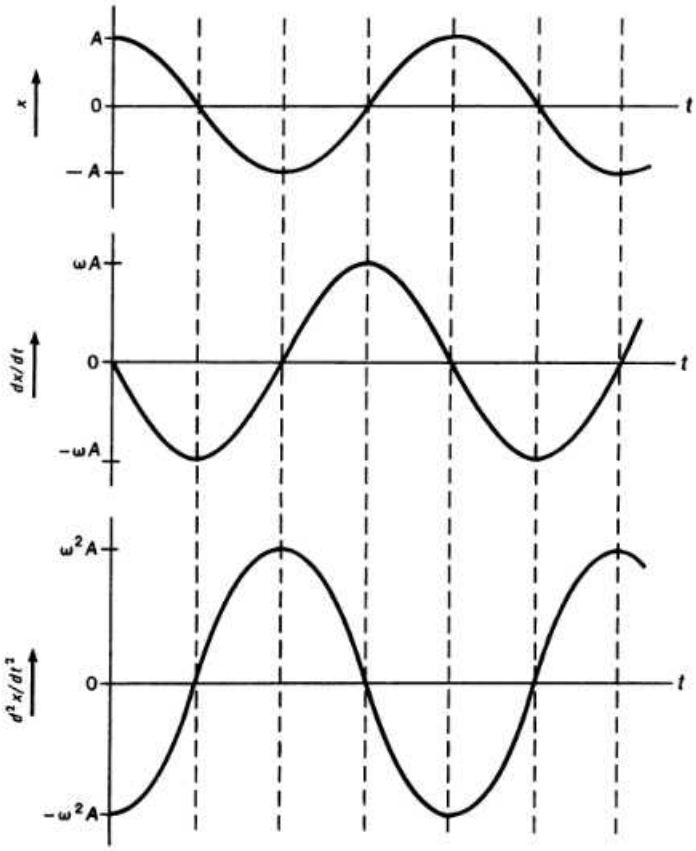



Рис. 14.5. Смещение $x$, скорость $dx/dt$ и ускорение $d^2x/dt^2$ гармонического осциллятора при $\phi = 0$.

где в соответствии с (14.4)

$$f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}, \tag{14.8а}$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{14.8б}$$

Заметим, что *частота и период колебаний не зависят от амплитуды*. Изменяя амплитуду колебаний груза на пружине, мы не изменим частоту колебаний этой системы! Из формулы (14.8а) следует, что, чем больше масса колеблющегося тела, тем ниже частота и, чем жестче пружина, тем выше частота. Здравый смысл подсказывает нам то же самое: с большой массой связана бóльшая инерционность и меньшее ускорение, а жесткая пружина создает бóльшую силу и большее ускорение (в первом случае колеблющееся тело «реагирует» на приложенную силу «быстрее», а во втором – «медленнее»). Дифференцируя выражение (14.6), можно получить скорость и ускорение

колеблющейся массы:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi), \tag{14.9}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi). \tag{14.10}$$

Скорость и ускорение гармонического осциллятора тоже изменяются по синусоидальному закону. На рис. 14.5 построены зависимости смещения, скорости и ускорения гармонического осциллятора от времени для случая, когда $\phi = 0$. Мы видим, что скорость достигает максимума

$$v_{\text{макс}} = \omega A = \sqrt{k/m}\, A,$$

когда груз проходит положение равновесия в точке $x = 0$; скорость равна нулю в точках максимального смещения $x = \pm A$. Это согласуется с нашими рассуждениями по поводу рис. 14.2. Максимальное значение ускорения

$$a_{\text{макс}} = \omega^2 A = (k/m) A$$

соответствует $x = \pm A$, а при $x = 0$ ускорение равно нулю, чего и следовало ожидать, поскольку $ma = F = -kx$.

В общем случае, когда $\phi \neq 0$, постоянные $A$ и $\phi$ можно связать с начальными значениями величин $x$, $v$ и $a$, положив в выражениях (14.6), (14.9) и (14.10) $t = 0$:

$$x_0 = x(0) = A\cos\phi,$$

$$v_0 = v(0) = -\omega A \sin\phi = -v_{\text{макс}} \sin\phi,$$

$$a_0 = a(0) = -\omega^2 A \cos\phi = -a_{\text{макс}} \cos\phi.$$

**Пример 14.1.** Когда к пружине подвешивают груз массой 0,300 кг, она удлиняется на 0,150 м. Пружину затем растягивают еще на 0,100 м от положения равновесия и отпускают. Вычислим а) жесткость пружины $k$; б) амплитуду колебания; в) его максимальную скорость $v_{\text{макс}}$; г) его максимальное ускорение; д) его период $T$ и частоту $f$; е) зависимость смещения $x$ от времени; ж) скорость при $t = 0{,}150$ с.

**Решение.** а) Поскольку пружина растягивается на 0,150 м, когда к ней подвешивают груз массой 0,300 кг, из формулы (14.1) находим

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{(0{,}300\text{ кг})(9{,}80\text{ м/с}^2)}{0{,}150\text{ м}} = 19{,}6\text{ Н/м}.$$

б) Поскольку пружину оттягивают на 0,100 м и отпускают, не давая ей начального толчка, $A = 0{,}100$ м.

в) В соответствии с выражением (14.9) имеем

$$v_{\text{макс}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A = \sqrt{\frac{19{,}6\text{ Н/м}}{0{,}300\text{ кг}}}(0{,}100\text{ м}) = 0{,}808\text{ м/с}.$$

г) Поскольку $F = ma$, максимальное ускорение имеет место в тех точках, в которых сила оказывается тоже максимальной, т. е. при $x = A = 0{,}100$ м. Следовательно,

$$a_{\text{макс}} = \frac{kA}{m} = \frac{(19{,}6\text{ Н/м})(0{,}100\text{ м})}{(0{,}300\text{ кг})} = 6{,}53\text{ м/с}^2$$

д) По формулам (14.8а) и (14.8б) вычисляем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}300\text{ кг}}{19{,}6\text{ Н/м}}} = 0{,}777\text{ с},$$

$$f = 1/T = 1{,}29\text{ Гц}.$$

е) Движение начинается в точке максимального смещения вниз. Если направить ось $x$ вверх, то $x = -A$ при $t = 0$. Следовательно, нам нужно выбрать синусоиду, которая при $t = 0$ принимает наибольшее отрицательное значение; такой функцией является косинус со знаком минус:

$$x = -A\cos 2\pi ft,$$

так что при $t = 0$ имеем $x = -A\cos 0 = -A$. Подставляя числовые данные, получаем

$$x = -0{,}100\cos 8{,}10t;$$

здесь $t$ измеряется в секундах, а $x$ – в метрах. Заметим, что в (14.6) начальная фаза в этом случае $\phi = \pi$ рад, или 180°.

ж) Скорость в любой момент $t$ вычисляется следующим образом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A(-2\pi f)\sin 2\pi ft = 0{,}810\sin 8{,}10t.$$

При $t = 0{,}150$ с получаем $v = (0{,}810) \times \times \sin(1{,}22) = 0{,}761$ м/с.

В данном разделе мы нашли общее аналитическое решение следующего дифференциального уравнения [см. (14.3б)], которое описывает гармонические колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Не все дифференциальные уравнения решаются так же просто. Однако при заданных начальных условиях решения, как правило, всегда удается получить методами численного интегрирования (разд. 2.10). И даже для простых уравнений, подобных (14.3б), численное решение может дать дополнительную информацию (см. задачи в конце настоящей главы).

## 14.3. Энергия гармонического осциллятора

Для гармонического осциллятора, например груза массой $m$ на конце безмассовой пружины, возвращающая сила дается выражением

$$F = -kx.$$

Потенциальная энергия как функция смещения имеет вид (см. гл. 6 и 7)

$$U = -\int F dx = \frac{1}{2}kx^2,$$

где мы выбрали постоянную интегрирования равной нулю, чтобы получить $U = 0$ при $x = 0$.

Полная механическая энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

где $v$ – скорость, которую имеет груз массой $m$ на расстоянии $x$ от положения равновесия. В случае гармонических колебаний трение отсутствует, поэтому полная механическая энергия $E$ сохраняется. Когда груз соверша-

ет колебания, кинетическая энергия переходит в потенциальную, и наоборот. В крайних точках ($x = \pm A$) скорость равна $v = 0$ и вся энергия переходит в потенциальную:

$$E = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Таким образом, *полная механическая энергия гармонического осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний*. В положении равновесия ($x = 0$) вся энергия переходит в кинетическую:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{макс}}^2,$$

где $v_{\text{макс}}$ – максимальная скорость, которая достигается при колебаниях. В промежуточных точках как кинетическая, так и потенциальная энергия не равна нулю, а поскольку энергия сохраняется, мы имеем

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{макс}}^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{14.11}$$

Отсюда можно получить полезное соотношение между скоростью $v^2$ и смещением $x$:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}, \tag{14.12а}$$

или, поскольку $v_{\text{макс}} = A\sqrt{k/m}$, находим

$$v = \pm v_{\text{макс}}\sqrt{1 - x^2/A^2}. \tag{14.12б}$$

Мы видим снова, что скорость $v$ максимальна при $x = 0$ и равна нулю при $x = \pm A$.

На рис. 14.6 приведена кривая потенциальной энергии $U(x) = (1/2)kx^2$. Горизонтальная линия соответствует определенному значению полной энергии $E = (1/2)kA^2$. Как уже отмечалось в разд. 7.6 (рис. 7.8), расстояние от этой линии до кривой $U$ равно кинетической энергии, а движение ограничено значениями $x$, заключенными в пределах от $A$ до $-A$. Эти результаты, разумеется, полностью

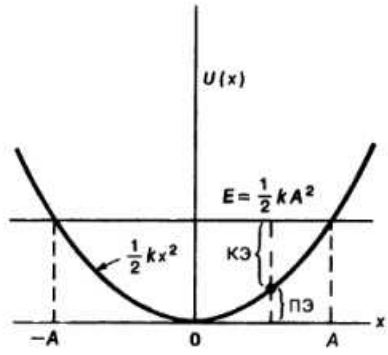



Рис. 14.6. Потенциальная энергия $U = (1/2)kx^2$. КЭ + ПЭ = $= E = \text{const}$ для любого значения $x$, причем $-A \leqslant x \leqslant A$.

согласуются с полным решением уравнения движения, полученным в предыдущем разделе.

**Пример 14.2.** Вычислим для гармонического осциллятора из примера 14.1 а) полную энергию; б) зависимость потенциальной энергии (ПЭ) и кинетической энергии (КЭ) от времени; в) скорость в момент времени, когда груз находится на расстоянии 0,050 м от положения равновесия; г) кинетическую и потенциальную энергии при смещении груза на расстояние, равное половине амплитуды ($x = \pm A/2$).

**Решение.** а) Подставляя в формулу (14.11) значения $k = 19{,}6$ Н/м и $A = 0{,}100$ м, находим

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(19{,}6\ \text{Н/м})\,(0{,}100\ \text{м})^2 = 9{,}80 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

б) В примере 14.1 при решении пп. «е» и «ж» мы нашли, что $x = -0{,}100\cos 8{,}10t$ и $v = 0{,}810\cos 8{,}10t$. Следовательно,

$$\text{ПЭ} = \frac{1}{2}kx^2 = (9{,}80 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж})\cos^2 8{,}10t,$$

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}mv^2 = (9{,}80 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж})\sin^2 8{,}10t.$$

в) Вычисляя по формуле (14.12), находим

$$v = v_{\text{макс}}\sqrt{1 - x^2/A^2} = 0{,}70\ \text{м/с}.$$

г) При $x = A/2 = 0{,}050$ м имеем

$$\text{ПЭ} = (1/2)\,kx^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж},$$

$$\text{КЭ} = E - \text{ПЭ} = 7{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

## 14.4. Связь гармонических колебаний с равномерным движением по окружности

Гармонические колебания обнаруживают простую и интересную связь с движением частицы по окружности с постоянной скоростью. Пусть тело массой $m$ вращается по окружности радиусом $A$ со скоростью $v_{\text{м}}$ на крышке стола, как показано на рис. 14.7. Если смотреть сверху, то видно, что движение происходит по окружности. Но человек, который смотрит «в торец» стола, наблюдает колебательное движение туда и обратно, и, как мы сейчас покажем, это движение в точности соответствует гармоническим колебаниям. То, что видит человек с торца стола, представляет собой, по существу, проекцию кругового движения на ось $x$ (рис. 14.7, *б*). Для того чтобы убедиться в том, что это движение аналогично гармоническому колебанию, вычислим $x$-проекцию скорости $v_{\text{м}}$, которая на рис. 14.7 обозначена через $v$. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{v}{v_{\text{м}}} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A},$$

откуда находим

$$v = v_{\text{м}}\sqrt{1 - x^2/A^2}.$$

Эта формула в точности совпадает с (14.12б) для скорости груза на пружине, совершающего гармонические колебания, причем $v_{\text{м}} = v_{\text{макс}}$. Кроме того, из рисунка видно, что

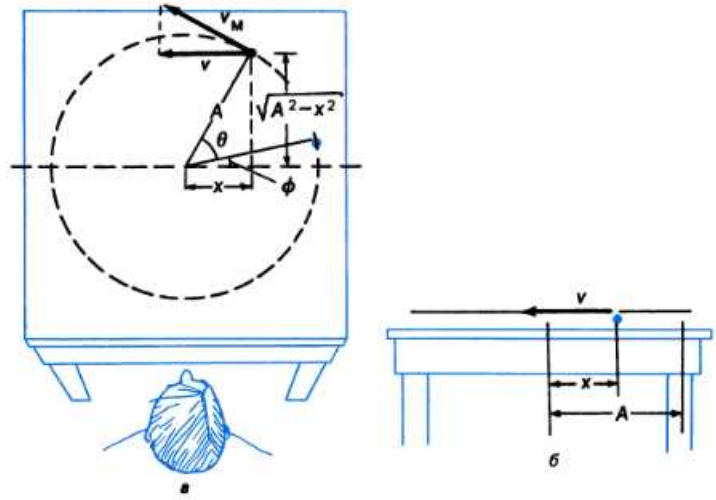



Рис. 14.7. Движение по окружности (*а*) наблюдается сбоку как гармоническое колебание (*б*).

если принять угол поворота при $t = 0$ за $\phi$, то через время $t$ частица переместится на угол $\theta = \omega t$, где $\omega = v_м/A$. Таким образом,

$$x = A\cos(\theta + \phi) = A\cos(\omega t + \phi);$$

поскольку $v_м = 2\pi A/T$, мы имеем $\omega = v_м/A = 2\pi/T = 2\pi f$, где $T$ – время, за которое совершается полный оборот по окружности, а $f$ – частота вращения. Налицо полная аналогия с колебаниями гармонического осциллятора. Следовательно, проекция траектории движения частицы с постоянной скоростью по окружности на ось $x$ представляет собой гармоническое колебание.

Проекция кругового движения на ось $y$ также совершает гармоническое колебание. Таким образом, равномерное движение по окружности можно рассматривать как два гармонических колебательных движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. (Мы еще вернемся к этому вопросу в разд. 14.9.)

## 14.5. Математический маятник

Математический маятник представляет собой систему, состоящую из небольшого груза («чечевица» маятника) и тонкой нитки, на конце которой подвешен этот груз (рис. 14.8). Предполагается, что нить нерастяжима, а ее массой можно пренебречь по сравнению с массой груза. Движение математического маятника напоминает простое гармоническое колебание: груз качается по дуге окружности с одинаковой амплитудой по обе стороны от положения равновесия (когда нить вертикальна) и проходит нижнюю точку с максимальной скоростью. Но являются ли эти колебания гармоническими? Иными сло-

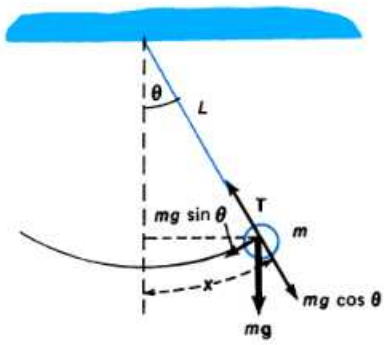



Рис. 14.8. Математический маятник.

вами, пропорциональна ли возвращающая сила смещению? Выясним это.

Смещение $x$ маятника вдоль дуги равно $x = L\theta$, где $\theta$ – угол отклонения нити от вертикали, а $L$ – расстояние от точки подвеса до ЦМ груза (рис. 14.8). Таким образом, если возвращающая сила пропорциональна $x$ или $\theta$, то колебания будут гармоническими. В роли возвращающей силы выступает составляющая силы тяжести груза, касательная к дуге:

$$F = -mg\sin\theta.$$

Поскольку мы видим, что сила $F$ пропорциональна синусу угла, а не самому углу $\theta$, колебания *не являются* гармоническими. Однако если угол $\theta$ мал, то значение синуса почти не отличается от величины угла в радианах. В этом нетрудно убедиться, посмотрев на разложение синуса в ряд[1)], или взглянув в тригонометрические таблицы (на внутренней стороне переплета), или же обратив внимание на то, что на рис. 14.8 длина дуги $x$ ($= L\theta$) очень мало отличается от длины хорды ($= L\sin\theta$), показанной штриховой линией; для углов меньше 15° значения $\theta$ и $\sin\theta$ различаются меньше чем на 1%. Следовательно, для малых углов равенство

$$F \approx -mg\theta$$

является очень хорошим приближением. С учетом того, что $x = L\theta$, мы имеем

$$F \approx -(mg/L)x.$$

Таким образом, при малых отклонениях от вертикали движение математического маятника представляет собой гармонические колебания, описываемые формулой (14.1), в которой теперь нужно положить $k = mg/L$. Период колебаний математического маятника можно вычислить по формуле (14.8б), в которой $k$ заменяется на $mg/L$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}},$$

или

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \qquad \text{[математический маятник, малые колебания]}. \qquad (14.13)$$

Удивительно то, что период колебаний не зависит от массы маятника! Вы могли заметить это, наблюдая, как на одних и тех же качелях раскачиваются взрослые и дети.

В разд. 14.2 мы показали, что период гармонических колебаний не зависит от амплитуды. Говорят, что первым

---

[1)] $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$.

обратил на это внимание Галилей, наблюдая за качающейся люстрой в соборе в Пизе. Это открытие привело к созданию маятниковых часов – первого по-настоящему точного прибора для измерения времени, не имевшего конкурентов в течение нескольких столетий.

Но поскольку колебания маятника не являются строго гармоническими, их период все-таки зависит от амплитуды. Общая формула для периода колебаний маятника записывается в виде бесконечного ряда:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_м}{2} + \frac{1\,3^2}{2^2 4^2}\sin^4\frac{\theta_м}{2} + \ldots\right), \qquad (14.14)$$

где $\theta_м$ – максимальное угловое смещение маятника. В формуле (14.14) каждый следующий член ряда меньше предыдущего; поэтому нам достаточно учесть лишь столько членов, сколько необходимо для обеспечения требуемой точности. При $\theta_м = 15°$ формула (14.13) дает погрешность меньше 0,5%; с увеличением угла погрешность резко возрастает.

Уменьшение амплитуды колебаний маятника в часах из-за трения влияло бы на точность их хода. Однако энергия пружины или гири компенсирует потери на трение, и амплитуда поддерживается постоянной; благодаря этому часы идут точно.

Маятник используется в геологии. Геологов интересуют неоднородности земной коры, а для этого необходимо измерять с высокой точностью ускорение свободного падения в данной точке на поверхности Земли. Для этой цели используют тщательно изготовленные приборы, главной частью которых является прецизионный маятник, как это иллюстрируется в следующем примере.

**Пример 14.3.** В некотором месте на поверхности Земли геолог измеряет ускорение свободного падения с помощью математического маятника, имеющего длину 37,10 см и амплитуду 6,0°. Оказалось, что частота его колебаний равна 0,8152 Гц. Какое ускорение свободного падения измерил геолог?

**Решение.** В выражении (14.14) сумма ряда, записанного в скобках, приблизительно равна

$$1 + \frac{1}{4}(0{,}0523)^2 + \frac{9}{64}(0{,}0523)^4 + \ldots =$$

$$= 1 + 7\cdot10^{-4} + 1\cdot10^{-6} + \ldots \approx 1{,}0007$$

с требуемой нам точностью до четвертого знака. Таким образом, частота дается выражением

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\left(\frac{1}{1{,}0007}\right),$$

откуда находим $g$:

$$g = (2\pi f)^2 L\,(1{,}0007)^2 =$$

$$= (6{,}283\cdot0{,}8152\ \text{с}^{-1})^2\,(0{,}3710\ \text{м})\,(1{,}0014) =$$

$$= 9{,}795\ \text{м/с}^2.$$

## * 14.6. Физический маятник

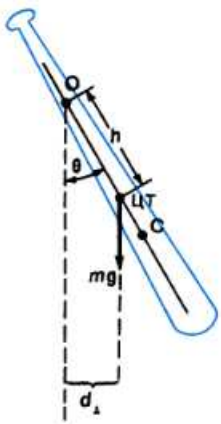



Рис. 14.9. Физический маятник, подвешенный в точке O.

Физическим маятником в отличие от идеализированного математического маятника, вся масса которого сосредоточена в маленьком грузике (материальной точке) на конце нити, называют реальное твердое тело, совершающее колебания под действием собственного веса. В качестве примера физического маятника на рис. 14.9 изображена бейсбольная бита, подвешенная в точке O. Сила тяжести приложена в центре тяжести (ЦТ) тела, расположенном на расстоянии $h$ от оси вращения. Физический маятник удобнее всего изучать с помощью уравнений динамики вращательного движения. Момент силы, действующий на физический маятник, относительно точки O дается выражением

$$\tau = -mgh\sin\theta.$$

Согласно второму закону Ньютона, для вращательного движения [формула (9.12)] имеем

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

здесь $I$ – момент инерции тела, а $\alpha = d^2\theta/dt^2$ – угловое ускорение. Таким образом, мы можем написать следующие уравнения:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0,$$

где момент инерции $I$ вычисляется относительно оси, проходящей через точку O. Поскольку для малых угловых смещений $\sin\theta \approx \theta$, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0.$$

Это уравнение очень напоминает уравнение (14.3б) для гармонических колебаний с той лишь разницей, что здесь мы имеем $\theta$ вместо $x$ и $mgh/I$ вместо $k/m$. Таким образом, при малых угловых смещениях физический маятник совершает гармонические колебания по закону

$$\theta = \theta_м\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right),$$

где $\theta_м$ – максимальное угловое смещение от вертикали. Период колебаний физического маятника [см. выражение (14.8б)] записывается в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad \text{[малое угловое смещение]}. \qquad (14.15)$$

При больших угловых смещениях в (14.15) следует ввести такую же поправку, как и ту, которую мы вводили в формулу для математического маятника [ряд в скобках в формуле (14.14)].

Заметим, что вращательное движение будет соответствовать гармоническим колебаниям, если момент силы пропорционален угловому смещению с обратным знаком:

$$\tau = -k\theta,$$

где $k$ – постоянная, зависящая от параметров системы.

**Пример 14.4.** *Измерение момента инерции.* Удобный способ измерения момента инерции тела относительно любой оси состоит в измерении периода колебаний этого тела относительно этой оси. Предположим, например, что центр тяжести неоднородной палки массой 1,6 кг расположен на расстоянии 42 см от одного из ее концов. Если заставить палку качаться на оси, проходящей через этот конец, то частота свободных колебаний палки будет равна 2,5 Гц. Чему равен момент инерции палки относительно этого ее конца?

**Решение.** Момент инерции вычислим по формуле (14.15), подставив в нее $T = 1/f = 0{,}40$ с и $h = 0{,}42$ м:

$$I = mghT^2/4\pi^2 = 0{,}27 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Момент инерции однородного стержня длиной $l$ относительно оси, проходящей через его конец (рис. 9.13), равен $I = (1/3)Ml^2$. Как, по-вашему, длина нашей неоднородной палки больше или меньше чем 84 см?

**Пример 14.5.** Тонкий прямой однородный стержень длиной $l = 1{,}00$ м и массой $m = 160$ г подвешен за конец на оси. а) Чему равен период его малых колебаний? б) Какова длина математического маятника, имеющего такой же период?

**Решение.** а) Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через один из его концов (рис. 9.13), равен $I = (1/3)ml^2$. Учитывая, что центр масс находится посередине стержня, т. е. $h = l/2$, для периода колебаний получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} =$$

$$= 6{,}28\sqrt{\frac{2(1{,}00\text{ м})}{3(9{,}8\text{ м/с}^2)}} = 1{,}64\text{ с}.$$

б) Математический маятник с таким же периодом колебаний имеет длину[1)]

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{gI}{mgh} = \frac{I}{mh},$$

которая для однородного стержня, закрепленного на одном из своих концов, равна $L = (2/3)l$ или в нашем случае 0,67 м.

Точка физического маятника, которая располагается на расстоянии

$$L = I/mh$$

от оси вращения O на линии, проходящей через ЦТ, называется *центром качаний* (точка C на рис. 14.9). Центр качаний однородного стержня длиной $l$ находится на расстоянии $L = (2/3)l$ от оси вращения. Как мы видели в последнем примере, период колебаний математического маятника длиной $L = I/mh$ такой же, как и у физического маятника. Иными словами, физический маятник качается

[1)] Эта длина называется *приведенной длиной* физического маятника. – *Прим. перев.*

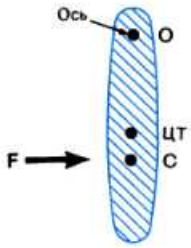



Рис. 14.10. Тело, подвешенное в точке O, испытывает короткий удар с силой **F**, направленной горизонтально и приложенной в центре качаний.

с тем же периодом, что и в случае, если бы вся его масса была сосредоточена в центре качания. Центр качания имеет еще два интересных свойства. 1) Если C является центром качания относительно оси, проходящей через O, то O является центром качания относительно оси, проходящей через C, причем период колебаний в обоих случаях одинаков. 2) Если по подвешенному на оси телу нанести в плоскости колебаний в горизонтальном направлении удар в центр качаний (рис. 14.10), то в точке подвеса не ощущается никакой силы реакции. Интересный пример этого второго свойства можно позаимствовать из бейсбола. Ударяя битой по мячу, игрок чувствует в пальцах «ожог», если удар не приходится по центру качаний. Центр качаний называют также *центром удара*. В задачах, помещенных в конце настоящей главы, мы предлагаем читателю получить оба указанных свойства. Заметим, что положение центра качаний зависит от того, где находится точка подвеса.

Интересно, что при ходьбе нога тоже движется как физический маятник. При каждом шаге нога, рассматриваемая как маятник, совершает полупериод колебаний. При ходьбе мы передвигаем ноги в соответствии с их собственной частотой колебаний. Чтобы убыстрить или замедлить свою ходьбу или же перейти в бег, нам нужно приложить дополнительную силу со стороны мышц. Однако за то же время можно пройти большее расстояние (и меньше устать), если передвигаться большими шагами, придерживаясь собственной частоты колебаний (поскольку период колебаний почти не зависит от амплитуды).

## 14.7. Затухающие гармонические колебания

В реальных условиях амплитуда колебаний любой колеблющейся пружины и любого качающегося маятника постепенно уменьшается до тех пор, пока колебания вовсе не прекратятся. На рис. 14.11 приведена типичная зависимость амплитуды колебаний от времени. Такие колебания называются **затухающими гармоническими колебаниями**. Затухание[1)] колебаний обусловлено, как правило, сопротивлением воздуха и трением внутри колебательной системы. Энергия колебаний постепенно переходит в тепло, и амплитуда колебаний уменьшается.

Но коль скоро в реальных колебательных системах колебания всегда оказываются затухающими, есть ли смысл говорить о незатухающих гармонических колебаниях? Дело в том, что анализировать незатухающие колебания математически гораздо проще. И если затухание не слишком велико, то колебания можно рассматри-

[1)] Затухание означает вообще уменьшение, ограничение, иногда гашение или глушение.

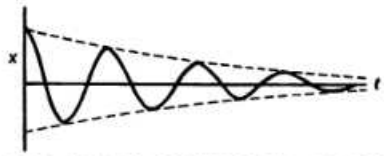



Рис. 14.11. Затухающие гармонические колебания.

вать как гармонические, на которые накладывается затухание (уменьшение амплитуды, показанное на рис. 14.11 штриховыми линиями). Хотя в действительности затухание приводит к изменению частоты колебаний, эффект этот невелик, если затухание мало. Рассмотрим это более детально. Сила, вызывающая затухание, зависит от скорости колебательного движения; она противодействует движению, и во многих случаях ее можно считать прямо пропорциональной скорости:

$$F_{\text{зат}} = -bv,$$

где $b$ – постоянная. В случае колебаний груза на конце пружины возвращающая сила со стороны пружины равна $F_x = -kx$, и второй закон Ньютона ($F = ma$) мы можем записать в виде

$$ma = -kx - bv.$$

Перенесем все члены в левую часть этого уравнения и сделаем замену $v = dx/dt$ и $a = d^2x/dt^2$; в результате получим следующее уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{14.16}$$

Попытаемся угадать решение этого уравнения. Если постоянная затухания $b$ мала, то $x$ зависит от времени $t$ так, как показано на рис. 14.11, и эта зависимость выглядит как косинус, умноженный на некоторую функцию, которая убывает со временем (эта функция на рисунке представлена штриховыми линиями). Простой функцией, которая ведет себя подобным образом, является экспонента $e^{-\alpha t}$, так что попробуем записать наше решение в виде

$$x = Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t, \tag{14.17}$$

где предполагается, что $A$, $\alpha$ и $\omega'$ – постоянные, причем $A = x$ при $t = 0$. (Для удобства выберем начальную фазу равной нулю: $\phi = 0$.) Запишем первую и вторую производные функции (14.17) по времени:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t - \omega' Ae^{-\alpha t}\sin\omega' t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t + \alpha A\omega' e^{-\alpha t}\sin\omega' t + \omega'\alpha Ae^{-\alpha t}\sin\omega' t -$$

$$- \omega'^2 Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t.$$

Подставим эти выражения в уравнение (14.16) и после

преобразований получим

$$Ae^{-\alpha t}[(m\alpha^2 - m\omega'^2 - b\alpha + k)\cos\omega' t + (2\omega'\alpha m - b\omega')\sin\omega' t] = 0. \quad (14.18)$$

Левая часть этого уравнения должна обращаться в нуль при любых $t$, что возможно лишь при определенных значениях $\alpha$ и $\omega'$. Чтобы определить $\alpha$ и $\omega'$, выберем два значения $t$, при которых вычисление этих величин упрощается. При $t = 0$ $\sin\omega' t = 0$, так что выражение (14.18) принимает вид $A(m\alpha^2 - m\omega'^2 - b\alpha + k) = 0$, откуда получаем[1)]

$$m\alpha^2 - m\omega'^2 - b\alpha + k = 0. \quad (14.19а)$$

При $t = \pi/2\omega'$ имеем $\cos\omega' t = 0$, так что уравнению (14.18) можно удовлетворить, только если

$$2\alpha m - b = 0. \quad (14.19б)$$

Отсюда мы находим

$$\alpha = b/2m,$$

а из (14.19а) получаем

$$\omega' = \sqrt{\alpha^2 - \frac{b\alpha}{m} + \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m}}.$$

Таким образом, мы видим, что выражение (14.17) действительно является решением уравнения движения для гармонического осциллятора с затуханием, если $\alpha$ и $\omega'$ определяются записанными выше выражениями.

Таким образом, смещение $x$ при затухающих гармонических колебаниях, когда постоянная затухания $b$ не слишком велика, запишется в виде

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t, \quad (14.20)$$

где

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (14.21)$$

Разумеется, в (14.20) к аргументу косинуса можно добавить начальную фазу $\phi$. Решение для $x$ в виде формулы (14.20) с $\phi = 0$ ясно показывает, что константа $A$ представляет просто начальное смещение: $x = A$ при $t = 0$. Частота определяется выражением

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}, \quad (14.22)$$

откуда мы видим, что в случае затухающих колебаний частота меньше, а период больше, чем для незатухающих гармонических колебаний. (На практике, когда затухание обычно невелико, $\omega'$ мало отличается от $\omega = \sqrt{k/m}$.)

[1)] Этому уравнению удовлетворяет также $A = 0$, но оно дает тривиальное и неинтересное решение $x = 0$ для всех значений $t$, т. е. означает отсутствие колебаний.

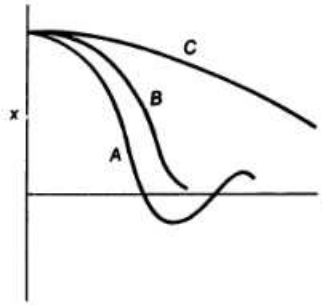



Рис. 14.12. Кривая $A$ – докритическое затухание; кривая $B$ – критическое затухание; кривая $C$ – закритическое затухание.

Этого и следовало ожидать: ведь трение замедляет движение. Когда трение отсутствует ($b = 0$), выражение (14.22) совпадает с (14.8а). Постоянная $\alpha = b/2m$ определяет, насколько быстро амплитуда колебаний уменьшается до нуля (рис. 14.11). Промежуток времени $t_1 = 2m/b$, за который амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз, называется средним временем жизни или временем релаксации колебания. Следует заметить, что, чем больше $b$, тем быстрее колебания прекращаются.

Решение (14.20) теряет силу, когда $b$ столь велико, что

$$b^2 > 4mk,$$

поскольку тогда частота $\omega'$ [формула (14.21)] становится мнимой величиной. В этом случае система просто возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Рассмотрим такое поведение системы. На рис. 14.12 представлены три хорошо известных случая сильно затухающих колебаний. Кривая $C$ соответствует случаю, когда затухание столь велико ($b^2 \gg 4mk$), что системе для возвращения в положение равновесия требуется длительное время; это система с *закритическим затуханием*. Кривая $A$ соответствует *докритическому затуханию* ($b^2 < 4mk$), когда система, прежде чем прийти в положение равновесия, совершает несколько колебаний. Кривая $B$ описывает колебание с *критическим затуханием* (демпфированием) ($b^2 = 4mk$); в этом случае система приходит в равновесие за самое короткое время. Примерами систем, в которых демпфирование колебаний оказывается полезным, являются устройства для закрывания дверей и амортизаторы автомобиля. Обычно их конструируют таким образом, чтобы затухание было критическим. Однако по мере износа этих устройств демпфирование ослабляется: двери начинают хлопать, а автомобиль раскачивается, наезжая на неровности дороги. Стрелки измерительных приборов (вольтметров, амперметров, индикаторов уровня в магнитофонах) имеют обычно демпфирование критическое или чуть ниже критического. Если бы демпфирование было слишком слабым, то стрелка долго колебалась бы, прежде чем установиться на определенном значении. Если бы оно было очень велико, то стрелка медленно ползла бы к правильному значению и не успевала отслеживать быстрые изменения (скажем, уровня записи).

## 14.8. Вынужденные колебания; резонанс

Колебательная система, выведенная из положения равновесия, начинает колебаться с собственной частотой. Ранее в этой главе мы получили формулы, связывающие собственную частоту колебаний (или период) с параметрами системы для упругих объектов (подобно пружине) и маятников.

Однако во многих случаях система не просто колеблется сама по себе, а испытывает еще и действие внешней силы, которая также изменяется с определенной частотой. Например, мы могли бы дергать груз, закрепленный на пружине (рис. 14.1), с частотой $\omega = 2\pi f$. Груз тогда будет колебаться с частотой $\omega$ внешней силы, даже если эта частота не совпадает с частотой собственных колебаний пружины, которую мы обозначим здесь через $\omega_0$:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Это пример **вынужденных колебаний**. Другой пример — детские качели, представляющие собой, по существу, маятник, имеющий собственную частоту колебаний. Когда мы раскачиваем сидящего на качелях ребенка, мы имеем дело с вынужденными колебаниями гармонического осциллятора. Вообще существует много видов вынужденных гармонических колебаний, и некоторые из них мы обсудим в этой и последующих главах.

При вынужденных колебаниях амплитуда колебаний, а следовательно, и энергия, передаваемая колебательной системе, зависят от того, насколько различаются частоты $\omega$ и $\omega_0$, а также от величины затухания колебаний. Пусть внешняя сила синусоидальна и может быть представлена в виде

$$F_{\text{внешн}} = F_0 \cos \omega t,$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота внешней силы, действующей на осциллятор. Тогда уравнение движения (с учетом затухания) можно записать в виде

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega t$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \tag{14.23}$$

Стоящая в правой части уравнения внешняя сила является единственным членом, который не содержит $x$ или его производных. В задаче 54 (см. в конце настоящей главы) читателю предоставляется возможность показать, что решение уравнения (14.23) записывается в виде

$$x = A_0 \sin(\omega t + \phi_0), \tag{14.24}$$

где

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}}, \tag{14.25а}$$

а

$$\phi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}. \tag{14.25б}$$

В действительности общим решением уравнения (14.23) является сумма решения (14.24) и еще одного члена вида (14.20), который описывает собственные затухающие ко-

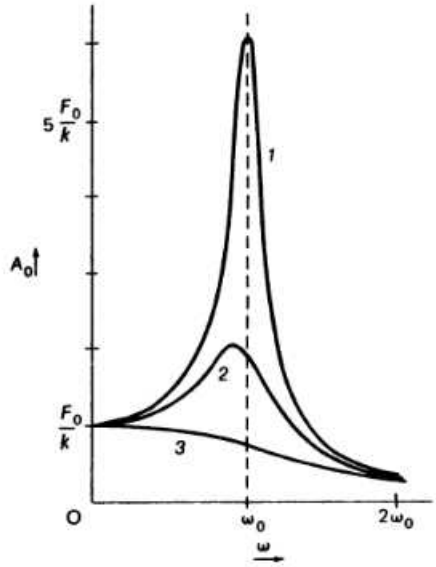



Рис. 14.13. Зависимость амплитуды вынужденных гармонических колебаний от частоты вынуждающей силы. Кривые *1*, *2* и *3* соответствуют слабому, сильному и критическому затуханию соответственно ($Q = m\omega_0/b = 6$; 2; 0,71).

лебания осциллятора; но этот второй член через некоторое время обращается в нуль, так что в большинстве случаев можно обойтись только решением вида (14.24).

Амплитуда вынужденных гармонических колебаний $A_0$ сильно зависит от разницы между частотой возбуждения и собственной частотой системы. На рис. 14.13 построены зависимости амплитуды $A_0$ [по формуле (14.25а)] от частоты $\omega$ вынуждающей силы для трех значений постоянной затухания $b$. Кривая *1* соответствует слабому затуханию [$b = (1/6)m\omega_0$], кривая *2* – довольно значительному затуханию [$b = (1/2)m\omega_0$], а кривая *3* – закритическому затуханию ($b = \sqrt{2}\,m\omega_0$). Когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте колебаний системы, амплитуда резко возрастает, если только затухание не слишком велико. При малом затухании рост амплитуды при приближении к $\omega = \omega_0$ оказывается чрезвычайно сильным. Это явление называется **резонансом**. Собственная частота колебаний системы $\omega_0$ называется резонансной частотой[1]. Если $b = 0$, резонанс наблюдается на частоте $\omega = \omega_0$, а резонансный пик (амплитуда $A_0$) уходит в бесконечность; при этом энергия постоянно вводится в систему и не рассеивается. В реальных системах $b$ никогда не обращается в нуль, поэтому резонансный пик имеет конечную высоту; вершина пика не приходится точно на $\omega = \omega_0$ [из-за наличия в знаменателе выражения (14.25а) члена $b^2\omega^2/m^2$], хотя и имеет

[1] Иногда резонансную частоту определяют как частоту, при которой амплитуда максимальна; в таком случае она зависит от постоянной затухания. За исключением случаев, когда затухание очень велико, эта частота близка к $\omega_0$.

место практически при $\omega = \omega_0$, если только затухание не особенно велико. Если же затухание велико, то пик выражен слабо или вовсе отсутствует (кривая *3* на рис. 14.13).

Высота и ширина резонансного пика часто характеризуются параметром $Q$, который называется *добротностью* и определяется следующим образом:

$$Q = m\omega_0/b. \tag{14.26}$$

На рис. 14.13 кривая *1* имеет $Q = 6$, кривая *2* $Q = 2$ и кривая *3* $Q = 1/\sqrt{2}$. Чем меньше постоянная затухания $b$, тем больше $Q$ и тем выше резонансный пик. Значение $Q$ характеризует также ширину резонансного пика: если $\omega_1$ и $\omega_2$ – частоты, на которых квадрат амплитуды $A_0$ составляет половину максимального значения (речь идет о квадрате потому, что приток мощности в систему пропорционален $A_0^2$; см. задачи в конце настоящей главы), то *ширина* резонансного пика $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ связана с $Q$ соотношением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \tag{14.27}$$

(Доказательство этого соотношения, справедливого только в случае слабого затухания, мы предлагаем читателю в задаче 58, помещенной в конце главы.) Чем больше $Q$, тем острее и выше резонансный пик.

Простой иллюстрацией резонанса является раскачивание ребенка на качелях. Качели, как и любой маятник, имеют собственную частоту колебаний. Если бы вы закрыли глаза и подталкивали качели с какой-то случайной частотой, то качели болтались бы туда-сюда, но раскачать их сильно не удалось бы. Но если подталкивать качели, сообразуясь с их собственной частотой, то ампли-

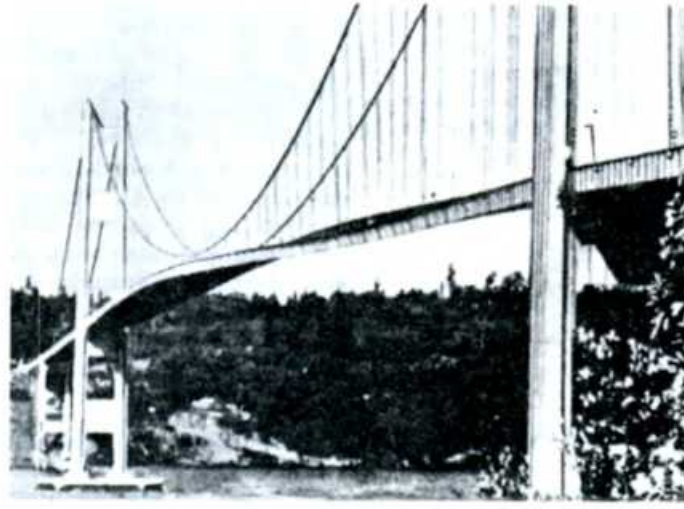


Рис. 14.14. Сильный порывистый ветер вызвал колебания Такомского моста с большой амплитудой, что привело к его разрушению 7 ноября 1940 г. (Wide World Photo.)

туда будет быстро нарастать. Таким образом, при резонансе достаточно относительно небольшого усилия, чтобы достичь большой амплитуды колебаний.

Говорят, что великий тенор Энрико Карузо мог заставить бокал разлететься вдребезги, спев в полный голос ноту надлежащей высоты. Это тоже пример резонанса: здесь звуковые волны возбуждают вынужденные колебания стенок бокала. При резонансе колебания стенок могут достичь такой амплитуды, что стекло не выдержит и разобьется.

Поскольку любое тело обладает, вообще говоря, упругостью, резонансные явления играют важную роль во многих ситуациях. Особенно важны они в строительстве, хотя возникновение их не всегда предсказуемо. В газетах сообщалось, например, что железнодорожный мост обрушился из-за того, что выбоина на колесе проходящего поезда возбудила резонансные явления в конструкции моста. Во избежание подобной катастрофы солдатам, марширующим по мосту, подается команда «сбить ногу». И причиной знаменитой катастрофы Такомского моста (рис. 14.14) в 1940 г. были отчасти резонансные явления.

Резонанс имеет большое значение и для других областей физики, таких, как электричество и магнетизм, физика атомов и молекула. В следующих главах мы рассмотрим много примеров резонанса. Мы покажем также, что колеблющиеся тела во многих случаях имеют не одну, а несколько резонансных частот.

## * 14.9. Сложение двух гармонических колебаний

Рассмотрим частицу, совершающую гармонические колебания в двух перпендикулярных направлениях, скажем вдоль осей $x$ и $y$. Такие два линейных колебательных движения можно записать в виде

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \phi_x), \qquad y = A_y \cos(\omega_y t + \phi_y).$$

Результирующая траектория движения в плоскости $xy$ зависит от соотношения частот, амплитуд и фаз этих колебаний. Рассмотрим несколько конкретных случаев.

1. *Одинаковые частоты*: $\omega_x = \omega_y = \omega$.

**а.** *Одинаковые фазы*: $\phi_x = \phi_y = \phi$. Движение частицы изображается в плоскости $xy$ прямой линией, тангенс угла наклона которой равен $A_y/A_x$. В этом легко убедиться, поскольку

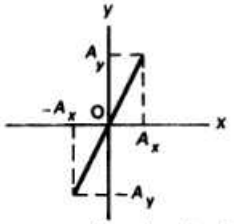
$$x = A_x \cos(\omega t + \phi)$$

и

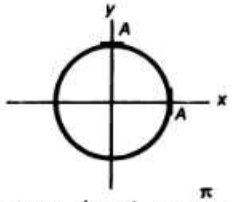
$$y = A_y \cos(\omega t + \phi) = (A_y/A_x)\, x,$$

а это - уравнение прямой с тангенсом угла наклона, равным $A_y/A_x$. На рис. 14.15, *а* показан случай, когда $A_y = 2A_x$.

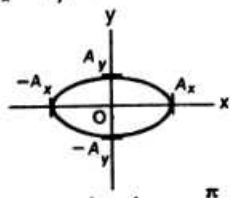
**б.** *Фазы различаются на* $\pi/2$: $\phi_y - \phi_x = \pm \pi/2$, амплитуды равны: $A_x = A_y = A$. Движение происходит по окружности (по



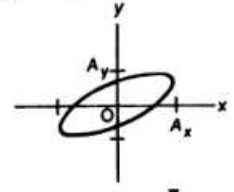

*а* $\omega_x = \omega_y$, $\phi_x = \phi_y$, $A_y = 2A_x$



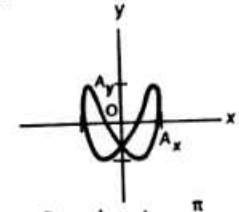

*б* $\omega_x = \omega_y$, $\phi_y - \phi_x = -\frac{\pi}{2}$, $A_x = A_y = A$




*в* $\omega_x = \omega_y$, $\phi_y - \phi_x = -\frac{\pi}{2}$, $A_x = 2A_y$




*г* $\omega_x = \omega$, $\phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{4}$, $A_x = 2A_y$




*д* $\omega_y = 2\omega_x$, $\phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{4}$, $A_x = A_y$

Рис. 14.15. Сложение двух гармонических колебаний, совершаемых под прямым углом друг к другу.

часовой стрелке или против), что можно показать следующим образом: пусть $\phi_x = \phi$, тогда $\phi_y = \phi - \pi/2$, где знак минус взят для определенности. Таким образом,

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \qquad y = A\cos(\omega t + \phi - \pi/2).$$

Поскольку $\cos(\omega t + \phi - \pi/2) = \sin(\omega t + \phi)$, мы можем написать

$$x^2 + y^2 = A^2\cos^2(\omega t + \phi) + A^2\sin^2(\omega t + \phi) = A^2.$$

Это уравнение окружности в плоскости $xy$ с радиусом $A$ (рис. 14.15, *б*). Полученный результат совпадает с нашим заключением в разд. 14.4 о том, что движение по окружности может рассматриваться как сумма двух простых гармонических колебаний, совершающихся в перпендикулярных направлениях.

**в.** $\phi_y - \phi_x = \pm\pi/2$, $A_x \neq A_y$. В случае когда фазы различаются на $\pi/2$, а амплитуды не одинаковы, движение происходит по эллипсу, как показано на рис. 14.15, *в*, причем большая и малая оси эллипса равны $2A_x$ и $2A_y$. В приведенном примере $A_x = 2A_y$.

**г.** $\phi_y - \phi_x \neq 0, \neq \pi/2, \neq \pi$. В этом случае частица движется по эллипсу независимо от того, одинаковы амплитуды или нет. В приведенном на рис. 14,15, *г* примере $\phi_y - \phi_x = \pi/4$ и $A_x = 2A_y$.

2. *Неодинаковые частоты*: $\omega_x \neq \omega_y$. Когда частоты у двух колебаний разные, движение может быть очень сложным. В общем случае траектория оказывается даже незамкнутой и движение, таким образом, не является периодическим. Однако если отношение частот $\omega_x/\omega_y$ кратно целому числу, то траектория оказывается замкнутой и движение является периодическим (хотя, возможно, очень сложным). В примере на рис. 14,15, *д* $\omega_y = 2\omega_x$, а $\phi_y - \phi_x = \pi/4$. Такого типа траектории называют *фигурами Лиссажу*. Фигуры Лиссажу удобно наблюдать на экране осциллографа, подавая на горизонтальный и вертикальный входы синусоидальные сигналы; меняя амплитуды, частоты и фазы, можно получать множество красивых кривых.

Представляет интерес также сложение гармонических колебаний вдоль одного и того же направления; этот вопрос мы обсудим в следующих главах.

## Заключение

Колеблющееся тело совершает *гармонические колебания*, если возвращающая сила пропорциональна смещению: $F = -kx$. Максимальное смещение при колебаниях называется *амплитудой* колебаний. *Период* $T$ – это время, за которое совершается один цикл колебания (туда и обратно), а число колебаний в секунду называется *частотой* $f$; период и частота связаны соотношением $T = 1/f$. Период колебаний груза, закрепленного на конце пружины, равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$; смещение в зависимости от времени записывается в виде $x = A\cos(2\pi ft + \phi)$, где $A$ – амплитуда, а $\phi$ – *начальная фаза*; значения $A$ и $\phi$ зависят от *начальных условий* ($x$ и $v$ при $t = 0$). В простых гармонических колебаниях происходит непрерывный переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно; полная энергия $E = (1/2)mv^2 + (1/2)kx^2$ сохраняется.

*Математический маятник* длиной $L$ совершает колебания, близкие к гармоническим, если амплитуда его колебаний мала и трением можно пренебречь; при этих условиях период колебаний маятника равен $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, где $g$ – ускорение свободного падения.

При наличии трения (т. е. для всех реальных пружин и маятников) колебания являются *затухающими*. Амплитуда колебаний уменьшается со временем, а энергия постепенно превращается в тепло. Когда трение очень велико, колебания вообще не происходят (*закритическое* затухание). Если трение таково, что до прихода в положение равновесия система совершает одно или несколько колебаний, то затухание называют *докритическим* и смещение описывается выражением $x = Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t$, где $\alpha$ и $\omega'$ – постоянные величины. При *критическом затухании* (демпфировании) колебаний нет и система возвращается в положение равновесия в кратчайшее время.

Если к системе, способной совершать колебания, приложена внешняя переменная сила, то амплитуда колебаний может стать очень большой, когда частота внешней силы приближается к *собственной* (или *резонансной*) частоте колебаний системы. Это явление называется *резонансом*.

## Вопросы

1. Приведите примеры колебательных систем в повседневной жизни. В каких случаях совершаются гармонические или близкие к ним колебания?
2. Сравните формулы для $x$, $v$ и $a$ при равноускоренном прямолинейном движении и соответствующие формулы для гармонических колебаний. В чем сходство и различие между ними?
3. Если частица совершает гармонические колебания с амплитудой $A$, то какое расстояние она проходит за один период?
4. Реальные пружины обладают массой. Как будут отличаться истинный период колебаний и их частота от значений, полученных для груза, колеблющегося на конце безмассовой пружины?
5. Могут ли в какой-то момент совпасть направление векторов смещения и скорости простого гармонического осциллятора? А направления векторов смещения и ускорения?
6. Каким образом можно удвоить максимальную скорость гармонического осциллятора?
7. Чему равна начальная фаза $\phi$ в выражении (14.6), если при $t = 0$ смещение колеблющейся частицы равно а) $x = A$; б) $x = 0$; в) $x = -A$; г) $x = A/2$?
8. Если формула (14.1) $F = -kx$ применима к силам упругости в твердом теле, то что можно сказать о силах, действующих между молекулами твердого тела?
9. Тело массой $m$ подвешено на конце пружины, имеющей жесткость $k$. Пружину разрезали пополам и подвесили к ней то же тело. Во сколько раз изменилась частота колебаний?
10. Два тела с одинаковыми массами подвешены к двум одинаковым пружинам. Тела оттягивают вниз – одно на 10 см, другое на 20 см – и затем одновременно отпускают. Какое из них первым пройдет положение равновесия?
11. Рыбу массой 10 кг прицепили к крючку пружинного безмена и отпустили. Опишите показания весов как функцию времени.
12. Является ли движение поршня в автомобильном двигателе гармоническим колебанием? Объясните.
13. Если маятниковые часы идут точно на уровне моря, то будут ли они спешить или отставать, если их поднять на гору?
14. Согласно (14.14), с увеличением амплитуды период колебаний маятника возрастает. Какие физические причины обусловливают это?
15. Можно ли ожидать, что формула (14.14) справедлива для математического маятника при $\theta > 90°$? Объясните.
16. Если удвоить амплитуду колебаний гармонического осциллятора, то как изменяются его частота, максимальная скорость, максимальное ускорение и полная механическая энергия?
17. Качели с ребенком отвели высоко вверх.

отпустили и в дальнейшем не подталкивали. Как будет меняться частота качаний со временем?

* 18. Опишите возможное движение твердого тела, закрепленного таким образом, что оно может вращаться относительно своего центра тяжести. Является ли это тело физическим маятником?

* 19. Тонкий однородный стержень массой $m$ подвешен за один конец и качается с частотой $f$. Если к свободному концу прикрепить маленький шарик массой $2m$, то как изменится частота колебаний? Объясните.

20. Обращается ли в нуль в какой-то момент времени ускорение гармонического осциллятора? Когда именно? А в случае затухающих колебаний?

21. Камертон с собственной частотой 264 Гц стоит на столе в передней части комнаты. В задней части комнаты стоят два камертона – один с собственной частотой 260 Гц, а другой с собственной частотой 420 Гц. При возбуждении первого камертона камертон на 260 Гц тоже начинает звучать, а камертон с собственной частотой 420 Гц не отзывается. Объясните, почему.

22. Приведите несколько примеров резонанса из повседневной жизни.

23. Может ли дребезжание автомобиля быть связано с резонансом? Объясните.

24. При строительстве зданий в наши дни стараются использовать все более легкие материалы. Как это влияет на собственные частоты колебаний строительных конструкций и на возможные резонансные явления, когда близко проходят грузовики, поезда или действуют другие источники вибраций?

* 25. В каком направлении происходит движение в примере 1б (разд. 14.9) – по часовой стрелке или против? Что нужно изменить, чтобы движение происходило по той же траектории, но в противоположном направлении?

* 26. Частица участвует в двух колебательных движениях во взаимно перпендикулярных направлениях, причем $\omega_x = \omega_y$, $\phi_x = \phi_y \pm \pi$. Опишите результирующее движение частицы.

## Задачи

Раздел 14.2

1. (I) Резиновая лента имеет длину 45 см, когда к ней подвешен груз весом 18,0 Н, и 68 см с грузом весом 22,5 Н. Чему равна жесткость $k$ этой ленты?

2. (I) Когда человек массой 80 кг садится в автомобиль массой 1200 кг, рессоры проседают на 1,4 см. С какой частотой будет качаться кузов при наезде на ухаб? (Затуханием пренебрегите.)

3. (I) а) Запишите уравнение, описывающее движение пружины, если известно, что, когда ее растягивают на 20 см от положения равновесия и отпускают, она колеблется с периодом 1,5 с? б) Определите смещение пружины при $t = 1{,}8$ с.

4. (I) Таракан массой 0,30 г попался в сеть к пауку. Паутина колеблется с частотой 15 Гц. а) Определите значение $k$ для этой паутины. б) С какой частотой будет колебаться паутина, если в нее попадет насекомое массой 0,10 г?

5. (I) Когда к пружине подвешивают груз массой 0,80 кг, она колеблется с частотой 2,4 Гц. Какова будет частота колебаний, если подвесить к пружине груз массой 0,50 кг?

6. (II) Груз на конце пружины оттягивают на 0,8 см от положения равновесия и отпускают. На каком расстоянии от равновесия а) скорость груза будет равна половине максимальной? б) ускорение будет равно половине максимального?

7. (II) В некоторых двухатомных молекулах сила взаимодействия между атомами может быть приближенно представлена в виде $F = -C/r^2 + D/r^3$, где $C$ и $D$ – положительные постоянные. а) Постройте график зависимости $F$ от $r$, когда $r$ изменяется от 0 до $2D/C$. б) Покажите, что равновесие имеет место при $r = r_0 = D/C$. в) Пусть $\Delta r = r - r_0$ представляет собой небольшое смещение от положения равновесия, в котором $\Delta r \ll r_0$. Покажите, что такое небольшое смещение приводит приблизительно к гармоническому колебанию. г) Определите значение $k$. д) Чему равен период таких колебаний? (*Подсказка*: считайте, что один из атомов закреплен неподвижно.)

8. (II) Воду в U-образной трубке смещают из положения равновесия на расстояние $\Delta x$. (Иначе говоря, разность уровней в коленах трубки равна $2\Delta x$.) Если не учитывать трение, то будут ли колебания воды гармоническими? Найдите выражение для жесткости $k$. Зависит ли коэффициент жесткости $k$ от плотности жидкости, сечения трубки и высоты водяного столба?

9. (II) Груз массой $m$ подвешен на вертикальной пружине. Покажите, что равновесная длина пружины на $l = mg/k$ больше, чем в случае, когда пружина расположена горизонтально, как на рис. 14.1. Покажите также, что формула (14.1) $F = -kx$ справедлива и для вертикальной пружины, где $x$ – смещение от положения равновесия, а $k$ имеет одно и то же значение для горизонтальных и вертикальных колебаний пружины.

10. (II) Груз массой $m$ на конце пружины колеблется с частотой 0,62 Гц; когда к нему

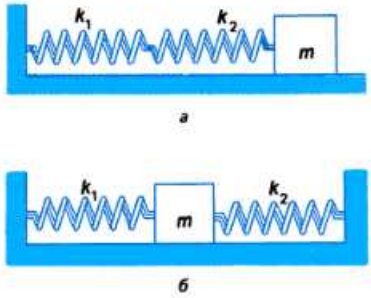



Рис. 14.16.

прикрепляют дополнительную массу 700 г, частота колебаний становится равной 0,48 Гц. Чему равно значение $m$?

11. (II) Брусок массой $m$ подвешен на двух одинаковых параллельных пружинах с жесткостью $k$ каждая. Чему равна частота колебаний системы?

12. (II) На конце пружины с коэффициентом жесткости $k$ прикреплено тело массой $m$. В момент $t = 0$ телу сообщается молотком импульс $J$. Запишите уравнение, описывающее дальнейшее движение системы через $m$, $k$, $J$ и $t$.

13. (II) Смещение гармонического осциллятора в зависимости от времени дается выражением $x = 2{,}4\cos(5\pi t/4 + \pi/6)$, где $x$ измеряется в метрах, а $t$ – в секундах. Найдите: а) период и частоту колебаний; б) смещение и скорость в момент времени $t = 0$, в) скорость и ускорение в момент времени $t = 1{,}0$ с.

14. (II) Камертон колеблется с частотой 264 Гц; размах колебаний кончика каждого из зубцов вилки составляет 1,5 мм от положения равновесия. Вычислите: а) максимальную скорость; б) максимальное ускорение кончика зубца камертона.

15. (II) Груз массой $m$ осторожно прикрепляют к концу свободно висящей пружины. Когда груз освобождают, он опускается на 30 см вниз, а затем идет вверх. Чему равна частота колебаний?

16. (II) Прямоугольный деревянный брусок плавает в спокойной воде. Покажите, что, если пренебречь трением, брусок, когда его слегка притопят и отпустят, совершает гармонические колебания. Выведите формулу для эффективного «коэффициента жесткости».

17. (III) Груз массой $m$ прикреплен к двум пружинам с коэффициентами жесткости $k_1$ и $k_2$ двумя различными способами (рис. 14.16, *а* и *б*). Покажите, что период колебаний на рис. 14.16, *а* дается выражением

$$T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)},$$

а на рис. 14.6, *б* – выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Трением пренебрегите.

18. (III) Два тела с одинаковыми массами $m_1$ и $m_2$ соединены с тремя одинаковыми пружинами с коэффициентами жесткости $k$, как показано на рис. 14.17. а) Примените к каждой из масс второй закон Ньютона ($F = ma$) и запишите два дифференциальных уравнения движения для смещений $x_1$ и $x_2$. б) Определите возможные частоты колебаний, предположив, что решения уравнений движения записываются в виде $x_1 = A_1\cos\omega t$, $x_2 = A_2\cos\omega t$.

19. (III) Пружина с коэффициентом жесткости 250 Н/м колеблется с амплитудой 8,00 см, когда к ней подвешен груз массой 0,300 кг. а) Напишите выражение, описывающее смещение этой системы во времени. Считайте, что груз проходит положение равновесия в направлении положительных значений $x$ в момент времени $t = 0{,}060$ с. б) В какие моменты времени пружина имеет наибольшую и наименьшую длину? в) Какая сила действует со стороны пружины на груз в момент времени $t = 0$? г) Чему равно смещение $x$ при $t = 0$? д) Чему равна максимальная скорость и через какое время после $t = 0$ она впервые достигается?

Раздел 14.3

20. (I) Тело массой 1,0 кг совершает колебания по закону $x = 0{,}42\cos 7{,}40t$, где $t$ измеряется в секундах, а $x$ – в метрах. Найдите: а) амплитуду; б) частоту; в) полную энергию; г) кинетическую и потенциальную энергии при $x = 0{,}16$ м.

21. (I) а) При каком смещении гармонического осциллятора его кинетическая энергия равна потенциальной? б) Какую долю полной энергии составляет кинетическая (потенциальная)

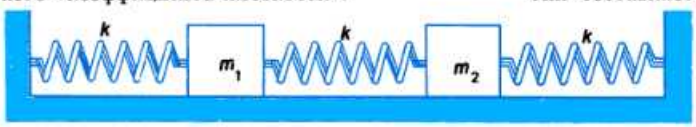



Рис. 14.17.

энергия, когда смещение равно половине амплитуды?

22. (II) Груз массой 0,350 кг на конце пружины совершает 2,0 колебания в секунду с амплитудой 0,18 м. Вычислите: а) скорость при прохождении положения равновесия; б) скорость на расстоянии 0,10 м от положения равновесия; в) полную энергию системы; г) выражение, описывающее смещение системы при колебаниях.

23. (II) Для того чтобы взвести пружину детского ружья на 0,10 м и зарядить в нее шарик массой 0,200 кг, нужно приложить силу 60 Н. С какой скоростью шарик вылетает из ствола?

24. (II) Деревянный плот массой 300 кг плавает на озере. Когда на него встает человек массой 75 кг, плот погружается на 5,0 см. После того как человек спрыгивает, плот некоторое время колеблется. а) Чему равна частота колебаний? б) Найдите полную энергию колебаний (пренебрегая затуханием).

25. (II) Пуля массой 0,012 кг попадает в брусок массой 0,300 кг, прикрепленный к горизонтальной пружине с коэффициентом жесткости $5{,}2 \cdot 10^3$ Н/м, другой конец которой закреплен неподвижно. Амплитуда колебаний бруска после попадания в него пули составляет 12,4 см. Какой была скорость пули, если учесть, что после попадания пуля и брусок движутся вместе?

26. (II) Энергия колебаний одной системы в десять раз больше, чем другой, но коэффициент жесткости $k$ первой системы в два раза больше, чем у второй. Как соотносятся амплитуды колебаний этих систем?

27. (II) Человек массой 75 кг прыгает из окна на сетку, используемую пожарными для спасения людей, с высоты 15 м; при этом сетка провисает на 1,2 м. Считая сетку простой пружиной, вычислите, насколько она провиснет, если этот же человек просто ляжет на нее. Насколько бы сетка провисла, если бы на нее спрыгнули с высоты 30 м?

28. (II) В момент времени $t = 0$ по грузу массой 650 г, прикрепленному на конце горизонтальной пружины ($k = 64$ Н/м), ударяют молотком, который сообщает грузу начальную скорость 1,16 м/с. Вычислите: а) период и частоту колебаний; б) амплитуду колебаний; в) максимальное ускорение; г) координату как функцию времени; д) полную энергию; е) кинетическую энергию при $x = 0{,}65A$ ($A$ – амплитуда).

29. (II) Получите формулу, описывающую зависимость смещения $x$ от времени для гармонического осциллятора, используя закон сохранения энергии (14.11). (*Подсказка*: проинтегрируйте выражение (14.12а) с учетом того, что $v = dx/dt$.)

30. (III) Пусть на конце пружины колеблется тело массой $m$. Масса пружины $m_s$ мала по сравнению с $m$, но пренебречь ею нельзя. Покажите, что «эквивалентная масса» этой колебательной системы равна $m + (1/3)m_s$ и период колебаний запишется в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + (1/3)m_s}{k}},$$

где $k$ – коэффициент жесткости пружины. (*Подсказка*: считайте, что пружина сжимается и растягивается по всей длине и все участки пружины колеблются в фазе.)

Раздел 14.5

31. (I) Какую длину должен иметь математический маятник, чтобы его период колебаний был равен точно одной секунде?

32. (I) Период колебаний математического маятника на Земле равен 0,60 с. Каким будет его период колебаний на Марсе, где ускорение свободного падения составляет 0,37 земного?

33. (II) Длина математического маятника равна 0,36 м; его отводят на 10° от вертикали и отпускают. а) Чему равна частота колебаний? б) С какой скоростью точечная масса на его конце проходит нижнюю точку?

34. (II) Чему равен период математического маятника длиной 80 см а) на земле; б) в свободно падающем лифте?

35. (II) Длина математического маятника равна 0,24 м. В момент времени $t = 0$ его запускают, отклонив на угол 14° от вертикали. Вычислите, пренебрегая трением, угол отклонения маятника при а) $t = 0{,}25$ с; б) $t = 1{,}60$ с; в) $t = 5{,}00$ с.

36. (II) Выведите выражение для максимальной скорости $v_0$ материальной точки на конце математического маятника, выразив ускорение свободного падения через $g$, длину через $L$ и угол колебаний через $\theta$.

37. (II) Математический маятник качается с амплитудой 10,0°. Какую долю своего периода он находится между +5,0 и −5,0°? Колебания считайте гармоническими.

38. (II) Математический маятник качается с частотой $f$. Чему равна частота его колебаний, если весь маятник движется с ускорением $g/2$, направленным а) вверх; б) вниз; в) горизонтально?

39. (II) Какой может быть максимальная амплитуда маятника, чтобы формула (14.13) выполнялась с точностью а) 1,0%; б) 0,1%?

40. (II) Маятник точных часов колеблется с амплитудой ± 12,0°. Если из-за неисправности в механизме амплитуда колебаний будет со-

ставлять $\pm 1{,}0°$, то на сколько минут часы отстанут или уйдут вперед за сутки?

•Раздел 14.6

*41. (II) Однородное круглое колесо радиусом $R$ подвешено за его край. Чему равна частота его малых колебаний относительно точки подвеса?

*42. (II) Маятник состоит из маленького груза массой $M$ и однородной нити массой $m$ и длиной $L$. а) Напишите формулу для периода колебаний. б) Какова была бы относительная погрешность (в процентах) расчетов, если бы мы вычисляли период колебаний этого маятника по формуле (14.13) для математического маятника?

*43. (II) *Крутильный маятник*. Плоский цилиндр (диск) с моментом инерции $I$ подвешен на проводе (рис. 14.18). Если повернуть диск на

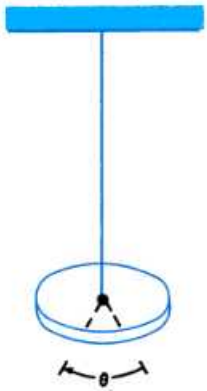



Рис. 14.18.

угол θ от положения равновесия, то он начнет колебаться. Закрученный провод создает возвращающий момент силы

$\tau = -K\theta$,

где $K$ – постоянная, а угол θ не слишком велик. а) Выведите уравнение движения (зависимость θ от времени) и покажите, что колебания являются гармоническими. б) Получите формулу для периода колебаний. Примером крутильного маятника может служить колесико балансира в часах; возвращающий момент создается здесь специальной пружиной («волоском»).

*44. (II) Колесико балансира в часах представляет собой тонкое кольцо радиусом 0,95 см с частотой колебаний 3,10 Гц. Если для закручивания колесика на 60° требуется момент силы $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ Н·м, то чему равна масса колесика?

*45. Рассматривая ногу как физический маятник, определите период колебаний а) непосредственным измерением для собственной ноги; б) пользуясь формулой (14.15). Ногу можно считать длинным стержнем с шарниром на конце; пусть масса ноги в п. «б» равна 12,0 кг, длина 0,80 м, центр тяжести находится на расстоянии 0,50 м от ступни.

*46. (III) Пусть С – центр качаний тела, закрепленного на оси в точке О. Покажите, что если тело закрепить на параллельной оси, проходящей через С, то а) период колебаний останется прежним; б) центром качаний будет точка О. (*Подсказка*: воспользуйтесь теоремой Штейнера о моменте инерции тела относительно параллельной оси.)

*47. (III) Покажите, что если тело испытывает удар в его центре качаний С (рис. 14.10), то во время удара в точке подвеса О не возникает силы реакции. (*Подсказка*: рассмотрите поступательное перемещение центра масс и вращение относительно центра масс.)

Раздел 14.7

48. (II) Брусок массой 750 г колеблется на конце пружины с коэффициентом жесткости $k = 56{,}0$ Н/м. Брусок движется в жидкости, где на него действует сила сопротивления $F = -bv$; $b = 0{,}162$ Н·с/м. а) Чему равен период колебаний? б) На какую долю уменьшается амплитуда после каждого колебания? в) Выразите зависимость координаты от времени, если при $t = 0$ $x = 0$, а при $t = 1{,}00$ с $x = 0{,}120$ м.

49. (II) а) Покажите, что полная механическая энергия $E = mv^2/2 + kx^2/2$ для гармонического осциллятора со слабым затуханием уменьшается со временем по закону

$$E = (1/2)kA^2 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-(b/m)t},$$

где $E_0$ – полная механическая энергия при $t = 0$. (Считайте, что $\omega' \gg b/2m$.) б) Покажите, что за один период теряется доля полной энергии, равная

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi b}{m\omega_0} = \frac{2\pi}{Q},$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, а $Q (= m\omega_0/b)$ – *добротность* колебательной системы. Чем больше $Q$, тем дольше поддерживаются колебания в системе. Физический смысл параметра $Q$ мы рассматривали в разд. 14.8.

50. (II) Гармонический осциллятор с затуханием за период колебаний теряет 5,0% механической энергии. а) На сколько процентов его

частота отличается от «собственной» частоты $\omega_0 = \sqrt{k/m}$? б) Через сколько периодов амплитуда колебаний уменьшится в $e$ раз?

Раздел 14.8

51. (II) а) Чему равна разность фаз $\phi$ между вынуждающей силой и смещением при резонансе ($\omega = \omega_0$)? б) Каково при этом смещение в момент времени, когда вынуждающая сила имеет максимальное значение? А в момент времени, когда $F = 0$?

52. (II) Постройте точную резонансную кривую от $\omega = 0$ до $\omega = 2\omega_0$ при $Q = 4{,}0$.

53. (II) Амплитуда вынужденных колебаний гармонического осциллятора достигает значения $28{,}6F_0/m$ при резонансе на частоте 382 Гц. Чему равна добротность $Q$ системы?

54. (II) Покажите прямой подстановкой, что выражение (14.24) [с учетом (14.25)] есть решение уравнения движения (14.23) для вынужденных колебаний гармонического осциллятора.

55. (II) Продифференцируйте выражение (14.25а) и покажите, что резонансный максимум амплитуды наблюдается при частоте

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2/2m^2}\,.$$

56. (III) Рассмотрите математический маятник длиной 0,50 м, добротность которого равна $Q = 400$. а) Сколько времени потребуется, чтобы амплитуда малых колебаний уменьшилась на две трети? б) Если амплитуда колебаний равна 2,0 см, а масса маятника 0,20 кг, то чему равна скорость уменьшения начальной энергии (в ваттах)? в) Если необходимо возбудить резонанс синусоидальной внешней силой, то насколько точно должна совпадать ее частота с частотой собственных колебаний маятника?

57. (III) *Передача мощности вынужденным колебаниям.* а) Покажите, что мощность, передаваемая вынужденным колебаниям внешней силой $F_{\text{внешн}}$, записывается в виде

$$P = F_{\text{внешн}}\, v = \frac{F_0^2\,\omega\cos\phi_0\cos^2\omega t - (1/2)\,F_0^2\,\omega\sin\phi_0\sin 2\omega t}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \omega^2 b^2/m^2}}.$$

б) Покажите, что средняя за один или много периодов передаваемая мощность дается выражением

$$\bar{P} = \frac{\omega F_0^2\cos\phi_0}{2m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2 b^2/m^2}} = \frac{1}{2}\,\omega A_0 F_0\cos\phi_0$$

или

$$\bar{P} = (1/2)\,F_0\,v_{\text{макс}}\cos\phi_0\,,$$

где $v_{\text{макс}}$ – максимальное значение производной $dx/dt$. в) Постройте кривую зависимости $\bar{P}$ от $\omega$, если $\omega$ изменяется от 0 до $2\omega_0$, при $Q = 6{,}0$. Обратите внимание, что, хотя при $\omega = 0$ амплитуда не равна нулю, мощность $\bar{P}$ при $\omega = 0$ равна нулю.

58. (III) Выведите формулу (14.27).

*Раздел 14.9

*59. (II) Запишите в координатах $x$ и $y$ выражения для траекторий движения, показанных а) на рис. 14.15, *г*; б) на рис. 14.15, *д*. Положите $\phi_y = 0$.

*60. (II) Покажите аналитически, что два гармонических колебания во взаимно перпендикулярных направлениях при сложении приводят к эллипсу $(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1)$, когда $\omega_x = \omega_y$, $\phi_y - \phi_x = \pm\,\pi/2$, $A_x \neq A_y$.

*61. (II) Частица движется с постоянной скоростью 24 м/с по окружности с центром в начале координат. В момент времени $t = 0$ частица находится в точке $x = 3{,}0$ м, $y = 4{,}2$ м. а) Найдите выражения, описывающие траекторию этой частицы в плоскости $x, y$. б) Чему равна частота вращения? в) Чему равна начальная фаза?

*62. (II) Сигналы, подаваемые на горизонтальный и вертикальный входы осциллографа, определяются выражениями соответственно

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \quad y = A\cos\omega t.$$

Найдите траекторию движения (т. е. форму кривой, описываемой траекторией) для следующих случаев: а) $\phi = 0°$; б) $\phi = 60°$; в) $\phi = -60°$; г) $\phi = 90°$.

*63. (II) Нарисуйте фигуру Лиссажу для случая $\omega_x = 3\omega_y$, $A_x = A_y$, $\phi_y - \phi_x = \pi/2$.

*Численное программирование на калькуляторе

*64. (III) *Гармонические колебания.* Уравнение [(14.36)]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

является дифференциальным уравнением. В разд. 14.2 мы нашли общее аналитическое решение этого уравнения. Не все дифференциальные уравнения решаются так же просто, как это, и приходится прибегать к численным методам решения. В качестве иллюстрации проведем численное интегрирование для системы из примера 14.1 с теми же параметрами и

начальными условиями (см. разд. 2.10) и рассчитаем смещение $x$ как функцию времени $t$ на интервале 0–1,20 с. (*Подсказка*: необходимо интегрировать дважды; вначале численно интегрируют уравнение

$$dv = -(k/m)\,x\,dt,$$

а затем $dx = v\,dt$.) Постройте график полученного вами решения и убедитесь в том, что в каждой точке на графике оно отличается от аналитического решения не более чем на 1%. (Если расхождения окажутся больше, то следует уменьшить шаг интегрирования по времени и повторить вычисления.)

*65. (III) *Затухающие гармонические колебания.* Дифференциальное уравнение (14.16) описывает затухающие гармонические колебания в случае, когда сила, вызывающая затухание, прямо пропорциональна скорости $v$. Пусть постоянная затухания $b$ в примере 14.1 может принимать значения а) 1,90 кг/с и б) 7.25 кг/с. Воспользуйтесь численным интегрированием (см. задачу 64) и постройте график зависимости $x$ от $t$ на интервале 0–2,50 с для обоих случаев («а» и «б»). в) Найдите значение $b$, при котором затухание будет критическим; постройте график для этого случая, вновь используя численное интегрирование. Для всех трех случаев сравните полученные графики с аналитическим решением и убедитесь в том, что расхождение не превышает 2%.

*66. (III) *Затухание, пропорциональное* $v^2$. Пусть гармонический осциллятор из примера 14.1 тормозится силой, пропорциональной квадрату скорости: $F_{\text{зат}} = -cv^2$, где $c = 0{,}275$ кг·с/м. Проинтегрируйте численно дифференциальное уравнение от $t = 0$ до $t = 2{,}00$ с с точностью 2% и постройте график решения.

*67. (III) *Математический маятник.* а) Покажите, что дифференциальное уравнение движения математического маятника (разд. 14.5) имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

б) Пусть грузик математического маятника находится на 1,20 м ниже точки подвеса; грузик отводится на угол $\theta_м = 45°$ и отпускается в момент времени $t = 0$. Численно проинтегрируйте уравнение движения, чтобы определить $\theta$ как функцию времени в интервале от $t = 0$ до $t = 3{,}50$ с точностью не хуже 1%. в) Постройте график решения; на этом же графике изобразите аналитическое решение, полученное в предположении малой амплитуды $\theta_м$. г) Чему равен период колебаний, найденный численным интегрированием? Какое значение дают расчеты по формуле (14.14)? Чему равен период малых колебаний ($\theta_м$ мало)? Что можно сказать о зависимости периода $T$ от угловой амплитуды $\theta_м$?

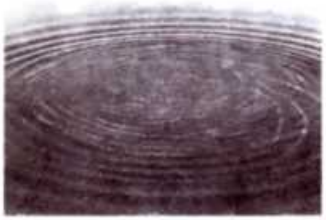
# 15 Волновое движение



*а*



*б*



*в*



*г*

Рис. 15.1. Волны на воде, распространяющиеся от источника (Д. Джанколи).

От камня, брошенного в озеро, образуются расходящиеся круговые волны (рис. 15.1). Если вы подергаете вверх и вниз за конец шнура, проложенного прямо по столу, то по нему тоже побегут волны (рис. 15.2). Волны на воде и волны, бегущие по шнуру,– это два наглядных примера волнового движения. Звук также распространяется в виде волны, и свет представляет собой электромагнитные волны. Элементарные частицы вещества, такие, как электроны, в некоторых отношениях тоже подобны волнам. Таким образом, изучение волновых явлений очень важно, поскольку они встречаются во многих областях физики. В настоящей главе мы сосредоточим внимание на изучении *механических волн*, т. е. волн, которые распространяются только в веществе, например волны на воде или волны в натянутой струне. Другие виды волнового движения мы обсудим в последующих главах.

Источниками волн – будь то морские волны, волны в струне, волны землетрясений или звуковые волны в воздухе – являются колебания. Например, в случае звука колебательные движения совершает не только источник звука (колеблющееся тело), но также и приемник звука – барабанная перепонка уха и мембрана микрофона. Колеблется и сама среда, через которую распространяется волна.

Наблюдая за набегающими на берег волнами, вы, возможно, задавались вопросом: приносят ли волны воду к берегу? Нет, волны в действительности не переносят вещество, через которое они распространяются[1]. Бегущие по воде волны, очевидно, обладают скоростью. Но каждая частица воды при этом совершает лишь колебания относительно положения равновесия. Это легко наблюдать по листьям, плавающим на поверхности пруда. Листья не движутся вперед вместе с волной, а просто колеблются вверх и вниз; такое же движение совершает и вода. Аналогично волна по шнуру на рис. 15.2 бежит вправо, но каждый участок шнура только колеблется туда

[1] Это не следует путать с ударом волн, когда в результате взаимодействия волны с берегом ее уже нельзя рассматривать как простое волновое движение. Точно так же ветер может прибивать плавающие предметы к берегу или сносить их в море.

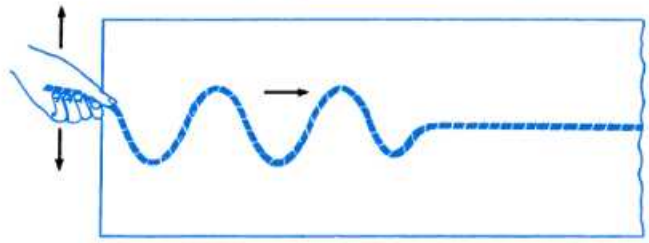


Рис. 15.2. Волна, бегущая по шнуру.

и обратно. Это общее свойство волн; сами волны могут распространяться через среду на большие расстояния, но сама среда (вода, шнур) совершает лишь ограниченное движение. Таким образом, хотя волна сама по себе и не является материальным телом, ее распространение возможно только в материальной среде (веществе). Волна представляет собой колебания, которые при своем распространении не переносят с собой вещество.

Волны переносят энергию из одной точки пространства в другую. Волна на воде приобретает энергию за счет брошенного в воду камня или порыва ветра в открытом море. Энергия переносится волнами к берегу. Если вам случалось оказаться под морской волной, когда она разрушается, то вы на себе почувствовали, какую энергию она несет. Рука, дергающая шнур на рис. 15.2, передает ему энергию, причем эта энергия может быть передана другому концу шнура. При всех видах волнового движения происходит перенос энергии.

## 15.1. Характеристики волнового движения

Посмотрим, как образуется волна и за счет чего происходит ее распространение. Рассмотрим вначале отдельный (уединенный) волновой «всплеск», или импульс. Уединенный волновой импульс можно возбудить в шнуре быстрым движением руки вверх-вниз (рис. 15.3). Рука тянет конец шнура вверх, а поскольку концевой участок шнура связан с соседними участками, то им также передается сила, действующая вверх, и они тоже начнут двигаться вверх. Один за другим последовательные участки шнура поднимаются вверх, и вдоль шнура движется наружу «горб» волны. Тем временем рука, держащая конец шнура, опускается в исходное положение вниз, и участки шнура, уже пришедшие в верхнюю точку движения, в той же последовательности возвращаются назад. Таким образом, источником распространяющегося волнового импульса является возмущение, а его распространение обусловлено силами взаимодействия между соседними участками шнура. Аналогичным образом создаются и распространяются волны в других средах.

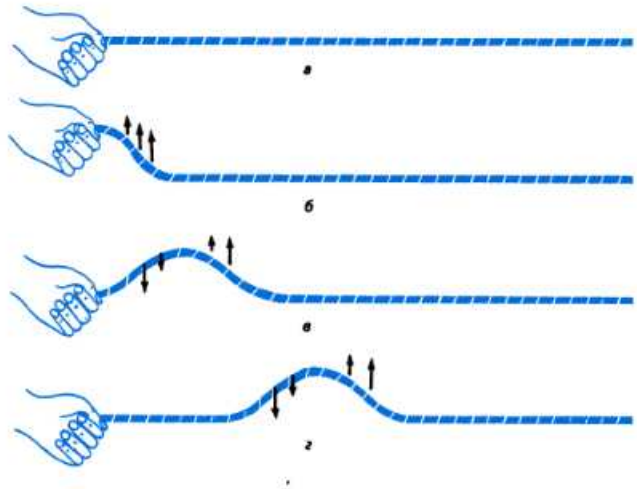



Рис. 15.3. Движение волнового импульса по шнуру. Стрелками показаны скорости частиц шнура.

Источником *непрерывной* или *периодической* волны, подобной той, зарождение которой показано на рис. 15.2, является непрерывно действующее колебательное возмущение; таким образом, источником волн являются *колебания*. На рис. 15.2 колебания конца шнура создаются рукой. Волны на воде можно возбудить любым колеблющимся предметом, помещенным на поверхность воды, в том числе и рукой. Источником колебаний может быть и сама вода, возбуждаемая дуновением ветра или брошенным в нее предметом (камнем, теннисным мячом). Вибрирующий камертон и «шкура» барабана возбуждают звуковые волны в воздухе; как мы увидим позднее, колеблющиеся электрические заряды порождают световые волны. И вообще почти любой колеблющийся предмет порождает волны.

Таким образом, источником любой волны является *колебание*, которое и распространяется от источника в виде волны. Если источник движется синусоидально, совершая гармонические колебания, то и волна, если среда является абсолютно упругой, будет иметь форму синусоиды как в пространстве, так и во времени. Иными словами, если сделать мгновенную фотографию волнового движения в какой-то момент времени, то волна будет выглядеть как функция синус или функция косинус. Если же рассматривать движение среды в каком-то одном месте в течение длительного периода времени (например, наблюдая колебания поверхности воды между двумя близко стоящими сваями на пирсе), то этот небольшой участок воды будет двигаться вверх-вниз, совершая гармоническое колебание, описываемое синусоидальной функцией времени.

На рис. 15.4 показаны основные параметры, используемые для характеристики периодической синусоидальной волны. Высшие точки волнового движения назы-

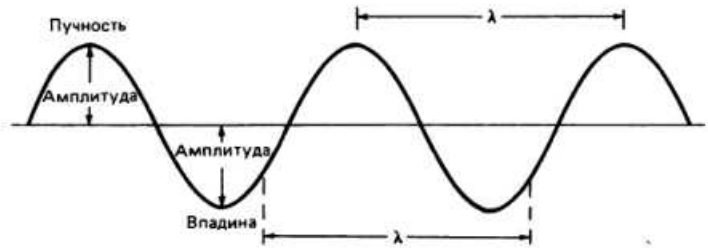



Рис. 15.4. Параметры непрерывной волны.

ваются пучностями, а низшие – впадинами. **Амплитуда** – это максимальная высота пучности или глубина впадины, измеренная относительно нулевого уровня (или положения равновесия); полный размах колебаний от пучности до впадины равен удвоенной амплитуде. Расстояние между двумя соседними пучностями называется **длиной волны** $\lambda$ (греческая строчная буква ламбда). Длина волны равна также расстоянию между *любыми* двумя последовательными одинаковыми по высоте точками волны. **Частота** $f$ [иногда обозначаемая строчной греческой буквой $\nu$ (ню)] – это число гребней, проходящих через данную точку за единицу времени (или число полных колебаний). Период $T$, разумеется, равен $1/f$.

**Скоростью волны** $v$ называется скорость, с которой перемещается, как мы наблюдаем, гребень волны. (Скорость волны следует отличать от скорости частиц самой среды. Например, скорость волны, бегущей по шнуру на рис. 15.2, направлена вдоль шнура, в то время как скорости частиц шнура направлены перпендикулярно ему.) Поскольку за период $T$ гребень проходит расстояние, равное длине волны $\lambda$, скорость волны определяется как

$$v = \lambda/T \text{ или } v = \lambda f. \tag{15.1}$$

Предположим, например, что длина волны равна 5 м, а частота 3 Гц. При этом за одну секунду через данную точку пройдут три гребня волны, отстоящие друг от друга на 5 м; первый гребень (или любая другая фиксированная точка волны) переместится за секунду на 15 м; следовательно, скорость волны равна 15 м/с.

Скорость волны зависит от свойств среды, в которой волна распространяется. В растянутой струне, например, она зависит от силы натяжения струны $F_T$ и от массы на единицу длины струны $\mu$ (строчная греческая буква мю); для волн с небольшой амплитудой мы имеем следующее соотношение:

$$v = \sqrt{F_T/\mu}\,. \tag{15.2}$$

Прежде чем дать вывод этой формулы, заметим, что по крайней мере качественно она согласуется с представлениями механики Ньютона. Иными словами, мы действительно должны были бы предположить, что сила натяжения должна быть в числителе, а линейная плотность

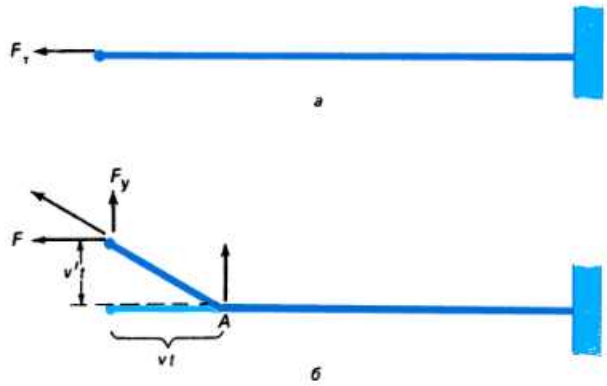



Рис. 15.5. К выводу формулы (15.2) простой волновой импульс.

(масса на единицу длины) — в знаменателе, поскольку, чем больше натяжение, тем больше должна быть и скорость, так как при этом каждый участок струны теснее связан с соседним. Чем больше линейная плотность, тем больше инертность струны, и, следовательно, волна должна распространяться по струне более замедленно.

Для вывода формулы (15.2) воспользуемся простой моделью струны, на которую действует сила натяжения $F_т$ (рис. 15.5, *а*). Сила $F_y$ тянет струну вверх со скоростью $v'$; как показано на рис. 15.5, *б*, все точки струны слева от точки $A$ движутся вверх со скоростью $v'$, а точки справа от $A$ все еще находятся в покое. Скорость распространения $v$ этого волнового импульса равна скорости движения точки $A$, т. е. переднего фронта импульса. За время $t$ точка $A$ уходит вправо на расстояние $vt$, а конец струны перемещается вверх на расстояние $v't$. Из подобия треугольников получим следующее приближенное соотношение:

$$F_т / F_y = v/v',$$

которое справедливо для малых смещений ($v't \ll vt$), так что $F_т$ заметно не изменяется. Как мы показали в гл. 8, импульс силы, действующий на тело, равен изменению импульса (количества движения) тела. Полный импульс силы за время $t$, направленный вверх, равен $F_y t = (v'/v) F_т t$; изменение импульса струны $\Delta p$ равно произведению массы участка струны, движущегося вверх, на его скорость. А поскольку масса движущегося вверх участка равна произведению линейной плотности $\mu$ на длину этого участка $vt$, мы имеем

$$F_y t = \Delta p,$$
$$(v'/v) F_т t = (\mu v t) v'.$$

Отсюда находим $v = \sqrt{F_т/\mu}$, т. е. мы получили формулу (15.2). Хотя эту формулу мы вывели для частного случая, она справедлива и для волн любой другой формы, поскольку любую волну можно представить состоящей из большого числа малых участков рассмотренного вида.

Однако справедливость формулы (15.2) ограничивается лишь малыми смещениями, что мы и учитывали при ее выводе. Этот результат, полученный в рамках механики Ньютона, согласуется с экспериментом.

**Пример 15.1.** Волна, имеющая длину 0,50 м, движется вдоль провода длиной 300 м, общая масса которого равна 30 кг. Если на провод действует сила натяжения 4000 Н, то чему равны скорость и частота этой волны?

**Решение.** Скорость волны вычислим по формуле (15.2):

$$v = \sqrt{\frac{4000\ \text{Н}}{(30\ \text{кг})/(300\ \text{м})}} = 200\ \text{м/с}.$$

Частота при этом оказывается равной

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{200\ \text{м/с}}{0{,}50\ \text{м}} = 400\ \text{Гц}.$$

## 15.2. Типы волн

Мы уже упоминали, что волны могут распространяться на большие расстояния, а частицы среды совершают колебания лишь в ограниченной области пространства. Когда волна движется по шнуру, скажем, слева направо, участки шнура колеблются вверх и вниз, т. е. в направлении, перпендикулярном (или поперечном) движению самой волны. Такая волна называется **поперечной**. Существует и другой тип волн, называемый **продольными волнами**. В продольной волне частицы среды колеблются в *том же самом* направлении, в каком распространяется сама волна. Продольные волны легко наблюдать в мягкой растянутой пружине, попеременно сжимая и растягивая один ее конец, как показано на рис. 15.6, *б* (ср. с поперечными волнами на рис. 15.6, *а*). По пружине перемещаются области сжатия и разрежения. *Области сжатия* – это те области, в которых витки пружины сбли-

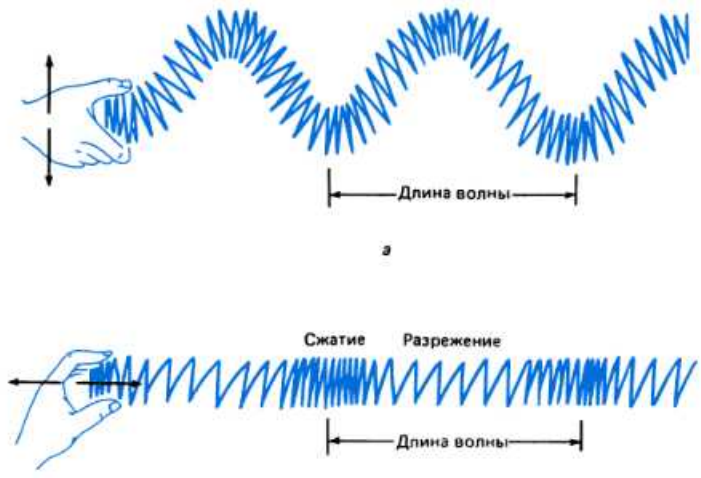



Рис. 15.6. *а* – поперечная волна; *б* – продольная волна.

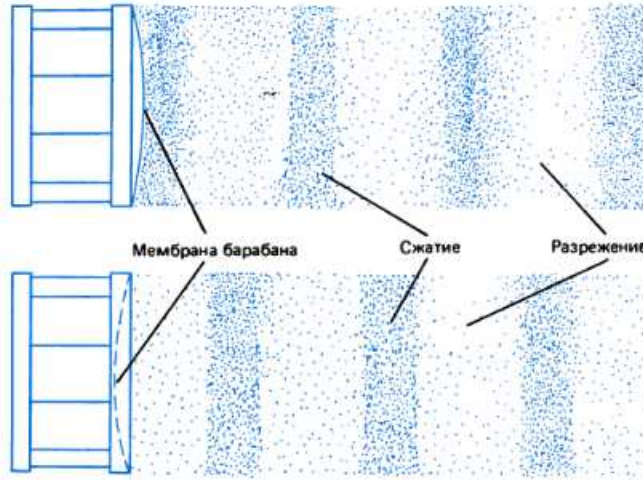



Рис. 15.7. **Образование звуковой (продольной) волны.**

жаются друг с другом, а *области разрежения* – те, в которых они расходятся. Области сжатия и разрежения соответствуют гребням и впадинам поперечной волны.

Важным примером продольной волны является звуковая волна в воздухе. Например, колеблющаяся мембрана барабана создает попеременно сжатие и разрежение в соседствующей с ней области воздуха, благодаря чему образуется продольная волна, распространяющаяся в воздухе (рис. 15.7).

Как и в случае поперечных волн, каждый участок среды, по которому идет продольная волна, совершает очень небольшие по размаху колебания, в то время как сама волна может распространяться на значительные расстояния. К продольной волне также применимы понятия длины волны, частоты и скорости. Длина вол-

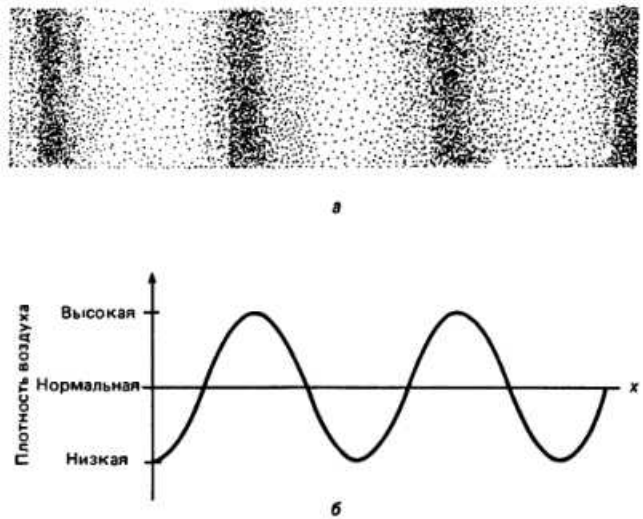



Рис. 15.8. *а* – продольная волна; *б* – ее графическое представление.

ны – это расстояние между двумя соседними областями сжатия (или разрежения), а частота – это число сжатий, проходящих в единицу времени через данную точку. Скорость волны – это скорость, с которой движется область сжатия (разрежения); она равна произведению длины волны на частоту.

Продольную волну можно представить графически как зависимость плотности молекул воздуха (или числа витков пружины) от координаты, как показано на рис. 15.8. Мы нередко будем пользоваться таким графическим представлением, поскольку оно более наглядно показывает то, что происходит в среде. Обратите внимание, что зависимость на рис. 15.8, *б* очень похожа на поперечную волну.

Выражение для скорости продольной волны аналогично формуле (15.2) для скорости поперечной волны в струне. Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{\text{Упругая сила}}{\text{Инертность}}}.$$

В частности, скорость продольной волны в длинном сплошном стержне дается выражением

$$v = \sqrt{E/\rho}\ , \tag{15.3}$$

где $E$ – модуль упругости (разд. 11.4) вещества, а $\rho$ – его плотность. Для продольной волны в жидкости или газе

$$v = \sqrt{B/\rho}\ , \tag{15.4}$$

где $B$ – модуль всестороннего сжатия (разд. 11.4), а $\rho$ – плотность.

Выведем формулу (15.4). Пусть мы имеем волновой импульс, распространяющийся в жидкости (газе) в длинной трубе, так что движение можно считать одномерным. Труба заполнена жидкостью, в которой при $t = 0$ плот-

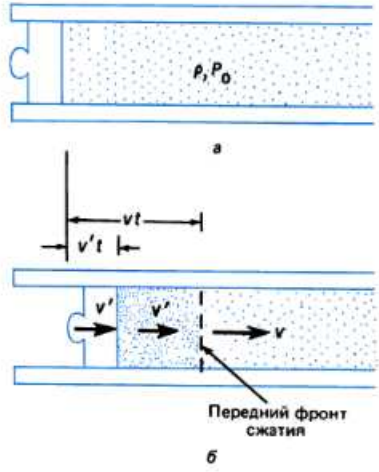



Рис. 15.9. Определение скорости распространения одномерной продольной волны в жидкости, заключенной в длинной узкой трубе.

ность $\rho$ и давление $P_0$ постоянны во всем объеме (рис. 15.9, *а*). В момент времени $t = 0$ поршень в конце трубы начинает двигаться вправо со скоростью $v'$, сжимая перед собой среду, причем за короткое время $t$ поршень проходит расстояние $v't$. Сжимаемая поршнем среда также движется со скоростью $v'$, однако передний фронт области сжатия движется с характерной скоростью $v$, с которой распространяется сжатие в данной среде; будем считать, что $v \gg v'$. Передний фронт сжатия (который при $t = 0$ совпадал с поверхностью поршня) за время $t$ проходит, таким образом, расстояние $vt$ (рис. 15.9, *б*). Пусть давление в области сжатия равно $P_0 + \Delta P$, т.е. на $\Delta P$ больше, чем в невозмущенной среде. Чтобы переместить поршень вправо, к нему нужно приложить внешнюю силу $(P_0 + \Delta P)A$, где $A$ – площадь поперечного сечения трубы. *Результирующую* силу, действующую на среду в области сжатия, можно записать в виде

$$(P_0 + \Delta P)A - P_0 A = A\,\Delta P,$$

поскольку находящаяся справа невозмущенная среда действует с силой $P_0 A$ на передний фронт области сжатия. Следовательно, импульс силы, сообщаемый сжатой среде и равный изменению ее импульса, запишется в виде

$$A\,\Delta P t = (\rho A v t)\,v',$$

где $\rho A v t$ – масса жидкости, которой сообщается скорость $v'$. Следовательно, мы имеем

$$\Delta P = \rho v v'.$$

Согласно определению, модуль всестороннего сжатия $B$ [формула (11.7а)] дается выражением

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_0} = -\frac{\rho v v'}{\Delta V / V_0},$$

где $\Delta V / V_0$ – относительное изменение объема вследствие сжатия. Первоначальный объем подвергающейся сжатию жидкости равен $V_0 = Avt$, а изменение ее объема составляет $\Delta V = -Av't$ (рис. 15.9, *б*). Таким образом,

$$B = -\frac{\rho v v'}{\Delta V / V_0} = -\rho v v' \left(\frac{Avt}{-Av't}\right) = \rho v^2$$

и

$$v = \sqrt{B/\rho}.$$

Последнее выражение и есть формула (15.4). Формула (15.3) выводится аналогично, но дополнительно учитывается то обстоятельство, что при продольном сжатии стержня он также слегка расширяется.

**Пример 15.2.** Шум приближающегося поезда можно услышать, приложив ухо к рельсу. Сколько времени идет по стальному рельсу звуковая волна, когда поезд находится от вас на расстоянии 1,0 км?

**Решение.** Подставляя в (15.3) значения модуля упругости и плотности стали из табл. 11.1 и 12.1, находим

$$v = \sqrt{\frac{2{,}0 \cdot 10^{11}\ \text{Н/м}^2}{7{,}8 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3}} = 5{,}1 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Таким образом, $t$ = Расстояние/Скорость = $(1{,}0 \cdot 10^3\ \text{м})/(5{,}1 \cdot 10^3\ \text{м/с}) = 0{,}20$ с.

При землетрясениях, которые играют роль возмущений, в толще Земли распространяются как поперечные волны, называемые *S*-волнами, так и продольные волны (*P*-волны). В твердом теле тоже могут существовать как поперечные, так и продольные волны, поскольку атомы и молекулы могут колебаться относительно их положения равновесия в любом направлении. Однако в жидкости или газе могут распространяться только продольные волны, так как благодаря текучести этих сред в поперечном направлении на частицы не действует возвращающая сила. Это свойство помогло геофизикам сделать вывод о существовании жидкого ядра Земли, поскольку обнаружено, что в диаметральном направлении сквозь Землю проходят только продольные волны, поперечные же никогда не регистрируются. Единственным возможным объяснением этого является наличие у Земли жидкого (расплавленного) ядра.

Существуют еще волны и третьего типа, называемые *поверхностными волнами*, которые распространяются на границе раздела двух сред. Волны на воде – один из примеров поверхностных волн, существующих на границе между водой и воздухом. Если длина волны меньше глубины водоема, то каждая частица воды на поверхности движется по эллипсу (рис. 15.10), т. е. представляет собой комбинацию колебаний в продольном и поперечном на-

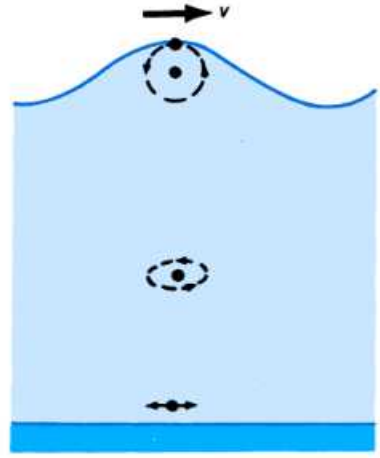



Рис. 15.10. Волна на воде – пример *поверхностной волны*, которая представляет собой комбинацию поперечного и продольного волновых движений.

правлениях. Под поверхностью (но вблизи от нее) движение частиц тоже является сочетанием продольного и поперечного (эллиптическое движение), у дна же наблюдается чисто продольное движение. При землетрясениях в земной коре возбуждаются также поверхностные волны; именно их действием и обусловлены главным образом разрушения, производимые землетрясением.

Волны, которые распространяются вдоль прямой линии (таковы, например, поперечные волны в натянутой струне или продольные волны в твердом стержне или трубе, заполненной жидкостью или газом), *называются линейными или одномерными волнами.* Поверхностные волны, такие, как волны на воде (рис. 15.1), являются *двумерными волнами.* Наконец, волны, которые распространяются от источника во всех направлениях (например, звук из громкоговорителя или волны, возбуждаемые землетрясением в толще Земли), представляют собой *трехмерные волны.* Нас будут интересовать одномерные волны как самый простой и наиболее изученный случай волнового движения.

## 15.3. Энергия, переносимая волнами

Волны переносят энергию из одного места в другое. Когда волны распространяются через среду, энергия передается в виде энергии колебаний от одной частицы среды к другой. В синусоидальной волне с частотой $f$ частицы среды совершают гармонические колебания, так что каждая частица обладает энергией $E = (1/2)kD_м^2$, где $D_м$ – максимальное смещение (амплитуда колебаний) частицы от положения равновесия либо в продольном, либо в поперечном направлении [см. формулу (14.11), где мы заменили $A$ на $D_м$]. С помощью (14.8) можно выразить $k$ через частоту: $k = 4\pi^2 mf^2$. Таким образом,

$$E = 2\pi^2 mf^2 D_м^2.$$

Масса $m = \rho V$, где $\rho$ – плотность среды, а $V$ – ее объем. Кроме того, $V = Al$, где $A$ – площадь поперечного сечения, через которое проходит волна, а $l$ – расстояние, которое волна проходит за время $t$: $l = vt$ (здесь $v$ – скорость волны). Таким образом, $m = \rho V = \rho Al = \rho Avt$ и

$$E = 2\pi^2 \rho Avtf^2 D_м^2. \qquad (15.5)$$

Если рассмотреть передний фронт синусоидальной волны, подошедший к области, где волнового движения не было (как на рис. 15.2), то станет ясно, что $E$ в формуле (15.5) соответствует средней энергии, которая переносится волной через границу рассматриваемой области за время $t$. Формула (15.5) представляет собой важный результат, состоящий в том, что *энергия, переносимая волной, пропорциональна квадрату ее амплитуды.* Энергия, перено-

симая волной за единицу времени,– это *средняя мощность* $\bar{P}$:

$$\bar{P} = E/t = 2\pi^2 \rho A v f^2 D_M^2 . \qquad (15.6)$$

Наконец, **интенсивность** волны $I$ определяется как средняя мощность, переносимая через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению потока энергии:

$$I = \bar{P}/A = 2\pi^2 v \rho f^2 D_M^2 . \qquad (15.7)$$

Мы видим, что *интенсивность волны пропорциональна квадрату ее амплитуды.*

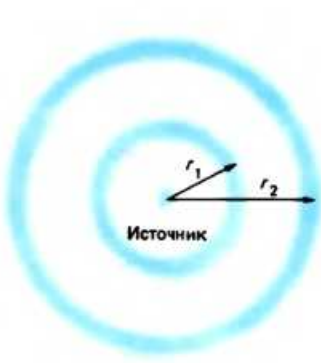



Рис. 15.11. Волна, распространяющаяся от источника, имеет сферическую форму; показаны два гребня (или сжатия), расположенные на расстояниях $r_1$ и $r_2$ от источника.

Если волны распространяются от источника во всех направлениях (примерами таких волн являются звуковые волны в воздухе, волны при землетрясениях, световые волны), то мы имеем дело с трехмерной волной. В изотропной среде (т. е. среде, свойства которой одинаковы по всем направлениям) такая волна имеет сферическую форму и называется *сферической волной* (рис. 15.11). По мере распространения волны от источника она распределяется по все большей площади, поскольку площадь сферы $4\pi r^2$ пропорциональна квадрату ее радиуса $r$. В силу сохранения энергии из (15.5) или (15.6) следует, что по мере увеличения площади $A$ амплитуда волны $D_M$ должна убывать. Иначе говоря, на различных расстояниях $r_1$ и $r_2$ от источника (рис. 15.11) $A_1 D_{M1}^2 = A_2 D_{M2}^2$, где $D_{M1}$ и $D_{M2}$ – амплитуды волны на расстояниях $r_1$ и $r_2$ соответственно. А поскольку $A_1 = 4\pi r_1^2$ и $A_2 = 4\pi r_2^2$, то $D_{M1}^2 r_1^2 = D_{M2}^2 r_2^2$, или

$$D_{M2}/D_{M1} = r_1/r_2 .$$

Таким образом, амплитуда обратно пропорциональна расстоянию до источника; на вдвое большем расстоянии от источника амплитуда волны вдвое меньше и т. д. (если не учитывать затухание, обусловленное трением).

Интенсивность $I$ также убывает с расстоянием. Поскольку $I$ пропорциональна $D_M^2$ [см. (15.7)], интенсивность обратно пропорциональна *квадрату* расстояния до источника. Закон обратных квадратов справедлив для световых, звуковых и других типов волн. Можно прийти к этому выводу и по-другому: рассмотрим две точки $r_1$ и $r_2$ одновременно. Если мощность на выходе источника постоянна, то интенсивность в точке $r_1$ равна $I_1 = \bar{P}/4\pi r_1^2$, а в точке $r_2$ имеем $I_2 = \bar{P}/4\pi r_2^2$. Таким образом,

$$I_2/I_1 = r_1^2/r_2^2 . \qquad (15.8)$$

**Пример 15.3.** Интенсивность сейсмической $P$-волны в 100 км от центра составляет $1{,}0 \cdot 10^6$ Вт/м$^2$. Чему равна интенсивность этой волны на расстоянии 400 км от центра землетрясения?

**Решение.** Интенсивность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до источника. Следовательно, на расстоянии 400 км она будет равна $(1/4)^2 = 1/16$ интенсивности, измеряемой на расстоянии 100 км, т. е. будет равна $6{,}2 \cdot 10^4$ Вт/м$^2$.

Иначе обстоит дело с одномерной волной (например, с поперечной волной в натянутой струне или продольной волной, распространяющейся в металлическом однородном стержне). Здесь площадь $A$ сохраняется неизменной, и поэтому амплитуда $D_м$ также остается постоянной; таким образом, ни амплитуда, ни интенсивность волны не убывают с расстоянием.

Однако в практической ситуации всегда существует затухание, обусловленное трением, и часть энергии колебаний переходит в тепловую энергию. Поэтому амплитуда и интенсивность в одномерной волне с удалением ее от источника несколько уменьшаются. Соответственно и для трехмерной волны уменьшение амплитуды будет больше найденного выше, хотя обычно это уменьшение не слишком велико.

## 15.4. Математическое описание бегущей волны

Рассмотрим одномерную волну, распространяющуюся вдоль оси $x$. Это может быть поперечная волна в натянутой струне или продольная волна в твердом стержне или трубе, заполненной жидкостью или газом. Будем считать, что волна является синусоидальной, ее длина равна $\lambda$, а частота $f$. Пусть при $t = 0$ волна дается выражением

$$D = D_м \sin(2\pi x/\lambda), \tag{15.9}$$

где $D$ – смещение волны в точке $x$, а $D_м$ – амплитуда (максимальное смещение) волны. Эта волна показана на рис. 15.12 сплошной линией. Выражение (15.9) описывает форму волны, которая повторяется с периодичностью, равной длине волны (как раз то, что нам нужно), поскольку смещение оказывается одним и тем же, например при $x = 0$, $x = \lambda$, $x = 2\lambda$ и т. д. (поскольку $\sin 4\pi = \sin 2\pi = \sin 0$).

Предположим теперь, что волна движется вправо со скоростью $v$. Тогда через время $t$ каждый участок волны (в действительности весь профиль волны) сместится вправо на расстояние $vt$; на рис. 15.12 это изображено штриховой линией. Рассмотрим любую точку волны при $t = 0$, скажем гребень волны в точке $x$. За время $t$ этот гребень пройдет расстояние $vt$, и его новая координата будет на $vt$

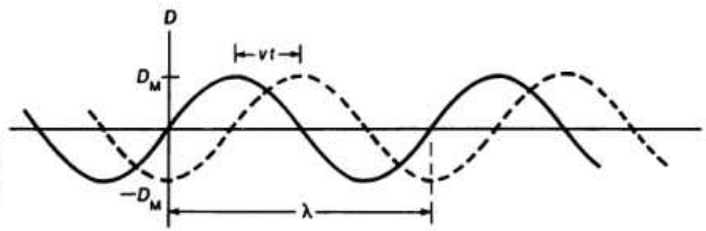



Рис. 15.12. Бегущая волна. За время $t$ волновой профиль перемещается на расстояние $vt$.

больше прежней. Чтобы наше выражение описывало ту же самую точку на профиле волны, аргумент синуса должен остаться тем же, и поэтому в (15.9) $x$ нужно заменить на $x - vt$:

$$D = D_{\text{м}} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]. \qquad (15.10\text{а})$$

Иными словами, если мы движемся вместе с выбранным гребнем, то аргумент синуса остается для нас неизменным (равным $\pi/2$, $5\pi/2$ и т. д.); по мере возрастания $t$ значение $x$ должно увеличиваться с той же скоростью, чтобы значение $x - vt$ оставалось постоянным.

Выражение (15.10а) дает математическое описание синусоидальной волны, движущейся вдоль оси $x$ вправо (в сторону возрастания $x$). Оно определяет смещение $D$ волны в любой точке $x$ в любой момент времени $t$. Поскольку $v = \lambda f$ [см. выражение (15.1)], формулу (15.10*а*) можно переписать в более удобном виде:

$$D = D_{\text{м}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right), \qquad (15.10\text{б})$$

где $T = 1/f = \lambda/v$ – период, или в виде

$$D = D_{\text{м}} \sin(kx - \omega t), \qquad (15.10\text{в})$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ – круговая частота, а

$$k = 2\pi/\lambda. \qquad (15.11)$$

Величина $k$ называется **волновым числом.** (Не следует путать волновое число $k$ с коэффициентом жесткости пружины $k$: это совершенно разные величины.) Все три выражения (15.10а) – (15.10в) эквивалентны друг другу; из них выражение (15.10в) имеет самый простой вид и, возможно, используется чаще всего. Величина $kx - \omega t$ и соответствующие ей величины в двух других выражениях называются фазой волны. Скорость волны $v$, называемую **фазовой скоростью**, поскольку она характеризует перемещение фазы волны, можно записать через $\omega$ и $k$:

$$v = \lambda f = (2\pi/k)(\omega/2\pi) = \omega/k. \qquad (15.12)$$

Рассматривая волну, движущуюся вдоль оси $x$ влево (в сторону уменьшения $x$), будем вновь исходить из формулы (15.9) и заметим, что при этом выбранная точка волнового профиля за время $t$ изменяет свою координату на $-vt$; следовательно, в (15.9) координату $x$ нужно заменить на $x + vt$. Таким образом, смещение волны, движущейся влево со скоростью $v$, запишется в виде

$$D = D_{\text{м}} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right] = \qquad (15.13\text{а})$$

$$= D_{\text{м}} \sin\left(2\pi x/\lambda + 2\pi t/T\right) = \qquad (15.13\text{б})$$

$$= D_{\text{м}} \sin(kx + \omega t). \qquad (15.13\text{в})$$

Иными словами, в (15.10) $v$ заменяется на $-v$.

Посмотрим внимательнее на формулу (15.13в) [или 15.10в)]. При $t = 0$ мы имеем

$$D = D_{\text{м}} \sin kx,$$

т. е. синусоидальный волновой профиль, с которого мы и начинали. Если взглянуть на волновой профиль в какой-то более поздний момент времени $t_0$, то получим

$$D = D_{\text{м}} \sin (kx + \omega t_0).$$

Иными словами, если бы мы сфотографировали волну при $t = t_0$, то увидели бы синусоиду с фазовым сдвигом $\omega t_0$. Таким образом, для данного момента времени $t = t_0$ волна имеет в пространстве синусоидальный профиль. Однако если мы рассмотрим фиксированную точку в пространстве, например $x = 0$, то увидим, как волна изменяется во времени:

$$D = D_{\text{м}} \sin \omega t$$

[здесь мы использовали выражение (15.13в)]. А это в точности совпадает с выражением для гармонического колебания [см. формулу (14.6) в разд. 14.2]. При любом другом фиксированном значении $x$, скажем $x = x_0$, смещение имеет вид $D = D_{\text{м}} \sin (\omega t + kx_0)$ и отличается только фазовым сдвигом $kx_0$. Таким образом, в любой фиксированной точке пространства смещение в волне совершает гармонические колебания. Формулы (15.10) и (15.13) объединяют оба этих свойства волнового движения и описывают *бегущую синусоидальную волну* (называемую также *гармонической волной*).

Рассмотрим теперь волну (или волновой импульс) произвольной формы. Если потери на трение малы, то волна, как показывает опыт, при своем распространении сохраняет форму. В таком случае можно применить те же рассуждения, которые приводятся сразу после формулы (15.9). Предположим, что профиль волны при $t = 0$ описывается функцией

$$D = f(x),$$

где $D$ – смещение волны в точке $x$. Через некоторое время $t$, если волна движется вправо вдоль оси $x$, она, сохраняя ту же первоначальную форму, сместится вправо на расстояние $vt$, где $v$ – фазовая скорость волны. Следовательно, мы должны заменить $x$ на $x - vt$, чтобы получить смещение в момент времени $t$:

$$D = f(x - vt). \tag{15.14}$$

Если же волна движется влево, то $x$ нужно заменить на $x + vt$, и тогда

$$D = f(x + vt). \tag{15.15}$$

Таким образом, любая волна, движущаяся вдоль оси $x$, должна описываться выражением вида (15.14) или (15.15), где функция $f$ определяет форму или профиль волны.

**Пример 15.4.** Можно показать, что любая одномерная волна удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}, \qquad (15.16)$$

которое называется **волновым уравнением.** Здесь $v$ – скорость волны. Величина $\partial^2 D/\partial t^2$ – это вторая производная от $D$ по времени при постоянном значении $x$, а $\partial^2 D/\partial x^2$ – вторая производная от $D$ по $x$ при постоянном $t$. Эти производные называются частными и используются для функций двух и более переменных. а) Покажем, что синусоидальная волна (15.10в) удовлетворяет волновому уравнению. б) Покажем то же самое для волны общего вида (15.14).

**Решение.** а) Продифференцируем (15.10в) по времени $t$ дважды:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\omega D_{\text{м}} \cos(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\omega^2 D_{\text{м}} \sin(kx - \omega t).$$

Первая и вторая производные по $x$ запишутся соответственно в виде

$$\frac{\partial D}{\partial x} = k D_{\text{м}} \cos(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -k^2 D_{\text{м}} \sin(kx - \omega t).$$

Разделив вторые производные по времени на вторые производные по координате $x$, получим

$$\frac{\partial^2 D/\partial t^2}{\partial^2 D/\partial x^2} = \frac{-\omega^2 D_{\text{м}} \sin(kx - \omega t)}{-k^2 D_{\text{м}} \sin(kx - \omega t)} = \frac{\omega^2}{k^2}.$$

Из выражения (15.12) имеем $\omega^2/k^2 = v^2$, так что (15.10) действительно удовлетворяет волновому уравнению (15.16).

б) Обозначим разность $x - vt$ через $z$. Тогда, если $D = f(x - vt) = f(z)$, используя правило дифференцирования по промежуточной переменной, находим

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(-v),$$

поскольку $\partial z/\partial t = -v$. Кроме того, мы имеем

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -v\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

поскольку $\partial z/\partial x = 1$. Вторая производная запишется в виде

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Поскольку $\partial^2 D/\partial t^2 = v^2(\partial^2 f/\partial z^2)$ и $\partial^2 D/\partial x^2 = \partial^2 f/\partial z^2$, мы приходим к волновому уравнению $\partial^2 D/\partial t^2 = v^2(\partial^2 D/\partial x^2)$.

**Пример 15.5.** Левому концу длинной горизонтальной натянутой струны сообщается простое гармоническое колебательное движение с частотой $f = 250$ Гц и амплитудой 2,6 см. Сила натяжения струны равна 140 Н, а линейная плотность струны $\mu = 0{,}12$ кг/м. При $t = 0$ конец струны смещен вверх на 1,6 см и движется вверх. Необходимо а) вычислить длину образующейся волны и б) написать выражение, описывающее бегущую волну.

**Решение.** а) Скорость волны равна $v = \sqrt{F_{\text{т}}/\mu} = \sqrt{(140\text{ Н})/(0{,}12\text{ кг/м})} = 34$ м/с. Тогда $\lambda = v/f = (34\text{ м/с})/(250\text{ Гц}) = 0{,}14\text{ м} = 14$ см.

б) Пусть левый конец струны имеет координату $x = 0$. Фаза волны при $t = 0$, вообще говоря, не всегда равна нулю, как предполагалось в формулах (15.9) – (15.11) и (15.13). Волну, движущуюся вправо, можно записать в общем виде:

$$D = D_{\text{м}} \sin(kx - \omega t + \phi),$$

где $\phi$ – начальная фаза. В нашем случае амплитуда $D_{\text{м}} = 2{,}6$ см, а при $t = 0$ и $x = 0$ мы имеем $D = 1{,}6$ см. Следовательно,

$$1{,}6 = 2{,}6 \sin\phi,$$

откуда находим $\phi = 0{,}66$ рад $= 38°$. Кроме того, известно, что $\omega = 2\pi f = 1570\text{ с}^{-1}$ и $k = 2\pi/\lambda = 45\text{ м}^{-1}$. Таким образом, мы получаем следующее выражение для смещения в бегущей волне:

$$D = 0{,}026 \sin(45x - 1570t + 0{,}66),$$

где $D$ и $x$ измеряются в метрах, а $t$ – в секундах.

## 15.5. Принцип суперпозиции

Обнаружено, что, когда две или несколько волн одновременно проходят через одну и ту же область пространства, для многих типов волн *смещение равно векторной (или алгебраической) сумме смещений каждой из волн.* Это утверждение называется **принципом суперпозиции.** Он выполняется для механических волн в тех случаях, когда смещения не слишком велики и в колеблющейся среде сохраняется линейная зависимость между смещением и возвращающей силой[1]. Если же амплитуда механической волны настолько велика, что смещение, например, выходит за пределы области упругих деформаций среды и закон Гука перестает быть справедливым, то принцип суперпозиции нарушается[2]. Мы будем рассматривать главным образом системы, в которых принцип суперпозиции можно считать выполняющимся.

Одно из следствий принципа суперпозиции состоит в том, что волны, проходящие через какую-либо область пространства, продолжают двигаться независимо одна от другой. Возможно, вам приходилось наблюдать, как круги на воде (двумерные волны) от двух брошенных одновременно камней проходят один через другой.

Принцип суперпозиции иллюстрируется на рис. 15.13. В этом случае мы имеем три волны (в натянутой струне) с различными амплитудами и частотами. В любой момент времени амплитуда волны представляет собой алгебраическую сумму амплитуд отдельных волн в этой точке в данный момент времени. Профиль волны уже не является простым синусоидальным; такая волна называется *сложной (или составной) волной.* (Для наглядности на рис. 15.13 амплитуды изображены в увеличенном масштабе.)

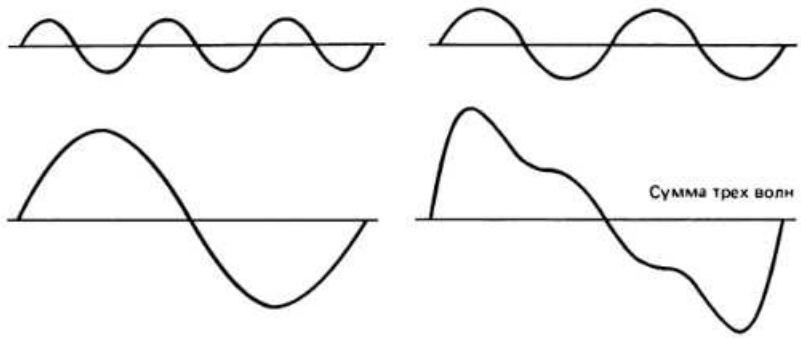



Рис. 15.13. Принцип суперпозиции (одномерная волна). Результирующая волна образуется из трех волн синусоидального профиля с различными амплитудами и частотами ($f_0$, $2f_0$, $3f_0$). Амплитуда результирующей волны в любой точке пространства в данный момент времени равна алгебраической сумме амплитуд волновых компонент.

[1] Для электромагнитных волн в вакууме (гл. 33, т. 2 настоящей книги) принцип суперпозиции выполняется всегда.

[2] Примером нарушения принципа суперпозиции в электронике являются искажения в усилителях за счет внутренней модуляции, обусловленные тем, что колебания с различными частотами не складываются линейно.

Можно показать, что произвольный профиль волны можно представить в виде суммы простых синусоидальных волн с различными амплитудами, длинами волн и частотами. Такое представление известно как *теорема Фурье*. Сложная периодическая волна с периодом $T$ может быть представлена в виде суммы синусоидальных волн с частотами, целыми кратными $f = 1/T$. Если волна не периодическая, то сумма превращается в интеграл, называемый интегралом Фурье. Это лишний раз подтверждает важность изучения синусоидальных волн и гармонических колебаний: ведь любой волновой профиль можно представить в виде суммы чисто синусоидальных волн.

Если возвращающая сила не совсем точно пропорциональна смещению, то скорость синусоидальной механической волны, распространяющейся в некоторой среде, будет зависеть от ее частоты. Это явление называется *дисперсией*. При этом синусоидальные волны, из которых составлена сложная волна, движутся с несколько различными скоростями. Отсюда следует, что профиль сложной волны по мере ее прохождения через такую диспергирующую среду будет меняться. Форма же чисто синусоидальной волны в этих условиях не изменяется, за исключением лишь того, что на нее будут оказывать влияние трение и другие диссипативные силы. Если же среда не обладает дисперсией и трение отсутствует, то даже сложная одномерная волна не будет испытывать искажений.

## 15.6. Отражение волн

Когда волна попадает на препятствие или доходит до границы среды, в которой она распространяется, она (по крайней мере частично) отражается. Вам, возможно, приходилось наблюдать отражение волн от скалы в море или от бортика плавательного бассейна. Вы могли услышать при этом эхо – звук, отраженный от удаленного препятствия.

На рис. 15.14 показано отражение волнового импульса, пробегающего по веревке. Проделайте этот опыт сами, и вы убедитесь, что импульс, отражаясь, переворачивается, если конец веревки закреплен (рис. 15.14, *а*), и не переворачивается, если ее конец свободен. В случае когда конец веревки закреплен в каком-либо основании (рис. 15.14, *а*), импульс, дойдя до закрепленного конца, действует на основание с силой, направленной вверх. В соответствии с третьим законом Ньютона основание действует на веревку с равной по величине и противоположной по направлению силой. Эта направленная вниз сила и «создает» перевернутый отраженный импульс. Принято говорить, что отраженный импульс меняет фазу на 180°.

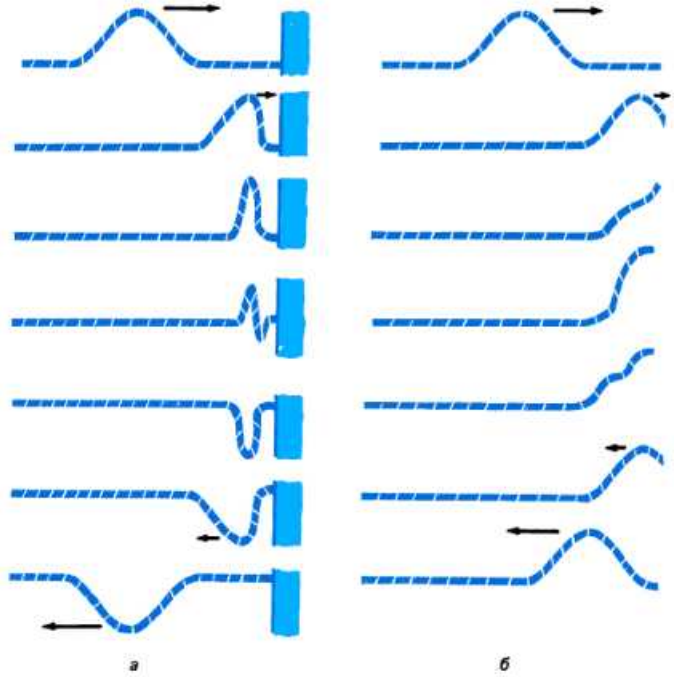



Рис. 15.14. **Отражение волнового импульса, распространяющегося по шнуру, от закрепленного (*а*) и незакрепленного (*б*) концов шнура.**

(«Переворот» импульса эквивалентен потере полуволны $\lambda/2$, или сдвигу фазы на 180°; там, где был гребень волны, будет впадина, и наоборот). Таким образом, если конец веревки закреплен, то отраженная волна будет отличаться по фазе на 180° от падающей волны. На рис. 15.14, *б* конец веревки свободен; он не связан ни с основанием, ни с продолжением веревки. Поэтому, когда до него дойдет волновой импульс, конец веревки «перелетит»: смещение этого конца будет больше, чем когда импульс проходит, скажем, в середине веревки. Свободный конец потянет за собой и всю веревку, благодаря чему возникнет отраженный импульс, но теперь уже не перевернутый (фаза не изменяется).

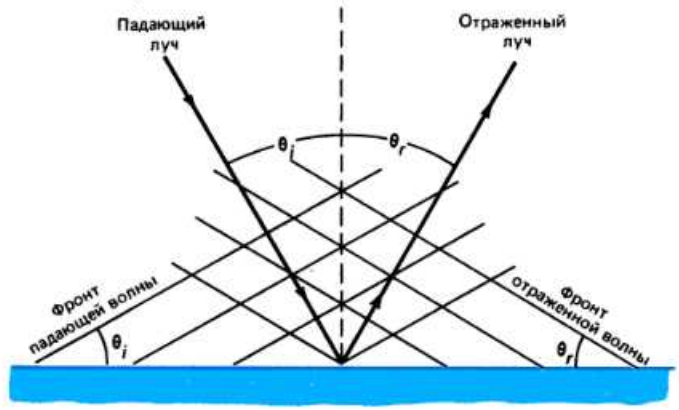



Рис. 15.15. **Закон отражения.**




Рис. 15.16. Когда волновой импульс встречает на своем пути неоднородность, он частично отражается, а частично проходит.

Для двух- и трехмерных волн, таких, как волны на воде, удобно ввести понятие **волнового фронта**. Волновой фронт определяется как линия или поверхность, все точки которой имеют одну и ту же фазу. Линия, проведенная перпендикулярно волновому фронту в направлении распространения волны, называется *лучом*. Как показано на рис. 15.15, угол, который составляет с отражающей поверхностью приходящая, или *падающая*, волна, равен углу, под которым уходит от поверхности отраженная волна. Иными словами, *угол отражения равен углу падения*; угол падения определяется как угол, который составляет с перпендикуляром к поверхности падающий луч (или угол между волновым фронтом и касательной к нему); аналогично определяется и угол отражения, но только по отношению к отраженному лучу.

Когда волновой импульс на рис. 15.14, *а* достигает опоры (стены), отражается не вся энергия. Часть ее передается стене, где она частично переходит в тепловую энергию, а частично продолжает распространяться в виде волны в самой стене, т. е. в материале, из которого изготовлена стена. Возможно, это легче понять, если рассмотреть импульс, бегущий по веревке, которая состоит из двух частей: легкой и тяжелой (рис. 15.16). Когда волна достигает границы между участками, она частично отражается, а частично проходит дальше, как показано на рис. 15.16. Чем массивнее второй участок веревки, тем меньшая доля энергии приходится на прошедшую волну; если же «массивный участок» превращается в стену, то энергия прошедшей волны очень мала. В случае когда линейная плотность второго участка больше, чем первого, отраженный импульс меняет фазу на 180°; если же линейная плотность второго участка меньше, то фаза отраженного импульса не меняется.

## 15.7. Преломление

Когда волна падает на границу двух сред, часть ее энергии отражается, а часть поглощается или пропускается. Если двух- или трехмерная волна, распространяющаяся в одной среде, переходит через границу раздела в среду, где ее скорость иная, то прошедшая волна может начать дви-

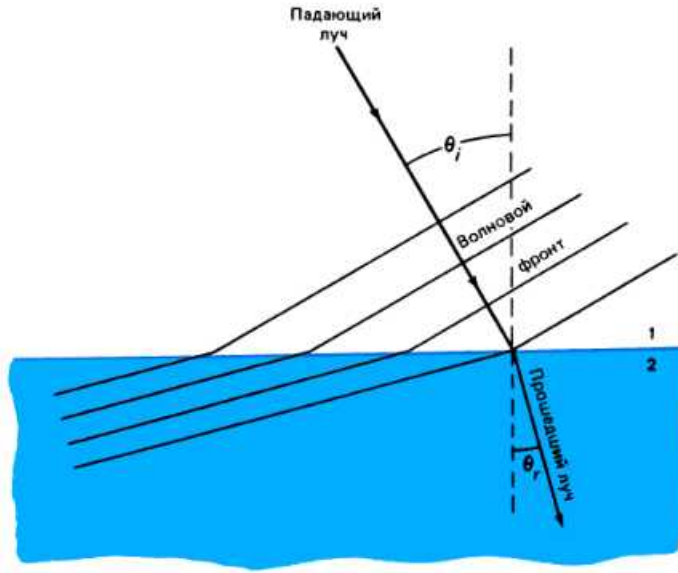



Рис. 15.17. Преломление волн на границе раздела двух сред.

гаться в другом направлении чем падающая (рис. 15.17). Это явление называется **преломлением** (или **рефракцией**). Примером этого служат волны на воде; на мелководье скорость волны уменьшается и происходит преломление волн (рис. 15.18). На рис. 15.17 скорость волны в среде 2 меньше, чем в среде 1. В этом случае направление движения волны изменяется так, что она движется почти перпендикулярно границе раздела. Иными словами, угол преломления $\theta_r$ меньше угла падения $\theta_i$. Чтобы объяснить, почему так происходит, представим себе каждый фронт волны как ряд солдат, идущих строем. Строй солдат пересекает границу между твердым грунтом (среда 1) и болотом (среда 2), так что скорость их движения, естественно, уменьшается. Солдаты, первыми подошедшие к болоту, первыми и замедлят шаг, так что ряды их изогнутся, как показано на рис. 15.19, *а*. Рассмотрим волновой фронт (или строй солдат), обозначенный на рис. 15.19, *б* буквой *A*. За одно и то же время $t$ точка $A_1$ пройдет расстояние $l_1 = v_1 t$, а точка $A_2$ – расстояние $l_2 = v_2 t$. Два треугольника, показанные на рисунке, имеют общую сторону, обозначенную через $a$. Таким образом, мы имеем



Рис. 15.18. Преломление (рефракция) волн на воде. (Фото помещено с любезного разрешения U. S. Air Force, Cambridge Research Laboratories.)

$$\sin\theta_1 = l_1/a = v_1 t/a$$

и

$$\sin\theta_2 = l_2/a = v_2 t/a.$$

Разделив эти два выражения одно на другое, получим

$$\sin\theta_2/\sin\theta_1 = v_2/v_1; \qquad (15.17)$$

здесь $\theta_1$ – угол падения ($\theta_i$), а $\theta_2$ – угол преломления ($\theta_r$). Таким образом, выражение (15.17) устанавливает связь

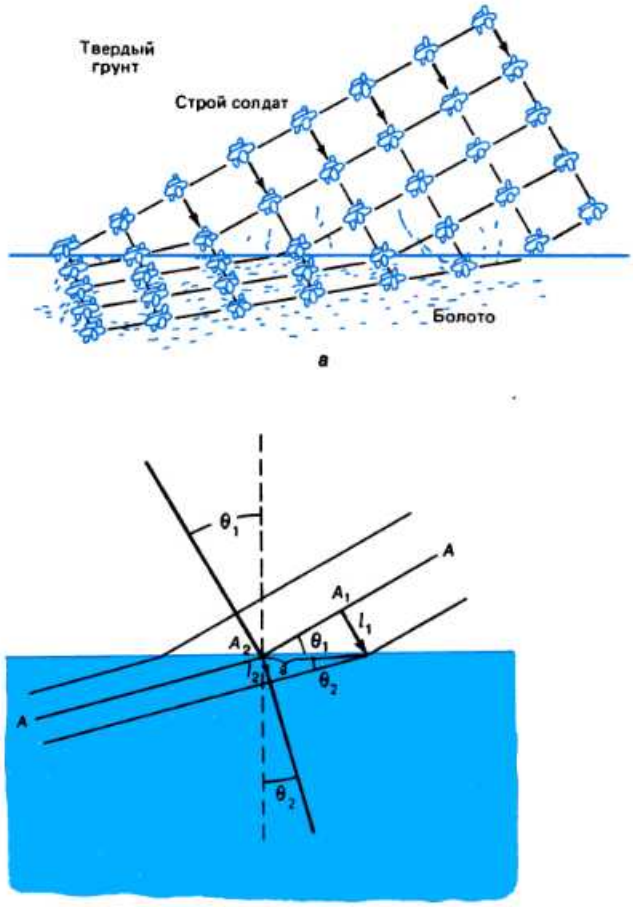



Рис. 15.19. *а* – движение строя солдат; *б* – к выводу закона преломления волн.

между углом падения и углом преломления. Разумеется, если бы волна распространялась в противоположном направлении, то наши рассуждения остались бы неизменными; только теперь углы $\theta_1$ и $\theta_2$ поменялись бы ролями: угол $\theta_2$ был бы углом падения, а $\theta_1$ – углом преломления. Ясно, что, если волна переходит в среду, где ее скорость больше, она отклоняется в противоположном направлении: $\theta_r > \theta_i$. Из (15.17) мы видим, что, чем больше скорость волны в среде, тем больше угол преломления и наоборот.

Сейсмические волны преломляются в глубинах Земли, когда они распространяются через породы с различными плотностями (и, следовательно, с различными скоростями). Преломляются волны на воде, а также световые волны; при изучении распространения света нам очень пригодится формула (15.17).

**Пример 15.6.** Сейсмическая $P$-волна проходит через границу между породами, где ее скорость увеличивается с 6,5 до 8,0 км/с. Чему равен угол преломления, если волна падает на границу под углом 30°?

**Решение.** Поскольку $\sin 30° = 0{,}50$, формула (15.17) дает

$$\sin\theta_2 = \frac{8{,}0\ \text{м/с}}{6{,}5\ \text{м/с}}(0.50) = 0{,}62,$$

откуда находим $\theta_2 = 38°$.

## 15.8. Интерференция

Интерференцией называется явление, которое имеет место, когда две волны в один и тот же момент времени проходят через одну и ту же область пространства; это один из примеров, когда действует принцип суперпозиции[1]. Рассмотрим, например, два волновых импульса, распространяющихся по веревке навстречу друг другу, как показано на рис. 15.20. На рис. 15.20, *а* оба импульса имеют одинаковые амплитуды, но один представляет собой гребень, а другой – впадину; на рис. 15.20, *б* оба импульса являются гребнями. В обоих случаях они встречаются и проходят дальше, каждый сам по себе. Однако, когда они перекрываются, результирующее смещение в каждой точке равно алгебраической сумме их отдельных смещений, как это следует из принципа суперпозиции. На рис. 15.20, *а* смещения направлены противоположно друг другу, и происходит **гасящая (деструктивная) интерференция**. Показанная же на рис. 15.20, *б* интерференция называется **усиливающей (конструктивной) интерференцией**[2].

Круговые волны, расходящиеся от двух брошенных

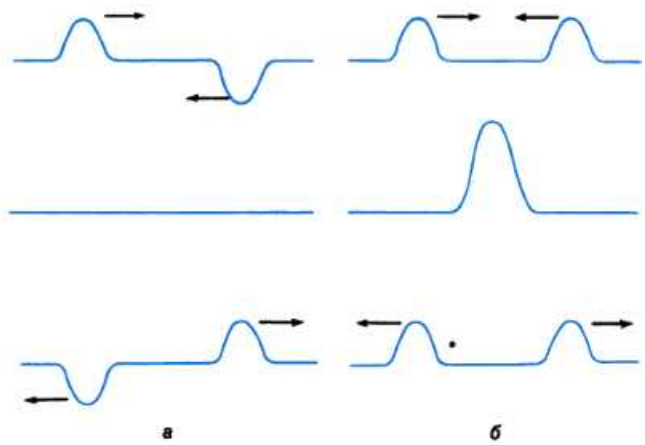


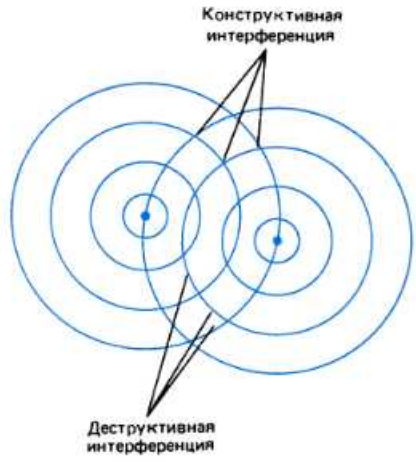

Рис. 15.20. Два волновых импульса, распространяющихся навстречу друг другу. В том месте, где импульсы перекрываются, происходит интерференция. *а* – гасящая интерференция; *б* – усиливающая интерференция.

[1] Здесь следует заметить, что необходимым условием интерференции является *когерентность* складывающихся волн, т. е. постоянство сдвига фаз в любой точке. – *Прим. ред.*

[2] Гасящую и усиливающую интерференцию называют также интерференцией соответственно с ослаблением и усилением. – *Прим. ред.*



*а*




*б*

Рис. 15.21. **Интерференция волн на воде.**

одновременно в воду камней, интерферируют, как показано на рис. 15.21. В некоторых местах гребни одной волны встречаются с гребнями другой (а впадины – с впадинами) и происходит усиливающая интерференция; частицы воды колеблются вверх-вниз с большей амплитудой, чем в каждой из волн в отдельности. В других областях происходит гасящая интерференция и вода вообще не движется; это имеет место там, где гребни одной волны встречаются с впадинами другой. В первом случае (при усиливающей интерференции) интерферирующие волны находятся *в фазе*; при гасящей же интерференции они находятся в *противофазе*, т. е. различаются на половину длины волны, или на 180°. Разумеется, разность

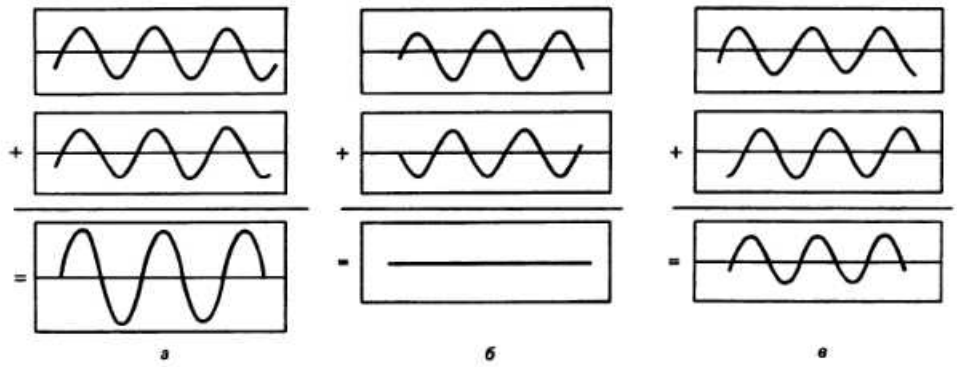



Рис. 15.22. **Интерференция** двух волн. *а* – усиливающая; *б* – гасящая; *в* – частично гасящая.

фаз в большинстве случаев оказывается где-то между этими двумя предельными случаями, и интерференция тогда называется интерференцией с частичным ослаблением. Все три этих случая проиллюстрированы на рис. 15.22, на котором показана зависимость амплитуды от времени для данной точки пространства. Мы рассмотрим интерференцию более подробно в т. 2, где будут изучаться звуковые и световые волны.

## 15.9. Дифракция

Еще одно важное явление, связанное с волновым движением, называется **дифракцией**. Здесь мы будем говорить лишь о качественной стороне дифракции (математическое описание мы дадим, когда будем изучать свет). Под дифракцией понимают способность волн огибать встречающиеся на их пути препятствия и заходить в область позади них, что иллюстрируется на рис. 15.23 для волн на воде.

Дифракция зависит от соотношения между длиной волны и размерами препятствия. Это иллюстрируется на рис. 15.24. Если длина волны много больше размеров препятствия (например, для листьев осоки на рис. 15.24, *а*), то волна проходит так, как если бы его вовсе не было. За более крупными препятствиями (рис. 15.24, *б* и *в*) существует область тени. Заметим, однако, что на рис. 15.24, *г*, где препятствие такое же, как и на рис. 15.24, *в*, но длина волны больше, дифракция волны в область тени сильнее. Следует запомнить правило, что значительная область тени будет лишь в том случае, когда длина волны меньше размеров препятствия.

Необходимо заметить, что это правило относится и к *отражению* волны от препятствия. На рис. 15.24, *а* и *б* отражается очень малая часть волны. Лишь когда длина волны меньше размеров препятствия, как на рис. 15.24, *в*, отражение будет существенным (на рисунке это, впрочем, не показано).



Рис. 15.23. Дифракция волн. (Из книги: *Wiegel R. L.*, Oceanographical Engineering.– Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.)

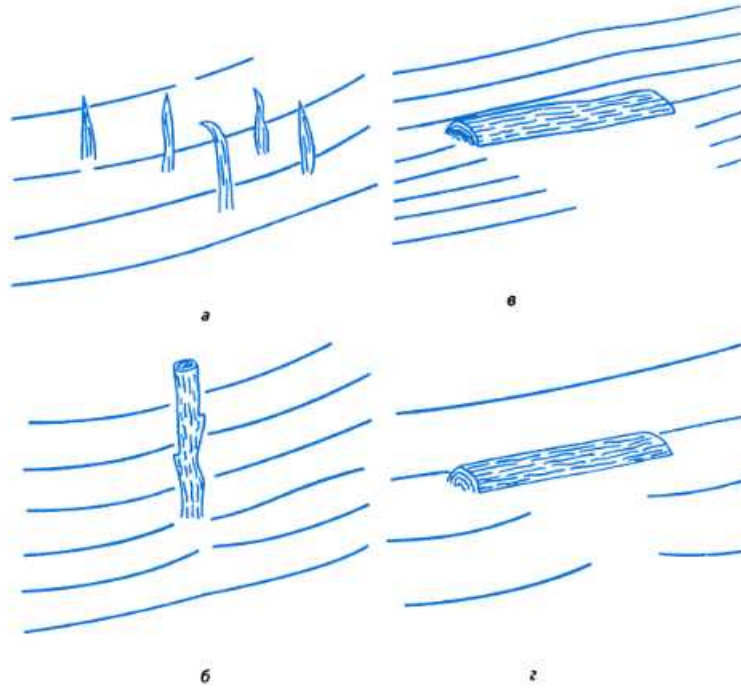



Рис. 15.24. Волны на воде при наличии препятствий различных размеров. Чем больше длина волны по сравнению с размером препятствия, тем сильнее выражена дифракция в области «тени». *а* – листья осоки; *б* – палка, торчащая из воды; *в* – плавающее бревно (малая длина волны); *г* – плавающее бревно (большая длина волны).

Способность волн огибать препятствия и переносить энергию в области, лежащие за препятствием, отличает их от частиц вещества, переносящих энергию. Приведем такой пример: стоя за забором, вы не рискуете получить удар бейсбольным мячом, брошенным с другой стороны, крики же болельщиков и другие звуки вам хорошо слышны, так как звуковые волны огибают забор, или, как говорят, дифрагируют на краю препятствия.

Как интерференция, так и дифракция – это свойства волн, а не материальных тел. Подобное различие между энергией, переносимой волнами, и энергией, переносимой частицами вещества, оказалось очень важным для понимания природы света и вещества, как мы увидим в последующих главах (см. т. 2 настоящей книги).

## 15.10. Стоячие волны; резонанс

Если раскачивать один конец веревки, когда другой ее конец закреплен, то к закрепленному концу побежит непрерывная волна, которая затем отразится назад. Если продолжить качания, то возникнут волны, распространяющиеся в обоих направлениях, причем падающая волна будет интерферировать с отраженной. Как правило, при этом возникает полный беспорядок. Однако если раскачивать конец веревки с правильно подобранной частотой, то интерференция падающей и отраженной волн приведет к возникновению **стоячей волны** со значительной амплитудой (рис. 15.25). Стоячей эта волна называется потому, что она выглядит неподвижной. Точки гасящей интерференции, называемые **узлами**, и точки усиливающей интерференции, называемые **пучностями**, не изменяют своих положений. Стоячие волны возникают не только на одной частоте. При самой низкой из частот, возбуждающих стоячую волну, получается картина, изображенная на рис. 15.25, *а*. Стоячие волны, показанные на рис. 15.25, *б* и *в*, возникают на частотах, равных в точности удвоенной и утроенной низшей частоте, при условии что натяжение веревки остается постоянным. Если частота вчетверо

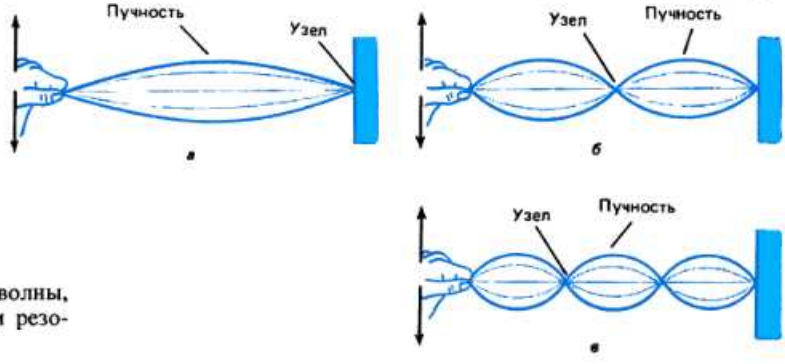



Рис. 15.25. Стоячие волны, соответствующие трем резонансным частотам.

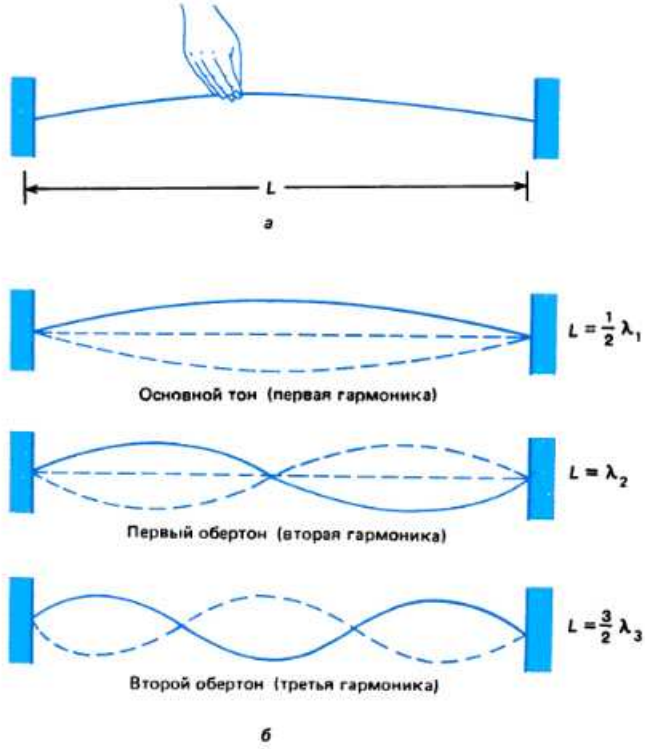



Рис. 15.26. *а* – возбуждение струны; *б* – лишь стоячие волны, соответствующие резонансным частотам, могут существовать долго.

выше, то стоячая волна будет иметь четыре пучности и т. д.

Частоты, на которых возникают стоячие волны, называются **собственными** или **резонансными частотами**, а различные картины колебаний, показанные на рис. 15.25, это различные резонансные моды колебаний. Хотя стоячая волна является результатом интерференции двух волн, движущихся в противоположных направлениях, она оказывается также примером резонансных колебаний тела. Когда в веревке образуется стоячая волна, на частотах, на которых имеет место резонанс, не требуется больших усилий, чтобы поддерживать колебания со значительной амплитудой. Таким образом, стоячие волны относятся к тому же типу явлений, что и резонансные колебания груза на пружине или маятника, обсуждавшиеся в предыдущей главе. Единственная разница в том, что пружина и маятник имеют одну резонансную частоту, в то время как у натянутой веревки бесконечно много резонансных частот, каждая из которых кратна низшей резонансной частоте.

Рассмотрим теперь гитарную или скрипичную струну, натянутую между двумя опорами (рис. 15.26, *а*). Когда струну оттягивают и отпускают, в ней возбуждаются

волны с самыми различными частотами[1]. Волны движутся по струне в обоих направлениях, отражаются на концах и меняют направление своего движения. Большинство возбужденных волн интерферируют друг с другом случайным образом и быстро затухают. Длительное время сохраняются только те волны, которые соответствуют резонансным частотам струны. На концах струны, поскольку они закреплены, будут узлы колебаний (на струне могут быть и другие узлы). Некоторые возможные резонансные моды колебаний (стоячие волны) показаны на рис. 15.26, *б*. Вообще говоря, колебательное движение будет представлять собой комбинацию этих различных резонансных мод, но лишь на тех частотах, которые соответствуют резонансной частоте.

Для того чтобы найти резонансные частоты, заметим сначала, что длины стоячих волн связаны с длиной $L$ струны простым соотношением. Низшая частота – **основная мода**, или **первая гармоника**[2], соответствует единственной пучности на струне, и, как видно из рис. 15.26, *б*, длина струны $L$ равна половине длины волны, т. е. $L = \lambda_1/2$, где $\lambda_1$ – длина волны основной моды. Следующая мода колебаний соответствует двум пучностям и называется **второй гармоникой**; в этом случае $L = \lambda_2$. Для третьей и четвертой гармоник мы имеем соответственно $L = (3/2)\lambda_3$ и $L = 2\lambda_4$ и т. п. В общем случае мы можем написать

$$L = n\lambda_n/2, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Целое число $n$ обозначает номер гармоники: $n = 1$ соответствует основной моде, $n = 2$ – второй гармонике и т. д. Вторая гармоника называется также первым *обертоном*, третья гармоника – вторым обертоном и т. д. Таким образом, мы имеем

$$\lambda_n = 2L/n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (15.18)$$

Чтобы определить частоту колебаний $f$, воспользуемся формулой (15.1), согласно которой $f = v/\lambda$.

Поскольку стоячая волна эквивалентна двум бегущим волнам, движущимся в противоположных направлениях, понятие скорости сохраняет смысл; скорость волны в струне можно выразить с помощью (15.2) через натяжение струны $F_T$ и линейную плотность $\mu$: $v = \sqrt{F_T/\mu}$.

---

[1] Фурье-анализ (разд. 15.5) показывает, что импульс треугольной формы на рис. 15.26, *а* можно рассматривать как сумму синусоидальных волн с различными частотами.

[2] Термин «гармоника» пришел из музыки, поскольку звуки с целыми кратными частотами являются гармоничными, т. е. созвучными.

**Пример 15.7.** Рояльная струна имеет длину 1,10 м и массу 9,0 г. а) С какой силой должна быть натянута струна, чтобы основная частота (частота основного тона) была равна 131 Гц? б) Чему равны частоты первых четырех гармоник?

**Решение.** а) Длина волны основной моды равна $\lambda = 2L = 2{,}20$ м [формула (15.18)]. При этом скорость бегущей волны $v = \lambda f = (2{,}20\text{ м})(131\text{ с}^{-1}) = 288$ м/с. Таким образом, из (15.2) имеем

$$F_T = \mu v^2 = \left(\frac{0{,}0090\text{ кг}}{1{,}10\text{ м}}\right)(288\text{ м/с})^2 = 679\text{ Н}.$$

б) Частоты второй, третьей и четвертой гармоник в 2, 3 и 4 раза выше основной частоты и равны соответственно 262, 393 и 524 Гц.

В разд. 15.4 мы узнали, как представить смещение $D$ одномерной бегущей волны в виде функции координаты $x$ и времени $t$. То же самое можно сделать и для стоячей волны на струне. Как уже упоминалось, стоячую волну можно представить в виде суммы двух бегущих волн, которые движутся навстречу друг другу. Для каждой из них можно записать [см. выражения (15.10в) и (15.13в)]

$$D_1 = D_M \sin(kx - \omega t), \qquad D_2 = D_M \sin(kx + \omega t),$$

поскольку мы предполагаем, что затухание отсутствует и, следовательно, амплитуды, а также частоты и длины волн у этих двух волн одинаковы. Сумма этих двух бегущих волн, образующих стоячую волну, дается выражением

$$D = D_1 + D_2 = D_M[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)].$$

Пользуясь тригонометрическим тождеством для суммы синусов двух углов: $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin[{}^1\!/_2(\theta_1 + \theta_2)] \times \cos[{}^1\!/_2(\theta_2 - \theta_1)]$, последнее выражение можно переписать в виде

$$D = 2D_M \sin kx \quad \cos\omega t. \tag{15.19}$$

Полагая $x = 0$ для левого конца струны, для правого конца мы имеем $x = L$, где $L$ – длина струны. А поскольку концы струны закреплены, $D = 0$ при $x = 0$ и при $x = L$. Выражение (15.19) уже удовлетворяет первому условию ($D = 0$ при $x = 0$), второе же условие будет выполнено, если

$$kL = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ n\pi,\ \ldots,$$

где $n$ – целое число, или, поскольку $k = 2\pi/\lambda$,

$$\lambda = 2L/n \qquad (n \text{ целое}).$$

Таким образом, мы вновь пришли к формуле (15.18).

Формула (15.19) вместе с условием $\lambda = 2L/n$ является математической записью стоячей волны. Мы видим, что частица в любой точке $x$ совершает гармонические колебания (поскольку в формуле имеется $\cos\omega t$). Все частицы струны колеблются с одной и той же частотой $f = \omega/2\pi$,

причем амплитуда зависит от $x$ и равна $2D_м \sin kx$. (Сравните это со случаем бегущей волны, в которой все частицы колеблются с одинаковыми амплитудами.) При $kx = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$ и т. д. амплитуда имеет максимум, равный $2D_м$. Иными словами, максимум амплитуды соответствует точкам

$$x = \lambda/4,\ 3\lambda/4,\ 5\lambda/4,\ \ldots,$$

которые, очевидно, представляют собой не что иное, как положения пучностей (см. рис. 15.26).

Стоячая волна действительно кажется неподвижной, в то время как бегущая волна совершает видимое движение вперед. Название «стоячая» волна соответствует также и тому, что происходит в этом случае с энергией. Поскольку в узлах частицы струны покоятся, через них не переносится энергия. Следовательно, энергия как бы «стоит» на месте и не переносится вдоль струны.

Стоячие волны возбуждаются не только в струнах, но и в любых телах, способных совершать колебания. Даже ударив молотком по камню или доске, мы возбуждаем в них стоячие волны, соответствующие собственным резонансным частотам данного тела. Резонансные частоты зависят от размеров тела точно так же, как резонансные колебания струны зависят от ее длины. Например, собственные частоты небольшого тела не могут быть такими же низкими, как собственные частоты больших тел. Во всех музыкальных инструментах звуки образуются благодаря стоячим волнам в струнах у струнных, в столбах воздуха у духовых, в барабанах и других ударных. Более обстоятельно мы разберемся в этом в следующей главе.

## Заключение

Колеблющиеся тела представляют собой источники волн, распространяющихся от источника во внешнюю среду. Примерами этого являются волны на воде и на струне. Волна может представлять собой *импульс* (единичный гребень), а может быть *непрерывной* (т. е. состоять из многих гребней и впадин). *Длина волны* – это расстояние между двумя соседними гребнями (или вообще между двумя любыми колеблющимися в одной фазе точками волнового профиля). *Частота* – это число гребней, проходящих через данную точку за единицу времени. *Скорость волны* (т. е. скорость, с которой перемещается гребень или любая другая точка волны) определяется как произведение длины волны на частоту: $v = \lambda f$. *Амплитуда волны* – это максимальная высота гребня или глубина впадины относительно среднего (или равновесного) уровня.

В *поперечной волне* колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны; примером этого является волна, бегущая по струне. В *продольной волне* колебания происходят параллельно

направлению движения волны; звук – это пример продольной волны. Скорость как поперечной, так и продольной волн в среде пропорциональна корню квадратному из отношения величины упругой силы к величине инертности (или плотности) среды.

Волны переносят энергию из одной области пространства в другую, не перенося при этом вещество. Энергия, переносимая волной, мощность (энергия, переносимая за единицу времени) и *интенсивность* (энергия, переносимая через единичную площадь поверхности за единицу времени) пропорциональны квадрату амплитуды волны. Для волны, распространяющейся в трех измерениях от точечного источника, интенсивность (если пренебречь затуханием энергии) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до источника, а амплитуда линейно убывает с расстоянием.

Одномерная поперечная волна, бегущая вправо вдоль оси $x$, может быть записана в виде функции от координаты и времени: $D = D_M \sin[(2\pi/\lambda)(x - vt)] = D_M \sin(kx - \omega t)$, где $k = 2\pi/\lambda$ и $\omega = 2\pi f$. Если волна движется в противоположном направлении, то $D = D_M \sin(kx + \omega t)$.

Когда две или больше волн проходят через одно и то же место в пространстве в одно и то же время, то смещение в любой данной точке равно векторной сумме смещений каждой из волн. Это называется *принципом суперпозиции*. Принцип суперпозиции справедлив для механических волн в том случае, когда амплитуды волн не настолько велики, чтобы нарушалась пропорциональность между смещением и величиной возвращающей силы.

Волны отражаются от препятствий. Когда *волновой фронт* двух- или трехмерной волны встречает на своем пути препятствие, угол отражения равен углу падения. Волна, падающая на границу двух сред, в которых она может распространяться, частично отражается, а частично переходит из одной среды в другую. Фронт прошедшей волны испытывает *преломление* или изгиб. Углы, которые фронты падающей и преломленной волн составляют с границей раздела двух сред, связаны со скоростями распространения волны в каждой из сред соотношением $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = v_1/v_2$. Когда две когерентные волны в одно и то же время проходят через одну и ту же область пространства, они *интерферируют*. В силу принципа суперпозиции результирующее смещение в каждой точке равно векторной сумме смещений каждой из волн; в зависимости от соотношения фаз и амплитуд двух волн интерференция может быть *усиливающей (конструктивной)*, *гасящей (деструктивной)* или промежуточной. Способность волн огибать препятствия и заходить в область «тени» называется *дифракцией*. Чем меньше длина волны по сравнению с размерами препятствия, тем слабее проявляется дифракция.

Волны, бегущие по струне (или в другом теле) постоянной длины, интерферируют с волнами, отраженными от границ и идущими во встречном направлении. На некоторых частотах при этом образуются *стоячие волны*. Струна (или другое тело) колеблется как единое целое. Образование стоячих волн является резонансным явлением и происходит на *резонансных* или *собственных частотах* тела. Точки гасящей интерференции (в них отсутствуют колебания) называются *узлами*, а точки усиливающей интерференции (максимальная амплитуда колебаний) – *пучностями*.

## Вопросы

1. Равна ли частота простой периодической волны частоте возбуждающих ее колебаний? Почему?
2. Объясните различие между скоростью поперечной волны, бегущей по веревке, и скоростью частиц на малом участке веревки.
3. Почему басовые струны фортепиано имеют навивку из проволоки?
4. Волны какого типа будут возбуждены в горизонтальном металлическом стержне, если ударить по его концу молотком а) сбоку; б) в торец?
5. Плотность воздуха уменьшается с повышением температуры, а модуль всестороннего сжатия $B$ почти не зависит от температуры. Как должна изменяться с температурой скорость звука в воздухе?
6. Два сплошных стержня имеют одинаковые модули всестороннего сжатия, но плотность одного вдвое больше плотности другого. В каком стержне скорость продольных волн больше и во сколько раз?
7. Приведите дополнительные примеры одно-, двух- и трехмерных волн.
8. Скорость звука в твердых телах обычно в несколько раз выше, чем в воздухе, плотность же твердых тел в $10^3$–$10^4$ раз больше. Объясните.
9. Назовите две причины, которые обусловливают уменьшение амплитуды волн на воде по мере их удаления от источника.
10. Две одномерные волны имеют одинаковые амплитуды, а в остальном они идентичны, за исключением лишь того, что длина волны одной в два раза больше, чем другой. Которая из них переносит большую энергию? Во сколько раз?
11. Оказывается, что интенсивность звука убывает не в точности обратно пропорционально квадрату расстояния до источника, как это следует из (15.8). Почему?
12. Любая ли функция от величины $x - vt$ [см. выражение (15.14)] будет описывать волновое движение? Объясните. Если не любая, то проиллюстрируйте это примером.
13. Когда синусоидальная волна пересекает границу между двумя участками веревки на рис. 15.16, частота не изменяется, хотя меняются длина волны и скорость. Объясните.
14. Если синусоидальная волна при отражении от границы между участками веревки на рис. 15.16 переворачивается, то какой будет длина прошедшей волны – больше или меньше длины падающей волны?
15. Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн? Объясните.
16. Если известно, что из одной области в другую переносится энергия, то как определить, переносится ли она волнами или частицами вещества?
17. Средневолновую радиостанцию, находящуюся за горой, обычно удается принимать, а станцию УКВ-диапазона нет. Иными словами, средние волны огибают гору, а ультракороткие не огибают. Объясните. (Радиосигналы переносятся электромагнитными волнами, длина волны которых в средневолновом диапазоне составляет обычно 200–600 м, а в УКВ-диапазоне – около 3 м.)
18. Если колеблющаяся струна имеет три пучности, можно ли где-либо прикоснуться к ней ножом, не нарушая ее движения?
19. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания падающей и отраженной волн в узлах взаимно погашаются. Означает ли это, что исчезает энергия?
20. Почему вы можете заставить воду плескаться в тазу, только если вы покачиваете его с некоторой определенной частотой?
21. Может ли амплитуда стоячих волн на рис. 15.25 быть больше, чем амплитуда возбуждающих их колебаний (например, движения руки или механического вибратора)?
22. Когда колебания передаются шнуру на рис. 15.25 рукой или механическим вибратором, «узлы» стоячей волны не являются в

строгом смысле узлами (абсолютно неподвижными точками). Объясните. (*Подсказка*: учтите затухание и передачу энергии от руки или вибратора.)

## Задачи

Раздел 15.1

1. (I) Рыбак заметил, что гребни волн проходят мимо носа стоящей на якоре лодки каждые 5 с. Расстояние между гребнями он оценивает в 15 м. С какой скоростью движутся волны?
2. (I) Частоты средневолнового диапазона находятся в интервале 550–1600 кГц (килогерц); радиоволны (электромагнитные волны) распространяются со скоростью $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. Чему равны соответствующие этому диапазону длины волн? Чему равны длины волн УКВ-диапазона, частоты которого занимают интервал 88–108 МГц?
3. (I) Веревка массой 0,85 кг натянута между двумя опорами, находящимися на расстоянии 30 м друг от друга. Пусть сила натяжения веревки равна 1950 Н. Сколько времени идет импульс от одной опоры до другой?
4. (II) Веревка массой 0,40 кг натянута между двумя опорами, находящимися на расстоянии 4,8 м. Когда по одной опоре ударяют молотком, в веревке возбуждается поперечная волна, которая доходит до второй опоры через 0,85 с. Чему равна сила натяжения веревки?
5. (II) В канавке грампластинки, вращающейся со скоростью 33 об/мин, на расстоянии 12,5 см от центра «бугорки» идут с интервалом 2,45 мм. Чему равна частота записанного в этом месте звука?
6. На рис. 15.27 показан профиль волны, которая распространяется по струне вправо со скоростью 1,20 м/с. а) Изобразите профиль волны через 1,20 с и покажите стрелками, какие точки идут вниз, а какие – вверх. б) Чему равна скорость точки $A$ на струне в вертикальном направлении в момент времени, зафиксированный на рисунке?

Раздел 15.2

7. (I) Вычислите скорость продольных волн а) в воде; б) в граните.
8. (I) Найдите длину звуковой волны с частотой 7000 Гц, распространяющейся вдоль железного стержня.
9. (II) Моряк в трюме ударяет по борту корабля чуть ниже уровня воды. Эхо (волна, отраженная от дна моря) приходит ровно через 2,1 с. Чему равна глубина моря в этом месте?
10. (II) Сейсмические $S$- и $P$-волны распространяются с различными скоростями, и это позволяет определять положение очага землетрясения. а) Считая скорости $P$- и $S$-волн равными соответственно 9,0 и 5,0 км/с, определите расстояние до очага землетрясения от сейсмической станции, которая зарегистрировала приход этих волн с интервалом 2,0 мин. б) Достаточно ли данных одной станции для определения положения (координат) очага землетрясения? Объясните.
11. (II) Однородная веревка массой $m$ и длиной $L$ подвешена вертикально. а) Покажите, что скорость поперечных волн в этой веревке равна $\sqrt{gh}$, где $h$ – высота от нижнего конца. б) Сколько времени идет волновой импульс от нижнего конца до верхнего?

Раздел 15.3

12. (I) В одном и том же участке земной коры две сейсмические волны имеют одну и ту же частоту, но энергия одной вдвое больше, чем другой. Каково отношение амплитуд этих двух волн?
13. (I) Сравните а) интенсивности и б) амплитуды сейсмической $P$-волны на расстояниях 10 и 20 км от очага землетрясения.
14. (I) На расстоянии 100 км от очага землетрясения зарегистрирована сейсмическая волна интенсивностью $1{,}4 \cdot 10^6$ Дж/м$^2 \cdot$с. а) Чему была равна интенсивность в точке, расположенной на расстоянии 2,0 км от очага землетрясения? б) Чему равна мощность, приходящаяся на

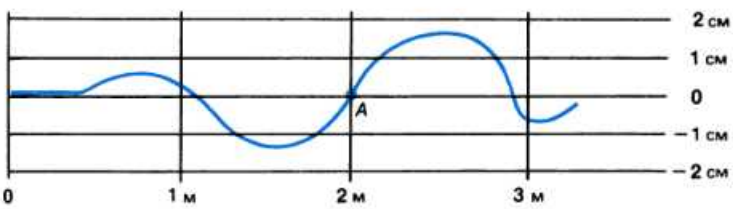



Рис. 15.27.

поверхность площадью 5,0 м², в точке, удаленной на 2,0 км от очага землетрясения?

15. (II) Покажите, что если пренебречь затуханием, то амплитуда круговой волны на воде $D_M \sim 1/\sqrt{r}$, где $r$ – расстояние от источника.

16. (II) а) Покажите, что интенсивность волны равна плотности энергии (т. е. энергии на единицу объема) волны, умноженной на скорость волны. б) Чему равна плотность энергии в точке, расположенной на расстоянии 10 м от электрической лампочки мощностью 100 Вт? Скорость света равна $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с.

17. (II) Покажите, что смещение в сферической волне, расходящейся равномерно во все стороны от точечного источника, можно записать в виде

$$D = \frac{A}{r}\sin(kr - \omega t),$$

где $r$ – расстояние по радиусу от источника, а $A$ – постоянная (см. разд. 15.4).

Раздел 15.4

18. (I) Пусть при $t = 0$ профиль волны описывается выражением $D = D_M \sin(2\pi x/\lambda + \phi)$, которое отличается от (15.9) наличием постоянного фазового сдвига ф. Каким запишется смещение той же волны, движущейся влево вдоль оси $x$, как функция от $x$ и $t$?

19. (I) Покажите, что волновые профили, описываемые выражениями (15.13) и (15.15), удовлетворяют волновому уравнению (15.16).

20. (II) Поперечная бегущая волна в веревке описывается выражением $D = 0{,}42 \sin(7{,}6x + 94t)$, где $D$ и $x$ измеряются в метрах, а $t$ – в секундах. Определите для этой волны а) длину волны; б) частоту; в) скорость (величину и направление); г) амплитуду; д) максимальную и минимальную скорости частиц веревки.

21. (II) Рассмотрите точку на струне в примере 15.5, расположенную на расстоянии 1 м от левого конца. Найдите: а) максимальную скорость этой точки; б) максимальное ускорение. в) Чему равны скорость и ускорение этой точки в момент времени $t = 2{,}0$ с?

22. (II) Продольная волна с частотой 262 Гц распространяется в воздухе со скоростью 345 м/с. а) Чему равна ее длина волны? б) За какое время фаза в данной точке пространства меняется на 90°? в) Чему равна разность фаз (в градусах) между точками, отстоящими друг от друга на 6,4 см?

23. (II) Запишите выражение для смещения волны в задаче 22, если ее амплитуда равна 0,020 см, а при $t = 0$ и $x = 0$ $D = -0{,}020$ см.

24. (II) Для синусоидальной поперечной волны, бегущей по струне, покажите, что наклон касательной к струне в любой ее точке равен отношению поперечной скорости частицы в этой точке к скорости волны.

Раздел 15.5

25. (II) Пусть две одномерные волны описываются соответственно функциями $D_1 = f_1(x, t)$ и $D_2 = f_2(x, t)$. Покажите, что если эти две функции удовлетворяют волновому уравнению (15.16), то и любая их линейная комбинация $D = C_1 D_1 + C_2 D_2$ также удовлетворяет этому волновому уравнению ($C_1$ и $C_2$ – постоянные).

Раздел 15.6

26. (II) Пусть имеется синусоидальная волна, распространяющаяся по растянутому шнуру, состоящему из двух участков (рис. 15.16). Напишите формулу а) для отношения $v_2/v_1$ скоростей волн в двух участках шнура; б) для отношения длин волн в двух участках шнура. (Частота в обоих участках шнура одинакова. Почему?) в) На каком участке шнура длина волны больше – на более легком или на более массивном?

27. (III) Шнур, натянутый с силой $F_T$, состоит из двух участков (рис. 15.16) с линейными плотностями соответственно $\mu_1$ и $\mu_2$. Пусть в точке, где соединяются части шнура, $x = 0$, причем $\mu_1$ – это плотность левого участка, а $\mu_2$ – правого. В левом конце шнура возбуждается синусоидальная волна $D = A \sin[k_1(x - v_1 t)]$. Когда волна достигает точки соединения участков шнура, часть ее отражается, а часть проходит. Пусть отраженная волна описывается выражением $D = A_R \sin[k_1(x + v_1 t)]$, а прошедшая – выражением $D = A_T \sin[k_2(x - v_2 t)]$. Поскольку частоты волн в обоих участках шнура должны быть одинаковы, мы имеем $\omega_1 = \omega_2$ или $k_1 v_1 = k_2 v_2$. а) Пользуясь непрерывностью шнура (т. е. тем, что отклонения точек на бесконечно малом расстоянии справа и слева от точки соединения одинаковы), покажите, что $A = A_T + A_R$. (Учтите, что отклонение любой точки шнура слева от точки соединения обусловлено падающей и отраженной волнами, а отклонение любой точки справа – только прошедшей волной.) б) Считая тангенсы углов наклона ($dD/dx$) шнура в точках, расположенных справа и слева от точки соединения, одинаковыми, покажите, что амплитуда отраженной волны дается выражением

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right) A = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\right) A.$$

в) Напишите выражение для $A_T$ в зависимости от $A$.

Раздел 15.7

**28.** (I) Сейсмическая *P*-волна, распространяющаяся со скоростью 14,5 км/с, падает на границу раздела между двумя разными породами под углом 42°. Волна при этом преломляется под углом 26° к границе раздела. Чему равна скорость волны во второй среде?

**29.** (II) Продольная сейсмическая волна падает на границу раздела двух пород под углом 10°. Относительные плотности первой и второй породы равны соответственно 3,6 и 4,9. Определите угол преломления, считая модули упругости этих пород одинаковыми.

**30.** (II) Для любого типа волны, например для сейсмической волны, обнаружено, что при переходе волны в среду, где ее скорость увеличивается, преломленная волна пройдет во вторую среду лишь в том случае, если угол падения не превышает некоторого максимального. Этот максимальный угол падения $\theta_{iM}$ соответствует углу преломления, равному 90°. Если же $\theta_i > \theta_{iM}$, то волна полностью отражается на границе раздела сред и не преломляется (иначе синус угла преломления $\theta_r$ оказался бы больше единицы, что невозможно). Это явление называется *полным внутренним отражением*. а) Пользуясь соотношением (15.17), запишите формулу для $\theta_{iM}$. б) В каком интервале углов должна приходить сейсмическая *P*-волна к границе раздела двух пород, в которых ее скорости равны соответственно 6,5 и 8,2 км/с, чтобы она полностью отразилась от границы раздела?

Раздел 15.8

**31.** (I) Два волновых импульса на рис. 15.28 движутся навстречу друг другу. а) Нарисуйте форму струны в момент времени, когда волновые импульсы перекрываются. б) Какой вид имеет струна спустя несколько мгновений? в) В тот же момент времени, когда импульсы на рис. 15.20, *a* в точности перекрываются, струна выпрямляется. Что происходит в этот момент времени с энергией?

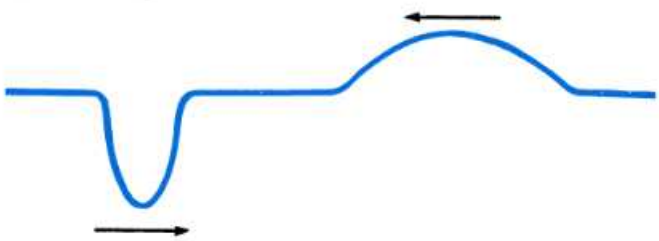


Рис. 15.28.

**32.** (II) Пусть две одномерные волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются в одной и той же среде с разностью фаз $\phi$. Эти волны можно записать следующим образом:

$$D_1 = D_M \sin(kx - \omega t),$$
$$D_2 = D_M \sin(kx - \omega t + \phi).$$

а) Используя тригонометрическое тождество $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin[(\theta_1 + \theta_2)/2]\cos[(\theta_1 - \theta_2)/2]$, покажите, что результирующая волна имеет вид

$$D = \left(2D_M \cos\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right).$$

б) Чему равна амплитуда результирующей волны? Является ли волна чисто синусоидальной? в) Покажите, что усиливающая интерференция наблюдается при $\phi = 0, 2\pi, 4\pi$ и т.д., а гасящая – при $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi$ и т.д. в) Опишите результирующую волну (с помощью математического выражения и словесно) при $\phi = \pi/2$.

Раздел 15.10

**33.** (I) Не прижатая пальцем скрипичная струна колеблется с частотой 196 Гц. С какой частотой она будет колебаться, если прижать ее на 1/4 длины от конца?

**34.** (I) Струна резонирует с четырьмя пучностями на частоте 220 Гц. Назовите еще хотя бы три частоты, на которых она будет резонировать.

**35.** (I) Скорость волны в струне равна 480 м/с. На каком расстоянии друг от друга находятся узлы стоячей волны с частотой 86,0 Гц?

**36.** (II) Частоты двух последовательных обертонов струны равны 320 и 360 Гц. Чему равна частота основного тона?

**37.** (II) Покажите, что частота стоячей волны в струне длиной $L$ и линейной плотностью $\mu$, натянутой с силой $F_T$, дается выражением

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}},$$

где $n$ – целое число.

38. (II) Один конец горизонтальной струны с линейной плотностью $4{,}2 \cdot 10^{-4}$ кг/м соединен с механическим вибратором, колеблющимся с частотой 60 Гц и с небольшой амплитудой. Струна перекинута через блок, находящийся на расстоянии $L = 2{,}40$ м от вибратора, а к свободному концу струны подвешивается груз. Какой массы следует подвесить груз, чтобы стоячая волна в струне имела а) одну пучность; б) две пучности; в) пять пучностей? Считайте, что узел стоячей волны расположен у вибратора. Это близко к реальности. Почему амплитуда стоячей волны может значительно превзойти амплитуду колебаний возбуждающего ее вибратора?

39. (II) Смещение стоячей волны дается выражением $D = 5{,}6 \sin(0{,}66x)\cos(53t)$, где $x$ и $D$ измеряются в сантиметрах, а $t$ – в секундах. а) Чему равно расстояние (в сантиметрах) между узлами? б) Определите амплитуду, частоту и скорость каждой из двух волн, образующих стоячую волну. в) Найдите скорость частицы струны в точке $x = 2{,}10$ см в момент времени $t = 1{,}25$ с.

40. (II) Смещение поперечной волны, бегущей по струне, дается выражением $D = 4{,}2 \times \sin(0{,}71x - 47t + 2{,}1)$. Запишите выражение для волны, которая, двигаясь навстречу, образует вместе с первой стоячую волну.

41. (II) Если раскачивать воду в ванне с определенной частотой, то на каждом из двух концов ванны вода начнет поочередно то опускаться, то подниматься. Предположите, что частота такой стоячей волны в ванне шириной 50 см равна 0,85 Гц. С какой скоростью распространяется волна в воде?

42. (II) Гитарная струна имеет длину 90 см и массу 3,6 г. Расстояние между верхним и нижним порожками $L = 60$ см, и струна натянута с силой 520 Н. Чему равны частоты основного тона и первых двух обертонов?

43. (II) Скрипичная струна звучит на частоте 294 Гц. С какой частотой она будет звучать, если увеличить ее натяжение на 10%?

# 16 Звук

Понятие звука обычно ассоциируется у нас со слухом и, следовательно, с физиологическими процессами в ушах, а также с психологическими процессами в нашем мозгу (там происходит переработка ощущений, поступающих в органы слуха). Кроме того, под *звуком* мы понимаем физическое явление, вызывающее действие на наши уши, а именно продольные волны.

При рассмотрении звука можно выделить три основных аспекта. Во-первых, должен существовать *источник* звука; причем, как и для любой другой волны[1], источником звуковой волны являются колебания тела. Во-вторых, энергия переносится от источника звука в виде продольных звуковых *волн*. И в-третьих, звук *регистрируется (воспринимается)* нашим ухом или прибором. В конце настоящей главы мы изучим источники и приемники звука, а теперь остановимся на рассмотрении некоторых свойств самих звуковых волн.

## 16.1. Характеристики звука

В гл. 15 мы уже видели (рис. 15.7), как колеблющаяся кожа, которой обтянут барабан, создает в воздухе звуковую волну. Действительно, мы обычно считаем, что звук распространяется в воздухе, потому что, как правило, именно воздух контактирует с нашими барабанными перепонками и его колебания заставляют колебаться эти перепонки. Однако звуковые волны могут распространяться и в других веществах. Удары двух камней друг о друга пловец может слышать, находясь под водой, поскольку колебания передаются уху водой. Если приложить ухо к земле, то можно услышать приближение поезда или трактора. В этом случае земля не воздействует непосредственно на ваши барабанные перепонки. Однако продольную волну, распространяющуюся в земле, называют звуковой волной, поскольку ее колебания приводят к колебаниям воздуха во внешнем ухе. Действительно, продольные волны, распространяющиеся в любой мате-

[1] Механической волны. — *Прим. ред.*

*Таблица 16.1.* Скорость звука в различных веществах при температуре 20 °C

| Вещество | Скорость звука, м/с |
|---|---|
| Воздух | 343 |
| Воздух (0 °C) | 331 |
| Гелий | 1005 |
| Водород | 1300 |
| Вода | 1440 |
| Морская вода | 1560 |
| Железо и сталь | ≈ 5000 |
| Стекло | ≈ 4500 |
| Алюминий | ≈ 5100 |
| Тяжелая древесина | ≈ 4000 |

риальной среде, часто называют звуковыми. Очевидно, звук не может распространяться в отсутствие вещества. Например, нельзя услышать звон колокола, находящегося внутри сосуда, из которого откачан воздух.

*Скорость звука* в различных веществах имеет разные значения. В воздухе при температуре 0 °C и давлении 1 атм звук распространяется со скоростью 331,3 м/с. В гл. 15 [формулы (15.3) и (15.4)] мы видели, что скорость зависит от модуля упругости и плотности вещества. В воздухе и других газообразных и жидких средах

$$v = \sqrt{B/\rho},$$

где $B$ – модуль всестороннего сжатия, а $\rho$ – плотность среды. В гелии, плотность которого значительно меньше, чем плотность воздуха, а модуль всестороннего сжатия почти такой же, скорость звука больше почти в три раза. В жидкостях и твердых телах, которые значительно менее сжимаемы и, следовательно, имеют значительно бóльшие модули упругости, скорость соответственно больше. Значения скорости звука в различных веществах приведены в табл. 16.1; они в небольшой степени зависят от температуры, однако эта зависимость существенна только для газов. Например, в воздухе при повышении температуры на 1 °C скорость звука возрастает приблизительно на 0,60 м/с:

$$v \approx (331 + 0{,}60T) \text{ м/с},$$

где $T$ – температура в °C. Например, при 20 °C мы имеем $v \approx [331 + (0{,}60)(20)]$ м/с = 343 м/с.

Для слушающего человека сразу становятся очевидными две характеристики звука, а именно его громкость и высота. Они характеризуют ощущения, возникающие в сознании слушателя. Однако каждой из этих субъективных характеристик соответствует величина, измеряемая физическими методами. **Громкость** связана с интенсивностью звуковой волны, и мы рассмотрим ее в разд. 16.3.

Высота звука показывает, является ли он высоким, как у скрипки или виолончели, или низким, как звук большого барабана или басовой струны. Физической величиной, характеризующей высоту звука, является частота колебаний звуковой волны, что впервые заметил Галилей. Чем меньше частота, тем ниже высота звука, а чем больше частота, тем звук выше[1]. Человеческое ухо воспринимает частоты в диапазоне от 20 до 20 000 Гц, который называется поэтому **диапазоном слышимости**. Известно, что могут наблюдаться небольшие индивидуальные отклонения от диапазона слышимости. Общая тенденция состоит в

[1] Хотя высота звука определяется главным образом частотой колебаний, она зависит незначительно также и от громкости. Например, очень громкий звук кажется несколько ниже звука более тихого, но имеющего ту же частоту.

том, что с возрастом люди начинают хуже слышать высокие частоты и верхний предел их диапазона слышимости может понизиться до 10 000 Гц и даже ниже.

Звуковые волны, частоты которых лежат вне диапазона слышимости, могут достигать наших ушей, однако, как правило, мы их не воспринимаем. Так, звуковые волны с частотами, превышающими 20 000 Гц, называются *ультразвуком*. (Не следует путать их со «сверхзвуком», которым обычно характеризуют тела, движущиеся со скоростью выше звуковой.) Многие животные могут воспринимать ультразвуковые частоты. Например, собаки могут слышать звуки высотой до 50 000 Гц, а летучие мыши – до 100 000 Гц. Ультразвуковые волны имеют множество применений в медицине и других областях науки и техники.

Звуковые волны, частоты которых лежат ниже диапазона слышимости (т. е. меньше 20 Гц), называются *инфразвуком*. Источниками инфразвука являются землетрясения, удары грома, извержения вулканов, а также волны, возникающие при вибрациях тяжелых станков и другого оборудования. Последний источник может быть особенно опасен для рабочих, потому что воздействие инфразвуковых волн – хотя их и не слышно – может приводить к вредным последствиям для человеческого организма. Эти низкочастотные волны вызывают явления резонансного типа, сопровождающиеся движением и раздражением внутренних органов человека.

## 16.2. Математическое описание продольных волн

В разд. 15.4 было показано, что одномерная синусоидальная волна, распространяющаяся вдоль оси $x$, может быть описана выражением (15.10в):

$$D = D_{\text{м}} \sin(kx - \omega t); \qquad (16.1)$$

здесь волновое число $k$ связано с длиной волны $\lambda$ соотношением $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$ ($f$ – частота), $D$ – смещение в точке $x$ в момент времени $t$ и $D_{\text{м}}$ – максимальное значение этого смещения (*амплитуда*). Смещение $D$ поперечной волны, такой, как волна на струне, перпендикулярно направлению распространения волны вдоль оси $x$. Однако смещение продольной волны направлено *вдоль направления распространения волны*. Это значит, что $D$ параллельно $x$ и представляет собой смещение мельчайших частиц объема вещества относительно положения их равновесия.

Продольные (звуковые) волны можно также рассматривать с точки зрения изменений давления, а не объема; действительно, продольные волны нередко называют *волнами давления*. Изменение давления обычно легче измерять, чем смещение (см. пример 16.2). Как можно видеть из рис. 15.7, в области «сжатия» волны (там, где молекулы находятся ближе друг к другу) давление выше нормального, тогда как в области разрежения оно ниже

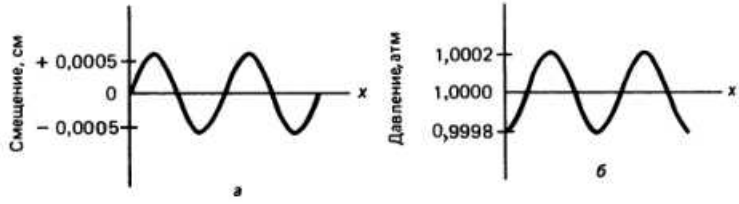



Рис. 16.1. Графическое представление звуковой волны через смещение (*а*) и давление (*б*).

нормального. Графическое изображение звуковой волны в воздухе с точки зрения смещения представлено на рис. 16.1, *а*, а с точки зрения давления – на рис. 16.1, *б*. Заметим, что волна смещения отличается по фазе от волны давления на четверть длины волны (или на 90°); там, где давление достигает максимума или минимума, смещение равно нулю, а где изменение давления равно нулю, смещение максимально или минимально. Почему так происходит, мы вскоре выясним.

Получим теперь выражение для изменения давления в бегущей продольной волне. По определению модуля всестороннего сжатия $B$ [см. формулу (11.7а)] мы имеем

$$\Delta P = -B(\Delta V/V),$$

где $\Delta V/V$ – относительное изменение объема среды, вызванное изменением давления $\Delta P$. Для удобства обозначим через $p$ отклонение давления от нормального значения $P$ в отсутствие волны, т. е. положим $p = \Delta P$; таким образом,

$$p = -B(\Delta V/V).$$

Знак минус здесь отражает тот факт, что с ростом давления объем уменьшается ($\Delta V < 0$). Рассмотрим теперь слой жидкости или газа, через который проходит продольная волна. Если этот слой имеет толщину $\Delta x$ и площадь $A$, то его объем равен $V = A\,\Delta x$. В результате изменения давления в волне этот объем изменится на величину $\Delta V = A\,\Delta D$, где $\Delta D$ – изменение толщины слоя благодаря его сжатию или растяжению. (Напомним, что $D$ представляет собой смещение частиц среды.) Таким образом, имеем

$$p = -B(A\Delta D)/(A\Delta x).$$

Для большей точности перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда мы можем переписать предыдущее выражение в виде

$$p = -B(\partial D/\partial x), \qquad (16.2)$$

где мы воспользовались частной производной, поскольку $D$ является функцией как $x$, так и $t$. Если смещение является синусоидой, определяемой выражением (16.1), то из (16.2) получим

$$p = -(BD_{\text{м}}k)\cos(kx - \omega t). \qquad (16.3)$$

Таким образом, давление, как и смещение, изменяется

синусоидально, но отличается от смещения по фазе на 90°, или на четверть длины волны (рис. 16.1). Величина $BD_м k$ называется **амплитудой давления** $p_м$; она указывает максимальное и минимальное значения, которых достигает давление при отклонении от нормального давления окружающей среды. Поскольку скорость волны дается выражением $v = \sqrt{B/\rho}$, амплитуду давления можно записать следующим образом:

$$p_м = BD_м k = \rho v^2 D_м k = 2\pi\rho v D_м f, \tag{16.4}$$

и

$$p = -p_м \cos(kx - \omega t). \tag{16.5}$$

## 16.3. Интенсивность звука

Подобно высоте звука, *громкость* связана с ощущением, возникающим в сознании человека. Она тоже связана с физически измеримой величиной, а именно с **интенсивностью** волны. Интенсивность определяется как энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадь. Как мы видели в предыдущей главе, она пропорциональна квадрату амплитуды волны.

Человеческое ухо способно воспринимать звуки с интенсивностью вплоть до $10^{-12}$ Вт/м$^2$ (порог слышимости) и до 1 Вт/м$^2$ (так называемый порог болевого ощущения). Человек может слышать и более интенсивные звуки, однако при этом он будет испытывать боль. Это невероятно широкий диапазон интенсивностей; крайние его значения различаются в $10^{12}$ раз. По-видимому, из-за этого величина, которую мы воспринимаем как громкость, не прямо пропорциональна интенсивности. Действительно, чем больше интенсивность, тем звук громче. Однако, чтобы создать звук в два раза большей громкости, потребуется звуковая волна, интенсивность которой будет превосходить интенсивность первоначальной волны в десять раз. Это утверждение справедливо в первом приближении при любом уровне громкости. Например, средний человек воспринимает звуковую волну интенсивностью $10^{-9}$ Вт/м$^2$ как звучащую в два раза громче волну интенсивностью $10^{-10}$ Вт/м$^2$. Волна, имеющая интенсивность $10^{-2}$ Вт/м$^2$, звучит в два раза громче, чем волна интенсивностью $10^{-3}$ Вт/м$^2$, и в четыре раза громче, чем волна интенсивностью $10^{-4}$ Вт/м$^2$.

Из-за этого соотношение между субъективным ощущением громкости и физически измеримой величиной интенсивности уровни интенсивности звука определяют обычно, используя логарифмическую шкалу. Единицей этой шкалы является *бел* (Б) или, что чаще встречается, *децибел* (дБ), который равен одной десятой бела (1 дБ = 0,1 Б). По определению **уровень громкости** $\beta$ любого звука вычисляется через интенсивность данного звука $I$ следующим

образом:

$$\beta\,(\text{в дБ}) = 10\lg(I/I_0), \qquad (16.6)$$

где $I_0$ – интенсивность, принимаемая за исходную, а логарифм берется по десятичному основанию. В качестве $I_0$ обычно берется порог слышимости, а именно интенсивность самого тихого звука, который еще способен слышать средний человек, причем $I_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-12}$ Вт/м$^2$. Так, например, уровень громкости звука интенсивностью $I = 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ Вт/м$^2$ равен

$$\beta = 10\lg\left(\frac{10^{-10}}{10^{-12}}\right) = 10\lg 100 = 20 \text{ дБ},$$

поскольку $\lg 100 = 2{,}0$. Заметим, что на пороге слышимости уровень громкости равен 0 дБ, т.е. $\beta = 10\lg(10^{-12}/10^{-12}) = 10\lg 1 = 0$, поскольку $\lg 1 = 0$. Следует также заметить, что при увеличении интенсивности в 10 раз уровень громкости увеличивается на 20 дБ. Таким образом, звук 50 дБ оказывается в 100 раз интенсивнее звука в 30 дБ и т.п.

В табл. 16.2 приведены интенсивности и уровни громкости для некоторых часто встречающихся звуков.

*Таблица 16.2.* Интенсивность звука от различных источников

| Источник звука | Уровень громкости, дБ | Интенсивность, Вт/м$^2$ |
|---|---|---|
| Реактивный самолет (на расстоянии 30 м от него) | 140 | 100 |
| Любой источник звука на пороге болевого ощущения | 120 | 1 |
| Рок-музыка в закрытом помещении | 120 | 1 |
| Сирена (на расстоянии 30 м от нее) | 100 | $1 \cdot 10^{-2}$ |
| Шум в салоне автомобиля, движущегося со скоростью около 100 км/ч | 75 | $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ |
| Интенсивное уличное движение | 70 | $1 \cdot 10^{-5}$ |
| Обычный разговор (на расстоянии 50 см от него) | 65 | $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ |
| Радио (негромкое) | 40 | $1 \cdot 10^{-8}$ |
| Шепот | 20 | $1 \cdot 10^{-10}$ |
| Шум листвы | 10 | $1 \cdot 10^{-11}$ |
| Любой источник звука на пороге слышимости | 0 | $1 \cdot 10^{-12}$ |

**Пример 16.1.** Громкоговоритель высокого качества рассчитан на воспроизведение на максимальном уровне громкости звуков с частотой от 30 до 18 000 Гц (уровень громкости не должен отличаться от нулевого более чем на 3 дБ). Во сколько раз изменяется интенсивность звука при максимальном изменении уровня громкости (3 дБ)?

**Решение.** Обозначим среднюю интенсивность через $I_1$, а средний уровень громкости через $\beta_1$. При этом максимальная интенсивность $I_2$ соответствует уровню громкости $\beta_2 = \beta_1 + 3$ дБ. Таким образом,

$$\beta_2 - \beta_1 = 10\lg(I_2/I_0) - 10\lg(I_1/I_0),$$

$$3\text{дБ} = 10\,[\lg(I_2/I_0) - \lg(I_1/I_0)] =$$

$$= 10\lg(I_2/I_1),$$

поскольку $\lg a - \lg b = \lg(a/b)$. Тогда

$$\lg(I_2/I_1) = 0{,}30\,.$$

С помощью калькулятора вычислим $10^x$ при $x = 0{,}30$ или с помощью таблицы логарифмов найдем число, логарифм которого равен 0,30. Это число равно 2,0, так что

$$I_2/I_1 = 2{,}0\,,$$

т. е. интенсивность $I_2$ в два раза больше, чем $I_1$.

Следует заметить, что изменение уровня громкости на 3 дБ (соответствующее, как мы только что видели, удвоенной интенсивности) приводит лишь к очень небольшому изменению субъективно воспринимаемой (т. е. слышимой) громкости. Действительно, ухо среднего человека способно различать разность уровней громкости звучания лишь около 1 дБ.

Интенсивность $I$, как мы видели в гл. 15, пропорциональна квадрату амплитуды. Действительно, выражение (15.7) позволяет количественно связать амплитуду с интенсивностью $I$ или с уровнем громкости $\beta$, что и показано в следующем примере.

**Пример 16.2.** а) Вычислим максимальное смещение молекул воздуха для звука на пороге слышимости. Частота звука равна 1000 Гц. б) Определим максимальное изменение давления в этой звуковой волне.

**Решение.** а) Воспользуемся выражением (15.7) и вычислим $D_м$:

$$D_м = (1/\pi f)\sqrt{I/2\rho v} = \frac{1}{3{,}14(1{,}0\cdot 10^3\ \text{с}^{-1})} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1{,}0\cdot 10^{-12}\ \text{Вт/м}^2}{(2)(1{,}29\ \text{кг/м}^3)(331\ \text{м/с})}};$$

здесь мы учли, что плотность воздуха равна 1,29 кг/м$^3$, а скорость звука в воздухе при температуре 0 °С равна 331 м/с. Выполнив арифметические действия, получим $D_м = 1{,}0\cdot 10^{-11}$ м.

б) Из соотношения (16.4) находим

$$p_м = 2\pi\rho v D_м f = 2{,}7\cdot 10^{-5}\ \text{Па},$$

или $2{,}7\cdot 10^{-10}$ атм.

Полученный в этом примере результат показывает, насколько чувствительно человеческое ухо. Оно может улавливать перемещения молекул воздуха, которые на самом деле даже меньше, чем диаметр атома (около $10^{-10}$ м)!

Используя выражения (15.7) и (16.4), можно записать интенсивность через амплитуду давления $p_м$:

$$I = 2\pi^2 v\rho f^2 D_м^2 = 2\pi^2 v\rho f^2 (p_м/2\pi\rho v f)^2 = p_м^2/2v\rho\,. \qquad (16.7)$$

Таким образом, интенсивность, записанная через амплитуду давления, не зависит от частоты. Используя приборы, измеряющие изменения давления, можно сравнивать непосредственно интенсивности звуков, имеющих различные частоты. [Мы не могли бы это сделать с помощью прибора, измеряющего перемещение; см. выражение (15.7).]

Обычно при удалении от источника громкость или интенсивность звука уменьшается. В закрытых помеще-

ниях этот эффект ослабляется из-за отражения звука от стен. Однако, если источник звука находится на открытом воздухе, так что звук может распространяться свободно во всех направлениях, интенсивность уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния:

$$I \sim 1/r^2,$$

как мы показали в разд. 15.3 [см. выражение (15.8)]. При наличии значительного отражения от строений или от поверхности земли ситуация, очевидно, существенно усложнится.

**Пример 16.3.** Уровень громкости звука от реактивного самолета на расстоянии 30 м от него равен 140 дБ. Каков уровень громкости на расстоянии от него 300 м? (Отражением от земли пренебречь.)

**Решение.** Вычислим интенсивность $I$ на расстоянии 30 м от самолета по формуле (16.6): $140 \text{ дБ} = 10 \lg I/(10^{-12} \text{ Вт/м}^2)$. Преобразуя это выражение, находим $I = 10^2 \text{ Вт/м}^2$. На расстоянии 300 м (в десять раз дальше) от самолета интенсивность будет в $(10/1)^2 = 100/1$ раз меньше, т. е. будет равна 1 Вт/м$^2$. Следовательно, уровень громкости $\beta = 10 \lg(1/10^{-12}) = 120$ дБ. Даже на расстоянии 300 м звук будет вызывать боль в ушах. Именно поэтому работники аэропортов одевают защитные наушники, чтобы предохранить уши от повреждения.

## 16.4. Источники звука: колеблющиеся струны и столбы воздуха

Источником любого звука являются колебания тел. Практически любое тело может колебаться и, следовательно, служить источником звука. Рассмотрим теперь некоторые простые источники звука, в частности музыкальные инструменты. В музыкальных инструментах источник звука приводится в состояние колебаний, когда производят удары, перебирают струны, водят по струнам смычком или вдувают воздух. При этом возникают стоячие волны и тело колеблется с его собственной резонансной частотой. У барабана колеблется натянутая мембрана, изготовленная, как правило, из кожи. Ксилофоны и металлофоны имеют деревянные или металлические пластинки, которые можно заставить колебаться. В колоколах, цимбалах и гонгах также находят применение колебания металлических частей. Наиболее широко распространенные инструменты используют колеблющиеся струны. К ним относятся скрипка, гитара и фортепиано. Не менее распространены и другие инструменты, в которых возникают колебания столба воздуха, например флейта, труба и орган.

В гл. 15 (рис. 15.26) мы показали, каким образом на струне возникают стоячие волны, что лежит в основе действия всех струнных инструментов. Высота звука обычно определяется наименьшей резонансной, *основной*, частотой, которая соответствует наличию узлов только на концах струны. Длина волны колебаний основной частоты (основного тона) равна удвоенной длине струны.

Следовательно, основная частота равна $f = v/\lambda = v/(2L)$, где $v$ – скорость распространения волны по струне. Когда музыкант прикасается пальцем к струне, скажем, на гитаре или скрипке, эффективная длина струны сокращается; поэтому возникает более высокий звук, поскольку длина волны основного колебания укорачивается. Все струны гитары или скрипки имеют одинаковую длину. Они звучат с разной высотой тона, так как имеют различную массу $\mu$, приходящуюся на единицу длины (линейную плотность), которая влияет на скорость [см. выражение (15.2)] $v = \sqrt{F_T/\mu}$. (Натяжение струн может быть также различным; изменяя натяжение, можно настроить инструмент.) Таким образом, скорость распространения волны по более массивной струне меньше, и, следовательно, при той же длине волны соответствующая частота будет меньше. В фортепиано и других клавишных инструментах каждая струна отличается по длине от остальных. Для извлечения более низких нот струны должны быть не только массивнее, но и длиннее; проиллюстрируем это на следующем примере.

**Пример 16.4.** Самая высокая нота фортепиано имеет звук с частотой, превосходящей в 150 раз частоту звука самой низкой ноты. Струна для извлечения самой высокой ноты имеет длину 5,0 см. Допустим, что струна для извлечения самой низкой ноты имеет ту же массу, приходящуюся на единицу длины, и обладает тем же натяжением. Какова длина этой струны?

**Решение.** Скорость распространения звуковых колебаний в каждой струне будет одинакова, поэтому частота обратно пропорциональна длине $L$ струны ($f = v/\lambda = v/2L$). Таким образом

$$L_н/L_в = f_в/f_н,$$

где индексы «н» и «в» соответствуют самой низкой и самой высокой нотам. Отсюда находим $L_н = L_в(f_в/f_н) = (5{,}0\text{ см}) \times (150) = 750\text{ см}$, или 7,5 м. Для фортепиано это слишком большая длина, и, чтобы выйти из положения, для извлечения низких нот струны делают толще (массивнее), так что даже на больших роялях длина струн не превышает 3 м.

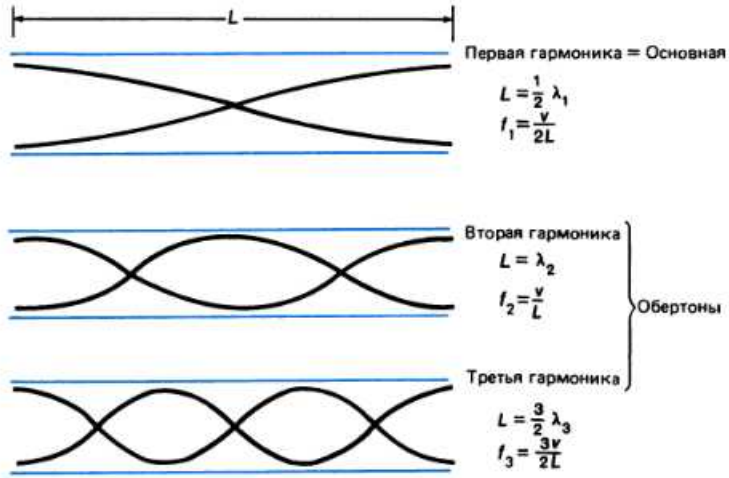
Звук струнных инструментов будет очень тихим, если извлекать его только при помощи колеблющихся струн, поскольку струны просто слишком тонки для того, чтобы сжимать и разрежать большие объемы воздуха. Поэтому в струнных инструментах применяется своего рода механический усилитель, а именно *дека*, усилительное действие которой основано на том, что в контакт с воздухом приводится значительно большая поверхность. При колебаниях струн дека тоже колеблется. Поскольку площадь деки, соприкасающаяся с воздухом, значительно больше площади струны, она может создавать значительно более интенсивную звуковую волну и таким образом усиливать звук. В электрогитаре дека такого значения не имеет, поскольку колебания ее струн усиливаются при помощи электрических устройств.

Инструменты, такие, как деревянные духовые, медные

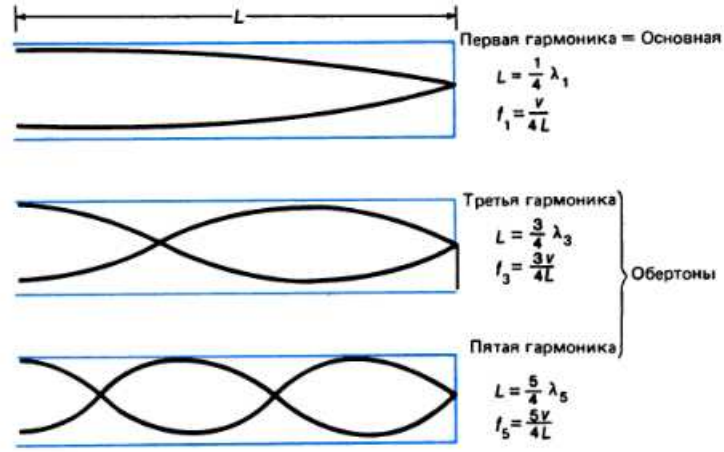
духовые и орга́ны, создают звук за счет колебаний стоячих волн в воздушном столбе внутри трубы. Стоячие волны могут возникать в воздухе, находящемся в любой полости, однако, за исключением полостей простой формы (например, узкой длинной трубы), выполнить расчет частот этих волн очень трудно. Так обстоит дело с большинством духовых инструментов. При игре на некоторых инструментах музыкант, вибрируя языком или губами, вызывает колебания в воздушном столбе. В других инструментах поток воздуха направляется на край отверстия или мундштук, что приводит к возникновению турбулентности, вследствие которой происходят колебания. Под действием возмущения (независимо от его источника) внутри трубы музыкального инструмента возникают колебания со множеством частот, однако из них остается лишь несколько устойчивых частот, соответствующих стоячим волнам. Когда мы рассматривали струну, закрепленную на обоих концах, было показано, что на обоих ее концах стоячие волны имеют узлы (точки, где отсутствует движение). По всей длине струны образуется одна или более пучностей (точки, где амплитуда колебаний максимальна). Каждая пара пучностей также разделена узлом. Стоячая волна, имеющая наименьшую частоту, соответствует единственной пучности и называется основной частотой. Стоячие волны с более высокими частотами называются обертонами или гармониками. Как правило, первой гармоникой называют основную частоту, вторая гармоника имеет частоту, равную удвоенной основной, и т. д. (см. рис. 15.26).

Аналогичная ситуация имеет место и для столба воздуха, однако нужно помнить, что в этом случае колеблется сам воздух. Так, воздух в закрытом конце трубы должен будет образовывать узел (смещения), поскольку в этом месте воздух не может двигаться свободно. При этом на открытом конце трубы будет образовываться пучность, поскольку там воздух может двигаться свободно. Внутри трубы частицы воздуха колеблются в виде продольных стоячих волн. Возможные типы, или моды, колебаний для трубы, открытой с обеих сторон (называемой *открытой трубой*), и для трубы, открытой с одной стороны и закрытой с другой (так называемая *закрытая труба*), изображены графически на рис. 16.2. Графики показывают амплитуду смещения колеблющихся частиц воздуха внутри труб. Пучности не возникают в точности у открытых концов трубы; их положение зависит от диаметра трубы. Если диаметр трубы мал по сравнению с ее длиной (что обычно имеет место), то пучности возникают очень близко к концу трубы, что и показано на рисунке. (На положение пучности влияют также длина волны и другие факторы.)

Сначала рассмотрим открытую трубу (рис. 16.2, *а*). Открытая труба имеет пучности смещений частиц воздуха




*а*




*б*

Рис. 16.2. Моды колебаний (стоячие волны) для открытой трубы (*а*) и закрытой трубы (*б*).

на обоих концах. Заметим, что для того, чтобы существовала стоячая волна, внутри трубы должен быть по крайней мере один узел. Это соответствует основной частоте трубы. Поскольку расстояние между соседними узлами или соседними пучностями равно $\lambda/2$, в этом случае внутри трубы умещается половина длины волны: $L = \lambda/2$, и основная частота равна $f_1 = v/\lambda = v/2L$, где $v$ – скорость звука в воздухе. Стоячая волна, имеющая два узла, представляет собой первый обертон, или вторую гармонику колебаний. Длина волны этих колебаний равна половине длины волны основного тона ($L = \lambda$), а частота в два раза больше. Действительно, частота каждого обертона кратна основной частоте. Это полностью совпадает с тем, что было найдено для струны.

В закрытой трубе (рис. 16.2, *б*) на ее закрытом конце всегда возникает узел смещений, а на открытом конце – пучность. Поскольку расстояние между узлом и ближайшей пучностью равно $\lambda/4$, на основной частоте колебаний внутри трубы будет умещаться только четверть длины волны: $L = \lambda/4$. Таким образом, основная частота равна $f_1 = v/4L$, т. е. половине основной частоты в открытой трубе той же длины. Существует и другое отличие; как видно из рис. 16.2, *б*, в закрытой трубе имеются только нечетные гармоники, т. е. частоты обертонов равны основной частоте, умноженной на 3, 5, 7, .... Звуковая волна, частота которой равна частоте основной волны, умноженной на 2, 4, ..., не может иметь узел на одном конце и пучность на другом, а, значит, стоячие волны такой частоты в закрытой трубе не могут существовать.

В органах применяются как открытые, так и закрытые трубы. Звуки различной высоты извлекаются из органа посредством различных труб, длина которых меняется от нескольких сантиметров до 5 м и более. Другие духовые музыкальные инструменты действуют либо как открытая труба, либо как закрытая. Например, флейта представляет собой открытую трубу, поскольку она открыта не только с той стороны, с которой в нее дует музыкант, но также и с противоположной. Звуки различной высоты получают при игре на флейте и многих других инструментах, укорачивая длину трубы, т. е. открывая отверстия по ее длине. В трубе, напротив, нажатие на клапаны увеличивает длину столба воздуха. Во всех этих инструментах увеличение длины колеблющегося воздушного столба соответствует понижению частоты звука.

Графики на рис. 16.2 показывают *смещение* частиц воздуха в стоячих волнах. Однако *давление* будет отставать по фазе на 90° от смещения так же, как и в случае бегущей волны. Таким образом, на открытом конце трубы будет возникать узел давления (что понятно, поскольку на открытом конце труба соседствует с атмосферой), а пучности давления будут возникать на закрытом конце трубы.

**Пример 16.5.** Чему равны основные частоты и первые три обертона трубы органа длиной 26 см при температуре 20 °С, если она а) открыта; б) закрыта?

**Решение.** При температуре 20 °С скорость звука в воздухе равна 343 м/с (разд. 16.1). а) Для открытой трубы основная частота равна

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343\ \text{м/с}}{2\,(0{,}26\ \text{м})} = 660\ \text{Гц}.$$

Обертоны, включающие все гармоники, имеют частоты 1320, 1980, 2640 Гц и т. д.

б) Из рис. 16.2 видно, что

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343\ \text{м/с}}{4\,(0{,}26\ \text{м})} = 330\ \text{Гц}.$$

Однако в этом случае будут присутствовать только нечетные гармоники, так что частоты первых трех обертонов равны соответственно 990, 1650 и 2310 Гц.

**Пример 16.6.** Флейта устроена таким образом, что при всех закрытых отверстиях ее звук соответствует ноте «до» пер-

вой октавы (264 Гц) в качестве основной частоты. Определите приближенно, чему равно расстояние от мундштука до конца флейты. (Заметим, что это расстояние можно определить только приближенно, поскольку пучность не возникает точно в мундштуке.) Считайте, что температура воздуха равна 20 °С.

**Решение.** Скорость звука в воздухе при температуре 20 °С равна 343 м/с (разд. 16.1). Тогда в соответствии с рис. 16.2 основная частота $f_1$ связана с длиной колеблющегося столба воздуха $L$ соотношением $f_1 = v/2L$. Отсюда мы находим, что расстояние от мундштука до конца флейты равно

$$L = \frac{v}{2f_1} = \frac{343 \text{ м/с}}{(2)(264 \text{ с}^{-1})} = 0{,}650 \text{ м}.$$

**Пример 16.7.** У флейты, рассмотренной в примере 16.6, закрыты все отверстия. Какова будет частота извлекаемого из нее звука при температуре 10 °С?

**Решение.** Длина $L$ флейты по-прежнему равна 65,0 см. Однако теперь скорость звука будет меньше, поскольку при уменьшении температуры на 1 °С она уменьшается на 0,60 м/с. При падении температуры до 10 °С скорость уменьшится на 6 м/с и станет равной 337 м/с. Частота звука будет равна

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{337 \text{ м/с}}{2(0{,}650 \text{ м})} = 259 \text{ Гц}.$$

Этот пример показывает, почему музыканты, играющие на духовых инструментах, некоторое время «прогревают» свои инструменты, чтобы они правильно звучали. Воздействие температуры на струнные инструменты значительно слабее.

## *16.5. Качество звука

Каждый раз, когда мы слышим звук, особенно музыкальный, мы воспринимаем его громкость, высоту, а также третье его свойство – «качество». Например, если на фортепиано, а затем на гобое берут ноту одинаковой громкости и одной высоты (допустим, «до» первой октавы), получившиеся звуки будут явственно различаться. Мы никогда не перепутаем звук фортепиано и гобоя. Отличать звук одного инструмента от другого нам помогает **качество** звука[1]; в музыке также используют термины *тембр* и *тональная окраска* звука.

Так же как громкость и высоту звука, качество звука можно связать с физически измеримыми величинами. Качество звука определяется наличием обертонов – их числом и относительными амплитудами. Вообще говоря, когда на музыкальном инструменте берут ноту, в звуке одновременно присутствуют как основная частота, так и обертоны. На рис. 15.13 мы видели, каким образом наложение трех волн – в данном случае волны основной частоты и первых двух обертонов (с определенными амплитудами) – приводит к сложной результирующей волне. Разумеется, в звуке обычно содержатся более двух обертонов.

У различных музыкальных инструментов относительные амплитуды разных обертонов оказываются различными. Именно это придает звуку каждого инструмента

[1] Заметим, что «качество» в рассматриваемом здесь смысле не относится к тому, хороший звук или плохой, или же к качеству труда, вложенного в изготовление инструмента.

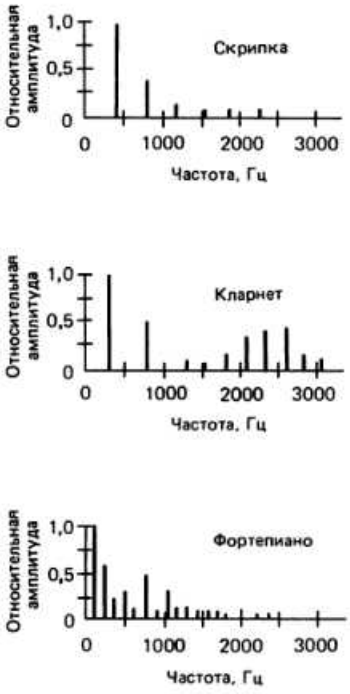



Рис. 16.3. Спектры звука некоторых инструментов.

характерное для него качество, или тембр. График, показывающий относительные величины гармоник звука, издаваемого определенным инструментом, называется спектром звука. Некоторые типичные примеры спектров звука различных инструментов показаны на рис. 16.3. Обычно наибольшую амплитуду звук имеет на основной частоте, и именно эта частота воспринимается нами как высота звука.

Способ игры на музыкальном инструменте существенно влияет на качество звука. Например, перебирая струны скрипки, мы получим совсем иной звук, чем тогда, когда мы водим по струнам смычком. Спектр звука в самом начале (или в конце) звучания ноты (например, в момент удара молоточка по струне фортепиано) может значительно отличаться от спектра звука при дальнейшем звучании ноты. Это тоже влияет на субъективные особенности качества звучания инструмента.

Часто встречающийся звук, подобный тому, который получается при ударе двух камней друг о друга, представляет собой шум, характеризуемый определенным качеством, однако определенную высоту этого звука выделить невозможно. Такой шум характеризуется большим числом частот, которые слабо связаны друг с другом. Если изобразить спектр звука такого шума, то на нем не будет отдельных линий, как на спектрах, показанных на рис. 16.3. Он будет представлять собой непрерывный или почти непрерывный спектр частот.

## 16.6. Интерференция звуковых волн, биения

В разд. 15.8 мы показали, что при прохождении двух когерентных волн одновременно через один участок пространства эти волны интерферируют друг с другом. Поскольку такая интерференция возникает в волнах любого типа, мы вправе ожидать, что звуковые волны тоже будут интерферировать, что и имеет место в действительности.

В качестве простого примера рассмотрим два громкоговорителя $A$ и $B$, находящиеся на расстоянии $d$ друг от друга на сцене зала (рис. 16.4). Будем считать, что оба громкоговорителя испускают звуковые волны на одной (одинаковой для обоих) частоте и находятся в фазе друг с другом; последнее означает, что один громкоговоритель создает сжатие воздуха одновременно с другим. Концентрические линии на рис. 16.4 показывают пучности звуковых волн, исходящих из каждого громкоговорителя. Разумеется, необходимо помнить, что в звуковой волне пучность представляет собой сжатие воздуха, а впадина между двумя пучностями – разрежение воздуха. Человек (или приемник звука), находящийся в точке $C$, расположенной на одинаковом расстоянии от каждого громкого-

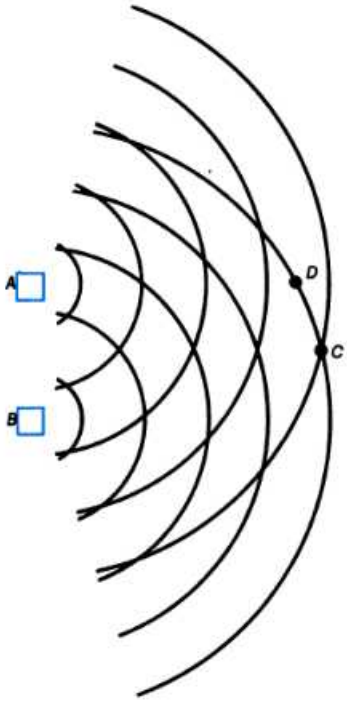



Рис. 16.4. Звуковые волны, исходящие из двух громкоговорителей, интерферируют.

ворителя, будет слышать громкий звук, поскольку в этой точке интерференция будет происходить с усилением волн. В точках же, таких, как $D$ на рис. 16.4, будет слышен слабый звук или вообще не слышно никакого звука. В этих точках интерферирующие волны взаимно ослабляют друг друга: сжатие одной волны накладывается на разрежение другой и наоборот (см. рис. 15.21 и соответствующее обсуждение для волн на поверхности воды в разд. 15.8). Все это можно рассмотреть более просто, если профили волн представить графически, как на рис. 16.5. Мы видим, что интерференция с усилением имеет место в точке $C$, поскольку в этой точке обе волны одновременно имеют пучность или впадину. То, что происходит в точке $D$, показано на рис. 16.5, *б*. Волна, исходящая из громкоговорителя $B$, должна пройти большее расстояние, чем волна, исходящая из громкоговорителя $A$. Поэтому волна, исходящая из $B$, запаздывает относительно волны, исходящей из $A$. Точка $E$ выбрана на рисунке таким образом, что расстояние $ED$ равно расстоянию $AD$. Таким образом, если расстояние $BE$ точно равно половине длины волны звука, то в точке $D$ обе волны будут находиться точно в противофазе и, следовательно, погасят друг друга. Эта закономерность может служить критерием определения точек, в которых происходит интерференция с ослаблением: такая интерференция имеет место в точках, расстояние от которых до первого громкоговорителя больше, чем расстояние до второго, точно на половину длины волны. Заметим, что если это дополнительное расстояние ($BE$ на рисунке) равно целой длине волны (или 2, 3, ... длинам волн), то обе волны находятся в фазе и *интерференция* происходит *с усилением*. Если расстояние $BE$ равно 1/2, 3/2, 5/2, ... длин волн, то мы имеем *интерференцию с ослаблением*.

Если громкоговоритель испускает волны всех частот, то в произвольной точке, такой, как $D$, интерференция с ослаблением происходит не для всех волн. Согласно приведенному выше критерию, интерференция с ослаблением будет иметь место лишь для волн с определенной длиной.

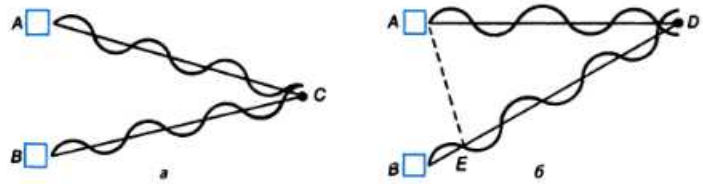



Рис. 16.5. Звуковые волны от громкоговорителей $A$ и $B$ (см. рис. 16.4) создают в точке $C$ усиливающую интерференцию, а в точке $D$ гасящую.

**Пример 16.8.** Два громкоговорителя на рис. 16.4 расположены на расстоянии 1,00 м друг от друга. В 4,00 м от одного из громкоговорителей находится человек. Громкоговорители воспроизводят звук на частоте 1150 Гц. На каком расстоянии от второго громкоговорителя должен находиться человек, чтобы почувствовать интерференцию с ослаблением? Считайте, что температура воздуха 20 °C.

**Решение.** Длина волны этого звука равна

$\lambda = v/f = (343 \text{ м/с})/(1150 \text{ Гц}) = 0{,}30 \text{ м}.$

Для того чтобы происходила интерференция с усилением, человек должен находиться от одного громкоговорителя на половину длины волны (или на 0,15 м) дальше (или ближе), чем от другого, т. е. на расстоянии 4,15 м (или 3,85 м) от второго громкоговорителя. Можно заметить, что если громкоговорители будут располагаться на 0,15 м ближе друг другу, то не найдется точки, расстояние от которой до одного из громкоговорителей будет превышать на 0,15 м расстояние до другого громкоговорителя. Таким образом, не будет вовсе точки, в которой происходила бы интерференция с усилением.

Интересным и важным примером сложения волн служит явление *биений*. Это явление возникает, если два источника звука (например, два камертона) обладают близкими, но не точно совпадающими частотами. Звуковые волны, исходящие из двух источников, интерферируют между собой, и уровень громкости звука последовательно то возрастает, то уменьшается. Такие регулярно повторяющиеся во времени изменения интенсивности (или громкости) звука называются биениями.

Чтобы понять, как возникают биения, рассмотрим две звуковые волны с одинаковыми амплитудами[1)], частота одной из которых $f_1 = 50$ Гц, а другой $f_2 = 55$ Гц. За 1,00 с первый источник звука совершает 50, а второй 55 колебаний. Рассмотрим поведение волн в точке пространства, равноудаленной от обоих источников. На рис. 16.6 на двух верхних графиках изображена зависимость профиля каждой из двух волн от времени. Третий график показывает сумму двух волн. В момент времени $t = 0$ обе волны находятся в фазе и при интерференции усиливаются. Поскольку обе волны имеют различные частоты, в момент времени $t = 0{,}10$ с они находятся в противофазе и происходит интерференция с ослаблением. При $t = 0{,}20$ с они снова находятся в фазе и результирующая амплитуда велика. Таким образом, каждые 0,20 с амплитуда возрастает, а в промежутке между этими моментами времени она значительно уменьшается. Именно такие рост и падение интенсивности воспринимаются слухом как биение. В данном случае биение происходит через каждые 0,20 с. Таким образом, биение происходит пять раз в секунду,

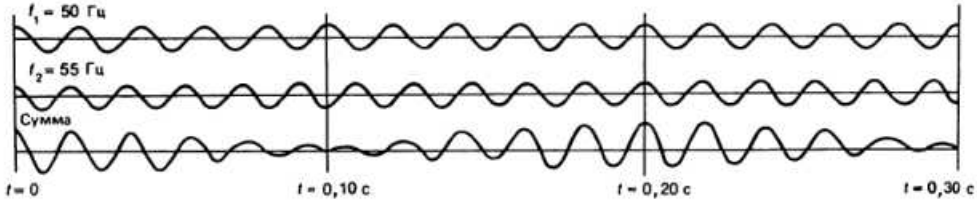



Рис. 16.6. Биения возникают в результате суперпозиции двух звуковых волн со слегка различающимися частотами.

[1)] Биения будут слышны даже в том случае, когда амплитуды колебаний неодинаковы, до тех пор пока разница амплитуд не станет слишком велика.

т. е. *частота биений* равна 5 Гц. Этот результат - равенство частоты биений разности частот двух волн - можно продемонстрировать в общем виде, что мы сейчас и сделаем.

Пусть две волны с частотами соответственно $f_1$ и $f_2$ описываются в некоторой точке пространства следующим выражением:

$$D_1 = D_M \sin(2\pi f_1 t), \quad D_2 = D_M \sin(2\pi f_2 t).$$

Согласно принципу суперпозиции, результирующее смещение можно записать в виде

$$D = D_1 + D_2 = D_M [\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)],$$

или, используя тригонометрическое тождество $\sin A + \sin B = 2\sin[(A + B)/2]\cos[(A - B)/2]$, имеем

$$D = 2D_M \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right). \tag{16.8}$$

Выражение (16.8) можно интерпретировать следующим образом. Наложение двух волн дает волну, имеющую частоту колебаний, равную средней частоте двух исходных волн, а именно $(f_1 + f_2)/2$. Амплитуда результирующего колебания в данной точке дается выражением, приведенным в квадратных скобках. Эта амплитуда зависит от времени и меняется от нуля до максимального значения $2D_M$ (сумма амплитуд исходных волн) с частотой $(f_1 - f_2)/2$. Биения возникают всякий раз, когда функция $\cos\{2\pi[(f_1 - f_2)/2]t\}$ становится равной $+1$ или $-1$ (рис. 16.6); это значит, что за период происходят два биения, так что частота биений равна удвоенной величине $(f_1 - f_2)/2$, т. е. равна разности частот исходных волн $f_1 - f_2$.

Явление биений возникает для любых волн и представляет собой весьма чувствительный метод сравнения частот.

## 16.7. Эффект Доплера

Вы могли заметить, что высота звука сирены пожарной машины, движущейся с большой скоростью, резко падает после того, как эта машина пронесется мимо вас. Возможно, вы замечали также изменение высоты сигнала автомобиля, проезжающего на большой скорости мимо вас. Высота звука двигателя гоночного автомобиля тоже изменяется, когда он проезжает мимо наблюдателя. Если источник звука приближается к наблюдателю, высота звука возрастает по сравнению с тем, когда источник звука покоился. Если же источник звука удаляется от наблюдателя, то высота звука понижается. Это явление называется **эффектом Доплера** и имеет место для всех типов волн. Рассмотрим теперь причины его возникновения и вычислим изменение частоты зуковых волн, обусловленное этим эффектом.

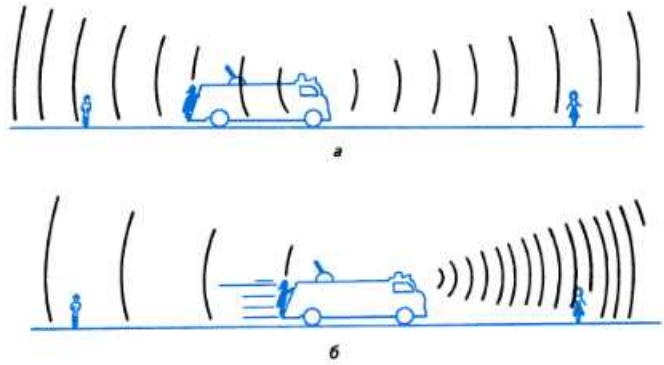


Рис. 16.7. *а* – оба наблюдателя на тротуаре слышат звук сирены стоящей на месте пожарной машины на одной и той же частоте; *б* – эффект Доплера: наблюдатель, к которому приближается пожарная машина, слышит звук более высокой частоты, а наблюдатель, от которого машина удаляется, слышит более низкий звук.

Рассмотрим для конкретности пожарный автомобиль, сирена которого, когда автомобиль стоит на месте, испускает звук определенной частоты во всех направлениях, как показано на рис. 16.7,*а*. Пусть теперь пожарный автомобиль начал двигаться, а сирена продолжает испускать звуковые волны на той же частоте. Однако во время движения звуковые волны, испускаемые сиреной вперед, будут располагаться ближе друг к другу, чем в случае, когда автомобиль не двигался, что и показано на рис. 16.7,*б*. Это происходит потому, что в процессе своего движения пожарный автомобиль «догоняет» испущенные ранее волны. Таким образом, наблюдатель у дороги заметит большее число волновых гребней, проходящих мимо него в единицу времени, и, следовательно, для него частота звука будет выше. С другой стороны, волны, распространяющиеся позади автомобиля, будут дальше отстоять друг от друга, поскольку автомобиль как бы «отрывается» от них. Следовательно, за единицу времени мимо наблюдателя, находящегося позади автомобиля, пройдет меньшее количество волновых гребней, и высота звука будет ниже.

Чтобы вычислить изменение частоты, воспользуемся рис. 16.8. Будем считать, что в нашей системе отсчета воздух (или другая среда) покоится. На рис. 16.8,*а* источник звука (например, сирена) находится в покое. Показа-

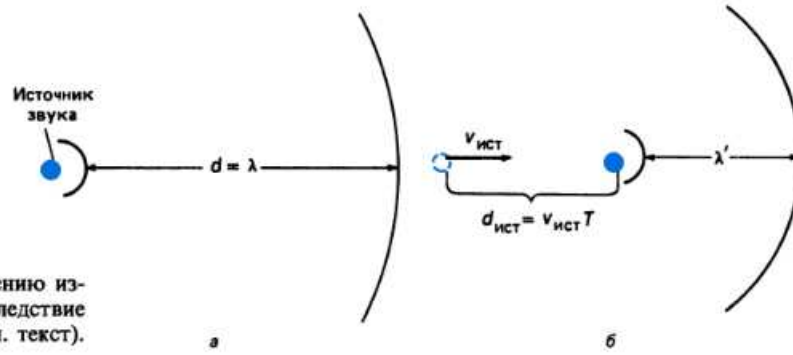



Рис. 16.8. К определению изменения частоты вследствие эффекта Доплера (см. текст).

ны два последовательных гребня волны, причем один из них только что испущен источником звука. Расстояние между этими гребнями равно длине волны λ. Если частота колебаний источника звука равна $f$, то время, прошедшее между испусканиями волновых гребней, равно

$T = 1/f$.

На рис. 16.8,*б* источник звука движется со скоростью $v_{ист}$. За время $T$ (оно только что было определено) первый гребень волны пройдет расстояние $d = vT$, где $v$ – скорость звуковой волны в воздухе (которая, конечно, будет одна и та же независимо от того, движется источник или нет). За это же время источник звука переместится на расстояние $d_{ист} = v_{ист} T$. Тогда расстояние между последовательными гребнями волны, равное новой длине волны λ′, запишется в виде

$$\lambda' = d - d_{ист} = (v - v_{ист})\, T = \\ = (v - v_{ист})/f,$$

поскольку $T = 1/f$. Частота $f'$ волны дается выражением

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \left(\frac{v}{v - v_{ист}}\right) f,$$

или

$$f' = \frac{1}{1 - v_{ист}/v} f \quad \left[\begin{array}{l}\text{источник звука приближается} \\ \text{к покоящемуся наблюдателю}\end{array}\right]. \qquad (16.9а)$$

Поскольку знаменатель дроби меньше единицы, мы имеем $f' > f$. Например, если источник создает звук на частоте 400 Гц, когда он находится в покое, то, когда источник начинает двигаться в направлении к наблюдателю, стоящему на месте, со скоростью 30 м/с, последний услышит звук на частоте (при температуре 0°С)

$$f' = \frac{400 \text{ Гц}}{1 - (30 \text{ м/с})/(331 \text{ м/с})} = 440 \text{ Гц}.$$

Новая длина волны для источника, удаляющегося *от* наблюдателя со скоростью $v_{ист}$, будет равна

$\lambda' = d + d_{ист}$.

При этом частота $f'$ дается выражением

$$f' = \frac{1}{1 + v_{ист}/v} f \quad \left[\begin{array}{l}\text{источник звука удаляется от} \\ \text{покоящегося наблюдателя}\end{array}\right]. \qquad (16.9б)$$

Эффект Доплера возникает также в том случае, когда источник звука покоится (относительно среды, в которой распространяются звуковые волны), а наблюдатель движется. Если наблюдатель приближается к источнику звука, то он слышит звук большей высоты, нежели испускаемый источником. Если же наблюдатель удаляется от источника, то звук кажется ему ниже. Количественно изменение частоты здесь мало отличается от случая,

когда движется источник, а наблюдатель покоится. В этом случае расстояние между гребнями волны (длина волны $\lambda$) не изменяется, а изменяется скорость движения гребней относительно наблюдателя. Если наблюдатель приближается к источнику звука, то скорость волн относительно наблюдателя будет равна $v' = v + v_{\text{набл}}$, где $v$ – скорость распространения звука в воздухе (мы предполагаем, что воздух покоится), а $v_{\text{набл}}$ – скорость наблюдателя. Следовательно, новая частота будет равна

$$f' = v'/\lambda = (v + v_{\text{набл}})/\lambda,$$

или, поскольку $\lambda = v/f$,

$$f' = (1 + v_{\text{набл}}/v)f \quad \left[\begin{array}{l}\text{наблюдатель приближается к} \\ \text{покоящемуся источнику звука}\end{array}\right]. \tag{16.10а}$$

В случае же, когда наблюдатель удаляется от источника звука, относительная скорость будет равна $v' = v - v_{\text{набл}}$, и мы имеем

$$f' = (1 - v_{\text{набл}}/v)f \quad \left[\begin{array}{l}\text{наблюдатель удаляется от} \\ \text{покоящегося источника звука}\end{array}\right]. \tag{16.10б}$$

Если звуковая волна отражается от движущегося препятствия, то частота отраженной волны из-за эффекта Доплера будет отличаться от частоты падающей волны. Это иллюстрируется на следующем примере.

**Пример 16.9.** Звуковая волна с частотой 5000 Гц испускается в направлении к телу, которое приближается к источнику звука со скоростью 3,30 м/с. Чему равна частота отраженной волны?

**Решение.** В этом случае эффект Доплера проявляется два раза. Во-первых, тело, к которому направлена звуковая волна, ведет себя как движущийся наблюдатель и «регистрирует» звуковую волну на частоте

$$f' = \left(1 + \frac{v_{\text{набл}}}{v}\right)f = \left(1 + \frac{3{,}30\ \text{м/с}}{331\ \text{м/с}}\right)(5000\ \text{Гц}) =$$

$$= 5050\ \text{Гц}.$$

Во-вторых, тело затем действует как вторичный источник звука (отраженного), который движется, так что частота отраженной звуковой волны будет равна

$$f'' = \frac{1}{1 - v_{\text{ист}}/v} f' =$$

$$= \frac{5050\ \text{Гц}}{1 - (3{,}30\ \text{м/с})/331\ \text{м/с}} = 5100\ \text{Гц}$$

Таким образом, доплеровский сдвиг частоты равен 100 Гц.

Если падающую и отраженную звуковые волны наложить одна на другую, то возникнет суперпозиция, а это приведет к биениям. Частота биений равна разности частот двух волн, и в примере 16.9 она равнялась бы 100 Гц. Такое проявление эффекта Доплера широко используется в различных медицинских приборах, использующих, как правило, ультразвуковые волны в мегагерцевом диапазоне частот. Например,

отраженные от красных кровяных телец ультразвуковые волны можно использовать для определения скорости кровотока. Аналогичным образом этот метод можно применять для обнаружения движения грудной клетки зародыша, а также для дистанционного контроля за сердцебиениями. Следует заметить, что эффект Доплера лежит также в основе метода обнаружения с помощью радара автомобилей, которые превышают предписываемую скорость движения, но в этом случае используются электромагнитные (радио) волны, а не звуковые.

Точность соотношений (16.9) и (16.10) снижается, если $v_{ист}$ или $v_{набл}$ приближаются к скорости звука. Это связано с тем, что смещение частиц среды уже не будет пропорционально возвращающей силе, т. е. возникнут отклонения от закона Гука, так что большинство наших теоретических рассуждений потеряет силу.

## * 16. 8. Ударные волны и акустический удар

Если тело (например, самолет) движется быстрее звука, то говорят, что оно имеет *сверхзвуковую скорость*. Такую скорость часто задают *числом Маха* (М), которое определяется как отношение скорости тела к скорости звука в данной среде. Например, самолет, движущийся со скоростью 900 м/с высоко в атмосфере, где скорость звука равна всего лишь 300 м/с, имеет скорость 3М (три числа Маха).

Если источник звука движется с дозвуковой скоростью, то высота звука, как мы видели, изменяется (эффект Доплера): см. также рис. 16.9,*а* и *б*. Если же источник звука движется быстрее скорости звука, то возникает более серьезный эффект, называемый *ударной волной*. В этом случае источник звука действительно «перегоняет» создаваемые им звуковые волны. Как показано на рис. 16.9,*в*, когда источник звука движется со скоростью звука, волны, испускаемые им вперед, в буквальном смысле «нагромождаются» прямо перед ним.

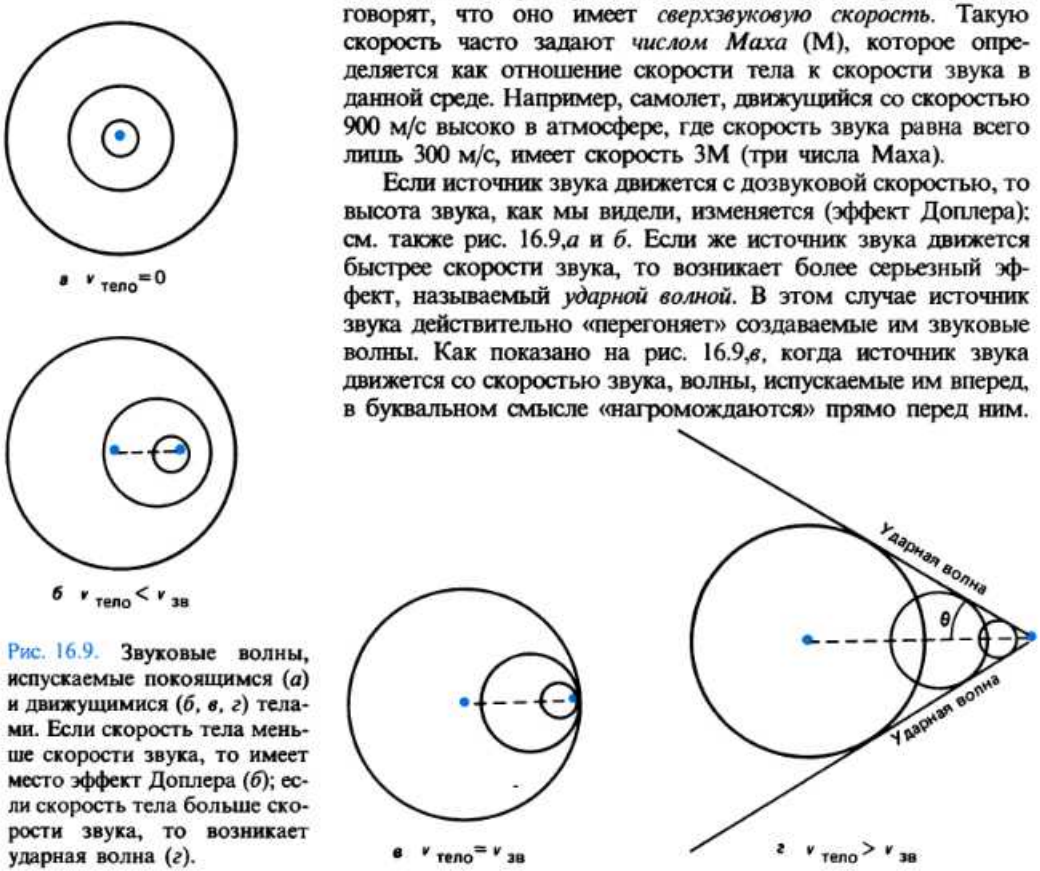



Рис. 16.9. Звуковые волны, испускаемые покоящимся (*а*) и движущимися (*б*, *в*, *г*) телами. Если скорость тела меньше скорости звука, то имеет место эффект Доплера (*б*); если скорость тела больше скорости звука, то возникает ударная волна (*г*).



Рис. 16.10. Корабль создает носовую волну. (С разрешения Военно-морского центра фотографии США.)

Когда тело движется со сверхзвуковой скоростью, волны нагромождаются друг на друга, вписываясь в угол, как показано на рис. 16.9,*г*. Различные гребни волн налагаются друг на друга и образуют один огромный гребень, который и называется ударной волной. Позади этого очень высокого гребня образуется, как правило, столь же глубокая впадина. Ударная волна возникает, по существу, благодаря усиливающей интерференции большого числа волн. В воздухе она аналогична носовой волне морского корабля, который идет со скоростью, превышающей скорость распространения создаваемых им волн на воде (рис. 16.10).

Когда самолет летит со сверхзвуковой скоростью, производимый им шум и возмущение воздуха образуют ударную волну, содержащую огромное количество звуковой энергии. Если такая ударная волна пройдет близко от человека, то он воспримет ее как громкий «акустический удар». Акустический удар продолжается только долю секунды, но заключенной в нем энергии часто бывает достаточно, чтобы разбить окна или вызвать другие повреждения. Он может вызвать и психологический дискомфорт. Фактически акустический удар, вызываемый сверхзвуковым самолетом, представляет собой двойной удар, поскольку ударная волна образуется как впереди, так и позади самолета (рис. 16.11).

В момент времени, когда самолет достигает скорости звука, он преодолевает барьер, образованный звуковыми волнами перед ним (рис. 16.9, *в*). Чтобы превзойти скорость звука, требуется дополнительное усилие для преодоления этого «звукового барьера». Если сверхзвуко-

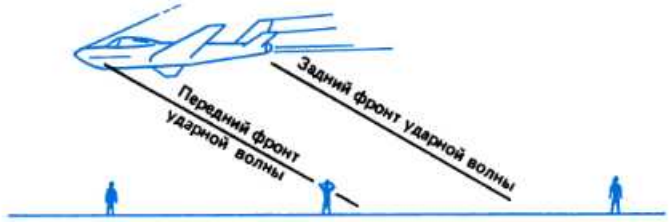



Рис. 16.11. Человек, находящийся справа от самолета, уже услышал (двойной) акустический удар; человек, стоящий в центре, только что услышал его, а человек, находящийся слева от самолета, вскоре услышит его.

вая скорость достигнута, то звуковой барьер уже не оказывает сопротивления движению. Иногда ошибочно полагают, что акустический удар возникает только в момент преодоления самолетом звукового барьера. В действительности ударная волна сопровождает самолет в течение всего времени его движения со сверхзвуковой скоростью. Каждый из нескольких наблюдателей, стоящих на земле, будет слышать громкий «удар» по мере прохождения ударной волны (рис. 16.11). Ударная волна образует конус с вершиной на самолете. Угол раствора конуса $\theta$ (рис. 16.9, *г*) дается выражением

$$\sin\theta = v_{зв}/v_т, \tag{16.11}$$

где $v_т$ – скорость тела (самолета), а $v_{зв}$ – скорость звука в среде (доказательство этого соотношения содержится в приведенной ниже задаче 57).

**Заключение**

Звук распространяется в виде продольной волны в воздухе и других средах. Скорость звука в воздухе увеличивается с ростом температуры; при 0°C она равна приблизительно 331 м/с. Звуковую волну можно рассматривать с точки зрения как смещения молекул или частиц среды, так и изменения давления в среде. Волна давления отличается по фазе от волны смещения на 90°. Это значит, что гребни одной волны следуют за гребнями другой через четверть длины волны.

*Высота* звука определяется его частотой; чем больше частота, тем выше звук. Слышимые человеком *частоты* лежат в диапазоне от 20 до 20 000 Гц (1 Гц – одно колебание в секунду). *Громкость*, или *интенсивность*, звука пропорциональна квадрату амплитуды звуковой волны. Поскольку человеческое ухо может воспринимать звук интенсивностью от $10^{-12}$ до 1 Вт/м$^2$, для рассмотрения уровней громкости применяется логарифмическая шкала. *Уровень громкости* $\beta$ выражается через интенсивность $I$ следующим образом: $\beta = 10\lg(I/I_0)$, где опорная интенсивность $I_0$ обычно выбирается равной $1{,}0\cdot10^{-12}$ Вт/м$^2$. Например, рост интенсивности в 100 раз соответствует повышению уровня громкости на 20 дБ.

Музыкальные инструменты представляют собой простые источники звука, в которых создаются стоячие волны. Струны струнных инструментов могут колебаться как целое, имея узлы только на концах. Частота, с которой происходят эти колебания, называется *основной*. Струна может колебаться и с более высокими частотами, называемыми обертонами или *гармониками*. При этом возникает один (или несколько) дополнительных узлов. Частота каждой гармоники кратна основной частоте. В духовых инструментах стоячие волны возникают в воздушном столбе внутри трубы. Воздух, колеблющийся в открытой трубе (с обеих сторон), имеет на обоих концах трубы пучности колебаний. Основная частота таких коле-

баний соответствует длине волны, равной удвоенной длине трубы. Частота гармоник равна частоте основного колебания, умноженной на 2, 3, 4, ... . В случае, если труба закрыта (с одной стороны), длина волны основного колебания равна четырем длинам трубы. При этом имеются только нечетные гармоники, равные основной частоте, умноженной на 1, 3, 5, 7, ... .

Излученные различными источниками звуковые волны могут интерферировать друг с другом. Если два звука имеют несколько различные частоты, то возникают биения, частота которых равна разности частот двух источников.

*Эффект Доплера* состоит в том, что движение источника звука или слушателя вызывает изменение высоты звука. Если источник звука и слушатель сближаются, то высота звука растет; если же они удаляются друг от друга, то высота звука понижается.

## Вопросы

1. Приведите доказательства того, что звук распространяется в виде волны.
2. Что является свидетельством того, что звук является формой энергии?
3. Сельские жители пользуются своим жизненным опытом, согласно которому задержка между моментом наблюдения молнии и звуком грома показывает, насколько далеко ударила молния; например, каждые 5 с соответствуют около 1,6 км. Объясните.
4. Ночью при плавании на лодке по озеру или реке часто можно ясно слышать звуки радиоприемника или голоса людей, находящихся на берегу на достаточно большом расстоянии. Значительно реже такая слышимость наблюдается в дневное время. Это явление можно объяснить, рассмотрев отражение звука от разных слоев воздуха, имеющих различные плотности (в силу разницы температур). Изобразите на рисунке этот процесс и определите, когда ближайший к воде слой воздуха плотнее, чем верхние слои воздуха – ночью или днем.
5. Как вы думаете, меняется ли частота или длина волны звука, когда он проходит из воздуха в воду?
6. Какие доказательства вы можете привести в пользу того, что скорость распространения звука в воздухе в основном не зависит от частоты?
7. Какова главная причина того, что скорость распространения звука в водороде меньше, чем в воздухе?
8. Молекулы газа, например воздуха, хаотически движутся с очень высокими скоростями (гл. 18). Среднее расстояние между молекулами во много раз превосходит их диаметр. При прохождении волны через газ одна молекула может сообщить импульс другой молекуле, только если это расстояние между молекулами пройдено и две молекулы сталкиваются. Не следует ли из этого, что скорость звука в газе ограничена средней скоростью молекул?
9. Два камертона колеблются с одинаковыми амплитудами, однако частота колебаний одного из них в два раза больше, чем другого. Какой из них дает более громкий звук (если вообще существует различие в громкости)?
10. Как влияет повышение температуры воздуха на громкость звука, приходящего от источника с фиксированной частотой и амплитудой? (Считайте, что атмосферное давление не меняется.)
11. Голос человека, вдохнувшего гелий, становится очень высоким. Почему?
12. Почему струны, изготовленные из жил животных, в некоторых музыкальных инструментах оплетены тонким проводом?
13. Попробуйте посвистеть губами и опишите, каким образом вы управляете высотой свиста.
14. Постройте график, соответствующий каждому из случаев, показанных на рис. 16.2, для стоячих волн давления а) в открытой трубе; б) в закрытой трубе.
15. Объясните, каким образом можно использовать трубу в качестве фильтра для уменьшения амплитуды звука в различных частотных диапазонах. (Примером является глушитель автомобиля.) Существует ли при передаче звука низкочастотная граница пропускания? Если да, то чем она определяется?
16. Каким образом температура воздуха в помещении влияет на высоту звука труб орга́на?

17. Защита от шумов является сегодня актуальной проблемой. Одним из путей ее решения является уменьшение колеблющихся площадей в устройствах, создающих шумы. Это делают, например, уменьшая, насколько это возможно, габариты таких устройств или изолируя их (акустически) от пола и стен. Другой метод состоит в том, что поверхности устройств делают из более толстого материала. Объясните, каким образом каждая из этих мер может уменьшить уровень шума.

18. Почему на гитаре лады располагаются все теснее друг к другу по мере того, как вы движетесь по грифу к кобылке?

19. Можно сказать, что стоячие волны вызваны «интерференцией в пространстве», тогда как про биения можно сказать, что они обусловлены «интерференцией во времени». Объясните.

20. При каких условиях вы сможете услышать биения, возникшие при звучании двух камертонов, которые имеют в точности одинаковые частоты?

21. Допустим, что источник звука движется под прямым углом к линии зрения покоящегося слушателя в неподвижном воздухе. Будет ли в этом случае иметь место эффект Доплера? Объясните.

22. Если дует ветер, то изменится ли при этом частота звука, слышимого человеком, покоящимся относительно источника звука? Изменятся ли длина волны и скорость звука?

*23. Звук акустического удара очень напоминает звук взрыва. Поясните сходство между этими явлениями.

## Задачи

Раздел 16.1

1. (I) Дельфины испускают ультразвуковые волны с частотой 250 000 Гц. Определите длину волны такого звука а) в воде; б) в воздухе. Считайте, что температура равна 20 °C.

2. (I) Путешественник определяет длину озера, прислушиваясь к звуку эха своего голоса, отраженного от скалы на противоположном берегу озера. Он слышит эхо через 1,20 с после крика. Какова длина озера?

3. (II) Камень сброшен с вершины скалы. Всплеск от его падения в воду слышен через 4,0 с. Какова высота скалы? (Считайте, что температура воздуха равна 20 °C.)

4. (II) Человек видит, как тяжелый камень падает на бетонный тротуар. Некоторое время спустя он слышит два звука от удара: один пришел по воздуху, а другой распространялся в бетоне. Промежуток времени между этими звуками равен 1,2 с. На каком расстоянии от человека упал камень?

Раздел 16.2

5. (II) Изменение давления в звуковой волне дается выражением

$p = 2{,}2\sin(\pi x/3 - 1700\pi t)$,

где $p$ измеряется в паскалях, $x$ - в метрах, а $t$ - в секундах. Определите: а) длину волны; б) частоту; в) скорость распространения; г) амплитуду смещения волны. Считайте, что плотность среды равна $\rho = 2{,}7\cdot 10^3$ кг/м$^3$.

6. (II) Ультразвуковые волны мегагерцевого диапазона часто используются для целей медицинской диагностики. Допустим, что ультразвуковая волна с частотой 5,0 МГц проходит из мышечной ткани, где ее скорость равна 1200 м/с, в кость, где ее скорость равна 2800 м/с. Напишите два выражения для изменения давления в двух волнах $p(x, t)$, распространяющихся в мышце и в кости, сначала через $\lambda$ и $v$, а затем через $\lambda$ и $f$. Обозначьте соответствующие амплитуды волн давления в двух средах через $p_{\text{м-мышца}}$ и $p_{\text{м-кость}}$.

7. (II) Покажите, что амплитуда одномерной продольной волны давления может быть записана в виде произведения модуля всестороннего сжатия среды и отношения максимальной скорости частицы ($\partial D/\partial t$) к скорости распространения волны.

Раздел 16.3

8. (I) Две звуковые волны имеют одинаковые амплитуды смещения, однако частота одной волны в два раза больше, чем другой. а) У какой из двух волн амплитуда давления больше? Во сколько раз? б) Каково отношение интенсивностей этих волн?

9. (I) а) Чему равен уровень громкости звука, имеющего интенсивность $7{,}5\cdot 10^{-8}$ Вт/м$^2$? б) Какова интенсивность звука с уровнем громкости 35 дБ?

10. (I) Амплитуда звуковой волны увеличилась в три раза. а) Во сколько раз возросла ее интенсивность? б) На сколько децибел увеличился уровень громкости?

11. (II) Чему равен уровень громкости (в дБ) звуковой волны в воздухе, который соответствует амплитуде смещения колеблющихся молекул воздуха 1,2 мм при частоте 80 Гц?

12. (II) Про стереофонический магнитофон говорят, что отношение сигнал/шум у него равно 58 дБ. Каково отношение интенсивностей сигнала и фонового шума?

13. (II) Человеческое ухо способно воспринимать разницу уровней громкости 1,0 дБ. Каково отношение амплитуд двух звуков, уровни громкости которых различаются на эту величину?

14. (II) а) Вычислите максимальное смещение молекул воздуха (при температуре 20 °C) при прохождении звуковой волны с частотой 120 Гц, интенсивность которой равна порогу болевого ощущения (120 дБ). б) Какова амплитуда давления в этой волне?

15. (II) Если в некоторой точке пространства две шутихи создают уровень громкости 95 дБ, то чему будет равен уровень громкости, если взорвется только одна из них?

16. (II) Одиночный москит, находящийся на расстоянии 10 м от человека, создает звук, близкий к порогу слышимости (0 дБ). Какой уровень громкости создадут 1000 москитов?

17. (II) Звуковая волна с уровнем громкости 75 дБ падает на барабанную перепонку площадью $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ м$^2$. Сколько энергии поглощает барабанная перепонка в секунду?

18. (II) а) Оцените выходную мощность звука нормальной разговорной речи. Воспользуйтесь табл. 16.2. Считайте, что звук распространяется приблизительно равномерно в полусфере вокруг рта человека. б) Сколько человек должны разговаривать одновременно, чтобы создать звук с выходной мощностью 100 Вт?

19. (II) При частоте звука 1000 Гц стереофонический усилитель дает выходную мощность 25 Вт. При частоте 20 Гц уровень громкости падает на 2 дБ. Какова выходная мощность при частоте 20 Гц?

20. (II) Чему равен результирующий уровень громкости, если звуки с уровнями громкости 80 и 85 дБ слышны одновременно?

21. (II) *Коэффициент усиления* $\beta$ звуковых систем и систем связи дается выражением

$$\beta = 10 \lg (P_{\text{вых}}/P_{\text{вх}}),$$

где $P_{\text{вх}}$ – входная мощность системы, а $P_{\text{вых}}$ – ее выходная мощность. Пусть выходная мощность стереофонического усилителя при мощности на входе 1 мВт равна 35 Вт. Чему равен его коэффициент усиления в децибелах?

22. (II) а) Покажите, что уровень громкости $\beta$ можно записать через амплитуду давления $p_{\text{м}}$ следующим образом:

$$\beta\,(\text{дБ}) = 20 \lg (p_{\text{м}}/p_{\text{м0}}),$$

где $p_{\text{м0}}$ – амплитуда давления при некотором опорном уровне громкости. б) Опорное давление $p_{\text{м0}}$ во многих случаях выбирают равным $3{,}0 \cdot 10^{-5}$ Н/м$^2$, что соответствует интенсивности $1{,}0 \cdot 10^{-12}$ Вт/м$^2$. Чему был бы равен уровень громкости, если бы $p_{\text{м}}$ было равно 1 атм?

23. (II) Уровень громкости на расстоянии 12,0 м от громкоговорителя равен 100 дБ. Какова акустическая выходная мощность (в Вт) громкоговорителя?

24. (II) Реактивный самолет излучает звуковую энергию $2{,}0 \cdot 10^5$ Дж/с. а) Чему равен уровень громкости на расстоянии 40 м от самолета? Воздух поглощает звук с коэффициентом около 7 дБ/км. Вычислите, какой уровень громкости будет на расстояниях б) 1 км и в) 5 км от самолета, учитывая поглощение звука воздухом.

Раздел 16.4

25. (II) Струна «соль» скрипки имеет основную частоту 196 Гц. Колеблющийся участок струны длиной 32 см имеет массу 0,50 г. Какое натяжение должна иметь настроенная струна?

26. (I) Незажатая струна гитары имеет длину 0,70 м; она настроена таким образом, что дает ноту «ми», которая выше «до» первой октавы (330 Гц). На каком расстоянии от конца струны должен быть помещен палец гитариста, чтобы струна давала звук «ля» той же октавы (440 Гц)?

27. (I) На каком расстоянии от конца флейты из примера 16.6 должно располагаться отверстие, которое нужно открыть для исполнения ноты «ре», расположенной выше первой октавы (294 Гц)?

28. (I) Определите длину закрытой трубы органа, которая создает звук ноты «до» средней октавы (264 Гц) при температуре 15 °C.

29. (II) Орган настроен при температуре 20 °C. Насколько «уйдет» его частота, если температура упадет до 10 °C?

30. (II) Вычислите резонансную частоту столба воздуха во внешнем ухе человека, длина которого равна приблизительно 2,5 см.

31. (II) Струны скрипки настроены таким образом, что частота звучания каждой последующей струны в 1,5 раза превосходит частоту звучания соседней. Если натяжения всех струн одинаковы, то какова должна быть при этом линейная плотность (масса на единицу длины) каждой струны относительно линейной плотности струны с наинизшей высотой звука?

32. (II) Струна «ля» на скрипке имеет длину (между точками закрепления) 32 см, основную частоту 440 Гц и линейную плотность $5{,}0 \cdot 10^{-4}$ кг/м. а) Каковы скорость распространения волны и натяжение в струне? б) Чему равна длина трубы простого духового инструмента (например, трубы органа), закрытой с одного конца, если основная частота колебаний воздуха в трубе равна также 440 Гц, а скорость звука в воздухе 331 м/с? в) Определите частоту первого обертона каждого из этих инструментов.

33. (II) а) Если температура воздуха 20 °C, то какой длины должна быть открытая труба органа, чтобы ее основная частота была равна

264 Гц? б) Какова будет основная частота звучания трубы, если она заполнена гелием?

34. (II) Камертон колеблется над вертикальной открытой трубой, заполненной водой. Уровень воды постепенно понижается. По мере понижения уровня воды наблюдается резонанс воздушного столба над водой и камертона – сначала, когда уровень воды находится от отверстия трубы на расстоянии 0,125 м, и затем – на расстоянии 0,395 м. Какова частота звучания камертона? Считайте, что температура воздуха равна 20 °C.

35. (II) Сколько обертонов имеется в диапазоне слышимого звучания органной трубы длиной 100 см при температуре воздуха 20 °C, а) если труба открыта; б) если она закрыта?

36. (II) Струна гитары массой 1,50 г и длиной 80 см расположена вблизи открытой с одного конца трубы, имеющей длину также 80 см. Каково должно быть натяжение струны, чтобы частота ее третьей гармоники совпадала с частотой четвертой гармоники трубы? Температуру положите равной 20 °C.

* Раздел 16.5

37. (II) Чему равна приблизительно интенсивность звука первых двух обертонов скрипки относительно интенсивности ее звучания на основной частоте? На сколько децибел слабее, чем основная, звучат первая и вторая гармоники? (См. рис. 16.3.)

Раздел 16.6

38. (I) Чему будет равна «частота биений» в случае, когда ноты «до» и «до диез» (262 и 277 Гц сответственно) звучат одновременно? Будут ли слышны эти биения? Что произойдет, если каждая из нот будет исполняться на две октавы ниже (частота уменьшится в 4 раза)?

39. (II) Человек слышит звук чистого тона, исходящий из двух источников. Ему кажется, что частота звука лежит в диапазоне 500–1000 Гц. Громкость звука максимальна в точках, равноудаленных от обоих источников. Чтобы точно определить частоту звука, человек перемещается и обнаруживает, что уровень громкости минимален в точке, отстоящей от одного источника на 0,22 м дальше, чем от другого. Чему равна частота звука, если температура воздуха 20 °C?

40. (II) Два громкоговорителя расположены на расстоянии 2,5 м друг от друга. Человек находится на расстоянии 3,0 м от одного из них и на расстоянии 3,5 м от другого. а) Какова наименьшая частота, на которой в этой точке будет происходить гасящая интерференция? б) Вычислите две другие частоты, которые также будут давать гасящую интерференцию в этой точке (назовите две следующие более высокие частоты). Температура воздуха 20 °C.

41. (II) Предполагается, что две рояльные струны должны иметь одну и ту же частоту 132 Гц, однако настройщик фортепиано слышит, что при одновременном их звучании через каждые 2 с происходят биения. а) Если одна струна колеблется с частотой 132 Гц, то какова в этом случае частота колебаний другой? (Получим ли мы один ответ на этот вопрос?) б) На какую величину (в процентах) нужно увеличить или уменьшить натяжение второй струны, чтобы настроить струны на одну частоту?

42. (II) Сколько будет слышно биений, если на двух одинаковых флейтах музыканты пытаются исполнить ноту «до» средней октавы (262 Гц), при условии что одна из флейт находится при температуре 0,0 °C, а вторая – при температуре 20,0 °C?

43. (II) Два источника звука на рис. 16.4 расположены друг против друга и испускают звуки с одинаковыми амплитудами и частотами (250 Гц), но различающиеся по фазе на 180°. При каком минимальном расстоянии между двумя громкоговорителями в какой-либо точке будет наблюдаться а) усиливающая интерференция и б) гасящая интерференция при окружающей температуре 20 °C?

44. (II) Покажите, что если в какой-то точке пространства имеет место гасящая интерференция, то два громкоговорителя на рис. 16.4 должны находиться на расстоянии $d$, равном по крайней мере половине длины волны звука $\lambda$. Громкоговорители находятся в фазе.

45. (II) Источник создает звуки с длинами волн 2,80 и 3,10 м. а) Сколько будет слышно биений в секунду (считайте, что температура равна 20 °C)? б) На каком расстоянии в пространстве расположены области максимальной интенсивности?

46. (II) Два источника на рис. 16.4 испускают звуковые волны в фазе с длиной волны $\lambda$ и амплитудой $D_M$. Выберите точку, такую, как $C$ и $D$ на рисунке. Пусть $r_A$ и $r_B$ – расстояния до




Рис. 16.12.

этой точки от источников звука $A$ и $B$ соответственно. Покажите, что если $r_A$ и $r_B$ приблизительно равны ($r_A - r_B \ll r_A$), то амплитуда зависит от положения выбранной точки приблизительно следующим образом:

$(2D_M/r_A)\cos[\pi(r_A - r_B)/\lambda]$.

47. (III) Источник звуковых волн (длина волны $\lambda$) расположен на расстоянии $l$ от приемника звука. Звук достигает приемника звука как прямым путем, так и посредством отражения от препятствия, как показано на рис. 16.12. Препятствие находится на одинаковых расстояниях от источника и приемника. В случае когда препятствие находится на расстоянии $d$ справа от линии, соединяющей источник и приемник (как показано на рисунке), обе волны приходят к приемнику в фазе. На какое расстояние вправо нужно переместить препятствие, чтобы две волны находились в противофазе и имела место гасящая интерференция. (Считайте, что $\lambda \ll l, d$.)

Раздел 16.7

48. (I) Основная частота звука сирены полицейского автомобиля, когда он стоит на месте, равна 1800 Гц. На какой частоте услышит звук сирены стоящий на месте наблюдатель, если полицейский автомобиль а) движется навстречу ему со скоростью 90 км/ч; б) удаляется от него с той же скоростью? в) Каковы будут частоты в случае, когда полицейский автомобиль с сиреной стоит на месте, а автомобиль наблюдателя приближается к нему или удаляется от него со скоростью 90 км/ч?

49. (II) Выведите общую формулу для изменения частоты звука $f'$ за счет эффекта Доплера в случае, когда как источник, так и наблюдатель движутся.

50. (II) Гудки двух тепловозов имеют одинаковую частоту 260 Гц. Один из тепловозов удаляется от покоящегося наблюдателя со скоростью 80 км/ч, а другой стоит на месте. Какую частоту биений будет воспринимать наблюдатель?

51. (II) В нормальных условиях скорость потока крови в аорте приблизительно равна 0,28 м/с. Вдоль потока направляются ультразвуковые волны с частотой 4,20 МГц. Эти волны отражаются от красных кровяных телец. Какова будет частота наблюдаемых при этом биений? Считайте, что скорость этих волн равна $1{,}5 \cdot 10^3$ м/с, т. е. близка к скорости звука в воде.

52. (II) а) Используя биномиальное разложение, покажите, что при малых относительных скоростях источника звука и наблюдателя выражения (16.9а) и (16.10а) в основном совпадают. б) Какова будет ошибка (в процентах), если при относительной скорости 25 м/с вместо выражения (16.9а) использовать выражение (16.10а)?

53. (II) Эффект Доплера для ультразвуковых волн на частоте 1,8 МГц используется для контроля частоты сердцебиений зародыша. Наблюдаемая частота биений (максимальная) равна 600 Гц. Считая, что скорость распространения звука в ткани равна $1{,}5 \cdot 10^3$ м/с, вычислите максимальную скорость поверхности бьющегося сердца.

54. (II) В предыдущей задаче было найдено, что биения происходят 180 раз в минуту. Это отражает тот факт, что сердце бьется и скорость его поверхности изменяется. Какова частота сокращений сердца?

55. (III) Звук заводского гудка имеет частоту 650 Гц. Если дует северный ветер со скоростью 12,0 м/с, то звук какой частоты будет слышать покоящийся наблюдатель, находящийся а) к северу, б) к югу, в) к востоку и г) к западу от гудка? Звук какой частоты будет слышать велосипедист, приближающийся со скоростью 15 м/с к гудку д) с севера или е) с запада? (Температура воздуха равна 20 °C.)

* Раздел 16.8

*56. (I) Лодка, движущаяся со скоростью 9,2 м/с, создает стоячую волну под углом 18° к направлению движения лодки. Чему равна скорость волн на поверхности воды?

*57. (II) Покажите, что угол $\theta$, который акустический удар образует с направлением движения сверхзвукового объекта, дается выражением (16.11).

*58. (II) Самолет движется в атмосфере, в которой скорость звука равна 310 м/с, со скоростью 2,8 М. а) Какой угол образует ударная волна с направлением движения самолета? б) Если самолет летит на высоте 6500 м, то через какой промежуток времени после того, как самолет пролетит над головой человека, стоящего на земле, тот услышит ударную волну?

*59. (II) Избыточное давление $p$ акустического удара падает с увеличением высоты $h$ полета самолета приблизительно по закону

$p \sim 1/h^{3/4}$.

Во сколько раз изменится давление, если высота, на которой летит самолет, увеличится вдвое? Сравните результат с законом обратных квадратов.

# 17 Температура, тепловое расширение и закон идеального газа

В этой главе и следующих трех главах мы будем изучать тесно связанные между собой понятия температуры и теплоты, а также основы термодинамики и кинетической (атомной) теории. Во многих случаях мы будем рассматривать конкретную систему, которая представляет собой некоторое тело или некоторую группу тел; все остальное вокруг этой системы называется окружающей средой. Чтобы описать *состояние* (или условие существования) конкретной системы, например газа в сосуде, мы можем использовать либо микроскопическую, либо макроскопическую точку зрения. **Микроскопическое** описание – это когда мы рассматриваем детали движения всех атомов или молекул, образующих систему, и такое описание может быть очень сложным; это удел кинетической теории (и статистической механики), которую мы обсудим главным образом в следующей главе. **Макроскопическое** же описание дается через величины, в той или иной степени измеряемые непосредственно нашими органами чувств; к ним относятся объем, масса, давление и температура. Изучением процессов с помощью макроскопических величин занимается **термодинамика**. Число макроскопических переменных, необходимое для определения состояния системы в любой момент времени, зависит от вида системы. Например, чтобы описать состояние чистого газа в сосуде, нам потребуются всего лишь три переменные, которыми могут быть объем, давление и температура; такого рода величины, которые можно использовать для описания состояния системы, называются *параметрами состояния*.

В настоящей главе мы уделим основное внимание понятию температуры. Однако сначала обсудим кратко теорию, согласно которой вещество состоит из атомов, совершающих непрерывное хаотическое движение. Эта теория называется *кинетической теорией* («кинетический», как вы помните, происходит от греческого слова «движущийся»). Более детально эту теорию мы рассмотрим в гл. 18.

## 17.1. Атомы

Представление о том, что вещество состоит из атомов, принадлежит древним грекам. Согласно древнегреческому философу Демокриту, если данное вещество, скажем кусок железа, делить на все более мелкие части, то когда-нибудь мы получим мельчайшую частицу вещества, которую разделить уже будет невозможно. Эта мельчайшая частица была названа **атомом**, что происходит от греческого слова «атомос», т. е. «неделимый»[1]. Альтернативой атомной теории вещества является представление о том, что вещество можно непрерывно делить на сколь угодно мелкие части и этот процесс бесконечен.

В наше время все ученые признают атомную теорию. Однако экспериментальные подтверждения справедливости этой теории появились лишь в восемнадцатом и девятнадцатом столетиях, причем большинство подтверждений было получено из анализа химических реакций. Важнейшим элементом доказательства был *закон постоянства состава веществ*, который представлял собой обобщение экспериментальных результатов, собранных за полвека к началу 1800 г. Согласно этому закону, если два или более элементов образуют соединение, то они всегда входят в соединение в одинаковых весовых пропорциях. Например, поваренная соль всегда состоит из 23 долей натрия и 35 долей хлора, а вода образуется из одной доли водорода и восьми долей кислорода. Теория непрерывной делимости вещества с трудом согласовывалась с законом постоянства состава, а атомная теория, на что указал Джон Дальтон (1766–1844), вполне была способна объяснить этот закон: соотношение весов каждого элемента, необходимое для образования соединения, соответствовало относительным весам соединяющихся атомов. Например, один атом натрия (Na) может соединяться с одним атомом хлора (Cl) и образовывать одну молекулу поваренной соли (NaCl), и в то же время вес одного атома натрия составляет 23/35 веса атома хлора. Измеряя относительные количества каждого элемента, необходимые для получения большого числа соединений, экспериментаторы установили относительные веса атомов. Самому легкому атому – водороду – был произвольно приписан относительный вес, равный единице; в этой

[1] В настоящее время, разумеется, атом уже не считается неделимым. Он состоит из ядра (содержащего протоны и нейтроны) и электронов (гл. 40–43, т. 2 настоящей книги).

шкале вес атома углерода близок к 12, кислорода – к 16, натрия – к 23 и т. д.[1)]

В настоящее время принято говорить не об относительных весах, а об относительных массах атомов и молекул, которые мы называем **атомной массой** и **молекулярной массой** соответственно[2)]. Эти величины устанавливаются так, что обычному атому углерода $C^{12}$ приписывается значение 12,0000 атомных единиц массы (а. е. м.). Тогда атомная масса водорода равна 1,0078 а. е. м., а значения для других атомов приведены в приложении Г.

Другим важнейшим экспериментальным подтверждением атомной теории служит так называемое *броуновское движение*, названное в честь биолога Роберта Броуна, который совершил свое открытие в 1827 г. Наблюдая в микроскоп за мельчайшими частицами пыльцы растений, взвешенными в воде, Броун заметил, что мелкие частицы перемещаются по извилистым траекториям, хотя окружающая их вода совершенно неподвижна. Атомная теория легко объясняет броуновское движение; для этого достаточно сделать еще одно логичное предположение о том, что атомы вещества находятся в состоянии непрерывного движения. Тогда становится ясно, что мельчайшие частицы пыльцы Броуна беспорядочно движутся под влиянием энергичного «обстрела» со стороны быстро движущихся молекул воды.

В 1905 г. Альберт Эйнштейн исследовал[3)] броуновское движение с теоретической точки зрения и смог на основе экспериментальных данных вычислить приблизительные размеры и массы атомов и молекул. Эти расчеты показали, что диаметр типичного атома равен приблизительно $10^{-10}$ м.

В начале гл. 12 мы установили различия между тремя обычными состояниями вещества – твердым, жидким и газообразным – на основании его *макроскопических*, или «крупномасштабных», свойств. Теперь рассмотрим, чем

---

[1)] Однако все обстоит не так просто. Например, исходя из различных соединений, образуемых кислородом, решено было, что его масса равна 16; но это не согласовывалось с отношением масс кислорода и водорода в воде (всего лишь 8 к 1). Эта трудность была разрешена, когда предположили, что для образования молекулы воды два атома H должны соединиться с одним атомом O. Для того чтобы создать непротиворечивую схему, пришлось признать, что и многие другие молекулы содержат более одного атома данного сорта.

[2)] Для обозначения этих величин иногда по-прежнему применяют термины *атомный вес* и *молекулярный вес*, однако правильно говорить следует о сравнении не весов, а масс.

[3)] Возможно, что Эйнштейн не был знаком с работой Броуна, и поэтому исходя из теоретических представлений независимо предсказал существование броуновского движения.

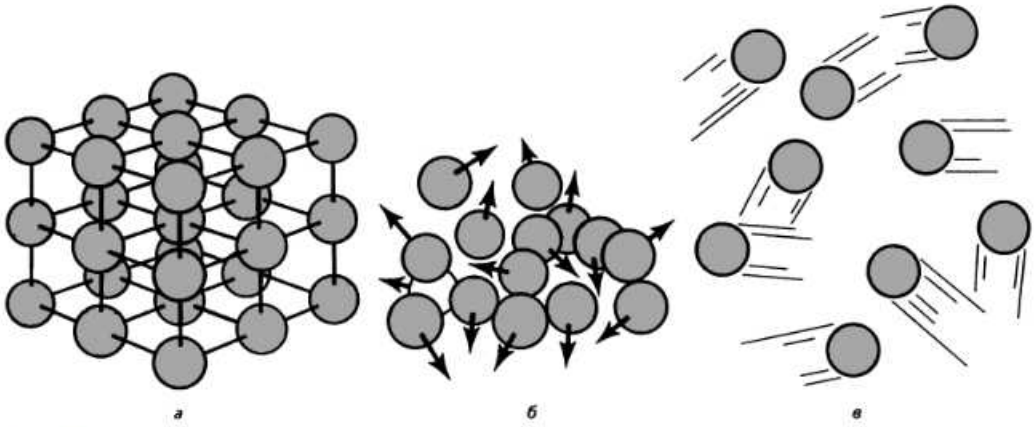



Рис. 17.1. Расположение атомов в кристаллическом твердом теле (*а*), жидкости (*б*) и газе (*в*).

эти три состояния вещества отличаются друг от друга с атомной, или микроскопической, точки зрения. Ясно, что атомы и молекулы притягиваются друг к другу. Иначе, каким же образом кусок алюминия мог бы сохраняться в виде монолитного куска? Эти силы (притяжения молекул) имеют электрическую природу (подробнее об этом мы раскажем в следующих главах). Однако если молекулы слишком близко подходят друг к другу, то сила их взаимодействия становится силой отталкивания, обусловленной отталкиванием их внешних атомных электронов. Таким образом, молекулы размещаются на некотором минимальном расстоянии друг от друга. В твердом веществе силы притяжения достаточно велики, так что атомы и молекулы удерживаются в более или менее фиксированных положениях, обычно в виде структуры, известной как кристаллическая решетка (рис. 17.1, *а*). Атомы и молекулы твердого тела находятся в движении – они колеблются около своих, почти фиксированных положений в кристаллической решетке. В жидкости атомы и молекулы движутся быстрее, т. е. силы взаимодействия между ними слабее, так что в жидкости эти частицы достаточно свободны и могут двигаться одна вокруг другой, как показано на рис. 17.1, *б*. В газе силы взаимодействия молекул и атомов столь слабы, а их скорости столь велики, что молекулы вообще не задерживаются близко друг от друга. Они быстро движутся, каждая по своей траектории (рис. 17.1, *в*), заполняя объем любого сосуда и иногда сталкиваясь друг с другом. Средние скорости молекул в газе настолько велики, что, когда молекулы сталкиваются, сила притяжения между ними оказывается недостаточно большой для того, чтобы удержать их вместе, и они разлетаются в направлениях, отличных от тех, которые они имели до столкновений.

## 17.2. Температура; термометры и температурные шкалы

В повседневной жизни с **температурой** мы связываем представление о горячем и холодном. О горячей печи говорят, что она имеет высокую температуру, в то время как холодный кусок льда имеет низкую температуру.

Многие свойства вещества изменяются в зависимости от температуры. Например, большинство материалов при нагревании расширяется. Нагретая железная балка длиннее холодной; при изменении температуры бетонные дороги и тротуары немного расширяются или сокращаются, и поэтому в них через правильные промежутки помещают упругие прокладки. С изменением температуры меняется электрическое сопротивление проводника (гл. 26, т. 2 настоящей книги). Изменяется также цвет тел, по крайней мере при высоких температурах; вы могли заметить, например, что нагревательный элемент электрической печи светится красным цветом, если он нагрет. При более высоких температурах твердые тела (например, железо) светятся оранжевым и даже белым. Белый свет от обычной лампочки накаливания излучается сильно раскаленным вольфрамовым проводником.

Прибор, предназначенный для измерения температуры, называется **термометром**. Имеется множество типов термометров, однако действие всех термометров основывается на одном и том же принципе, состоящем в том, что свойства вещества меняются при изменении температуры. Действие наиболее распространенных термометров основывается на расширении вещества с ростом температуры. В первом термометре, изобретенном Галилеем, использовалось расширение газа. В настоящее время широко распространены термометры, которые состоят из полой стеклянной трубки, заполненной ртутью или спиртом с добавленным в них красителем. При росте температуры жидкость расширяется сильнее, чем стекло; поэтому уровень жидкости в трубке повышается. Хотя металлы также расширяются при нагревании, изменение длины металлических предметов (например, железного стержня) обычно слишком мало для того, чтобы точно измерять обычные изменения температуры. Однако можно изготовить удобный в обращении термометр, соединив вместе два различных металла, которые с ростом температуры расширяются по-разному. Когда температура повышается, различная степень расширения этих металлов приводит к тому, что такая биметаллическая пластинка искривляется. Часто используется биметаллическая пластинка в виде спирали, один конец которой жестко закреплен, а другой присоединен к самописцу. Термометры такого типа используются обычно для измерения температуры воздуха в печах, а также в автомобилях в роли автоматической заслонки.

Чтобы измерить температуру количественно, необхо-

димо определить ту или иную числовую шкалу. В настоящее время наиболее употребительной является шкала *Цельсия*, иногда называется *стоградусной* шкалой. В США широко используется также шкала *Фаренгейта*. Основной шкалой, применяемой в физике, является абсолютная шкала, или шкала Кельвина (мы рассмотрим ее в разд. 17.7).

Один из способов создания температурной шкалы состоит в том, чтобы приписать произвольные значения двум легко воспроизводимым температурам. Как для шкалы Цельсия, так и для шкалы Фаренгейта этими фиксированными точками являются точка замерзания и точка кипения[1)] воды при атмосферном давлении. На шкале Цельсия точка замерзания воды выбрана равной 0 °C («нуль градусов Цельсия»), а точка кипения 100 °C. На шкале Фаренгейта точка замерзания равна 32 °F, а точка кипения 212 °F. Для практических целей термометр калибруют, помещая его в тщательно подготовленную окружающую среду, имеющую одну из этих температур, и отмечая положение столбика ртути или указателя в виде стрелки. На шкале Цельсия расстояние между обеими отметками делят затем на 100 равных интервалов, разделенных небольшими метками, соответствующими градусам Цельсия между 0 и 100 °C (поэтому название «стоградусная шкала» означает «сто шагов»). На шкале Фаренгейта эти точки соответствуют 32 и 212 °F, а расстояние между ними делится на 180 равных интервалов. Для температур, лежащих ниже точки замерзания и выше точки кипения воды, шкалы могут быть продолжены в ту или другую стороны с использованием тех же расположенных через равные промежутки интервалов. Однако обычные термометры можно применять только в ограниченном диапазоне температур из-за присущих им собственных ограничений; например, ртуть в стеклянном термометре становится твердой в некоторой точке ( – 39 °C), ниже которой ртутный термометр применять бесполезно. Он также будет бесполезен при температурах, при которых жидкость испаряется (для ртути это 357 °C). Чтобы можно было измерять очень низкие и очень высокие температуры, требуются специальные термометры; некоторые из них мы упомянем ниже.

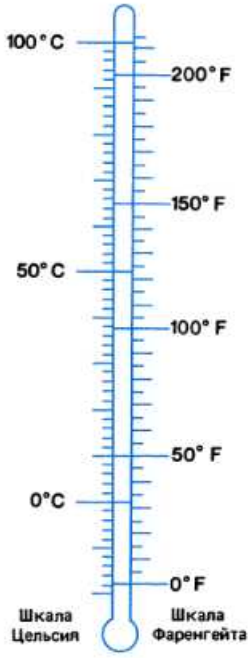



Рис. 17.2. Сравнение шкал Цельсия и Фаренгейта.

---

[1)] Точнее говоря, точка замерзания вещества определяется как такая температура, при которой твердая и жидкая фазы находятся в равновесии, т. е. без перехода жидкости в твердое состояние или наоборот. Экспериментально установлено, что при данном давлении такое состояние достигается лишь при одной определенной температуре. Аналогично точка кипения определяется как температура, при которой жидкость и газ находятся в состоянии равновесия. Поскольку эти температуры с изменением давления меняются, необходимо также зафиксировать и давление (обычно оно выбирается равным 1 атм).

Каждой температуре на шкале Цельсия соответствует определенная температура на шкале Фаренгейта (рис. 17.2). Нетрудно перейти от температуры на одной шкале к температуре на другой, если вспомнить, что 0 °C соответствуют 32 °F, а также то, что 100 градусов по шкале Цельсия соответствуют 180 градусам по шкале Фаренгейта. Таким образом, один градус Фаренгейта (1 °F) соответствует 100/180 = 5/9 градуса Цельсия. Получается, что 1 °F = (5/9) °C.

**Пример 17.1.** Нормальная температура тела человека равна 98,6 °F. Чему равна эта температура по шкале Цельсия?

**Решение.** Заметим сначала, что 98,6 °F на 98,6−32,0 = 66,6 °F выше точки замерзания воды. Поскольку каждый градус Фаренгейта равен (5/9) °C, это соответствует 66,6·(5/9) = 37,0 градусам Цельсия над точкой замерзания. Поскольку точка замерзания соответствует 0 °C, температура человеческого тела равна 37,0 °C.

## 17.3. Газовый термометр постоянного объема

Различные вещества расширяются в широком диапазоне температур не совсем одинаковым образом. Следовательно, если откалибровать различного рода термометры в точном соответствии с описанным выше способом, то их показания не совпадут полностью. Благодаря способу калибровки этих термометров их показания будут совпадать в точках 0 и 100 °C. Однако при промежуточных температурах из-за различной способности к расширению их показания могут быть неодинаковыми (вспомните, что мы произвольно разделили шкалу термометра на 100 равных промежутков между 0 и 100 °C). Таким образом, тщательно откалиброванный стеклянный термометр с ртутью может регистрировать температуру, например, 52,0 °C, в то время как тоже тщательно откалиброванный термометр другого типа может показывать 52,6 °C.

Из-за этого расхождения в показаниях необходимо выбрать некоторый стандартный тип термометра таким образом, чтобы эти промежуточные температуры можно было измерить точно. Применяемый для этих целей стандартный термометр называется *газовым термометром постоянного объема*. Этот термометр схематически показан на рис. 17.3; он состоит из колбы, заполненной разреженным газом, соединенной тонкой трубкой с ртутным манометром[1]. Поднимая или опуская трубку манометра, расположенную справа, можно поддерживать постоянным объем газа таким образом, чтобы ртуть в трубке слева совпадала с опорной меткой. Повышение температуры приводит к соответствующему росту дав-

[1] В действительности этот термометр устроен значительно сложнее, чем показанный здесь. Кроме того, в его показания приходится вводить множество поправок (например, на расширение или сжатие содержащей газ колбы).

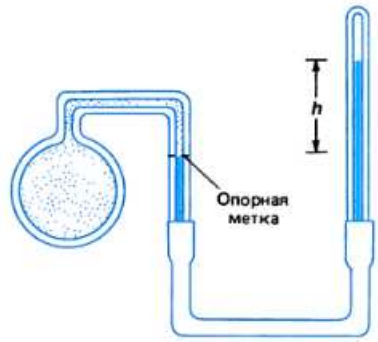



Рис. 17.3. Газовый термометр постоянного объема.

ления в колбе, и для поддержания постоянного объема газа колбу нужно поднять выше. При этом высота столбика ртути в правой трубке покажет значение температуры. Откалибровав этот термометр, мы получим термометр со стандартной шкалой температур. Главное достоинство такого термометра заключается в том, что при низких плотностях и давлениях все газы ведут себя одинаковым образом, и в пределе, когда давление газа стремится к нулю, газовый термометр постоянного объема при заполнении его любым газом позволяет измерять одну и ту же точную температуру. Таким образом, газовый термометр постоянного объема дает одинаковые показания независимо от используемого газа. Именно поэтому он был выбран для точного определения шкалы температур. Термометры и стандартную шкалу температур мы рассмотрим в разд. 17.11.

## * 17.4. Тепловое равновесие; нулевое начало термодинамики

Несмотря на то что понятием температуры мы часто пользуемся в повседневной жизни, в физике не вполне очевидно, насколько точно определенной и необходимой величиной является температура. Поэтому рассмотрим этот вопрос более подробно.

Говорят, что система находится в состоянии **теплового равновесия**, если переменные, которые описывают систему, одинаковы для всей системы[1)] и не меняются во времени. Действительно, если в данный момент времени система не находится в тепловом равновесии, то мы даже не можем приписать системе определенное значение температуры или давления. Например, если горшок с водой нагревать на кухонной плите, то температура воды в разных местах в горшке будет различной (она не будет вполне определенной и будет меняться) и мы не сможем определить температуру воды в целом, до тех пор пока

[1)] Иногда в этом случае говорят, что система находится в «тепловом равновесии сама с собой».

нагревание горшка не прекратится и вода постепенно не приобретет постоянную температуру. Только после этого вода в горшке придет в состояние теплового равновесия. Рассмотрим еще один пример, а именно длинную, заполненную воздухом трубу, закрытую с одного конца и снабженную подвижным поршнем с другого. Если вы быстро толкнете поршень на небольшое расстояние, то в этот момент давление прямо перед цилиндром будет выше, чем в остальных местах трубы; затем это сжатие распространится по трубе в виде волны давления. Поскольку такая волна движется по трубе туда и обратно, она в конечном счете затухает, и во всей трубе вновь установится постоянное давление; только тогда воздух в трубе придет в состояние теплового равновесия.

Рассмотрим теперь две различные системы, которые имеют разные давления и температуры. Если они отделены друг от друга так, что не взаимодействуют и поэтому не влияют друг на друга, то их различные давления и температуры могут сохраняться. Однако если между ними устанавливается контакт таким образом, что они воздействуют друг на друга, то говорят, что системы находятся в тепловом контакте[1]. Два куска металла, один из которых имеет температуру 300 °С, а другой 50 °С, влияют друг на друга, если находятся в состоянии теплового контакта: температура более горячего куска будет снижаться, в то время как температура более холодного будет расти до тех пор, пока температуры обоих кусков не станут одинаковыми. При этом два тела окажутся в состоянии *теплового равновесия друг с другом*. Предположим теперь, что имеются две отдельные системы, между которыми нет теплового контакта, и если бы между ними мы установили тепловой контакт, то каких-либо заметных перемен в их параметрах состояния не обнаружили бы. Про такие две отдельные системы говорят, что они находятся тоже в состоянии теплового равновесия. Таким образом, даже в отсутствие контакта друг с другом две системы могут находиться в состоянии теплового равновесия, если при возникновении теплового контакта между ними их состояние не изменится.

Для того чтобы определить, находятся ли две системы

---

[1] Считается, что идеально разделить две системы так, чтобы они не могли воздействовать друг на друга, можно при помощи *адиабатической стенки*; адиабатическая стенка, по существу, представляет собой идеальный тепловой изолятор, который не пропускает никаких потоков тепла. Однако если две системы приведены в состояние теплового контакта так, что они влияют друг на друга, то про них говорят, что они соединены *диатермальной стенкой*; диатермальная стенка является хорошим проводником тепла. Хорошей диатермальной стенкой была бы, например, тонкая металлическая пластинка.

$A$ и $B$ в состоянии теплового равновесия, нужно воспользоваться третьей системой $C$ (которую можно рассматривать как термометр). Предположим, что $C$ и $A$ находятся в состоянии теплового равновесия и, кроме того, в состоянии теплового равновесия находятся системы $C$ и $B$. Означает ли это, что $A$ и $B$ обязательно должны быть в состоянии теплового равновесия друг с другом? Очевидно, ответ на этот вопрос будет утвердительным. В действительности это не вполне очевидно; в конце концов, если Джейн любит Джорджа и Жанна любит Джорджа, то это не значит, что Джейн любит Жанну. Тем не менее наш повседневный опыт и великое множество экспериментов показывают, что для теплового равновесия это все-таки верно: *если две системы находятся в состоянии теплового равновесия с третьей системой, то они пребывают в состоянии теплового равновесия и друг с другом*. Этот постулат иногда называют **нулевым началом термодинамики**[1]. (Это начало имеет такой странный номер потому, что лишь после того, как были открыты великие первое и второе начала термодинамики, ученые осознали, что этот практически очевидный постулат нужно поставить впереди.)

Величина, которую мы назвали температурой, является свойством системы, которое определяет, будет ли система находиться в состоянии теплового равновесия с другими системами. Если две системы находятся в состоянии теплового равновесия, то их температуры по определению одинаковы. Это согласуется с нашими повседневными представлениями о температуре, поскольку, если горячее и холодное тела привести в состояние теплового контакта, они постепенно приобретут одну и ту же температуру. Таким образом, важная роль нулевого начала термодинамики состоит в том, что оно позволяет дать удобное определение температуры. Предположим, что нулевое начало термодинамики не выполняется. Это означает, что если системы $A$ и $C$ находятся в состоянии теплового равновесия и в таком же равновесии находятся системы $B$ и $C$, то системы $A$ и $B$ не будут в состоянии теплового равновесия. Данное обстоятельство приведет к тому, что при $T_A = T_C$ и $T_B = T_C$ мы будем иметь $T_A \neq T_B$, что, конечно, не имеет большого смысла, так что температура станет бесполезной переменной. Однако не существует ни одного эксперимента, противоречащего нулевому началу термодинамики, поэтому мы считаем, что оно выполняется, и, следовательно, использование температуры весьма полезно.

---

[1] Или свойством транзитивности состояния теплового равновесия.– *Прим. ред.*

## 17.5. Тепловое расширение

Большинство веществ при нагревании расширяется, а при охлаждении сокращается. Однако каждое вещество имеет свою, отличную от других степень расширения или сжатия.

Эксперименты показывают, что для большинства твердых тел изменение их длины $\Delta L$ в очень хорошем приближении прямо пропорционально изменению температуры $\Delta T$. Кроме того, можно ожидать, что изменение длины пропорционально также исходной длине тела $L_0$. Это значит, что при одинаковом изменении температуры железный стержень длиной 4 м удлинится в два раза больше, чем стержень длиной 2 м. Такую зависимость можно записать в виде уравнения

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T, \qquad (17.1)$$

где $\alpha$ (коэффициент пропорциональности) называется *коэффициентом линейного расширения* для данного материала и имеет единицу измерения $(C°)^{-1}$, что читается «на градус». В табл. 17.1 приведены значения $\alpha$ для различных материалов[1)] при температуре 20°C. Следует заметить, что коэффициент $\alpha$ также немного меняется с изменением температуры (поэтому показания термометров, изготовленных из различных материалов, точно не согласуются друг с другом). Однако если диапазон изменения температуры не слишком велик, то этим изменением можно пренебречь.

*Таблица 17.1.* Коэффициенты расширения при температуре 20 °C ($10^{-6}\,°C^{-1}$)

| Вещество | Коэффициент линейного расширения $\alpha$ | Коэффициент объемного расширения $\beta$ | Вещество | Коэффициент линейного расширения $\alpha$ | Коэффициент объемного расширения $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Твердые тела* | | | *Жидкости* | | |
| Алюминий | 25 | 75 | Бензин | | 950 |
| Латунь | 19 | 56 | Ртуть | | 180 |
| Железо и сталь | 12 | 35 | Этиловый спирт | | 1100 |
| Свинец | 29 | 87 | Глицерин | | 500 |
| Стекло (пирекс) | 3 | 9 | Вода | | 210 |
| Стекло (обычное) | 9 | 27 | *Газы* | | |
| Кварц | 0,4 | 1 | Воздух (и большинство других газов при атмосферном давлении) | | 3400 |
| Бетон и кирпич | $\approx 12$ | $\approx 36$ | | | |
| Мрамор | 1,4–3,5 | 4–10 | | | |

[1)] В некоторых кристаллических веществах коэффициент $\alpha$ имеет разные значения в разных направлениях, но этот вопрос мы рассматривать не будем.

**Пример 17.2.** На цилиндрический железный стержень нужно надеть плотно железное кольцо. При температуре 20 °С диаметр стержня равен 6,453 см, а внутренний диаметр кольца 6,420 см. До какой температуры нужно довести кольцо, чтобы отверстие в нем стало достаточно широким и кольцо налезло на стержень?

**Решение.** Диаметр отверстия в кольце должен быть увеличен с 6,420 до 6,453 см. Поскольку диаметр отверстия будет линейно увеличиваться с ростом температуры, кольцо нужно нагреть. [Заметим, что, расширяясь, вещество *не* заполняет отверстие. В твердом теле без отверстия все части тела (и кольца тоже) увеличивают в равной мере свой объем с ростом температуры. Наличие отверстия не влияет на ход этого процесса, поэтому при повышении температуры диаметр отверстия увеличивается.] Из выражения (17.1) находим

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L_0} = \frac{6{,}453\,\text{см} - 6{,}420\,\text{см}}{(12 \cdot 10^{-6}\,^\circ\text{C}^{-1})(6{,}420\,\text{см})} = 430\,^\circ\text{C}.$$

Это означает, что кольцо нужно нагреть по крайней мере до температуры 450 °С.

Изменение объема вещества при изменении температуры определяется выражением, аналогичным (17.1):

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T, \qquad (17.2)$$

где $\Delta T$ – изменение температуры, $V_0$ – исходный объем, $\Delta V$ – изменение объема, а $\beta$ – *коэффициент объемного расширения*. Величина $\beta$ измеряется в $(^\circ\text{C})^{-1}$. Значения $\beta$ для некоторых веществ приведены в табл. 17.1. Заметим, что в твердых телах коэффициент объемного расширения $\beta$, как правило, равен приблизительно $3\alpha$ (причина такой взаимосвязи станет ясной, если решить задачу 18 в конце настоящей главы), но это соотношение не выполняется, если твердое тело не является изотропным («изотропный» означает, что тело имеет одинаковые свойства во всех направлениях). Заметим также, что в жидкостях и газах из-за того, что они не имеют постоянной формы, понятие линейного расширения теряет смысл.

Выражения (17.1) и (17.2) выполняются точно только в том случае, когда $\Delta L$ или $\Delta V$ малы по сравнению с $L_0$ или $V_0$. Это особенно касается жидкостей и тем более газов, поскольку у них значения $\beta$ довольно велики. Кроме того, в газах так же велико изменение величины $\beta$ с температурой. Поэтому, когда имеют дело с газами, необходимо применять более удобные выражения; рассмотрим этот вопрос в конце главы, начиная с разд. 17.7.

**Пример 17.3.** Стальной бензобак автомобиля емкостью 70 л полностью заполнен бензином при температуре 20 °С. После этого автомобиль поставили на солнце, и бак разогрелся до 50° С. Сколько бензина вытечет из бака?

**Решение.** Бензин расширится на величину

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T =$$
$$= (950 \cdot 10^{-6}\,^\circ\text{C}^{-1})(70\ \text{л})(30\,^\circ\text{C}) = 2{,}0\ \text{л}.$$

Но бак при этом тоже расширится. Мы можем рассматривать бак как некоторую оболочку, которая претерпевает объемное расширение ($\beta \approx 3\alpha = 36 \cdot 10^{-6}\,^\circ\text{C}^{-1}$); но если эта оболочка изготовлена из твердого вещества, то ее внешний поверхностный слой должен также расшириться. Таким образом, объем бака увеличится на

$$\Delta V = (36 \cdot 10^{-6}\,^\circ\text{C}^{-1})(70\ \text{л})(30\,^\circ\text{C}) = 0{,}075\ \text{л},$$

что представляет собой незначительную величину. Таким образом, если такой полный бак оставить на солнце, то пара литров бензина вытечет на дорогу.

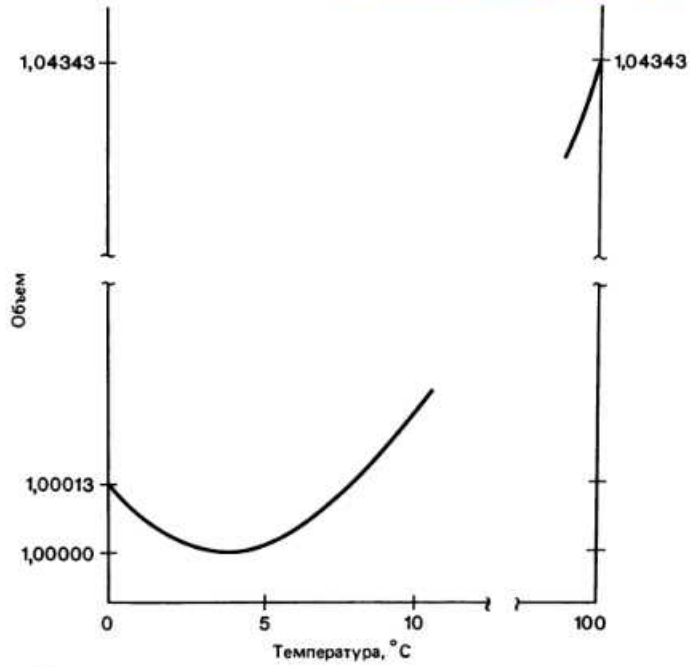



Рис. 17.4. Зависимость объема 1,00000 кг воды (в единицах $10^{-3}$ м$^3$) от температуры. (Обратите внимание на изменение масштаба шкалы.)

Большинство веществ при повышении температуры расширяется более или менее равномерно. Однако вода ведет себя необычно. Если нагревать воду при температуре 0 °С, то ее объем будет *уменьшаться* до тех пор, пока температура не достигнет 4 °С. При температурах выше 4 °С вода ведет себя нормальным образом и при повышении температуры расширяется (рис. 17.4). Таким образом, вода имеет наибольшую плотность при температуре 4 °С. Именно поэтому лед в озерах образуется сначала на поверхности воды. Когда вода охлаждается до температуры ниже 4 °С, более холодная вода, имеющая меньшую плотность, поднимается на поверхность (или остается там), в то время как более плотная вода с температурой 4 °С располагается внизу. Более холодная вода на поверхности водоемов замерзает первой, поскольку раньше достигает температуры ниже 0 °С.

Как можно объяснить тепловое расширение с микроскопической точки зрения? Предположим, что атомы в твердых телах постоянно движутся, совершая колебания около своих положений равновесия. Предположим также, что при повышении температуры их средняя кинетическая энергия увеличивается, как мы покажем в следующей главе. Означает ли это, что повышение температуры будет приводить к увеличению расстояния между атомами? Экспериментально показано, что твердый стержень, если повышать его температуру, становится длиннее; поэтому можно сделать вывод, что среднее расстояние между атомами должно увеличиваться. Чтобы понять это, рассмотрим типичную упрощенную кривую потен-

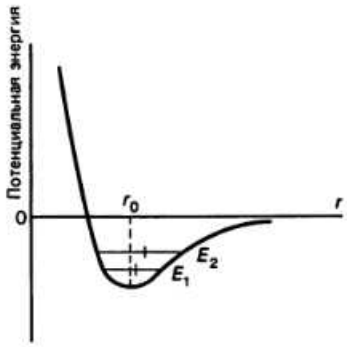



Рис. 17.5. Типичная кривая потенциальной энергии в зависимости от расстояния между атомами $r$ для атомов в кристаллическом твердом теле (упрощенное представление).

циальной энергии на рис. 17.5, которая описывает зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух атомов от расстояния $r$ между ними. Мы считаем, что при больших $r$ потенциальная энергия приблизительно равна 0, а при уменьшении $r$ потенциальная энергия также уменьшается, указывая на наличие силы притяжения, о чем было упомянуто в разд. 17.6. Когда $r$ становится меньше $r_0$ (положение равновесия), кривая потенциальной энергии идет вверх, указывая на наличие силы отталкивания. Горизонтальные линии на рис. 17.5, отмеченные буквами $E_2$ и $E_1$, показывают значения полной энергии при двух различных температурах $T_2$ и $T_1$, где $T_2 > T_1$. Короткие вертикальные линии на уровнях $E_1$ и $E_2$ соответствуют средним положениям атомов при этих температурах. Поскольку кривая потенциальной энергии не является симметричной, при более высоких температурах среднее расстояние между атомами будет больше, что и показано на рис. 17.5. Таким образом, тепловое расширение связано с несимметричностью кривой потенциальной энергии. Если бы кривая потенциальной энергии была симметричной, то тепловое расширение отсутствовало бы вовсе. Интересно, как выглядит кривая потенциальной энергии для воды при температурах от 0 до 4 °С?

## * 17.6. Тепловые напряжения

В некоторых случаях бывает так, что изготовленные из какого-либо материала стержни или пластинки жестко закреплены на концах, так что расширение или сжатие здесь невозможно. Если в этих случаях температура будет изменяться, то возникнут большие напряжения сжатия или растяжения, которые называют иногда *тепловыми напряжениями*. Величина этих напряжений может быть вычислена, если использовать выражения для модуля упругости, рассмотренные в гл. 11. Чтобы вычислить внутреннее напряжение, представим себе, что процесс расширения происходит в два этапа. Стержень расширяется (или сокращается) на $\Delta L$ в соответствии с выражением (17.1), после чего необходимо приложить силу, чтобы сжать (или растянуть) материал до его первоначальной длины. Эту силу $F$ можно вычислить с помощью формулы (11.4):

$$\Delta L = \frac{1}{E}\frac{F}{A}L_0,$$

где $E$ – модуль Юнга данного материала. Чтобы вычислить внутреннее напряжение $F/A$, подставим это выражение для $\Delta L$ (в 17.1) и найдем

$$\alpha L_0 \Delta T = \frac{1}{E}\frac{F}{A}L_0.$$

**Пример 17.4.** Блоки из бетона длиной 10 м расположены вплотную друг к другу, так что между ними отсутствуют зазоры для расширения. Если блоки разместить таким образом при температуре 10 °С, то чему будет равна сила сжатия, когда температура повышается до 40 °С? Площадь контакта двух блоков равна 0,20 м$^2$. Выдержит ли бетон такую нагрузку или произойдет его разрушение?

**Решение.** Преобразуем выражение, записанное перед этим примером, таким образом, чтобы получить выражение для $F$, и подставим в него значение $E$ из табл. 11.1:

$$F = \alpha \Delta T E A = [12 \cdot 10^{-6} (^\circ\text{C})^{-1}](30\,^\circ\text{C}) \times$$
$$\times (20 \cdot 10^9\ \text{Н/м}^2)(0{,}20\ \text{м}^2) = 1{,}4 \cdot 10^6\ \text{Н}.$$

Напряжение $F/A$ равно $(1{,}4 \cdot 10^6\ \text{Н})/(0{,}20\ \text{м}^2) = 7{,}0 \cdot 10^6\ \text{Н/м}^2$. Это значение близко к предельной прочности бетона при сжатии (табл. 11.2) и превосходит прочность бетона на растяжение и сдвиг. Следовательно, учитывая то, что бетонные блоки расположены не вполне параллельно, часть силы будет создавать напряжение сдвига, и весьма вероятно, что бетон разрушится.

## 17.7. Газовые законы и абсолютная температура

Выражение (17.2) не всегда подходит для описания расширения газа, поскольку газы могут расширяться весьма значительно и, кроме того, газы расширяются, как правило, до полного заполнения содержащего их сосуда. И в самом деле, ведь выражение (17.2) применимо только в том случае, когда давление поддерживается постоянным. Объем же газа существенно зависит от давления и от температуры. Поэтому необходимо найти соотношение между объемом, давлением, температурой и массой газа. Такое соотношение называется **уравнением состояния**[1].

Если состояние системы изменяется, мы будем ждать до тех пор, пока давление и температура выравняются, т. е. пока они не достигнут одинаковых значений во всей системе. Таким образом, мы рассматриваем только равновесные состояния газа. Заметим также, что результаты, полученные в этом разделе, выполняются точно только для газов с достаточно низкой плотностью (давление не слишком велико, порядка 1 атм или меньше) и находящихся не слишком близко к их точке конденсации (кипения).

Экспериментально было обнаружено, что для данного количества газа в хорошем приближении выполняется следующее соотношение: *при постоянной температуре объем газа обратно пропорционален приложенному к нему давлению*. Таким образом,

$V \sim 1/P$ [постоянная температура].

[1] Можно придумать уравнение состояния также для твердых тел и жидкостей, поскольку их объем тоже зависит от массы, температуры и внешнего давления (хотя воздействие температуры и давления значительно слабее, чем в газах). Однако, поскольку твердые тела и жидкости имеют сложное строение, вопрос об уравнении состояния для них оказывается значительно более сложным.

Например, если давление, действующее на газ, увеличится вдвое, то объем уменьшится до половины первоначального. Это соотношение известно как *закон Бойля*,[1] оно названо в честь Роберта Бойля (1627–1691), который первым установил его на основании своих собственных экспериментов. Закон Бойля можно также записать в следующем виде:

$PV = \text{const}$ [постоянная температура].

Это означает, что при постоянной температуре, если изменится либо давление, либо объем газа, другая величина также изменится, но при этом произведение $PV$ останется постоянным.

Температура также влияет на объем газа, однако количественное соотношение между $V$ и $T$ не было установлено на протяжении более чем столетия после открытия закона Бойля. Французский ученый Жак Шарль (1746–1823) обнаружил, что, если давление не слишком велико и поддерживается постоянным, объем газа увеличивается с ростом температуры примерно по линейному закону, как показано на рис. 17.6, *а*. Однако при низких температурах все газы становятся жидкостями (например, кислород сжижается при температуре $-183\,^{\circ}\text{C}$), и поэтому график на рис. 17.6, *а* нельзя продолжить за точку, при которой происходит сжижение, или конденсация. Тем не менее этот график является, по существу, прямой линией, и если продолжить его до более низких температур (что показано на рисунке штриховой линией), то он пересечет ось при температуре около $-273\,^{\circ}\text{C}$.

Такого рода графики могут быть построены для любого газа, и во всех случаях продолжение прямой пересечет линию нулевого объема (ось температур) при температуре $-273\,^{\circ}\text{C}$. Отсюда можно было бы сделать вывод, что если бы газ удалось охладить до температуры $-273\,^{\circ}\text{C}$, то его объем стал бы равен нулю, а при более низких температурах газ имел бы отрицательный объем (что, разумеется, лишено физического смысла). Это привело к предположению о том, что температура $-273\,^{\circ}\text{C}$ является, возможно, наименьшей достижимой температурой. Множество современных экспериментов свидетельствует о том, что это действительно так. Эту температуру называют *абсолютным нулем* температуры. Согласно измерениям его значение равно приблизительно $-273{,}15\,^{\circ}\text{C}$.

Абсолютный нуль температуры лежит в основе шкалы температур, называемой **абсолютной** или **шкалой Кельвина**. Эта шкала широко применяется в научных исследованиях. По этой шкале температура измеряется в граду-

---

[1] Этот закон называют также законом Бойля – Мариотта. Э. Мариотт (1620–1684) – французский физик, член Парижской Академии наук, который независимо от Р. Бойля (1662 г.) пришел к этому закону в 1676 г. – *Прим. ред.*

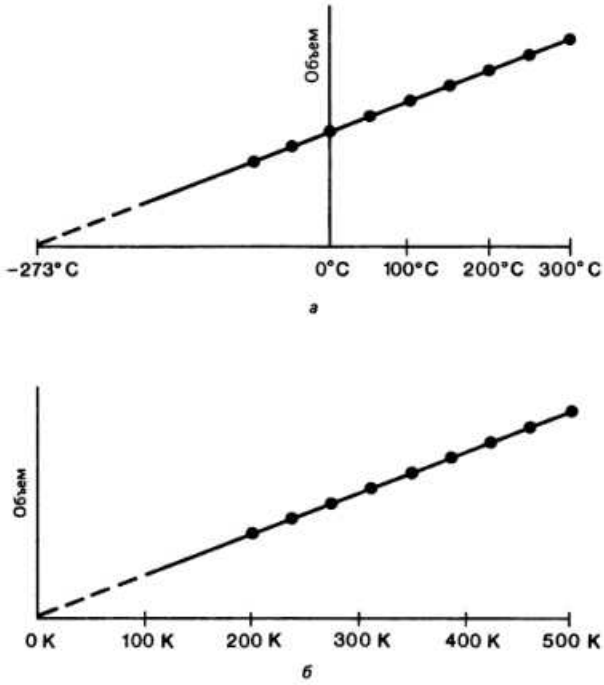



Рис. 17.6. Объем газа как функция температуры по шкале Цельсия (*а*) и температуры по шкале Кельвина при постоянном давлении (*б*).

сах Кельвина, а правильнее просто в кельвинах (К) без знака градуса. Интервалы на этой шкале те же самые, что и на шкале Цельсия, т. е. цена деления (или градус) у них одинакова, однако нуль на шкале Кельвина (0 К) выбран равным абсолютному нулю температуры. Таким образом, точка замерзания воды (0 °С) имеет температуру 273,15 К, а точка кипения – температуру 373,15 К. Действительно, любая температура по шкале Цельсия может быть переведена в кельвины простым добавлением к ней числа 273,15:

$$T(\text{К}) = T(^\circ\text{C}) + 273{,}15.$$

Позднее мы обсудим эту шкалу более подробно.

Рассмотрим теперь график на рис. 17.6, *б*, где можно видеть, что зависимость объема газа от абсолютной температуры представляет собой, по существу, прямую линию. Таким образом, в хорошем приближении выполняется следующее соотношение: *при постоянном давлении объем данного количества газа прямо пропорционален абсолютной температуре*. Это называется *законом Шарля* и может быть записано следующим образом:

$$V \sim T \qquad \text{[постоянное давление]}.$$

Третий газовый закон, известный как *закон Гей-Люссака*, назван в честь Жозефа Гей-Люссака (1778–1850). Этот закон гласит, что *при постоянном объеме давление газа прямо пропорционально абсолютной температуре:*

$$P \sim T \qquad \text{[постоянный объем]}.$$

Хорошо известным примером действия этого закона является то, что если закрытый сосуд или баллон аэрозоля бросить в огонь, он взорвется, потому что давление газа внутри возрастет. На этом соотношении основано также действие газового термометра постоянного объема (разд. 17.3).

Законы Бойля, Шарля и Гей-Люссака в действительности не являются законами в том смысле, в котором этим термином пользуются в настоящее время. Эти «законы» являются всего лишь приближениями, хорошо выполняющимися в реальных газах только до тех пор, пока давление и плотность газа не слишком велики, а температура газа не слишком близка к температуре, когда газ переходит в конденсированное состояние; к сожалению, слово «закон» в применении к этим трем соотношениям стало традиционным, и мы будем его придерживаться.

## 17.8. Закон идеального газа

Газовые законы Бойля, Шарля и Гей-Люссака были получены с помощью очень полезного научного метода, состоящего в том, что одна или более переменных поддерживаются постоянными, чтобы четко проследить за тем, к чему приводит изменение лишь одной переменной. Теперь эти законы можно объединить в одно более общее соотношение между давлением, объемом и температурой, которое справедливо для определенного количества газа:

$$PV \sim T.$$

Это соотношение показывает, как любая из величин $P$, $V$ и $T$ будет изменяться при изменении остальных двух величин. Оно переходит в законы Бойля, Шарля и Гей-Люссака в том случае, когда фиксируются соответственно температура, давление и объем.

Наконец, мы должны учесть влияние количества (или массы) газа. Каждому, кто хоть однажды надувал воздушный шарик, известно, что, чем больше воздуха вдувается в шарик, тем больше становятся его размеры. Действительно, точные эксперименты показывают, что при постоянной температуре и постоянном давлении замкнутый объем $V$ увеличивается прямо пропорционально массе газа. Следовательно, можно записать

$$PV \sim mT.$$

Эта пропорциональная зависимость связывает между собой все существенные для газа величины. Если включить сюда коэффициент пропорциональности, то мы получим определенное равенство. Эксперименты показывают, что в разных газах этот коэффициент различен. Однако коэффициент пропорциональности станет одинаковым для всех газов, если вместо массы $m$ использовать число

молей; один **моль** определяется как количество вещества, которое содержит столько атомов или молекул, сколько их содержится в 0,012 кг углерода-12 (углерода, масса которого точно равна 12 а. е. м.). Согласно более простому, но полностью эквивалентному данному выше определению моля, число граммов вещества, содержащееся в одном моле, равно молекулярной массе вещества. Например, молекулярная масса водорода ($H_2$) равна 2,0 а. е. м. (поскольку каждая молекула содержит два атома водорода и каждый атом имеет атомную массу 1,0 а. е. м.). Таким образом, один моль $H_2$ равен 0,0020 кг. Аналогично масса 1 моля газа неона равна 0,010 кг, а масса 1 моля $CO_2$ равна $(12 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3}$ кг = 0,044 кг. Моль является официальной единицей системы СИ. Иногда используется единица киломоль (кмоль), а именно количество килограммов, численно равное молекулярной массе вещества: 1 кмоль = $10^3$ моль.

Представим теперь записанную выше пропорциональную зависимость в виде следующего равенства:

$$PV = nRT, \tag{17.3}$$

где $n$ – число молей, а $R$ – коэффициент пропорциональности. Величина $R$ называется *универсальной газовой постоянной*, поскольку эксперимент показывает, что ее значение является одинаковым для всех газов; на сегодняшний день самое точное значение этой величины равно

$$R = 8{,}31441 \pm 0{,}00026 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

В других (иногда используемых) системах единиц универсальная газовая постоянная имеет следующие (округленные) значения:

$$\begin{aligned} R &= 8{,}314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} = \quad \text{[единицы СИ]} \\ &= 0{,}0821 \text{ л} \cdot \text{атм/(моль} \cdot \text{К)} = \\ &= 1{,}986 \text{ кал/(моль} \cdot \text{К)}. \end{aligned}$$

Здесь лишь значение в первой строке дается в единицах СИ. Равенство (17.3) называется **законом идеального газа** или **уравнением состояния идеального газа**. Здесь слово «идеальный» используется потому, что реальные газы не подчиняются этому закону полностью, особенно при высоких давлениях или в том случае, когда газ близок к точке перехода в жидкое состояние. Однако при давлениях порядка 1 атм или ниже и при температурах, далеких от точки кипения вещества, уравнение (17.3) можно считать достаточно точным. (Более точное уравнение состояния реальных газов мы рассмотрим в разд. 18.6.)

Закон идеального газа играет очень важную роль в физике и является чрезвычайно полезным в различного рода исследованиях. Рассмотрим теперь некоторые примеры его применения. Мы часто будем употреблять выражение «нормальные условия» или «нормальные температура и давление», что означает $T = 273$ К (0°C) и $P = 1{,}00$ атм $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Н/м$^2$.

**Пример 17.5.** Определите объем 1 моля любого газа в нормальных условиях, считая, что газ ведет себя как идеальный.

**Решение.** Найдем $V$ из уравнения (17.3):

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1{,}00\ \text{моль})(8{,}31\ \text{Дж/моль}\cdot\text{К})(273\ \text{К})}{(1{,}01\cdot 10^5\ \text{Н/м}^2)} = 22{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3.$$

Поскольку 1 л равен 1000 см$^3$ = $1\cdot 10^{-3}$ м$^3$, то объем 1 моля любого газа при нормальных условиях равен 22,4 л.

Следует запомнить значение объема одного моля газа при нормальных условиях (22,4 л), поскольку в некоторых случаях это упрощает расчеты, как видно из следующего примера.

**Пример 17.6.** Сосуд с гибкими стенками, содержащий кислород ($O_2$) при нормальных условиях, имеет объем 10,0 м$^3$. Чему равна масса газа, заключенного в сосуде?

**Решение.** Поскольку 1 моль занимает объем $22{,}4\cdot 10^{-3}$ м$^3$, объем 10,0 м$^3$ соответствует $(10{,}0)/(22.4\cdot 10^{-3}) = 446$ моль кислорода. Так как масса одного моля кислорода равна 0,0320 кг, масса кислорода в сосуде равна (446 моль)(0,0320 кг/моль) = 14,3 кг.

Во многих случаях объем измеряется в литрах, а давление – в атмосферах. Вместо того чтобы переводить эти единицы в систему СИ, можно пользоваться приведенным выше значением $R = 0{,}0821$ л·атм/моль·К. Во многих случаях пользоваться значением $R$ совсем не обязательно. Так обстоит дело, например, во многих задачах, в которых рассматриваются изменения давления, температуры и объема при постоянном количестве газа. В этом случае $PV/T = nR = \text{const}$, поскольку величины $n$ и $R$ остаются постоянными. Если теперь обозначить параметры, описывающие начальное состояние газа, через $P_1$, $V_1$ и $T_1$, а параметры состояния газа после происшедшего изменения через $P_2$, $V_2$ и $T_2$, то можно написать следующее соотношение:

$$P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2.$$

Если нам известны любые пять величин в этом уравнении, то нетрудно найти и шестую.

**Пример 17.7.** Шина автомобиля была накачена при температуре 10°С до избыточного давления 200 кПа. После того как автомобиль проехал 100 км, температура в шине повысилась до 40°С. Каким теперь стало давление внутри шины?

**Решение.** Поскольку объем шины остается практически постоянным, т.е. $V_1 = V_2$, имеем

$$P_1/T_1 = P_2/T_2.$$

Это один из видов записи закона Гей-Люссака. Поскольку измеряемое давление в шине представляет собой избыточное давление, нужно добавить атмосферное давление 101 кПа, чтобы получить абсо-

лютное давление $P_1 = 301$ кПа. Тогда

$$P_2 = \frac{P_1}{T_1} T_2 = \frac{(3{,}01 \cdot 10^5 \text{ Па})(313 \text{ К})}{283 \text{ К}} = 3{,}33 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Вычитая атмосферное давление, мы найдем новое значение избыточного давления, а именно 232 кПа, что на 15% выше первоначального. Этот пример показывает, почему рекомендуется измерять давление в шинах, когда они холодные.

## 17.9. Закон идеального газа на молекулярном уровне; число Авогадро

То, что постоянная $R$ имеет одно и то же значение для всех газов, представляет собой замечательное отражение простоты природы. Это впервые осознал, хотя и в несколько другой форме, итальянский ученый Амедео Авогадро (1776–1856). Авогадро установил, что *равные объемы газа при одинаковых давлении и температуре содержат одинаковое число молекул*. Это положение иногда называют *гипотезой Авогадро*. То, что это положение связано с постоянством $R$ во всех газах, мы покажем ниже. Во-первых, из формулы (17.3) вдно, что если различные газы содержат одно и то же число молей $n$ и имеют одинаковые давления и температуры, то при условии постоянного $R$ газы будут занимать один и тот же объем. Во-вторых, число молекул в одном моле для всех газов одно и то же, что непосредственно следует из определения моля[1]. Таким образом, гипотеза Авогадро эквивалентна утверждению о том, что величина $R$ постоянна для всех газов.

Число молекул в одном моле называется **числом Авогадро** $N_A$. Хотя Авогадро и сделал такое наблюдение, определить значение $N_A$ реально он не мог. Действительно, с точными измерениями пришлось подождать до двадцатого столетия. Для измерения $N_A$ применяется несколько методов, и в настоящее время установлено, что число Авогадро равно

$$N_A = (6{,}022045 \pm 0{,}000031) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1},$$

или округленно

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Поскольку общее число молекул $N$ газа равно числу молекул в одном моле, умноженному на число молей

[1] Например, молекулярная масса водорода $H_2$ равна 2,0 а.е.м., в то время как масса кислорода $O_2$ равна 32,0 а.е.м. Таким образом, масса одного моля $H_2$ равна 0,0020 кг, а масса одного моля $O_2$ равна 0,032 кг. Число молекул в одном моле равно общей массе $M$ моля, деленной на массу $m$ одной молекулы, а поскольку по определению моля отношение $M/m$ одинаково для всех газов, моль любого вещества должен содержать одно и то же число молекул.

($N = nN_A$), закон идеального газа (17.3) можно переписать через число молекул, содержащихся в газе:

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A} RT,$$

или

$$PV = NkT, \tag{17.4}$$

где $k = R/N_A$ называется *постоянной Больцмана* и имеет значение

$$k = \frac{R}{N_A} = (1{,}380662 \pm 0{,}000044) \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К},$$

или округленно

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

**Пример 17.8** Используя значение числа Авогадро, определите массу атома водорода.

**Решение.** Один моль водорода (атомная масса водорода равна 1,008) имеет массу $1{,}008 \cdot 10^{-3}$ кг и содержит $6{,}02 \cdot 10^{23}$ атомов. Поэтому масса одного атома равна

$$m = \frac{1{,}008 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Исторически получилось так, что обратный расчет стал одним из методов определения $N_A$ на основании измеренного значения массы атома водорода.

**Пример 17.9.** Сколько молекул вы вдыхаете, если при одном вдохе получаете 1,0 л воздуха?

**Решение.** Объем одного моля равен 22,4 л (см. пример 17.5). Следовательно, 1,0 л воздуха равен $1/22{,}4 = 0{,}045$ моль. Тогда 1,0 л воздуха содержит (0,045 моль) $\times$ $\times (6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}) = 2{,}7 \cdot 10^{22}$ молекул.

## 17.10. Парциальное давление

В случае когда один и тот же объем занимают два или более газов, полное давление равно сумме парциальных давлений отдельных газов. *Парциальное давление* газа определяется как давление этого газа, если бы он один занимал весь объем. Этот экспериментальный закон был получен Дальтоном и называется *законом Дальтона для парциальных давлений*. Согласно этому закону, *каждый газ в смеси создает парциальное давление, пропорциональное его молекулярной концентрации*. Это положение согласуется с законом идеального газа (17.4). Предположим, что у нас есть смесь трех газов, состоящая из $N_1$, $N_2$ и $N_3$ молекул каждого газа соответственно. Полное давление запишется в виде

$$P = NkT/V,$$

где $N$ – общее число молекул $N = N_1 + N_2 + N_3$. При этом мы имеем

$$P = N_1kT/V + N_2kT/V + N_3kT/V = P_1 + P_2 + P_3,$$

где $P_1$, $P_2$ и $P_3$ – парциальные давления каждого из трех газов,

а отношения $N_1/V$, $N_2/V$ и $N_3/V$ – их концентрации. Таким образом, полное давление равно сумме парциальных давлений, а каждое парциальное давление пропорционально молекулярной концентрации.

Например, сухой воздух состоит из 78% (по объему) азота, 21% кислорода и из очень небольшого количества аргона и других газов. При общем давлении воздуха 1 атм парциальное давление кислорода равно 0,21 атм, а азота – 0,78 атм.

## * 17.11. Температурная шкала идеального газа; стандартный термометр

Очень важно иметь точно определенную шкалу температур, чтобы измерения температуры, выполненные в различных лабораториях, давали однозначные результаты и их можно было сравнить. Рассмотрим такую шкалу, которая принята учеными большинства стран.

Стандартным термометром для определения этой шкалы является газовый термометр постоянного объема, рассмотренный в разд. 17.3. Сама шкала называется *температурной шкалой идеального газа*, поскольку она основана на том свойстве идеального газа, согласно которому давление газа прямо пропорционально его абсолютной температуре (закон Гей-Люссака). При низких плотностях реальный газ, если его использовать в любом реальном газовом термометре постоянного объема, по своим свойствам приближается к идеальному газу. Иными словами, температура в любой точке пространства *определяется* как величина, пропорциональная давлению (почти) идеального газа, используемого в термометре. Чтобы создать шкалу, нам потребуются две фиксированные точки. Одна фиксированная точка соответствует $P = 0$ при $T = 0$ К, а в качестве второй фиксированной точки выбирают *тройную точку* воды, которая может быть воспроизведена в различных лабораториях с большой точностью. Тройная точка воды представляет собой точку, в которой вода в твердом, жидком и газообразном состояниях может находиться в равновесии. Это имеет место только при определенных значениях температуры и давления[1]. Давление в тройной точке воды равно 4,58 мм рт.ст., а температура равна приблизительно 0,01°С. Эта температура соответствует примерно 273,16 К (поскольку абсолютный нуль – это около −273,15°С). Действительно тройная точка теперь *определяется* как такая, температура которой равна точно 273,16 К. (Заметьте снова, что знак градуса у буквы К отсутствует.)

[1] Жидкая вода и пар могут сосуществовать (точка кипения) в целом интервале температур, зависящем от давления. При низком давлении вода кипит при более низкой температуре, как это происходит, например, в горах. Тройная точка представляет собой более точно воспроизводимую точку отсчета, чем точка замерзания или кипения воды при давлении, например, 1 атм.

Абсолютная температура, или температура по шкале Кельвина $T$, в любой точке определяется при помощи газового термометра постоянного объема следующим образом:

$$T = (273{,}16\ \text{К})\left(\frac{P}{P_{\text{тр.т}}}\right) \quad \text{[идеальный газ; постоянный объем]}. \tag{17.5а}$$

В этом соотношении $P_{\text{тр.т}}$ есть не что иное, как давление в термометре при температуре тройной точки воды, а $P$ представляет собой давление в термометре, когда он находится в точке, где нужно определить температуру $T$. Заметим, что если в этом соотношении положить $P = P_{\text{тр.т}}$, то $T = 273{,}16$ К, как и должно быть.

Если пользоваться определением температуры в соответствии с формулой (17.5а) и измерять температуру газовым термометром постоянного объема, заполненным реальным газом (это единственное, что мы можем сделать, поскольку полностью идеальный газ в природе не существует), то обнаружим, что в зависимости от сорта газа, применяемого в термометре, будут получаться различные значения температуры. Температуры, определяемые этим способом, зависят также от количества газа в колбе термометра; например, если использовать газовый термометр, заполненный кислородом $O_2$, то с помощью формулы (17.5а) мы найдем, что температура точки кипения воды при давлении 1,00 атм равна 373,87 К, если $P_{\text{тр.т}} = 1000$ мм рт.ст. Если количество кислорода в колбе уменьшить таким образом, чтобы в тройной точке $P_{\text{тр.т}}$ равнялось 500 мм рт. ст., то расчеты по формуле (17.5а) дадут температуру кипения воды 373,15 К. Если же вместо кислорода использовать водород $H_2$, то соответствующие значения температуры кипения воды окажутся равными 373,07 и 373.11 К (рис. 17.7). Предположим теперь, что мы используем конкретный реальный газ и выполняем серии измерений, в которых количество газа в колбе термометра постепенно уменьшается таким образом, что $P_{\text{тр.т}}$ становится все меньше и меньше. Экспериментально было обнаружено, что экстраполяция результатов этих измерений до $P_{\text{тр.т}} = 0$ всегда дает одно и то же значение температуры данной системы (например, $T = 373{,}15$ К для точки кипения воды при давлении 1,00 атм), как показано на рис. 17.7. Таким образом, температура в любой точке пространства, измеряемая при помощи газового термометра постоянного объема, содержащего реальный газ, определяется через это предельное значение:

$$T = (273{,}16\ \text{К}) \lim_{P_{\text{тр.т}} \to 0} (P/P_{\text{тр.т}}) \quad \text{[постоянный объем]}. \tag{17.5б}$$

Это определение *температурной шкалы идеального газа*. Одно из самых больших приемуществ этой шкалы заклю-

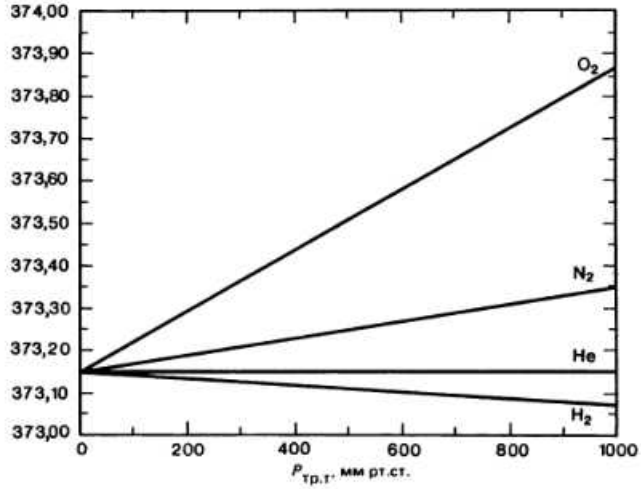



Рис. 17.7. Показания температуры (отложены по оси ординат в кельвинах) газового термометра постоянного объема для точки кипения воды при давлении 1,00 атм для различных газов как функция давления газа в термометре в тройной точке ($P_{тр.т}$). Обратите внимание, что количество газа в термометре сокращается так, что при $P_{тр.т} \to 0$ все газы дают одно и то же показание, а именно 373,15 К. При давлениях меньше 0,10 атм (76 мм рт. ст.) показанные изменения температуры меньше чем 0,07 К.

чается в том, что значение температуры $T$ не зависит от вида применяемого в термометре газа. Однако шкала, вообще говоря, все же зависит от свойств газов. Из всех газов гелий имеет самую низкую температуру конденсации. При очень низких давлениях он становится жидким при температуре около 1 К, поэтому на этой шкале нельзя определить более низкие температуры.

Было бы удобно иметь шкалу, которую можно было бы использовать при температурах ниже 1 К и которая была бы также независима от свойств любого применяемого вещества. Такая шкала имеется; она основана на некоторых термодинамических свойствах, которые мы рассмотрим в гл 21. Она называется абсолютной термодинамической шкалой, и, строго говоря, только эта шкала может называться шкалой Кельвина и указывать температуру в кельвинах. Однако она совпадает с температурной шкалой идеального газа почти во всем интервале температур, в котором ее можно использовать ($> 1$ К).

Заметим в заключение, что определение температуры при помощи температурной шкалы идеального газа весьма затруднительно и требует много времени. Поэтому создана «Международная практическая температурная шкала», которой проще пользоваться на практике и которая дает результаты, с достаточно высокой точностью совпадающие с температурной шкалой идеального газа. Эта шкала состоит из большого числа фиксированных температур различных точек (таких, как температуры кипения и замерзания различных веществ), и для нее указаны способы определения промежуточных температур.

## Заключение

Атомная теория вещества постулирует, что все вещества состоят из мельчайших частиц, называемых *атомами*. Средний диаметр атома равен $10^{-10}$ м. *Атомные и молекулярные массы* измеряются при помощи единиц, в которых обычному атому углерода $^{12}C$ произвольно приписано значение 12,0000 а.е.м. (атомных единиц массы). Различие между твердым, жидким и газообразным состояниями данного вещества объясняется тем, что вещество в этих состояниях имеет различные силы притяжения между атомами и молекулами, а также различные средние скорости атомов и молекул.

*Температура* является мерой того, в какой степени тело является горячим или холодным. Для измерения температуры используются *термометры* со шкалами Цельсия (°C), Фаренгейта (°F) и Кельвина (К). На каждой из этих шкал выбираются две точки отсчета, одна из которых представляет собой точку замерзания воды (0°C, 32°F, 273,15 К), а другая – точку кипения воды (100°C, 212°F, 373,15 К). Изменение температуры на один кельвин равно изменению на один градус Цельсия или на 9/5 градуса Фаренгейта.

Изменение длины $\Delta L$ твердого тела при изменении температуры на $\Delta T$ прямо пропорционально изменению температуры и первоначальной длине твердого тела $L_0$. Таким образом, $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$, где $\alpha$ – коэффициент линейного расширения. Изменение объема большинства твердых тел, жидкостей и газов пропорционально изменению температуры и исходному объему $V_0$: $\Delta V = \beta V_0 \Delta T$; в твердых телах коэффициент объемного расширения $\beta$ равен приблизительно $3\alpha$. Вода является необычным веществом, поскольку в отличие от большинства веществ, объем которых увеличивается при повышении температуры, ее объем уменьшается с температурой в интервале от 0 до 4°C.

*Закон идеального газа*, или *уравнение состояния идеального газа*, связывает между собой давление $P$, объем $V$ и температуру $T$ (в кельвинах) $n$ молей газа соотношением

$$PV = nRT,$$

где $R = 8{,}314$ Дж/моль·К для всех газов. Реальные газы подчиняются закону идеального газа достаточно точно в том случае, если их давление не слишком высоко и они находятся далеко от точки конденсации, или сжижения. Один *моль* вещества определяется как число граммов, которое численно равно его атомной или молекулярной массе. *Число Авогадро* $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ представляет собой число атомов или молекул в 1 моле любого чистого вещества. Закон идеального газа можно записать через число молекул $N$ газа следующим образом:

$$PV = NkT,$$

где $k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Закон парциальных давлений Дальтона утверждает,

что каждый газ в смеси создает парциальное давление, пропорциональное молекулярной концентрации этого газа; полное давление является суммой парциальных давлений.

## Вопросы

1. Что содержит больше атомов: 1 кг алюминия или 1 кг железа (см. приложение Г в т. 2 настоящей книги)?
2. Предположим, что шкала температур определена не линейно, а через квадрат какого-либо свойства вещества: $T = ax^2$. Пусть $x$ – это длина $L$ столба ртути в ртутном термометре. Обсудите проблемы, с которыми придется столкнуться при использовании такой шкалы.
*3. Допустим, что система $C$ не находится в равновесии ни с системой $A$, ни с системой $B$. Означает ли это, что системы $A$ и $B$ не находятся в равновесии между собой? Что вы думаете о температурах систем $A$, $B$ и $C$?
4. Если система $A$ находится в равновесии с системой $B$, но $B$ не находится в равновесии с системой $C$, то что можно сказать о температурах систем $A$, $B$ и $C$?
5. На рис. 17.8 показан типичный термостат, используемый для контроля температуры в печи (или в другом нагревающем или охлаждающем устройстве). Биметаллическая пластинка представляет собой соединенные вместе две пластины из различных металлов. Объясните, почему эта пластинка при изменении температуры искривляется и каким образом это искривление используется для контроля за температурой в печи.
6. Круглое кольцо нагрели от 20 до 80°С. Станет ли отверстие в кольце больше или меньше? Объясните это с микроскопической (молекулярной) точки зрения.
7. Чему соответствует параметр $L_0$ в соотношении $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$, начальной длине или конечной длине, или это не имеет значения?
8. Объясните, почему порой снять плотно закрытую крышку сосуда бывает проще после прогрева ее под струей горячей воды.
9. Длинные паровые трубы часто имеют участок U-образной формы. Почему?
10. Почему неправильно говорить, что воздух расширяется со скоростью 3,4 мл/л на градус Цельсия? Когда это утверждение верно?
11. Известно, что камины нагреваются, когда в них поддерживают огонь. Почему дымоходы не используются в качестве каркаса зданий или сооружений?
12. Объясните, почему добавлять воду в перегревшийся автомобильный двигатель следует очень медленно и только при работающем двигателе.
13. Стеклянный сосуд может расколоться, если одну из его частей нагреть или охладить быстрее, чем другие части. Объясните.
14. Основным преимуществом тугоплавкого стекла (пирекса) является то, что коэффициент линейного расширения у него значительно меньше, чем у обычного стекла (табл. 17.1). Объясните, почему это приводит к повышению термостойкости тугоплавкого стекла.
15. Почему можно считать, что спиртовой термометр определяет температуру с более высокой точностью, чем ртутный термометр?
16. Если холодный ртутный термометр поместить в емкость с горячей водой, то уровень ртути сначала немного снизится, а затем будет расти. Объясните.
17. Плоская биметаллическая пластинка состоит из алюминиевой пластинки, прикрепленной к железной. Какой из металлов при нагревании окажется на внешней стороне изгиба?
18. Объясните, почему реки замерзают сначала на поверхности.
19. Как вы думаете, какая температура будет у воды на дне глубокого холодного озера? (*Подсказка*: см. рис. 17.4.)
20. Увеличится или уменьшится выталкивающая сила, действующая на алюминиевую сфе-




Рис. 17.8. Типичный термостат.

ру, погруженную в воду, если температура воды увеличится с 20 до 40 °C?

21. При температуре 0 °C плоский однородный цилиндр из свинца плавает в ртути. Погрузится или всплывет цилиндр, если температура увеличится?

22. Какая шкала Фаренгейта, Цельсия или Кельвина может считаться наиболее «естественной» с научной точки зрения? Поясните ваш ответ.

23. Если, согласно измерениям, масса атома равна $6{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг, то какой это атом, по вашему мнению?

* 24. Имеет ли существенное значение с практической точки зрения то, какой газ используется в газовом термометре постоянного объема? Если имеет, то объясните почему. (*Подсказка*: см. рис. 17.7.)

## Задачи

Раздел 17.1

1. (I) Определите массу золотого слитка, в котором содержится то же количество атомов, что и в слитке железа массой 1 кг.

Раздел 17.2

2. (I) а) «Комнатную температуру» часто принимают равной 68 °F. Чему равна эта температура в градусах Цельсия? б) Температура нити в лампе накаливания приблизительно равна 1800 °C; какова эта температура по шкале Фаренгейта?

3. (I) Первоначальная температурная шкала Цельсия [согласно Андерсу Цельсию (1701–1744)] была установлена таким образом, что температура замерзания воды равнялась 100°, а температура кипения воды была равна 0°. Какой температуре на этой шкале соответствует температура 25 °C?

4. (I) При температуре 0,0 °C столбик спирта в стеклянном термометре имеет длину 12,45 см, а при температуре 100,0 °C – длину 21,30 см. Определите температуру в случае, когда длина столбика равна а) 15,10 см; б) 22,95 см.

5. (II) При какой температуре шкала Фаренгейта и стоградусная шкала дадут одно и то же численное значение?

Раздел 17.5

6. (I) Бетонная автострада уложена из блоков длиной 26 м. Какой ширины должны быть зазоры между блоками, чтобы за счет теплового расширения автострада не искривлялась, если температура может изменяться в пределах от −20 до +50 °C?

7. (I) Стальная рулетка для точных измерений откалибрована при температуре 20 °C. а) Какие показания будет давать такая рулетка при температуре 40 °C – завышенные или заниженные? б) Какова ошибка в процентах?

8. (I) Во сколько раз изменятся коэффициенты линейного расширения в табл. 17.1, если температуру измерять по шкале Фаренгейта?

9. (II) Чтобы избежать разрывов частей механизмов, часто используют заклепки, размер которых больше размеров отверстий. Для этого перед помещением заклепки в отверстие ее охлаждают (обычно при помощи сухого льда). Стальную заклепку диаметром 2,385 см нужно вставить в отверстие диаметром 2,382 см. До какой температуры нужно охладить заклепку, чтобы она подошла к отверстию, имеющему температуру 20 °C?

10. (II) Плотность ртути при температуре 20 °C равна $13{,}59 \cdot 10^3$ кг/м$^3$. Какова ее плотность при температуре 65 °C?

11. (II) Однородная прямоугольная пластинка длиной $l$ и шириной $w$ имеет коэффициент линейного расширения $\alpha$. Покажите, что если пренебречь очень малыми величинами, то изменение площади пластинки, обусловленное изменением температуры $\Delta T$, дается выражением $\Delta A = 2\alpha l w \Delta T$.

12. (II) Железная сфера имеет диаметр 28,0 см. На сколько изменится ее объем, если сферу нагреть от 20 до 200 °C?

13. (II) Маятник часов изготовлен из твердой латуни. При температуре 25 °C период его колебаний равен 1,12 с и часы показывают правильное время. Пока владельцы часов были в зимнем отпуске в течение двух недель, средняя температура в доме была равна −5 °C. Насколько ошибочными будут показания часов к моменту возвращения владельцев? Будут часы отставать или уйдут вперед?

14. (II) а) Покажите, что изменение плотности $\rho$ вещества при изменении температуры на $\Delta T$ дается выражением $\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T$. б) Чему равно относительное изменение плотности свинцовой сферы, температура которой понизилась от 30 до −30 °C?

15. (II) Температура стержня, имеющего начальную длину $L_1$, изменяется от $T_1$ до $T_2$. Выведите выражение для его новой длины $L_2$ через $T_1$, $T_2$ и $\alpha$. Предположите, что а) величина $\alpha$ постоянна, б) величина $\alpha$ является некоторой функцией температуры, т.е. $\alpha = \alpha(T)$, и в) $\alpha = \alpha_0 + bT$, где $\alpha_0$ и $b$ – постоянные.

16. (II) Латунная втулка помещена в кольцо, сделанное из железа. При комнатной температуре диаметр втулки равен 9,12 см, а внут-

ренний диаметр кольца – 9,095 см. Какова должна быть температура этих деталей, чтобы втулка точно вписалась в кольцо?

17. (II) Жидкость заключена в длинный узкий сосуд так, что она может расширяться, по существу, лишь в одном направлении. Покажите, что в этом случае коэффициент линейного расширения $\alpha$ приблизительно равен коэффициенту объемного расширения $\beta$.

18. (II) Покажите, что в изотропном твердом теле при малой величине расширения выполняется соотношение $\beta = 3\alpha$, где $\beta$ и $\alpha$ – коэффициенты объемного и линейного расширения соответственно.

19. (II) В обычном, наполненном до краев стакане находится 288,3 мл воды при температуре 10 °C. Сколько воды вытечет из стакана (если вообще вытечет), если температура увеличится до 30 °C?

20. (II) Получите формулу для изменения площади поверхности однородной твердой сферы радиусом $r$, если коэффициент ее линейного расширения равен $\alpha$ (он считается постоянным), а температура ее изменилась на величину $\Delta T$. б) На сколько увеличится площадь поверхности твердой железной сферы радиусом 88,0 см, если температура ее возрастет от 20 до 200 °C?

21. (III) При температуре 0 °C железный куб плавает в чаше с жидкой ртутью. а) Если температура повысилась до 30 °C, то погрузится или всплывет куб в ртути? б) На сколько процентов изменится объем погруженной части куба?

22. (III) В подшипнике без трения твердое железное цилиндрическое колесо массой 12,4 кг и радиусом 0,45 м вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 32{,}8$ рад/с. Каково будет относительное изменение $\omega$, если температура повысится от 20 до 80 °C?

23. (III) а) Внутренний диаметр трубки ртутного термометра равен 0,120 мм. Его колба имеет объем 0,250 см$^3$. На сколько передвинется уровень ртути, если температура повысится от 10 до 20 °C? Учтите в ваших расчетах расширение стекла (пирекса). б) Выведите формулу для длины столба ртути через соответствующие переменные.

*Раздел 17.6

24. (I) При какой температуре сила сжатия бетона превзойдет предельное значение в блоках, рассмотренных в примере 17.4?

25. (II) а) Горизонтальная стальная двутавровая балка площадью поперечного сечения 0,016 м$^2$ жестко соединена с двумя вертикальными стальными фермами. Балка была смонтирована при температуре 25 °C. Какое напряжение возникнет в балке, когда температура упадет до – 14 °C? б) Будет ли превышен предел прочности стали? в) Какое напряжение возникнет в балке, если она сделана из бетона, а поперечное сечение ее равно 0,13 м$^2$? Сломается ли балка?

26. (II) Винную бочку диаметром 122,860 см нужно стянуть железным ободом при температуре 20 °C. Внутренний диаметр обода равен 122,848 см при температуре 20 °C. Ширина его равна 8,7 см, а толщина – 0,55 см. а) До какой температуры нужно нагреть обод, чтобы он наделся на бочку? б) Каково будет напряжение в ободе, когда он охладится до температуры 20 °C?

Раздел 17.7

27. (I) Определите значения следующих температур по шкале Кельвина: а) 37 °C; б) 80 °F; в) – 196 °C.

28. (I) *Шкала температур Ренкина* соотносится со шкалой Фаренгейта так же, как шкала Кельвина со шкалой Цельсия. Это значит, что величина градуса на этой шкале такая же, как на шкале Фаренгейта, а нуль сдвинут так, что 0 °R совпадает с абсолютным нулем температур. Определите температуру а) точки замерзания и б) точки кипения воды в градусах Ренкина. в) Какова температура абсолютного нуля в градусах Фаренгейта?

29. (II) Типичные температуры внутри Земли и Солнца приблизительно равны $4 \cdot 10^3$ и $1{,}5 \cdot 10^7$ °C соответственно. а) Каковы эти температуры в кельвинах? б) Если человек забыл заменить градусы Цельсия на кельвины, то какую относительную ошибку (в процентах) он совершил?

Раздел 17.8

30. (I) Газ, занимающий объем 5,00 м$^3$, сначала находился при нормальных условиях, затем давление было увеличено до 4,0 атм, а температура возросла до 25 °C. Чему теперь будет равен объем газа?

31. (I) Давление гелия, находящегося в цилиндре, первоначально было равно 30 атм. После того как этим гелием надули множество баллонов, его давление уменьшилось до 6 атм. Какая доля первоначального количества газа осталась в цилиндре?

32. (II) Запишите закон идеального газа через плотность газа.

33. (II) Вычислите плотность кислорода при нормальных условиях, пользуясь законом идеального газа.

34. (II) Емкость для хранения азота $N_2$ содержит 25,7 кг этого газа при абсолютном давлении 2,60 атм. Определите давление в емкости, если азот будет замещен равным по массе количеством углекислого газа ($CO_2$).

35. (II) Емкость содержит 28,0 кг кислорода ($O_2$) при избыточном давлении 6,70 атм. Кислород заменен на гелий. Сколько килограммов последнего потребуется для создания избыточного давления 8,25 атм?

36. (II) Газообразный гелий количеством 8,10 моль находится при температуре 20 °C и избыточном давлении 0,190 атм. Вычислите: а) объем газообразного гелия при этих условиях; б) температуру в случае, когда объем газа уменьшится в два раза при избыточном давлении 2,10 атм.

37. (II) Дом имеет объем 600 м$^3$. а) Какова полная масса воздуха внутри дома при температуре 0 °C? б) Если температура повысилась до 25 °C, то какая масса воздуха войдет в дом или выйдет из него?

38. (II) Определите давление внутри сосуда емкостью 20 л, содержащего 24 кг аргона при температуре 20 °C.

39. (II) Шина заполнена воздухом при температуре 15 °C с избыточным давлением 190 кПа. Если температура шины повысилась до 40 °C, то какую долю исходного количества воздуха нужно удалить из шины, чтобы поддерживать первоначальное давление 190 кПа?

40. (II) Если 50,0 л кислорода, находящегося при температуре 10 °C и абсолютном давлении 1,88 атм, сжать до объема 36,6 л и в то же время повысить его температуру до 80 °C, то чему будет равно его новое давление?

41. (II) Аквалангист, находясь на глубине 12 м от поверхности воды, вдохнул воздух и заполнил весь объем своих легких, равный 5,5 л. До какого объема расширятся его легкие, если он быстро вынырнет на поверхность? Благоразумно ли поступать таким образом?




Рис. 17.9.

42. (II) Морская декомпрессионная камера для ныряльщиков представляет собой простой перевернутый цилиндр, открытый снизу. Эта камера показана на рис. 17.9. Когда она полностью погружена вблизи поверхности воды, объем заключенного в камере воздуха равен 8,2 м$^3$, а температура равна 25 °C. а) Какова должна быть минимальная масса цилиндра, чтобы он не всплывал? б) Предположите, что реальная масса цилиндра равна его минимальной массе, определенной в п. „а". Цилиндр опустили на глубину 50 м, где температура равна 12 °C. Каково будет напряжение удерживающего цилиндр кабеля? (Воздух в цилиндр не добавлялся и не выходил из него.) Считайте, что воздух (в действительности специальная газовая смесь для ныряльщика) ведет себя как идеальный газ, что его весом можно пренебречь, а морская вода имеет постоянную плотность $1{,}025 \cdot 10^3$ кг/м$^3$.

43. (II) Получите формулу для коэффициента объемного расширения $\beta$ идеального газа при постоянном давлении через величины $P$, $V$, $T$ и (или) $n$.

44. (II) Подъемная сила воздушного шара достигается за счет того, что воздух внутри баллона нагревают и плотность его становится меньше плотности окружающего воздуха. Допустим, что объем воздушного шара равен 1500 м$^3$, а необходимая подъемная сила равна 2500 Н (согласно грубой оценке веса оборудования и пассажира). Вычислите температуру воздуха внутри воздушного шара, при которой создается необходимая подъемная сила. Считайте, что температура окружающего воздуха равна 0 °C и воздух при этих условиях является идеальным газом. Какие факторы ограничивают максимальную высоту подъема шара при таком методе создания подъемной силы и при данной нагрузке? (Изменениями состояния воздуха, например ветром, пренебрегите.)

45. (II) Воздушный пузырек на дне озера глубиной 16 м имеет объем 1,10 см$^3$. Температура на дне равна 5 °C, а на поверхности 16 °C. Определите объем пузырька в тот момент, когда он достигнет поверхности воды.

46. (II) Сравните значение плотности водяного пара при температуре 100 °C и давлении 1 атм со значением, полученным на основании закона идеального газа. Почему эти значения должны отличаться друг от друга?

Раздел 17.9

47. (I) Вычислите число молекул в 1 м$^3$ идеального газа при нормальных условиях.

48. (I) Сколько молей содержится в 1,000 л воды? А сколько молекул?

49. (II) Самое низкое давление, получаемое с помощью самой совершенной вакуумной техники, приблизительно равно $10^{-12}$ Н/м$^2$. Сколько молекул содержится при таком давлении в 1 см$^3$ при температуре 0 °С?

50. (II) Если известно значение атмосферного давления на поверхности Земли, то чему будет равно полное число молекул воздуха в земной атмосфере?

51. (II) Кубический сосуд объемом $8{,}0 \cdot 10^{-3}$ м$^3$ заполнен воздухом при атмосферном давлении и температуре 20 °С. Сосуд закрыт и нагрет до температуры 150 °С. Какая результирующая сила будет действовать на каждую из граней кубического сосуда?

Раздел 17.10

52. (II) Парциальное давление углекислого газа ($CO_2$) в легких приблизительно равно 35 мм рт. ст., что несколько выше давления окружающего воздуха. Каково процентное содержание $CO_2$ в воздухе в легких?

*Раздел 17.11

*53. (I) В точке кипения серы (444,6 °С) давление в газовом термометре постоянного объема равно 187 мм рт. ст. Оцените: а) давление в тройной точке воды; б) температуру в тот момент, когда давление в термометре равно 112 мм рт. ст.

*54. (I) Каково предельное отношение давления в точке кипения воды при давлении 1 атм к давлению в тройной точке в газовом термометре постоянного объема? (Сделайте пять необходимых рисунков.)

*55. (II) С помощью рис. 17.7 определите ошибку в показаниях газового термометра постоянного объема, в котором используется кислород, если в точке кипения воды при давлении 1 атм он показывает давление $P =$ = 268 мм рт. ст. Выразите ответ а) в кельвинах; б) в процентах.

56. (II) Газовый термометр постоянного объема используется для определения температуры плавления вещества. Давление в термометре при этой температуре равно 218 мм рт. ст. В тройной точке воды давление в термометре стало равным 286 мм рт. ст. Некоторое количество газа удалено теперь из колбы термометра, и в тройной точке воды он показывает давление 163 мм рт. ст. При температуре плавления вещества давление в термометре равно 128 мм рт. ст. Оцените с максимально возможной точностью температуру точки плавления вещества.

# 18 Кинетическая теория

**Кинетическая теория** изучает свойства веществ, рассматривая их состоящими из атомов, которые находятся в непрерывном хаотическом движении. В этой главе мы исследуем свойства газов с точки зрения кинетической теории, которая основана на законах классической механики. Однако применять законы Ньютона по отдельности к каждой из огромного числа молекул газа (больше $10^{25}$ в 1 м$^3$ при нормальных условиях) не способен даже современный компьютер. Вместо этого мы изберем статистический подход и определим средние значения некоторых величин. Эти средние значения соответствуют макроскопическим переменным. Разумеется, нам нужно потребовать, чтобы микроскопическое описание соответствовало макроскопическим свойствам газов; иначе наша теория будет стоить немногого.

Вычислим сначала давление газа через его молекулярные характеристики. Мы придем также к важному соотношению между средней кинетической энергией молекул газа и абсолютной температурой. Затем мы продолжим изучение других свойств газов с точки зрения кинетической теории.

## 18.1. Закон идеального газа и температура с микроскопической точки зрения

Сделаем следующие допущения относительно молекул газа. Эти допущения, хотя и соответствуют упрощенным представлениям о свойствах газа, достаточно хорошо описывают существенные особенности реальных газов, которые находятся при низком давлении и далеки от точки сжижения, или конденсации. При этих условиях поведение газов почти правильно описывается законом идеального газа, и, действительно, мы будем рассматривать такой газ как *идеальный*. В основе кинетической теории лежат следующие постулаты. 1) Имеется большое число молекул $N$ с массой $m$ каждая, движущихся в случайных направлениях с различными скоростями. Это предположение согласуется с нашим наблюдением того, что газ заполняет весь предоставленный ему объем сосуда; воздушная атмосфера вокруг Земли удерживается

вокруг нее только благодаря действию силы тяжести. 2) В среднем молекулы далеко отстоят друг от друга; это значит, что разделяющее их расстояние значительно превосходит диаметр каждой молекулы. 3) Предполагается, что молекулы подчиняются законам классической механики и вступают во взаимодействие друг с другом лишь при столкновениях. Хотя в промежутках между столкновениями молекул друг с другом и действуют силы притяжения, соответствующая этим силам потенциальная энергия мала по сравнению с кинетической энергией движения молекул; мы будем пренебрегать ею. 4) Столкновения молекул друг с другом или со стенкой сосуда являются абсолютно упругими, подобно столкновениям абсолютно упругих бильярдных шаров (см. гл. 8). Мы считаем, что столкновения происходят за очень короткие промежутки времени по сравнению с временем между столкновениями, так что потенциальной энергией столкновений можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией движения частиц между столкновениями.

Можно сразу понять, каким образом это кинетическое рассмотрение газа позволяет объяснить закон Бойля: давление газа на стенку сосуда обусловлено тем, что эта стенка подвергается постоянной бомбардировке молекулами; если объем уменьшается, например, вдвое, то молекулы оказываются на более близких расстояниях друг от друга и число ударов молекул о стенку данной площади в секунду увеличится в нашем примере в два раза. Следовательно, можно ожидать, что давление увеличится в два раза, а это и есть закон Бойля.

Вычислим теперь давление газа на основе кинетической теории. Для этого представим себе, что молекулы содержатся в прямоугольном сосуде, грани которого имеют площадь $A$, а длина его ребер равна $l$, как показано на рис. 18.1. Согласно нашей модели, давление газа на стенки сосуда обусловлено столкновениями молекул с ними. Рассмотрим стенку площадью $A$ с левой стороны сосуда и выясним, что происходит, когда одна молекула ударяется о нее как показано на рис. 18.2. Эта молекула действует на

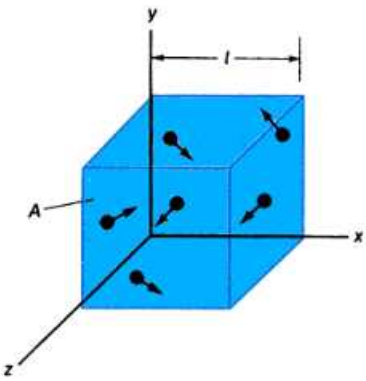



Рис. 18.1. Движение молекул газа в кубическом сосуде.

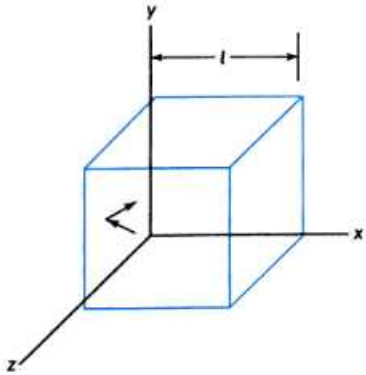



Рис. 18.2. Стрелки показывают импульс молекулы в тот момент, когда она отскакивает от стенки сосуда.

стенку, а та в свою очередь действует на молекулу с равной по величине и противоположной по направлению силой. Величина этой силы, согласно второму закону Ньютона, равна скорости изменения импульса молекулы, т. е. $F = dp/dt$. В силу предположения о том, что столкновение является абсолютно упругим, изменяется лишь $x$-составляющая импульса молекулы от $-mv_x$ (молекула движется в отрицательном направлении оси $x$) до $+mv_x$. Таким образом, изменение импульса $\Delta(mv)$, которое равно разности конечного и начального импульсов, для одного столкновения запишется в виде

$$\Delta(mv) = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x .$$

Эта молекула будет много раз сталкиваться со стенкой, причем столкновения будут происходить через промежуток времени $\Delta t$ – время, которое требуется молекуле для того, чтобы пересечь сосуд и вернуться назад, т. е. пройти расстояние $2l$. Таким образом, $2l = v_x \Delta t$, или $\Delta t = 2l/v_x$. Промежуток времени $\Delta t$ между столкновениями очень мал, поэтому за одну секунду совершается множество столкновений. При этом средняя сила (усредненная по многим столкновениям) будет равна силе, действующей при одном столкновении, деленной на время, прошедшее между столкновениями (второй закон Ньютона):

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2l/v_x} = \frac{mv_x^2}{l} \quad \text{[на одну молекулу]}.$$

Во время движения по сосуду туда и обратно молекула может сталкиваться с верхними и боковыми его стенками, однако $x$-составляющая ее импульса при этом останется без изменения и, следовательно, полученный нами результат останется прежним. Кроме того, молекула может также столкнуться с другими молекулами, что может изменить составляющую ее скорости $v_x$; однако любое уменьшение (или приращение) импульса передается другой молекуле, и, поскольку в конце концов мы будем

суммировать по всем молекулам, этот эффект будет учтен; полученный выше результат не изменится.

Конечно, реальная сила, действующая со стороны одной молекулы, имеет скачкообразный характер, но, поскольку в единицу времени о стенку ударяется огромное число молекул, сила является в среднем почти постоянной. Для того чтобы вычислить силу, действующую со стороны *всех* молекул в сосуде, необходимо просуммировать вклады от каждой из них. Таким образом, средняя результирующая сила, действующая со стороны молекул на стенку, запишется в виде

$$F = \frac{m}{l}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots + v_{xN}^2),$$

где $v_{x1}$ – это скорость $v_x$ частицы с номером 1 (и т. д.), а суммирование проводится по общему числу $N$ молекул. Запишем теперь среднее значение квадрата $x$-составляющей скорости:

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots + v_{xN}^2}{N}. \tag{18.1}$$

Таким образом, среднюю силу можно записать как

$$F = (m/l)\, N\, \overline{v_x^2}.$$

Известно, что квадрат любого вектора равен сумме квадратов его составляющих (теорема Пифагора). Поэтому для любой скорости $v$ имеем $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Взяв средние значения, получим

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}.$$

Поскольку мы предполагаем, что скорости молекул рассматриваемого газа распределены хаотически, не имеется какого-либо привилегированного направления движения. Следовательно,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2},$$

и поэтому

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}.$$

Подставим это выражение в формулу для средней силы $F$:

$$F = \frac{m}{l} N \frac{\overline{v^2}}{3}.$$

Тогда давление на стенку запишется в виде

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{v^2}}{Al}$$

или

$$P = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{v^2}}{V}, \tag{18.2}$$

где $V = Al$ – объем сосуда. Это и есть искомое выражение для давления газа, записанное через свойства отдельных молекул.

Выражение (18.2) можно записать в более наглядном виде, умножив обе его части на $V$ и несколько преобразовав правую часть:

$$PV = \frac{2}{3}N\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right). \tag{18.3}$$

Величина $(1/2)m\overline{v^2}$ представляет собой среднюю кинетическую энергию молекул газа. Сравнивая формулу (18.3) с законом идеального газа (17.4), мы видим, что они согласуются между собой, если

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = kT,$$

или

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT; \tag{18.4}$$

здесь $k$ – постоянная Больцмана (см. гл. 17), причем $k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Из соотношения (18.4) следует, что *средняя кинетическая энергия движения молекул газа прямо пропорциональна абсолютной температуре*. Согласно кинетической теории, чем выше температура, тем больше средняя скорость движения молекул. Это соотношение является одним из триумфальных достижений кинетической теории.

**Пример 18.1.** Какова средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа при температуре 37 °С?

**Решение.** Воспользуемся соотношением (18.4) и заменим 37 °С на 310 К. Тогда средняя кинетическая энергия (КЭ) будет равна

$$\overline{\text{КЭ}} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К})(310\ \text{К}) = 6{,}42 \cdot 10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Соотношение (18.4) указывает на то, что по мере приближения температуры к абсолютному нулю кинетическая энергия молекул также стремится к нулю. Однако современная квантовая теория утверждает, что это не совсем так. В действительности при приближении к абсолютному нулю кинетическая энергия стремится к очень небольшому, отличному от нуля минимальному значению. Несмотря на то что все реальные газы становятся

жидкими или твердыми при температуре выше 0 К, молекулярное движение не прекращается даже при температуре абсолютного нуля.

Формулу (18.4) можно использовать для вычисления средней скорости движения молекул. Заметим, что в выражениях (18.1)–(18.4) усредняются *квадраты* скоростей. Квадратный корень из $\overline{v^2}$ называется среднеквадратичной скоростью $v_{\text{ср.кв}}$ (поскольку мы извлекаем квадратный *корень* из *среднего* квадрата скорости):

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT/m}. \tag{18.5}$$

*Поскольку скорость* $\bar{v}$ получается усреднением абсолютных величин самих скоростей, она, как правило, не равна $v_{\text{ср.кв}}$. Различие между средней скоростью и среднеквадратичной скоростью можно понять на следующем примере.

**Пример 18.2.** Восемь частиц имеют следующие скорости (м/с): 1,0; 6,0; 4,0; 2,0; 6,0; 3,0; 2,0 и 5,0. Вычислим а) среднюю скорость и б) среднеквадратичную скорость.

**Решение.** а) Средняя скорость вычисляется следующим образом:

$$\bar{v} = \frac{1{,}0 + 6{,}0 + 4{,}0 + 2{,}0 + 6{,}0 + 3{,}0 + 2{,}0 + 5{,}0}{8} =$$

$$= 3{,}6 \text{ м/с}.$$

б) Среднеквадратичная скорость равна

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{1{,}0^2 + 6{,}0^2 + 4{,}0^2 + 2{,}0^2 + 6{,}0^2 + 3{,}0^2 + 2{,}0^2 + 5{,}0^2}{8}} =$$

$$= 4{,}1 \text{ м/с}.$$

В этом примере мы видим, что $\bar{v}$ и $v_{\text{ср.кв}}$ не обязательно равны друг другу. Действительно, для идеального газа они различаются приблизительно на 8%. В следующем разделе мы покажем, каким образом вычисляется $\bar{v}$ для идеального газа; для вычисления $v_{\text{ср.кв}}$ мы уже имеем формулу (18.5).

**Пример 18.3.** Какова среднеквадратичная скорость молекул воздуха при комнатной температуре (20 °С)?

**Решение.** При расчетах формулу (18.5) нужно применять отдельно к основным составляющим воздуха (кислороду и азоту), поскольку они имеют разные массы. Используя значение массы атома водорода из примера 17.8, получаем следующие значения массы одной молекулы $O_2$ (молекулярная масса = 32 а. е. м.) и $N_2$ (молекулярная масса = 28 а. е. м.):

$$m(O_2) = (32)(1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) =$$

$$= 5{,}3 \cdot 10^{-26} \text{ кг},$$

$$m(N_2) = (28)(1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) =$$

$$= 4{,}7 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Таким образом, для кислорода находим

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3)(1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К})(293 \text{ К})}{5{,}3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}}} =$$

$$= 480 \text{ м/с}.$$

Среднеквадратичная скорость молекул азота равна 510 м/с. (Это больше чем 1500 км/ч.)

## 18.2. Распределение молекул по скоростям

Считается, что молекулы газа совершают хаотическое движение; иными словами, у одних молекул скорости по сравнению со средней скоростью меньше, а у других больше. В 1859 г. Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) получил формулу для наиболее вероятного распределения скоростей газа, состоящего из $N$ молекул. Мы не будем приводить здесь соответствующее доказательство, а запишем лишь результат:

$$f(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}\right). \qquad (18.6)$$

Функция $f(v)$ называется **функцией распределения скоростей Максвелла**. Ее график приведен на рис. 18.3. Величина $f(v)\,dv$ представляет собой число молекул, скорости которых лежат в интервале от $v$ до $v + dv$. В этой формуле $m$ – это масса отдельной молекулы, $T$ – абсолютная температура, а $k$ – постоянная Больцмана. Поскольку $N$ является общим числом молекул газа, суммирование по всем молекулам должно дать $N$; таким образом, мы имеем

$$\int_0^\infty f(v)\,dv = N.$$

(В качестве доказательства этого мы предлагаем решить задачу 17 в конце настоящей главы.)

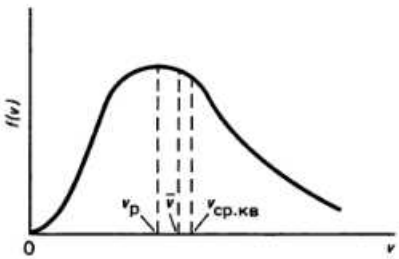



Рис. 18.3. Распределение скоростей молекул в идеальном газе. Обратите внимание на то, что $\bar{v}$ и $v_{ср.кв}$ не находятся на вершине кривой (скорость, соответствующая вершине кривой, называется наиболее вероятной скоростью $v_p$). Это происходит потому, что кривая смещена вправо, т. е. она несимметрична.

**Пример 18.4.** Получите формулы а) для средней скорости $\bar{v}$ и б) для наиболее вероятной скорости $v_p$ молекул идеального газа при температуре $T$.

**Решение.** а) Среднее значение любой величины находят, умножая каждое возможное значение этой величины (например, скорости) на число молекул, обладающих этим значением данной величины, а затем полученные числа суммируют и делят на $N$ (общее число молекул). Поскольку распределение скоростей (18.6) является непрерывным, вместо суммы мы имеем интеграл:

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty v f(v)\,dv}{N} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}\right) dv.$$

Определенный интеграл здесь можно вычислить по таблицам интегралов или

проинтегрировать его по частям[1]. Таким образом, получаем

$$\bar{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2k^2T^2}{m^2}\right) = \sqrt{\frac{8\,kT}{\pi m}} \approx 1{,}60\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

б) Наиболее вероятная скорость – это такая скорость, которую имеет бóльшая часть молекул, т. е. при этой скорости $f(v)$ достигает максимума. Поскольку в точке максимума $df(v)/dv = 0$, мы имеем

$$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left[2v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) - \frac{2mv^3}{2kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right] = 0,$$

где $v = v_{\text{в}}$. Отсюда для $v_{\text{в}}$ получаем

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 1{,}41\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

(Другим решением является также $v = 0$, но это соответствует минимуму, а не максимуму функции распределения.) Таким образом, мы получили следующие выражения:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{2\frac{kT}{m}} \approx 1{,}41\sqrt{\frac{kT}{m}},$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} \approx 1{,}60\sqrt{\frac{kT}{m}},$$

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{3\frac{kT}{m}} \approx 1{,}73\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Все эти значения указаны на рис. 18.3.

Из (18.6) и рис. 18.3 видно, что скорости молекул газа изменяются от нуля до значений, во много раз превосходящих среднюю скорость; однако, как видно из рисунка, у большинства молекул скорости незначительно отличаются от средней скорости. Молекул, скорости которых больше $v_{\text{ср.кв}}$ в четыре раза, менее 1%.

Эксперименты по определению функции распределения по скоростям в реальных газах были впервые выполнены в 1920 г. Они с высокой точностью подтвердили распределение Максвелла (для газов при не слишком высоком давлении), а также наличие прямой пропорциональности между средней кинетической энергией молекул и абсолютной температурой [соотношение (18.4)].

Распределение Максвелла для данного газа зависит только от абсолютной температуры. На рис. 18.4 приведены распределения скоростей для двух различных температур. Поскольку с повышением температуры величина $v_{\text{ср.кв}}$ увеличивается, при более высоких температурах вся кривая распределения смещается вправо.

Рис. 18.4 является иллюстрацией того, каким образом кинетическую теорию можно использовать для

---

[1] При интегрировании по частям получаем

$$\int_0^\infty f\,dg = fg\,|_0^\infty - \int_0^\infty g\,df.$$

Мы положили $f = v^2$ и $dg = ve^{-av^2}$, где $a = m/2kT$. Таким образом,

$$\int_0^\infty v^3 e^{-av^2}\,dv = (2v)\left(-\frac{1}{2a}e^{-av^2}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (2v)\left(-\frac{1}{2a}e^{-av^2}\right)dv = 0 - \frac{1}{2a^2}e^{-av^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2a^2}.$$

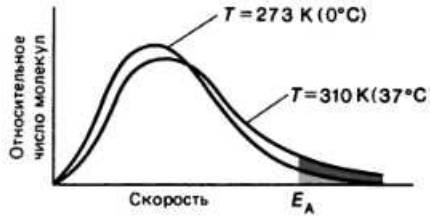



Рис. 18.4. Распределение скоростей молекул для двух различных температур.

объяснения увеличения скоростей многих химических реакций (включая реакции в живых клетках) с ростом температуры. Большинство химических реакций происходит в жидких растворах, а молекулы жидкости имеют распределение скоростей, близкое к распределению Максвелла. Две молекулы могут вступать в химическую реакцию лишь в том случае, если их кинетические энергии достаточно велики и при столкновении они на какую-то часть проникают друг в друга. Требующаяся для этого минимальная энергия называется *энергией активации* $E_A$; она имеет специфическое значение для каждой химической реакции. На рис. 18.4 указана скорость молекул, соответствующая кинетической энергии $E_A$, для некоторой конкретной реакции. Количество молекул, энергии которых больше этого значения, численно равно площади под кривой справа от $E_A$. Соответствующие площади для двух различных температур окрашены на рисунке в разные тона. Очевидно, что число молекул с кинетическими энергиями больше $E_A$ значительно возрастает даже при небольшом повышении температуры. Скорость химической реакции прямо пропорциональна числу молекул, у которых энергии больше $E_A$, и поэтому ясно, почему при повышении температуры скорости реакций быстро увеличиваются.

## 18.3. Испарение, давление пара и кипение

Если стакан воды оставить на столе на ночь, то к утру уровень воды в нем понизится. Мы говорим, что вода испарилась, подразумевая при этом, что некоторое количество воды превратилось в пар или перешло в газообразную фазу.

Процесс *испарения* можно объяснить в рамках кинетической теории. Молекулы жидкости движутся с различными скоростями, которые приблизительно подчиняются распределению Максвелла. Между этими молекулами имеются значительные силы притяжения, которые и удерживают их вместе в жидком состоянии. Благодаря своим скоростям молекулы, находящиеся в верхних слоях жидкости, на некоторое время могут покинуть жидкость. Но точно так же, как брошенный в воздух камень возвращается на землю, силы притяжения других молекул могут

вернуть «сбежавшую» молекулу назад на поверхность жидкости (при условии, разумеется, что ее скорость не слишком велика). Если молекула имеет достаточно высокую скорость, то она окончательно оторвется от жидкости, подобно улетевшей с Земли ракете, и станет частью газовой фазы. Только те молекулы, кинетическая энергия которых больше некоторого определенного значения, могут перейти в газообразное состояние. Мы уже видели, что, согласно кинетической теории, число молекул с кинетической энергией, большей некоторого конкретного значения (такого, как $E_A$ на рис. 18.4), увеличивается при повышении температуры. Это согласуется с хорошо известным наблюдением того, что при более высоких температурах скорость испарения больше.

Поскольку самые быстрые молекулы улетают с поверхности жидкости, средняя скорость оставшихся молекул уменьшается. А если средняя скорость уменьшается, то и абсолютная температура понижается. Таким образом, испарение представляет собой процесс охлаждения. Вы, несомненно, замечали это, когда после прекращения теплого ливня ощущали холод при испарении воды с вашего тела или если, например, при работе в жаркий день вы вспотели, то даже слабый ветерок кажется вам прохладным.

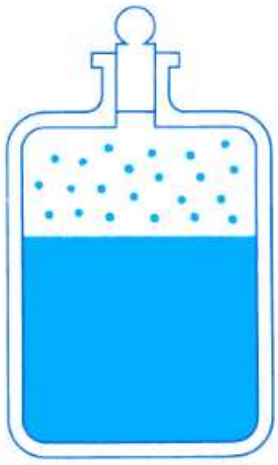


Рис. 18.5. **В закрытом сосуде над жидкостью появляется пар.**

Воздух обычно содержит водяные пары (воду в газообразном состоянии), причем они попадают в воздух главным образом за счет испарения. Для того чтобы изучить этот процесс несколько более детально, рассмотрим закрытый сосуд, частично заполненный водой (это может быть также и любая другая жидкость), из которого удален воздух (рис. 18.5). Наиболее быстрые молекулы испаряются в пространство над жидкостью. Поскольку они движутся вблизи поверхности жидкости, некоторые из них будут сталкиваться с ней и возвращаться в жидкое состояние; этот процесс называется *конденсацией*. Число молекул пара возрастает до тех пор, пока не будут достигнуты такие условия, когда число возвращающихся в жидкость молекул равно числу молекул, покидающих жидкость за тот же промежуток времени. При этом мы имеем состояние равновесия и про пространство над жидкостью говорят, что оно *насыщено*. Давление пара, если он насыщен, называется *давлением насыщенного пара* (или иногда просто давлением пара).

Давление насыщенного пара не зависит от объема сосуда. Если бы мы уменьшили объем пространства над жидкостью, то плотность молекул в газообразном состоянии возрастала бы. При этом в единицу времени с поверхностью воды сталкивалось бы больше молекул. Образовался бы результирующий поток молекул, возвращающихся обратно в жидкую фазу, и этот поток существовал бы до тех пор, пока не было бы вновь

*Таблица 18.1.* Давление насыщенного водяного пара

| Температура, °С | Давление, мм рт. ст. | Давление, Па |
|---|---|---|
| −50 | 0,030 | 4,0 |
| −10 | 1,95 | $2{,}60 \cdot 10^2$ |
| 0 | 4,58 | $6{,}11 \cdot 10^2$ |
| 5 | 6,54 | $8{,}72 \cdot 10^2$ |
| 10 | 9,21 | $1{,}23 \cdot 10^3$ |
| 15 | 12,8 | $1{,}71 \cdot 10^3$ |
| 20 | 17,5 | $2{,}33 \cdot 10^3$ |
| 25 | 23,8 | $3{,}17 \cdot 10^3$ |
| 30 | 31,8 | $4{,}24 \cdot 10^3$ |
| 40 | 55,3 | $7{,}37 \cdot 10^3$ |
| 50 | 92,5 | $1{,}23 \cdot 10^4$ |
| 60 | 149 | $1{,}99 \cdot 10^4$ |
| 70 | 234 | $3{,}12 \cdot 10^4$ |
| 80 | 355 | $4{,}73 \cdot 10^4$ |
| 90 | 526 | $7{,}01 \cdot 10^4$ |
| 100 | 760 | $1{,}01 \cdot 10^5$ |
| 120 | 1489 | $1{,}99 \cdot 10^5$ |
| 150 | 3570 | $4{,}76 \cdot 10^5$ |

достигнуто равновесие, которое возникнет при том же давлении насыщенного пара.

Давление насыщенного пара любого вещества зависит от температуры. При более высоких температурах больше молекул имеют кинетическую энергию, достаточную для перехода с поверхности жидкости в газообразное состояние. Следовательно, состояние равновесия будет достигнуто при более высоком давлении. В табл. 18.1 мы привели значения давления насыщенного пара воды при различных температурах. Заметим, что даже твердые тела (например, лед) имеют определенное давление насыщенного пара.

В повседневной жизни испарение жидкости происходит не в вакуум, а в воздух над ней. Это существенно не изменит приведенных выше рассуждений относительно рис. 18.5. Состояние равновесия по-прежнему будет достигаться в момент, когда достаточное число молекул окажется в газообразном состоянии и число возвращающихся в жидкость молекул станет равно числу молекул, покидающих ее. Это число не зависит от присутствия воздуха, хотя столкновения с его молекулами могут удлинить время, необходимое для достижения состояния равновесия. Таким образом, равновесие будет при том же значении давления насыщенного пара, что и в отсутствие воздуха.

Разумеется, если сосуд достаточно велик или не закрыт, то, прежде чем будет достигнуто насыщение, может испариться вся жидкость. Если сосуд не изолирован (как, скажем, комната в вашем доме), то маловероятно, что воздух насытится парами воды (за исключением, конечно, той ситуации, когда на улице идет дождь).

Давление насыщенного пара жидкости растет с повышением температуры. Когда температура достигает той точки, в которой давление насыщенного пара становится равно внешнему давлению, начинается процесс кипения. Рассмотрим этот процесс подробнее. При достижении точки кипения в жидкости начинают образовываться маленькие пузырьки, которые указывают на превращение вещества из жидкого состояния в газообразное. Однако, если давление пара внутри пузырьков меньше, чем внешнее давление, пузырьки мгновенно разрушаются. С ростом температуры давление насыщенного пара внутри пузырька постепенно становится равным внешнему давлению воздуха или превышает его. Пузырек при этом не будет исчезать, а, напротив, станет увеличиваться в размерах и подниматься к поверхности жидкости. Это – начало кипения. Жидкость кипит в том случае, когда давление ее насыщенного пара равно внешнему давлению. Кипение воды, находящейся под давлением 1 атм (760 мм рт. ст.), происходит при температуре 100 °С, что можно видеть из табл. 18.1.

Очевидно, что температура кипения воды зависит от

внешнего давления. На больших высотах вода кипит при значительно более низких температурах, чем на уровне моря, поскольку давление воздуха там ниже. Например, на вершине горы Эверест (8850 м) давление воздуха приблизительно равно трети давления на уровне моря, и из табл. 18.1 видно, что вода там будет кипеть при температуре около 70 °С. На больших высотах приготовление пищи с помощью кипячения занимает больше времени, поскольку температура кипения там ниже. Скороварки, напротив, сокращают время приготовления пищи, так как повышают давление до 2 атм.

## 18.4. Влажность

Когда мы говорим о погоде, что она сухая или влажная, мы имеем в виду содержание паров в воздухе. Чтобы определить это количественно, мы используем понятие парциального давления. Парциальное давление воды в воздухе может меняться от нулевого значения до максимального, равного давлению насыщенного пара воды при данной температуре. Так, при температуре 20 °С парциальное давление не может быть выше 17,5 мм рт. ст. (см. табл. 18.1). *Относительная влажность* определяется как отношение парциального давления паров воды к давлению насыщенного водяного пара при данной температуре. Обычно она выражается в процентах:

$$\text{Относительная влажность} = \frac{\text{Парциальное давление } H_2O}{\text{Давление насыщенного пара } H_2O} \cdot 100\%.$$

Таким образом, когда влажность близка к 100%, в воздухе находится почти весь водяной пар, который может в нем быть.

**Пример 18.5.** Пусть в жаркий летний день температура воздуха равна 30 °С, а парциальное давление водяного пара в воздухе равно 21,0 мм рт. ст. Какова относительная влажность?

**Решение.** Из табл. 18.1 видно, что давление насыщенного водяного пара при температуре 30 °С равно 31,8 мм рт. ст. Следовательно, относительная влажность равна

$$\frac{21{,}0 \text{ мм рт. ст.}}{31{,}8 \text{ мм рт. ст.}} \cdot 100\% = 66\%.$$

Люди весьма восприимчивы к влажности. Относительная влажность 40–50% обычно считается оптимальной и для здоровья, и для комфорта. При высокой влажности, особенно в жаркий день, испарение влаги с поверхности кожи уменьшается, а это испарение является одним из важнейших биологических механизмов регулирования температуры тела. Очень низкая влажность, напротив, высушивает кожу и слизистые оболочки.

Необходимо поддерживать соответствующую влажность, чтобы предотвратить разрушение живописных по-

лотен, магнитофонных записей и множества других чувствительных к влажности предметов. Таким образом, при конструировании систем обогрева или кондиционирования воздуха для жилых помещений нужно учитывать не только нагревание или охлаждение, но также и поддержание относительной влажности на необходимом уровне.

Считается, что воздух насыщен водяными парами, когда парциальное давление воды в воздухе равно давлению насыщенного пара при этой температуре. Если парциальное давление воды превосходит давление насыщенного пара, то говорят, что воздух *перенасыщен*. Такая ситуация может возникнуть при внезапном понижении температуры. Например, предположим, что температура равна 30 °С, а парциальное давление воды равно 21 мм рт. ст., что дает влажность 66%, как мы видели выше. Теперь допустим, что температура упала, например, до 20 °С, что может случиться ночью. Из табл. 18.1 видно, что при 20 °С давление насыщенного пара воды равно 17,5 мм рт. ст. Следовательно, относительная влажность станет больше чем 100%, и перенасыщенный воздух уже не сможет содержать такое количество воды. Избыток воды сконденсируется и выпадет в виде росы; этот процесс лежит также в основе образования тумана, облаков и дождя.

Когда воздух, содержащий данное количество воды, охлаждается, температура достигает точки, в которой парциальное давление воды становится равным давлению насыщенного пара. Эта точка называется *точкой росы*. Измерение точки росы является наиболее точным способом определения относительной влажности. В одном из методов используется полированная металлическая поверхность, находящаяся в контакте с воздухом, который постепенно охлаждается. Температура воздуха, при которой на металлической поверхности начинает появляться влага, и есть точка росы; при этом парциальное давление воды можно получить из таблиц для давления насыщенного пара. Если, например, температура воздуха равна 20 °С, а точка росы равна 5 °С, то парциальное давление воды (табл. 18.1) в исходном воздухе равно 6,54 мм рт. ст., в то время как давление насыщенного пара равно 17,5 мм рт. ст.; следовательно, относительная влажность равна 6,54/17,5 = 37%.

Более удобным, но менее точным методом измерения относительной влажности воздуха является так называемый метод сухого и влажного шариков, в котором используются два термометра. Шарик одного из термометров снабжен специальным матерчатым покрытием, которое поддерживается во влажном состоянии. Прибор обычно подвешивают в воздухе; чем ниже влажность, тем больше испарение с поверхности влажного термометра, а это приводит к тому, что показываемая им температура понижается. Сравнение показаний влажного и сухого

(обычного) термометров можно соотнести со специальными таблицами, что позволит получить значение относительной влажности.

## 18.5. Реальные газы и фазовые переходы; критическая точка

Как было отмечено выше, закон идеального газа дает точное описание поведения газа до тех пор, пока давление его не слишком высоко, а температура далека от точки сжижения. Однако что же происходит с реальными газами, если оба этих условия не выполнены?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим зависимость давления от объема для данного количества газа. На такой $PV$-диаграмме (рис. 18.6) каждая точка представляет собой состояние равновесия данного вещества. Различные кривые показывают, каким образом давление меняется при изменении объема (температура постоянная) для нескольких различных значений температур. Штриховая кривая представляет поведение газа, описываемое законом идеального газа. Это значит, что $PV = \text{const}$. Сплошная кривая $A$ описывает поведение реального газа при той же температуре. Заметим, что при высоком давлении объем реального газа меньше, чем объем, соответствующий закону идеального газа. При низких температурах (кривые $B$ и $C$ на рис. 18.6) поведение реального газа еще сильнее отклоняется от поведения идеального газа (например, $B'$). Это отклонение увеличивается по мере приближения газа к жидкому состоянию.

Чтобы объяснить такое поведение, вспомним, что при высоких давлениях молекулы должны находиться ближе друг к другу. Этот эффект будет особенно значительным при низких температурах, когда потенциальная энергия сил притяжения между молекулами, которой мы до сих пор пренебрегали, уже не будет пренебрежимо мала по сравнению с уменьшившейся при низких температурах кинетической энергией молекул. Эти силы стремятся удер-

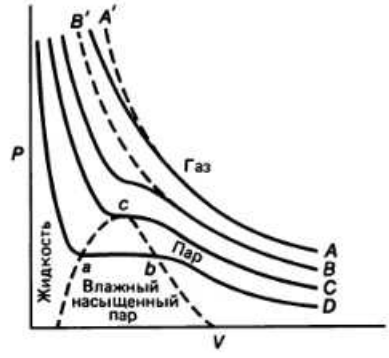



Рис. 18.6. $PV$-диаграмма для реального вещества.

живать молекулы ближе друг к другу, так что при данном давлении объем газа будет меньше, чем тот, который следовало бы ожидать на основании закона идеального газа. (Подробнее об этом см. в разд. 18.6.) При еще более низких температурах эти силы вызовут переход газа в жидкое состояние и молекулы станут *очень* близки друг к другу.

Действительно, кривая *D* представляет ситуацию, когда переход в жидкое состояние уже произошел. При низких давлениях (правая часть кривой *D* на рис. 18.6) вещество находится в газообразном состоянии и занимает большой объем. По мере роста давления объем сокращается до тех пор, пока не будет достигнута точка *b*. После достижения точки *b* объем будет уменьшаться без изменения давления; вещество постепенно переходит из газообразного состояния в жидкое. В точке *a* все вещество перейдет в жидкое состояние. Дальнейшее повышение давления очень незначительно изменит объем – жидкости почти несжимаемы; поэтому кривая будет очень крутой, что и показано. Площадь, ограниченная штриховой линией и осью *x*, имеющая форму языка, представляет собой участок, где газообразное и жидкое состояния сосуществуют вместе в равновесии.

Кривая *C* на рис. 18.6 описывает поведение вещества при *критической температуре*; точка *c* (единственная точка, где кривая горизонтальна) называется **критической точкой**. При температурах ниже критической температуры (и это есть ее определение) газ переходит в жидкое состояние, если давление достаточно большое. При температурах выше критической никакое давление не может заставить газ перейти в жидкое состояние; вместо этого с ростом давления газ становится все плотнее и плотнее и постепенно приобретает свойства, напоминающие свойства жидкости, однако жидкостью так и не становится. Критические температуры для различных газов приведены в табл. 18.2. В течение многих лет ученые

*Таблица 18.2.* Критические температура и давление

| Вещество | Критическая температура, °C | Критическая температура, K | Критическое давление, атм |
|---|---|---|---|
| Вода | 374 | 647 | 218 |
| Углекислый газ | 31 | 304 | 72,8 |
| Кислород | −118 | 155 | 50 |
| Азот | −147 | 126 | 33,5 |
| Водород | −239,9 | 33,3 | 12,8 |
| Гелий | −267,9 | 5,3 | 2,3 |

пытались получить жидкий кислород, однако им это не удавалось. Так было до тех пор, пока не было установ-

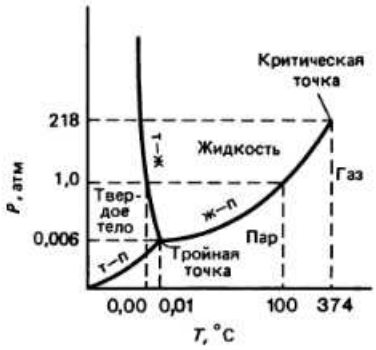



Рис. 18.7. Фазовая диаграмма для воды (обратите внимание на то, что шкалы не линейны).

лено, что поведение веществ связано с критической точкой, и пока не выяснилось, что жидкий кислород можно получить, только если предварительно охладить его до температуры ниже критической, т. е. ниже $-118\,^{\circ}C$.

Часто проводят различие между терминами «газ» и «пар»: вещество, находящееся в газообразном состоянии при температуре ниже его критической, называется *паром*; если температура выше критической, то мы имеем *газ*; это показано на рис. 18.6.

Поведение вещества может быть описано не только с помощью *PV*-диаграммы, но также и на *PT*-диаграмме. Последняя часто называется *фазовой диаграммой* и особенно удобна для сравнения различных состояний вещества. На рис. 18.7 приведена фазовая диаграмма для воды. Кривая, отмеченная буквами ж-п, представляет точки, в которых жидкое и газообразное состояния (пар) находятся в равновесии; таким образом, это кривая зависимости точек кипения от давления. Заметим, что кривая правильно показывает температуру точки кипения $100\,^{\circ}C$ при давлении 1 атм и понижение этой температуры с падением давления. Кривая т-ж показывает точки, в которых твердое и жидкое состояния сосуществуют в равновесии, и, таким образом, описывает зависимость точки замерзания от давления. При давлении 1 атм точка замерзания воды имеет место, разумеется, при $0\,^{\circ}C$, что и показано. Из рис. 18.7 заметим также, что при давлении 1 атм вещество находится в жидком состоянии, если температура его лежит в интервале от 0 до $100\,^{\circ}C$. Однако это вещество будет находиться в твердом или парообразном состоянии, если температура ниже $0\,^{\circ}C$ или выше $100\,^{\circ}C$. Кривая т-п представляет собой зависимость температуры *точек сублимации* от давления. *Сублимация* – это такой процесс, при котором при низких давлениях (для воды при давлениях ниже 0,0060 атм) твердое вещество переходит непосредственно в парообразное состояние, минуя жидкую фазу. Например, углекислый газ, который в твердом виде называется сухим льдом, сублимирует даже при атмосферном давлении.

Пересечением этих трех кривых является **тройная**

**точка**. Тройная точка соответствует строго определенным значениям температуры и давления (табл. 18.3), и только

*Таблица 18.3.* Тройные точки различных веществ

| Вещество | Температура, К | Давление | |
|---|---|---|---|
| | | Па | атм |
| Вода | 273,16 (0,01 °C) | $6{,}10 \cdot 10^{2}$ | $6{,}03 \cdot 10^{-3}$ |
| Углекислый газ | 216,6 | $5{,}16 \cdot 10^{5}$ | 5,10 |
| Аммиак | 195,40 | $6{,}06 \cdot 10^{3}$ | $6{,}00 \cdot 10^{-2}$ |
| Азот | 63,2 | $1{,}25 \cdot 10^{4}$ | $1{,}24 \cdot 10^{-1}$ |
| Кислород | 54,4 | $1{,}52 \cdot 10^{2}$ | $1{,}50 \cdot 10^{-3}$ |
| Водород | 13,8 | $7{,}03 \cdot 10^{3}$ | $6{,}95 \cdot 10^{-2}$ |

в этой точке все три фазы могут существовать вместе в состоянии равновесия. Благодаря тому что тройной точке отвечают единственные значения температуры и давления, ее можно точно воспроизвести, и она нередко используется в качестве опорной точки (см., например, разд. 17.11).

Поскольку на рис. 18.7 кривая ж-п представляет собой кривую точек кипения, она также описывает давление пара вещества при данной температуре (вспомним, что кипение происходит в том случае, когда внешнее давление равно давлению пара). Ниже тройной точки кривая т-п показывает давление пара как функцию температуры. Таким образом, на основании точно построенной фазовой диаграммы можно установить давление пара при любой температуре.

Заметим, что по мере движения влево тангенс угла наклона кривой т-ж для воды увеличивается. Это справедливо только для веществ, которые *расширяются* при замерзании; при более высоком давлении требуется более низкая температура, чтобы жидкость замерзла. Чаще всего при замерзании вещества сжимаются, и поэтому




Рис. 18.8. Фазовая диаграмма для углекислого газа (двуокиси углерода).

кривая т-ж наклонена вправо, как на рис. 18.8 для $CO_2$.

Фазовые переходы, которые мы обсуждали здесь, представляют собой обычные переходы. Однако некоторые вещества в твердом состоянии могут существовать в нескольких формах. Переход от одной из этих форм к другой происходит при определенных значениях температуры и давления точно так же, как и обычные фазовые переходы. Например, при очень высоком давлении лед существует по крайней мере в восьми различных модификациях. Обычный гелий является уникальным веществом, поскольку он имеет две различные жидкие фазы, называемые гелий-I и гелий-II. Они существуют только при температурах в пределах нескольких кельвинов вблизи абсолютного нуля. Гелий-II обладает весьма необычными свойствами, обусловленными явлением *сверхтекучести*. Он имеет предельно низкую вязкость и проявляет странные свойства, например взбирается по стенкам высокого сосуда и перетекает через край. Некоторые вещества (например стекло, отдельные виды резины и сера) называются *аморфными твердыми телами*. У них нет кристаллической структуры, имеющейся у большинства твердых тел, а также определенной точки плавления. При нагревании они постепенно размягчаются и фазового перехода не происходит. Поэтому аморфные твердые тела нередко рассматривают как чрезвычайно вязкие жидкости, а не твердые тела.

## *18.6. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В предыдущем разделе мы видели, каким образом поведение реального газа отклоняется от поведения идеального газа, особенно при высоких плотностях (или когда газ находится вблизи точки перехода в жидкое состояние). Рассмотрим эти отклонения с микроскопической (молекулярной) точки зрения. Ян Д. Ван-дер-Ваальс (1837–1923) исследовал данную проблему и в 1873 г. получил более сложное уравнение состояния, которое описывает поведение реальных газов более точно. Его анализ основывался на кинетической теории, но учитывал следующие обстоятельства. Во-первых, то, что молекулы имеют конечные размеры (до сих пор мы пренебрегали реальным объемом самих молекул по сравнению с полным объемом сосуда; это предположение теряет силу, по мере того как плотность возрастает и молекулы сближаются друг с другом). Во-вторых, радиус действия межмолекулярных сил может превышать размер самих молекул (прежде мы предполагали, что межмолекулярные силы действуют только во время столкновений, когда молекулы контактируют друг с другом). Выполним теперь этот анализ и выведем уравнение Ван-дер-Ваальса.

Предположим, что молекулы газа представляют собой

шарики радиусом $r$. Если считать, что такие молекулы ведут себя подобно твердым сферам, то две молекулы будут сталкиваться и разлетаться друг от друга в том случае, когда расстояние между их центрами станет равным $2r$. Таким образом, реальный объем, в котором могут двигаться молекулы, несколько меньше, чем объем $V$ сосуда, содержащего газ. Величина этого «недоступного объема» зависит от числа молекул и от их размеров (см. задачи в конце настоящей главы). Пусть $b$ представляет собой «недоступный объем» в расчете на 1 моль газа. Тогда в законе идеального газа нужно заменить $V$ на $V-nb$, где $n$ – число молей газа, и мы получим

$$P(V-nb)=nRT.$$

Если разделить это выражение на $n$ и считать, что величина $v=V/n$ является объемом, занятым одним молем газа ($v$ называется *удельным объемом*; не путайте его со скоростью), то получим

$$P(v-b)=RT. \tag{18.7}$$

Это соотношение (иногда называемое *уравнением состояния Клаузиуса*) показывает, что при данной температуре давление $P=RT/(v-b)$ будет больше, чем в идеальном газе. Это легко объяснить, поскольку уменьшение объема означает, что число столкновений со стенками возрастает.

Ван-дер-Ваальс продолжил эти рассуждения и учел эффект действия сил притяжения между молекулами. Можно ожидать, что такие силы существуют, поскольку они должны быть ответственны за удержание вместе молекул жидкости или твердого тела при низких температурах. Эти силы по своей природе электрические, и, хотя они действуют даже тогда, когда молекулы не соприкасаются друг с другом, мы считаем, что радиус их действия невелик, т. е. силы действуют лишь между ближайшими соседями. Внутри газа силы притяжения действуют на данную молекулу во всех направлениях. Однако на молекулу, находящуюся на краю газа, действует результирующая сила, направленная внутрь. (Чтобы показать это, полезно обратиться также к рис. 12.13 и 12.14.) Молекулы, которые направляются к стенке сосуда, замедляются этой направленной внутрь результирующей силой и, таким образом, действуют на стенку с меньшей силой; следовательно, эти молекулы создают меньшее давление, чем в том случае, когда силы притяжения отсутствуют. Уменьшенное давление будет пропорционально числу молекул на единицу объема $(N/V)$ в поверхностном слое газа, а также числу молекул на единицу объема в следующем слое, который и создает направленную внутрь силу[1]. Поэтому можно ожидать, что давле-

---

[1] Это похоже на гравитационную силу, когда действующая на массу $m_1$ сила со стороны массы $m_2$ пропорциональна произведению этих масс [см. выражение (5.1)].

ние уменьшится на величину, пропорциональную $(N/V)^2$. Поскольку $N = nN_A$, где $N_A$ – число Авогадро, можно записать $(N/V)^2 = (nN_A/V)^2 = N_A^2/v^2$; следовательно, давление уменьшится на величину, пропорциональную $1/v^2$. Если для определения давления используется выражение (18.7), то получаемое давление нужно уменьшить на величину $a/v^2$, где $a$ – коэффициент пропорциональности. Таким образом, мы имеем

$$P = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2},$$

или

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \qquad (18.8)$$

Это и есть *уравнение Ван-дер-Ваальса*.

Постоянные $a$ и $b$ в уравнении Ван-дер-Ваальса для разных газов различны. Они определяются путем подгонки экспериментальных данных для конкретного газа к уравнению (18.8). Для углекислого газа ($CO_2$) наилучшие подгоночные значения равны: $a = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ Н·м$^4$/моль$^2$ и $b = 4{,}2 \cdot 10^{-5}$ м$^3$/моль. На рис. 18.9 показана типичная $PV$-диаграмма, построенная с помощью уравнения (18.8) («газ Ван-дер-Ваальса»), при четырех различных температурах. При температурах $T_1$, $T_2$ и $T_3$ ($T_3$ выбрана равной критической температуре) кривые очень хорошо согласуются с экспериментальными данными для большинства газов. Кривая, отмеченная символом $T_4$ (температура ниже критической), проходит через область жидкость – газ. Максимум (точка $b$) и минимум (точка $d$) этой кривой обычно не наблюдаются; вместо этого наблюдается, как правило, постоянное давление, показанное на рисунке горизонтальной штриховой линией. Однако в очень чистых веществах, которые являются перенасыщенными парами или переохлажденными жидкостями, наблюдались участки кривых соответственно $ab$ и $ed$. (Участок $bd$ в таких веществах был бы нестабильным и не наблюдался.)

Ни уравнение Ван-дер-Ваальса, ни многие другие урав-

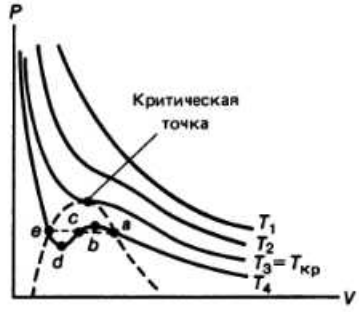



Рис. 18.9. $PV$-диаграмма для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса.

нения состояния, которые были предложены, не выполняются точно для всех газов при любых условиях. Тем не менее уравнение состояния (18.8) очень полезно, и, поскольку во многих случаях оно почти точно определяет поведение газа, его вывод позволяет глубже проникнуть в природу газов на микроскопическом уровне. Заметим, что при низких плотностях мы имеем $(a/v^2) \ll P$ и $b \ll v$ и в этом случае уравнение Ван-дер-Ваальса сводится к уравнению состояния идеального газа $Pv = RT$ или $PV = nRT$.

## *18.7. Средняя длина свободного пробега

Если бы частицы газа представляли собой материальные точки, то они никогда не сталкивались бы друг с другом. Так, когда кто-то открывает флакон духов, вы почти мгновенно чувствуете запах духов по всей комнате (поскольку молекулы перемещаются на сотни метров в секунду). В действительности, чтобы вы почувствовали запах, потребуется некоторое время, и, согласно кинетической теории, эта задержка во времени должна быть обусловлена столкновениями молекул ненулевого (конечного) размера.

Если бы мы проследили за движением отдельной молекулы, то обнаружили бы, что она перемещается по зигзагообразной траектории, как показано на рис. 18.10. В промежутке между двумя столкновениями молекула двигалась бы по прямолинейному пути. (Это не совсем так, если учесть слабые межмолекулярные силы, которые действуют между столкновениями.) В этом случае важным параметром является *средняя длина свободного пробега*, которая определяется как среднее расстояние, проходимое молекулой между столкновениями. Можно ожидать, что, чем больше плотность газа и чем больше размеры молекул, тем короче средняя длина свободного пробега. Выясним теперь, почему так происходит, на примере идеального газа.

Предположим, что рассматриваемый нами идеальный газ состоит из молекул, каждая из которых является твердым шариком радиусом $r$. Столкновение между молекулами происходит всякий раз, когда центры двух

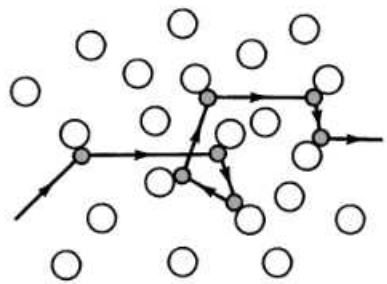


Рис. 18.10. Зигзагообразная траектория молекулы, сталкивающейся с другими молекулами.

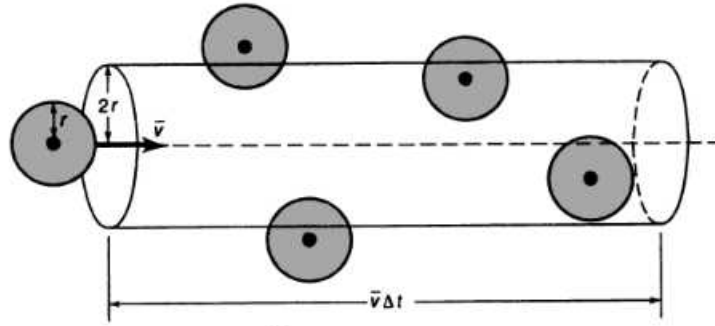



Рис. 18.11. Молекула, находящаяся слева, движется направо со скоростью $\bar{v}$. Она сталкивается с молекулами, центры которых расположены внутри цилиндра радиусом $2r$.

молекул окажутся на расстоянии $2r$ друг от друга. Проследим за молекулой, когда она движется по прямолинейному пути. На рис. 18.11 штриховая прямая представляет собой путь, по которому следовала бы одна из молекул, если бы она не испытывала столкновений. На рисунке показан также цилиндр радиусом $2r$; если центр другой молекулы окажется внутри этого цилиндра, то произойдет столкновение. (Безусловно, как только произойдет столкновение, направление движения частицы изменится и вместе с ним изменится наш воображаемый цилиндр, но для упрощения вычислений мы не будем менять нашего расчета, преобразуя зигзагообразный цилиндр в прямой.) Предположим, что данная молекула – одна из многих движущихся в газе со средней скоростью $\bar{v}$. Представим себе на мгновение, что другие молекулы не движутся и что концентрация молекул (число молекул в единице объема) равна $n_V$ [1]. Тогда число молекул, центры которых лежат внутри цилиндра на рис. 18.11, равно концентрации $n_V$, умноженной на объем этого цилиндра; это число будет равно также и числу произошедших столкновений. За промежуток времени $\Delta t$ наша молекула пройдет расстояние $\bar{v}\,\Delta t$; следовательно, длина цилиндра равна $\bar{v}\,\Delta t$, а его объем равен $\pi(2r)^2\,\bar{v}\,\Delta t$. Таким образом, число столкновений за время $\Delta t$ равно $n_V\,\pi(2r)^2\,\bar{v}\,\Delta t$. Мы определили *среднюю длину свободного пробега* $l_m$ как среднее расстояние между столкновениями; это расстояние равно расстоянию, пройденному за время $\Delta t$, деленному на число столкновений, произошедших за время $\Delta t$:

$$l_m = \frac{\bar{v}\,\Delta t}{n_V\,\pi(2r)^2\,\bar{v}\,\Delta t} = \frac{1}{4\pi r^2 n_V}. \qquad (18.9a)$$

Таким образом, мы показали, что $l_m$ обратно пропорциональна площади поперечного сечения молекулы $\pi r^2$ и концентрации молекул (число/объем) $n_V$. Однако выражение (18.9a) является не совсем точным, поскольку мы предположили, что остальные молекулы неподвижны. В действительности они движутся, и число столкновений за

[1] Не путайте $n_V$ с $n$ – числом молей газа.

время $\Delta t$ должно зависеть от *относительной* скорости сталкивающихся молекул, а не от $\bar{v}$. Следовательно, число столкновений в секунду равно $n_V \pi (2r)^2 v_{\text{отн}} \Delta t$ [а не $n_V \pi (2r)^2 \bar{v} \Delta t$], где $v_{\text{отн}}$ – средняя относительная скорость сталкивающихся молекул. Тщательно выполненные расчеты показывают, что при максвелловском распределении скоростей $v_{\text{отн}} = \sqrt{2}\,\bar{v}$. Следовательно, средняя длина свободного пробега равна

$$l_{\text{m}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}\, r^2 n_V}. \tag{18.9б}$$

**Пример 18.6.** Оцените среднюю длину свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекул $O_2$ и $N_2$ приблизительно равен $3 \cdot 10^{-10}$ м.

**Решение.** В примере 17.5 мы видели, что один моль идеального газа занимает объем $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м$^3$. Следовательно,

$$n_V = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ молекул}}{22{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 2{,}69 \cdot 10^{25} \text{ молекул/м}^3.$$

Таким образом, средняя длина свободного пробега равна

$$l_{\text{m}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}(1{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ м})^2 (2{,}7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3})} \approx 9 \cdot 10^{-8} \text{ м},$$

что примерно в 100 раз превосходит диаметр молекулы.

При очень низких плотностях газа (например, в сосуде с достаточно большой откачкой газа) понятие средней длины свободного пробега теряет смысл, поскольку столкновения со стенками сосуда могут происходить чаще, чем столкновения между самими молекулами. Например, в кубическом сосуде с ребром 20 см, наполненном воздухом под давлением $10^{-7}$ мм рт. ст., средняя длина свободного пробега равна приблизительно 700 м. Это означает, что произойдет значительно больше столкновений со стенками сосуда, чем одних молекул с другими. (Заметим, что при этом в сосуде будет находиться более $10^{12}$ молекул.) Если бы при определении средней длины свободного пробега мы учитывали столкновения любого типа, то эта величина была бы около 0,2 м, а не 700 м согласно нашим вычислениям по формуле (18.9).

## *18.8. Диффузия

Если в стакан с водой аккуратно влить каплю пищевого красителя, то мы увидим, что вся вода начинает окрашиваться. Этот процесс может занять несколько часов (предполагается, что стакан остается на месте), но в конечном счете вода в стакане окрасится равномерно. Это смешивание обусловливается хаотическим движением молекул и называется *диффузией*. Диффузия имеет место

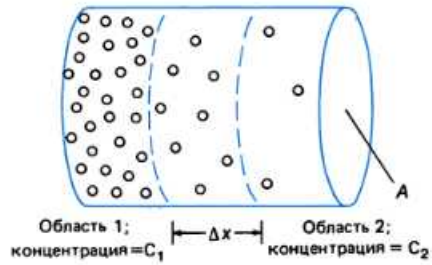



Рис. 18.12. Диффузия происходит из области с высокой концентрацией $C_1$ в область с низкой концентрацией $C_2$ (показаны молекулы только одного сорта).

также и в газах. Наиболее часто встречающимися примерами диффузии являются распространение запаха духов или дыма (или запаха готовящейся на плите пищи), диффундирующих в воздухе, хотя при распространении запахов конвекция зачастую играет большую роль, чем диффузия. В любом случае диффундирующее вещество движется из области, где его концентрация высока, в область, где его концентрация низка.

Кинетическая теория, согласно которой молекулы совершают хаотическое движение, позволяет легко объяснить диффузию. Рассмотрим трубку с площадью поперечного сечения $A$, содержащую молекулы одного сорта, концентрация которых в левой части трубки больше, чем в правой (рис. 18.12). Предположим также, что имеется множество молекул другого сорта, которые мы будем рассматривать в качестве фона. (Примером могут служить молекулы чернил на фоне молекул воды.) Молекулы фона на рис. 18.12 не показаны. Таким образом, рассматривая диффузию, будем считать, что общее давление распределено равномерно (т.е. не будет гидродинамического потока, связанного с градиентом давления), а температура также одинакова повсюду (т.е. конвекция отсутствует). Предположим, кроме того, что концентрация молекул первого сорта изменяется лишь вдоль одного направления, а именно вдоль оси $x$, вдоль же осей $y$ и $z$ она постоянна. Молекулы движутся хаотическим образом. Кроме того, из-за разности концентраций имеет место результирующий поток молекул первого сорта направо (рис. 18.12). Чтобы понять, почему это происходит, рассмотрим небольшой участок трубки длиной $\Delta x$, показанный на рисунке. Благодаря хаотическому движению молекулы из областей 1 и 2 проникают в центральный участок. Чем больше молекул находится в этом участке, тем большее их число будет пересекать данную площадь поперечного сечения на границе выделенного участка. Поскольку концентрация молекул в области 1 больше, чем в области 2, в центральный участок проникает больше молекул из области 1, чем из области 2. Поэтому имеется результирующий поток слева направо, т.е. из области с высокой концентрацией в область с низкой концентрацией. Этот поток прекратится только тогда, когда концентрации всюду станут одинаковыми.

Можно ожидать, что, чем больше разность концентраций, тем больше величина потока. Это действительно так. В 1855 г. физиолог Адольф Фик (1829–1901) экспериментально определил, что поток $J$ через единичную площадь прямо пропорционален изменению концентрации на единицу длины $(n_{V\,2} - n_{V\,1})/\Delta x$ (это изменение концентрации называется *градиентом концентрации*):

$$J = -D\frac{n_{V\,2} - n_{V\,1}}{\Delta x}. \tag{18.10}$$

Это выражение называется *законом Фика* и более точно записывается через производные в виде

$$J = -D\frac{dn_V}{dx}, \tag{18.11}$$

где $D$ – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом диффузии*. Если $x$ измеряется в метрах, а концентрация $n_V$ определяется как число молекул на кубический метр, то $J$ представляет собой число молекул, пересекающих единичную площадь за единицу времени. [Если $n_V$ задана в единицах моль/м$^3$, то $J$ измеряется числом молей вещества, пересекающих единичную площадь за секунду (моль/м$^2\cdot$с); если же концентрация задана в единицах кг/м$^3$, то $J$ будет измеряться в кг/м$^2\cdot$с.] Знак минус в выражениях (18.10) и (18.11) напоминает нам, что поток направлен противоположно градиенту концентрации; это значит, что если концентрация больше слева ($dn_V/dx < 0$), то поток направлен вправо.

Если, как мы предполагали, давление распределено равномерно, то будет иметь место также и градиент концентрации молекул фона. Таким образом, эти молекулы будут также диффундировать в соответствии с выражением (18.11) в противоположном направлении. Однако коэффициент диффузии $D$ для этих молекул будет иной, чем для рассмотренных выше. Проще всего анализировать процесс диффузии в том случае, если рассматриваемые молекулы и молекулы фона будут одного сорта. При этом, чтобы следить за молекулами в процессе их диффузии через одинаковые с ними молекулы фона, их нужно «пометить» (скажем, с помощью радиоактивности). Такой процесс называется *самодиффузией*, и мы теперь будем рассматривать именно этот случай или по крайней мере случай, когда молекулы различных сортов полностью аналогичны друг другу.

**Пример 18.7.** Для того чтобы получить представление о времени, необходимом для диффузии, вычислим промежуток времени, по прошествии которого аммиак ($NH_3$) будет обнаружен на расстоянии 10 см от бутылки, после того как ее открыли. Будем считать, что имеет место лишь диффузия.

**Решение.** Произведем расчет по порядку величины. Скорость диффузии $J$ можно определить как число молекул $N$, диффундирующих через площадь $A$ за время $t$:

$J = N/At$. Найдем из этого выражения $t$:

$$t = N/AJ,$$

а затем применим формулу (18.10):

$$t = \frac{N}{AD}\frac{\Delta x}{\Delta n_V}.$$

Среднюю концентрацию (на полпути между бутылкой и носом) можно приближенно записать как $\bar{n}_V \approx N/V$, где $V$ – объем, через который проходят молекулы. Объем $V$ имеет порядок величины $A\Delta x$, где $\Delta x = 10$ см, так что, подставляя в последнее выражение величину $N = \bar{n}_V A\Delta x$, получаем

$$t \approx \frac{(\bar{n}_V A\Delta x)\Delta x}{AD\,\Delta n_V} = \frac{\bar{n}_V}{\Delta n_V}\frac{(\Delta x)^2}{D}.$$

Поскольку около бутылки концентрация аммиака высока, а вблизи носа низка, мы имеем $n_V \approx \Delta n_V/2$, или $(\bar{n}_V/\Delta n_V) \approx 1/2$. Поскольку размеры молекулы $NH_3$ лежат где-то между размерами молекул $H_2$ и $O_2$, из табл. 18.4 можно выбрать коэффициент диффузии $D \approx 4\cdot 10^{-5}$ м$^2$/с. Таким образом,

$$t \approx \frac{1}{2}\frac{(0{,}10\text{ м})^2}{4\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}} \approx 100\text{ с},$$

или приблизительно от 1 до 2 мин. Это кажется несколько дольше, чем то, что мы знаем из повседневного опыта, возможно, потому что распространению запаха обычно способствуют воздушные потоки (конвекция).

Можно найти соотношение между коэффициентом диффузии $D$ и средней длиной свободного пробега $l_m$ молекул диффундирующего газа. Теперь мы получим это соотношение, пользуясь простыми рассуждениями[1], и одновременно проверим пропорциональность между $J$ и $dn_V/dx$ на основании кинетической теории. Будем считать, что длина свободного пробега молекулы значительно меньше, чем размеры сосуда с газом, так что столкновениями со стенками можно пренебречь. Рассмотрим в газе плоскую поверхность при $x = x_0$, как показано на рис. 18.13. Концентрация молекул (на кубический метр) в плоскости $x = x_0$ равна $n_V = n_{V0}$. Скорости молекул распределены случайным образом по направлениям в трехмерном пространстве, однако для простоты будем считать, что треть из них движется вдоль оси $x$, треть – вдоль оси $y$ и треть – вдоль оси $z$. Нас будут интересовать только молекулы, которые движутся вдоль оси $x$. Из $n_V/3$ молекул, движущихся вдоль оси $x$, половина, т. е. $n_V/6$, движется вправо $(+\bar{v})$, а другая половина, т. е. тоже $n_V/6$, движется влево $(-\bar{v})$. Рассмотрим молекулы, движущиеся вправо. За время $\Delta t$ каждая молекула проходит расстояние $\bar{v}\Delta t$. Молекулы, которые пересекут площадь $A$ в плоскости $x_0$, за время $\Delta t$ должны занять объем $A\bar{v}\Delta t$, так что число молекул, которые пересекут единицу площади в плоскости $x_0$ за единицу времени, запишется в

[1] Более подробное рассмотрение можно найти в специальных книгах по термодинамике и кинетической теории, например в книге: *Sears F. W., Salinger G. L.* Thermodynamics, Kinetic Theory and Statistical Mechanics.– Reading MA: Addison-Wesley, 1975. [См. также: *Леонтович М. А.* Статистическая физика.– М.: Наука, 1985.– *Прим. ред.*]

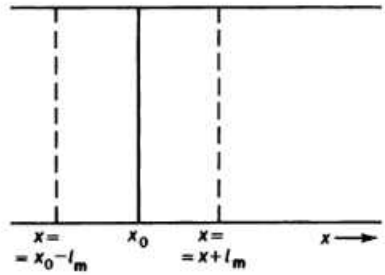



Рис. 18.13. К выводу закона Фика и выражений для коэффициента диффузии в случае самодиффузии; рассматриваются молекулы, пересекающие воображаемую плоскость $x = x_0$.

виде

$$\frac{(1/6)\, n_V\, A\, (\bar{v}\, \Delta t)}{A\, \Delta t} = \frac{1}{6} n_V\, \bar{v}.$$

Аналогично столько же молекул движется влево. Однако концентрации слева и справа от плоскости $x = x_0$ неодинаковы. Молекулы, движущиеся направо, испытали последнее столкновение на расстоянии, равном приблизительно одной средней длине свободного пробега, слева от плоскости $x_0$, т. е. в плоскости $x = x_0 - l_m$; их концентрация там была $n_V = n_0 - (dn_V/dx)\, l_m$. Следовательно, поток молекул, движущихся направо, равен

$$J_{\rightarrow} = \frac{1}{6}\left(n_{V0} - \frac{dn_V}{dx} l_m\right) \bar{v}.$$

Молекулы, движущиеся налево, испытали последнее столкновение в плоскости $x = x_0 + l_m$, где $n_V = n_{V0} + (dn_V/dx)\, l_m$, так что соответствующий поток налево равен

$$J_{\leftarrow} = \frac{1}{6}\left(n_{V0} + \frac{dn_V}{dx} l_m\right) \bar{v}.$$

Результирующий поток при этом запишется в виде

$$J = J_{\rightarrow} - J_{\leftarrow} = \frac{1}{6}\left(n_{V0} - \frac{dn_V}{dx} l_m\right) \bar{v} - \frac{1}{6}\left(n_{V0} + \frac{dn_V}{dx} l_m\right) \bar{v}$$

или

$$J = \frac{1}{3} \bar{v}\, l_m \frac{dn_V}{dx}.$$

Это и есть закон Фика (18.11). Таким образом, согласно кинетической теории, поток молекул $J$ также пропорционален градиенту концентрации $dn_V/dx$. Коэффициент диффузии при этом дается выражением

$$D = (1/3)\, \bar{v}\, l_m. \qquad (18.12)$$

**Пример 18.8.** Оценим коэффициент диффузии молекул $O_2$ в воздухе при нормальных условиях. (Этот процесс близок к самодиффузии, поскольку масса и размеры молекул $N_2$ и $O_2$ почти одинаковы.)

**Решение.** В примере 18.6 мы нашли, что для молекул воздуха $l_m \approx 9 \cdot 10^{-8}$ м. Тогда, используя результат примера 18.4 (см. также пример 18.3), мы имеем

$$\bar{v} = \sqrt{(8/\pi)(kT/m)} = 430 \text{ м/с}.$$

Следовательно,

$D \approx (1/3)(430 \text{ м/с})(9 \cdot 10^{-8} \text{ м}) \approx$
$\approx 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$

Значение, полученное экспериментально, равно приблизительно[1] $1{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Этот анализ диффузии с точки зрения кинетической теории можно также применить к ряду других *процессов переноса*. В процессе диффузии переносятся молекулы или вещество. Процессы теплопроводности и электропроводности представляют собой соответственно перенос энергии и электрического заряда и могут быть рассмотрены аналогичными методами. Так же можно рассматривать и вязкость газов (см. задачи), сопровождающуюся переносом импульса через поверхность.

Диффузия происходит также и в жидкостях, и закон Фика к ним тоже применим. Однако в жидкостях коэффициент диффузии будет несколько другим, чем в газах, хотя он по-прежнему будет зависеть от свойств молекул. Значения $D$ для различных веществ приведены в табл. 18.4.

*Таблица 18.4.* Коэффициенты диффузии $D$ (20 °C, 1 атм)

| Диффундирующие молекулы | Среда | $D$, м²/с |
|---|---|---|
| $H_2$ | Воздух | $6{,}3 \cdot 10^{-5}$ |
| $O_2$ | » | $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ |
| $O_2$ | Вода | $100 \cdot 10^{-11}$ |
| Гемоглобин крови | » | $6{,}9 \cdot 10^{-11}$ |
| Глицин (аминокислота) | » | $95 \cdot 10^{-11}$ |
| ДНК (молекулярная масса $6 \cdot 10^6$ а.е.м.) | » | $0{,}13 \cdot 10^{-11}$ |

В некоторых случаях закон Фика (18.11) удобно записывать через парциальные давления, а не через концентрации. Ранее мы видели (разд. 17.10), что парциальное давление каждой компоненты в смеси газов однозначно связано с ее концентрацией. Это следовало из закона идеального газа. Будем считать, что $P_i$ – парциальное давление, а $n_{Vi}$ – концентрация молекул на кубический метр ($n_{Vi} = N_i/V$) конкретной компоненты газа. Тогда мы имеем

$$P_i = \frac{N_i kT}{V} = n_{V\,i} kT.$$

[1] Зависимость величины $D$ от температуры см. в табл. 18.4 и задаче 43, помещенной в конце настоящей главы.

Таким образом, закон Фика можно записать следующим образом:

$$J_i = -\frac{D}{kT}\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta x}\right) \text{ или } J_i = -\frac{D}{kT}\frac{dP_i}{dx}, \tag{18.13}$$

где $\Delta P_i/\Delta x$ (и $dP_i/dx$) – градиент давления для вещества $i$. Таким образом, газ диффундирует из области, где его парциальное давление выше, в область, где его парциальное давление ниже, независимо от величины давления других компонентов.

**Заключение**

Согласно кинетической теории газов, основанной на представлении о том, что газ состоит из быстро и хаотически движущихся молекул, средняя кинетическая энергия молекул пропорциональна абсолютной температуре Кельвина $T$:

$$\overline{\text{КЭ}} = \frac{3}{2}kT,$$

где $k$ – постоянная Больцмана. В любой момент времени молекулы газа имеют довольно широкое распределение по скоростям. На основе простых допущений кинетической теории для молекул газа получено максвелловское распределение скоростей, которое хорошо согласуется с экспериментальными данными для газов при не слишком высоких давлениях.

*Испарение* жидкости обусловлено тем, что наиболее быстродвижущиеся молекулы покидают ее поверхность. Поскольку после удаления наиболее быстродвижущихся молекул средняя скорость молекул уменьшается, температура при испарении понижается. *Давление насыщенного пара* представляет собой давление пара над жидкостью, когда состояния жидкость – пар находятся в равновесии. Давление пара вещества (такого, как вода) в значительной степени зависит от температуры и в точке кипения равно атмосферному давлению. *Относительная влажность воздуха* в данном месте равна отношению парциального давления водяного пара в воздухе к давлению пара при этой температуре; ее обычно выражают в процентах.

Поведение реальных газов при высоком давлении и вблизи точки перехода в жидкое состояние не подчиняется закону идеального газа. Отклонения в поведении реальных газов обычно связаны с конечным размером молекул, а также с тем, что между молекулами действуют силы притяжения, которые в реальных газах играют более значительную роль. При температурах ниже *критической* и при достаточно высоком давлении газ может превратиться в жидкость. Однако если температура выше критической, то ни при каком давлении газ не перейдет в жидкость. *Тройная точка* вещества представляет собой

совокупность строго определенных значений температуры и давления, при которых все три фазы – твердая, жидкая и газообразная – могут сосуществовать в состоянии равновесия. Благодаря своей точной воспроизводимости тройная точка воды часто выбирается в качестве стандартной точки отсчета.

## Вопросы

1. Почему размеры различных молекул не учитываются в газовых законах?
2. Если газ быстро сжать (например, толкнув поршень), то его температура повысится. Когда газ под поршнем расширяется, происходит его охлаждение. Объясните эти изменения температуры с точки зрения кинетической теории, обратив особое внимание на то, что происходит в тот момент, когда молекулы сталкиваются с движущимся поршнем.
3. В разд. 18.1 мы предполагали, что столкновения молекул со стенками сосуда являются абсолютно упругими. Это предположение не нужно до тех пор, пока стенки имеют ту же температуру, что и газ. Почему?
4. Объясните на словах, каким образом закон Шарля следует из кинетической теории и соотношения между средней кинетической энергией и абсолютной температурой.
5. Объясните на словах, каким образом закон Гей-Люсака следует из кинетической теории.
6. При подъеме в атмосфере Земли отношение числа молекул $N_2$ к числу молекул $O_2$ увеличивается. Почему?
7. Можете ли вы определить температуру вакуума?
8. Является ли температура макроскопической или микроскопической переменной?
9. Объясните, почему распределение скоростей Максвелла (рис. 18.3) представляет собой несимметричную кривую.
10. Объясните, почему пик кривой для температуры 310 К на рис. 18.4 не превышает 273 К. (Считайте, что общее число молекул в обоих случаях одинаково.)
11. Пользуясь распределением скоростей Максвелла, объясните, почему а) Луна имеет очень незначительную атмосферу; б) водород, если он когда-то и был в атмосфере Земли, все-таки улетучился.
12. Объясните, почему, поместив пищу в холодильник, мы замедляем ее порчу.
13. Тепловой градиентный осадитель представляет собой устройство для удаления какого-либо конкретного вещества из загрязненного воздуха. Это устройство состоит из двух близко расположенных друг к другу твердых поверхностей, одна из которых холодная, а другая горячая. Взвешенные в воздухе частицы при прохождении между этими поверхностями собираются на холодной поверхности и таким образом удаляются. Объясните, почему это происходит. (Этот эффект можно заметить на стене позади батареи центрального отопления, особенно если это внешняя стена дома, которая охлаждена.)
14. Какой скорости соответствует средняя кинетическая энергия молекул идеального газа: $\bar{v}$, $v_{ср.кв}$, $v_p$ или какому-либо еще значению?
15. Если давление газа увеличили в два раза, а объем оставили прежним, то как изменятся а) $v_{ср.кв}$; б) $\bar{v}$?
16. Если сосуд с газом покоится, то средняя скорость перемещения молекул должна быть равна нулю. Однако средняя путевая скорость молекул не равна нулю. Объясните.
17. При игре в бейсбол питчер бросает первоначально покоящийся мяч. Сравните средние кинетические энергии молекул мяча в системе отсчета игрока до и после броска. Объясните различие.
18. Нарисуйте приблизительно распределение Максвелла *скоростей*, определяемых по полному пути, а не по перемещению. Обсудите, какие значения будут иметь средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорости. Будет ли кривая симметричной?
19. Какое из повседневных наблюдений подсказывает вам, что не все молекулы вещества имеют одинаковые скорости?
20. Мы видели, что давление насыщенного пара жидкости (например, воды) на зависит от внешнего давления. Температура кипения, напротив, зависит от внешнего давления. Имеется ли тут противоречие? Объясните.
21. При комнатной температуре спирт испаряется быстрее воды? Что вы можете сказать по поводу сравнения молекулярных свойств этих веществ?
22. Объясните, почему при одной и той же температуре жаркая влажная погода переносится значительно труднее, чем жаркая сухая.
23. Можно ли вскипятить воду при комнатной температуре (20°С), не нагревая ее? Объясните.
24. Что в точности означает наше высказывание о том, что кислород кипит при $-183$°С?

25. Участок тонкого провода переброшен через ледяной блок (или кубик льда) при температуре 0°C. По обеим сторонам блока подвешены два груза. Было обнаружено, что провод проходит через ледяной куб, но оставляет после себя сплошной лед. Этот процесс называется *повторным замораживанием*. Объясните, как это происходит, учитывая зависимость точки замерзания воды от давления.

26. Чем отличаются газ и пар?

27. При каких условиях может существовать жидкий углекислый газ? Будьте точны. Может ли существовать такая жидкость при обычной комнатной температуре?

28. Почему сухой лед не существует длительное время при комнатной температуре?

29. а) В каких фазовых состояниях может существовать $CO_2$ при атмосферном давлении? б) При каких температурах его фазовое состояние меняется? в) В каком диапазоне давлений и температур углекислый газ может быть жидкостью? Обратитесь к рис. 18.8

30. В какой фазе будет существовать $CO_2$ при давлении 30 атм и температуре 30°C?

31. В какой фазе будет вода при температуре 50°C и давлении 0,01 атм?

*32. Назовите несколько способов, позволяющих уменьшить среднюю длину свободного пробега молекул газа.

*33. Обсудите, почему звуковые волны могут распространяться в газе только в том случае, когда их длина несколько больше средней длины свободного пробега молекул газа.

*34. Каким образом нужно изменить соотношение (18.9) для средней длины свободного пробега молекул, если молекулы не являются сферическими?

*35. Предположим, что сила, действующая между двумя молекулами, является дальнодействующей, например обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, и не возрастает значительно, когда молекулы находятся в «контакте» друг с другом. Что можно в этом случае сказать о средней длине свободного пробега молекул?

*36. Были ли мы правы в нашем выводе выражения для средней длины свободного пробега молекул (18.9а), когда предполагали, что наша молекула сохраняет скорость $\bar{v}$ даже после столкновения? Приведите доводы.

*37. Объясните с помощью количественных расчетов, почему относительная скорость двух молекул $v_{отн}$ будет больше, чем средняя скорость молекулы $\bar{v}$.

*38. Приведите некоторые соображения по поводу того, почему результат примера 18.8 приблизительно на 30% отличается от значения, полученного экспериментально.

*39. *Скорость дрейфа* $v_{др}$ для диффузии можно определить следующим образом:

$$v_{др} = J/n_V$$

Обсудите физический смысл этой величины.

*40. Почему мы должны дышать? Иными словами, почему наши легкие не могут получать кислород за счет диффузии?

## Задачи

Раздел 18.1

1. (I) а) Какова средняя кинетическая энергия молекулы кислорода при нормальных условиях? б) Чему равна полная кинетическая энергия поступательного движения 1 моль молекул $O_2$ при температуре 20°C?

2. (I) Вычислите среднеквадратичную скорость движения атомов гелия вблизи поверхности Солнца при температуре около 6000 К.

3. (I) Во сколько раз увеличится среднеквадратичная скорость движения молекул газа, если температура возрастет от 0 до 100°C?

4. (I) Газ находится при температуре 20°C. До какого значения нужно повысить его температуру, чтобы среднеквадратичная скорость движения его молекул удвоилась?

5. (II) Покажите, что среднеквадратичная скорость движения молекул газа дается выражением

$$v_{ср.кв} = \sqrt{3P/\rho},$$

где $P$ – давление газа, а $\rho$ – плотность газа.

6. (II) Покажите, что в смеси двух газов, находящихся при одинаковой температуре, отношение их среднеквадратичных скоростей равно обратному отношению квадратных корней их молекулярных масс.

7. (II) Чему равна среднеквадратичная скорость молекул азота, заключенных в объеме 8,0 м$^3$ под давлением 2,1 атм, если полное количество азота равно 1 300 моль.

8. (II) а) Вычислите среднеквадратичную скорость движения молекул аминокислоты, молекулярная масса которой равна 89 а.е.м. Молекула находится в живой клетке при температуре 37°C. б) Какова средняя скорость движения белка, имеющего молекулярную массу 50 000 а.е.м., при температуре 37°C?

9. (II) Космический корабль, возвращающийся с Луны, входит в атмосферу Земли со скоростью около 40 000 км/ч. Молекулы (пусть это будут молекулы азота) ударяются о нос космического корабля с такой же скоростью. Какой температуре соответствует эта скорость движения молекул? (Из-за такой высокой температуры нос космического корабля имеет специальную кон-

струкцию; действительно, часть носа испаряется, и этот процесс виден в качестве яркого свечения после входа корабля в плотные слои атмосферы.)

10. (II) В открытом космосе плотность вещества приблизительно равна одному атому в 1 $см^3$ (в основном это атомы водорода), а температура равна приблизительно 3,4 К. Вычислите среднюю скорость движения этих атомов водорода и их давление (в атмосферах).

11. (II) Вычислите: а) среднеквадратичную скорость молекул кислорода при температуре 0°С; б) определите, сколько раз в секунду будет пересекать эта молекула комнату длиной 5,0 м от одной стенки до противоположной и обратно. Считайте, что число столкновений с другими молекулами очень невелико.

12. (II) Каково среднее расстояние между молекулами кислорода при нормальных условиях?

13. (II) Изотопы урана $^{235}U$ и $^{238}U$ (числа слева обозначают их атомные массы) могут быть разделены с помощью процесса диффузии газа посредством соединения их с фтором и образования газообразного вещества $UF_6$. Вычислите отношение среднеквадратичных скоростей молекул этого соединения для двух изотопов урана.

14. (II) Вычислите (приблизительно) полную кинетическую энергию поступательного движения молекул в бактерии *E. coli*, масса которой равна $2{,}0 \cdot 10^{-15}$ кг, при температуре 37°С. Считайте, что клетка на 70% (по массе) состоит из воды, а другие молекулы имеют среднюю молекулярную массу порядка $10^5$ а.е.м.

Раздел 18.2

15. (II) Группа из двадцати двух молекул имеет следующие скорости: у двух молекул скорость равна 10 м/с, у семи 15 м/с, у четырех 20 м/с, у одной 25 м/с, у пяти 30 м/с, одна молекула имеет скорость 35 м/с и у двух молекул скорость 40 м/с. Определите: а) среднюю скорость молекул; б) среднеквадратичную скорость; в) наиболее вероятную скорость.

16. (III) При комнатной температуре для испарения 1,00 г воды требуется энергия около $2{,}45 \cdot 10^3$ Дж. Оцените среднюю скорость испаряющихся молекул. Во сколько раз получившийся результат превосходит $v_{ср.кв}$ всех молекул воды (при температуре 20 °С)? [Считайте, что соотношение (18.4) выполняется.]

17. (III) Исходя из распределения Максвелла (18.6), покажите, что а) $\int_0^\infty f(v)\,dv = N$; б) $\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv/N = 3kT/m$.

Раздел 18.3

18. (I) В горах на определенной высоте атмосферное давление равно 0,80 атм. При какой температуре там кипит вода?

19. (I) При каком давлении воздуха вода кипит при температуре 70 °С?

20. (II) Чему приблизительно равно давление внутри скороварки, если вода кипит в ней при температуре 120 °С? Считайте, что в процессе нагрева воздух не может выйти из скороварки и нагрев начинается при температуре 20 °С.

21. (II) *Автоклав* представляет собой устройство, применяемое для стерилизации лабораторных инструментов. По существу, это паровой котел высокого давления, который действует на том же принципе, что и скороварка. Однако, поскольку находящийся под давлением пар с точки зрения уничтожения микроорганизмов более эффективен, чем влажный воздух при тех же значениях температуры и давления, воздух из него удаляют и заменяют его паром. Обычно избыточное давление внутри автоклава равно 1 атм. Какова в этом случае температура пара? Считайте, что пар находится в равновесии с кипящей водой.

Раздел 18.4

22. (I) Чему равна точка росы (приблизительно), если относительная влажность равна 25%, а температура воздуха 27 °С?

23. (I) Чему равно парциальное давление воды, если температура воздуха равна 25 °С, а относительная влажность равна 55%?

24. (II) В комнате размером 3,5 × 6,1 × 8,0 м относительная влажность равна 80%. Какое количество воды может еще испариться из открытой кастрюли, если температура равна 20 °С?

25. (II) Влажность в комнате объемом 520 $м^3$ при температуре 25 °С равна 90%. Какое количество воды нужно удалить из комнаты, чтобы уменьшить влажность до 50%?

26. (II) Воздух в точке росы при 5 °С вдувается в здание и нагревается там до температуры 25 °С. Какова будет относительная влажность при этой температуре? Учтите расширение воздуха.

27. (II) При температуре воздуха 30 °С термометр с влажной поверхностью показывает 10 °С. Какова относительная влажность?

* Раздел 18.6

* 28. (I) Запишите уравнение Ван-дер-Ваальса через объем $V$, а не через удельный объем $v$.

* 29. (II) Для кислорода уравнение Ван-дер-Ваальса наиболее точно выполняется при

$a = 0{,}14$ Н·м$^4$/моль$^2$ и $b = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ м$^3$/моль. Определите давление газа при температуре 0 °C для удельного объема 0,40 л/моль. Вычисления производите с помощью а) уравнения Ван-дер-Ваальса; б) закона идеального газа.

* 30. (III) а) Исходя из уравнения Ван-дер-Ваальса, покажите, что критические температура и давление определяются следующими выражениями:

$$T_{кр} = 8a/27bR, \quad P_{кр} = a/27b^2.$$

(*Подсказка:* воспользуйтесь тем, что кривая зависимости $P$ от $V$ имеет точку перегиба в критической точке, в которой первая и вторая производные равны нулю.) б) Определите параметры $a$ и $b$ для $CO_2$ на основании экспериментально полученных значений $T_{кр} = 304$ К и $P_{кр} = 72{,}8$ атм.

31. (III) а) Покажите, что столкновение между двумя сферическими молекулами, каждая из которых имеет радиус $r$, эквивалентно столкновению между точечной частицей и сферой радиусом $2r$ и, таким образом, при столкновении центр одной молекулы не может проникнуть в объем, равный объему сферы радиусом $2r$. б) Покажите, что общий недоступный объем на 1 моль газа равен $b = 16\pi r^3 N_A/3$, где $N_A$ – число Авогадро. (*Подсказка:* при суммировании умножайте полный исключенный объем на 1/2, чтобы исключить учет пары молекул дважды.) Обратите внимание на то, что недоступный объем в четыре раза превосходит реальный объем молекул. в) Оцените диаметр молекулы $CO_2$ (см. задачу 30).

### * Раздел 18.7

32. (II) При каком (приблизительно) давлении средняя длина свободного пробега молекул воздуха равна а) 1,0 м; б) диаметру молекул воздуха, т. е. примерно $3 \cdot 10^{-10}$ м?

* 33. (II) а) Экспериментально измеренная средняя длина свободного пробега молекул углекислого газа при нормальных условиях приблизительно равна $5{,}6 \cdot 10^{-8}$ м. Оцените диаметр молекулы углекислого газа. б) Сделайте то же самое для газообразного гелия, в котором $l_m \approx 25 \cdot 10^{-8}$ м при нормальных условиях.

34. (II) Коробка кубической формы объемом $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ м$^3$ содержит 55 мраморных шариков диаметром 1,2 см. Чему равна средняя длина свободного пробега мраморного шарика, когда а) коробку трясут интенсивно и б) слегка встряхивают?

35. (II) Из кубической коробки с ребром 20 см откачан воздух до такой степени, что давление внутри равно $10^{-6}$ мм рт. ст. Оцените, сколько столкновений между молекулами приходится в сосуде на одно столкновение молекулы со стенкой (температура равна 0 °C).

* 36. (II) В воздух выпустили небольшое количество водорода. Оцените среднюю длину свободного пробега молекулы $H_2$, если давление воздуха равно 1 атм, а температура 25 °C. Какие допущения вы сделали?

* 37. (II) Оцените максимально допустимое давление в кинескопе длиной 45 см, если 98% всех электронов должны попасть на экран, не столкнувшись ни с одной молекулой воздуха.

* 38. (II) а) Покажите, что число столкновений, которые молекула совершает в 1 с, называемое *частотой столкновений* $\nu$, дается выражением $\nu = 4\sqrt{2}\pi r^2 n_V \bar{v}$, т. е. $\nu = \bar{v}/l_m$. б) Какова частота столкновений молекул $N_2$ в воздухе при температуре 20 °C и давлении $10^{-2}$ атм?

* 39. (II) Пусть газ содержит два типа молекул с концентрациями $n_1$ и $n_2$ соответственно. Радиусы молекул равны соответственно $r_1$ и $r_2$. Покажите, что средняя длина свободного пробега молекул первого типа дается выражением

$$l_{m1} = \frac{1}{4\pi r_1^2 n_1 + \pi (r_1 + r_2)^2 n_2},$$

если молекулы считать твердыми сферами.

* 40. (III) Пусть в некоторый момент времени мы имеем $N_0$ идентичных молекул. Покажите, что число молекул $N$, которые пройдут расстояние не менее $x$, прежде чем испытают следующее столкновение, дается выражением $N = N_0 e^{-x/l_m}$, где $l_m$ – средняя длина свободного пробега молекулы. Это выражение называется *уравнением выживания*.

### * Раздел 18.8

* 41. (II) Оцените радиус молекулы кислорода на основании измерений а) средней длины свободного пробега, которая оказалась равной $9{,}05 \cdot 10^{-8}$ м; б) коэффициента диффузии $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ м$^2$/с при температуре 0 °C и давлении 1 атм.

* 42. (II) а) Оцените коэффициент диффузии газа $H_2$ низкой концентрации при его диффузии в воздухе. (*Подсказка:* большинство столкновений происходит с молекулами воздуха.) Экспериментально полученное значение при температуре 20 °C и давлении 1 атм приблизительно равно $6{,}3 \cdot 10^{-5}$ м$^2$/с.

* 43. (II) а) Покажите, что коэффициент диффузии идеального газа пропорционален $T^{3/2}$. б) Оцените коэффициент диффузии молекул кислорода в воздухе при температуре 0 °C и давлении 1 атм, исходя из значения, приведенного в табл. 18.4.

*44. (II) Кислород диффундирует с поверхности тела насекомых внутрь через маленькие трубки, называемые трахеями. Длина средней трахеи равна приблизительно 2 мм, а площадь ее поперечного сечения $2 \cdot 10^{-9}$ м$^2$. Считая, что концентрация кислорода внутри насекомого в два раза меньше, чем концентрация кислорода в атмосфере, вычислите а) скорость диффузии $J$; б) среднее время диффузии молекул внутрь насекомого. Считайте, что коэффициент диффузии равен $10^{-5}$ м$^2$/с.

45. (II) а) Выведите *закон Грехема*, который утверждает, что «скорость диффузии молекул газа обратно пропорциональна квадратному корню из массы молекул». б) Покажите, что скорость диффузии обратно пропорциональна квадрату плотности. в) Какой газ будет диффундировать быстрее: $N_2$ или $O_2$? И насколько быстрее (в процентах)?

*46. (III) Запишите выкладки, аналогичные тем, которые делались при выводе соотношения (18.12), и покажите, что коэффициент вязкости $\eta$ разреженного газа определяется выражением

$$\eta = (1/3)\, n_V \bar{v} m l_m,$$

где $m$ – масса молекулы. В этом случае он представляет собой скорость течения (считается, что она значительно меньше, чем средняя скорость движения молекул $\bar{v}$), а не скорость движения молекул, которые пересекают поверхность, изображенную на рис. 18.13 [см. выражение (13.5б) и рис. 13.7].



# Теплота

Если котелок с холодной водой поставить на зажженную горелку плиты, то температура воды возрастет. Мы говорим, что теплота от горячей горелки перешла к холодной воде. Когда два тела, имеющие разные температуры, приводятся в контакт, теплота переходит от более теплого к более холодному телу. Поток тепла направлен таким образом, чтобы температуры тел стали одинаковыми. Если два тела пребывают в контакте достаточно долго, так что их температуры становятся одинаковыми, то говорят, что тела находятся в тепловом равновесии; при этом никакого переноса тепла между ними не существует. Например, ртуть в медицинском термометре поднимается вверх, когда тепло от тела пациента передается термометру; если ртуть останавливается, то, следовательно, термометр пришел в тепловое равновесие с телом пациента; при этом температуры термометра и тела становятся одинаковыми.

## 19.1. Ранние теории теплоты; теплород

Обычно говорят о потоке теплоты – теплота «перетекает» от горелки плиты к кофейнику с кофе, от Солнца к Земле, от тела человека к медицинскому термометру. Теплота «перетекает» от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой. Действительно, еще в прошлом веке в теории теплоты считалось, что поток теплоты является результатом перемещения гипотетической субстанции, подобной жидкости и называемой *теплородом*. Согласно теории теплорода, любое тело содержит некоторое количество этой субстанции, и если в тело перетечет еще некоторое ее количество, то температура тела повысится; если же теплород вытечет из тела, то его температура понизится. Считалось, что когда тело разрушается (например, в процессе его сжигания), то освобождается значительное количество теплорода.

Однако в процессе переноса теплоты никогда не отмечалось изменения массы тела, и никаким другим методом теплород также не мог быть обнаружен. Поэтому предполагалось, что у теплорода нет ни массы, ни запаха, ни вкуса, ни цвета. Несмотря на несколько таинственный

характер этой субстанции, теория теплорода объясняла многие наблюдаемые явления, в частности тепловой «поток» от горячего тела к холодному. Но, как мы вскоре увидим, были обнаружены явления, не находившие удовлетворительного объяснения в рамках этой теории.

Хотя теория теплорода давно отброшена, ее отголоски остались, например выражение «тепловой поток», как если бы теплота была жидкостью. Одна из обычно используемых единиц измерений теплоты называется *калорией* («теплород» по латыни calorie). Эта единица определяется как *количество теплоты, необходимое для повышения температуры одного грамма воды на один градус Цельсия, а именно от температуры 14,5 °C до температуры 15,5 °C*. Эта конкретная температура указана потому, что количество теплоты, требуемое для нагрева, хотя и совсем незначительно, зависит от температуры. (В диапазоне температур от 0 до 100 °C это изменение составляет не более 1%, и для большинства целей этим различием можно пренебречь.) Чаще используется более крупная единица – *килокалория* (ккал), которая равна 1000 кал. Таким образом, 1 ккал – это количество теплоты, необходимое для повышения температуры 1 кг воды на 1 °C (от 14,5 до 15,5 °C). Иногда килокалорию называют *большой калорией*, именно с помощью этих единиц указывается энергетическая цена, или калорийность пищи.

## 19.2. Теплота в процессе переноса энергии; механический эквивалент теплоты

Одной из главных трудностей теории теплорода была невозможность расчета полного количества теплоты[1)], полученного трением. Если, например, долгое время тереть друг о друга ладони или два куска металла, то можно производить неограниченное количество теплоты. Американский ученый Бенжамин Томпсон (1753–1814), позже ставший графом Румфордом Баварским, вплотную столкнулся с этой трудностью, когда он наблюдал за процессом высверливания стволов пушек. В отверстие ствола пушки наливалась вода для его охлаждения в процессе сверления. При сверлении доливалась холодная вода, чтобы возместить потери выкипевшей воды. Было предположено, что теплород, вызывающий кипение воды, выделяется при разрушении металла. Но Румфорд заметил, что, даже если сверлильные инструменты настолько затуплены, что разрушения металла не происходит, теплота все равно производится и вода выкипает. Следовательно, теплород высвобождается, даже если не проис-

[1)] Слово «теплота» здесь используется в разговорном смысле. Позже в этом разделе понятие теплоты будет определено более точно – на современном уровне (см. также разд. 19.3).

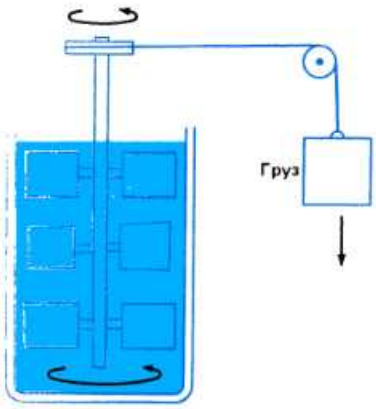



Рис. 19.1. Опыт Джоуля по определению механического эквивалента теплоты.

ходит разрушения вещества. Более того, процесс высвобождения теплорода может происходить неограниченно, что приводит к возникновению неограниченного количества теплоты. Это противоречит предположению о том, что теплота является субстанцией, и, следовательно, внутри тела может содержаться только ограниченное ее количество. Поэтому Румфорд отбросил теорию теплорода и вместо этого предположил, что теплота является особым видом движения. Он утверждал, что при некоторых обстоятельствах теплота производится за счет совершения механической работы (например, при трении двух тел друг о друга). Эта идея была в начале 1800-х годов развита другими исследователями, в частности английским пивоваром Джеймсом Джоулем (1818–1889).

Джоуль поставил ряд экспериментов, которые оказались основополагающими для современного представления о том, что теплота, как и работа,–это способ передачи энергии. На рис. 19.1 показана упрощенная схема одного из опытов Джоуля. Подвешенное тело заставляет вращаться турбину с лопатками. Трение лопаток о воду приводит к небольшому повышению температуры воды (именно это повышение температуры было непосредственно измерено Джоулем). Разумеется, такое же повышение температуры можно было бы получить, нагревая воду на горелке плиты. В этом и многих других опытах (в некоторые из них входила электрическая энергия) Джоуль обнаружил, что определенная работа всегда эквивалентна определенному количеству теплоты. Было показано, что численно работа, равная 4,186 джоуля (Дж), эквивалентна 1 калории (кал) теплоты. Это соответствие известно как *механический эквивалент теплоты*:

4,186 Дж = 1 кал,
$4{,}186 \cdot 10^3$ Дж = 1 ккал.

С помощью этих и других опытов ученые пришли к отказу о представлении теплоты как некой субстанции или даже формы энергии, но установили, что теплота–это способ передачи энергии. При переходе теплоты от более горячего тела к более холодному именно энергия переходит от горячего тела к холодному. Следовательно, **теплота** – *это энергия, которая переходит от одного тела к другому из-за разницы в их температурах*. В системе СИ единицей измерения теплоты, как и любой формы энергии, является джоуль. Тем не менее иногда по-прежнему используют внесистемные единицы измерения теплоты – калорию и килокалорию. В настоящее время калория *определяется* через джоуль (а не с помощью свойств воды, как было сделано в разд. 19.1). Определение, данное выше (1 кал = 4,186 Дж), согласуется с более ранним определением. Но в настоящее время используется другое определение:

1 кал = 4,184 Дж.

Эта калория называется *термохимической калорией*. Мы не будем останавливаться здесь на небольшом различии этих двух определений, разница между которыми составляет не более 0,05%.

Развитие молекулярно-кинетической теории полностью подтвердило и дало хорошее объяснение гипотезе о том, что теплота есть способ передачи энергии. Рассмотрим процесс нагревания котелка с водой на плите. Согласно молекулярно-кинетической теории, средняя кинетическая энергия молекул возрастает с ростом температуры; следовательно, кинетическая энергия молекул пламени горелки в среднем во много раз превышает среднюю кинетическую энергию молекул холодной воды в котелке. При столкновениях молекул пламени, обладающих большой кинетической энергией, с молекулами котелка часть их кинетической энергии переходит к молекулам котелка точно так же, как быстро движущийся бильярдный шар передает часть своей кинетической энергии шару, с которым он соударяется. Молекулы котелка приобретают кинетическую энергию (молекулы пламени теряют энергию). В свою очередь, молекулы котелка, обладающие теперь большой кинетической энергией, передадут при столкновениях часть своей кинетической энергии молекулам воды, имеющим меньшую кинетическую энергию. Именно благодаря этим процессам и возрастает температура воды и котелка. Следовательно, мы показали, почему передача теплоты является, по существу, передачей энергии.

## 19.3. Различие между температурой, теплотой и внутренней энергией

Введем теперь в рассмотрение понятие внутренней энергии, поскольку это поможет прояснить представление о теплоте. **Тепловой,** или **внутренней**, **энергией** (мы будем использовать оба этих названия равноправно) называется полная сумма всех видов энергии всех молекул, принадлежащих телу. Иногда внутреннюю энергию называют «теплосодержанием» тела, но такое название неудачно, и его можно перепутать с собственно теплотой. Теплота, как мы уже выяснили,– это не заключенная в теле энергия, а то количество энергии, которое передается от горячего тела холодному.

Различие между температурой, теплотой и внутренней энергией можно понять с помощью молекулярно-кинетической теории. Температура является мерой *средней* кинетической энергии отдельных молекул тела. Тепловая, или внутренняя, энергия тела относится к *полной* энергии всех молекул тела. (Таким образом, у двух горячих железных брусков одинаковой массы могут быть одинаковые температуры, но тепловая энергия двух брусков

будет в два раза больше тепловой энергии одного из них.) Теплота же характеризует передачу энергии (обычно тепловой энергии) от одного тела к другому из-за различия их температур.

Заметим, что направление потока теплоты между двумя телами зависит от их температур, но не зависит от того, как много внутренней энергии заключено в каждом из них. Таким образом, если 50 г воды при температуре 30 °C привести в контакт (или смешать) с 200 г воды, имеющей температуру 25 °C, то теплота будет переходить *от* воды с температурой 30 °C *к* воде с температурой 25 °C, даже если внутренняя энергия воды при температуре 25 °C значительно больше, так как этой воды просто больше по количеству.

## 19.4. Внутренняя энергия идеального газа

Вычислим внутреннюю энергию $n$ молей идеального одноатомного (на молекулу приходится один атом) газа. Внутренняя энергия $U$ является суммой кинетических энергий поступательного движения всех атомов. Эта сумма в точности равна средней кинетической энергии одной молекулы, умноженной на полное число молекул $N$:

$$U = N\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right).$$

Из соотношения (18.4) мы имеем

$$U = \frac{3}{2}NkT,$$

или

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \text{[одноатомный идеальный газ]},$$

где $n$ – число молей газа. Таким образом, внутренняя энергия идеального газа определяется только температурой и числом молей газа.

Если молекулы газа содержат больше одного атома, то необходимо учитывать энергии вращательного и колебательного движений молекул. У многоатомного газа при данной температуре внутренняя энергия больше, чем у одноатомного, но по-прежнему эта энергия является функцией только температуры.

Внутренняя энергия реальных газов также зависит от температуры, однако в той области, где их поведение существенно отличается от идеального, она зависит в некоторой степени от давления и объема.

Внутренняя энергия жидкостей и твердых тел имеет очень сложный вид, поскольку в нее входит потенциальная энергия электрического взаимодействия, связанная с силами (или «химическими» связями), действующими между атомами и молекулами.

## 19.5. Теплоемкость

Из опыта получено, что количество теплоты $Q$, необходимое для изменения температуры системы, пропорционально массе системы $m$ и изменению температуры $\Delta T$. Это было известно уже в восемнадцатом столетии. Соотношение между $Q$, $m$ и $\Delta T$ можно записать, таким образом, в виде

$$Q = mc\,\Delta T, \tag{19.1}$$

где $c$ – величина, характеризующая данное вещество и называемая *удельной теплоемкостью*. Для воды при температуре 15 °C и постоянном давлении 1 атм мы имеем $c = 1{,}00$ ккал/кг·°C или $4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/кг·°C; это соответствует тому, что для повышения температуры 1 кг воды на 1 °C требуется 1 ккал теплоты. В табл. 19.1 приведены удельные теплоемкости некоторых веществ при температуре 20 °C. Теплоемкость $c$ зависит в какой-то мере от температуры (также слабо зависит она и от давления), но в очень небольшом температурном диапазоне ее можно во многих случаях рассматривать как постоянную[1].

*Таблица 19.1.* Удельные теплоемкости* при постоянном давлении (температура 20 °C и давление 1 атм)

| Вещество | Удельная теплоемкость $c_p$, ккал/кг·°C | Дж/кг·°C |
|---|---|---|
| Алюминий | 0,22 | 900 |
| Медь | 0,093 | 390 |
| Стекло | 0,20 | 840 |
| Лед (−5 °C) | 0,50 | 2100 |
| Железо или сталь | 0,11 | 450 |
| Свинец | 0,031 | 130 |
| Мрамор | 0,21 | 860 |
| Серебро | 0,056 | 230 |
| Древесина | 0,4 | 1700 |
| Этиловый спирт | 0,58 | 2400 |
| Ртуть | 0,033 | 140 |
| Вода (15 °C) | 1.00 | 4186 |
| Пар (110 °C) | 0,48 | 2010 |
| Тело человека | 0,83 | 3470 |
| Белок | 0,4 | 1700 |

* Аналогичную таблицу для газов см. в гл. 20 (табл. 20.1).

Теплоемкость, определяемая выражением (19.1), зависит также от того, каким образом происходит процесс нагревания. Предположим, что нагревание проводится при постоянном (атмосферном) давлении; при таком нагревании теплоемкость $c$ называют теплоемкостью при постоянном давлении и обозначают $c_p$. Именно эта величина приведена в табл. 19.1, поскольку ее наиболее просто измерить как для твердых тел, так и для жидкостей. Существует много других условий, при которых можно сообщать телу теплоту. Например, может оставаться постоянным объем вещества (при этом давление может изменяться); в этом случае мы имеем теплоемкость при постоянном объеме, которая обозначается $c_v$. Различие между $c_p$ и $c_v$ для твердых тел и жидкостей составляет обычно несколько процентов; для газов эта разница гораздо больше, и этот вопрос мы обсудим в разд. 20.4. Далее нас будет интересовать только теплоемкость $c_p$ (если не будет оговорено иное), и поэтому индекс $p$ мы опустим.

---

[1] Для учета зависимости теплоемкости $c$ от температуры $T$ можно переписать соотношение (19.1) в другом виде: $dQ = mc\,dT$; следовательно, количество теплоты $Q$, необходимое для изменения температуры от $T_1$ до $T_2$, запишется в виде

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc\,dT,$$

где $c$ является функцией температуры.

**Пример 19.1.** Какое количество теплоты необходимо для нагрева 20 кг железа от 10 до 90 °С?

**Решение.** Из табл. 19.1 следует, что теплоемкость железа равна 0,11 ккал/(кг·°С). Изменение температуры равно 90 °С – 10 °С = 80 °С. Таким образом,

$$Q = mc\,\Delta T =$$
$$= (20\text{ кг})\,(0{,}11\text{ ккал/кг}\cdot{}^\circ\text{С})\,(80\,^\circ\text{С}) =$$
$$= 180\text{ ккал}.$$

Если бы железо охлаждалось от 90 до 10 °С, то при этом выделилось бы 180 ккал теплоты. Иными словами, формула (19.1) справедлива для теплового потока как при подведении, так и при отводе теплоты с соответствующим повышением или понижением температуры. Если бы в предыдущем примере пришлось нагревать от 10 до 90 °С не железо, а 20 кг воды, то для этого потребовалось бы 1600 ккал теплоты. Из всех веществ вода имеет наибольшую теплоемкость, что делает ее идеальной средой для отопительных систем (батарей) на горячей воде и других целей, когда перепад температур должен быть минимальным.

В случае когда разные части изолированной системы имеют различные температуры, теплота будет переходить от той части, у которой более высокая температура, к той, у которой она более низкая. Если система полностью изолирована, то никакая энергия не может быть подведена к системе или отведена от нее: следовательно, согласно закону сохранения энергии, количество теплоты, теряемое одной частью системы, равно количеству теплоты, получаемому другой частью:

Теряемое количество теплоты = Получаемое количество теплоты.

Рассмотрим теперь следующий пример.

**Пример 19.2.** В стеклянную чашку массой 300 г с температурой 25 °С наливают 200 см$^3$ чаю, имеющего температуру 95 °С. Какая температура будет у чашки с чаем, после того как установится тепловое равновесие? Предположим, что теплообмена с окружающей средой не происходит.

**Решение.** Поскольку чай состоит в основном из воды, его теплоемкость равна 1,00 ккал/кг·°С, а его масса $m$ равна произведению плотности чая на занимаемый им объем, т. е. $m = \rho V = (1{,}0\cdot 10^3\text{ кг/м}^3)\times$ $\times\,(200\cdot 10^{-6}\text{ м}^3) = 0{,}20$ кг. Мы установили, что

$$\begin{pmatrix}\text{Количество теплоты,}\\ \text{отданное чаем}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Количество теплоты,}\\ \text{полученной чашкой}\end{pmatrix},$$

$$m_{\text{чай}}\,c_{\text{чай}}(95\,^\circ\text{С} - T) = m_{\text{чашк}}\,c_{\text{чашк}}(T - 25\,^\circ\text{С}).$$

Здесь $T$ – конечная температура, подлежащая определению. Подставим в последнее равенство численные значения, используя данные табл. 19.1:

$$(0{,}20\text{ кг})(1{,}00\text{ ккал/кг}\cdot{}^\circ\text{С})(95\,^\circ\text{С} - T) =$$
$$= (0{,}30\text{ кг})\,(0{,}20\text{ ккал/кг}\cdot{}^\circ\text{С})(T - 25\,^\circ\text{С}),$$
$$19 - 0{,}20T = 0{,}060T - 1{,}5;$$

окончательно находим $T = 79\,^\circ\text{С}$.

Рассмотренный в примере 19.2 обмен энергией лежит в основе метода, называемого *калориметрией*, который заключается в количественном измерении обмена теплотой. Для проведения таких измерений используется *калори-*

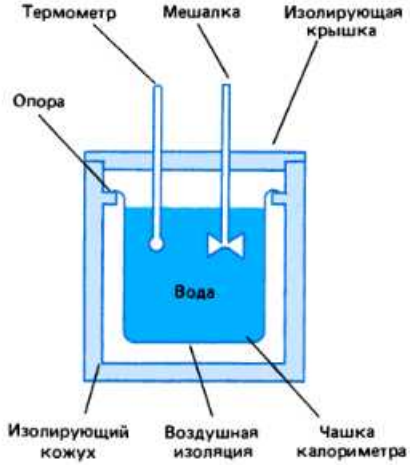



Рис. 19.2. Простой водяной калориметр.

*метр*. На рис. 19.2 изображен простой водяной калориметр. Очень важно, чтобы калориметр был хорошо теплоизолирован, так чтобы с окружающей средой происходил лишь минимальный теплообмен. Одним из важных применений калориметра является определение теплоемкости веществ. В методе, называемом методом смешивания, образец данного вещества нагревается до высокой температуры, которая измеряется с высокой степенью точности. Затем образец быстро помещается в холодную воду калориметра. Теплота, теряемая образцом, будет передаваться воде и калориметру. Измеряя конечную температуру «смеси» в калориметре, можно вычислить теплоемкость вещества, как показано в следующем примере.

**Пример 19.3.** Необходимо определить теплоемкость нового сплава. Для этого образец сплава массой 0,150 кг нагревается до температуры 540 °C и быстро помещается в 400 г воды с температурой 10,0 °C, которая находится в алюминиевой чашке калориметра массой 200 г. (Нам не нужно знать массу изолирующего кожуха, поскольку мы предполагаем, что его температура существенно не меняется.) Конечная температура, установившаяся в калориметре, равна 30,5 °C. Вычислим теплоемкость сплава.

**Решение.** Воспользуемся тем, что количество теряемой теплоты равно количеству получаемой теплоты. Таким образом,

$$\begin{pmatrix}\text{Количество}\\ \text{теплоты,}\\ \text{теряемое}\\ \text{образцом}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Количество}\\ \text{теплоты,}\\ \text{получаемое}\\ \text{водой}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Количество}\\ \text{теплоты,}\\ \text{получаемое}\\ \text{калориметром}\end{pmatrix}$$

$$m_{\text{обр}}c_{\text{обр}}\Delta T_{\text{обр}} = m_{\text{вода}}c_{\text{вода}}\Delta T_{\text{вода}} + m_{\text{кал}}c_{\text{кал}}\Delta T_{\text{кал}}.$$

Подставим в это уравнение численные значения, используя табл. 19.1:

$$(0{,}150\ \text{кг})(c_{\text{обр}})(540\,^\circ\text{C} - 30{,}5\,^\circ\text{C}) =$$
$$= (0{,}40\ \text{кг})(1{,}0\ \text{ккал/кг}\cdot{}^\circ\text{C})(30{,}5\,^\circ\text{C} -$$
$$- 10{,}0\,^\circ\text{C}) + (0{,}20\ \text{кг})(0{,}22\ \text{ккал/кг}\cdot{}^\circ\text{C}) \times$$
$$\times (30{,}5\,^\circ\text{C} - 10{,}0\,^\circ\text{C}),$$
$$76{,}5c_{\text{обр}} = (8{,}2 + 0{,}9)\ \text{ккал/кг}\cdot{}^\circ\text{C},$$
$$c_{\text{обр}} = 0{,}12\ \text{ккал/кг}\cdot{}^\circ\text{C}.$$

Выполняя этот расчет, мы не учитывали потерь, связанных с передачей теплоты термометру и мешалке (последняя необходима для ускорения процессов теплопередачи и, следовательно, для уменьшения потерь, связанных с отдачей тепла во внешнюю среду). Эти потери могут быть учтены добавлением дополнительных членов в правую часть написанного выше уравнения. Это внесет небольшую поправку в теплоемкость $c_{обр}$ (см. задачи в конце настоящей главы). Следует заметить, что величина $m_{кал}c_{кал}$ часто называется *водяным эквивалентом* калориметра, поскольку произведение $m_{кал}c_{кал}$ численно равно массе воды (в килограммах), которая поглотила бы то же количество теплоты.

## 19.6. Теплота фазового перехода

Если вещество испытывает фазовый переход из твердого состояния в жидкое или из жидкого в газообразное (см. также разд. 18.5), то этот процесс *изменения фазы* сопровождается передачей некоторого количества энергии. Проследим, например, что происходит при равномерном нагреве воды массой 1,0 кг от температуры, скажем, $-20\,^{\circ}C$, когда вода является льдом, до тех пор, пока весь лед не превратится в воду, которая затем при дальнейшем нагревании при температуре $100\,^{\circ}C$ превратится в пар. Будем считать, что все процессы происходят при давлении 1 атм. Как показано на рис. 19.3, каждый раз при сообщении льду килокалории теплоты его температура возрастает на $2\,^{\circ}C$ (поскольку теплоемкость льда $c \approx 0{,}50$ ккал/кг·°C). Однако, когда температура достигает $0\,^{\circ}C$, ее рост прекращается, хотя теплота по-прежнему подводится. Вместо повышения температуры, поскольку льду сообщается теплота, он постепенно превращается в воду, т. е. переходит в жидкую фазу без изменения температуры. После того как льду при $0\,^{\circ}C$ будет сообщено около 40 ккал теплоты, половина его останется в твердом состоянии, а половина превратится в воду. После того как льду будет сообщено 80 ккал теплоты, весь лед превратится в воду, но температура воды по-прежнему будет равна $0\,^{\circ}C$. Дальнейшее добавление теплоты приведет к повышению температуры (но теперь со скоростью $1\,^{\circ}C$/ккал). Когда вода нагреется до $100\,^{\circ}C$, температура опять остановится на постоянном уровне, так как сообщаемая теплота будет идти на превращение




Рис. 19.3. Подводимая к системе теплота для превращения в пар 1,0 кг льда, находящегося при температуре $-20\,^{\circ}C$.

*Таблица 19.2.* Теплота фазовых переходов для различных веществ (при давлении 1 атм)

| Вещество | Точка плавления, °С | Теплота плавления | | Точка кипения, °С | Теплота парообразования | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ккал/кг* | $10^5$ Дж/кг | | ккал/кг* | $10^5$ Дж/кг |
| Кислород | −218,8 | 3,3 | 0,14 | −183 | 51 | 2,1 |
| Этиловый спирт | −114 | 25 | 1,04 | 78 | 204 | 8,5 |
| Вода | 0 | 79,7 | 3,33 | 100 | 539 | 22,6 |
| Свинец | 327 | 5,9 | 0,25 | 1750 | 208 | 8,7 |
| Серебро | 961 | 21 | 0,88 | 2193 | 558 | 23 |
| Вольфрам | 3410 | 44 | 1,84 | 5900 | 1150 | 48 |

* Значения величин в единицах ккал/кг совпадают численно с их значениями в единицах кал/г.

воды в пар. Для превращения 1,0 кг воды полностью в пар потребуется около 540 ккал. После того как такое количество теплоты будет сообщено воде, кривая на рис. 19.3 снова пойдет вверх, указывая на то, что теперь при добавлении теплоты температура пара повышается.

Количество теплоты, которое требуется для превращения 1 кг вещества из твердого состояния в жидкое, называется *теплотой плавления*; мы будем обозначать ее $l_{пл}$. Теплота плавления льда равна 79,7 ккал/кг. Количество теплоты, необходимое для превращения 1,0 кг вещества из жидкого состояния в пар, называется *теплотой испарения (парообразования)*; мы будем обозначать ее $l_{исп}$. Для воды теплота испарения равна 539 ккал/кг. У остальных веществ температура изменяется аналогично кривой, изображенной на рис. 19.3, хотя температуры точек плавления и кипения будут иными так же, как теплоемкости, теплота плавления и теплота испарения. В табл. 19.2 представлены для некоторых веществ значения теплоты плавления и теплоты испарения, которые называются также *скрытой теплотой*, или *теплотой фазового перехода*.

Теплота испарения и теплота плавления также связаны с количествами теплоты, выделяющимися при переходе вещества из газообразного состояния в жидкое и из жидкого состояния в твердое. Так, пар выделяет 539 ккал/кг, когда превращается в воду, вода выделяет 79,7 ккал/кг, когда превращается в лед.

Теплота, выделяющаяся или поглощающаяся при изменении фазы, определяется, разумеется, не только теплотой фазового перехода, но и полной массой вещества. Иначе говоря, можно написать следующее равенство:

$$Q = ml,$$

где $l$ – теплота фазового перехода в конкретном процессе, $m$ – масса вещества, а $Q$ – количество теплоты, поглощающейся или выделяющейся при этом. Например, когда при температуре 0 °С замерзает 5,00 кг воды, выделяется (5,00 кг) (79,7 ккал/кг) = 398 ккал энергии.

Как мы увидим из следующих примеров, калориметрия иногда имеет дело со случаями, когда происходит изменение фазового состояния. Действительно, с помощью калориметрии нередко измеряют скрытую теплоту.

**Пример 19.4.** Какое количество энергии должен отобрать холодильник у 1,5 кг воды, имеющей температуру 20 °С, чтобы заморозить ее и превратить в лед с температурой −12 °С?

**Решение.** При охлаждении воды от температуры 20 °С до 0 °С, превращении воды в лед и последующем охлаждении льда от 0 до −12 °С выделяется теплота.

$$Q = mc_{\text{вода}}(20\,^\circ\text{C} - 0\,^\circ\text{C}) + ml_{\text{пл}} + mc_{\text{лед}}[0\,^\circ\text{C} - (-12\,^\circ\text{C})] =$$
$$= (1{,}5\text{ кг})(1{,}0\text{ ккал/кг}\cdot\,^\circ\text{C})(20\,^\circ\text{C}) + (1{,}5\text{ кг})(80\text{ ккал/кг}) + (1{,}5\text{ кг})(0{,}5\text{ ккал/кг}\cdot\,^\circ\text{C})(12\,^\circ\text{C}) =$$
$$= 160\text{ ккал},$$

или $6{,}7\cdot 10^5$ Дж.

**Пример 19.5.** Кусок льда массой 0,50 кг с температурой −10 °С помещен в воду массой 3,0 кг, имеющей температуру 20 °С. Чему будет равна температура смеси и в каком фазовом состоянии она будет находиться после установления теплового равновесия?

**Решение.** При решении этого примера, прежде чем выписывать уравнение теплового баланса, нужно разобраться, в каком фазовом состоянии окажется смесь после установления равновесия: будет ли это только лед, смесь льда и воды при 0 °С или только вода. При охлаждении 3,0 кг воды от 20 до 0 °С выделится энергия $mc\Delta T = (3{,}0\text{ кг})(1{,}0\text{ ккал/кг}\cdot\,^\circ\text{C})(20\,^\circ\text{C}) = 60$ ккал. Для нагрева льда от −10 до 0 °С потребуется (0,50 кг) (0,50 ккал/кг·°С) × × (10 °С) = 2,5 ккал, а для превращения льда в воду при 0 °С необходимо (0,50 кг) × × (80 ккал/кг) = 40 ккал, что в сумме составит 42,5 ккал. Это меньше, чем энергия, выделяющаяся при охлаждении 3 кг воды от 20 до 0 °С, так что смесь будет водой с температурой где-то между 20 и 0 °С. Конечную температуру можно определить, записав следующее уравнение:

Количество теплоты, поглощаемое льдом при нагревании от −10 до 0 °С + Количество теплоты, поглощаемое при превращении льда в воду + Количество теплоты, поглощаемое при нагреве 0,50 кг воды от 0 °С до $T$ = Количество теплоты, выделяемое 3,0 кг воды при охлаждении от 20 °С до $T$

Следовательно,

$$2{,}5\text{ ккал} + 40\text{ ккал} + (0{,}50\text{ кг})(1{,}0\text{ ккал/кг}\cdot\,^\circ\text{C})(T) = (3{,}0\text{ кг})(1{,}0\text{ ккал/кг}\cdot\,^\circ\text{C})(20\,^\circ\text{C} - T),$$

или

$$42{,}5 + 0{,}50T = 60 - 3{,}0T,$$
$$T = 5{,}0\,^\circ\text{C}.$$

Теплота, необходимая для перехода вещества из жидкого состояния в газообразное, должна сообщаться веществу не только в точке кипения. Например, вода может переходить из жидкой в газовую фазу даже при комнатной температуре. Такой процесс называется *испарением* (мы уже рассматривали его в разд. 18.3). Значение теплоты парообразования слегка возрастает с понижением температуры: так, при 20 °С она составляет 585 ккал/кг, тогда как при 100 °С мы имеем 539 ккал/кг.

Для того чтобы понять, почему для плавления или

испарения вещества необходимо затратить энергию, можно использовать молекулярно-кинетическую теорию. В точке плавления поступающая извне теплота плавления не увеличивает кинетической энергии (и соответственно температуры) молекул или атомов твердого тела, а идет на преодоление потенциального барьера, обусловленного межмолекулярными силами. Это означает, что, для того чтобы высвободить молекулы из их относительно жестко фиксированных положений в твердом состоянии, нужно совершить работу против действующих между молекулами сил притяжения. Лишь после этого молекулы смогут свободно перемещаться относительно друг друга, как это свойственно жидкому состоянию. Аналогично энергия требуется и для высвобождения молекул жидкости, удерживаемых силами притяжения вблизи друг друга, чтобы жидкость могла перейти в газовую фазу. Этот процесс сопровождается значительно более глубокой перестройкой в расположении молекул, чем при плавлении (сильно увеличивается среднее расстояние между молекулами), и потому теплота испарения для данного вещества, как правило, значительно больше теплоты плавления.

## 19.7. Передача теплоты; теплопроводность

Теплота может передаваться из одного места тела в другое тремя различными способами: с помощью *теплопроводности*, *конвекции* и *излучения*. Мы обсудим последовательно каждый из этих способов; заметим, однако, что в практических ситуациях могут одновременно осуществляться любые два из них (или даже все три) одновременно. Рассмотрим сначала процесс теплопроводности.

Когда отливка из металла помещается в открытое пламя или серебряная ложка погружается в тарелку с горячим супом, свободные концы этих предметов вскоре также оказываются горячими, хотя они и не находились в прямом контакте с источником тепла. В этих случаях мы говорим, что тепло передается (или переносится) от нагретого конца предмета к его холодному концу.

Явление **теплопроводности** можно представлять себе как результат столкновений молекул. По мере нагревания одного из концов предмета молекулы в нем начинают двигаться все быстрее и быстрее. При столкновениях с менее быстро движущимися соседними молекулами они передают им часть своей энергии, в результате чего скорость последних увеличивается. Затем ускорившиеся молекулы передают часть своей энергии в процессе столкновений следующим молекулам, находящимся еще дальше от нагретого конца. Таким образом, можно сказать, что происходит передача (или перенос) теплоты, т. е.

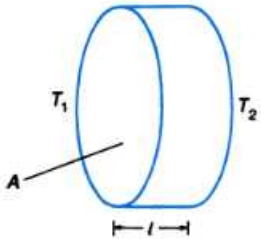



Рис. 19.4. Теплопроводность.

передача энергии теплового движения по объему тела за счет столкновений между молекулами.

Явление теплопроводности происходит только при наличии разности температур между различными точками тела. Экспериментально установлено, что количество теплоты, которое переносится в единицу времени из одного конца тела в другое (это называется тепловым потоком), пропорционально разности температур на его концах. Тепловой поток зависит также от размеров и формы тела. Мы рассмотрим этот вопрос количественно на примере теплового потока через однородное симметричное тело (рис. 19.4). Экспериментально установлено, что тепловой поток, определяемый количеством теплоты $\Delta Q$, проходящим через поперечное сечение тела площадью $A$ за промежуток времени $\Delta t$, дается выражением

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{T_2 - T_1}{l}, \tag{19.2а}$$

где $l$ – расстояние между двумя концами стержня, находящимися при температурах $T_1$ и $T_2$ соответственно, а $k$ – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплопроводности* и характеризующий свойства самого вещества. В некоторых случаях (например, когда величины $k$ или $A$ нельзя считать постоянными) приходится рассматривать предельный случай бесконечно тонкой пластинки толщиной $dx$. При этом выражение (19.2а) принимает вид

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx}, \tag{19.2б}$$

где $dT/dx$ – градиент температуры, а знак минус указывает на то, что тепловой поток направлен в сторону, противоположную градиенту температуры[1)].

*Таблица 19.3.* Коэффициенты теплопроводности различных веществ

| Вещество | Теплопроводность $k$ | |
|---|---|---|
| | $10^{-4}$ ккал/(с·м·°C) | Дж/(с·м·°C) |
| Серебро | 1000 | 420 |
| Медь | 920 | 380 |
| Алюминий | 500 | 200 |
| Сталь | 110 | 40 |
| Стекло (обычное) | 2,0 | 0,84 |
| Бетон и кирпич | 2,0 | 0,84 |
| Вода | 1,4 | 0,56 |
| Ткань тела человека (сухая) | 0,5 | 0,2 |
| Асбест | 0,4 | 0,16 |
| Древесина | 0,2–0,4 | 0,08–0,16 |
| Пробка и стекловолокно | 0,1 | 0,042 |
| Пух | 0,06 | 0,025 |
| Воздух | 0,055 | 0,023 |

В табл. 19.3 приведены коэффициенты теплопроводности $k$ для различных веществ. Вещества с большими значениями $k$ легко проводят тепло и называются *хорошими проводниками* тепла. К ним относится большинство металлов, хотя у них величина $k$ может иметь самые различные значения, в чем нетрудно убедиться, подержав в тарелке с горячим супом ложку из серебра и из нержавеющей стали. Вещества, у которых коэффициент тепло-

[1)] Соотношение (19.2а), согласно которому тепловой поток (в единицу времени) пропорционален площади поперечного сечения и градиенту температуры, полностью аналогично соотношениям, описывающим диффузию (гл. 18) и течение жидкости в трубе (гл. 13). В этих случаях поток вещества через единицу площади поперечного сечения пропорционален соответственно градиенту концентрации или давления. Именно благодаря этой аналогии мы используем термин «поток» применительно к количеству теплоты; однако следует иметь в виду, что в последнем случае происходит перенос только энергии, но не вещества.

проводности мал (например, асбест или пух), плохо проводят тепло и называются поэтому *теплоизоляторами*. То, что коэффициент теплопроводности $k$ у разных веществ различен, позволяет объяснить и такие простые явления, как, например, почему, когда мы стоим босиком на кафельном полу, мы ощущаем его значительно более холодным, чем покрытый ковром пол при той же температуре. Дело в том, что кафель является лучшим проводником тепла, чем ковер; поэтому теплота, приходящая от ног к ковру, сразу не уходит к другим телам, и поверхность ковра быстро нагревается до температуры ног. В отличие от этого кафель хороший проводник тепла, он быстро проводит тепло и потому может забрать у ног большее количество тепла, так что температура поверхности кафельного пола понижается.

**Пример 19.6.** Основным источником тепловых потерь в доме являются окна. Вычислите тепловой поток в единицу времени через стеклянное окно площадью $A = 2{,}0\ \text{м} \times 1{,}5\ \text{м}$ толщиной 3,2 мм, если температуры внутренней и внешней поверхностей окна равны соответственно 15 и 14 °С.

**Решение.** Подставляя в соотношение (19.2а) значения $A = (2{,}0\ \text{м})(1{,}5\ \text{м}) = 3\ \text{м}^2$ и $l = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м, а также значение $k$ для стекла из табл. 19.3, получаем

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(0{,}84\ \text{Дж/с} \cdot \text{м} \cdot {}^\circ\text{C})(3{,}0\ \text{м}^2)(15{,}0\ {}^\circ\text{C} - 14{,}0\ {}^\circ\text{C})}{3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}} =$$

$$= 790\ \text{Вт}.$$

Это эквивалентно потоку теплоты (790 Дж/с)/(4,18 · 10³ Дж/ккал) = = 0,19 ккал/с, или (0,19 ккал/с)(3600 с/ч) = = 684 ккал/ч.

Можно, разумеется, возразить, что 15 °С – это не слишком высокая температура для жилого помещения. Однако температура в комнате может быть значительно выше 15 °С (а внешняя температура за окном может быть значительно ниже 14 °С). Но ведь температуры 15 и 14 °С были указаны как температуры поверхностей оконного стекла, а опыт показывает, что между температурой окружающего воздуха и температурой поверхности окна обычно имеется значительная разница[1]. Точнее говоря, слой воздуха с любой стороны окна выполняет роль теплоизолятора, и в обычных условиях перепад температур между внутренней и наружной частями дома приходится главным образом на этот слой воздуха. Поэтому в целях удержания тепла в доме значительно полезнее увеличить толщину воздушной прослойки (например, с помощью установки двойных оконных рам), чем просто наращивать толщину стекла.

Теплоизолирующие защитные свойства одежды также обусловлены действием воздушной прослойки. В отсутствие одежды наши тела нагревали бы воздух, соприкасающийся с кожей, и вскоре было бы достигнуто достаточно комфортное состояние, поскольку воздух – хороший теплоизолятор. Однако, поскольку воздух движется (до-

[1] Если снаружи дует сильный ветер, то воздух перед окном будет постоянно заменяться новыми холодными порциями, так что градиент температуры между наружной и внутренней поверхностями стекла увеличится, а это приведет к возрастанию скорости тепловых потерь из дома.

статочно легкого дуновения ветерка или движения человека), теплые его слои сменяются холодными, в результате чего увеличиваются потери тепла телом человека. Одежда согревает нас потому, что она удерживает нагретый нами воздух и не дает ему легко уходить из нашего тела. Таким образом, строго говоря, от потери тепла нас предохраняет не одежда, а воздух, который удерживается одеждой. Пух и перо являются очень хорошим теплоизолятором, поскольку даже очень малое их количество во взбитом состоянии способно удержать значительный объем воздуха. С этой точки зрения можете ли вы объяснить, почему драпировки перед окном уменьшают утечку тепла из дома?

## 19.8. Передача теплоты; конвекция

Несмотря на то что жидкости и газы являются, как правило, не очень хорошими проводниками тепла, они могут обеспечивать довольно быструю передачу его благодаря явлению конвекции. **Конвекция** – это процесс, благодаря которому теплота переносится за счет перемещения большого числа молекул из одного места в другое. Различие между явлениями теплопроводности и конвекции в том, что в первом из них молекулы перемещаются лишь на очень малые расстояния (порядка длины свободного пробега) и затем сталкиваются, в то время как во втором случае молекулы перемещаются на значительные расстояния.

Конвекция может быть как *вынужденной*, так и *естественной*; примером конвекции первого типа может служить нагреватель с вентилятором, с помощью которого нагретый воздух вдувается в комнату. Известным примером естественной конвекции является подъем вверх нагретого воздуха. Например, вблизи радиатора отопления (или другого нагревателя) воздух по мере нагревания расширяется и, следовательно, его плотность по сравнению с другими слоями уменьшается, что и приводит к его подъему. Крупномасштабное проявление естественной конвекции можно наблюдать на примере теплых или холодных океанских течений (например, Гольфстрима).

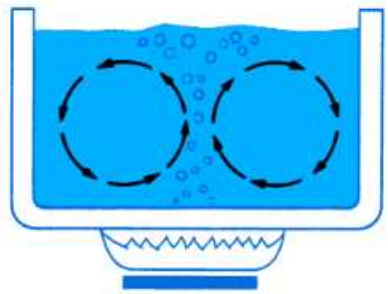


Рис. 19.5. Конвекционные потоки в котелке воды, нагреваемом на газовой горелке.

Ветер представляет собой еще один пример явления конвекции; вообще погодные условия обусловлены в конечном счете конвективными движениями (токов) воздуха.

При нагревании сосуда с водой (рис. 19.5) токи конвекции возникают по мере того, как нагретая вода из нижней части сосуда поднимается вверх благодаря уменьшившейся плотности и замещается более холодной водой из верхней части сосуда. Этот принцип лежит в основе действия многих отопительных систем в домах и других сооружениях. Мы не будем заниматься количественным изучением конвекции, поскольку этот вопрос достаточно сложен и, по существу, больше относится к инженерным задачам, чем к физическим.

## 19.9. Передача теплоты; излучение

Для того чтобы передать теплоту как посредством конвекции, так и за счет теплопроводности, необходимо наличие вещества. Однако, например, жизнь на Земле целиком и полностью зависит от солнечной энергии, которая переносится от Солнца к Земле сквозь пустое (точнее, почти пустое), т. е. не заполненное веществом, пространство. Такая форма передачи энергии может быть осуществлена лишь за счет теплообмена и называется **излучением**. Напомним, что температура Солнца (6000 К) значительно превышает температуру поверхности Земли. Тепло, которое мы воспринимаем от горячего огня, также передается главным образом посредством излучения; например, бóльшая часть воздуха, нагреваемого в печи, поднимается вверх за счет конвекции и уходит в трубу, не достигая нас.

В последующих главах мы увидим, что излучение состоит, по существу, из электромагнитных волн. Здесь достаточно лишь заметить, что солнечное излучение содержит как видимый свет, так и много других длин волн, к которым глаз человека не чувствителен, в том числе инфракрасное (ИК) излучение, в основном и нагревающее Землю.

Как показали эксперименты (и подтвердила теория), энергия, излучаемая нагретым телом в единицу времени, пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры $T$. Это означает, что если для сравнения взять два тела с температурами соответственно 2000 и 1000 К, то первое излучает энергию в $2^4 = 16$ раз больше, чем второе. Величина излучаемой энергии пропорциональна также площади поверхности $A$ излучающего тела, так что энергия, излучаемая в единицу времени, запишется в виде

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma A T^4, \tag{19.3}$$

где $\sigma$ – универсальная постоянная, называемая *постоянной Стефана – Больцмана*, значение которой равно

$$\sigma = (5{,}67032 \pm 0{,}00071) \cdot 10^{-8}\ \text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4,$$

или округленно

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4.$$

Безразмерное число $e$, величина которого находится в пределах от 0 до 1, называется *излучательной способностью* и характеризует свойство самого вещества. Очень черные поверхности (например, древесный уголь) имеют значение $e$, близкое к единице, в то время как у блестящих поверхностей величина $e$ близка к нулю, и поэтому они излучают меньше энергии. Вообще говоря, значение $e$ слегка зависит от температуры тела.

Любое тело не только излучает энергию, но также и поглощает энергию, излученную другими телами. Если излучательная способность тела равна $e$, а площадь его поверхности $A$, причем поверхность тела находится при температуре $T_1$, то тело излучает в единицу времени энергию $e\sigma AT_1^4$. В случае когда тело окружено средой, находящейся при температуре $T_2$ и излучающей в единицу времени энергию, пропорциональную $T_2^4$, энергия, поглощаемая телом в единицу времени, также будет пропорциональна $T_2^4$. Таким образом, *результирующий* тепловой поток, излучаемый телом, запишется в виде

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma A(T_1^4 - T_2^4), \tag{19.4}$$

где $A$ – площадь поверхности тела, $T_1$ – его температура, $e$ – его излучательная способность (при температуре $T_1$) и $T_2$ – температура окружающей среды. Следует заметить, что в выражении (19.4) поглощение телом энергии в единицу времени принято равным $e\sigma AT_2^4$, т.е. коэффициент пропорциональности перед $T^4$ один и тот же как для излучения, так и для поглощения. Этот факт согласуется с экспериментальным наблюдением, состоящим в том, что тепловое равновесие между телом и окружающей его средой достигается, когда температуры у них становятся одинаковыми; иными словами, величина $\Delta Q/\Delta t$ должна обращаться в нуль при $T_1 = T_2$, так что коэффициент при каждом слагаемом должен быть одним и тем же. Таким образом, тело, которое хорошо излучает, столь же хорошо и поглощает излучение. Черные или очень темные, хорошо излучающие тела поглощают почти полностью все падающее на них излучение; именно поэтому окрашенная в светлые тона одежда в жаркий день предпочтительнее, чем одежда темных расцветок. С другой стороны, блестящие поверхности не только мало излучают, но столь же мало и поглощают падающее на них излучение (большая часть этого излучения отражается).

Поскольку как само тело, так и его окружение излучают энергию, всегда существует результирующий перенос энергии в том или ином направлении; он отсутствует лишь в случае, когда температуры тела и окружения одинаковы. Как видно из соотношения (19.4), при $T_1 > T_2$ результирующий поток теплоты направлен от тела к окружению, так что тело при этом охлаждается; если же $T_1 < T_2$, то результирующий поток теплоты направлен от окружения к телу, так что тело нагревается и температура его повышается. Если различные части окружающей среды находятся при разных температурах, то соотношение (19.4) принимает более сложный вид.

**Пример 19.7.** Две чайные кружки – керамическая с $e = 0{,}70$ и блестящая с $e = 0{,}10$ – содержат по 0,75 л чая при температуре 95 °C. а) Оцените тепловые потери каждой чашки в единицу времени. б) Найдите, насколько упадет температура чая в каждой чашке через 30 мин. Учитывайте только потери, обусловленные излучением, и примите температуру окружения равной 20 °C.

**Решение.** а) Чайную кружку на 0,75 л чая можно приближенно представить в виде куба с ребром 10 см, так что площадь ее поверхности нетрудно вычислить, и она будет равна примерно $5 \cdot 10^{-2}$ м$^2$. Потери теплоты в единицу времени будут равны приближенно

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e\sigma A(T_1^4 - T_2^4) =$$

$$= e(5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4)(5 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2) \times$$

$$\times ([368\ \text{К}]^4 - [293\ \text{К}]^4) =$$

$$= e(30)\ \text{Дж/с},$$

или около 20 Вт для керамической кружки ($e = 0{,}70$) и всего лишь около 3 Вт для блестящей ($e = 0{,}10$).

б) Для оценки перепада начальной и конечной температур в каждой чашке используем понятие удельной теплоемкости и пренебрежем вкладом самих кружек по сравнению с их содержимым (0,75 л чая). Используя выражение (19.1), имеем

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{(\Delta Q/\Delta t)}{mc} =$$

$$= \frac{e(30)\ \text{Дж/с}}{(0{,}75\ \text{кг})(4{,}18 \cdot 10^3\ \text{Дж/кг} \cdot ^\circ\text{C})} =$$

$$= e(0{,}01)\ ^\circ\text{C/с},$$

откуда находим, что через 30 мин (или 1800 с) температура керамической чашки упадет на 12 °C, а блестящей – всего на 2 °C. Блестящая чашка, очевидно, обладает преимуществом перед керамической (по крайней мере по отношению к излучению). Заметим, что в реальных условиях конвекция и теплопроводность могут играть большую роль, чем излучение.

Степень нагревания тела за счет солнечного излучения нельзя вычислить с помощью соотношения (19.4), поскольку в этом соотношении предполагается однородное распределение температуры $T_2$ во всей окружающей тело среде, в то время как Солнце является, по существу, точечным источником; поэтому его следует рассматривать как дополнительный источник энергии. Нагревание за счет излучения Солнца вычисляется на основе того факта, что около 1350 Дж энергии ежесекундно падает на каждый квадратный метр атмосферы Земли (перпендикулярно солнечным лучам). Это число (1350 Вт/м$^2$) называется *солнечной постоянной*. Прежде чем энергия, излучаемая Солнцем, достигнет поверхности Земли, атмос-

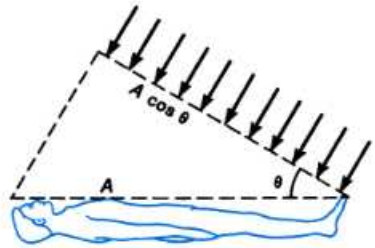



Рис. 19.6. Лучистая энергия, падающая на тело человека под углом θ.

фера может поглотить до 70% этой энергии (в зависимости от состояния облачности). В ясный день на земную поверхность падает около 1000 Вт/м$^2$; это означает, что тела с излучательной способностью $e$ и площадью $A$ поверхности, обращенной к Солнцу, поглощают в единицу времени количество теплоты (в ваттах) около $1000eA\cos\theta$, где $\theta$ – угол между направлением солнечных лучей и нормалью к поверхности $A$ (рис. 19.6). Иными словами, $A\cos\theta$ – площадь «эффективной» поверхности, перпендикулярной солнечным лучам. Множитель $\cos\theta$ лежит в основе объяснений ряда явлений, таких, как характер времен года, существование нетающих полярных льдов и айсбергов, а также больший нагрев земной поверхности в полдень по сравнению с временем захода и восхода Солнца (разумеется, в этих случаях играет роль также продолжительность светового дня).

## Заключение

*Тепловая*, или *внутренняя*, *энергия* $U$ является, как правило, полной энергией всех молекул тела[1]. Под *теплотой* понимается способ передачи энергии от одного тела к другому (теплообмен), не сопровождающийся совершением работы, а целиком обусловленный разностью температур. Количество переданной таким способом энергии (количество теплоты) измеряется в единицах энергии (например, в джоулях); иногда для количества теплоты или тепловой энергии применяют внесистемные единицы – калории или килокалории (1 кал = 4,186 Дж представляет собой количество теплоты, необходимое для повышения температуры 1 г воды на 1 °C).

*Удельная теплоемкость* вещества $c$ определяется как количество энергии (переданное в форме теплоты), необходимое для изменения температуры единицы массы данного вещества на 1 кельвин. Величина $c$ входит в выражение $Q = mc\Delta T$, где $Q$ – количество теплоты, сообщенной телу или отобранной у него, $\Delta T$ – изменение температуры, а $m$ – масса вещества. Если теплота переходит между частями изолированной (адиабатически) системы, то количество теплоты, получаемое одной частью системы, в

[1] Здесь, разумеется, следует исключить энергию поступательного движения как целого. – *Прим. ред.*

точности равно (по абсолютной величине) количеству теплоты, теряемому другой ее частью. На этом основан раздел физического эксперимента, называемый *калориметрией* и состоящий в количественном измерении процессов теплообмена.

Обмен энергией (без изменения температуры) происходит всегда при переходе вещества из одной фазы в другую, и дело здесь заключается в изменении потенциальной энергии взаимодействия молекул в результате изменения их относительных положений. *Теплота плавления* – это количество теплоты, необходимое для того, чтобы расплавить 1 кг вещества, т. е. перевести его из твердой фазы в жидкую; она равна также количеству теплоты, которое отдает тело при обратном переходе – из жидкой фазы в твердую. *Теплота парообразования* – это количество энергии (теплоты), необходимое для того, чтобы перевести 1 кг вещества из жидкого состояния в парообразное; это же количество энергии выделяется, когда вещество конденсируется из парообразной фазы в жидкую.

Теплота переносится из одного места (или от одного тела) в другое (к другому телу) тремя различными способами. В процессе *теплопроводности* энергия от молекул с более высокой кинетической энергией в результате столкновений переходит к соседним молекулам с низшей кинетической энергией. *Конвекция* – это способ передачи энергии путем перемещения большого числа молекул на значительные расстояния. Наконец, *излучение* вообще не требует наличия вещества; в ходе этого процесса энергия передается посредством электромагнитных волн (например, от Солнца к Земле). Все тела излучают энергию; ее величина пропорциональна площади поверхности тела и четвертой степени его абсолютной температуры. Излучаемая телом (поглощаемая) энергия зависит также от того, какой является поверхность тела – темной (поглощающей) или, напротив, блестящей (ярко отражающей); это свойство поверхности характеризуется излучательной способностью.

## Вопросы

1. Во что переходит совершаемая человеком работа, когда он интенсивно взбалтывает банку с апельсиновым соком?
2. Участвует ли действительно в опыте Джоуля (рис. 19.1) теплота?
3. Если горячее тело нагревает холодное, существует ли между ними поток температуры? Одинаковы ли изменения температуры обоих тел?
4. Объясните, почему высшая и низшая годовые температуры в точках на берегу океана принимают меньшие значения, чем в точках в глубине материка, расположенных на той же широте.
5. Существуют области с теплым климатом, где могут произрастать теплолюбивые тропические растения, однако температура в этих областях несколько раз за зиму может опускаться ниже точки замерзания воды. Объясните, почему с целью хотя бы частично предохранить чувствительные растения от вымерзания их следует поливать вечером.
6. Удельная теплоемкость воды весьма велика. Объясните, почему благодаря этому факту во-

да является наиболее удачным рабочим телом для отопительных систем (прежде всего для радиаторов водяного отопления).

**7.** Почему вода во фляге дольше остается холодной, если матерчатый футляр фляги поддерживается влажным?

**8.** Объясните, почему горячий пар причиняет столь тяжелые ожоги коже человека.

**9.** Используя понятия скрытой теплоты, или теплоты фазового перехода, и внутренней энергии, объясните, почему вода при испарении охлаждается (т. е. ее температура понижается).

**10.** Почему при использовании для обогрева жилища калорифера с горячим воздухом необходимо обеспечить возврат охлажденного воздуха обратно в калорифер через специальный вентиль? Что произойдет, если этот вентиль окажется перекрытым (например, книжной полкой)?

**11.** Рано утром, после того как Солнце достигло склона горы, заметна тенденция к небольшому подъему воздуха вверх. Позднее, когда склон попадает в область тени, наблюдается обратная тенденция. Объясните.

**12.** Сварится ли картошка быстрее, если вода будет кипеть более интенсивно (т. е. подвод тепла увеличится)?

**13.** Охлаждает ли воздух обычный электрический вентилятор? Объясните. Если ответ отрицательный, то в чем смысл применения этого устройства?

**14.** Температура в верхних слоях земной атмосферы может достигать 700 °С. Однако любое живое существо в этих слоях замерзнет и погибнет, вместо того чтобы свариться. Объясните.

**15.** Для чего внутреннюю поверхность колбы термоса делают посеребренной, а между внутренней и внешней стенками создают вакуум?

**16.** Объясните, почему температура воздуха определяется по показаниям термометра, находящегося в тени.

**17.** Если дом стоит на фундаменте, под которым может находиться воздух, то пол в нем обычно холоднее, чем в доме, покоящемся непосредственно на твердом основании (например, на сплошном бетонном фундаменте). Объясните.

**18.** Ночью поверхность Земли охлаждается значительно быстрее, если погода не облачная, а ясная. Объясните это явление.

**19.** Легкие морские бризы часто наблюдаются в солнечные дни на берегах больших водоемов. Объясните это явление с учетом того факта, что температура суши растет быстрее, чем температура прилегающей к ней воды.

**20.** Качество спальных мешков и парок (одежды эскимосов) часто характеризуется фактической толщиной (в дюймах или сантиметрах) этих одеяний, когда они максимально взбиты (или «вспушены»). Объясните.

**21.** Почему одежда светлых тонов в жарком климате предпочтительнее, чем темная?

**22.** Недоношенный ребенок, находясь в кювезе с достаточно теплым воздухом, может тем не менее опасно переохладиться. Объясните.

**23.** Количество теплоты, необходимое для нагревания комнаты в Северном полушарии, значительно больше в том случае, когда окна комнаты выходят на север, а не на юг. Объясните.

**24.** Предположим, что вам предложили спроектировать одно из следующих помещений (выберите любое: жилой дом, концертный зал, больницу). Перечислите все источники тепла для выбранного помещения, которые вы можете представить себе; оцените количество теплоты, выделяемое каждым из них.

**25.** Тепловые потери через окна обусловлены следующими процессами: 1) вентиляцией вблизи негерметичных краев, 2) утечкой через раму (особенно, если она из металла), 3) утечкой через поверхность стекла и 4) излучением. а) Каков механизм утечки в первых трех случаях: теплопроводность, конвекция или излучение? б) Какие из механизмов утечки будут ослаблены, если завесить окна тяжелыми шторами? Объясните подробно.

**26.** Кусок дерева, лежащий на солнце, поглощает больше тепла, чем кусок блестящего металла тех же размеров. Однако дерево наощупь кажется менее теплым, чем металл. Объясните.

## Задачи

Раздел 19.2

**1.** (I) Какую работу должен совершить человек, чтобы компенсировать съеденный кусок пирога калорийностью 400 ккал?

**2.** (I) Британская тепловая единица (Btu) является единицей количества теплоты в Британской системе единиц; она определяется как количество теплоты, требуемое для повышения температуры 1 фунта воды на 1 °F. Покажите, что

$$1\ \text{Btu} = 252\ \text{кал} = 1055\ \text{Дж}.$$

**3.** (I) Водяной нагреватель может производить 7500 кал/ч. Сколько воды сможет он нагреть в течение часа от 20 до 60 °С?

**4.** (II) Какое количество теплоты (в килокалориях) создается, когда тормоза автомобиля массой 1200 кг замедляют его скорость от 90 км/ч до нуля?

Раздел 19.5

**5.** (I) Чему равна удельная теплоемкость металлического вещества, если для нагревания 4,5 кг этого вещества от 20 до 42 °C требуется 36 ккал?

**6.** (I) Каков водяной эквивалент (с точки зрения количества теплоты при нагревании) для 0,228 кг стекла?

**7.** (I) Чему равна удельная теплоемкость воды в британских единицах Btu/фунт · °F (см. задачу 2)?

**8.** (I) *Теплоемкость* $C$ тела определяется как количество теплоты, необходимое для повышения его температуры на 1 °C. Таким образом, для повышения температуры тела на $\Delta T$ необходимо количество теплоты, равное

$$Q = C\Delta T.$$

а) Выразите теплоемкость $C$ через удельную теплоемкость $c$ вещества. б) Чему равна теплоемкость (при постоянном давлении) 1 кг воды? в) Тот же вопрос относительно 35 кг воды.

**9.** (II) Определите калорийность (в ккал) куска пирога массой 100 г определенного сорта выпечки по следующим измерениям. Кусочек пирога массой 10 г подвергают высушиванию, а затем помещают в герметичный сосуд высокого давления, называемый *калориметрической бомбой*, содержащей газообразный кислород $O_2$. Затем алюминиевая «бомба» массой 0,615 кг помещается в воду массой 2,00 кг, которая находится в алюминиевой чашке калориметра массой 0,524 кг. После этого кусочек пирога сжигают в атмосфере кислорода $O_2$, в результате чего температура всей установки поднимается с 12 до 31 °C. (Теплоемкостью газов пренебрегите.)

**10.** (II) а) Покажите, что если удельная теплоемкость зависит от температуры $T$, т.е. мы имеем функцию $c(T)$, то количество теплоты, необходимое для повышения температуры вещества от $T_1$ до $T_2$, дается выражением

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T)\,dT.$$

б) Пусть для некоторого вещества $c(T) = c_0(1 + aT)$, где $a = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,°C^{-1}$ и $T$ – температура по шкале Цельсия. Определите, какое количество теплоты необходимо для повышения температуры от $T_1$ до $T_2$. в) Чему равно среднее значение $c$ на интервале температур от $T_1$ до $T_2$ (см. п. «б»), выраженное через значение удельной теплоемкости $c_0$ при температуре 0 °C.

**11.** (II) Стеклянный термометр массой 45 г показывает 19,0 °C, а затем его помещают в 220 мл воды. После того как вода и термометр приходят в тепловое равновесие, показание термометра оказывается равным 38,5 °C. Чему была равна начальная температура воды?

**12.** (II) Молоток массой 0,50 кг имел скорость 5,0 м/с непосредственно перед ударом по гвоздю, после которого он остановился. Оцените повышение температуры железного гвоздя массой 15 г после десяти таких ударов молотка, быстро следующих один за другим. Считайте, что гвоздь полностью поглощает всю выделившуюся теплоту.

**13.** (II) Чему будет равна температура в состоянии теплового равновесия, после того как кусок меди массой 200 г при температуре 210 °C помещается в алюминиевую чашку калориметра массой 180 г, содержащую 800 г воды при температуре 11,0 °C?

**14.** (II) Кусок железа массой 290 г при температуре 190 °C помещается в алюминиевую чашку калориметра массой 100 г, содержащую 250 г глицерина при температуре 10 °C; измерена конечная температура 38 °C. Чему равна удельная теплоемкость глицерина?

**15.** (II) В результате физической работы средней интенсивности человек массой 70 кг производит 200 ккал/ч. Считая, что 20% этой теплоты переходит в полезную работу, а остальные 80% – в теплоту, вычислите, насколько повысится температура тела человека спустя 1,00 ч, если нисколько этой теплоты не передается окружению.

**16.** (II) Сколько времени потребуется для того, чтобы в электрическом кофейнике мощностью 500 Вт довести до кипения воду объемом 0,45 л с начальной температурой 10 °C? Считайте, что нагреваемая часть кофейника, содержащая воду, изготовлена из 400 г алюминия.

**17.** (II) 220 г некоторого вещества нагреваются до температуры 330 °C и затем помещаются в алюминиевую чашку калориметра массой 90 г, содержащую 150 г воды при температуре 11,5 °C. Конечная температура, измеренная стеклянным термометром массой 17 г, оказалась равной 33,8 °C. Какова удельная теплоемкость этого вещества?

**18.** (II) Свинцовый стержень диаметром 1,50 см поглощает 82 ккал теплоты. На сколько увеличится его длина? Что произошло бы в том случае, если бы длина стержня была равна лишь 2,0 см?

Раздел 19.6

**19.** (I) Во время физических упражнений человек может выделить 180 ккал теплоты в течение 30 мин за счет испарения пота с кожных покровов. Какое количество воды теряет при этом человек?

**20.** (I) Какое количество теплоты необходимо для того, чтобы расплавить 13,00 кг серебра, первоначально находившегося при температуре 20 °С?

**21.** (I) Если сообщить $1{,}70 \cdot 10^5$ Дж энергии сосуду с кислородом, находящимся при температуре $-183$ °С, то какое количество кислорода испарится?

**22.** (II) Железный котел массой 128 кг содержит 780 кг воды при температуре 20 °С. Нагреватель сообщает энергию со скоростью 16 000 ккал/ч. Сколько времени потребуется для того, чтобы а) достичь точки кипения воды; б) превратить всю воду в пар?

**23.** (II) Удельная теплоемкость ртути равна 0,033 ккал/кг·°С. Определите теплоту плавления ртути, используя данные калориметрии: 1,00 кг твердой ртути Hg в точке плавления при $-39{,}0$ °С помещается в алюминиевый калориметр массой 0,620 кг, содержащий 0,400 кг воды при температуре 12,80 °С, причем равновесная температура равна 5,06 °С.

**24.** (II) Каков будет конечный результат опыта, в котором смешиваются равные количества льда при 0 °С и пара при 100 °С?

**25.** (II) Конькобежец массой 55,0 кг, движущийся со скоростью 8,5 м/с, скользит по льду и останавливается. Если лед находится при температуре 0 °С и 50% теплоты, произведенной в результате трения, поглощается льдом, то какое количество льда растает?

**26.** (II) Свинцовая пуля массой 25 г, летящая со скоростью 400 м/с, проходит сквозь тонкую железную преграду, после которой скорость пули уменьшается до 250 м/с. Если пуля поглощает 50% произведенной теплоты, то а) на сколько повысится температура пули? б) Если начальная температура пули была равна 20 °С, то расплавится ли пуля целиком (или, возможно, какая-либо ее часть)?

Разделы 19.7–19.9

**27.** (I) а) Какая мощность излучается вольфрамовым шаром (излучательная способность $e = 0{,}35$) радиусом 10 см, находящимся при температуре 20 °С? б) Если шар находится в объеме, стенки которого поддерживаются при температуре $-5$ °С, то чему будет равен *результирующий* тепловой поток из шара?

**28.** (I) На какое расстояние должен перемещаться тепловой поток от подкожных капилляров к поверхности тела за счет теплопроводности, если разность температур составляет 0,50 °С? Считайте, что через всю поверхность тела площадью 1,5 м$^2$ должно выделяться 200 ккал/ч.

**29.** (I) Оцените приближенное значение энергии излучения, которую человек с площадью поверхности тела 1,5 м$^2$ поглощает в течение часа от Солнца, если солнечные лучи падают на него в ясный день под углом 40° к вертикали. Считайте, что $e = 0{,}80$.

**30.** (II) Оцените скорость, с которой теплота из внутренней части тела человека может передаваться к его поверхности. Считайте, что толщина ткани равна 4,0 см, температура кожи 34 °С, а внутренних органов 37 °С; площадь поверхности кожи равна 1,5 м$^2$. Сравните полученный результат со значением 200 ккал/ч, которое должен выделять человек, производящий нетяжелую работу. Отсюда становится ясным, почему необходимо конвективное охлаждение кожи за счет циркуляции крови по капиллярам.

**31.** (II) Электрическая лампочка мощностью 100 Вт производит 95 Вт теплоты, которая рассеивается через стеклянный баллон лампы радиусом 3,0 см и толщиной 1,00 мм. Чему равна разность температур между внутренней и внешней поверхностями стеклянного баллона лампы?

**32.** (II) Альпинист носит теплую одежду толщиной 2,8 см с общей поверхностью 1,8 м$^2$. Температура на внешней поверхности одежды равна 0 °С, а на внутренней (соприкасающейся с кожей) 34 °С. Определите мощность теплового потока за счет теплопроводности через одежду альпиниста, если а) одежда сухая, а ее коэффициент теплопроводности $k$ соответствует пуху; б) одежда мокрая и коэффициент теплопроводности $k$ соответствует воде (учтите, что при этом одежда уплотнилась до толщины 0,5 см).

**33.** (II) Запишите выражение для полного теплового потока (в единицу времени) сквозь стены дома, если стена общей площадью $A_1$ и толщиной $l_1$ изготовлена из материала с коэффициентом теплопроводности $k_1$, а окна площадью $A_2$ и толщиной $l_2$ имеют коэффициент теплопроводности $k_2$. Разность температур равна $\Delta T$.

**34.** (II) *Закон Ньютона для охлаждения* гласит, что при малых разностях температур тело охлаждается со скоростью

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k(T_1 - T_2),$$

где $T_1$ и $T_2$ – температуры соответственно тела и окружения, а $b$ – постоянный коэффициент. Этот закон учитывает процессы теплопроводности, конвекции и излучения. Подобное линейное соотношение вполне очевидно, если ограничиться только процессом теплопроводности. Покажите, что это соотношение приближенно справедливо также и для излучения, т. е.

покажите, что формула (19.4) сводится к выражению

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 4\sigma e A T_2^3 (T_1 - T_2) = \text{const} \cdot (T_1 - T_2),$$

если разность $T_1 - T_2$ мала.

**35.** (II) Коэффициент $U$, определяемый соотношением

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = AU(T_2 - T_1),$$

часто используется при практических расчетах. Заметим, что $U$ равно тепловому потоку в единицу времени на единицу площади поперечного сечения в расчете на 1 °C. а) Как связан коэффициент $U$ с коэффициентом теплопроводности $k$? б) Является ли коэффициент $U$ характеристическим параметром вещества? Если нет, то что еще следует знать, чтобы определить коэффициент $U$? в) Запишите уравнение, описывающее полные тепловые потоки за счет теплопроводности из комнаты данного объема, через значения $U$ для различных материалов. Считайте, что окна имеют общую площадь $A_1$ и характеризуются коэффициентом $U_1$. Стены имеют полную площадь $A_2$ и состоят из трех слоев: кирпича ($U_2$), воздушной прослойки ($U_3$) и дерева ($U_4$). г) Чему равен коэффициент $U$ для кирпичной стены толщиной 12 см, шириной 8,0 м и высотой 2,5 м?

**36.** (II) В доме имеются хорошо теплоизолированные стены толщиной 22,0 см (предположите, что их теплопроводность равна теплопроводности воздуха) и площадью 350 м$^2$, деревянная крыша толщиной 5,5 см и площадью 280 м$^2$ и окна без ставней толщиной 0,65 см с общей площадью 28 м$^2$. а) Вычислите скорость, с которой тепло должно сообщаться дому для поддержания в нем температуры 20 °C, если температура вне дома −5 °C и потери тепла происходят только из-за теплопроводности. б) Если в начальный момент времени температура в доме была 10 °C, то какое приблизительно количество теплоты необходимо сообщить, чтобы поднять температуру в доме до 20 °C за 30 мин? Считайте, что в подогреве нуждается только воздух внутри дома, объем которого равен 700 м$^3$. в) Если 1 кг природного газа стоит 0,055 долл., а теплота, выделяющаяся при его сгорании, равна $10^7$ Дж/кг, то сколько придется платить за газ в месяц, чтобы поддерживать дом в состоянии, описанном в п. «а», в течение 12 ч каждые сутки? Считайте, что на обогрев дома идет 90% теплоты, выделившейся при сгорании газа. Теплоемкость воздуха считайте равной 0,17 ккал/кг · °C.

**37.** (II) Окно с двойным остеклением состоит из рамы, в которую вставлены два стекла, разделенные воздушной прослойкой. а) Покажите, что скорость теплового потока благодаря теплопроводности дается следующей формулой:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A(T_2 - T_1)}{l_1/k_1 + l_2/k_2 + l_3/k_3},$$

где $k_1$, $k_2$ и $k_3$ – теплопроводность соответственно стекла, воздуха и стекла. б) Обобщите эту формулу на случай произвольного количества слоев различных материалов, расположенных друг за другом.

**38.** (II) Оцените, за какое время растают 20 кг льда при 0 °C, помещенные в тщательно закрытый теплоизолированный ящик из пенопласта размером 30 см × 20 см × 50 см со стенками толщиной 1,5 см. Считайте, что теплопроводность у пенопласта такая же, как и у воздуха, а температура вне ящика равна 25 °C.

**39.** (II) Лист площадью 40 см$^2$ и массой $4{,}5 \cdot 10^{-4}$ кг в ясный день повернут к Солнцу. Излучательная способность листа равна 0,85, а удельная теплоемкость 0,80 ккал/кг · K. а) С какой скоростью повышается температура листа? б) Вычислите температуру листа, если все потери теплоты обусловлены излучением (температура окружающей среды равна 20 °C). в) Какими иными способами лист может рассеивать теплоту?

**40.** (II) Домашняя установка для поддержания постоянной температуры установлена на температуру 22 °C. Ночью она отключается, и на 8 ч температура устанавливается равной 12 °C. Какое потребуется количество дополнительной теплоты (в процентах от ежедневной потребности теплоты), если установку не отключать на ночь? Считайте, что средняя температура вне дома равна 0 °C в течение 8 ч ночью и 8 °C остальную часть суток, а также, что теплоотдача дома пропорциональна разности температур вне дома и внутри него. Для получения требуемой оценки с помощью величин, заданных в условии, необходимо сделать дальней-

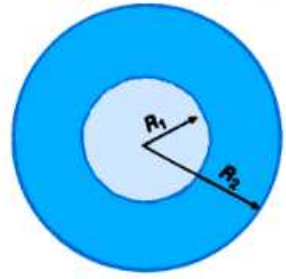



Рис. 19.7.

шие упрощающие предположения; укажите какие.

**41.** (III) Сфера радиусом $R_2$ имеет сферическую концентрическую полость радиусом $R_1$ (рис. 19.7). Полость заполнена веществом при температуре $T_1$, а внешняя поверхность сферы имеет температуру $T_2$. Покажите, что тепловой поток дается выражением

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi k(T_1 - T_2)R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

**42.** (III) У цилиндрической трубки с внутренним радиусом $R_1$ и внешним радиусом $R_2$ внутренняя часть заполнена горячей водой с температурой $T_1$. Температура снаружи трубки равна $T_2$ ($< T_1$). Покажите, что скорость теплоотдачи отрезка трубки длиной $L$ равна

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi k(T_1 - T_2)L}{\ln(R_2/R_1)}.$$

б) Считайте, что трубка изготовлена из железа, $R_1 = 1{,}50$ см, $R_2 = 2{,}00$ см и $T_2 = 30\,^\circ$C. Если трубка заполнена водой с температурой $T_1 = 98{,}00\,^\circ$C, то на сколько понизится температура за секунду? в) Если в трубку поступает вода с температурой 98,00 °C и течет по ней со скоростью 4,0 см/с, то чему будет равно падение температуры на один сантиметр пути?

# 20 Первое начало термодинамики

Мы убедились, что теплота – это способ *передачи энергии от одного тела другому благодаря разности их температур*. Таким образом, теплота очень похожа на работу; в гл. 6 мы показали, что работа представляет собой механический способ передачи энергии от одного тела другому. Мы обобщаем это определение работы на любой способ передачи энергии, за исключением лишь того, который называем теплотой. Иными словами, *работа относится к любому способу передачи энергии, который не связан с разностью температур*. **Термодинамика** имеет дело с процессами, в которых энергия передается как работа или теплота. Обычно нас интересует та или иная система, и мы рассматриваем передачу энергии в эту систему или из нее.

Можно определить несколько типов термодинамических систем. *Замкнутая система* – это система, масса которой постоянна. *Незамкнутая*, или *открытая*, система – это такая система, масса которой может увеличиваться (за счет притока извне) или уменьшаться (за счет оттока). Многие (идеализированные) системы, которые изучает физика, представляют собой замкнутые системы. Но существует много систем, в том числе растения и животные, которые являются открытыми системами, поскольку они обмениваются веществами с окружающей средой (пища, кислород, продукты жизнедеятельности). Говорят, что замкнутая система является *изолированной*, если энергия ни в какой форме не передается через границы системы; в противном случае система называется *неизолированной*.

Равновесное состояние системы определяется переменными, такими, как $P$, $V$, $T$ и $n$ (число молей) для газа. Работа и теплота не используются для описания состояния. У системы, находящейся в определенном состоянии, не имеется определенного количества теплоты или работы. Когда над системой совершается работа (например, происходит сжатие газа) или когда в систему поступает или от нее отбирается теплота, состояние системы *изменяется*. Таким образом, работа и теплота включаются в *термодинамические процессы*, которые могут переводить систему из одного состояния в другое, но не являются характеристиками самого состояния в отличие от таких величин, как давление, объем, температура и масса.

## 20.1. Работа, совершаемая при изменении объема; изотермический и изобарический процессы

Выясним, как можно вычислить работу, совершаемую в очень простом и часто встречающемся термодинамическом процессе, а именно при изменении объема, например когда происходит расширение или сжатие газа. Предположим, что некоторый газ заключен в цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем (рис. 20.1). Всегда следует тщательно определять, что представляет собой рассматриваемая система. В данном случае в качестве системы выберем газ; следовательно, стенки сосуда и поршень принадлежат окружающей среде. Вычислим работу, совершаемую газом при его **квазистатическом** («почти статическом») расширении. Под квазистатическим процессом мы будем понимать процесс, который протекает чрезвычайно медленно – в идеальном случае с бесконечно малой скоростью; это значит, что система проходит через последовательность бесконечно близких равновесных состояний. При этом давление $P$ и температуру $T$ системы можно определить в любой момент времени[1]. Газ расширяется под поршнем, площадь которого равна $A$, и действует на него с силой $F = PA$, где $P$ – давление газа. (Поскольку мы предполагаем, что поршень перемещается очень медленно с постоянной скоростью, на него будет действовать сила, равная по величине силе $F$, но направленная противоположно ей; эта сила обусловлена внешним давлением или трением.) Работа, совершаемая газом при перемещении поршня на бесконечно малое расстояние $d\mathbf{l}$, дается выражением

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = PA\, dl = P\, dV; \qquad (20.1)$$

здесь мы учли, что бесконечно малое увеличение объема

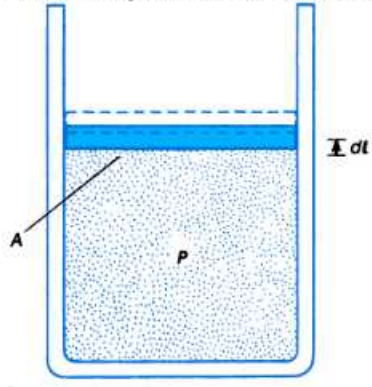



Рис. 20.1. Работа, совершаемая газом, когда его объем увеличивается на $dV = A\, dl$, равна $dW = P\, dV$.

[1] Если газ расширяется или быстро сжимается, то возникает турбулентность и разные области будут находиться при различных давлениях (и температурах).

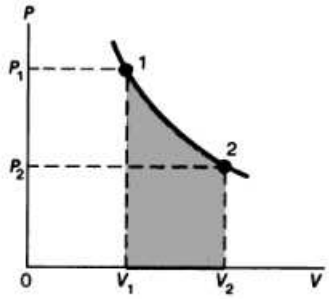



Рис. 20.2. *PV*-диаграмма для идеального газа в изотермическом процессе.

равно $dV = A\,dl$. Если бы газ *сжимался* так, чтобы вектор $dl$ был направлен внутрь сосуда с газом, то объем уменьшился бы, т. е. мы имели бы $dV < 0$. В этом случае работа, совершаемая газом по перемещению поршня, была бы отрицательной, что равнозначно тому, что положительная работа совершается *над* газом, а не им самим. Работа $W$, совершаемая газом, при конечном изменении объема от $V_1$ до $V_2$ запишется в виде

$$W = \int dW = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV. \qquad (20.2)$$

Выражения (20.1) и (20.2) описывают работу, совершаемую при любых изменениях объема газом, жидкостью или твердым телом, только если эти изменения являются квазистатическими.

Для того чтобы проинтегрировать выражение (20.2), необходимо знать, как в ходе процесса меняется давление, а это зависит от вида процесса. Предположим, что у нас есть некоторое фиксированное количество идеального газа и мы хотим расширить его, т. е. увеличить объем газа от $V_1$ до $V_2$, но таким образом, чтобы начальная и конечная температуры газа совпадали, т. е. чтобы $T_1 = T_2$. Мы можем осуществить это, позволив, например, газу расширяться квазистатически при постоянной температуре. Такой процесс называется **изотермическим процессом**. Чтобы быть уверенным, что температура остается постоянной, предположим, что газ находится в тепловом контакте с **термостатом** (идеализированным телом, масса которого столь велика, что при обмене теплотой с нашей системой его температура существенно не меняется) и что процесс расширения происходит очень медленно, т. е. весь газ имеет одну и ту же постоянную температуру. Этот процесс представлен в виде кривой между точками 1 и 2 на *PV*-диаграмме рис. 20.2. Работа, совершаемая в этом процессе, в соответствии с формулой (20.2) равна площади, заключенной между кривой на *PV*-диаграмме и осью $V$. На рис. 20.2 эта площадь закрашена серым. Интеграл в правой части формулы (20.2) можно вычислить для случая идеального газа, используя его уравнение состояния

$$P = nRT/V.$$

Таким образом, совершенная работа запишется в виде

$$W = \int P dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{изобарический процесс;}\\ \text{идеальный газ}\end{array}\right] \qquad (20.3)$$

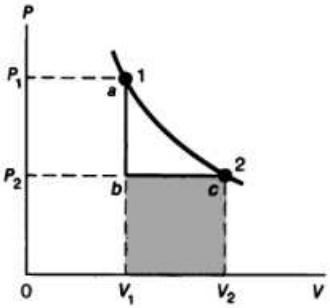



Рис. 20.3. Процесс *abc* состоит из изохорического (*ab*) и изобарического (*bc*) процессов.

Рассмотрим далее другой способ перевода газа из состояния 1 в состояние 2. Для этого сначала понизим давление газа от $P_1$ до $P_2$ (на рис. 20.3 это соответствует линии *ab*), а затем позволим газу расшириться от объема $V_1$ до объема $V_2$ при постоянном давлении $P_2$ (на рис. 20.3 это

соответствует линии *bc*). [Процесс, происходящий при постоянном объеме, такой, как *ab* на рисунке, называется *изохорическим процессом*; процесс, происходящий при постоянном давлении (линия *bc* на рисунке), называется *изобарическим процессом*.] На первом участке (*ab*) газ никакой работы не совершает, поскольку изменение объема отсутствует: $dV = 0$. На втором участке (*bc*) давление остается постоянным, и мы имеем

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = P_2(V_2 - V_1),$$

так что работа, совершенная газом, равна снова площади, ограниченной на *PV*-диаграмме кривой *abc* и осью *V*. На рис. 20.3 эта площадь закрашена серым. Используя уравнение состояния идеального газа, можно также написать следующее выражение:

$$W = P_2(V_2 - V_1) =$$

$$= nRT_2\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \quad \left[\begin{array}{l}\text{изобарический процесс;}\\ \text{идеальный газ}\end{array}\right] \qquad (20.4)$$

[Заметим, что в ходе изобарического процесса температура не остается постоянной, хотя в начальной и конечной точках изохорического и изобарического процессов (кривая *abc* на рис. 20.3: $T_1 = T_2$) она одна и та же.]

Из сравнения площадей закрашенных областей на рис. 20.2 и рис. 20.3 или из сравнения результатов вычислений по формулам (20.3) и (20.4) (выполните их для случая $V_2 = 2V_1$) работа, совершаемая в этих двух процессах, различна. Это достаточно общий результат: *работа, совершаемая при переходе системы из одного состояния в другое, зависит не только от начального и конечного состояний, но и от вида процесса (или «пути»)*.

Этот вывод еще раз подчеркивает тот факт, что работа не может рассматриваться как свойство системы.

Аналогичное утверждение может быть сделано для теплоты. Теплота, которая должна поступить в систему, чтобы газ перешел из состояния 1 в состояние 2, зависит от процесса; можно показать, что в случае изотермического процесса на рис. 20.2 эта теплота больше, чем теплота, поступающая в систему в процессе *abc* на рис. 20.3. В общем случае *количество теплоты, поглощаемой или выделяемой системой при переходе ее из одного состояния в другое, зависит не только от начального и конечного состояний, но и от вида процесса (или «пути»)*.

## 20.2. Первое начало термодинамики

В разд. 19.3 мы определили внутреннюю энергию системы как общую сумму энергий всех молекул системы.

Следует ожидать, что внутренняя энергия системы должна увеличиваться либо за счет совершения над системой работы, либо путем сообщения ей некоторого количества теплоты. Внутренняя энергия системы должна уменьшаться, если тепловой поток направлен из системы или системой совершается работа над какими-то внешними телами.

В результате опытов Джоуля (и многих других) был сформулирован важный закон, согласно которому изменение внутренней энергии замкнутой системы $\Delta U$ можно записать в виде

$$\Delta U = Q - W, \tag{20.5}$$

где $Q$ – количество теплоты, *сообщенное системе*, а $W$ – работа, *совершаемая системой*. Заметим, что, если работа $W$ совершается *над* системой, она будет отрицательна и $\Delta U$ будет увеличиваться. [Можно было бы, разумеется, определить работу $W$ как работу над системой; в этом случае в правой части уравнения (20.5) появится знак плюс перед $W$. Однако приведенное нами определение $W$ и $Q$ является общепринятым.] Аналогично если теплота $Q$ отдается системой, то эта величина будет отрицательной. Уравнение (20.5) известно как **первое начало термодинамики**. Оно является одним из великих законов физики, и его справедливость подтверждается всеми без исключения опытами. Поскольку теплота $Q$ и работа $W$ выражают способы передачи энергии в систему или из нее, внутренняя энергия изменяется в соответствии с ними. Таким образом, первое начало термодинамики является просто формулировкой *закона сохранения энергии*. Следует заметить, что закон сохранения энергии не был сформулирован вплоть до девятнадцатого столетия, поскольку не было еще составлено представления о теплоте как способе передачи энергии.

Уравнение (20.5) применимо к замкнутым системам. Его можно применять также и для незамкнутых систем, если учесть изменение внутренней энергии вследствие увеличения или уменьшения количества вещества в системе. Для изолированной системы мы имеем (по определению) $W = Q = 0$ и, следовательно, $\Delta U = 0$.

Мы пришли к формулировке первого начала термодинамики [уравнение (20.5)] интуитивно, обращаясь к микроскопическому рассмотрению (на молекулярном уровне). Но справедливость первого начала термодинамики подтверждается экспериментально. А поскольку эксперименты ставятся в макроскопическом мире, важно проверить первое начало термодинамики на макроскопическом уровне (с точки зрения термодинамики). В предыдущем разделе мы показали, что если система переходит из состояния 1 в состояние 2, то количество теплоты $Q$, сообщенное системе, и работа $W$, совершенная системой, зависят от конкретного процесса (или пути), в котором

участвовала система. Для разных процессов величины $Q$ и $W$ различны, даже если начальные и конечные состояния системы для них одинаковы. Однако эксперименты (а для проверки было проделано большое количество опытов) показали, что при фиксированных начальном и конечном состояниях разность $Q - W$ одна и та же для *всех* процессов, которые переводят систему из начального состояния в конечное. Иными словами, в разных процессах количество теплоты $Q$ и работа $W$ могут быть различными, но разность $Q - W$ всегда одна и та же. (Разумеется, разность $Q - W$ зависит от рассматриваемой системы и ее начального и конечного состояний.) Отсюда следует, что можно определить переменную, характеризующую состояние системы, которую мы назовем **внутренней энергией** $U$, с помощью соотношения

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - W,$$

где $U_1$ и $U_2$ – внутренние энергии системы в состояниях соответственно 1 и 2, $Q$ – количество теплоты, сообщенной системе, и $W$ – работа, совершенная системой при переходе из состояния 1 в состояние 2. Поскольку разность $Q - W$ зависит только от начального и конечного состояний системы, $\Delta U = U_2 - U_1$ тоже зависит только от них. Это означает, что внутренние энергии $U_1$ и $U_2$ являются функциями переменных, описывающих систему в состояниях соответственно 1 и 2. Следовательно, внутренняя энергия $U$ является функцией только состояния системы и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние ($U$ не зависит от «предыстории» системы). Таким образом, с точки зрения термодинамики согласно первому началу можно определить функцию, называемую внутренней энергией, которая является свойством состояния системы.

Это утверждение достаточно абстрактно, но оно показывает, что первое начало термодинамики справедливо и без привлечения микроскопических моделей. Разумеется, интерпретация внутренней энергии как полной энергии всех молекул представляет собой лишь интуитивное понимание понятия внутренней энергии.

В некоторых случаях удобно использовать первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$dU = dQ - dW.$$

Здесь $dU$ – бесконечно малое изменение внутренней энер-

гии, происходящее при добавлении бесконечно малого[1] количества теплоты $dQ$ системе, которая совершает бесконечно малую работу $dW$.

## 20.3. Применение первого начала термодинамики для описания некоторых простых термодинамических процессов

Применим первое начало термодинамики к некоторым простым процессам. В разд. 20.1 мы определили изотермический процесс как процесс, который протекает при постоянной температуре, изобарический процесс как процесс, который происходит при постоянном давлении, и изохорический процесс как процесс при постоянном объеме. Мы показали также, как можно вычислить работу, совершенную в каждом из этих процессов.

**Пример 20.1.** Предположим, что 2,00 моль идеального газа объемом $V_1 = 3{,}50\ м^3$ при температуре $T_1 = 300\ К$ расширяются до объема $V_2 = 7{,}00\ м^3$ при температуре $T_2 = 300\ К$. Этот процесс сначала является а) изотермическим, а затем следует б) по линии $abc$ на рис. 20.3, так что сначала давление падает при постоянном объеме, а затем при постоянном давлении увеличивается объем. Для каждого случая «а» и «б» определим совершенную газом работу, сообщенное газу количество теплоты и изменение внутренней энергии газа.

**Решение.** а) Работа, совершаемая газом за счет его расширения при постоянной температуре, дается выражением (20.3):

$$W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = (2{,}00\ \text{моль}) \times (8{,}314\ \text{Дж/моль}\cdot\text{К})(300\ \text{К}) \times (\ln 2{,}00) = 3460\ \text{Дж}.$$

В этом случае нельзя вычислить количество теплоты простым способом [можно, например, попытаться воспользоваться соотношением (19.1), но теплоемкость при постоянной температуре не определена]. Однако можно вычислить изменение внутренней энергии и затем из первого начала термодинамики найти теплоту $Q$. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры (разд. 19.4), а поскольку температура не изменяется,

---

[1] Первое начало термодинамики в дифференциальной форме нередко записывают в виде

$$dU = \delta Q - \delta W,$$

где символы $\delta$ используются для напоминания о том, что работа $W$ и теплота $Q$ не являются функциями переменных, описывающих состояние системы (таких, как $P$, $V$, $T$ и $n$). Внутренняя энергия $U$ является функцией этих переменных, поэтому изменение $dU$ представляет собой дифференциал (называемый *полным дифференциалом*) некоторой функции $U$. Дифференциалы $\delta W$ и $\delta Q$ не являются полными дифференциалами какой-либо математической функции, т.е. символами $\delta W$ и $\delta Q$ записываются только бесконечно малые величины. В рамках этой книги нас больше не будет интересовать различие между символами $d$ и $\delta$.

не изменяется и внутренняя энергия; следовательно, для изотермического процесса мы имеем

$$\Delta U = 0,$$

что не совсем верно для реального газа. Из первого начала термодинамики количество сообщенной газу теплоты равно

$$Q = \Delta U + W = W = 3460 \text{ Дж}.$$

б) Рассматривамый процесс состоит из двух частей (рис. 20.3). Участок $ab$ соответствует процессу при постоянном объеме, а $bc$ – при постоянном давлении. Работа $W_{ab}$, совершенная на участке $ab$ при постоянном объеме, равна нулю, поскольку $\int P\,dV = 0$, если $dV = 0$; на участке $bc$ при постоянном давлении газ совершает работу в соответствии с выражением (20.4):

$$W_{bc} = nRT_2\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) = (2{,}00 \text{ моль}) \times$$
$$\times (8{,}314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К})(300 \text{ К}) \times$$
$$\times (1 - 0{,}50) = 2490 \text{ Дж}.$$

Таким образом, полная работа, совершенная на участке $abc$, равна $W = 0 + 2490$ Дж $= 2490$ Дж. Полное изменение внутренней энергии равно $\Delta U = 0$, так как температуры в начальном и конечном состояниях одинаковы. Следовательно, $Q = \Delta U + W = 2490$ Дж. Это значение $Q$ для процесса $abc$ можно проверить с помощью соотношения (19.1) для удельной теплоемкости. Нам нужно воспользоваться результатом, который будет получен в следующем разделе, а именно тем, что молярная теплоемкость (теплоемкость одного моля, а не одного килограмма вещества) идеального газа при постоянном давлении равна $C_p = 4{,}97$ кал/(моль · К), а при постоянном объеме равна $C_v = 2{,}98$ кал/(моль · К). Из закона идеального газа следует, что объем и температура газа в точке $b$ (рис. 20.3) равны соответственно $V_b = 3{,}50$ м$^3$ и $T_b = T_2 \times (V_b/V_2) = 150$ К. Таким образом, на участке $ab$ имеем

$$Q_{ab} = nC_v\Delta T = (2{,}00 \text{ моль}) \times$$
$$\times (2{,}98 \text{ кал/моль} \cdot \text{К})(150 \text{ К} - 300 \text{ К}) =$$
$$= -894 \text{ кал}.$$

(Знак минус здесь означает, что на участке $ab$ газ теряет теплоту.) На участке $bc$ получаем

$$Q_{bc} = nC_p\Delta T = (2{,}00 \text{ моль}) \times$$
$$\times (4{,}97 \text{ кал/моль} \cdot \text{К})(300 \text{ К} - 150 \text{ К}) =$$
$$= 1490 \text{ кал}.$$

Таким образом,

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} = -894 \text{ кал} + 1490 \text{ кал} =$$
$$= (596 \text{ кал})(4{,}18 \text{ Дж/кал}) = 2490 \text{ Дж}.$$

Этого результата мы и ожидали, но, поскольку работа $W$ и теплота $Q$ вычислялись независимым образом, можно предсказать, что изменение внутренней энергии будет $\Delta U = Q - W = 2490$ Дж $- 2490$ Дж $= 0$, что согласуется с полученным в п. «а» результатом.

**Пример 20.2.** Вычислим а) совершенную работу и б) изменение внутренней энергии 1,00 кг воды, когда она полностью выкипает и превращается в пар при температуре 100 °С. Предположим, что давление является постоянным и равно 1,00 атм.

**Решение.** а) Объем 1,00 кг воды при температуре 100 °С равен 1000 см$^3$, или $1{,}00 \cdot 10^{-3}$ м$^3$. Пар массой 1,00 кг при 100 °С занимает объем 1,67 м$^3$ (см. табл. 12.1). Следовательно, совершенная работа

$$W = P(V_2 - V_1) = (1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2) \times$$
$$\times (1{,}67 \text{ м}^3 - 1{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) =$$
$$= 1{,}69 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

б) Количество теплоты, необходимое для выкипания 1,00 кг воды, равно теплоте испарения $Q = 539$ ккал $= 22{,}6 \cdot 10^5$ Дж. Из первого начала термодинамики имеем

$$\Delta U = Q - W = 22{,}6 \cdot 10^5 \text{ Дж} - 1{,}7 \cdot 10^5 \text{ Дж} =$$
$$= 20{,}9 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Таким образом, лишь 8% сообщенной воде теплоты используется для совершения работы. Остальные 92% идут на увеличение внутренней энергии воды.

**Адиабатический процесс** – это такой процесс, при котором системе не сообщается и от системы не отбирается




Рис. 20.4. $PV$-диаграмма адиабатического ($AC$) и изотермического ($AB$) процессов для идеального газа.

теплота, т. е. $Q = 0$. Такой процесс может происходить, если система очень хорошо изолирована или процесс происходит столь быстро[1], что теплота (которая передается медленно) не успевает выйти из системы или войти в нее. Примером процесса, очень близкого к адиабатическому, является расширение газов в двигателях внутреннего сгорания. Медленное адиабатическое расширение идеального газа описывается на $PV$-диаграмме кривой, аналогичной кривой $AC$ на рис. 20.4. Так как $Q = 0$, из уравнения (20.5) следует, что $\Delta U = -W$. Иными словами, внутренняя энергия убывает, и поэтому температура понижается. Это видно из рис. 20.4, на котором произведение $PV (= nRT)$ в точке $C$ меньше, чем в точке $B$ (кривая $AB$ соответствует изотермическому процессу, для которого $\Delta U = 0$ и $\Delta T = 0$). При адиабатическом сжатии над газом совершается работа; следовательно, внутренняя энергия увеличивается и температура повышается. В двигателе Дизеля воздух быстро сжимается адиабатически в 15 раз или больше; при этом температура так сильно повышается, что при впрыскивании горючего смесь самопроизвольно воспламеняется.

Одним из примеров адиабатического процесса является так называемое *свободное расширение* газа, при котором газ может расширяться в некоторый объем, не совершая при этом работы. На рис. 20.5 изображена установка, в которой осуществляется свободное расширение газа. Она состоит из двух хорошо изолированных камер (гарантирующих отсутствие притока и оттока теплоты), соединенных клапанами или краном. Одна камера заполнена газом, а в другой камере газ отсутствует. Когда клапан открывается, газ расширяется и заполняет обе камеры. Тепловой поток в систему или из нее отсутствует ($Q = 0$), и газом не совершается никакой работы, так как газ не перемещает другие тела. Следовательно, $Q = W = 0$, и, согласно первому началу термодинамики, $\Delta U = 0$. *Внутренняя энергия свободно расширяющегося газа не изменяется.* Для идеального газа также $\Delta T = 0$, поскольку внутренняя энергия $U$ зависит только от температуры $T$ (разд. 19.4). Свободное расширение газа использовалось в эксперименте для выяснения вопроса о том, зависит ли внутренняя энергия *реальных газов* только от температуры $T$. Такой эксперимент очень трудно вы-

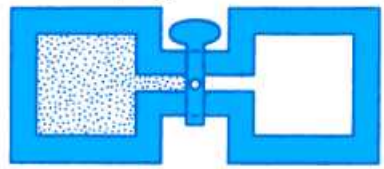


Рис. 20.5. Свободное расширение.

[1] Такой процесс не будет квазистатическим, и его нельзя изобразить на $PV$-диаграмме.

полнить достаточно аккуратно, но все-таки выяснилось, что температура реальных газов несколько понижается при их свободном расширении. Следовательно, внутренняя энергия реальных газов должна зависеть (по крайней мере слабо) от давления или объема, а также и от температуры.

Заметим, между прочим, что свободное расширение газа не может быть представлено кривой на $PV$-диаграмме, так как процесс протекает быстро, а не квазистатически. Промежуточные состояния газа не являются равновесными, и, следовательно, давление газа не определено, а в некоторых случаях не определен и объем.

## 20.4. Теплоемкости газов и принцип равнораспределения энергии

В разд. 19.5 мы рассмотрели понятие удельной теплоемкости применительно к твердым телам и жидкостям. Удельная теплоемкость газов в значительно большей степени, чем для твердых тел и жидкостей, зависит от того, в каком процессе участвует газ. Существует два важных процесса, в которых либо объем, либо давление остается постоянным. Из табл. 20.1 мы видим, что удельные теплоемкости газов при постоянном объеме ($c_v$) и при постоянном давлении ($c_p$) сильно отличаются друг от друга, в то время как для жидкостей и твердых тел теплоемкость зависит от процесса слабее.

Это нетрудно объяснить с помощью первого начала термодинамики и молекулярно-кинетической теории. Действительно, удельные теплоемкости можно вычислить, используя молекулярно-кинетическую теорию, причем полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными. Прежде чем показать это, введем *молярные теплоемкости* $C_v$ и $C_p$, которые определяются как количество теплоты, необходимое для нагрева 1 моля газа

*Таблица 20.1.* Теплоемкости газов при температуре 15 °C

| Газ | Удельные теплоемкости, ккал/кг·К | | Молярные теплоемкости, кал/моль·К | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_v$ | $c_p$ | $C_v$ | $C_p$ | $C_p - C_v$, кал/моль·К | $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ |
| Одноатомный | | | | | | |
| He | 0,75 | 1,15 | 2,98 | 4,97 | 1,99 | 1,67 |
| Ne | 0,148 | 0,246 | 2,98 | 4,97 | 1,99 | 1,67 |
| Двухатомный | | | | | | |
| $N_2$ | 0,177 | 0,248 | 4,96 | 6,95 | 1,99 | 1,40 |
| $O_2$ | 0,155 | 0,218 | 5,03 | 7,03 | 2,00 | 1,40 |
| Трехатомный | | | | | | |
| $CO_2$ | 0,153 | 0,199 | 6,80 | 8,83 | 2,03 | 1,30 |
| $H_2O$ (100 °C) | 0,350 | 0,482 | 6,20 | 8,20 | 2,00 | 1,32 |
| Многоатомный | | | | | | |
| $C_2H_6$ | 0,343 | 0,412 | 10,30 | 12,35 | 2,05 | 1,20 |

на 1 °C соответственно при постоянном объеме и при постоянном давлении. Тогда по аналогии с соотношением (19.1) количество теплоты $Q$, необходимое для нагрева $n$ молей газа на $\Delta T$ кельвинов, можно записать в виде

$$Q = nC_v\Delta T \qquad \text{[постоянный объем]}, \qquad (20.6а)$$

$$Q = nC_p\Delta T \qquad \text{[постоянное давление]}. \qquad (20.6б)$$

Из определения молярной теплоемкости [или из сравнения выражений (19.1) и (20.6)] следует, что

$$C_v = Mc_v, \quad C_p = Mc_p,$$

где $M$ – молярная масса газа. Значения молярной теплоемкости также приведены в табл. 20.1, и мы видим, что для различных газов, которые имеют одинаковое число атомов в молекуле, молярные теплоемкости практически одинаковы.

Воспользуемся молекулярно-кинетической теорией и выясним, почему теплоемкости газов для процессов, протекающих при постоянном давлении, больше, чем для процессов при постоянном объеме. Предположим, что идеальный газ медленно нагревается сначала при постоянном объеме, а затем при постоянном давлении. Пусть температура в обоих этих процессах изменяется на одну и ту же величину $\Delta T$. В процессе, протекающем при постоянном объеме, не совершается никакой работы, поскольку $\Delta V = 0$. Таким образом, согласно первому началу термодинамики теплота, сообщенная системе (которую мы будем обозначать через $Q_v$), идет полностью на увеличение внутренней энергии газа:

$$Q_v = \Delta U.$$

В процессе при постоянном давлении системой совершается работа, поэтому сообщенная системе теплота $Q_p$ идет не только на увеличение внутренней энергии, но и на совершение работы $W = P\Delta V$. Следовательно, в этом процессе системе необходимо сообщить больше теплоты, чем в первом процессе при постоянном объеме, и из первого начала термодинамики имеем

$$Q_p = \Delta U + P\Delta V.$$

Поскольку изменения внутренней энергии $\Delta U$ в этих двух процессах одинаковы (в обоих случаях мы выбрали одинаковые $\Delta T$), мы имеем

$$Q_p - Q_v = P\Delta V.$$

Для идеального газа $V = nRT/P$, поэтому для процесса, протекающего при постоянном давлении, $\Delta V = nR\Delta T/P$. Подставляя это выражение в написанное выше соотношение и используя соотношения (20.6), находим

$$nC_p\Delta T - nC_v\Delta T = P\left(\frac{nR\Delta T}{P}\right)$$

и

$$C_p - C_v = R. \tag{20.7}$$

Поскольку универсальная газовая постоянная равна $R = 8{,}314$ Дж/(моль·К) = 1,986 кал/(моль·К), мы видим, что молярная теплоемкость $C_p$ больше молярной теплоемкости $C_v$ примерно на 1,99 кал/(моль·К). Действительно, как следует из предпоследней колонки в табл. 20.1, это значение очень близко к экспериментально наблюдаемому.

Используя молекулярно-кинетическую теорию газов, вычислим молярную теплоемкость одноатомного газа. Рассмотрим сначала процесс, протекающий при постоянном объеме. Так как в этом случае работа газом не совершается, из первого начала термодинамики следует, что если газу сообщить количество теплоты $Q$, то его внутренняя энергия изменится на величину

$$\Delta U = Q.$$

Внутренняя энергия $U$ идеального одноатомного газа равна полной кинетической энергии всех молекул, и, как мы показали в разд. 19.4,

$$U = N\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{3}{2}nRT.$$

Используя затем соотношение (20.6а), можно написать следующее выражение:

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\,\Delta T = nC_v\,\Delta T, \tag{20.8}$$

откуда находим

$$C_v = \frac{3}{2}R. \tag{20.9}$$

Так как $R = 8{,}314$ Дж/(моль·К) = 1,986 кал/(моль·К), кинетическая теория для теплоемкости идеального одноатомного газа дает значение $C_v = 2{,}98$ кал/(моль·К). Это значение очень близко к экспериментально полученным для одноатомных газов, таких, как гелий и неон (табл. 20.1). Из соотношения (20.7) мы получаем $C_p \approx 4{,}97$ кал/(моль·К), что также согласуется с экспериментом.

Измеренные молярные теплоемкости более сложных газов (табл. 20.1), таких, как двухатомные (два атома в молекуле) и трехатомные (три атома) газы, увеличиваются с ростом числа атомов в молекуле. Это в основном является следствием того, что внутренняя энергия включает в себя не только кинетическую энергию поступательного движения молекул, но также и другие формы энергии. Рассмотрим, например, двухатомный газ. Как показано на рис. 20.6, два атома могут вращаться относительно двух различных осей (вращение относительно третьей оси, проходящей через оба атома, дает очень малый вклад в энергию, поскольку момент инерции мо-

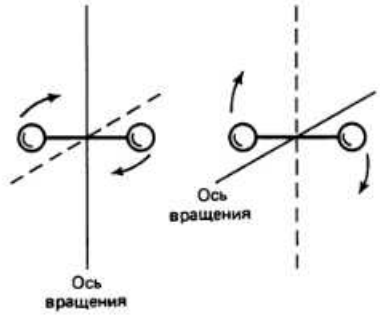



Рис. 20.6. Двухатомная молекула может вращаться относительно двух различных осей.

лекулы относительно нее очень мал). Таким образом, молекулы помимо поступательной кинетической энергии имеют еще и вращательную кинетическую энергию. Полезно ввести понятие **степеней свободы**, под которыми мы будем понимать число независимых способов сообщения молекуле энергии. Например, говорят, что одноатомный газ обладает тремя степенями свободы, так как атом может иметь скорость, направленную вдоль осей $x$, $y$ и $z$; движение вдоль этих осей рассматривается как три независимых движения, поскольку в любом из них параметры движения не влияют на другие. Двухатомная молекула имеет такие же три степени свободы, что и одноатомная, связанные с поступательной кинетической энергией, и еще две степени свободы, связанные с вращательной кинетической энергией; в сумме они дают пять степеней свободы. Бросив беглый взгляд на табл. 20.1, вы увидите, что теплоемкость $C_v$ двухатомных газов равна примерно 5/3 теплоемкости одноатомного газа, т. е. теплоемкости находятся в таком же отношении, что и степени свободы. Этот факт привел физиков девятнадцатого столетия к важному заключению, называемому **принципом равнораспределения энергии**. Этот принцип[1)] гласит, что энергия распределяется поровну между активными степенями свободы и каждая отдельная активная степень свободы молекулы обладает в среднем энергией $(1/2)kT$. Таким образом, средняя энергия молекулы одноатомного газа должна быть равна $(3/2)kT$ (что нам уже известно), а для двухатомного газа она должна быть равна $(5/2)kT$. Следовательно, внутренняя энергия двухатомного газа должна быть равна $U = N[(5/2)kT] = (5/2)nRT$, где $n$ – число молей. Используя те же рассуждения, что и для одноатомного газа, находим молярную теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме, а именно $(5/2)R = 4{,}97$ кал/(моль·К). Это согласуется с измеренным значением. Более сложные молекулы имеют еще больше степеней свободы и, следовательно, бóльшие значения молярной теплоемкости.

---

[1)] Максвелл получил этот принцип с помощью теоретического рассмотрения методами статистической механики.

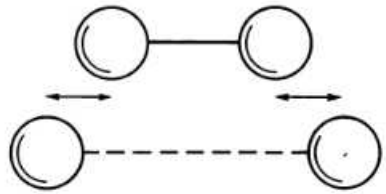


Рис. 20.7. Двухатомная молекула может колебаться.

Однако все усложнилось, когда измерения показали, что при низких температурах теплоемкость двухатомных газов $C_v$ равна всего лишь $(3/2)R$, т. е. как если бы молекула имела только три степени свободы. При очень же высоких температурах оказалось, что теплоемкость $C_v$ равна примерно $(7/2)R$, т. е. как если бы у газа существовало семь степеней свободы. Эти факты объясняются тем, что при низких температурах молекулы в основном обладают поступательной кинетической энергией; иными словами, на вращение не тратится энергия, и только три степени свободы являются «активными». При очень же высоких температурах активны все пять степеней свободы да еще две дополнительные. Эти две дополнительные степени свободы можно интерпретировать как колебательные, т. е. связанные с колебаниями атомов, соединенных между собой как бы пружиной (рис. 20.7). Одна степень свободы обусловлена кинетической энергией колебательного движения, а другая – потенциальной энергией колебательного движения ($kx^2/2$). При комнатной температуре эти две степени свободы не являются активными. (Почему некоторые степени свободы не являются «активными» при низких температурах, с помощью квантовой теории объяснил Эйнштейн.) Таким образом, вычисления, основанные на молекулярно-кинетической теории и равнораспределении энергии по степеням свободы (которое следует из квантовой теории), дают численные результаты, согласующиеся с экспериментом.

Принцип равнораспределения энергии можно применить также и к твердым телам. Молярная теплоемкость

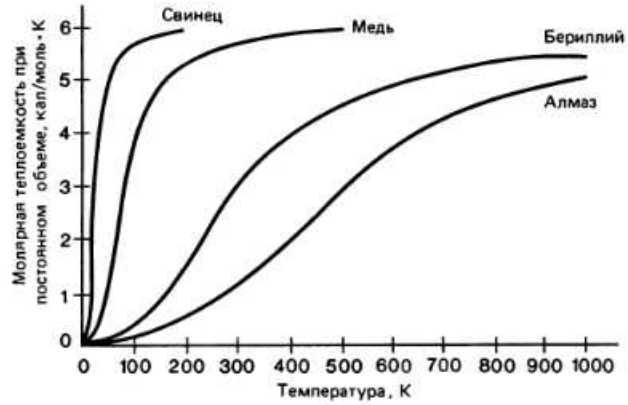



Рис. 20.8. Молярные теплоемкости (твердых тел) в зависимости от температуры.

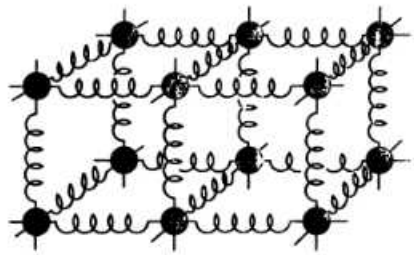


Рис. 20.9. Атомы в кристаллическом твердом теле могут колебаться относительно положений своего равновесия, как если бы они были соединены пружинами со своими соседями. (Силы взаимодействия между атомами в действительности имеют электрическое происхождение.)

любого твердого тела при высоких температурах близка к $3R$ (6,0 кал/моль·К), как показано на рис. 20.8. Эта величина называется теплоемкостью Дюлонга–Пти по фамилиям ученых, впервые измеривших ее в 1819 г. (Заметим, что в табл. 19.1 приведены значения теплоемкости, приходящейся на килограмм вещества, а не на моль.) При высоких температурах каждый отдельный атом имеет шесть степеней свободы, хотя некоторые из этих степеней свободы не являются активными при низких температурах. Каждый атом кристаллического твердого тела может колебаться относительно равновесного положения так, как если бы он был соединен пружинами с каждым из своих соседей (рис. 20.9). Таким образом, он имеет три степени свободы для кинетической энергии и три дополнительные степени свободы, связанные с потенциальной энергией колебаний в каждом из $x$-, $y$- и $z$-направлений, что согласуется с измеренными значениями теплоемкостей.

## 20.5. Адиабатическое расширение газа

На рис. 20.4 (кривая $AC$) показана кривая на $PV$-диаграмме, описывающая квазистатическое (медленное) адиабатическое расширение идеального газа. Она является более крутой по сравнению с кривой, описывающей изотермический процесс, что указывает на то, что при одинаковых изменениях объема изменение давления будет больше в случае адиабатического расширения. Следовательно, температура газа в процессе адиабатического расширения понижается. И обратно, при адиабатическом сжатии температура газа повышается.

Можно получить соотношение между давлением $P$ и объемом $V$ идеального газа, который медленно адиабатически расширяется. Начнем рассмотрение с первого начала термодинамики, записанного в дифференциальной форме:

$$dU = dQ - dW = -dW = -P\,dV;$$

здесь мы учли, что для адиабатического процесса $dQ = 0$. Выражение (20.8) дает нам соотношение между изменением внутренней энергии $\Delta U$ и теплоемкостью $C_v$, спра-

ведливое для любого процесса, в котором участвует идеальный газ, поскольку для идеального газа внутренняя энергия $U$ является функцией только температуры $T$. Запишем это соотношение в дифференциальной форме:

$$dU = nC_v\,dT.$$

Объединяя два последних соотношения, получаем следующее уравнение:

$$nC_v\,dT + P\,dV = 0.$$

Продифференцируем затем уравнение состояния идеального газа $PV = nRT$, предполагая, что $P$, $V$ и $T$ могут изменяться:

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT.$$

Решим это уравнение относительно $dT$ и подставим решение в предыдущее уравнение. При этом мы получим

$$(C_v + R)\,P\,dV + C_v V\,dP = 0.$$

Преобразуя выражение (20.7), можно записать, что $C_v + R = C_p$. Подставляя это равенство в предыдущее уравнение, имеем

$$C_p P\,dV + C_v V\,dP = 0.$$

Вводя показатель адиабаты

$$\gamma = C_p/C_v, \tag{20.10}$$

последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{const}.$$

Последнее уравнение можно упростить, используя правила сложения и умножения логарифмов на число:

$$PV^{\gamma} = \text{const} \quad \left[\begin{array}{l}\text{квазистатический адиабатический}\\ \text{процесс; идеальный газ}\end{array}\right]. \tag{20.11}$$

Таким образом, мы получили соотношение между давлением $P$ и объемом $V$ для квазистатического адиабатического расширения или сжатия. Оно нам очень пригодится, когда в следующей главе мы будем рассматривать тепловые двигатели. В табл. 20.1 приведены величины $\gamma$ для некоторых реальных газов.

**Пример 20.3.** Идеальный одноатомный газ может медленно расширяться до тех пор, пока его давление не уменьшится ровно в два раза по сравнению с начальным значением. Во сколько раз изменится объем газа, если процесс а) адиабатический; б) изотермический?

**Решение.** а) Из уравнения (20.11) имеем $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$; следовательно,

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma} = (2)^{3/5} = 1{,}52,$$

поскольку $\gamma = C_p/C_v = (5/2)/(3/2) = 5/3$.

б) При постоянной температуре из закона идеального газа сразу следует, что $P_1V_1 = P_2V_2$, поскольку $T_1 = T_2$. Следовательно,

$$V_2/V_1 = P_1/P_2 = 2{,}0.$$

## *20.6. Адиабатический характер звуковых волн

Для слышимых ухом звуковых частот сжатие и расширение воздуха в звуковой волне происходят почти адиабатически. Чтобы объяснить это, заметим, что при сжатии газа его температура повышается до тех пор, пока теплота не начинает передаваться наружу; если же газ расширяется, то его температура понижается до тех пор, пока в систему не начнет поступать теплота. В звуковой волне на воспринимаемых ухом частотах в воздухе теплопроводность относительно мала, а расстояние между соседними сжатиями и расширениями относительно велики ($\lambda/2$); все это в совокупности с тем, что чередующиеся сжатия и расширения в каждой точке пространства происходят очень быстро, означает очень небольшую вероятность переноса теплоты. Следовательно, процесс является адиабатическим. Этот факт можно использовать для определения скорости звука через фундаментальные величины. В разд. 15.2 мы показали, что скорость продольной звуковой волны дается выражением

$$v_{зв} = \sqrt{B/\rho},$$

где $\rho$ – плотность среды и $B$ – модуль всестороннего сжатия, причем из соотношения (11.7б) мы имеем $B = -V(dP/dV)$. Изменение давления при изменении объема, т. е. величина $dP/dV$, зависит от вида процесса, так что величина $B$ также зависит от конкретного процесса. В случае адиабатического процесса величину $B$ (обозначим ее теперь как $B_{адиаб}$) можно найти, дифференцируя уравнение (20.11) по объему $V$:

$$V^\gamma \left(\frac{dP}{dV}\right)_{адиаб} + \gamma P V^{\gamma-1} = 0.$$

Следовательно,

$$B_{адиаб} = -V\left(\frac{dP}{dV}\right)_{адиаб} = -V\left(-\frac{\gamma P}{V}\right) = \gamma P.$$

Таким образом, скорость звука в газе дается выражением

$$v_{зв} = \sqrt{B_{адиаб}/\rho} = \sqrt{\gamma P/\rho}. \qquad (20.12)$$

Поскольку для воздуха $\gamma = 1{,}40$, при температуре 0 °C и давлении 1 атм мы имеем

$$v_{зв} = \sqrt{(1{,}40)(1{,}01\cdot 10^5\ \text{Па})/(1{,}29\ \text{кг/м}^3)} = 331\ \text{м/с}.$$

Это значение прекрасно согласуется с экспериментально измеренным значением скорости звука в воздухе, что

подтверждает наше предположение об адиабатическом характере сжатия и расширения воздуха в звуковой волне. Заметим для сравнения, что если процесс был бы изотермическим, то мы получили бы теоретическое значение $v_{зв}$ около 280 м/с, что сильно отличается от экспериментально полученного значения (см. задачу 35 в конце настоящей главы).

## Заключение

Работа, совершаемая газом (или над газом) при изменении его объема на величину $dV$, равна $dW = P\,dV$, где $P$ – давление газа. Работа и теплота не являются функциями состояния системы (в отличие от таких величин, как $P$, $V$, $T$, $n$ и $U$), а определяются конкретным процессом, в котором система переходит из одного состояния в другое.

*Первое начало термодинамики* гласит, что изменение внутренней энергии $\Delta U$ системы равно сообщенной системе теплоте $Q$ за вычетом работы, совершаемой системой $W$:

$$\Delta U = Q - W.$$

Этот важный закон представляет собой просто новую формулировку закона сохранения энергии и выполняется для любых процессов. Существует два простых термодинамических процесса, один из которых является *изотермическим* и происходит при постоянной температуре, и *адиабатический* процесс, в котором не происходит теплообмена со средой.

*Молярные теплоемкости* идеального газа при постоянном объеме $C_v$ и постоянном давлении $C_p$ связаны соотношением $C_p - C_v = R$, где $R$ – газовая постоянная. Для идеального одноатомного газа $C_v = (3/2)\,R$. Теплоемкость $C_v$ идеального газа, состоящего из двухатомных или более сложных молекул, равна произведению величины $R/2$ на число *степеней свободы* молекулы; вплоть до очень высоких температур некоторые степени свободы могут быть неактивными и не давать вклада в теплоемкость. В соответствии с *принципом равнораспределения энергии* энергия распределяется поровну между активными степенями свободы; в среднем на каждую степень свободы приходится энергия $kT/2$.

При адиабатическом ($Q = 0$) расширении (или сжатии) газа выполняется соотношение $PV^{\gamma} = \text{const}$, где $\gamma = C_p/C_v$.

## Вопросы

1. Что происходит с внутренней энергией водяных паров, находящихся в воздухе, при их конденсации на внешней поверхности стеклянного стакана, заполненного холодной водой? Совершается ли при этом работа? Происходит ли теплообмен? Объясните.

2. Объясните с помощью закона сохранения энергии, почему температура газа повышается при его сжатии, скажем при опускании поршня, и понижается, если газ расширяется.

3. При каком из процессов – изотермическом (кривая $AB$ на рис. 20.4) или адиабатическом (кривая $AC$ на рис. 20.4) – совершается бóльшая работа? При каком процессе изменение внут-

ренней энергии будет больше? При каком будет больше передача теплоты?

4. В изотермическом процессе идеальный газ совершает работу 3700 Дж. Достаточно ли этих данных, чтобы вычислить количество теплоты, сообщенное системе? Если достаточно, то чему оно равно?

5. Идеальный газ медленно сжимается при постоянной температуре до половины своего начального объема. При этом от системы отбирается 80 ккал теплоты. а) Чему равна совершенная работа? б) Чему равно изменение внутренней энергии газа?

6. При адиабатическом расширении объем идеального газа увеличивается в два раза. Для этого газом совершается 850 Дж работы. а) Какое количество теплоты сообщается ему при этом? б) Чему равно изменение внутренней энергии газа? в) Повышается или уменьшается температура газа?

7. Один литр воздуха охлаждается при постоянном давлении до тех пор, пока его объем не уменьшится в два раза. После этого он расширяется изотермически до своего начального объема. Изобразите этот процесс на $PV$-диаграмме.

8. Приведите пример системы, которая совершает работу, хотя ее объем при этом не изменяется.

9. Может ли температура системы оставаться постоянной, если ей передается или у нее отбирается теплота? В случае положительного ответа приведите примеры.

10. Можно ли определить, почему изменилась внутренняя энергия системы – из-за передачи теплоты или совершения работы?

11. Всегда ли температура изолированной системы остается постоянной?

12. Мы установили, что при свободном расширении реального газа (рис. 20.5) его температура понижается очень незначительно. Можно считать, что это обусловлено наличием сил притяжения между молекулами. Объясните это, используя кривую потенциальной энергии и формулу (18.4).

13. Обсудите, как можно применить первое начало термодинамики к объяснению обмена веществ (метаболизма) человека. В частности, заметим, что при совершении человеком работы $W$ телу сообщается небольшое количество теплоты $Q$ (скорее, теплота отдается наружу). Почему же тогда внутренняя энергия человека не уменьшается до катастрофического уровня?

14. Объясните на словах, почему теплоемкость $C_p$ больше теплоемкости $C_v$.

15. Теплый воздух поднимается вверх, но на больших высотах над уровнем моря воздух всегда холоднее. Объясните.

16. Объясните, почему при адиабатическом сжатии температура газа повышается.

17. Идеальный одноатомный газ медленно расширяется до тех пор, пока его первоначальный объем не удвоится 1) изотермически, 2) адиабатически, 3) изобарически. Изобразите каждый из процессов на $PV$-диаграмме. В каких процессах происходят наибольшее и наименьшее изменения $\Delta U$ внутренней энергии? В каких процессах совершается наибольшая и наименьшая работа? В каких процессах количество теплоты $Q$ наибольшее и наименьшее?

## Задачи

### Раздел 20.1

1. (I) Какую работу совершают 8,0 моль газа $O_2$, находящегося первоначально при температуре 0 °C и давлении 1 атм, если объем его удваивается а) изотермически; б) при постоянном давлении?

2. (II) Напишите выражение для плотности газа, когда он расширяется а) в зависимости от температуры при постоянном давлении; б) в зависимости от давления при постоянной температуре.

3. (II) Покажите, что выражения (20.1) и (20.2) справедливы при любой форме сосуда, занятого газом. Для этого приведите произвольную замкнутую кривую, которая будет представлять границу пространства, занятого газом, и бесконечно близкую к ней кривую большего размера, ограничивающую объем, занятый расширившимся газом. Выберите небольшую область начальной границы площадью $\Delta A$ и покажите, что для этой области $dW = P\Delta A\, dl = P dV$. Проинтегрируйте это выражение по всей ограничивающей объем поверхности, а затем по окончательному объему.

4. (II) Какая работа совершается в случае медленного изотермического сжатия 2,50 л азота, находящегося при температуре 0 °C и давлении 1 атм, до объема 1,50 л при 0 °C?

* 5. (III) Какую работу совершает 1 моль вандерваальсова газа (разд. 18.6), когда он изотермически расширяется от объема $V_1$ до объема $V_2$?

### Раздел 20.3

6. (I) При сообщении 1400 ккал теплоты газу, заключенному при атмосферном давлении в цилиндр с движущимся без трения поршнем, объем газа медленно увеличивается от 12,0 до 18,2 м$^3$. Вычислите а) работу, совершаемую газом; б) изменение внутренней энергии газа.

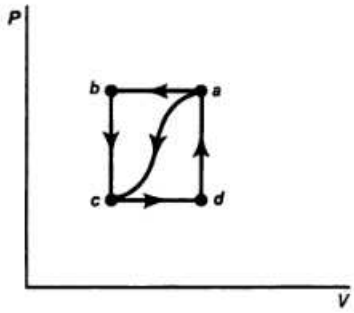



Рис. 20.10.

7. (II) Идеальный газ сжимается при постоянном давлении 2,0 атм от объема 10,0 до 2,0 л. (При этом некоторое количество теплоты уходит из системы и температура понижается.) Затем газу сообщается некоторое количество теплоты таким образом, что объем газа не меняется, а его давление и температура повышаются до тех пор, пока температура не становится равна начальной. Вычислите: а) полную работу, совершаемую над газом; б) полное количество теплоты, сообщенной газу.

8. (II) Газ переходит из состояния $a$ в состояние $c$ вдоль кривой, изображенной на рис. 20.10, совершая работу $W = -35$ Дж; при этом газу сообщается теплота $Q = -63$ Дж. Если процесс описывается линией $abc$, то совершенная работа равна $W = -48$ Дж. а) Чему равна теплота $Q$ для процесса $abc$? б) Если $P_c = P_b/2$, то какая совершается работа в процессе $cda$? в) Чему равна теплота $Q$ в процессе $cda$? г) Чему равна разность внутренних энергий $U_a - U_c$? д) Если $U_d - U_c = 5$ Дж, то чему равна теплота $Q$ для процесса $da$?

9. (II) Вертикальная стальная балка в виде буквы I в основании здания имеет длину 6,0 м и массу 300 кг. Она выдерживает нагрузку $3{,}0 \cdot 10^5$ Н. Вычислите изменение внутренней энергии балки, если ее температура понижается на 4,0 °С. Удельная теплоемкость стали $c_p = 0{,}11$ ккал/(кг·К), а коэффициент линейного расширения равен $11 \cdot 10^{-6}$ $(°C)^{-1}$.

[К следующим двум разделам мы дадим больше задач на первое начало термодинамики.]

Раздел 20.4

10. (I) Покажите, что работа, совершаемая $n$ молями идеального газа при адиабатическом расширении, равна $W = nC_v(T_1 - T_2)$, где $T_1$ и $T_2$ – соответственно начальная и конечная температуры газа, а $C_v$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

11. (I) Чему равна внутренняя энергия 3,0 моль идеального двухатомного газа при температуре 600 К, если все степени свободы активны?

12. (I) Некоторый газ имеет теплоемкость $c_v = 0{,}0356$ ккал/(кг·К), которая слабо изменяется в широком температурном интервале. Чему равна атомная масса этого газа? Какой это газ?

13. (I) Во сколько раз увеличится температура 300 моль углекислого газа $CO_2$, когда ему сообщается 80 ккал теплоты при постоянном давлении?

14. (I) Если в комнате объемом 6,5 м × 5,0 м × 3,0 м, заполненной воздухом при температуре 20 °С и давлении 1 атм, подводится теплота со скоростью $1{,}5 \cdot 10^6$ Дж/ч, то на сколько за один час повысится температура воздуха? Считайте, что тепловые потери отсутствуют.

15. (I) Покажите, что если молекулы газа имеют $n$ степеней свободы, то теория предсказывает следующие значения теплоемкостей: $C_v = (n/2)R$ и $C_p = [(n+2)/2]R$.

16. (I) Оцените молярные теплоемкости газа водорода ($H_2$) при постоянном давлении и постоянном объеме при комнатной температуре.

17. (II) В задаче 9 гл. 19 мы пренебрегли поглощением теплоты углекислым газом и парáми воды, выделяющимися при выпекании пирога. Вычислите приближенно поправку (в процентах) к ответу задачи 9, учитывающую этот процесс. Считайте, что выделяется 2,5 г каждого газа.

18. (II) Удельная теплоемкость некоторого газа при постоянном давлении и комнатной температуре равна 0,182 ккал/(кг·К), а его молярная масса равна 34. а) Чему равна удельная теплоемкость этого газа при постоянном давлении? б) Какова молекулярная структура этого газа?

19. (II) Какое количество теплоты нужно сообщить 12,0 м$^3$ азота, первоначально находившегося при температуре 20 °С, чтобы его объем удвоился при давлении 1,00 атм?

20. (II) В концертном зале объемом 30 000 м$^3$ находятся 2500 слушателей. Если зал не обеспечен вентиляцией, то на сколько за счет теплоты, выделяемой людьми (70 Вт на человека), повысится температура воздуха в зале за 2,0 ч?

21. (II) В эластичный сосуд помещено 800 моль азота при давлении 1,00 атм. Газ нагревается от 40 °С до 180 °С. Вычислите: а) количество теплоты, сообщенной газу; б) работу, совершенную газом; в) изменение внутренней энергии газа.

22. (II) Один моль газа $N_2$ при температуре

0 °C нагревается до 100 °C при постоянном давлении 1,00 атм. Определите: а) изменение внутренней энергии; б) работу, совершаемую газом; в) сообщенное ему количество теплоты.

23. (II) При очень низких температурах молярная теплоемкость многих веществ пропорциональна абсолютной температуре в кубе:

$$C = k\frac{T^3}{T_0^3};$$

это иногда называют законом Дебая. Для каменной соли $T_0 = 281$ К и $k = 1940$ Дж/(моль × × К). Определите количество теплоты, необходимое для нагревания 3,5 моль этого вещества от температуры 12,0 до 38,0 К.

24. (II) Воздушный шар, наполненный горячим воздухом, приобретает подъемную силу за счет нагревания воздуха внутри шара, который становится менее плотным, чем наружный воздух. Пусть шар наполнен 1800 м$^3$ горячего воздуха при температуре 345 К, причем это достигнуто посредством его нагревания от наружной температуры 290 до 345 К при постоянном давлении 1,0 атм. Плотность воздуха при этих значениях давления и температуры следует считать равной 1,22 кг/м$^3$, а его усредненную молекулярную массу – равной 29. Предполагая, что воздух – это идеальный двухатомный газ с пятью степенями свободы, вычислите следующие величины: а) число молей воздуха внутри шара; б) внутреннюю энергию воздуха внутри шара при температуре 290 К и ее изменение после нагревания; в) работу, которую совершает воздух внутри шара над наружным воздухом при расширении, обусловленном нагреванием; г) Используя первое начало термодинамики, вычислите количество теплоты, сообщаемое воздуху внутри шара во время нагревания.

25. (III) Идеальный газ в количестве 1,00 моль при давлении 1,00 атм и температуре 580 К участвует в процессе, в котором его давление увеличивается линейно с температурой. Конечные значения температуры и давления равны соответственно 720 К и 1,60 атм. Определите: а) изменение внутренней энергии газа; б) работу, совершенную газом; в) количество теплоты, сообщенное газу. (Считайте, что газ обладает пятью активными степенями свободы.)

Раздел 20.5

26. (I) Один моль идеального двухатомного газа, находившегося первоначально при давлении 1,00 атм и комнатной температуре, адиабатически расширяется до объема, который в два раза больше первоначального. Чему равно конечное давление газа? (Считайте, что молекулярные колебания отсутствуют.)

27. (II) Используя формулы (20.1) и (20.11), покажите, что работа, совершаемая газом, который медленно расширяется адиабатически от значений давления $P_1$ и объема $V_1$ до значения $P_2$ и $V_2$, дается выражением $W = (P_1V_1 - P_2V_2)/(\gamma - 1)$.

28. (II) Идеальный газ при температуре 400 К адиабатически расширяется до пятикратного увеличения начального объема. Определите конечную температуру газа, если он а) одноатомный; б) двухатомный (без учета колебаний); в) двухатомный (молекулы совершают колебания).

29. (II) Докажите, что производная в любой точке графика адиабатического процесса на $PV$-диаграмме более сильно наклонена (т. е. является более отрицательной), чем соответствующая производная для изотермического процесса.

30. (II) В дизельном двигателе воспламенение достигается не за счет свечи зажигания, а за счет адиабатического сжатия воздуха до температуры, превышающей температуру воспламенения дизельного топлива, которое впрыскивается в цилиндр двигателя в точке максимального сжатия. Считайте, что воздух входит в цилиндр при температуре 300 К и занимает объем $V_1$, а затем сжимается адиабатически до объема $V_2$ при температуре 560 °C. Считая, что воздух ведет себя как идеальный газ, для которого отношение $C_p/C_v$ равно 1,4, вычислите степень сжатия $V_1/V_2$ двигателя.

* Раздел 20.6

*31. (II) Идеальный двухатомный газ в количестве 5,00 моль расширяется адиабатически от объема 0,1210 до 0,750 м$^3$. Начальное давление газа 1,00 атм. Определите: а) начальную и конечную температуры; б) изменение внутренней энергии; в) работу, совершаемую *над* газом; г) количество теплоты, теряемое газом. (Считайте, что молекулы не колеблются.)

*32. (II) а) Покажите, что скорость звука в идеальном газе дается выражением

$$v_{зв} = \sqrt{\gamma RT/M},$$

где $M$ – молекулярная масса газа. б) Чему равно отношение скоростей звука в двух различных газах при одной и той же температуре?

*33. (II) Используя ответ задачи 32 и биномиальное разложение, покажите, что скорость звука в воздухе при температуре около 0 °C увеличивается примерно на 0,61 м/с на каждый градус повышения температуры.

*34. (II) Идеальный одноатомный газ, состоящий из 2,4 моль и занимающий объем 0,084 м$^3$,

расширяется адиабатически; его начальная и конечная температуры равны соответственно 25 и $-58\,^{\circ}C$. Чему равен конечный объем газа?

*35. (II) а) Покажите, что модуль всестороннего сжатия $B = -V(dP/dV)$ эквивалентен давлению $P$ для изотермического процесса. б) Чему равна скорость звука в воздухе при температуре $0\,^{\circ}C$ и давлении 1 атм, если звуковые волны распространяются в изотермических (а не адиабатических) условиях?

* 36. (III) Один моль идеального одноатомного газа при давлении 1,00 атм участвует в трехступенчатом процессе: 1) адиабатически расширяется от температуры $T_1 = 550$ К до $T_2 = 389$ К; 2) сжимается при постоянном давлении до температуры $T_3$; 3) возвращается затем к своим первоначальным значениям давления и температуры в изохорическом процессе. а) Изобразите все эти процессы на $PV$-диаграмме. б) Определите температуру $T_3$. в) Вычислите изменение внутренней энергии, работу, совершенную газом, и теплоту, сообщаемую газу в каждом процессе; г) то же самое для всего процесса.

# 21 Второе начало термодинамики

## 21.1. Необходимость в дополнительном начале термодинамики

Согласно первому началу термодинамики, энергия сохраняется. Мы можем представить себе много процессов, в которых энергия сохраняется, но в природе такие процессы не наблюдаются. Например, когда горячее тело приводится в контакт с холодным, теплота всегда переходит от горячего тела к холодному, а не наоборот. Если бы теплота все-таки переходила от холодного тела к горячему, то энергия и в этом случае сохранялась бы, но такой процесс в действительности не имеет места. В качестве второго примера рассмотрим, что происходит после броска камня, который падает на поверхность Земли. По мере падения камня его начальная потенциальная энергия переходит в кинетическую. Когда же камень соприкасается с Землей, его кинетическая энергия преобразуется во внутреннюю энергию камня и земли (это означает, что молекулы этих тел начинают двигаться быстрее, а их температура слегка поднимается). Однако приходилось ли вам когда-либо наблюдать обратное явление, в ходе которого покоящийся на поверхности Земли камень вдруг взлетел в воздух благодаря тому, что тепловая энергия его (и окружающих) молекул преобразовалась в кинетическую энергию движения камня как целого? В этом процессе энергия сохранялась бы, однако в действительности такого никогда не происходит.

Существует много примеров и других процессов, которые могут быть в природе, тогда как обратные им никогда не происходят. Приведем еще два примера такого рода. Если вы насыпете в кружку слой соли, а затем покроете его слоем перца и встряхнете кружку, то, наверняка, получите хорошо перемешанную смесь. Однако сколько бы вы ни трясли кружку еще, весьма маловероятно, чтобы эта смесь вновь разделилась на два слоя – отдельно соль и перец. Кофейная чашка или стеклянный стакан самопроизвольно разобьются, если вы уроните их на пол; однако самопроизвольно они уже не восстановятся.

Если бы во всех вышеприведенных примерах обратные процессы реализовались, это не привело бы к нарушению первого начала термодинамики. Для того чтобы объяс-

нить отсутствие обратимости процессов, ученые во второй половине прошлого века пришли к формулировке нового закона, известного под названием **второе начало термодинамики**. Согласно этому закону, можно судить о том, какие процессы возможны в природе, а какие невозможны. Второе начало термодинамики можно сформулировать многими способами, причем все они эквивалентны друг другу. Одна из формулировок, принадлежащая Р. Ю. Э. Клаузиусу (1822–1888), гласит, что *теплота в естественных условиях переходит от горячего тела к холодному, в то время как от холодного тела к горячему теплота сама по себе не переходит.* Поскольку это утверждение относится к процессу определенного типа, не вполне очевидно, каким образом применить его к другим процессам. Требуется более общая формулировка, в которой явным образом будут учтены и другие возможные процессы.

Исторически более общая формулировка второго начала термодинамики вырабатывалась в основном в ходе изучения тепловых двигателей (или, как их называли ранее, тепловых машин). **Тепловой двигатель** – это любое устройство, которое преобразует тепловую энергию в механическую работу. Ниже мы перейдем к изучению тепловых двигателей, что представляет интерес с практической точки зрения и демонстрирует их важность для общей формулировки второго начала термодинамики.

## 21.2. Тепловые двигатели и холодильники

Нетрудно получить тепловую энергию за счет совершения работы, например достаточно сильно потереть одну ладонь о другую, этой же цели можно достичь в любом процессе с участием трения. Однако получить механическую работу за счет тепловой энергии значительно труднее, и практически полезное устройство для этой цели

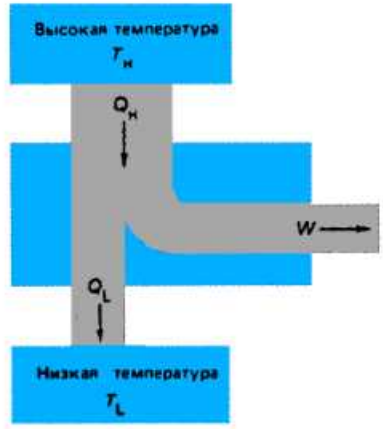



Рис. 21.1. Схема работы теплового двигателя.

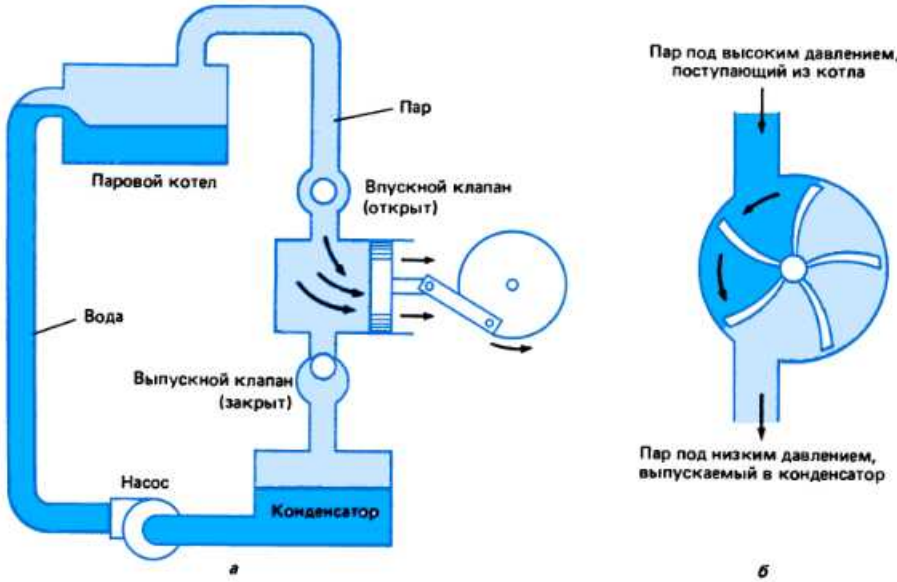



Рис. 21.2. Паровые двигатели.

было изобретено лишь около 1700 г. на основе паровой машины.

Основная идея, лежащая в основе любого теплового двигателя, состоит в том, что механическая энергия может быть получена за счет тепловой, только если дать возможность теплоте переходить из области с высокой температурой в область с низкой температурой, причем в процессе этого перехода часть теплоты может быть преобразована в механическую работу, что схематически показано на рис. 21.1. Высокая $T_H$ и низкая $T_L$ температуры называются *рабочими температурами* двигателя, и в дальнейшем для простоты мы будем считать, что эти температуры обеспечиваются двумя термостатами, находящимися при постоянных температурах $T_H$ и $T_L$. Нас будут интересовать только тепловые двигатели, которые совершают периодические рабочие *циклы* (т. е. вся система периодически возвращается в исходное состояние) и таким образом могут действовать непрерывно.

Принцип действия двух практически используемых типов тепловых двигателей иллюстрируются на рис. 21.2 и 21.3; к ним относятся паровой двигатель и двигатель внутреннего сгорания (используемый в большинстве автомобилей). Современные паровые двигатели подразделяются на два основных типа. В двигателях так называемого возвратного типа (рис. 21.2, *а*) нагретый пар проходит через впускной клапан и затем расширяется в пространстве под поршнем, вынуждая его двигаться; после того как поршень возвращается в свое исходное положение, он вытесняет газы через выпускной клапан. В паровой турбине (рис. 21.2, *б*) происходит по существу то же самое; различие состоит лишь в том, что движущийся воз-

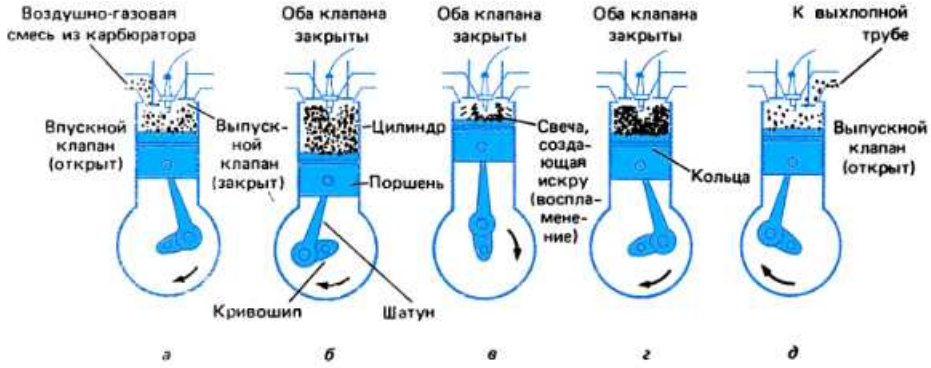



Рис. 21.3. Четырехтактный двигатель внутреннего сгорания. *а* смесь воздуха с бензином засасывается в цилиндр при движении поршня вниз; *б* поршень движется вверх и сжимает газ; *в* – искра свечи воспламеняет смесь воздуха с бензином, при этом резко возрастает температура смеси; *г* газы, находящиеся при высокой температуре и давлении, расширяются, перемещая поршень вниз (рабочий ход двигателя); *д* – отработавшие газы выбрасываются через выпускной клапан в выхлопную трубу; затем весь цикл повторяется.

вратно-поступательно поршень заменяется вращающейся турбиной, напоминающей гребное колесо, снабженное многочисленными лопатками. С помощью паровых турбин[1)] производится большая часть получаемой в настоящее время электроэнергии. Вещество, которое нагревается и охлаждается (в данном случае пар), называется *рабочим телом*. В паровом двигателе высокая температура достигается за счет сжигания угля, нефти или другого топлива; при этом нагревается пар. В двигателе внутреннего сгорания высокая температура достигается за счет сгорания рабочей смеси (бензина с воздухом) внутри цилиндра двигателя; воспламенение смеси происходит с помощью искрового зажигания.

Выясним теперь, почему для практической работы двигателя необходима *разность температур*; рассмотрим это на примере парового двигателя. Пусть в паровом двигателе возвратного типа, скажем показанного на рис. 21.2, *а*, не было бы ни конденсатора, ни насоса, так что пар имел бы одинаковую температуру во всей системе. Это означало бы, что давление пара при его выпуске было бы таким же, как и при впуске. Тогда работа, которую совершил бы пар над поршнем при своем расширении после впуска, в точности была бы равна работе, которую совершил поршень *над* паром при его выпуске; в конечном счете не было бы совершено никакой результирующей работы. В реальном двигателе выпускаемый газ охлаждается до более низкой температуры и конденсируется, так что давление при выпуске меньше, чем давление при впуске. Тогда работа, которую должен совершить поршень для выталкивания пара из цилиндра на стадии выпуска, будет меньше, чем работа, которую совершит пар над поршнем на стадии впуска. Таким образом может быть получена некоторая результирующая работа, но для этого, как теперь ясно, необходима

[1)] Даже на атомных электростанциях (АЭС) применяются паровые турбины; ядерное топливо (уран) необходимо лишь для нагревания пара.

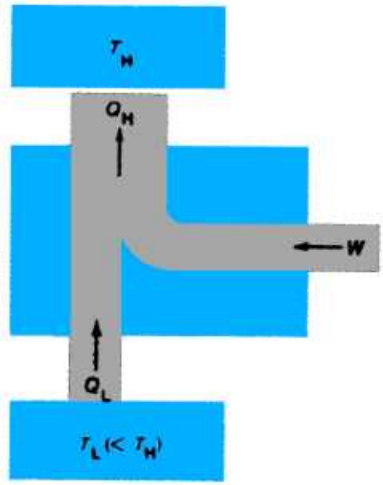



Рис. 21.4. **Схема работы холодильника или воздушного кондиционера.**

разность температур. Аналогично если бы пар в паровой турбине не охлаждался, то давление по обе стороны каждой лопатки было бы одинаковым и турбина не стала бы вращаться. Охлаждение пара со стороны лопатки, обращенной к выпускному клапану (рис. 21.2, *б*), приводит к тому, что давление пара со стороны лопатки, обращенной к впускному клапану, становится больше и в результате турбина вращается.

Принцип действия холодильника или другого *теплового насоса* (например, используемого для создания теплового потока снаружи внутрь дома или наоборот; в последнем случае устройство называется воздушным кондиционером) состоит в обращении рабочих стадий теплового двигателя. Как показано схематически на рис. 21.4, совершая работу $W$, можно отобрать некоторое количество теплоты из области с низкой температурой $T_L$ (например, из внутреннего объема холодильника) и затем отдать большее количество теплоты в область с высокой температурой $T_H$ (например, в комнату). Вы можете без труда

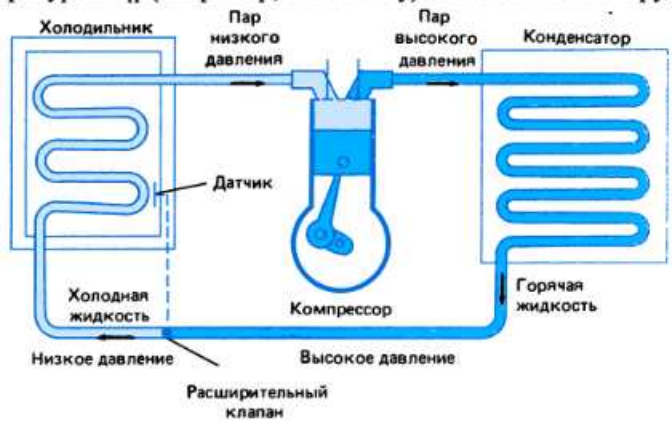



Рис. 21.5. **Типичная холодильная установка.**

ощутить эту теплоту, поднося руку к задней стенке холодильника. Работа $W$ совершается обычно мотором компрессора, который сжимает рабочее тело (рис. 21.5).

## 21.3. Эффективность тепловых двигателей и второе начало термодинамики

При изучении работы тепловых двигателей в этом и следующих разделах мы будем интересоваться прежде всего *величинами* потоков теплоты. Поэтому, чтобы не задумываться всякий раз о знаке потока теплоты (в соответствии с соглашением о знаках в разд. 20.2), определяющем его направление (в систему или из нее), мы будем здесь использовать для теплоты лишь абсолютные значения ($|Q|$) и необходимый по смыслу знак плюс или минус. В разд. 21.6 мы будем вновь использовать первоначальное соглашение о знаках. Эффективность любого теплового двигателя определяется его коэффициентом полезного действия (КПД). Будем обозначать КПД буквой $e$ и определять как отношение работы двигателя $W$ к количеству подводимой теплоты $|Q_H|$ при высокой температуре (рис. 21.1):

$$e = W/|Q_H|.$$

Это определение имеет ясный практический смысл, так как величина $W$ представляет собой полезный «выход» двигателя (т. е. то, что мы получаем от него), в то время как $|Q_H|$ – это то, что мы «вкладываем» в него (например, покупая топливо для двигателя). Поскольку полная энергия сохраняется, подводимая теплота $|Q_H|$ должна быть равна сумме работы $W$ и количества теплоты $|Q_L|$, отводимой при низкой температуре:

$$|Q_H| = W + |Q_L|.$$

Таким образом, $W = |Q_H| - |Q_L|$, и КПД двигателя можно записать в виде

$$e = \frac{W}{|Q_H|} = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|}. \qquad (21.1)$$

Из соотношения (21.1) ясно, что КПД двигателя будет тем выше, чем меньше будет теплота $|Q_L|$. Однако опыт работы с очень широким классом двигателей показал, что уменьшить величину $|Q_L|$ до нуля невозможно. Если бы это было осуществимо, то мы получили бы двигатель с КПД, равным 100% (рис. 21.6). То, что такой идеальный двигатель, непрерывно совершающий рабочие циклы, невозможен, составляет содержание другой формулировки второго начала термодинамики:

**Невозможен периодический процесс, единственным результатом которого было бы преобразование отобранной у источника теплоты $Q$ при неизменной температуре полностью в работу $W$ (так что $W = Q$).**

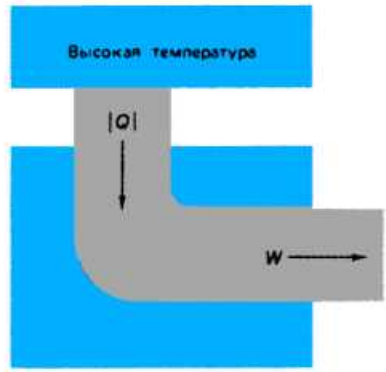



Рис. 21.6. Схема гипотетического идеального теплового двигателя, в котором вся поступающая теплота используется для совершения работы $W = |Q|$. Такой идеальный тепловой двигатель не может быть создан.

Это утверждение известно как *формулировка второго начала термодинамики Кельвина – Планка*. Если бы содержащийся в нем запрет не выполнялся и можно было бы построить идеальный двигатель, то могли бы происходить удивительные вещи. Так, например, если бы двигателю на корабле не нужен был низкотемпературный резервуар (термостат), в который он мог бы сбрасывать часть теплоты после стадии выпуска, то корабль мог бы переплыть океан, пользуясь только огромными запасами внутренней энергии океанских вод. По существу, отпала бы вообще проблема топлива!

Однако все попытки построить идеальный двигатель оказались бесплодными, и это считается вообще невозможным. Аналогично невозможным оказалось построить и обратную систему – идеальный холодильник, а именно устройство, с помощью которого теплоту можно было бы переносить из низкотемпературной области в высокотемпературную, причем для этого не требовалось бы совершения никакой работы ($W = 0$, $|Q_L| = |Q_H|$ на рис. 21.4). Это утверждение можно сформулировать так:

> **Невозможно осуществить периодический процесс, единственным результатом которого был бы отбор теплоты у одной системы при данной температуре и передача в точности того же количества теплоты другой системе при более высокой температуре.**

Это формулировка *второго начала термодинамики Клаузиуса*. Она обобщает приведенное в разд. 21.1 менее строгое утверждение о том, что теплота самопроизвольно не будет переходить от холодного тела к горячему. Чтобы достичь этой цели, необходимо совершить работу. Утверждение Клаузиуса можно также сформулировать следующим образом: *нельзя создать идеальный холодильник*.

Покажем теперь, что две различные формулировки второго начала термодинамики – Клаузиуса и Кельвина – Планка – эквивалентны друг другу. Для этого докажем, что если неверна одна из них, то неверна и другая. Таким образом, обе формулировки должны быть либо неверны,

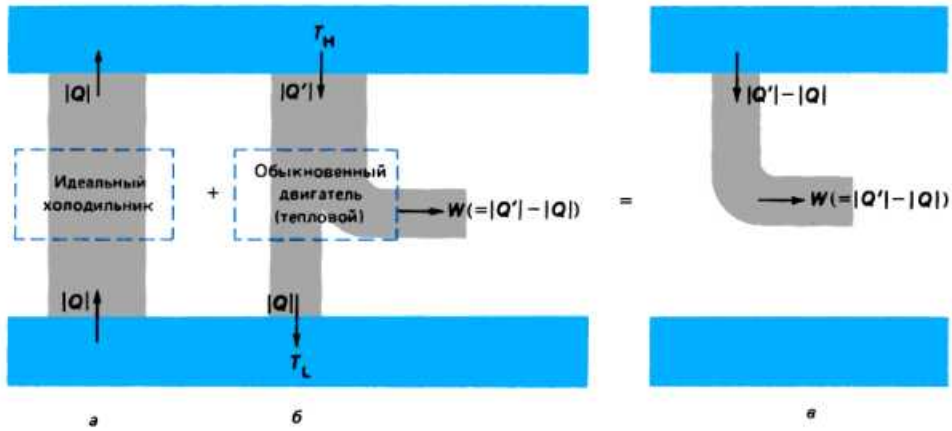



Рис. 21.7. Эквивалентность формулировок второго начала термодинамики Клаузиуса и Кельвина – Планка. Идеальный холодильник (*а*), работающий в сочетании с обычным тепловым двигателем (*б*), был бы эквивалентен идеальному двигателю (*в*).

либо верны (а не то, чтобы одна была верна, а другая нет), и это доказывает их эквивалентность.

Предположим, что формулировка Клаузиуса ошибочна, т. е. идеальный холодильник был бы возможен. Тогда в соответствии с рис. 21.7, *а* можно было бы отобрать количество теплоты $|Q|$ от тела с низкой температурой и передать его телу с высокой температурой, не совершив никакой работы. Рассмотрим теперь обычный двигатель, который отбирает количество теплоты $|Q'|$ от тела с высокой температурой, совершает работу $W$ и выпускает количество теплоты $|Q|$ в резервуар с низкой температурой (рис. 21.7, *б*). Результирующее действие этих двух устройств таково, что от тела с высокой температурой отбирается количество теплоты $|Q'|-|Q|$ и полностью преобразуется в работу $W=|Q'|-|Q|$, как показано на рис. 21.7, *в*. Таким образом, в конечном счете эта система ведет себя как идеальный двигатель, что противоречит формулировке Кельвина – Планка.

Предположим теперь, что ошибочна формулировка Кельвина – Планка, и покажем, что при этом формулировка Клаузиуса также неверна. Пусть идеальный двигатель (рис. 21.8, *а*) отбирает количество теплоты $|Q|$ от тела с высокой температурой и затем полностью преобразует его в полезную работу $W$, так что $W=|Q|$. Затем обычный холодильник (рис. 21.8, *б*) использует эту работу для отбора количества теплоты $|Q'|$ от тела с низкой температурой и передачи количества теплоты $|Q''|$ телу с высокой температурой; при этом $|Q''|=|Q'|+W=|Q'|+|Q|$. Следовательно, это устройство отбирает от тела с высокой температурой количество теплоты $|Q|$ и передает ему количество теплоты $|Q''|$; результирующий приток теплоты к телу с высокой температурой при этом равен $|Q''|-|Q|=(|Q'|+|Q|)-|Q|=|Q'|$. Таким образом, результирующее действие этого устройства (рис. 21.8, *в*) состоит в отборе количества теплоты $|Q'|$ от тела с низкой температурой и передаче в точности такого

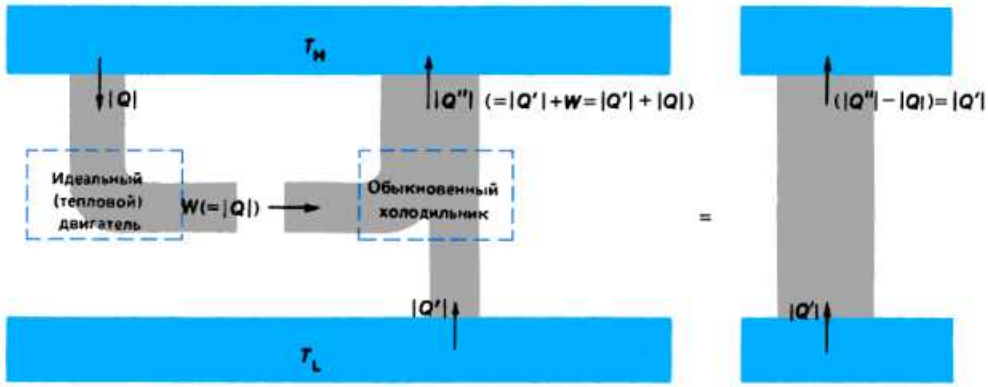



Рис. 21.8. **Эквивалентность формулировок второго начала термодинамики Клаузиуса и Кельвина – Планка. Идеальный двигатель (*а*), работающий в сочетании с обычным холодильником (*б*), был бы эквивалентен идеальному холодильнику (*в*); $|Q''|-|Q|=W+|Q'|-|Q|=|Q'|$, так как $W=|Q|$.**

же количества теплоты $|Q'|$ телу с высокой температурой, что противоречит второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса.

Мы убедились в том, что если одна из формулировок второго начала термодинамики, а именно Клаузиуса и Кельвина – Планка, неверна, то с необходимостью неверна и другая. Следовательно, если верна одна из них, то должна быть верна и другая, так что обе формулировки эквивалентны.

## 21.4. Двигатель Карно; обратимые и необратимые процессы

Процесс преобразования теплоты в механическую энергию подробно изучал в самом начале девятнадцатого столетия французский ученый Н. Л. Сади Карно (1796–1832). Он намеревался определить способы повышения КПД тепловых двигателей, однако исследования вскоре привели его к изучению основ самой термодинамики.

Как вспомогательное средство для своих исследований Карно в 1824 г. изобрел (на бумаге) идеализированный тип двигателя, который мы называем теперь двигателем Карно. Важная роль двигателя Карно заключается не только в его возможном практическом применении, но и в том, что он позволяет объяснить принципы действия тепловых двигателей вообще; не менее важно и то, что Карно с помощью своего двигателя удалось внести существенный вклад в обоснование и осмысление второго начала термодинамики.

В двигателе Карно происходят *обратимые процессы*; поэтому прежде всего необходимо выяснить, что мы подразумеваем под обратимыми и необратимыми процессами. **Обратимый процесс** – это такой процесс, который протекает чрезвычайно медленно, так что его можно рассматривать как последовательный переход от одного равновесного состояния к другому и т. д., причем весь

этот процесс можно провести в обратном направлении без изменения совершенной работы и переданного количества теплоты. Например, газ, находящийся в цилиндре с плотно прижатым к его стенкам подвижным поршнем, который не имеет трения со стенками, можно сжать изотермически обратимым путем, если проводить сжатие очень и очень медленно. Однако не все даже очень медленные (квазистатические) процессы являются обратимыми. Например, если в процессе участвует трение (в описанном выше примере это может быть трение между поршнем и стенками цилиндра), то работа, совершенная при движении в одном направлении (например, от состояния A к состоянию B), не будет равна (с противоположным знаком) работе, совершенной при движении в обратном направлении (от состояния B к состоянию A). Такой процесс нельзя было бы рассматривать как обратимый. Разумеется, идеально обратимый процесс в действительности невозможен, поскольку для него понадобилось бы бесконечно большое время; однако обратимые процессы можно моделировать со сколь угодно высокой точностью, и эти процессы имеют очень важное значение для теории. Все реальные процессы являются **необратимыми** и происходят с конечной скоростью. В газе могут возникать возмущения (вплоть до турбулентности), может присутствовать трение, могут быть и другие причины необратимости. При этих условиях ни один процесс не может быть строго обратимым, поскольку потери теплоты на трение уже сами по себе являются необратимыми, турбулентность станет другой и т. п. Для любого выделенного объема не будет существовать какого-либо одного хорошо определенного значения давления $P$ и температуры $T$, поскольку система не всегда будет находиться в состоянии равновесия. Таким образом, реальный необратимый процесс не может быть изображен на $PV$-диаграмме (за исключением лишь случаев, когда такой процесс в некотором приближении можно рассматривать как идеальный обратимый процесс). Обратимый же процесс (поскольку он представляет собой квазистатическую последовательность равновесных состояний) всегда можно изобразить на $PV$-диаграмме, причем обратимый процесс, когда он протекает в обратном направлении, следует по тому же пути на $PV$-диаграмме. Несмотря на то что все реальные процессы необратимы, понятие обратимого процесса играет важную познавательную роль точно так же, как и понятие идеального газа.

Вернемся теперь к рассмотрению идеального двигателя Карно. Он основан на представлении об *обратимом цикле*. Обратимый цикл – это последовательность обратимых процессов, посредством которых данное вещество (рабочее тело) переводится из начального равновесного состояния через многие другие равновесные состояния и возвращается снова в то же первоначальное

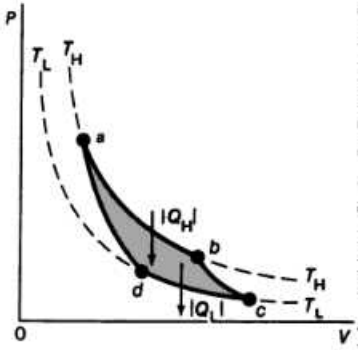



Рис. 21.9. Цикл Карно.

состояние. В частности, в двигателе Карно используется **цикл Карно**, изображенный на рис. 21.9, причем в качестве рабочего тела рассматривается идеальный газ. (Для реального газа $PV$-диаграмма цикла несколько изменится.) Выберем точку $a$ в качестве начального состояния. Газ сначала расширяется изотермически и обратимо по пути $ab$ при температуре $T_H$; для этого можно представить себе, что газ приводится в контакт с горячим термостатом при температуре $T_H$, который сообщает количество теплоты $|Q_H|$ рабочему телу. Затем газ расширяется адиабатически и обратимо по пути $bc$; на этом участке передача теплоты (теплообмена) вообще не происходит и температура газа падает до значения $T_L$. На третьей стадии цикла происходит изотермическое обратимое сжатие газа по пути $cd$; здесь необходим контакт с холодным термостатом при температуре $T_L$, которому рабочее тело передает количество теплоты $|Q_L|$. Наконец, газ адиабатически сжимается по пути $da$, возвращаясь вновь в исходное состояние. Таким образом, цикл Карно состоит из двух изотермических и двух адиабатических обратимых процессов.

Нетрудно показать, что результирующая работа, совершаемая в одном цикле двигателем Карно (или вообще любым двигателем, использующим обратимый цикл), численно равна площади, ограниченной криволинейными отрезками, образующими цикл на $PV$-диаграмме (кривая $abcd$ на рис. 21.9). Доказательство этого утверждения мы оставляем читателю в качестве задачи 7 в конце настоящей главы (см. также разд. 20.1).

## 21.5. КПД двигателя Карно и второе начало термодинамики

КПД двигателя Карно, как и любого теплового двигателя, дается выражением (21.1):

$$e = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|}.$$

Однако можно показать, что КПД двигателя Карно зависит лишь от температур термостатов $T_H$ и $T_L$. В первом изотермическом процессе ($ab$ на рис. 21.9) совершаемая газом работа в соответствии с (20.3) запишется в виде

$$W_{ab} = nRT_H \ln(V_b/V_a),$$

где $n$ – число молей идеального газа, используемого в качестве рабочего тела. Поскольку внутренняя энергия идеального газа не изменяется, когда температура остается постоянной, сообщаемая газу теплота полностью переходит в совершаемую газом работу (в полном соответствии с первым началом термодинамики):

$$|Q_H| = nRT_H \ln(V_b/V_a).$$

Аналогично теплота, отдаваемая газом во втором изотермическом процессе *cd*, запишется в виде

$$|Q_L| = nRT_L \ln(V_c/V_d).$$

Поскольку пути *bc* и *da* соответствуют адиабатическим процессам, мы имеем [см. выражение (20.11)]

$$P_b V_b^\gamma = P_c V_c^\gamma \quad \text{и} \quad P_d V_d^\gamma = P_a V_a^\gamma.$$

Кроме того, в соответствии с уравнением состояния идеального газа получаем

$$\frac{P_b V_b}{T_H} = \frac{P_c V_c}{T_L} \quad \text{и} \quad \frac{P_d V_d}{T_L} = \frac{P_a V_a}{T_H}.$$

Разделив почленно последние уравнения на соответствующие предыдущие уравнения, находим

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_L V_c^{\gamma-1} \text{ и } T_L V_d^{\gamma-1} = T_H V_a^{\gamma-1}.$$

Разделим затем левое из этих уравнений на правое:

$$(V_b/V_a)^{\gamma-1} = (V_c/V_d)^{\gamma-1}.$$

Следовательно,

$$V_b/V_a = V_c/V_d,$$

или

$$\ln(V_b/V_a) = \ln(V_c/V_d).$$

Подставляя этот результат в записанные выше выражения для $|Q_H|$ и $|Q_L|$, мы имеем

$$|Q_L|/|Q_H| = T_L/T_H \quad \text{[цикл Карно]}. \tag{21.2}$$

Таким образом, КПД обратимого двигателя Карно запишется в виде

$$e = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad \text{[КПД двигателя Карно]}. \tag{21.3}$$

Температуры $T_L$ и $T_H$ являются абсолютными, измеренными по температурной шкале идеального газа[1]. Таким образом, КПД двигателя Карно зависит только от температур $T_L$ и $T_H$.

Можно представить себе и другие обратимые циклы, которые могут быть использованы для идеального обратимого двигателя. Карно сформулировал следующую теорему:

**Все обратимые двигатели, работающие между термостатами с одинаковыми двумя температурами, имеют один и тот же КПД; ни один необратимый двигатель, работающий между теми же термостатами, не может иметь более высокого КПД.**

Таким образом, *теорема Карно* утверждает, что значение КПД, даваемое выражением (21.3), т. е. $e = 1 - T_L/T_H$, применимо к *любому* обратимому двигателю,

---

[1] См. разд. 17.11, а также разд. 21.11.

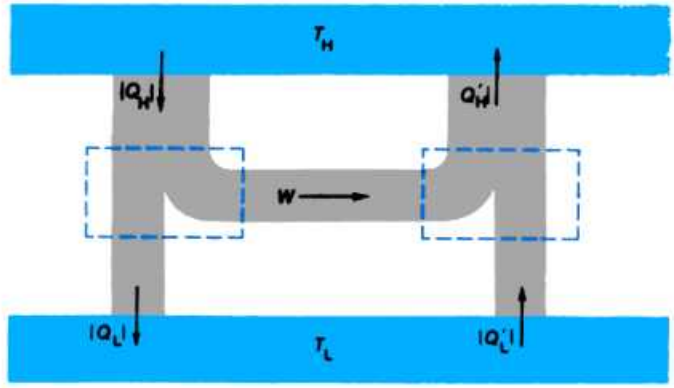



Рис. 21.10. Иллюстрация к доказательству того, что теорема Карно является следствием второго начала термодинамики. Работа, производимая левым двигателем, используется для приведения в действие холодильника (обратимого двигателя) справа.

и, кроме того, это выражение определяет максимально возможное значение КПД реального (необратимого) двигателя.

Можно показать, что теорема Карно является следствием одной из формулировок второго начала термодинамики – Клаузиуса или Кельвина – Планка. Покажем это на примере формулировки Клаузиуса. Предположим, что мы имеем два обратимых тепловых двигателя, работающих между термостатами (холодным и горячим) с температурами соответственно $T_L$ и $T_H$. Пусть значения КПД этих двигателей равны соответственно $e$ и $e'$, причем оба двигателя совершают одну и ту же работу $W$. Обратим теперь цикл работы одного из двигателей (с КПД $e'$) таким образом, чтобы он работал как холодильник (рис. 21.10). Поскольку $W = |Q_H| - |Q_L|$ для двигателя и $W = |Q'_H| - |Q'_L|$ для холодильника, мы имеем $|Q_H| - |Q_L| = |Q'_H| - |Q'_L|$, или

$$|Q'_L| - |Q_L| = |Q'_H| - |Q_H|.$$

Предположим теперь, что значения КПД двигателей не одинаковы; пусть $e > e'$. Это означает, что

$$\frac{W}{|Q_H|} > \frac{W}{|Q'_H|},$$

т. е.

$$|Q'_H| > |Q_H|.$$

Таким образом, имеется результирующий поток теплоты в термостат с высокой температурой, равный $|Q'_H| - |Q_H|$; имеется также результирующий поток теплоты $|Q'_L| - |Q_L|$ из термостата с низкой температурой, причем, как было показано выше, $|Q'_L| - |Q_L| = |Q'_H| - |Q_H|$. Таким образом, соединение обоих двигателей привело к результирующему потоку теплоты от низкотемпературного термостата к высокотемпературному, причем никакой результирующей работы не было совершено. Это противоречит формулировке Клаузиуса

второго начала термодинамики. Следовательно, предположение о том, что $e > e'$, несовместимо со вторым началом. Можно теперь поменять ролями оба двигателя и применить аналогичные рассуждения, чтобы показать, что условие $e' > e$ также несовместимо со вторым началом термодинамики в формулировке Клаузиуса. Таким образом, чтобы эта формулировка не нарушалась, мы должны иметь

$$e = e' \qquad \text{[обратимые двигатели]}.$$

Предположим теперь, что один из двигателей (с КПД $= e$) является необратимым, а другой (с КПД $= e'$) – обратимым. То, что и в этом случае $e$ не может быть больше $e'$, можно показать с помощью тех же рассуждений, что и применительно к рис. 21.10. Однако, поскольку нельзя обратить необратимый двигатель и создать холодильник с обратными характеристиками, мы не в состоянии показать, что $e'$ не может быть больше, чем $e$. Таким образом, мы имеем

$$e_{\text{необр}} \leqslant e'_{\text{обр}}.$$

Иными словами, КПД необратимого двигателя не больше КПД обратимого двигателя, если оба двигателя работают между термостатами с одинаковыми парами температур. Таким образом, мы показали, что теорема Карно следует из второго начала термодинамики. По существу, ее можно рассматривать как третью возможную формулировку этого начала.

В действительности КПД реальных двигателей значительно уступает теоретическому пределу Карно; даже у хорошо сконструированных двигателей КПД достигает лишь 60–80% теоретического значения КПД Карно.

**Пример 21.1.** Паровой двигатель работает между термостатами с максимальной и минимальной температурами соответственно 500 и 270 °C. Каков максимально возможный КПД этого двигателя?

**Решение.** Прежде всего необходимо перевести температуры к абсолютным температурам по шкале Кельвина: $T_{\text{н}} = 773$ К и $T_{\text{L}} = 543$ К; тогда

$$e = 1 - \frac{543}{773} = 0{,}30.$$

Таким образом, максимальный (Карно) КПД равен 30%. В действительности КПД парового двигателя может достичь лишь 70% этого значения, т. е. около 21%. Заметим, что в этом примере температура выпуска пара еще достаточно высока и составляет 270 °C; эта ситуация типична для паровых двигателей, и потому такие двигатели часто работают в последовательной комбинации, когда выход одного из них служит входом для другого и т. д.

## 21.6. Энтропия

Мы уже познакомились с несколькими аспектами второго начала термодинамики, однако пока еще не пришли к его наиболее общей формулировке. Обе известные нам фор-

мулировки (Клаузиуса и Кельвина – Планка) относятся к достаточно специальным случаям. В то же время, как отмечалось в начале этой главы, существует много процессов, которые просто не наблюдаются в природе, хотя они не противоречили бы первому началу термодинамики. Эта общая формулировка действительно может быть получена с использованием физической величины, введенной Клаузиусом в 1860-х годах и названной им *энтропией*, которую мы теперь и рассмотрим.

При изучении цикла Карно мы нашли [см. выражение (21.2)], что $|Q_L|/|Q_H| = T_L/T_H$. Перепишем теперь это равенство в виде

$$|Q_H|/T_H = |Q_L|/T_L.$$

В этом выражении обе величины $|Q_H|$ и $|Q_L|$ являются положительными, поскольку это абсолютные значения. Снимем теперь с этих величин знаки модулей и вернемся к исходному соглашению о знаках количеств теплоты, использованному в связи с первым началом термодинамики в разд. 20.2. Напомним, что количество теплоты $Q$ считается положительной величиной, когда оно соответствует притоку теплоты в систему (как $Q_H$), и отрицательной, когда оно соответствует отбору теплоты от системы (как $Q_L$). Тогда последнее соотношение примет вид

$$Q_H/T_H + Q_L/T_L = 0 \qquad \text{[цикл Карно]}. \tag{21.4}$$

Рассмотрим теперь *произвольный* обратимый цикл, представленный, например, гладкой замкнутой кривой (в форме овала) на рис. 21.11. Любой обратимый цикл можно приближенно представить в виде последовательности циклов Карно. На рис. 21.11 показано только шесть таких циклов, состоящих из изотерм (штриховые кривые), соединенных друг с другом адиабатическими путями, причем степень приближения тем выше, чем большее число циклов Карно используется. Поскольку соотношение (21.4) справедливо для каждого из этих циклов, мы можем написать для суммы этих циклов следующее уравнение:

$$\sum \frac{Q}{T} = 0 \qquad \text{[последовательность циклов Карно]}. \tag{21.5}$$

Однако заметим, что количество теплоты $Q_L$, отдаваемое в каждом цикле, примерно равно (с обратным знаком) количеству теплоты $Q_H$, получаемому в нижеследующем цикле; точное равенство достигается в пределе бесконечно большого числа бесконечно тонких циклов Карно. Таким образом, в этом пределе все потоки теплоты в систему и из нее по внутренним частям циклов Карно в точности компенсируются, так что результирующее количество переданной системе теплоты и совершенная работа являются одними и теми же для всей последовательности

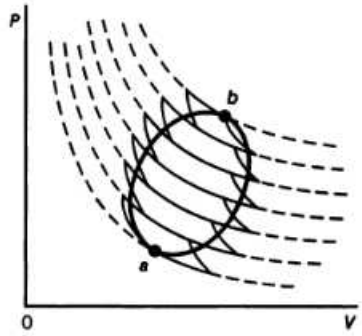



Рис. 21.11. Любой обратимый цикл может быть представлен приближенно последовательностью циклов Карно. (Штриховые кривые являются изотермами.)

циклов Карно, как и для исходного цикла. Это означает, что в пределе бесконечного числа циклов Карно соотношение (21.5) будет применимо к любому обратимому циклу; при этом соотношение (21.5) принимает вид

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \qquad \text{[обратимый цикл]}, \tag{21.6}$$

где $dQ$ обозначает бесконечно малое количество полученной или отданной теплоты[1]. Символ $\oint$ означает, что интеграл берется по замкнутому пути; вычисление интеграла можно начать в любой точке этого пути (например, в точках $a$ или $b$ на рис. 21.11) и выполнять его в любом направлении. Разделим цикл на рис. 21.11 на две части так, как показано на рис. 21.12, а затем перепишем выражение (21.6) в виде

$$\underset{\text{I}}{\int_a^b \frac{dQ}{T}} + \underset{\text{II}}{\int_b^a \frac{dQ}{T}} = 0.$$

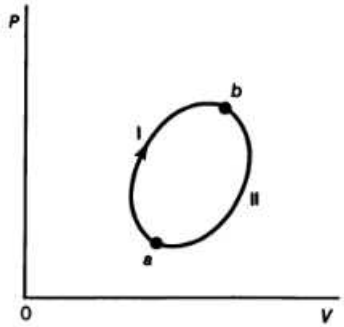



Рис. 21.12. Интеграл по замкнутому пути от энтропии $\oint dS$ для обратимого цикла равен нулю. Следовательно, разность энтропий в состояниях $a$ и $b$, т. е. $S_b - S_a = \int_a^b dS$, одна и та же для путей I и II.

Первое слагаемое здесь представляет собой интеграл вдоль пути I на рис. 21.12 от точки $a$ до точки $b$, а второе слагаемое – интеграл от точки $b$ до точки $a$ вдоль пути II. (Очевидно, что пути I и II составляют полный цикл.) Если один из путей (например, путь II) проходить в обратном направлении, то благодаря обратимости цикла величина $dQ$ в каждой точке заменится на $-dQ$. Поэтому можно записать следующее равенство:

$$\underset{\text{I}}{\int_a^b \frac{dQ}{T}} = \underset{\text{II}}{\int_a^b \frac{dQ}{T}} \qquad \text{[обратимые пути]}. \tag{21.7}$$

Поскольку рассматриваемый нами цикл является произ-

[1] Нередко величину $dQ$ записывают как $\delta Q$; см. подстрочное примечание по этому поводу в конце разд. 20.2.

вольным, из соотношения (21.7) следует, что интеграл от $dQ/T$ между любыми двумя равновесными состояниями $a$ и $b$ не зависит от пути, по которому проходит процесс. Это позволяет нам ввести новую физическую величину, называемую **энтропией** $S$, определив ее следующим соотношением:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{21.8}$$

При этом из выражения (21.6) мы имеем

$$\oint dS = 0 \qquad \text{[обратимый цикл]}, \tag{21.9}$$

а из (21.7) находим, что величина

$$\Delta S = S_b - S_a = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{dQ}{T} \qquad \text{[обратимые процессы]} \tag{21.10}$$

*не зависит от пути между двумя точками* на $PV$-диаграмме. Мы пришли к важному результату, который означает, что разность энтропий $S_b - S_a$ между двумя равновесными состояниями системы не зависит от того, каким путем (или способом) мы переходим из одного состояния в другое. Таким образом, *энтропия является параметром состояния* – ее значение зависит только от состояния системы и не зависит от процесса, посредством которого система пришла в это состояние, или от предыстории системы[1]. Этим энтропия явно отличается от величин $Q$ и $W$, которые *не* являются параметрами состояния; их значения зависят от процесса, в котором участвует система.

## 21.7. Энтропия и второе начало термодинамики

Введенную нами новую величину, а именно энтропию $S$, можно использовать для описания состояния системы наряду с такими величинами, как $P$, $T$, $V$, $U$ и $n$. Но какое отношение имеет эта довольно абстрактная величина ко второму началу термодинамики? Для ответа на этот вопрос рассмотрим некоторые примеры, в которых вычисляется изменение энтропии в конкретных процессах. Однако следует сначала заметить, что соотношение (21.10) можно применить лишь к обратимым процессам[2].

[1] Выражение (21.10) ничего не говорит об абсолютном значении энтропии $S$, а определяет лишь изменение величины $S$. Это напоминает потенциальную энергию; см. разд. 6.5. Однако в одной из формулировок *третьего начала термодинамики* (см. разд. 21.11) утверждается, что $S \to 0$ при $T \to 0$.

[2] Интеграл в правой части выражения (21.10) иногда можно вычислить (возможно, численными методами), однако он не дает изменения энтропии, если процесс необратимый, поскольку само соотношение (21.10) неприменимо к необратимым процессам.

Но как же тогда вычислить величину $\Delta S = S_b - S_a$ для реального необратимого процесса? В этом случае можно поступить следующим образом: выберем некоторый другой *обратимый* процесс, происходящий между теми же двумя состояниями системы, и вычислим $\Delta S$ для этого обратимого процесса. Эта величина будет равна $\Delta S$ и для необратимого процесса, поскольку $\Delta S$ зависит только от начального и конечного состояний системы.

**Пример 21.2.** Кусок льда массой 1,00 кг при температуре 0 °C очень медленно тает, превращаясь в воду при той же температуре. Пусть лед находится в контакте с термостатом, температура которого лишь на бесконечно малую величину превышает 0 °C. Определим изменение энтропии а) куска льда и б) термостата.

**Решение.** а) Процесс проводится при постоянной температуре $T = 273$ К и является обратимым, так что мы можем использовать выражение (21.10):

$$\Delta S_{\text{лед}} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T}.$$

Поскольку теплота, необходимая для таяния льда, равна $Q = ml$, где $l$ – теплота плавления ($l = 79{,}7$ ккл/кг $= 3{,}33 \times 10^5$ Дж/кг), мы имеем

$$\Delta S_{\text{лед}} = \frac{(1{,}00 \text{ кг})(79{,}7 \text{ ккал/кг})}{273 \text{ К}} = 0{,}292 \text{ ккал/К},$$

или 1220 Дж/К.

б) Теплота $Q = ml$ *отбирается* от термостата, так что (поскольку температура $T$ равна 273 К и не меняется) мы имеем

$$\Delta S_{\text{термост}} = -\frac{Q}{T} = -0{,}292 \text{ ккал/К} = -1220 \text{ Дж/К}.$$

Заметим, что *полное* изменение энтропии $\Delta S_{\text{лед}} + \Delta S_{\text{термост}}$ равно нулю.

**Пример 21.3.** Рассмотрим *адиабатическое свободное расширение* $n$ молей идеального газа от объема $V_1$ до объема $V_2$ ($V_2 > V_1$) (см. разд. 20.3 и рис. 20.5). Вычислим изменение энтропии а) расширяющегося газа и б) окружающей среды.

**Решение.** В разд. 20.3 (гл. 20) было показано, что газ, первоначально находившийся в закрытом сосуде объемом $V_1$, после открытия клапана адиабатически расширяется в другой сосуд, который был до этого пустым; общий объем обоих сосудов равен $V_2$. Вся установка теплоизолирована от окружающей среды, так что никакая теплота системе не передается, т. е. $Q = 0$. Газ не совершает при этом никакой работы, т. е. $W = 0$, так что внутренняя энергия газа не изменяется ($\Delta U = 0$) и температуры начального и конечного состояний совпадают: $T_2 = T_1 = T$.

а) Процесс происходит очень быстро и, следовательно, является необратимым. Таким образом, мы не можем применить формулу (21.10) к этому процессу. Вместо этого следует придумать соответствующий обратимый процесс, который переведет объем газа $V_1$ к объему $V_2$ при неизменной температуре, а затем с помощью формулы (21.10) вычислить $\Delta S$. Очевидно, для этой цели вполне подойдет обратимый изотермический процесс, в котором, в частности, внутренняя энергия не изменяется. Тогда из первого начала термодинамики имеем

$$dQ = dW = P\,dV.$$

При этом

$$\Delta S_{\text{газ}} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_{V_1}^{V_2} P\,dV.$$

Используя уравнение состояния идеального газа $P = nRT/V$, последнее выражение можно переписать окончательно в виде

$$\Delta S_{\text{газ}} = \frac{nRT}{T}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Поскольку $V_2 > V_1$, то $\Delta S_{\text{газ}} > 0$.

б) Поскольку окружающей среде теплота не передается, состояние окружающей среды в этом процессе не изменяется. Следовательно, $\Delta S_{\text{окр}} = 0$. Заметим, что полное изменение энтропии $\Delta S_{\text{газ}} + \Delta S_{\text{окр}}$ больше нуля.

**Пример 21.4.** *Теплопроводность.* Нагретый докрасна кусок железа массой 2,0 кг при температуре $T_1 = 880$ К бросают в большое озеро, температура в котором $T_2 = 280$ К. Предположим, что озеро очень велико, т. е. его температура повышается совсем незначительно. Определим изменение энтропии а) куска железа и б) окружающей среды (озера).

**Решение.** а) Процесс отдачи теплоты куском железа является необратимым, однако в точности то же самое изменение энтропии может быть и для обратимого процесса. Используем понятие удельной теплоемкости [см. формулу (19.1)]. Считая удельную теплоемкость железа постоянной и равной $c = 0{,}11$ ккал/кг · К, имеем $dQ = mc\,dT$. Таким образом,

$$\Delta S_{\text{железо}} = \int \frac{dQ}{T} = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} =$$

$$= mc \ln \frac{T_2}{T_1} = -mc \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Подставляя численные значения, находим

$$\Delta S_{\text{железо}} =$$

$$= -(2{,}0 \text{ кг})(0{,}11 \text{ ккал/кг} \cdot \text{К}) \ln \frac{880 \text{ К}}{280 \text{ К}} =$$

$$= -0{,}25 \text{ ккал/К},$$

или $\Delta S = -1100$ Дж/К.

б) Начальная и конечная температуры озера одинаковы и равны $T = 280$ К. Озеро получает от куска железа количество теплоты $Q = mc(T_2 - T_1) =$ $= (2{,}0 \text{ кг})(0{,}11 \text{ ккал/кг} \cdot \text{К})(880 \text{ К} -$ $- 280 \text{ К}) = 130$ ккал. Строго говоря, рассматриваемый нами процесс является необратимым (озеро нагревается до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие), но эквивалентен обратимой изотермической передаче теплоты $Q = 130$ ккал при $T = 280$ К. Следовательно,

$$\Delta S_{\text{окр}} = \frac{130 \text{ ккал}}{280 \text{ К}} = 0{,}46 \text{ ккал/К},$$

или 1900 Дж/К. Таким образом, несмотря на то что энтропия куска железа в действительности уменьшается, полное изменение энтропии системы кусок железа – окружающая среда является положительным: 0,46 ккал/К – 0,25 ккал/К = $= +0{,}21$ ккал/К.

Теперь нетрудно показать в общем случае, что для изолированной системы, состоящей из двух тел, поток теплоты от тела с более высокой температурой ($T_{\text{Н}}$) к телу с более низкой температурой ($T_{\text{L}}$) всегда приводит к увеличению полной энтропии. Оба тела в конечном счете придут к некоторой общей промежуточной температуре $T_{\text{М}}$. Количество теплоты, отданное более горячим телом ($Q_{\text{Н}} = -Q$, где $Q$ – положительная величина), в точности равно количеству теплоты, полученному более холодным телом ($Q_{\text{L}} = Q$), так что полное изменение энтропии запишется в виде

$$\Delta S = \Delta S_{\text{Н}} + \Delta S_{\text{L}} = -\frac{Q}{T_{\text{НМ}}} + \frac{Q}{T_{\text{LМ}}},$$

где $T_{\text{НМ}}$ – некоторая промежуточная температура между $T_{\text{Н}}$ и $T_{\text{М}}$ горячего тела, когда оно охлаждается от температуры $T_{\text{Н}}$ до $T_{\text{М}}$, а $T_{\text{LМ}}$ – то же самое для холодного тела; поскольку в течение всего процесса температура горячего тела выше температуры холодного, мы имеем

$T_{\text{нм}} > T_{\text{лм}}$. Следовательно,

$$\Delta S = Q\left(\frac{1}{T_{\text{лм}}} - \frac{1}{T_{\text{нм}}}\right) > 0.$$

Таким образом, энтропия одного тела уменьшается, а другого увеличивается, но *полное* изменение энтропии является положительным.

**Пример 21.5.** Кинетическая энергия падающего камня непосредственно перед его соударением с поверхностью земли и остановкой равна $E_{\text{к}}$. На сколько изменится энтропия камня и окружающей среды в результате этого соударения?

**Решение.** Кинетическая энергия $E_{\text{к}}$ преобразуется во внутреннюю энергию камня и поверхности земли. При этом их температура $T$ (предполагаемая одинаковой) существенно не изменится. Процесс в целом сопровождается необратимым переходом количества теплоты $Q = E_{\text{к}}$ к камню и окружающей среде (поверхности земли) при постоянной температуре $T$. Следовательно, $\Delta S = E_{\text{к}}/T$, так что снова $\Delta S > 0$.

В каждом из рассмотренных выше примеров энтропия системы вместе с ее окружением или оставалась неизменной, или увеличивалась. Для любого *обратимого* процесса (например, рассмотренного в примере 21.2) полное изменение энтропии равно нулю. В этом можно убедиться следующим образом: любой обратимый процесс можно рассматривать как последовательность квазистатических изотермических процессов передачи теплоты $\Delta Q$ от системы к ее окружению и обратно; эти процессы отличаются друг от друга по температуре лишь на бесконечно малую величину; следовательно, энтропия любой системы (или окружения) изменяется на $\Delta Q/T$, а энтропия окружения (или системы) изменяется на $-\Delta Q/T$, так что полное изменение энтропии равно

$$\Delta S = \Delta S_{\text{сист}} + \Delta S_{\text{окр}} = 0 \qquad \text{[любой обратимый процесс]}.$$

В примерах 21.3–21.5 было установлено, что полная энтропия системы и окружения увеличивается. Действительно, было найдено, что энтропия для всех реальных (необратимых) процессов увеличивается. Каких-либо исключений из этого пока не обнаружено. Таким образом, мы пришли *к общей формулировке второго начала термодинамики*:

**Полная энтропия произвольной системы вместе с ее окружением в любом естественном процессе увеличивается:**
$\Delta S > 0$.

Если даже энтропия какой-либо части Вселенной в каком-либо процессе может уменьшиться (см. примеры, приведенные выше), то энтропия некоторой другой части Вселенной при этом обязательно увеличится на еще большую величину, так что полная энтропия всегда увеличивается.

Теперь, когда мы пришли к количественной, наиболее общей формулировке второго начала термодинамики,

можно видеть, что это не совсем обычный закон. Он существенно отличается от других законов физики, которые записываются, как правило, в виде равенств (например, второй закон Ньютона: $F = ma$) или имеют вид законов сохранения (например, для энергии и импульса). Второе начало термодинамики вводит в физику новую величину – энтропию $S$, но ничего нам не говорит о ее сохранении. Действительно, энтропия не сохраняется; она всегда увеличивается с течением времени.

Второе начало термодинамики четко подразделяет все процессы на наблюдаемые в природе и ненаблюдаемые. Иными словами, этот закон определяет *направление* происходящих в природе процессов. Так, для процессов, обратимых к любому из рассмотренных в последних трех примерах, энтропия должна была бы уменьшаться; однако такие процессы мы никогда не наблюдаем. Так, мы никогда не наблюдаем процесса, обратного рассмотренному в примере 21.4 и состоящего в самопроизвольном переходе теплоты от холодного тела к горячему. Мы также никогда не наблюдаем процесса, обратного рассмотренному в примере 21.3 и состоящего в самопроизвольном сжатии газа в меньший объем (газ всегда стремится расшириться и заполнить целиком объем сосуда, в котором он содержится). Никогда не наблюдается и самопроизвольного перехода внутренней энергии камня в его кинетическую энергию, в результате чего камень мог бы вдруг подняться с поверхности, на которой он покоится. Любой из перечисленных процессов не противоречил бы первому началу термодинамики, т. е. закону сохранения энергии; однако эти процессы не удовлетворяют второму началу термодинамики, и именно в этом состоит необходимость его введения. Если бы вам пришлось посмотреть кинофильм, снятый по описанным выше процессам, но пленка была запущена в обратном направлении (от конца к началу), то вы, очевидно, сразу догадались бы об этом, увидев странные явления: камни самопроизвольно подпрыгивали бы с поверхности, атмосферный воздух стремился бы наполнить пустой сосуд (процесс, обратный свободному расширению). Таким образом, мы могли бы сказать, течет ли время в нормальном направлении, или перед нами моделируется его обратный ход. Именно поэтому с энтропией иногда связывают так называемую стрелу времени, указывающую направление хода времени.

Согласуется ли общая формулировка второго начала термодинамики – принцип увеличения энтропии – с уже известными нам формулировками Клаузиуса и Кельвина – Планка? Нетрудно убедиться в таком согласовании, например, для формулировки Клаузиуса, поскольку (см. рассуждения сразу после примера 21.4) если бы произошел процесс, в ходе которого теплота самопроизвольно перешла бы от низкотемпературного ($T_L$) тер-

мостата к высокотемпературному ($T_н$) термостату (так что энтропия первого уменьшилась бы, а второго увеличилась), то второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса оказалось бы нарушенным. Однако полное изменение энтропии $\Delta S = Q/T_н - Q/T_L$ оказалось бы отрицательным, поскольку $T_L < T_н$. Таким образом, принцип увеличения энтропии обеспечивает выполнение второго начала термодинамики в формулировке Клаузиуса. Можете ли вы показать эквивалентность принципа энтропии и формулировки Кельвина – Планка?

## 21.8. От порядка к беспорядку

Понятие энтропии в рассмотренных нами до сих пор примерах может показаться несколько абстрактным. Однако мы можем связать его с более привычными понятиями, такими, как *порядок* и *беспорядок*. Действительно, энтропию системы можно рассматривать как *количественную меру беспорядка в системе*. При этом второе начало термодинамики можно сформулировать очень просто:

> **Естественные процессы стремятся перевести систему в состояние с бóльшим беспорядком.**

Чтобы сделать эту формулировку более ясной, рассмотрим несколько примеров; некоторые из них покажут, как приведенная весьма общая формулировка второго начала фактически выходит за рамки того, что мы обычно называем термодинамикой.

Рассмотрим прежде всего простые процессы, о которых упоминалось в начале этой главы – в разд. 21.1. Если в кружку насыпаны отдельно слои соли и перца, то в такой системе, естественно, больше порядка, чем если бы соль и перец были перемешаны между собой. Если встряхнуть кружку с раздельными слоями, то получится смесь, и, сколько бы мы ни трясли кружку после этого, мы никогда не вернемся к исходному состоянию в виде отдельных слоев соли и перца. Естественный процесс идет в направлении от состояния с относительным порядком (слоистого) к состоянию с относительным беспорядком (смеси), но никогда не идет в обратном направлении. Иными словами, беспорядок всегда самопроизвольно нарастает. Аналогично кофейная чашка представляет собой более «упорядоченный» объект, нежели ее осколки в разбитом состоянии. Чашки при падении разбиваются, однако самопроизвольно они не склеиваются вновь. И опять мы убеждаемся, что нормальный ход событий ведет к нарастанию беспорядка.

Рассмотрим теперь некоторые процессы, для которых мы вычислили изменение энтропии, и убедимся в том, что увеличение энтропии сопровождается ростом беспорядка

(и обратно). Когда лед при таянии превращается в воду при температуре 0 °С, энтропия воды увеличивается, как было показано в примере 21.2. Интуитивно можно считать, что лед (вода в твердом состоянии) является более упорядоченной структурой, чем та же вода в жидком состоянии, которая может свободно растекаться. Этот переход от порядка к беспорядку становится более понятным с молекулярно-кинетической точки зрения: упорядоченное расположение молекул воды в кристалле льда сменилось неупорядоченным и в известной мере случайным движением молекул в жидком состоянии.

Если горячее тело (высокая температура) приводится в контакт с холодным (низкая температура), то теплота переходит от первого из них ко второму до тех пор, пока оба тела не придут в состояние с некоторой промежуточной температурой. Полная энтропия в этом процессе увеличится (см. рассуждения после примера 21.4), так что это тоже пример процесса, в котором порядок сменяется беспорядком. В начале этого процесса можно различить два класса молекул, а именно молекулы с высокой средней кинетической энергией и молекулы с низкой средней кинетической энергией. В конце процесса все молекулы оказываются принадлежащими одному классу молекул с одной и той же средней кинетической энергией; таким образом, более упорядоченное состояние с разделением молекул на два класса перестает существовать. Это вновь означает, что порядок сменился беспорядком, т. е. энтропия увеличилась.

Рассмотренные примеры иллюстрируют общее представление о том, что увеличение энтропии соответствует увеличению беспорядка. (В разд. 21.10 мы рассмотрим эту связь с количественной точки зрения.) Вообще говоря, мы связываем беспорядок с однородностью и случайностью; соль и перец в слоях являются более упорядоченными, чем их случайная смесь[1]; аккуратная стопка пронумерованных листов более упорядочена, чем те же листы, разбросанные в беспорядке по полу.

Рассмотрим теперь падающий камень. Скорость каждой молекулы камня можно записать в виде суммы двух слагаемых: $v_i = v_{\text{цм}} + v_i^*$, где $v_i^*$ – скорость случайного

---

[1] Таким образом, более упорядоченное расположение это то, для определения или классификации которого требуется больше *информации*. При наличии двух тел – горячего и холодного – имеется два класса молекул (и соответственно два информационных «сообщения»); когда же эти тела приходят к одинаковой температуре, остается лишь один такой класс (и соответственно одно «сообщение»). Когда соль и перец перемешаны друг с другом, имеется лишь один (однородный) класс, когда же они разделены на слои, таких классов два. В этом смысле можно сказать, что информация связана с порядком, или низкой энтропией. На этой основе строится область современной науки, называемая *теорией информации*.

движения молекулы относительно центра масс (ЦМ) камня, а $v_{\text{ЦМ}}$ – скорость движения молекулы вместе с камнем как целым (иначе говоря, $v_{\text{ЦМ}}$ – это скорость центра масс камня). Полную кинетическую энергию камня в любой момент времени можно записать в виде суммы двух слагаемых (гл. 9), а именно кинетической энергии ЦМ камня и кинетической энергии всех молекул относительно ЦМ:

$$\text{КЭ}_{\text{ЦМ}} + \sum \text{КЭ}_i^* .$$

Первое слагаемое ($\text{КЭ}_{\text{ЦМ}}$) – это *механическая* кинетическая энергия камня как целого; эту энергию можно рассматривать как *упорядоченную*, поскольку ее полностью можно использовать для совершения работы (например, для перемещения других тел, включения генератора и т. д.). Второе слагаемое ($\sum \text{КЭ}_i^*$) представляет собой сумму кинетических энергий всех молекул, находящихся внутри камня, – это та энергия, которой обладали бы молекулы, даже если бы камень как целое покоился. Величина $\sum \text{КЭ}_i^*$ представляет собой долю энергии, учитывающую случайное, неупорядоченное движение молекул и потому называемую *внутренней энергией* камня; лишь часть этой энергии может быть преобразована в работу и опять-таки при условии, что имеются тепловой двигатель и термостат с низкой температурой. Таким образом, обычная *механическая энергия является упорядоченной формой энергии*, в то время как *внутренняя энергия – разупорядоченной*. Когда камень ударяется о землю, часть механической энергии переходит во внутреннюю, порядок переходит в беспорядок и энтропия увеличивается, как и во всех остальных естественных (самопроизвольных) процессах.

Интересный пример увеличения энтропии связан с биологической эволюцией и ростом организмов. Очевидно, разумное существо представляет собой в высшей степени упорядоченный организм. Процесс эволюции от простейших макромолекул и примитивных форм жизни до вида Homo Sapiens представляет собой процесс возрастания степени порядка и организации. Аналогично развитие индивидуального организма от одной клетки до взрослой особи также является процессом возрастания упорядоченности. Нарушают ли эти процессы второе начало термодинамики? Нет, не нарушают. В процессах эволюции и роста, а также в течение жизни зрелой особи происходит выведение из организмов продуктов жизнедеятельности (отходов организмов). Те небольшие молекулы, которые остаются в результате метаболизма (обмена веществ), являются простыми молекулами, не обладающими высокой степенью порядка. Иными словами, они соответствуют относительно высокому бес-

порядку и, следовательно, большой энтропии. Действительно, полная энтропия молекул, выделяемых организмами в процессах эволюции и роста, больше, чем уменьшение энтропии, связанное с возникновением упорядоченности растущих индивидуальных особей или эволюцией их видов.

## 21.9. Недоступность энергии

Вернемся вновь к рассмотрению естественных процессов теплопроводности от горячего тела к холодному. Мы видели, что при этом энтропия увеличивается, а порядок сменяется беспорядком. Представление о том, что степень беспорядка возросла в результате такого процесса, еще более укрепляется следующим соображением: горячее и холодное тела по отдельности могли бы быть использованы в качестве высокотемпературного и низкотемпературного термостатов (нагревателя и холодильника) для теплового двигателя, так что с их помощью можно было бы получить полезную работу. Однако после того, как эти два тела приведены в контакт и достигают некоторой равновесной температуры, с их помощью уже невозможно получить никакой энергии. Таким образом, порядок в этом процессе сменился беспорядком также и с точки зрения возможности получения полезной работы.

Тот же вывод можно сделать и в отношении падающего камня, который останавливается после соударения с поверхностью земли. Непосредственно перед соударением вся кинетическая энергия камня могла бы быть использована для совершения полезной работы. Однако после того, как механическая кинетическая энергия камня преобразовалась во внутреннюю, это становится невозможным.

Оба этих примера иллюстрируют еще один важный аспект второго начала термодинамики, состоящий в том, что в *любом естественном (необратимом) процессе некоторое количество энергии становится недоступным для получения с его помощью полезной работы*[1]. Ни в одном процессе энергия никогда не теряется и не исчезает (она всегда сохраняется). Однако при этом она становится менее полезной, так как с ее помощью удается получить меньше полезной работы. С течением времени энергия в определенном смысле *деградирует*; в конечном счете она переходит из более упорядоченных форм (например, механической) в менее упорядоченные (например, в тепловую, или внутреннюю).

---

[1] Можно показать, что количество энергии, теряемое на получение полезной работы, дается выражением $T_L \Delta S$, где $T_L$ – наинизшая температура участвующих в процессе тел, а $\Delta S$ – полное приращение энтропии в процессе.

Из этих рассуждений естественным образом следует вывод о том, что с течением времени Вселенная должна приближаться к состоянию максимального беспорядка. Вещество Вселенной станет однородной (а следовательно, беспорядочной) смесью, теплота будет переходить из областей с высокой температурой в области с низкой температурой до тех пор, пока температура во всех областях Вселенной не окажется одинаковой. При этом никакой работы уже нельзя будет совершить. Вся энергия, имеющаяся во Вселенной, в этом случае полностью деградирует и перейдет в форму тепловой энергии, так что во Вселенной прекратятся любые изменения. Эта гипотеза, называемая гипотезой *тепловой смерти* Вселенной, широко обсуждалась философами. На первый взгляд представляется, что описанное конечное состояние Вселенной является неизбежным следствием второго начала термодинамики, хотя его осуществление возможно лишь в очень отдаленном будущем. Однако все-таки этот вывод основывается на предположении о конечности Вселенной, в котором космологи полностью не убеждены. Кроме того, отнюдь не очевидно, что второе начало термодинамики применимо (в известной нам форме) в столь больших масштабах, как Вселенная в целом. Ответов на эти вопросы пока еще не существует.

## *21.10. Статистическая интерпретация энтропии и второе начало термодинамики

Понятия энтропии и беспорядка становятся более ясными, если применить статистическое или вероятностное рассмотрение молекулярного состояния системы. Такой статистический подход, который впервые был применен в конце прошлого века Людвигом Больцманом (1844–1906), проводит четкое различие между макро- и микросостояниями системы. *Микросостояние* системы считается определенным, если заданы положения и скорости каждой частицы (или молекулы). *Макросостояние* определено, если заданы макроскопические свойства системы, а именно температура, давление, число молей и т. п. В действительности мы можем определить только макросостояние системы. Система обычно состоит из очень большого числа молекул, так что вряд ли можно установить положения и скорости каждой из них в любой момент времени. Тем не менее важно осмыслить тот факт, что огромное число различных микросостояний может соответствовать *одному и тому* же макросостоянию.

Рассмотрим простой пример. Пусть вы несколько раз встряхиваете в руке четыре монеты и затем бросаете их на стол. Число «орлов» и «решек», которые выпадут при данном бросании, определяет макросостояние этой системы. Указание для каждой монеты результата бросания

(«орел» или «решка») определяет микросостояние этой системы. В нижеследующей таблице указано число микросостояний, соответствующих данному макросостоянию:

| Макросостояние | Возможные микросостояния (О – «орел», Р – «решка») | Число микросостояний |
|---|---|---|
| 4 «орла» | О О О О | 1 |
| 3 «орла», 1 «решка» | О О О Р, О О Р О, О Р О О, Р О О О | 4 |
| 2 «орла», 2 «решки» | О О Р Р, О Р О Р, Р О О Р, О Р Р О, Р О Р О, Р Р О О | 6 |
| 1 «орел», 3 «решки» | Р Р Р О, Р Р О Р, Р О Р Р, О Р Р Р | 4 |
| 4 «решки» | Р Р Р Р | 1 |

Основной принцип, лежащий в основе статистического подхода, состоит в том, что *каждое микросостояние равновероятно*. Таким образом, число микросостояний, которые приводят к данному макросостоянию, соответствует относительной вероятности реализации этого макросостояния. В нашем опыте с бросанием четырех монет макросостояние с выпадением двух «орлов» и двух «решек» является наиболее вероятным. Всего в опыте имеется 16 возможных микросостояний, из них 6 приходятся на долю состояний с двумя «орлами» и двумя «решками», так что вероятность такого результата опыта составляет 6/16, или около 38%. Вероятность выпадения одного «орла» и трех «решек» составляет соответственно 4/16, или 25%; наконец, вероятность выпадания четырех «орлов» равна всего лишь 1/16, или около 6%. Разумеется, если вы бросите монеты 16 раз, то вы можете и не обнаружить в точности 6 случаев, когда одновременно выпадают два «орла» и две «решки», или всего один случай, когда выпадают одновременно четыре «орла». Эти числа характеризуют всего лишь вероятности или средние значения. Но если бы вы произвели 1600 бросаний, то примерно в 38% из них выпали бы два «орла» и две «решки». Чем больше число опытов (бросаний), тем ближе их результаты к вычисленным значениям вероятности.

Если бы в бросании участвовало больше монет (например, 100), то относительная вероятность выпадания только «орлов» (или только «решек») резко уменьшилась бы. Так, имеется всего лишь одно микросостояние, соответствующее выпадению только «орлов» на всех монетах. Результат опыта, в котором выпадет 99 «орлов» и лишь один раз «решка», может осуществиться с помощью 100 микросостояний (любая из монет может выпасть «решкой»). В табл. 21.1 приведены относительные вероятности других макросостояний (точнее, числа микросостояний,

*Таблица 21.1.* Вероятности различных макросостояний

| Макросостояние «орлы» | Макросостояние «решки» | Число микросостояний $W$ |
|---|---|---|
| 100 | 0 | 1 |
| 99 | 1 | $1{,}0 \cdot 10^{2}$ |
| 90 | 10 | $1{,}7 \cdot 10^{13}$ |
| 80 | 20 | $5{,}4 \cdot 10^{20}$ |
| 60 | 40 | $1{,}4 \cdot 10^{28}$ |
| 55 | 45 | $6{,}1 \cdot 10^{28}$ |
| 50 | 50 | $1{,}0 \cdot 10^{29}$ |
| 45 | 55 | $6{,}1 \cdot 10^{28}$ |
| 40 | 60 | $1{,}4 \cdot 10^{28}$ |
| 20 | 80 | $5{,}4 \cdot 10^{20}$ |
| 10 | 90 | $1{,}7 \cdot 10^{13}$ |
| 1 | 99 | $1{,}0 \cdot 10^{2}$ |
| 0 | 100 | 1 |

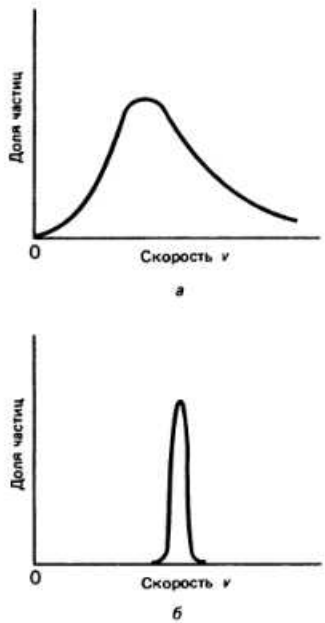



Рис. 21.13. *а* – наиболее вероятное распределение скоростей молекул газа (случайное распределение, или максвелловское); *б* – упорядоченное, но очень маловероятное распределение скоростей, когда все молекулы имеют почти одинаковые скорости.

посредством которых эти макросостояния могут быть реализованы). Всего имеется около $10^{30}$ возможных микросостояний[1]. Таким образом, относительная вероятность выпадения только «орлов» составляет $1/10^{30}$ – невероятно малую величину, т. е. такой результат следует считать практически невероятным! Вероятность выпадения 50 «орлов» и 50 «решек» (согласно табл. 21.1) составляет $1{,}0 \cdot 10^{29}/10^{30} = 0{,}10$, или 10%. Вероятность того, что выпадет от 45 до 55 монет «орлами», равна 90%.

Таким образом, мы видим, что по мере увеличения числа монет вероятность получения упорядоченного состояния (все «орлы» или все «решки») становится чрезвычайно малой. Наиболее вероятным является наименее упорядоченное состояние, в котором имеется поровну «орлов» и «решек», и вероятность попадания в определенный небольшой (например, около 5%) интервал резко увеличивается с ростом числа монет. Все приведенные выше рассуждения могут быть применены и к составляющим систему молекулам. Например, наиболее вероятным состоянием газа (скажем, воздуха в комнате) будет состояние, в котором молекулы занимают весь объем и движутся случайным образом; такое состояние описывается распределением Максвелла (см. рис. 21.13, *а*, а также гл. 18). Однако весьма упорядоченное расположение молекул воздуха, собравшихся в одном углу комнаты и движущихся с одинаковыми скоростями (рис. 21.13, *б*), крайне маловероятно и в действительности никогда не наблюдается.

Из этих примеров становится ясно, что вероятность непосредственно связана с беспорядком и, следовательно, с энтропией. Иными словами, наиболее вероятному состоянию соответствует наибольшая энтропия, а значит, максимальный беспорядок и случайный характер. Больцман показал, что в соответствии с определением Клаузиуса ($dS = dQ/T$) энтропия системы в данном (макро) состоянии может быть записана в виде

$$S = k \ln W, \tag{21.11}$$

где $k$ – постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К), а $W$ – число микросостояний, соответствующих данному макросостоянию. Иными словами, величина $W$ пропорциональна вероятности осуществления этого состояния ($W$ называют *термодинамической вероятностью* или *вероятностью беспорядка*).

Второе начало термодинамики, согласно которому

[1] У каждой монеты при любом бросании имеются две возможности: выпадет либо «орел», либо «решка». Тогда общее возможное число микросостояний для 100 монет равно $2 \times 2 \times 2 \times \ldots = 2^{100}$. Используя десятичные логарифмы, находим, что $2 = 10^{0{,}302} = 10^{0.301}$, т. е. $2^{100} = (10^{0.301})^{100} = 10^{30{,}1} = 1{,}3 \cdot 10^{30}$.

энтропия в любом процессе увеличивается, в рамках теории вероятностей сводится к утверждению того, что происходят лишь те процессы, которые являются наиболее вероятными. Таким образом, второе начало термодинамики получает весьма простую трактовку. Однако здесь возникает еще одно обстоятельство. Второе начало на языке теории вероятностей не запрещает полностью процессов, в которых энтропия может уменьшаться. Наоборот, оно утверждает, что такие процессы чрезвычайно маловероятны. Нет ничего невозможного в том, что смесь соли и перца самопроизвольно разделится на слои или что разбитая чашка вновь соберется в единое целое. В принципе возможно даже, что озеро замерзнет в жаркий летний день, т. е. теплота перейдет от холодного озера к его теплому окружению. Однако вероятность реального осуществления всех этих процессов чрезвычайно мала. В рассмотренном выше примере с монетами мы видели, что увеличение числа монет от 4 до 100 приводило к резкому уменьшению вероятности значительных отклонений от среднего (или от наиболее вероятного состояния). В обычно встречающихся системах мы имеем дело с невероятно большими числами молекул: только в одном моле любого вещества содержится $6 \cdot 10^{23}$ молекул. Поэтому вероятность большого отклонения от среднего ничтожна. Например, подсчитано, что вероятность того, что покоящийся на поверхности земли камень преобразует 1 кал своей тепловой энергии в механическую и взлетит в воздух, значительно меньше, чем вероятность того, что группа обезьян, случайным образом нажимающая на клавиши пишущей машинки, напечатает полное собрание сочинений Шекспира.

## *21.11. Термодинамическая шкала температур; абсолютный нуль температур

В разд. 21.4 и 21.5 мы обсуждали двигатель Карно и другие (идеальные) обратимые двигатели. Мы убедились в том, что КПД любого обратимого двигателя, действующего между двумя термостатами, зависит только от температур этих термостатов; КПД не зависит от того, что используется в качестве рабочего тела – им может быть гелий, вода или что-либо еще; КПД же останется неизменным. КПД дается выражением

$$e = 1 - |Q_L|/|Q_H|,$$

где $|Q_H|$ – количество теплоты, полученное от высокотемпературного термостата, $|Q_L|$ – количество теплоты, отданное низкотемпературному термостату. Поскольку отношение $|Q_L/Q_H|$ одинаково для всех обратимых двигателей, действующих между двумя данными термостатами, Кельвин предложил использовать этот факт для

того, чтобы определить абсолютную шкалу температур. Именно отношение температур двух термостатов $T_H$ и $T_L$ определяется в этой шкале как отношение количества теплоты $|Q_H|$ к количеству теплоты $|Q_L|$, которыми обменивается с этими термостатами двигатель Карно (или другой обратимый двигатель):

$$\frac{T_H}{T_L} = \frac{|Q_H|}{|Q_L|}. \tag{21.12}$$

На этом основана шкала температур *Кельвина*, или *термодинамическая шкала температур*.

В разд. 21.5 мы показали, что аналогичное соотношение ($T_H/T_L = |Q_H|/|Q_L|$) выполняется и для двигателя Карно [выражение (21.2)], если температуры измеряются в температурной шкале идеального газа (разд. 17.11), которую мы до сих пор применяли. Действительно, для того чтобы завершить построение термодинамической шкалы температур, припишем значение $T_{тр.т} = 273{,}16$ К тройной точке воды. Таким образом, мы имеем следующее соотношение:

$$T = (273{,}16\ \text{К})(|Q|/|Q_{тр.т}|), \tag{21.13}$$

где $|Q|$ и $|Q_{тр.т}|$ – количества теплоты, которыми обменивается двигатель Карно с термостатами при температурах соответственно $T$ и $T_{тр.т}$. Это определение в точности совпадает с определением шкалы идеального газа. Таким образом, термодинамическая шкала температур тождественна газовой в области применимости последней (поскольку ниже температуры 1 К ни одно вещество не пребывает в виде газа, шкала идеального газа становится непригодной). Термодинамическая шкала температур в настоящее время является эталонной, поскольку ее можно применять во всем интервале возможных температур, причем она, как и газовая, не зависит от используемого вещества (в качестве рабочего тела).

Может показаться, что термодинамическая шкала температур не вполне удобна в практической деятельности, и действительно ее главное достоинство состоит в том, что она позволяет дать фундаментальное определение температуры. Кроме того, она используется в научной работе, особенно в области очень низких температур, поскольку измерение этих температур осуществляется посредством измерения количеств теплоты $Q_H$ и $Q_L$ в цикле Карно.

Очень низкие температуры весьма трудно получить опытным путем. Действительно, экспериментально обнаружено, что, чем ближе температура к абсолютному нулю, тем труднее понизить ее еще больше. Общепринято считать, что абсолютного нуля температур невозможно достичь ни при каком конечном числе процессов. Это

утверждение содержит одну из формулировок[1] **третьего начала термодинамики**. КПД любого теплового двигателя не может быть больше значения Карно

$$e = 1 - T_L/T_H,$$

а поскольку $T_L$ никогда не может стать равным нулю, мы убеждаемся в том, что тепловой двигатель с КПД = 100% невозможен.

**Заключение**

*Тепловой двигатель* – это устройство для преобразования тепловой энергии посредством теплообмена в полезную работу. КПД, или эффективность, теплового двигателя определяется в виде отношения совершаемой двигателем работы $W$ к полученному от нагревателя количеству теплоты $|Q_H|$. Благодаря закону сохранения энергии выход полезной работы равен $|Q_H| - |Q_L|$, где $|Q_L|$ – количество теплоты, отдаваемое двигателем окружающей среде; следовательно, КПД $e = W/|Q_H| = 1 - |Q_L|/|Q_H|$. Двигатель Карно (идеальный) использует два изотермических и два адиабатических процесса в обратимом цикле. Для двигателя Карно или любого обратимого двигателя, действующего между термостатами с температурами $T_H$ и $T_L$, КПД равен $e = 1 - T_L/T_H$. КПД реальных (необратимых) двигателей всегда меньше этого значения. Все тепловые двигатели приводят к тепловому загрязнению окружающей среды, поскольку они отдают некоторое количество теплоты своему окружению. Рабочий цикл холодильников и воздушных кондиционеров является обратным по отношению к тепловому двигателю: в этих устройствах совершается работа для того, чтобы отобрать теплоту из более холодной области и передать ее области с более высокой температурой.

Можно дать несколько эквивалентных формулировок *второго начала термодинамики*: 1) теплота самопроизвольно переходит от горячего тела к холодному, но не наоборот; 2) невозможно осуществление теплового двигателя с КПД = 100%, т.е. такого, который полностью преобразовывал бы в работу сообщенное ему количество теплоты; 3) естественные процессы стремятся перевести замкнутую систему в состояние с бóльшим беспорядком, или с бóльшим значением энтропии. Эта последняя формулировка является наиболее общей, и ее можно дать в более строгом виде: полная энтропия $S$ любой системы совместно с ее окружением увеличивается в результате любого естественного процесса: $\Delta S > 0$. Энтропия, которая является параметром состояния, представляет собой количественную меру беспорядка в сис-

[1] См. также утверждение в подстрочном примечании в разд. 21.6. Мы не будем здесь подробно обсуждать эквивалентность этих двух утверждений.

теме. Изменение энтропии системы в ходе обратимого процесса дается выражением $\Delta S = \int dQ/T$. Со статистической точки зрения наиболее вероятное состояние системы – это состояние с наибольшей энтропией или степенью беспорядка. Второе начало термодинамики указывает, в каком направлении стремятся протекать процессы; поэтому энтропию часто называют стрелой времени. С течением времени энергия деградирует ко все менее полезным формам в том смысле, что из них можно извлечь все меньше полезной работы.

## Вопросы

1. Можно ли охладить комнату в жаркий летний день, оставив открытой дверцу холодильника?
2. Клапан расширения в холодильной системе на рис. 21.5 играет решающую роль для охлаждения жидкости. Объясните, каким образом происходит охлаждение.
3. Является ли полезным определение КПД теплового двигателя как $e = W/Q_L$? Объясните.
4. Может ли механическая энергия полностью преобразоваться в тепловую, или внутреннюю, энергию? Может ли произойти обратный переход? В каждом случае, если ваш ответ отрицательный, объясните почему; если ответ положительный, то приведите примеры.
5. Найдите в природе пример почти обратимого процесса и дайте его описание.
6. а) Опишите, каким образом можно было бы подвести к телу теплоту обратимым путем. б) Можно ли использовать горелку плиты, чтобы к системе подвести теплоту обратимым образом?
7. Порошковое молоко очень медленно (квазистатически) добавляется к воде в процессе помешивания. Является ли такой процесс обратимым?
8. Должна ли работа двигателя Карно непременно начинаться в точке *a* цикла на рис. 21.9? Объясните.
9. Какие устройства выполняют функции высоко- и низкотемпературных термостатов (нагревателя и холодильника) в а) двигателе внутреннего сгорания и б) в паровом двигателе? Можно ли, строго говоря, считать их термостатами?
10. Обсудите и перечислите факторы, которые не позволяют реальным двигателям достигать предельного КПД Карно.
11. Что дает большее увеличение КПД двигателя Карно – увеличение на 10 °C температуры нагревателя или понижение на 10 °C температуры холодильника?
12. Океаны содержат огромное количество тепловой энергии. Почему, вообще говоря, нельзя использовать эту энергию для получения полезной работы?
13. Две одинаковые системы переводятся из состояния *a* в состояние *b* с помощью двух различных *необратимых* процессов. Будет ли изменение энтропии одинаковым для обоих процессов? Дайте полный и тщательно продуманный ответ.
14. Можно сказать, что *полное изменение энтропии в ходе процесса является мерой необратимости этого процесса*. Обсудите, почему можно это утверждать, исходя из того, что для обратимого процесса $\Delta S = 0$.
15. Используя рассуждения, не опирающиеся на принцип увеличения энтропии, покажите, что для адиабатического процесса $\Delta S = 0$, если он совершается обратимым образом, и $\Delta S > 0$ в противном случае.
16. Газ может расширяться а) адиабатически и б) изотермически. Что происходит с энтропией в каждом из этих процессов – увеличивается она, уменьшается или сохраняет постоянное значение?
17. Энтропию часто называют стрелой времени, поскольку она указывает направление хода естественных процессов. Если прокрутить кинопленку в обратном направлении, то какие из увиденных вами процессов могли бы привести вас к выводу о том, что время течет «в обратном направлении»?
18. Приведите три примера (кроме описанных в этой главе) естественных (т. е. происходящих самопроизвольно) процессов, в которых порядок сменяется беспорядком. Обсудите возможности наблюдения обратных процессов.
19. Как по вашему, что обладает большей энтропией – 1 кг железа в твердом или в жидком состоянии? Объясните.
20. Что произойдет, если удалить пробку в сосуде, содержащем газообразный хлор? Произойдет ли когда-либо обратный процесс? Объясните.
21. Предложите несколько процессов (кроме

тех, что уже упомянуты выше), которые подчинялись бы первому началу термодинамики, но если бы они действительно произошли, то привели бы к нарушению второго начала термодинамики.

22. Объясните, почему свободное расширение газа, при котором энтропия увеличивается, можно рассматривать как процесс, в котором порядок переходит в беспорядок. (*Подсказка*: рассмотрите для конкретности пачку листов бумаги, находящихся внутри большого ящика, по отношению к разбросанным по всему полу.)

23. Если вы собрали много листов бумаги, разбросанных по всему полу, и сложили их в аккуратную стопку, то нарушили ли вы тем самым второе начало термодинамики? Объясните.

24. Первое начало термодинамики иногда несколько вольно формулируют следующим образом: «Невозможно получить что-либо из ничего», а второе начало: «Невозможно точно восстановить разрушенное». Объясните, согласуются ли эти вольные формулировки со строгими формулировками первого и второго начал термодинамики.

25. Приведите три примера естественно происходящих процессов, которые иллюстрируют деградацию используемой энергии (т.е. ее переход во внутреннюю энергию).

26. Расположите следующие наборы из пяти карт по степени увеличения вероятности их появления: а) четыре туза и король; б) шестерка червей, восьмерка бубен, дама треф, тройка червей, валет пик; в) два валета, две дамы и туз; г) любой набор, в котором нет двух равных по достоинству карт. Объясните ваши ранжирования, используя понятия микро- и макросостояний.

## Задачи

Раздел 21.3

1. (I) Тепловой двигатель производит 7250 Дж теплоты, совершая полезную работу 2250 Дж. Чему равен КПД этого двигателя?

2. (II) При сгорании бензина в двигателе автомобиля высвобождается около $3 \cdot 10^4$ ккал на 4 л бензина. Если автомобиль потребляет в среднем 4 л бензина на 33 км пробега со скоростью 90 км/ч (на что требуется мощность 20 л.с.), то чему равен КПД такого двигателя?

3. (II) Тепловая электростанция производит работу в форме электроэнергии с КПД = 40% и выходной мощностью 850 МВт (мегаватт). Для отвода отработанного тепла используются охлаждающие трубы. Какой объем воздуха (в кубических километрах) нагревается ежесуточно, если допустимое повышение температуры воздуха составляет 7,5 °С? Скажется ли это существенно на местном климате? Если бы нагретый воздух образовал слой толщиной 200 м, то какую площадь он покрыл бы за сутки (24 ч) работы станции? [Теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна 7,0 кал/моль·К.]

4. (II) На рис. 21.14 изображена *PV*-диаграмма

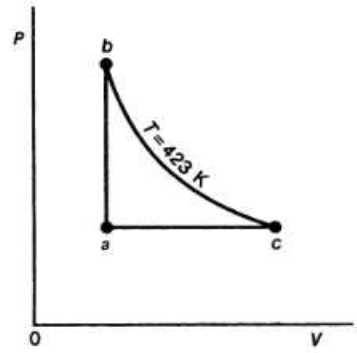



Рис. 21.14.

для обратимого теплового двигателя, в котором в качестве рабочего тела используется 1,0 моль аргона (почти идеального одноатомного газа). В начальный момент времени этот газ находится в точке *a*; точки *b* и *c* лежат на изотерме при $T = 423$ К. Процесс *ab* протекает при постоянном объеме, процесс *ac* – при постоянном давлении. а) Обходится ли цикл по часовой стрелке или против нее? б) Чему равен КПД этого двигателя?

5. (III) Действие двигателя внутреннего сгорания (рис. 21.3) можно приближенно представить как обратимый цикл, называемый *циклом Отто*, который показан на рис. 21.15. Участки цикла *ab* и *cd* соответствуют постоянному

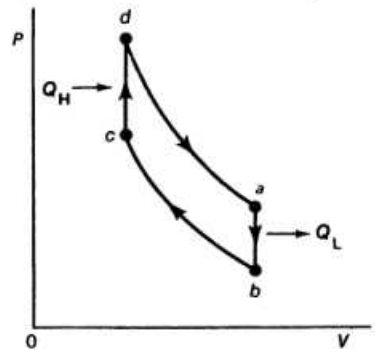



Рис. 21.15.

объему, а участки *bc* и *da* являются адиабатическими. а) Какие из этих участков соответствуют стадиям сжатия, сгорания газов, рабочего хода и выпуска в двигателе внутреннего сгорания? (На диаграмме стадия впуска не изображена.) б) Покажите, что если в качестве рабочего тела используется идеальный газ, то (идеализированный) КПД двигателя дается выражением

$$e = 1 - \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^{1-\gamma},$$

где $\gamma$ - отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (разд. 20.4 и 20.5). в) Определите КПД двигателя при степени сжатия $V_b/V_c = 6{,}0$, считая рабочее тело двухатомным (идеальным) газом (например, $N_2$ и $O_2$). г) Происходит ли теплообмен в цикле Отто при постоянной температуре так же, как в цикле Карно (разд. 21.5)? Можно ли использовать выражение (21.3) для обратимого цикла Отто? д) Реальное значение КПД двигателя внутреннего сгорания меньше, чем указанные выше. Какие факторы способствуют этому?

6. (III) Действие *двигателя Дизеля* можно приближенно представить в виде идеализированного цикла, изображенного на рис. 21.16.

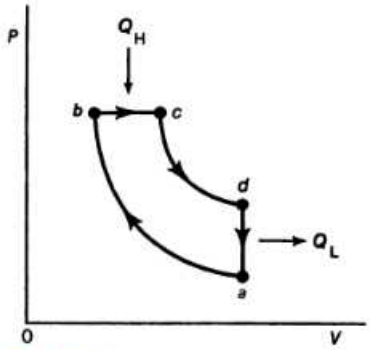



Рис. 21.16.

Воздух засасывается в цилиндр двигателя во время стадии впуска (не изображенной на диаграмме). Затем воздух сжимается адиабатически на участке *ab*. В точке *b* в цилиндр впрыскивается дизельное топливо, которое сразу воспламеняется благодаря очень высокой температуре в цилиндре. Процесс сгорания идет медленно, так что в течение первой части рабочего хода газ расширяется при (почти) постоянном давлении по пути *bc*; остальная часть рабочего хода после загорания смеси является адиабатической (участок *cd*). Участок *da* соответствует стадии выпуска. а) Покажите, что для квазистатического обратимого двигателя, проходящего описанный цикл с идеальным газом в качестве рабочего тела, максимальный КПД записывается в виде

$$e = 1 - \frac{(V_a/V_c)^{-\gamma} - (V_a/V_b)^{-\gamma}}{\gamma[(V_a/V_c)^{-1} - (V_a/V_b)^{-1}]},$$

где $V_a/V_b$ – степень сжатия, а $V_a/V_c$ – степень расширения. б) Вычислите КПД, считая газ идеальным двухатомным (например, $O_2$ или $N_2$) и полагая $V_a/V_b = 15{,}0$ и $V_a/V_c = 5{,}0$.

Раздел 21.4

7. (I) а) Покажите, что работа, совершаемая двигателем Карно, численно равна площади, заключенной внутри цикла Карно на *PV*-диаграмме, показанной на рис. 21.9. (См. разд. 20.1.) б) Обобщите этот результат на любой обратимый цикл.

Раздел 21.5

8. (I) Чему равен максимальный КПД теплового двигателя, работающего между термостатами с температурами 480 и 305 °C?

9. (I) Температура, при которой тепловой двигатель отдает теплоту (температура холодильника), равна 280 °C. Чему должна быть равна температура нагревателя, если КПД цикла Карно должен быть равен 32%?

10. (I) Существует идея создания теплового двигателя, действие которого основано на наличии разности температур между температурами на поверхности океана и на глубине нескольких сотен метров (последняя холоднее на несколько градусов Цельсия). В тропических широтах эти температуры могут быть равны соответственно 25 и 5 °C. Какой максимальный КПД мог бы иметь такой двигатель? Почему его реализация могла бы быть оправдана, несмотря на низкий КПД? Можете ли вы представить себе какие-либо неблагоприятные воздействия такого двигателя на окружающую среду?

11. (II) Двигатель, который работает с КПД, равным половине теоретического максимального значения Карно, имеет температуры нагревателя и холодильника соответственно 525 и 290 °C. Двигатель совершает работу, имея мощность 850 кВт. Какое количество теплоты отдает он в течение часа?

12. (II) Двигатель Карно совершает работу, обладая мощностью 650 кВт, и расходует при этом 1250 ккал теплоты в секунду. Если температура нагревателя равна 590 °C, то чему

равна температура холодильника, при которой отдается избыточная теплота?

13. (II) Тепловой двигатель использует нагреватель при 610 °C и имеет КПД, равный КПД Карно, т.е. 27%. Какой должна быть температура нагревателя, чтобы КПД повысился до 35%.

14. (II) На тепловой электростанции паровые двигатели работают парами, причем теплота, отдаваемая одним из них, почти полностью поглощается другим. Соответствующие температуры нагревателя и холодильника для первого двигателя составляют 670 и 430 °C, а для второго они равны 420 и 280 °C. Если теплота, выделяемая при сгорании угля, равна $2{,}8 \times 10^7$ Дж/кг, то с какой скоростью следует сжигать уголь в топке, чтобы станция давала мощность 450 МВт? Считайте, что КПД каждого двигателя составляет 65% максимального КПД Карно.

15. (II) Для охлаждения двигателей в задаче 14 используется вода. Оцените количество воды, которое необходимо пропустить через станцию за час, если допускается повышение температуры воды не более чем на 7,5 °C.

16. (II) Холодильник Карно (устройство, работающее по обратному циклу Карно) поглощает теплоту из морозильного отделения при температуре −17 °C и отдает его в комнату при температуре 25 °C. а) Какую работу должен совершить холодильник для преобразования 0,50 кг воды при температуре 25 °C в лед при температуре −17 °C? Если мощность на выходе компрессора равна 200 Вт, то в течение какого минимального времени можно заморозить 0,50 кг воды при температуре 25 °C до 0 °C?

17. (II) Холодильный коэффициент $\varkappa$ холодильника определяется как отношение количества теплоты $|Q_L|$, отбираемой от тела с низкой температурой, к работе $W$, необходимой для выполнения этой задачи:

$$\varkappa = |Q_L|/W.$$

а) Покажите, что для идеального (Карно) холодильника

$$\varkappa = T_L/(T_H - T_L).$$

б) Запишите $\varkappa$ через КПД $e$ обратимого теплового двигателя, получаемого обращением холодильного цикла. в) Чему равен холодильный коэффициент, если температура морозильного отделения поддерживается равной −16 °C, в то время как температура компрессора равна 22 °C?

18. (II) Покажите, что если бы два различных адиабатических пути на $PV$-диаграмме пересеклись в одной точке, то их можно было бы соединить изотермой таким образом, что двигатель, работающий по этому замкнутому циклу, нарушал бы второе начало термодинамики. Какой вывод вы можете сделать относительно пересечения двух адиабат в одной точке?

Разделы 21.6 и 21.7

19. (I) Ящик массой 3,0 кг, имеющий начальную скорость 2,2 м/с, скользит вдоль шероховатой поверхности стола и затем останавливается. Оцените полное изменение энтропии Вселенной. Считайте, что все тела находятся при комнатной температуре (293 К).

20. (I) Если 1,00 кг воды при температуре 100 °C преобразуется в пар при той же температуре посредством обратимого процесса, то на сколько изменится энтропия а) воды; б) окружающей среды; в) Вселенной в целом? г) Как изменились бы ваши ответы в том случае, если бы процессы были необратимыми?

21. (I) Алюминиевый стержень проводит теплоту со скоростью 160 кал/с от источника теплоты, поддерживаемого при температуре 280 °C, к большой массе воды, имеющей температуру 22 °C. С какой скоростью увеличивается энтропия в этом процессе?

22. (II) Чему равно полное изменение энтропии, если 2,5 кг воды при 0 °C замерзают и превращаются в лед при той же температуре после соприкосновения с 45 кг льда при температуре −10 °C?

23. (II) Чему равно изменение энтропии системы, если 2,0 кг воды при температуре 20 °C смешиваются с 1,0 кг воды при температуре 80 °C в сосуде с хорошей теплоизоляцией?

24. (II) Покажите, что принцип увеличения энтропии эквивалентен формулировке Кельвина–Планка второго начала термодинамики.

25. (II) Два автомобиля массами 1400 кг каждый, двигаясь со скоростью 30 км/ч навстречу друг другу, сталкиваются и останавливаются. На сколько изменится энтропия Вселенной после этого столкновения?

26. (II) а) Вычислите изменение энтропии 1,00 кг воды при нагревании ее от температуры 0 до 100 °C. б) Изменилась ли энтропия окружения? Если да, то на какую величину?

27. (II) Теплоизолированный алюминиевый сосуд массой 120 г при температуре 20 °C наполняется 210 г воды, имеющей температуру 100 °C. а) Чему равна конечная температура системы? б) На сколько изменится энтропия в результате теплообмена?

28. (II) Две порции идеального газа находятся при одинаковых температурах и давлениях; затем каждая из них обратимым образом сжи-

мается от объема $V$ до объема $V/2$, причем первая сжимается изотермически, а вторая – адиабатически. а) В какой из порций газа конечное давление выше? б) Определите изменение энтропии газа для каждого процесса. в) Чему равно изменение энтропии окружающей среды в каждом из процессов?

29. (II) Один моль газа азота ($N_2$) и один моль газа аргона (Ar) находятся в отдельных теплоизолированных сосудах одного и того же объема при одинаковой температуре. Затем сосуды соединяются друг с другом так, что газы в них (которые предполагаются идеальными) могут перемешиваться. Чему равно изменение энтропии а) системы; б) окружения? в) Ответьте на те же вопросы при условии, что один из сосудов имеет вдвое больший объем, чем другой.

30. (II) а) Почему следует ожидать, что полное изменение энтропии в цикле Карно равно нулю? б) Выполните вычисления, подтверждающие это.

31. (II) Термодинамические процессы можно изображать не только с помощью $PV$- и $PT$-диаграмм, но также и на очень полезной $TS$-диаграмме (температура – энтропия). а) Постройте $TS$-диаграмму для цикла Карно. б) Что представляет собой площадь, ограниченная кривой на этой диаграмме?

32. (II) Реальный тепловой двигатель, действующий между термостатами с температурами 400 и 650 К производит 500 Дж работы в каждом цикле, когда к нему подводится 1400 Дж теплоты. а) Сравните КПД этого реального двигателя с КПД двигателя Карно. б) Вычислите полное изменение энтропии Вселенной за каждый цикл реального двигателя. в) Вычислите полное изменение энтропии Вселенной, когда двигатель Карно действует между термостатами с теми же температурами. г) Покажите, что разность работы, совершаемой этими двумя двигателями за цикл, равна $T_L \Delta S$, где $T_L$ – температура холодильника (400 К), а $\Delta S$ – увеличение энтропии реального двигателя за один цикл (см. также задачу 34 в конце настоящей главы и разд. 21.9).

33. (II) Пусть тепловая электростанция обеспечивает мощность 1000 МВт и использует паровые турбины. Пар подается в турбины подогретым до температуры 520 К и отдает избыточное (неиспользованное) тепло речной воде при температуре 290 К. Будем считать, что турбина работает по обратимому циклу Карно. а) Если скорость расхода речной воды 40 м$^3$/с, то на сколько повысится температура речной воды ниже по течению от электростанции. б) Чему равно приращение энтропии (в расчете на килограмм проходящей речной воды) в Дж/кг·К?

Раздел 21.9

34. (III) Согласно общей теореме, количество энергии, которое становится непригодным для совершения полезной работы в любом процессе, равно $T_L \Delta S$, где $T_L$ – наинизшая температура в процессе, а $\Delta S$ – полное изменение энтропии к концу процесса. Покажите, что это утверждение сохраняет силу в следующих частных случаях: а именно когда а) падающий камень соударяется с поверхностью земли и останавливается, как в примере 21.5; б) идеальный газ свободно расширяется адиабатически; в) теплота $Q$ переходит от термостата с высокой температурой $T_H$ к термостату с низкой температурой $T_L$. (*Подсказка*: в п. «в» проведите сравнение с двигателем Карно.)

*Раздел 21.10

*35. (II) Представьте себе, что вы периодически встряхиваете в ладони шесть монет и бросаете их на стол. Предложите конструкцию стола, показывающую число микросостояний, соответствующих каждому макросостоянию. Какова вероятность выпадения а) трех «орлов» и трех «решек»; б) шести «решек»?

*36. (II) Вычислите относительные вероятности выпадения следующих суммарных результатов при бросании двух игральных костей: а) 7; б) 11.

*37. (II) а) Вы имеете четыре монеты, обращенные «орлами» вверх; затем вы переворачиваете две из них «решками» вверх. На сколько изменится энтропия системы монет? б) Пусть теперь ваша система насчитывает 100 монет, как в табл. 21.1. Чему равно изменение энтропии этой системы, если первоначально они были перемешаны случайным образом (50 «орлов» и 50 «решек»), а вы раскладываете их таким образом, чтобы все 100 монет лежали вверх «решками»? в) Сравните эти изменения энтропии с обычными термодинамическими изменениями энтропии.

# Ответы к задачам с нечетными номерами

## Глава 1

1. 1%.
3. $(1{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{10}$ см$^2$.
5. а) 1 МВ; б) 1 мкм; в) $40 \cdot 10^6$ сут; г) 2 кг; д) 2 нс.
7. 1 км $= 10^{13}$ Å.
9. $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ м.
11. а) $9{,}5 \cdot 10^{15}$ м; б) $6{,}3 \cdot 10^4$; в) 7,2 а. е./ч.
13. м/с$^4$, м/с$^2$.
15. $T \sim \sqrt{m/k}$.

## Глава 2

1. 50 м.
3. а) 38 м/мин; б) 0.
5. а) $t = 0$ до $t = 20$ с; б) $t \approx 28$ с; в) $t \approx 37$ с; г) меняет направление.
7. 920 км/ч.
9. 3500 автомобилей в час.
11. а) 13 м/с; б) 4,5 м/с в направлении от хозяина.
13. а) 7,5 м, 10,8 м, 11,9 м; б) 2,2 м/с; в) 2,2 м/с, 0 м/с.
15. 3,3 мин, 5,0 км; 25 с, 0,62 км.
17. 4,2 м/с.
19. а) $24\,Bt$; б) $A + 300B$, $120B$; в) $A - 3\,Bt^{-4}$.
21. а) при $t$ (с) = 0,12; 0,37; 0,62; 0,87; 1,25; 1,75 и т. д.; $v$ (м/с) = 0,44; 1,40; 2,40; 3,52; 5,36; 7,86; 10,48; 13,14; 15,90; 18,68; 21,44; 23,86; 25,92; 27,80; б) при $t$(с) = 0,06; 0,25; 0,50; 0,75; 1,06; 1,50; 2,00 и т. д.; $a$ (м/с$^2$) = 3,52; 3,84; 4,00; 4,48; 4,84; 5,00; 5,24; 5,32; 5,52; 5,56; 5,52; 4,84; 4,12; 3,76.
23. $-2{,}6$ м/с$^2$.
25. 391 м.
27. а) 170 м; б) 14 с; в) 24 м, 21 м.
29. $14g$.
31. а) 48 м; б) 33 м.
33. б) 3,27 с.
37. 108 км/ч.
39. а) 3,6 с; б) 36 м/с.
41. 6,4 м/с.
43. 5,8 с.
45. $-14$ м/с$^2$.
49. а) 4,8 с; б) 37 м/с.
51. а) 8,43 м/с; б) 0,93 или 2,65 с; в) первый относится к подъему вверх, второй - к падению вниз.
53. 56 м.
55. 9,1 м/с.
59. 140 м.
61. а) $3{,}2(e^{2t} - 1)$; б) $1{,}6(e^{2t} - 1)$; в) $a = 2v + 6{,}4$; г) $2{,}1 \cdot 10^3$ м, $4{,}3 \cdot 10^3$ м/с.
63. а) $v = (1 - e^{-kt})g/k$; б) $g/k$.

## Глава 3

1. Длина результирующего вектора около 6,3 м; он направлен на юг под углом 5° к направлению на восток.
5. 1,5.
7. а) 843 км/ч на север, 537 км/ч на запад; б) 2530 км на север, 1610 км на восток.
9. (7, 4, 5), 9,5.
11. (25 м, 18 м, 36 м), $|\mathbf{D}| = 47$ м.
13. а) 6,7, 27°; б) 4,7, 122°; в) 7,8, 63°; г) 8,6, 173°.
15. 10,5 км/ч.
17. $v_T/\operatorname{tg}\theta$.
19. 16,0 км/ч.
21. а) 93 м; б) 110 с.
23. 32 км/ч, 48° к северу от направления на запад.
25. 43,5° к северу от направления на восток.
27. Лодку нужно направить под углом 25° против течения; 37 мин.
29. Парабола в плоскости $xz$ при $y = 6{,}05$.
31. а) 20,0 м/с, 30° к северу от направления на восток; б) 4,44 м/с$^2$, 30° к югу от направления на восток; в) 27,3 м/с, $\mathbf{a} = \text{const}$.
33. а) $(-\sin 3{,}0t\,\mathbf{i} + \cos 3{,}0t\,\mathbf{j})$ (18 м/с);
б) $(-\cos 3{,}0t\,\mathbf{i} - \sin 3{,}0t\,\mathbf{j})$ (54 м/с$^2$);
в) круг радиусом 6,0 м; г) $r = -a/9{,}0$, 180°.
35. 13 м.
37. 10,0 м/с.
39. 12,9 м.
41. 7,1 с.
43. 22 м.
47. $(v_0 \cos\theta_0/g)\,[v_0 \sin\theta \pm (v_0^2 \sin^2\theta_0 - 2gh)^{1/2}]$.
49. а) 60 м; б) 56 м; в) 34 м/с, $-75°$.
51. а) 3,4 м/с, 48°; б) 0,32 м над краем трамплина; в) 10,5 м/с, 77°.

53. $\theta = \phi/2 + \pi/4$.
55. 8,5 м/с, 118°.
57. 0,54 м/с$^2$.
59. $5{,}2 \cdot 10^{-3}$ м/с$^2$.
61. $3{,}36 \cdot 10^{-2}$ м/с$^2$, $3{,}4 \cdot 10^{-3} g$.
63. а) 1,86 м/с; б) 5,50 м/с$^2$.
65. ($a_t$, $a_c$): а) (7,0 м/с$^2$, 0); б) (7,0 м/с$^2$, 25 м/с$^2$); в) (7,0 м/с$^2$, 98 м/с$^2$).

Глава 4

1. 975 Н.
3. 0,020 Н.
5. $3{,}9 \cdot 10^2$ Н.
7. $2{,}1 \cdot 10^4$ Н; 0,82 м.
9. $2{,}0 \cdot 10^2$ Н.
11. Движется с ускорением 1,8 м/с$^2$, направленным вниз.
13. а) 9,6 м/с; б) $3{,}6 \cdot 10^3$ Н вверх.
15. 6,5 Н вверх.
17. а) $7{,}4 \cdot 10^2$ Н; б) $1{,}3 \cdot 10^2$ Н; в) $6{,}5 \cdot 10^2$ Н; г) 0.
19. а) 78 Н; б) $2{,}2 \cdot 10^2$ Н; в) 86 Н.
21. а) 4,4 м/с$^2$; б) 17 Н.
23. 46 Н в верхней веревке; 23 Н в нижней веревке.
25. 3,9 м.
27. а) $g(2y - L)/L$; б) $\sqrt{2gy_0(1 - y_0/L)}$; в) $(2/3) \times \sqrt{gL}$.
29. 0,69.
31. 37 Н, 0,54.
33. $-7{,}84$ м/с$^2$.
35. 10,0 кг.
37. 1,5 м.
39. 26 м/с.
41. б) 37 м; в) 220 м.
43. 12 м/с.
45. 5,4 м/с$^2$.
47. Нет.
49. 1,6 м/с$^2$.
51. а) 26 Н·с/м$^2$; б) 120 Н.
53. Эта сила действует противоположно направлению движения.

Глава 5

1. а) $5{,}90 \cdot 10^{-3}$ м/с$^2$; б) сила гравитационного притяжения Солнца равна $3{,}53 \cdot 10^{22}$ Н.
3. 0,39.
5. а) 0,29 м/с$^2$; б) 7,2 Н.
9. 0,10.
11. 0,16 Н в наивысшей точке траектории и 6,73 Н в наинизшей.
13. а) Наиболее удаленная от оси вращения часть; б) $1{,}1 \cdot 10^3$ об/сут.
15. $6{,}1 \cdot 10^3$ Н вниз вдоль наклонной плоскости дороги.
17. 920 Н.
19. $2{,}64 \cdot 10^3$ км.
21. $3{,}3 \cdot 10^{-8}$ Н по направлению к центру квадрата.
25. $2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг.
27. б) $g$ уменьшается при увеличении $r$; в) 9,49 м/с$^2$.
31. $6{,}5 \cdot 10^3$ м/с.
33. а) 540 Н; б) 540 Н; в) 720 Н; г) 360 Н; д) 0.
35. а) 18 Н к центру Луны; б) $2{,}2 \cdot 10^2$ Н от центра Луны.
37. 1,4 ч.
39. б) $9{,}6 \cdot 10^{26}$ кг.
41. 85 мин.
43. 225 сут.
45. $2{,}96 \cdot 10^4$ м/с, $3{,}06 \cdot 10^4$ м/с.
47. $6{,}0 \cdot 10^{-3}$ м/с$^2$.

Глава 6

1. $2{,}1 \cdot 10^3$ Дж.
3. 46 Н.
5. а) $1{,}8 \cdot 10^3$ Дж; б) $6{,}9 \cdot 10^3$ Дж.
7. а) $3{,}29 \cdot 10^5$ Дж; б) $4{,}5 \cdot 10^5$ Дж.
9. (0,1) $mgh$.
13. 840.
17. $mgy_0$.
25. 31 Дж.
29. $4 \cdot 10^3$ Дж.
31. $6{,}83 \cdot 10^3$ м/с.
33. $2{,}0 \cdot 10^{-18}$ Дж.
35. $2{,}5 \cdot 10^4$ Н/м.
37. 18 м/с.
39. 4,2 м/с, 2,1 м/с.
41. а) $1{,}8 \cdot 10^5$ Дж; б) 22 м/с; в) 3,2 м.
43. 0,56 м.
45. а) 4,85 Дж; б) 0,79 Дж.
47. а) $(1/2)\, k(x^2 - x_0^2)$; б) 0.
49. а) 9,3°; б) 14,8°.

Глава 7

1. $\mathbf{F} = -(2x + 2y)\mathbf{i} - (2x + 8yz)\mathbf{j} - (4y^2)\mathbf{k}$.
3. а) Да, поскольку работа по замкнутому контуру равна нулю; б) $(1/2)\, kx^2 - (1/4)\, ax^4 - (1/5)\, bx^5$.
5. Нет.
7. 7,4 м/с.
9. 3,3 м.
11. а) 21,1 м/с; б) 23,1 м.
13. 24,4 м/с в точке $B$, 10,2 м/с в точке $C$, 18,9 м/с в точке $D$.
15. а) $mg/k$; б) $2mg/k$.
17. а) $7{,}8 \cdot 10^4$ Дж; б) $6{,}1 \cdot 10^2$ Н.
19. $(C/2r_0)(1 - 1/n^2)$.
23. а) 21 м/с; б) 1,2 Н.
25. а) 12 м/с; б) 87 м.
27. а) 0,15 м; б) 1,1 м; в) 0,90 Дж.
33. а) $1{,}78 \cdot 10^{32}$; б) $1{,}78 \cdot 10^{32}$; в) 0.
35. а) $r_3^2 v_0^2/(2GMe - r_3 v_0^2)$; б) $7{,}5 \cdot 10^6$ м.
37. а) $3{,}56 \cdot 10^3$ м/с; б) $3{,}65 \cdot 10^9$ Дж; в) $1{,}12 \times 10^9$ Н; г) $3{,}65 \cdot 10^9$ Дж.

43. $a^2/4b$.
47. а) $1{,}0 \cdot 10^3$ Дж; б) $1{,}0 \cdot 10^3$ Вт.
49. $4{,}1 \cdot 10^2$ Вт.
51. а) $8{,}7 \cdot 10^5$ Дж; б) 61 Вт, $8{,}1 \cdot 10^{-2}$ л. с.; г) 0,54 л. с.
53. 3,4 Вт.
55. 300 Вт.
57. а) 50 м/с; б) $8{,}1 \cdot 10^5$ Вт.
59. а) $-490$ Вт; б) 7,4 кВт; в) 2,4 кВт.

## Глава 8

1. $4{,}84 \cdot 10^{-11}$ м.
3. 1,02 м.
5. 9,4% роста человека.
7. $x_{цм} = 0$, $y_{цм} = 2r/\pi$.
9. $x_{цм} = 0$, $y_{цм} = 4r/3\pi$.
11. а) $4{,}62 \cdot 10^6$ м от центра Земли.
13. а) $7D/3$; б) $5D$.
15. $mv/(m + M)$; шар остановится.
17. $8{,}0\mathbf{i} - 3{,}9\mathbf{k}$.
19. а) 0,75 кг·м/с; б) 0,51 кг·м/с.
21. $(-4{,}4\mathbf{i} + 4{,}4\mathbf{j})$ кг·м/с.
23. 1,1 м/с.
25. 14,8 м/с.
27. $3{,}5 \cdot 10^3$ м/с.
29. $(3/2)v_0\mathbf{i} - v_0\mathbf{j}$.
31. а) Нет; б) $-m_2/m_1$; в) $m_2/m_1$; г) не перемещается; д) трение создает внешнюю силу, которая влияет на траекторию движения.
33. а) 7,4 и 5,0 км/с в первоначальном направлении; б) $6{,}8 \cdot 10^5$ Дж.
35. 130 Н, нет.
37. а) 0,17 м/с; б) $9{,}4 \cdot 10^2$ Н; в) энергия космонавта 470 Дж, энергия станции 32 Дж.
39. $1{,}9 \cdot 10^3$ Н.
41. а) 4,5 Н·с; б) 75 м/с.
43. 52 м.
45. 3,0 и 2,0 м/с соответственно.
47. $2m$.
49. а) $-4{,}2$ м/с, 4,2 м/с; б) высота равна 0,90 м.
51. а) 1,00; б) 0,890; в) 0,286; г) 0,019.
53. а) 0,43 м; б) $-2{,}1$ м/с, 5,9 м/с; в) да.
55. В положительном направлении оси $x$, 4,8 м/с, 3,0 м/с.
61. $4{,}1 \cdot 10^5$ м/с, 60°.
63. $6{,}4 \cdot 10^{-10}$ Дж.
65. а) $2{,}5 \cdot 10^{-16}$ м/с; б) $1{,}7 \cdot 10^{-17}$; в) $1{,}9 \times 10^{-7}$ Дж.
67. 1800 Дж, 2700 Дж.
69. 141°.
71. 0,89 л. с.
73. а) $[6{,}00 \cdot 10^4/(4{,}00 \cdot 10^3 + t)]$ м/с, где $t$ выражено в минутах; б) 14,8 м/с, да.
75. 86 кг/с.
77. 7,0 с.

## Глава 9

1. 3,4 км.
3. а) 210 рад/с; б) 21 м/с.
5. $L/2$, $L/2$.
7. 460 м/с, 300 м/с.
9. а) $-280$ рад/с; б) $-340$ рад/с$^2$; в) $5{,}0 + 6{,}0t - 18{,}0t^3$; г) $6{,}0 - 54{,}0t^2$; д) $-463$ рад/с, $-480$ рад/с$^2$.
11. а) 6,4 рад/с$^2$; б) 90 м/с$^2$, 1,3 м/с$^2$.
15. а) 6,5 с; б) 0,53 рад/с$^2$.
17. а) $-1{,}5$ рад/с; б) 20 с.
19. а) Влево вдоль оси, вверх; б) 75 рад/с, на 37° выше горизонтали; в) $\omega_1\omega_2 = 2700$ рад/с$^2$, перпендикулярно $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.
21. 367 **k**.
23. $4Ms^2$.
25. 0,16 кг/м$^2$.
27. а) 3,5 кг·м$^2$; б) 0,024 Н·м.
29. 0,19 м.
31. $8{,}7 \cdot 10^4$ Н·м.
33. $Mg\sqrt{h(2R_0 - h)}/(R_0 - h)$.
35. $9{,}2 \cdot 10^3$ об, 110 с.
37. а) 0,26 м/с$^2$, б) 0,066 Н·м.
39. а) 150 рад/с$^2$; б) 1100 Н.
41. 0,15 кг·м$^2$.
45. а) $(1/2)MR_0^2$; б) $(3/2)MR_0^2$.
47. $(1/2)M(R_1^4 + R_2^4)/(R_1^2 + R_2^2)$.
51. $Ms^2/6$.
53. а) 2,6 кг·м$^2$/с; б) 0,37 Н·м.
55. а) $\Delta L = 0$, $\Delta I > 0$, следовательно, $\Delta\omega < 0$; б) 1,5.
57. 0,040 рад/с.
59. $M/2$.
61. $2{,}2 \cdot 10^4$ Дж.
63. 156 л. с.
65. 54 л. с.
67. 12 м/с.
69. б) $2{,}2 \cdot 10^3$ рад/с; в) 23 мин.
71. а) 3,4 м; б) 4,0 с.
73. а) $(1/2)mv_1^2[(R_1/R_2)^2 - 1]$; б) да.
75. 0,056.
77. а) 5,7 м/с; б) 15,8 Дж; в) 0,9 Дж; г) 5,3 м/с, 16,7 Дж, 0.

## Глава 10

9. а) $4{,}5\mathbf{j} + 7{,}8\mathbf{k}$; б) нет, только результирующий момент сил (который включает момент силы реакции со стороны опор) пропорционален угловому ускорению $\boldsymbol{\alpha}$.
13. а) $mgd$; б) $mgdt$.
15. а) $L^2\omega^2[(7/9)m + (1/6)M]$; б) $\omega L^2[(14/9)m + (1/3)M]$.
17. $8{,}2 \cdot 10^{-6}$.
19. Центр масс движется с линейной скоростью 21 м/с, угловая скорость вращения относительно центра масс 80 рад/с.

21. б) 36°; в) 4,2 м.
23. $\omega^2 \sin\theta\cos\theta\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)/d$.
25. а) $5{,}1\cdot 10^2$ Н на каждую; б) на диаметре, проходящем через ось вращения, и на расстоянии 18 см по другую сторону от центра.
27. $3{,}3\cdot 10^{-4}$ кг·м$^2$.
29. 44 рад/с.

Глава 11

1. 0,88 Н.
3. 72 кг.
5. а) $2{,}0\cdot 10^2$ Н в сторону руки и 27 Н вниз; б) $1{,}7\cdot 10^3$ Н в сторону руки и 340 Н вниз.
7. Вверху: 43 Н к шарниру и 64 Н вверх; внизу: 43 Н от шарнира к двери и 64 Н вверх.
9. а) −1800 Н, 2400 Н; б) −2100 Н, 3000 Н.
11. 390 Н.
13. 0,84 м от макушки.
15. $T_1 = 4{,}55mg$, $T_2 = 4{,}97mg$; $h = 158$ м.
17. а) 160 Н вверх, 29 Н к стене; б) 0,26.
21. а) Да; б) 140 км/ч.
23. 72 Н.
25. а) опрокинется; б) 0,50 м.
27. а) $F_m = 1{,}5\cdot 10^3$ Н, $F_{Jx} = 0{,}51\cdot 10^3$ Н, $F_{Jy} = 2{,}4\cdot 10^3$ Н; б) $F_m = 1{,}72\cdot 10^3$ Н, $F_{Jx} = 0{,}59\cdot 10^3$ Н, $F_{Jy} = 2{,}42\cdot 10^3$ Н.
29. а) $1{,}5\cdot 10^5$ Н/10$^2$; б) $2{,}9\cdot 10^{-6}$; в) $3{,}1\cdot 10^{-5}$ м.
31. $9{,}9\cdot 10^7$ Н/м$^2$, или 990 атм.
33. $1{,}0\cdot 10^7$ Н/м$^2$.
35. а) 93 Н·м.
37. $2{,}7\cdot 10^{-5}$ м$^2$.
39. а) $1{,}1\cdot 10^9$ Н/м; б) сломается; в) $2{,}3\cdot 10^7$ Н/м$^2$, не сломается.
41. Всего 15 стоек.
43. 2,0 см.

Глава 12

1. $2{,}7\cdot 10^{11}$ кг.
3. 0,89.
5. $7{,}4\cdot 10^7$ Н/м$^2$, или 740 атм.
7. 0,052.
11. $3{,}3\cdot 10^9$ Н.
13. $5{,}3\cdot 10^{18}$ кг.
15. а) $P_0 + \rho(g + a)h$; б) $P_0 + \rho(g - a)h$; в) $P_0$.
17. $1{,}15\cdot 10^3$ кг/м$^2$.
21. а) $3{,}9\cdot 10^5$ Н вниз; б) $3{,}9\cdot 10^5$ Н вверх.
23. $1{,}4\cdot 10^2$ Н.
25. а) $1{,}41\cdot 10^5$ Н/м$^2$; б) $0{,}98\cdot 10^5$ Н/м$^2$.
27. 140 см$^2$.
29. 13 м.
31. а) $1{,}2\cdot 10^{-3}$ Н; б) 0,19 Н.
33. $1{,}01\cdot 10^3$ кг/м$^3$.
35. $5{,}94\cdot 10^4$ Н.
37. 0,83.
39. 16 Н; нет.
41. $1{,}9\cdot 10^7$ кг.
43. $0{,}95\cdot 10^3$ кг/м$^3$.
45. а) 585 кг/м$^3$; б) $\rho_l = \rho(1 - m'/m)$.
47. 0,57 кг.
49. $1{,}2\cdot 10^3$ Н·м.
51. а) $F/4\pi r$; б) $2{,}1\cdot 10^{-2}$ Н/м.
53. В 3,0 раза (если пренебречь нижней поверхностью).
55. 0,12 м.
57. 1,7 мм.
59. $1{,}5\cdot 10^{-7}$ м (20 °C).

Глава 13

1. 47 см/с.
3. 380 ч.
7. 2,4 атм.
9. $1{,}0\cdot 10^5$ Н вверх.
11. $3{,}6\cdot 10^{-3}$ м$^3$/с.
15. 190 м/с.
19. а) $\sqrt{2gh\rho_м/\rho_ь}$; б) 2,3 м/с.
23. а) $2\sqrt{h_1(h_2 - h_1)}$; б) $h_2 - h_1$.
25. $7{,}0\cdot 10^{-2}$ Па·с.
27. $5{,}7\cdot 10^{-4}$ м$^3$/с.
29. 0,96 Па/см.
31. 0,93 м.
33. 16 см.
39. а) $5{,}0\cdot 10^{-3}$ м$^3$/с; б) 10 м.
41. $10^{-3}$.
43. 9,8 мм/с.
45. 4,6 года.
47. $2(\rho - \rho_l)gr^2/9v_т$.

Глава 14

1. 20 Н/м.
3. а) $(0{,}20\text{ м})\cos(4{,}2t)$; б) 6,2 см.
5. 3,0 Гц.
7. г) $C^4/D^3$; д) $2\pi\sqrt{mD^3/C^4}$.
11. $[1/2\pi)\sqrt{2k/m}$.
13. а) 1,60 с, 0,62 Гц; б) 2,1 м, −4,7 м/с; в) 9,1 м/с, 9,6 м/с$^2$.
15. 1,3 Гц.
19. а) $(0{,}0800\text{ м})\sin[28{,}9(t - 0{,}060)]$; б) наибольшую при $t = (0{,}114 + 0{,}217n)$ с; наименьшую при $t = (0{,}005 + 0{,}217n)$ с, где $n = 0, 1, 2, \ldots$; в) 19,7 Н; г) −7,89 см; д) 2,31 м/с при $t = 0{,}060$ с.
21. а) $A/\sqrt{2}$; б) 1/4, потенциальная; 3/4, кинетическая.
23. 5,5 м/с.
25. 420 м/с.
27. 4,4 см, 1,7 м.
31. 0,248 м.
33. а) 0,83 Гц; б) 0,33 м/с.
35. а) −0,4°; б) −10°; в) 12°.
37. 1/3.
39. а) 23°; б) 7°.

41. $(1/2\pi)\sqrt{2g/3R}$.
43. а) $d^2\theta/dt^2 = -K\theta/I$; б) $2\pi\sqrt{I/K}$.
45. б) 1,7 с (зависит от упрощающих предположений).
51. а) $\pi/2$; б) нуль; максимально.
53. $1{,}65 \cdot 10^8$.
59. а) $x = 2A\cos(\omega t - \pi/4)$, $y = A\cos\omega t$; б) $x = A\cos(\omega t - \pi/4)$, $y = A\cos 2\omega t$.
61. а) $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$, $y = A\cos(\omega t + \phi_0 \pm \pi/2)$, где $A = 5{,}2$ м; б) $f = \omega/2\pi = 0{,}74$ Гц; в) $\phi_0 = 54°$.

Глава 15

1. 3,0 м/с.
3. 0,114 с.
5. 176 Гц.
7. а) 1400 м/с; б) 4100 м/с.
9. 1500 м.
11. б) $2\sqrt{L/g}$
13. а) 1:4; б) 1:2.
21. а) 41 м/с; б) $6{,}4 \cdot 10^4$ м/с$^2$; в) 40 м/с, $8{,}2 \times 10^3$ м/с$^2$.
23. $D = (0{,}020\text{ см})\cos(4{,}77x \pm 1650t + \pi)$.
27. в) $2k_2/(k_1 + k_2)$.
29. 8,6°.
31. в) Энергия полностью кинетическая (шнур движется).
33. 261 Гц.
35. 2,79 м.
39. а) 4,8 см; б) 2,8 см, 8,4 Гц, 80 см/с; в) 80 см/с.
41. 0,85 м/с.
43. 308 Гц.

Глава 16

1. а) 5,76 мм; б) 1,37 мм.
3. 70 м.
5. а) 6,0 м; б) 850 Гц; в) 5100 м/с; г) $3{,}0 \times 10^{-11}$ м.
9. а) 49 дБ, б) $3{,}2 \cdot 10^{-9}$ Вт/м$^2$.
11. 140 дБ.
13. 1,12.
15. 92 дБ.
17. $1{,}6 \cdot 10^{-9}$ Вт.
19. 16 Вт.
21. 45 дБ.
23. 18,1 Вт.
25. 25 Н.
27. 6,7 см.
29. 0,0176.
31. 0,44, 0,20, 0,088.
33. а) 65,0 см; б) 773 Гц.
35. а) 115 обертонов; б) 116 обертонов.
37. а) 0,12, 0,015; б) 9, 20 дБ.
39. 780 Гц.
41. а) $(132{,}0 \pm 0{,}5)$ Гц; б) 0,76%.
43. а) 0,69 м; б) на любом расстоянии.
45. а) 12 Гц; б) 28,6 м.
47. $(\lambda/8d)\sqrt{l^2 + 4d^2}$.
49. $f' = f(v \pm v_0)/(v \mp v_s)$.
51. 1,6 кГц.
53. 0,25 м/с.
55. а) 606 Гц; б) 697 Гц; в) 648 Гц; г) 648 Гц; д) 761 Гц; е) 708 Гц.
59. Давление уменьшится в 1,7 раза относительно исходного. Если бы давление подчинялось закону обратных квадратов, то оно уменьшилось бы в 4 раза.

Глава 17

1. 3,53 кг.
3. 75°.
5. −40°.
7. а) Заниженные; б) 0,024%.
9. −85 °C.
13. Часы уйдут на 5,7 мин вперед.
15. а) $L_2 = L_1[1 + \alpha(T_2 - T_1)]$; б) $L_2 = L_1\left[1 + \int_{T_1}^{T_2}\alpha(T)\,dT\right]$; в) $L_2 = L_1[1 + \alpha_0(T_2 - T_1) + (b/2)(T_2^2 - T_1^2)]$.
19. 1,6 мл.
21. а) Погрузится; б) 0,43%.
23. а) 3,9 см.
25. а) $9{,}4 \cdot 10^7$ Н/м$^2$; б) нет; в) $9{,}4 \cdot 10^6$ Н/м$^2$, да.
27. а) 310 К; б) 300 К; в) 77 К.
29. а) $4{,}3 \cdot 10^3$ К, $1{,}5 \cdot 10^7$ К; б) 6,4%, $1{,}8 \cdot 10^{-3}$%.
31. 1/5.
33. 1,43 кг/м$^3$.
35. 4,21 кг.
37. а) 770 кг; б) 65 кг покинет дом.
39. 8,0%.
41. 12 л.
43. $1/T$.
45. 2,9 см$^3$.
47. $2{,}69 \cdot 10^{25}$ молекул.
49. 270 молекул в кубическом сантиметре.
51. $1{,}8 \cdot 10^3$ Н, сила направлена из сосуда.
53. а) 71,2 мм рт. ст.; б) 157 °C.
55. а) 0,15 К; б) 0,04%.

Глава 18

1. а) $5{,}65 \cdot 10^{-21}$ Дж; б) $3{,}65 \cdot 10^3$ Дж.
3. 1,17.
7. 370 м/с.
9. $1{,}4 \cdot 10^5$ К.
11. а) 460 м/с; б) 27.
13. 0,996.
15. а) 22,5 м/с; б) 24,2 м/с; в) 15 м/с.
19. 0,31 атм.
21. 120 °C.

23. $1{,}74 \cdot 10^3$ Па.
25. 4,8 кг.
27. 29%.
29. а) 52 атм; б) 56 атм.
31. в) $3{,}2 \cdot 10^{-10}$ м.
33. а) $3{,}9 \cdot 10^{-10}$ м; б) $1{,}8 \cdot 10$ м.
35. $\approx 0{,}003$.
37. $1{,}8 \cdot 10^{-3}$ Па.
41. а) $1{,}52 \cdot 10^{-10}$ м; б) $1{,}28 \cdot 10^{-10}$ м.
43. б) $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ м$^2$/с.
45. в) $N_2$, на 7%.

Глава 19

1. $1{,}67 \cdot 10^6$ Дж.
3. 188 кг.
5. 0,36 ккал/кг · °С.
7. 1,00.
9. 430 кал.
11. 39,3 °С.
13. 15,3 °С.
15. 2,8 °С.
17. 0,0593 ккал/кг · °С.
19. 0,334 кг.
21. 0,81 кг (25 моль).
23. 2,7 ккал/кг.
25. 3,0 г.
27. а) 18,4 Вт; б) 5,5 Вт.
29. 250 Вт.
31. 10 °С.
33. $(k_1A_1/l_1 + k_2A_2/l_2)\Delta T$.
39. а) 2,3 К/с; б) 125 °С.

Глава 20

1. а) 13 кДж; б) 18 кДж.
5. $RT\ln(V_2 - b)/(V_1 - b) + (a/V_2) - (a/V_1)$.
7. а) 1,6 кДж; б) 1,6 кДж.
9. $-5{,}5 \cdot 10^5$ Дж.
11. 52 кДж.
13. 30 °С.
17. 0,06%.
19. $4{,}25 \cdot 10^6$ Дж.
21. а) 780 ккал; б) 220 ккал; в) 560 ккал.
23. 158 Дж.
25. а) 696 кал; б) −324 кал; в) 372 кал.
31. а) 295 К начальная и 142 К конечная; б) −15,9 кДж. в) −15,9 кДж; г) 0.
35. б) 280 м/с.

Глава 21

1. 23,7%.
3. 11 км$^3$/ сут, да, 57 км$^2$.
5. а) Сжатие на участке от $b$ к $c$; в) 0,51; г) нет, нет.
9. 540 °С.
11. $1{,}77 \cdot 10^{10}$ Дж/ч.
13. 720 °С.
15. $1{,}4 \cdot 10^8$ кг/ч.
17. б) $1/\varepsilon - 1$; в) 6,8.
19. 0,025 Дж/К.
21. 0,25 кал/с · К.
23. 50 Дж/К.
25. 330 Дж/К.
27. а) 91 °С; б) 2,5 Дж/К.
29. а) 11,5 Дж/К; б) 0; в) 12,5 Дж/К.
31. б) Полный поток теплоты направлен в систему.
33. а) 7,5 К; б) 110 Дж/кг · К.
35. а) 20/64; б) 1/64.
37. а) $2{,}5 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; б) $-9{,}2 \cdot 10^{-22}$ Дж/К.

# Оглавление

Предисловие редакторов перевода 5
Предисловие 7
Указания для студентов и преподавателей 14

**1 Введение 15**

1.1. Наука и творческая деятельность 15
1.2. Модели, теории и законы 19
1.3. Измерение и его погрешность 20
1.4. Единицы измерения, стандарты и системы единиц СИ 22
1.5. Основные и производные величины 24
1.6. Размерности и анализ размерностей 25
1.7. Порядок величины; быстрая оценка 28
Заключение 29
Вопросы 30
Задачи 31

**2 Движение: кинематика в одном измерении 32**

2.1. Средняя путевая скорость 33
2.2. Системы отсчета 34
2.3. Замена единиц измерения 35
2.4. Средняя скорость по перемещению 36
2.5. Мгновенная скорость 37
2.6. Ускорение 40
2.7. Равноускоренное движение 43
2.8. Падающие тела 47
*2.9. Переменное ускорение – графическое исследование и использование математического анализа 51
*2.10. Переменное ускорение; численное интегрирование 55
Заключение 58
Вопросы 59
Задачи 60

**3 Кинематика в двух и трех измерениях 65**

3.1. Векторы и скаляры 65
3.2. Сложение векторов; графические методы 66
3.3. Вычитание векторов и умножение вектора на скаляр 68
3.4. Аналитический метод сложения векторов; составляющие и проекции 69
3.5. Единичные векторы 72
3.6. Относительная скорость 73
3.7. Векторная кинематика 76

3.8. Баллистическое движение 80
3.9. Равномерное вращательное движение 84
3.10. Неравномерное вращательное движение 87
Заключение 87
Вопросы 88
Задачи 89

4 Динамика: законы Ньютона 94

4.1. Сила 94
4.2. Первый закон Ньютона 95
4.3. Масса 97
4.4. Второй закон Ньютона 99
4.5. Законы или определения? 102
4.6. Третий закон Ньютона 103
4.7. Сила тяжести 106
4.8. Применение законов Ньютона; векторы сил 108
4.9. Силы трения и движение по наклонной плоскости 112
4.10. Рекомендации по решению задач 118
Заключение 118
Вопросы 119
Задачи 120

5 Динамика вращательного движения; гравитация и обобщение Ньютона 125

5.1. Динамика движения по окружности 125
5.2. Закон всемирного тяготения Ньютона 132
5.3. Векторная форма записи закона всемирного тяготения Ньютона 136
5.4. Сила тяготения вблизи поверхности Земли 137
*5.5. Гравитационная и инертная масса 140
5.6. Спутники и невесомость 141
5.7. Законы Кеплера и обобщение Ньютона 143
5.8. Виды сил в природе 147
*5.9. Поле тяготения (гравитационное поле) 148
Заключение 150
Вопросы 150
Задачи 151

6 Работа и энергия 156

6.1. Работа, совершаемая постоянной силой 156
6.2. Скалярное произведение двух векторов 159
6.3. Работа, совершаемая переменной силой 160
6.4. Кинетическая энергия и теорема о связи энергии и работы 165
6.5. Потенциальная энергия 170
6.6. Другие виды энергии 175
6.7. Преобразование энергии 175
Заключение 176
Вопросы 177
Задачи 178

## 7 Сохранение энергии 182

7.1. Консервативные силы и теорема о связи работы и энергии 182
7.2. Механическая энергия и ее сохранение 186
7.3. Закон сохранения энергии 192
7.4. Значение закона сохранения энергии 195
7.5. Гравитационная потенциальная энергия и вторая космическая скорость; центральные силы 196
*7.6. Кривые потенциальной энергии; устойчивое и неустойчивое равновесие 199
7.7. Мощность 204
Заключение 207
Вопросы 208
Задачи 209

## 8 Сохранение импульса; системы многих тел и столкновения 214

8.1. Центр масс 214
8.2. Нахождение положения центра масс 217
8.3. Центр масс и поступательное движение 222
8.4. Импульс и его связь с силой 223
8.5. Сохранение импульса 225
8.6. Столкновения и импульс силы 227
8.7. Сохранение импульса и энергии при столкновениях 231
8.8. Упругие столкновения в одном измерении 233
*8.9. Упругие столкновения в двух и трёх измерениях 238
*8.10. Система отсчета, связанная с центром масс (СЦМ) 241
*8.11. Неупругие столкновения 242
*8.12. Системы с переменной массой 244
Заключение 247
Вопросы 248
Задачи 250

## 9 Вращательное движение тела вокруг оси 257

9.1. Угловые переменные 258
9.2. Кинематические уравнения для вращательного движения с постоянным угловым ускорением 262
9.3. Векторные свойства угловых величин 263
9.4. Момент силы 266
9.5. Динамика вращательного движения: момент силы и момент инерции 270
9.6. Вычисление моментов инерции 275
*9.7. Почему катящийся шар замедляется? 279
9.8. Момент импульса и его сохранение 282

9.9. Кинетическая энергия вращения 286
Заключение 291
Вопросы 293
Задачи 294

10 Вращательное движение; общий случай 301

10.1 Векторное произведение 302
10.2. Момент силы 303
10.3. Момент импульса частицы 304
10.4. Момент импульса и момент силы для системы частиц; общий случай движения 306
*10.5. Доказательство общего соотношения между τ и L 308
10.6. Момент импульса и момент силы для твердого тела 310
*10.7. Вращательный дисбаланс 313
10.8. Сохранение момента импульса 315
10.9. Вращающееся колесо 316
*10.10. Вращающийся волчок 318
Заключение 320
Вопросы 321
Задачи 322

11 Равновесие, упругость и разрушение тел 326

11.1. Статика; равновесие сил 326
11.2. Центр тяжести 327
11.3. Условия равновесия 328
11.4. Упругость и модули упругости; напряжение и деформация 333
11.5. Разрушение тел 338
Заключение 340
Вопросы 341
Задачи 341

12 Гидростатика и аэростатика (покоящиеся жидкости и газы) 347

12.1. Плотность вещества 347
12.2. Давление в жидкостях и газах 348
12.3. Атмосферное давление и избыточное давление 352
12.4. Измерение давления 353
12.5. Закон Паскаля 355
12.6. Выталкивающая сила и закон Архимеда 356
*12.7. Поверхностное натяжение 360
*12.8. Капиллярность 363
*12.9. Отрицательное давление и когезия воды 365
Заключение 367
Вопросы 367
Задачи 369

13 Гидродинамика (движущиеся жидкости и газы) 372

13.1. Характеристики течения 372
13.2. Поток жидкости и уравнение не-

разрывности 373
13.3. Уравнение Бернулли 375
13.4. Вязкость 381
*13.5. Ламинарное течение в трубах; формула Пуазейля 383
*13.6. Турбулентное течение в трубах; число Рейнольдса 386
*13.7. Движение тела в жидкости; осаждение частиц и лобовое сопротивление 387
Заключение 389
Вопросы 390
Задачи 390

14 Колебания 395

14.1. Колебания пружины 395
14.2. Гармонические колебания 398
14.3. Энергия гармонического осциллятора 404
14.4. Связь гармонических колебаний с равномерным движением по окружности 406
14.5. Математический маятник 407
*14.6. Физический маятник 410
14.7. Затухающие гармонические колебания 412
14.8. Вынужденные колебания; резонанс 415
*14.9. Сложение двух гармонических колебаний 419
Заключение 420
Вопросы 421
Задачи 422

15 Волновое движение 428

15.1. Характеристики волнового движения 429
15.2. Типы волн 433
15.3. Энергия, переносимая волнами 438
15.4. Математическое описание бегущей волны 440
15.5. Принцип суперпозиции 444
15.6. Отражение волн 445
15.7. Преломление 447
15.8. Интерференция 450
15.9. Дифракция 452
15.10. Стоячие волны; резонанс 454
Заключение 458
Вопросы 460
Задачи 461

16 Звук 465

16.1. Характеристики звука 465
16.2. Математическое описание продольных волн 467
16.3. Интенсивность звука 469
16.4. Источники звука: колеблющиеся струны и столбы воздуха 472
*16.5. Качество звука 477
16.6. Интерференция звуковых волн; биения 478
16.7. Эффект Доплера 481
*16.8. Ударные волны и акустический удар 485
Заключение 487

Вопросы 488
Задачи 489

17 Температура, тепловое расширение и закон идеального газа 493

17.1. Атомы 494
17.2. Температура, термометры и температурные шкалы 497
17.3. Газовый термометр постоянного объема 499
*17.4. Тепловое равновесие; нулевое начало термодинамики 500
17.5. Тепловое расширение 503
*17.6. Тепловые напряжения 506
17.7. Газовые законы и абсолютная температура 507
17.8. Закон идеального газа 510
17.9. Закон идеального газа на молекулярном уровне; число Авогадро 513
17.10. Парциальное давление 514
*17.11. Температурная шкала идеального газа; стандартный термометр 515
Заключение 518
Вопросы 519
Задачи 520

18 Кинетическая теория 524

18.1. Закон идеального газа и температура с микроскопической точки зрения 524
18.2. Распределение молекул по скоростям 530
18.3. Испарение, давление пара и кипение 532
18.4. Влажность 535
18.5. Реальные газы и фазовые переходы; критическая точка 537
*18.6. Уравнение Ван-дер-Ваальса 541
*18.7. Средняя длина свободного пробега 544
*18.8. Диффузия 546
Заключение 552
Вопросы 553
Задачи 554

19 Теплота 558

19.1. Ранние теории теплоты; теплород 558
19.2. Теплота в процессе переноса энергии; механический эквивалент теплоты 559
19.3. Различие между температурой, теплотой и внутренней энергией 561
19.4. Внутренняя энергия идеального газа 562
19.5. Теплоемкость 563
19.6. Теплота фазового перехода 566
19.7. Передача теплоты; теплопроводность 569
19.8. Передача теплоты; конвекция 572
19.9. Передача теплоты; излучение 573
Заключение 576
Вопросы 577
Задачи 578

## 20 Первое начало термодинамики 583

20.1. Работа, совершаемая при изменении объема; изотермический и изобарический процессы 584
20.2. Первое начало термодинамики 586
20.3. Применение первого начала термодинамики для описания некоторых простых термодинамических процессов 589
20.4. Теплоемкости газов и принцип равнораспределения энергии 592
20.5. Адиабатическое расширение газа 597
*20.6. Адиабатический характер звуковых волн 599
Заключение 600
Вопросы 600
Задачи 601

## 21 Второе начало термодинамики 605

21.1. Необходимость в дополнительном начале термодинамики 605
21.2. Тепловые двигатели и холодильники 606.
21.3. Эффективность тепловых двигателей и второе начало термодинамики 610
21.4. Двигатель Карно; обратимые и необратимые процессы 613
21.5. КПД двигателя Карно и второе начало термодинамики 615
21.6. Энтропия 618
21.7. Энтропия и второе начало термодинамики 621
21.8. От порядка к беспорядку 626
21.9. Недоступность энергии 629
*21.10. Статистическая интерпретация энтропии и второе начало термодинамики 630
*21.11. Термодинамическая шкала температур; абсолютный нуль температур 633
Заключение 635
Вопросы 636
Задачи 637

Ответы к задачам с нечетными номерами 641

Учебное издание

Дуглас К. Джанколи

ФИЗИКА
В двух томах
т. 1

Заведующий редакцией проф. А. Н. Матвеев
Зам. зав. редакцией С. М. Жебровский
Научный редактор А. Н. Куксенко
Мл. научные редакторы Р. Х. Зацепина, И. А. Зиновьева
Художественный редактор К. В. Радченко
Технический редактор И. М. Кренделева
Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 6625

Сдано в набор 8.04.88. Подписано к печати 6.04.89. Формат $70 \times 100^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура таймс. Объем 20,5 бум. л. Усл. печ. л. 53,30. Усл. кр.-от 107,25. Уч. изд. л. 47,54. Изд. № 2/5694. Тираж 40 000 экз. Зак. 552. Цена 3 р 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Можайский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. г. Можайск, ул. Мира, 93.

## Фундаментальные постоянные

| Величина | Обозначение | Приближенное значение | Лучшее из известных значений[1)] |
|---|---|---|---|
| Скорость света в пустоте | $c$ | $3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с | $2{,}99792458(1{,}2) \cdot 10^{8}$ м/с |
| Гравитационная постоянная | $G$ | $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² | $6{,}6720(41) \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² |
| Число Авогадро | $N_A$ | $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ | $6{,}022045(31) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ |
| Универсальная газовая постоянная | $R$ | 8,314 Дж/моль·К = = 1,99 кал/моль·К = = 0,082 атм·л/моль·К | 8,31441(26) Дж/моль·К |
| Постоянная Больцмана | $k$ | $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К | $1{,}380662(44) \cdot 10^{-23}$ Дж/К |
| Заряд электрона | $e$ | $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл | $1{,}6021892(46) \cdot 10^{-19}$ Кл |
| Постоянная Стефана–Больцмана | $\sigma$ | $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²·К⁴ | $5{,}67032(71) \cdot 10^{-8}$ Вт/м²·К⁴ |
| Диэлектрическая постоянная | $\varepsilon_0$ | $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/Н·м² | $8{,}85418782(7) \cdot 10^{-12}$ Кл²/Н·м² |
| Магнитная постоянная | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл·м/А | |
| Постоянная Планка | $h$ | $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с | $6{,}626176(36) \cdot 10^{-34}$ Дж·с |
| Масса покоя электрона | $m_e$ | $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг = = 0,000549 а.е.м. = = 0,511 МэВ/$c^2$ | $9{,}109534(47) \cdot 10^{-31}$ кг = = $5{,}4858026(21) \cdot 10^{-4}$ а.е.м. |
| Масса покоя протона | $m_p$ | $1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,00728 а.е.м. = = 938,3 МэВ/$c^2$ | $1{,}6726485(86) \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,007276470(11) а.е.м. |
| Масса покоя нейтрона | $m_n$ | $1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,008665 а.е.м. = = 939,6 МэВ/$c^2$ | $1{,}674954(9) \cdot 10^{-27}$ кг = = 1,008665012(37) а.е.м. |
| Атомная единица массы (а.е.м.) | | $1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг = = 931,5 МэВ/$c^2$ | $1{,}6605655(86) \cdot 10^{-27}$ кг = = 931,5016(26) МэВ/$c^2$ |

[1)] Данные заимствованы из работ: *Cohen E. R., Taylor B. N.* Journal of Physical and Chemical Reference Data, vol. 2 (1973); Particle Data Group, Phys. Lett., vol. 3B (April 1982). Числа в скобках указывают экспериментальную погрешность в последних знаках.

## Другие полезные данные

| | |
|---|---|
| Механический эквивалент теплоты (для 1 кал) | 4,184 Дж |
| Абсолютный нуль температуры (0 К) | −273,15°C |
| Земля: | |
| Масса | $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг |
| Радиус (средний) | $6{,}38 \cdot 10^{6}$ м |
| Луна: | |
| Масса | $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг |
| Радиус (средний) | $1{,}74 \cdot 10^{6}$ м |
| Солнце: | |
| Масса | $2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг |
| Радиус (средний) | $7 \cdot 10^{8}$ м |
| Расстояние от Земли до Солнца (среднее) | $1{,}50 \cdot 10^{11}$ м |
| Расстояние от Земли до Луны (среднее) | $3{,}84 \cdot 10^{8}$ м |

## Греческий алфавит

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Альфа | A | α | Ню | N | ν |
| Бета | B | β | Кси | Ξ | ξ |
| Гамма | Γ | γ | Омикрон | O | o |
| Дельта | Δ | δ | Пи | Π | π |
| Эпсилон | E | ε | Ро | P | ρ |
| Дзета | Z | ζ | Сигма | Σ | σ |
| Эта | H | η | Тау | T | τ |
| Тета | Θ | θ | Ипсилон | Υ | υ |
| Йота | I | ι | Фи | Φ | φ,ϕ |
| Каппа | K | κ | Хи | X | χ |
| Лямбда | Λ | λ | Пси | Ψ | ψ |
| Мю | M | μ | Омега | Ω | ω |

## Значения некоторых чисел

| | |
|---|---|
| $\pi = 3{,}1415927$ | $\sqrt{2} = 1{,}4142136$ |
| $e = 2{,}7182818$ | $\sqrt{3} = 1{,}7320508$ |
| $\ln 2 = 0{,}6931472$ | $\lg e = 0{,}4342945$ |
| $\ln 10 = 2{,}3025851$ | 1 рад = 57,2957795 |

## Множители для десятичных кратных и дольных единиц (СИ)

| Приставка | Обозначение | | Множитель |
|---|---|---|---|
| | русское | международное | |
| Тера | Т | T | $10^{12}$ |
| Гига | Г | G | $10^{9}$ |
| Мега | М | M | $10^{6}$ |
| Кило | к | k | $10^{3}$ |
| Гекто | г | h | $10^{2}$ |
| Дека | да | da | $10^{1}$ |
| Деци | д | d | $10^{-1}$ |
| Санти | с | c | $10^{-2}$ |
| Милли | м | m | $10^{-3}$ |
| Микро | мк | μ | $10^{-6}$ |
| Нано | н | n | $10^{-9}$ |
| Пико | п | p | $10^{-12}$ |
| Фемто | ф | f | $10^{-15}$ |

## Математические знаки и обозначения

| | |
|---|---|
| $\sim$ | пропорционально, приблизительно |
| $=$ | равно |
| $\approx$ | приближенно равно |
| $\neq$ | не равно |
| $>$ | больше |
| $\gg$ | много больше |
| $<$ | меньше |
| $\ll$ | много меньше |
| $\leqslant$ | меньше или равно |
| $\geqslant$ | больше или равно |
| $\Sigma$ | сумма |
| $\bar{x}$ | среднее от $x$ |
| $\Delta x$ | приращение по $x$ |
| $\Delta x \to 0$ | $\Delta x$ стремится к нулю |
| $n!$ | $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(1)$ |

## Производные единицы в системе СИ и их обозначения

| Величина | Единица | Обозначение | | Размерность[1)] |
|---|---|---|---|---|
| | | русское | международное | |
| Сила | ньютон | Н | N | $кг \cdot м/с^2$ |
| Энергия и работа | джоуль | Дж | J | $кг \cdot м^2/с^2$ |
| Мощность | ватт | Вт | W | $кг \cdot м^2/с^3$ |
| Давление | паскаль | Па | Pa | $кг/м \cdot с^2$ |
| Частота | герц | Гц | Hz | $с^{-1}$ |
| Электрический заряд | кулон | Кл | C | $А \cdot с$ |
| Электрический потенциал | вольт | В | V | $кг \cdot м^2/А \cdot с^3$ |
| Электрическое сопротивление | ом | Ом | Ω | $кг \cdot м^2/А^2 \cdot с^3$ |
| Емкость | фарад | Ф | F | $А^2 \cdot с^4/(кг \times \times м^2)$ |
| Индукция магнитного поля | тесла | Тл | T | $кг/А \cdot с^2$ |
| Магнитный поток | вебер | Вб | Wb | $кг \cdot м^2/А \cdot с^2$ |
| Индуктивность | генри | Гн | H | $кг \cdot м^2/(с^2 \times \times А^2)$ |

[1)] За основные единицы приняты кг – килограмм (масса), м – метр (длина), с – секунда (время), А – ампер (электрический ток).

# Переводные множители

## Длина

1 дюйм = 2,54 см
1 см = 0,394 дюйма
1 фут = 30,5 см
1 м = 39,4 дюйма = 3,28 фута
1 миля = 5280 футов = 1,61 км
1 морская миля = 1,85 км
1 ферми = 1 фемтометр (фм) = $10^{-15}$ м
1 ангстрем (Å) = $10^{-10}$ м
1 световой год = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м

## Масса

1 атомная единица массы (а. е. м.) = $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг

## Сила

1 Н = $10^5$ дин

## Время

1 сут = $8{,}64 \cdot 10^4$ с
1 год = $3{,}156 \cdot 10^7$ с

## Энергия и работа

1 Дж = $10^7$ эрг
1 ккал = $4{,}18 \cdot 10^3$ Дж
1 эВ = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж
1 кВт·ч = $3{,}80 \cdot 10^6$ Дж = 860 ккал

## Скорость

1 миля/ч = 1,47 фут/с = 1,61 км/ч = 0,447 м/с
1 км/ч = 0,278 м/с
1 м/с = 3,60 км/ч
1 узел = 1,151 миля/ч = 0,5144 м/с

## Мощность

1 Вт = 1 Дж/с
1 л.с. = 750 Вт
1 л. с. (США) = 746 Вт

## Угол

1 радиан (рад) = 57,30° = 57°18′
1° = 0,01745 рад
1 об/мин = 0,1047 рад/с

## Давление

1 атм = 1,013 бар = $1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м$^2$ = $= 760$ мм рт. ст.
1 Па = 1 Н/м$^2$

# Тригонометрическая таблица

| Угол, град | Угол, рад | Синус | Косинус | Тангенс |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 | 0,000 | 1,000 | 0,000 |
| 1 | 0,017 | 0,017 | 1,000 | 0,017 |
| 2 | 0,035 | 0,035 | 0,999 | 0,035 |
| 3 | 0,052 | 0,052 | 0,999 | 0,052 |
| 4 | 0,070 | 0,070 | 0,998 | 0,070 |
| 5 | 0,087 | 0,087 | 0,996 | 0,087 |
| 6 | 0,105 | 0,105 | 0,995 | 0,105 |
| 7 | 0,122 | 0,122 | 0,993 | 0,123 |
| 8 | 0,140 | 0,139 | 0,990 | 0,141 |
| 9 | 0,157 | 0,156 | 0,988 | 0,158 |
| 10 | 0,175 | 0,174 | 0,985 | 0,176 |
| 11 | 0,192 | 0,191 | 0,982 | 0,194 |
| 12 | 0,209 | 0,208 | 0,978 | 0,213 |
| 13 | 0,227 | 0,225 | 0,974 | 0,231 |
| 14 | 0,244 | 0,242 | 0,970 | 0,249 |
| 15 | 0,262 | 0,259 | 0,966 | 0,268 |
| 16 | 0,279 | 0,276 | 0,961 | 0,287 |
| 17 | 0,297 | 0,292 | 0,956 | 0,306 |
| 18 | 0,314 | 0,309 | 0,951 | 0,325 |
| 19 | 0,332 | 0,326 | 0,946 | 0,344 |
| 20 | 0,349 | 0,342 | 0,940 | 0,364 |
| 21 | 0,367 | 0,358 | 0,934 | 0,384 |
| 22 | 0,384 | 0,375 | 0,927 | 0,404 |
| 23 | 0,401 | 0,391 | 0,921 | 0,424 |
| 24 | 0,419 | 0,407 | 0,914 | 0,445 |
| 25 | 0,436 | 0,423 | 0,906 | 0,466 |
| 26 | 0,454 | 0,438 | 0,899 | 0,488 |
| 27 | 0,471 | 0,454 | 0,891 | 0,510 |
| 28 | 0,489 | 0,469 | 0,883 | 0,532 |
| 29 | 0,506 | 0,485 | 0,875 | 0,554 |
| 30 | 0,524 | 0,500 | 0,866 | 0,577 |
| 31 | 0,541 | 0,515 | 0,857 | 0,601 |
| 32 | 0,559 | 0,530 | 0,848 | 0,625 |
| 33 | 0,576 | 0,545 | 0,839 | 0,649 |
| 34 | 0,593 | 0,559 | 0,829 | 0,675 |
| 35 | 0,611 | 0,574 | 0,819 | 0,700 |
| 36 | 0,628 | 0,588 | 0,809 | 0,727 |
| 37 | 0,646 | 0,602 | 0,799 | 0,754 |
| 38 | 0,663 | 0,616 | 0,788 | 0,781 |
| 39 | 0,681 | 0,629 | 0,777 | 0,810 |
| 40 | 0,698 | 0,643 | 0,766 | 0,839 |
| 41 | 0,716 | 0,656 | 0,755 | 0,869 |
| 42 | 0,733 | 0,669 | 0,743 | 0,900 |
| 43 | 0,750 | 0,682 | 0,731 | 0,933 |
| 44 | 0,768 | 0,695 | 0,719 | 0,966 |
| 45 | 0,785 | 0,707 | 0,707 | 1,000 |

| Угол, град | Угол, рад | Синус | Косинус | Тангенс |
|---|---|---|---|---|
| 46 | 0,803 | 0,719 | 0,695 | 1,036 |
| 47 | 0,820 | 0,731 | 0,682 | 1,072 |
| 48 | 0,838 | 0,743 | 0,669 | 1,111 |
| 49 | 0,855 | 0,755 | 0,656 | 1,150 |
| 50 | 0,873 | 0,766 | 0,643 | 1,192 |
| 51 | 0,890 | 0,777 | 0,629 | 1,235 |
| 52 | 0,908 | 0,788 | 0,616 | 1,280 |
| 53 | 0,925 | 0,799 | 0,602 | 1,327 |
| 54 | 0,942 | 0,809 | 0,588 | 1,376 |
| 55 | 0,960 | 0,819 | 0,574 | 1,428 |
| 56 | 0,977 | 0,829 | 0,559 | 1,483 |
| 57 | 0,995 | 0,839 | 0,545 | 1,540 |
| 58 | 1,012 | 0,848 | 0,530 | 1,600 |
| 59 | 1,030 | 0,857 | 0,515 | 1,664 |
| 60 | 1,047 | 0,866 | 0,500 | 1,732 |
| 61 | 1,065 | 0,875 | 0,485 | 1,804 |
| 62 | 1,082 | 0,883 | 0,469 | 1,881 |
| 63 | 1,100 | 0,891 | 0,454 | 1,963 |
| 64 | 1,117 | 0,899 | 0,438 | 2,050 |
| 65 | 1,134 | 0,906 | 0,423 | 2,145 |
| 66 | 1,152 | 0,914 | 0,407 | 2,246 |
| 67 | 1,169 | 0,921 | 0,391 | 2,356 |
| 68 | 1,187 | 0,927 | 0,375 | 2,475 |
| 69 | 1,204 | 0,934 | 0,358 | 2,605 |
| 70 | 1,222 | 0,940 | 0,342 | 2,748 |
| 71 | 1,239 | 0,946 | 0,326 | 2,904 |
| 72 | 1,257 | 0,951 | 0,309 | 3,078 |
| 73 | 1,274 | 0,956 | 0,292 | 3,271 |
| 74 | 1,292 | 0,961 | 0,276 | 3,487 |
| 75 | 1,309 | 0,966 | 0,259 | 3,732 |
| 76 | 1,326 | 0,970 | 0,242 | 4,011 |
| 77 | 1,344 | 0,974 | 0,225 | 4,332 |
| 78 | 1,361 | 0,978 | 0,208 | 4,705 |
| 79 | 1,379 | 0,982 | 0,191 | 5,145 |
| 80 | 1,396 | 0,985 | 0,174 | 5,671 |
| 81 | 1,414 | 0,988 | 0,156 | 6,314 |
| 82 | 1,431 | 0,990 | 0,139 | 7,115 |
| 83 | 1,449 | 0,993 | 0,122 | 8,144 |
| 84 | 1,466 | 0,995 | 0,105 | 9,514 |
| 85 | 1,484 | 0,996 | 0,087 | 11,43 |
| 86 | 1,501 | 0,998 | 0,070 | 14,30 |
| 87 | 1,518 | 0,999 | 0,052 | 19,08 |
| 88 | 1,536 | 0,999 | 0,035 | 28,64 |
| 89 | 1,553 | 1,000 | 0,017 | 57,29 |
| 90 | 1,571 | 1,000 | 0,000 | ∞ |